Proprietà

sabato 10 maggio 2025 12:56

Parte Intera

$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

Quindi:

- $\lfloor x \rfloor > x - 1$
- $\lfloor x \rfloor \leq x$
- $\lceil x \rceil < x + 1$
- $\lceil x \rceil \geq x$

Radicali

$n\ pari \to \sqrt[n]{a} = b$

dominio: a ≥ 0, b ≥ 0, n ∈ ℕ, n ≥ 1

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$a^{-\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

prodotto	$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$
potenza	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
radice su radice	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$
trasporto fattori fuori	$\sqrt[n]{a^{nq} * b} = a^q * \sqrt[n]{b}$

Logaritmi

$log_e(x) = \ln(x)$

$\log_a(b) = c \to a^c = b$

dominio: $a, b > 0, a \neq 1$

relazione log/espon.	$a^{\log_a(b)} = b$
log prodotto	$\log_a(b * c) = \log_a(b) + \log_a(c)\ \ se\ c > 0$
regola esponente	$\log_a(b^c) = c * \log_a(b)$
log del rapporto	$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)\ \ se\ c > 0$
formula cambio base	$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}\ \ se\ c > 0, c \neq 1$
formula inversione	$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}\ \ se\ b \neq 1$

Valore Assoluto

$|x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$

dominio: (-∞, +domi∞)

$|a * b| = |a| * |b| \quad e \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$|a| \leq b \leftrightarrow -b \leq a \leq b$

$|a| > b \leftrightarrow a \leq -b\ oppure\ a \geq b$

Limiti

sabato 10 maggio 2025 14:01

Limite Finito Tendente a Val. Finito

$\lim_{x \to x_0} f(x) = c$

f(x) tende a c al tendere di x a x_0 se, comunque si sceglie un val $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ dipendente dal ε scelto,
t.c. comunque si consideri $x \in Dom(f)$ in modo che

$0 < |x - x_0| < \delta$

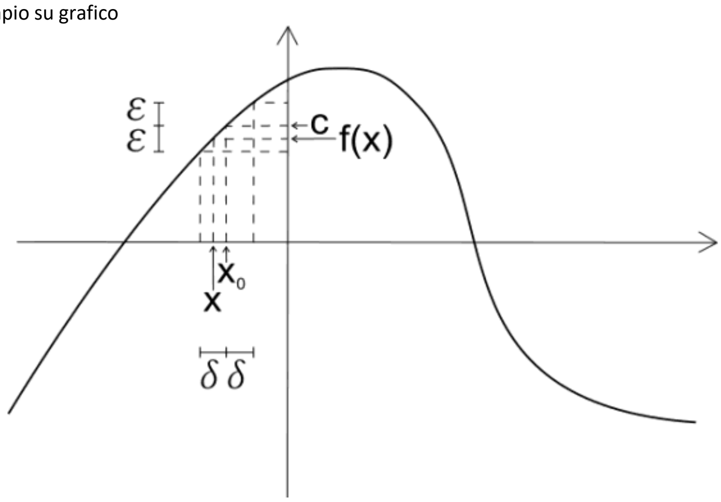
ne consegue che

$|f(x) - c| < \varepsilon$

(le distanze compaiono col val. assoluto perche la x può trovarsi sia a sinistra che a destra di x_0, e il val f(x) può trovarsi sia sopra che sotto c)
Riassunto: Diciamo che c è il limite $x \to x_0$ di f(x) se comunque scegliamo una distanza ε esiste una distanza δ, vincolata da ε,
per la quale comunque scegliamo una $x \in Dom(f) \neq x_0$ con una distanza da x_0 minore del δ,
allora l'ordinata f(x) dista da c meno di ε

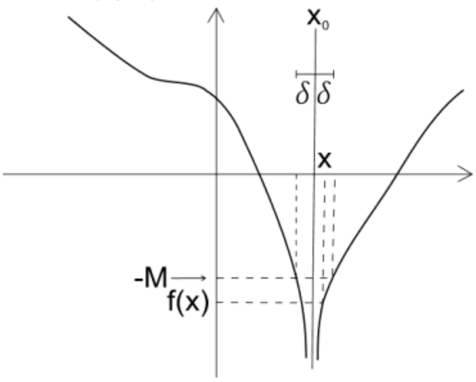
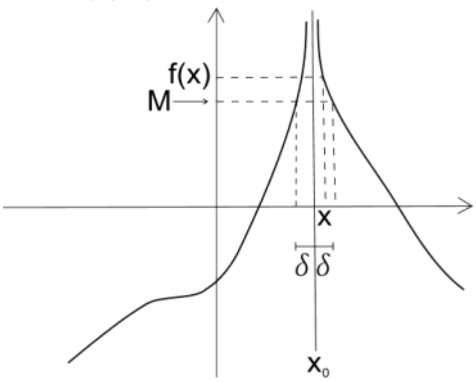
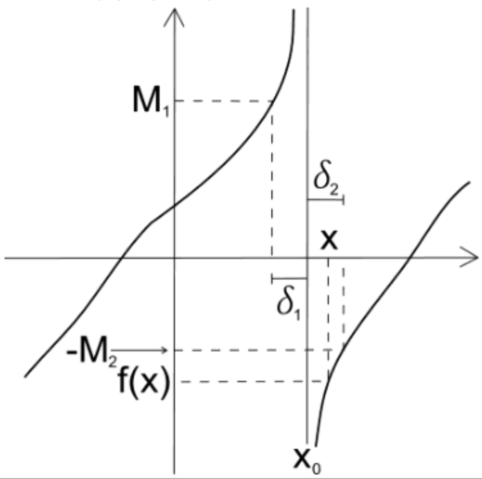
Un limite **esiste finito** se i due limiti sinistro e destro esistono finiti e hanno lo stesso val

Esempio su grafico



Limite Infinito Tendente a Val. Finito

salto le definizioni

Lim +∞ a SX e DX	Lim -∞ a SX e DX	Lim +∞ a SX e -∞ a DX
		

Lim -∞ a SX e +∞ a DX è opposto di Lim +∞ a SX e -∞ a DX

Esiste il:

- **Limite destro**: quando ci si avvicina a x_0 con val. $x \to x_0$

  $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$
- **Limite sinistro**: quando ci si avvicina a x_0 con val $x \to x_0$

  $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$

Es: f(x) = log(x) è definita nel dominio $x \in (0, +\infty)$. Quindi il limite per x tendente a 0 esiste solo da destra (ossia $x \to 0^+$), mentre a sinistra non esiste

- $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 0^-} \log(x) = Indefinito$

Derivate

sabato 10 maggio 2025 15:29

Il **rapporto incrementale** di una funz. f in un punto x_0 è il rapporto tra variazione delle ordinate e la variazione delle ascisse, calcolate da x_0 e considerando un incremento h:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si può anche scrivere:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad dove\ x = x_0 + h$$

Dunque il rapporto incrementale **misura la "salita" o la "discesa"** del grafico dal punto x_0 rispetto a un incremento h

La **derivata** di f(x) in un punto x_0 è il **limite del rapporto incrementale** nel punto x_0 al tendere di h a 0:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

I simboli principali per indicare la derivata di f in x_0 sono:

- $f'(x_0)$
- $\frac{df}{dx}(x_0)$
- $D(f(x))\Big|_{x=x_0}$

Es: f(x) = 4x, derivata nel punto x_0 = 5:

$$f'(5) = \lim_{h\to 0}\frac{4*(5+h)-4*5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h}{h} = 4$$

Es derivata prima: y = x^2, si calcola considerando x_0 come un punto generico

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x_0 + h = 2x_0$$

Quindi la derivata prima di f(x) = x^2 è f'(x) = 2x

Come i limiti, esiste la **derivata destra/sinistra** ($f'_-(x_0)\ e\ f'_+(x_0)$): limite del rapporto incrementale di f(x) in x_0 oer h che tende a 0 da destra/sinistra

Una funzione è **derivabile in un punto** se esiste la derivata prima nel punto, ossia se esistono finiti i limiti sinistro e destro e hanno lo stesso val

Punti di Non Derivabilità

Se controllando la derivabilità in un punto x_0 con:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = c \in \mathbb{R}$$

Se vediamo che anche solo uno dei due limiti **non è finito o non sono uguali tra loro**, allora f non è derivabile in x_0

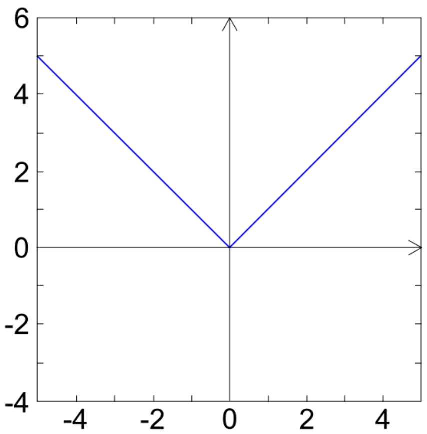
Possiamo avere uno dei seguenti tipi di **punti di non derivabilità:**

- **Punto angoloso**
- **Cuspide**
- **Flesso a tangente verticale**

Punto Angoloso

Se i due limiti sx e dx sono **finiti ma assumono val. diversi**, allora presenta un **punto angoloso**

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = c_1$$
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x} = c_2$$
$$c_1 \neq c_2$$

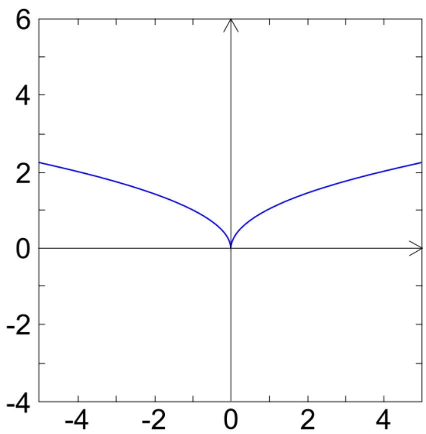


Es con $f(x) = |x|$

Cuspide

Se i due limiti sx e dx sono **infiniti e di segno opposto** allora presenta un **punto di cuspide.** 2 possibilità:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \ e \ \lim_{h\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \quad oppure$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \ e \ \lim_{h\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

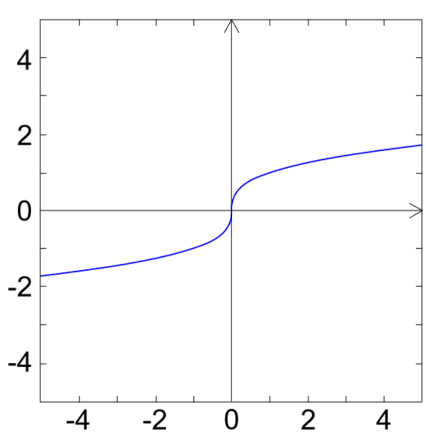


Es con $f(x) = \sqrt{|x|}$

Flesso a Tangente Verticale

Se i due limiti sx e dx sono **infiniti e di segno uguale** allora presenta un **flesso a tangente verticale**

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \ e \ \lim_{h\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad oppure$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \ e \ \lim_{h\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$



Es con $f(x) = \sqrt[3]{x}$

DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI

Derivata delle funzioni elementari	
y = k	y ' = 0
y = x^{α}	y ' = $\alpha \quad x^{\alpha-1}$
y = sen x	y ' = cos x
y = cos x	y ' = - sen x
y = ln x	y ' = $\frac{1}{x}$
y = $\log_a x$	y ' = $\frac{1}{x \ln a}$
y = a^x	y ' = a^x ln a
y = e^x	y ' = e^x
Regole di derivazione	
y = f(x) + g(x)	y ' = f ' (x) + g ' (x)
y = f(x) · g(x)	y ' = f ' (x) · g(x) + f(x) · g ' (x)
y = k · f(x)	y ' = k · f ' (x)
y = $\frac{1}{g(x)}$	y ' = - $\frac{g'(x)}{g^2(x)}$
y = $\frac{f(x)}{g(x)}$	y ' = $\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
y = $\frac{sen\,x}{\cos x} = ¿$ tan x	y ' = $\frac{1}{\cos^2 x}$
y = $\frac{\cos x}{sen\,x} = ¿$ cotan x	y ' = - $\frac{1}{sen^2 x}$
Derivata di funzioni composte	
y = [g(f(x))]	y ' = g ' [f(x)] · f ' (x)
y = $[f(x)]^n$	y ' = $n[f(x)]^{n-1}$ · f ' (x)
y = ln [f(x)]	y ' = $\frac{f'(x)}{f(x)}$
y = $e^{f(x)}$	y ' = $e^{f(x)}$ · f ' (x)
y = $[f(x)]^{g(x)}$	y ' = $\frac{g'(x)}{[f(x)]^{g(x)} \cdot ¿}$ · ln f(x) + g(x) · $\frac{f'(x)}{f(x)}$]
Derivata della funzione inversa	
y = $sen^{-1} x$	y ' = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
y = $\cos^{-1} x$	y ' = - $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
y = $\tan^{-1} x$	y ' = $\frac{1}{1+x^2}$

Massimi e Minimi

I **massimi e minimi relativi e assoluti** di una funz. sono rispettivamente i massimi e i minimi val. che la funzione assume localmente o globalmente

In parole povere un **punto x_0 è di max/min assoluto** se è un ascissa che realizza il **max/min tra tutti i val di f**

Definizione:

Diciamo che $x_0 \in$ Dom(f) è un punto di max (min) **assoluto** se ∀x ∈ Dom(f) risulta che $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$)

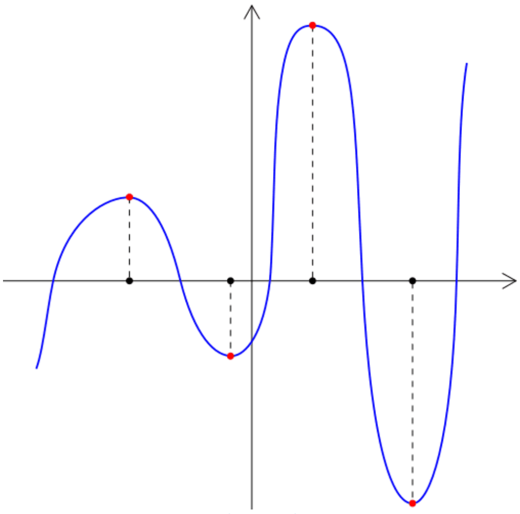
Quindi la condizione è espressa da:

- **Max assoluto:** $\forall x \in Dom(f),\ f(x) \leq f(x_0)$
- **Min assoluto:** $\forall x \in Dom(f),\ f(x) \geq f(x_0)$

In parole povere un **punto x_0 è di max/min relativo** se esiste un **intorno** di x_0 in cui $f(x_0)$ è il max/min val tra quelli assunti dalla funzione nell'intorno.

Definizione:

Diciamo che $x_0 \in$ Dom(f) è un punto di max (min) **relativo** se esiste almeno un **intorno B(x_0, δ)** di raggio δ e centro x_0 t.c. ∀x ∈ B(x0, δ) ∩ Dom(f) risulta $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$)



Da Sx a Dx: max rel, min rel, max ass, min ass

Teorema di Fermat

Questo teorema stabilisce che una funz. che ammette un **max/min relativo** in un punto interno nel dominio e che sia derivabile, ha la **derivata prima nulla nel punto**
In termini formali, Se un punto $x_0 \in$ Dom(f) è un punto di max/min relativo e f è derivabile in x_0, allora si ha che $f'(x_0) = 0$

Teorema di Weierstrass

Una funz. reale di var reale continua su un insieme chiuso e limitato, ammette in esso un max e un min assoluti
In altre parole, se si considera un insieme I ⊆ Dom(f) chiuso e limitato su cui la funz. è continua, allora esistono due punti x_1 e $x_2 \in$ I e due val. m, M ∈ ℝ, t.c.:

$$f(x_1) = M \geq f(x)\ \ \forall x \in I$$
$$f(x_2) = m \leq f(x)\ \ \forall x \in I$$

Teorema di Rolle

Sia f : [a, b] ⊆ Dom(f) → ℝ una funz. continua in [a, b] e derivabile in (a, b). Se la funz. assume lo stesso val. agli estremi dell'intervallo (ossia f(a) = f(b)) allora esiste almeno un punto $x_0 \in$ (a, b) t.c $f'(x_0) = 0$

Teorema di Cauchy

Siano f, g : [a, b] ⊆ Dom(f) → ℝ due funz. continue su [a, b] e derivabili in (a, b). Allora esiste almeno un punto x_0 interno ad (a, b) t.c.:

$$[f(b) - f(a)] * g'(x_0) = f'(x_0)[g(b) - g(a)]$$

(questo risultato è molto tecnico e serve principalmente a dimostrare il teorema di Lagrange)

Es: f(x) = x^3 e g(x) = x. Entrambe le funz. sono continue nell'intervallo [-5, 5] e derivabili in (-5, 5). Troviamo il punto x_0 descritto dal teorema:

$$[125 - (-125)] * 1 = [5 - (-5)] * 3x_0^2$$
$$250 = 30x_0^2$$
$$x_0^2 = \frac{25}{3}$$
$$x_0 = \pm\frac{5}{\sqrt{3}}$$

Teorema di Lagrange

Sia f : [a, b] ⊆ Dom(f) → ℝ una funz. continua in [a, b] e derivabile in (a, b). Allora esiste almeno un punto x_0 interno ad (a, b) t.c.:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$$

(è utile perché ci dice che esiste almeno un punto x_0 in cui la derivata prima vale quanto il rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse agli estremi dell'intervallo)

Es: f(x) = $\log_2(x)$, che è continua su [1, 4] e derivabile in (1, 4), allora:

$$\log_2(4) - \log_2(1) = \frac{1}{x_0 * \ln(2)} * (4 - 1) \ \rightarrow\ 2 - 0 = \frac{1}{x_0} * \frac{3}{\ln(2)} \ \rightarrow\ x_0 = \frac{3}{2 * \ln(2)} \approx 2{,}16$$

f

Integrale

sabato 10 maggio 2025 17:35

Primitiva di una Funzione

Una **primitiva** di f(x) (o antiderivata di f(x)) è una qualsiasi funz derivabile F(x) con derivata che coincide con la funz. assegnata: F'(x) = f(x).

Sia f : [a, b] → ℝ. Una funz. F(x) **derivabile** in [a, b] è **una primitiva** di f(x) se

$$F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in [a,b]$$

La derivata della primitiva F(x) deve coincidere con f(x)

Es: F(x) = $\frac{x^2}{2}$ è una primitiva di f(x) = x, infatti:

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x$$

Poiché la derivata di una costante è 0, **tutte** le funz. **F(x) + c** sono **primitive valide di f(x)**,

Quindi se f(x) ammette una primitiva allora **ne ha infinite** che **differiscono** da F di una costante additiva

Integrale Indefinito

L'insieme di tutte le primitive di una funzione è chiamato **integrale indefinito della funzione**

Definizione:

Sia f una funz. additiva su [a, b]. Si definisce **integrale indefinito** di f su [a, b] l'insieme di tutte le primitive di f in [a, b] e si indica con

$$\int f'(x)dx = F(x) + c \quad dove\ F(x)\ \text{è}\ una\ primitiva\ di\ f$$

(La costante additiva c non deve essere mai omessa)

Proprieta dell'Integrale Indefinito

1) Per ogni **funz. derivabile** vale
$$\int f'(x)dx = f(x) + k$$
2) Per ogni funz che **ammette primitive** vale
$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$$
3) Le prime due proprietà dimostrano:
   a. **Additività:**
   $$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
   b. **Omogeneità:**
   $$\int \alpha * f(x)dx = \alpha * \int f(x)dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Esempi:

1) $\int adx$

   Abbiamo f(x) = a, dobbiamo trovare una funz F(x) la cui derivata sia F'(x) = a:
   $$F'(x) = a \rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = a \rightarrow \frac{d}{dx}[ax] = a \rightarrow F(x) = ax$$
   Ricaviamo che la famiglia di primitive è data da $\int adx = ax + c$

2) $\int xdx$

   Abbiamo f(x) = x, dobbiamo trovare una funz F(x) la cui derivata sia F'(x) = x:
   $$F'(x) = x \rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = x \rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2}\right] = x \rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$$
   Ricaviamo che la famiglia di primitive è data da $\int xdx = \frac{x^2}{2} + c$

3) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

   Procediamo col ragionamento di prima:
   $$F'(x) = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow F(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} * x^{\frac{3}{2}}$$
   Ricaviamo che la famiglia di primitive è data da $\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3} * x^{\frac{3}{2}} + c$

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Il **teorema fondamentale del calcolo integrale** si divide in due parti

- **1° teorema fondamentale del calcolo integrale:** fornisce risultati qualitativi relativi alla funzione integrale
- **2° teorema fondamentale del calcolo integrale** (Teorema Torricelli-Barrow): fornisce una formula esplicita per calcolare gli **integrali definiti**

Definizione di funzione integrale:

Consideriamo f : [a, b] → ℝ, **limitata e integrabile** secondo Riemann in [a, b]. Per ogni x ∈ [a, b] poniamo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

La funz. F viene detta **funzione integrale** di f su [a, b]

Enunciato del 1° teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f : [a, b] → ℝ una funz limitata e integrabile in [a, b]. Allora la funz. integrale F(x) è **continua in [a, b]**

Se inoltre f(x) è una funz. continua su (a, b), allora F(x) è **derivabile in ogni punto** in cui f(x) è continua e risulta che:

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Enunciato del 2° teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia f : [a, b] → ℝ una funz che **ammette una primitiva** G(x) su [a, b]. Allora vale la formula fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(t) = G(b) - G(a)$$

Esempi:

1) $\int_1^2 e^x dx$

   L'integrale ha senso perché f(x) è continua, e quindi integrabile, su [1, 2]. Poiché $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ abbiamo $\int e^x dx = e^x + c$, quindi

   $$\int_1^2 e^x dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e^1$$

2) $\int_0^\pi \cos(x)\, dx$

   L'integrale ha senso perche cos(x) è continua su [0, π]. Poiché $\frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x)$ abbiamo

   $$\int_0^\pi \cos(x)\, dx = [\sin(x)]_0^\pi = \sin(\pi) - \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

N.B: non tutti gli integrali sono calcolabili esplicitamente, quindi conviene tenerli cosi come sono. Es: $\int e^{x^2} dx$

Integrali Notevoli	Forma Generale
$\int f'(x)dx = f(x) + c$	$\int f'(g(x)) * g'(x)dx = f(g(x)) + c$
$\int a * dx = ax + c$	
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} * f'(x)dx = e^{f(x)} + c$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$	$\int a^{f(x)} * f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad se\ n \neq 1$	$\int [f(x)]^n * f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad se\ n \neq 1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln(\lvert x \rvert) + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(\lvert f(x) \rvert) + c$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$	$\int \sin(f(x)) * f'(x)dx = -\cos(f(x)) + c$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$	$\int \cos(f(x)) * f'(x)dx = \sin(f(x)) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \tan(x) + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(f(x))} dx = \tan(f(x)) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$	$\int \frac{1}{1+[f(x)]^2} * f'(x)dx = \arctan(f(x)) + c$
$\int \lvert x \rvert dx = \frac{x * \lvert x \rvert}{2} + c$	(saltata generalizzazione)
$\int \ln(x)dx = x * \ln(x) - x + c$	(saltata generalizzazione)
$\int \log_a(x)\, dx = x * \log_a(x) - x * \log_a(e) + c$	(saltata generalizzazione)
$\int \tan(x)dx = -\ln(\lvert \cos(x) \rvert) + c$	(saltata generalizzazione)
$\int \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + c$	(saltata generalizzazione)

$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(x + \sin(x)\cos(x)) + c$	(saltata generalizzazione)

(molti altri integrali (soprattutto quelli tipo arcsin, cot, cosh, ecc) li ho omessi)

Esempio:

$$\int \left(\frac{x}{2} + \cos(x) + \pi e^x\right) dx = \int \frac{x}{2} dx + \int \cos(x) dx + \int \pi e^x dx = \frac{1}{2}\int x dx + \int \cos(x) dx + \pi \int e^x dx = \frac{1}{2} * \frac{x^2}{2} + \sin(x) + \pi e^x + c = \frac{x^2}{4} + \sin(x) + \pi e^x + c$$

(riportiamo una sola costante additiva, invece che tre, poiché racchiude le costanti additive di ogni integrale)

Integrazione per Parti

L'**integrazione per parti** è utile per calcolare agevolmente integrali, nel caso in cui l'integranda sia data dal prodotto di funzioni in cui una delle due è una derivata facile da integrare

Integrazione per Parti per Integrali Definiti	Integrazione per Parti per Integrali Indefiniti
Siano f, g : [a, b] → ℝ due funz **continue** e supponiamo che le loro derivate siano pure continue su [a, b]. Allora: $$\int_a^b f(x) * g'(x) dx = f(b) * g(b) - f(a) * g(a) - \int_a^b f'(x) * g(x) dx$$ oppure riscritto diventa: $$\int_a^b f(x) * g'(x) dx = [f(x) * g'(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) * g(x) dx$$	Applichiamo la precedente formula sugli integrali indefiniti in un intervallo [a, x] ⊆ [a, b]: $$\int f(x) * g'(x) dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x) dx + c$$

Procedimento da seguire per calcolare un integrale per parti:

1) Riconoscere le due funz che costituiscono l'**integranda come un prod di due funz**
2) Individuare, tra le due, la **derivata g'(x)** e la **primitiva f(x)**.
   a. La derivata da individuare, g'(x), deve **avere una primitiva g(x) immediata da calcolare**
   b. La primitiva f(x) deve **avere una derivata f'(x) che semplificherà il nuovo integrale**.
      Può essere di grande aiuto scrivere a parte il prodotto g(x)*f'(x) che sarà l'integranda del nuovo integrale
3) Applicare la formula.ù

Come capire se e quando integrare per parti:

A) Se l'integranda è il prod di due funz è **probabile** che convenga procedere per parti
B) Se l'integranda è il prod di due funz, e una di queste è la **derivata di una primitiva immediata** (esponenziali, potenze di x, ecc) conviene fare un tentativo
C) Se l'integranda è il prod di due funz e, derivandone una delle due (la candidata f(x)), si ottiene un nuovo integrale semplic e moltiplicando f'(x) per la primitiva g(x) dell'altra, allora si può fare un tentativo

Es:

1) $\int_0^1 x e^x dx$
   - $g'(x) = e^x \rightarrow g(x) = e^x$
   - $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$
   - Otteniamo come prodotto nel nuovo integrale $f'(x) * g(x) = e^x$, e dunque

   $$\int_0^1 x e^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 * e^x dx = 1 * e^1 - 0 * e^0 - [e^x]_0^1 = e - [e^1 - e^0] = 1$$
2) $\int x^2 * \ln(x) dx$
   - $f(x) = \ln(x) \rightarrow f'^{(x)} = \frac{1}{x}$
   - $g'(x) = x^2 \rightarrow g(x) = \frac{x^3}{3}$
   - Otteniamo $f'^{(x)} * g(x) = \frac{1}{x} * \frac{x^3}{3} = \frac{x^2}{3}$, e dunque

   $$\int x^2 * \ln(x) dx = \ln(x) * \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx + c$$

Induzione Mate

domenica 11 maggio 2025 17:07

Il **principio di induzione** è una tecnica per dimostrare la validità di una tesi dalla verifica di due condizioni: la validità nel **caso base** e la validità nel **passo induttivo**.
Si usa quando è richiesta la dimostrazione di una proprietà/teorema/proposizione il cui enunciato è formulato in funzione dei num. naturali.
Quindi se troviamo un enunciato del genere:

"Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale una certa ***proprietà P(n)***

allora nel 99% dei casi la dimostrazione richiede il principio di induzione

Il principio di induzione stabilisce che se valgono le seguenti condizioni:

1) **Caso base:** P(n) è vera per n = 0, cioè P(0) è vera
2) **Passo induttivo:** supponendo che P(n) è vera, ne consegue che P(n+1) è vera. Cioè P(n) $\Rightarrow$ P(n + 1) vera

allora P(n) è **vera tper tutti gli n $\in \mathbb{N}$**

Come usarlo

Supponiamo di dover dimostrare che una proprietà P(n) vale per ogni n $\in \mathbb{N}$, o eventualmente per ogni n $\geq \mathrm{k}$ con $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$.

1) **Caso base**: si esprime P(n) da dimostrare col val. iniziale n = k e si verifica che la proprietà ottenuta è vera. Cioè si verifica che P(k) è vera
2) **Passo induttivo**: si suppone (non dobbiamo dimostrare) che P(n) sia vera.
   Si considera la proprietà P(n + 1) e si dimostra che l'ipotesi per cui P(n) è vera implica che P(n + 1) è vera.
   Attenzione: dobbiamo dimostrare che la validità di P(n) implica la validità di P(n + 1)

Esempio: Vogliamo dimostrare che per ogni n $\geq$ 1 la somma S(n) dei primi n num naturali (S(n) = 1+2+3+…+n) è data da

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$$

Per esprimere la somma dei primi n num naturali conviene usare la sommatoria: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i$

Scriviamo la proprietà in linguaggio simbolico

$$P(n){:}\, S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Vogliamo dimostrare che P(n) è vera per ogni n $\geq$ 1

1) **Caso base**: verifichiamo P(n) per il val iniziale (in questo caso k = 1):
   $$S(1) = \frac{1 * (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
   Abbiamo dimostrato la validità del caso base: "la somma dei primi uno num naturali è uno"
2) **Passo induttivo**: Supponiamo che P(n) sia vera, dunque supponiamo che valga l'ipotesi induttiva $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$
   Dimostriamo che P(n) rende vera P(n + 1), ossia:
   $$S(n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$
   Per dimostrare P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) cerchiamo di esprimere S(n + 1) in funzione di S(n)
   - Ricordiamo che S(n + 1) è la somma dei primi n+1 num. naturali: $S(n+1) = \underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{=S(n)} + (n+1)$
   - Di conseguenza possiamo scrivere nella forma $S(n+1) = S(n) + (n+1)$
   - Siamo quindi riusciti a scrivere S(n+1) come S(n) più "qualcosa".

   Ora usiamo l'ipotesi induttiva e sostituiamo al posto di S(n) la sua espressione
   $$S(n+1) = S(n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$$
   Poiché il risultato coincide con la formula di S(n+1) abbiamo dimostrato che dall'ipotesi induttiva segue la validità del pas so induttivo.

Successioni

domenica 11 maggio 2025 17:07

Una **successione numerica**, indicata con $\{a_n\}_n$ o con altre lettere, è una legge che associa ad ogni num naturale n un numero reale a_n.

Diciamo che una qualsiasi funz f : ℕ → ℝ definita sull'insieme ℕ e a valori in ℝ, è una **successione.**
Quindi si associa ad ogni num. naturale un num reale, secondo un preciso ordine.

Consideriamo una generica successione f : ℕ → ℝ e scriviamone le associazioni e possiamo assegnare un nome a ciascuna immagine:

$f: 0 \to f(0) = a_0$
$f: 1 \to f(1) = a_1$
$f: 2 \to f(2) = a_2$
…
$f: n \to f(n) = a_n$
…

Il **sostegno della successione** è l'elenco ordinato (nel caso delle successioni, l'ordine è importante) di tutte le immagini della successione al crescere di n

$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \subset \mathbb{R}$

dove alcuni elem. potrebbero coincidere tra di loro.
Nel caso in cui potremmo avere una successione definita da un'espressione analitica (y = f(n)) possiamo scrivere la generica immagine $f(n) = a_n$ e indicare il sostegno della successione con uno dei seguenti simboli

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *oppure* $\{a_n\}_n$ *oppure* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *oppure* $(a_n)_n$

dove n prende il nome di **indice della successione**

Es:

1) Successione identicamente nulla è un esempio di successione costante:
   $\{a_n\}_n = \{0\}_n$
   È definita tramite espressione analitica f(n) = 0 ∀n ∈ ℕ, e poiché è assente l'indice n, il suo sostegno avrà lo stesso valore:
   (0, 0, 0, 0, …, 0, …)
2) Consideriamo i sostegni:
   $a = (1, 2, 1, 1, \dots, 1, \dots) \quad b = (2, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$
   Poiché le successioni sono sequenze ordinate, a e b sono due successioni distinte
3) Consideriamo la successione num. definita mediante espressione analitica
   $(a_n)_n = (18n)_n$
   I primi tre termini sono:
   $a_1 = 18 * 1 = 18 \quad a_2 = 18 * 2 = 36 \quad a_3 = 18 * 3 = 54$
   Che si ottengono sostituendo ad ogni occorrenza di n i num 1, 2, 3
4) Consideriamo un'altra successione definita mediante espressione analitica
   $$\{a_n\}_n = \left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}_n$$
   I primi tre termini sono:
   $$a_1 = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5} \quad a_3 = \frac{1}{3^2+1} = \frac{1}{10}$$

Segno della Successione

Una successione è:

- **positiva** se $a_n > 0 \ \ \forall n$
- **non negativa** se $a_n \geq 0 \ \ \forall n$
- **negativa** se $a_n < 0 \ \ \forall n$
- **non positiva** se $a_n \leq 0 \ \ \forall n$
- **nulla** se $a_n = 0 \ \ \forall n$

Successioni Monotone

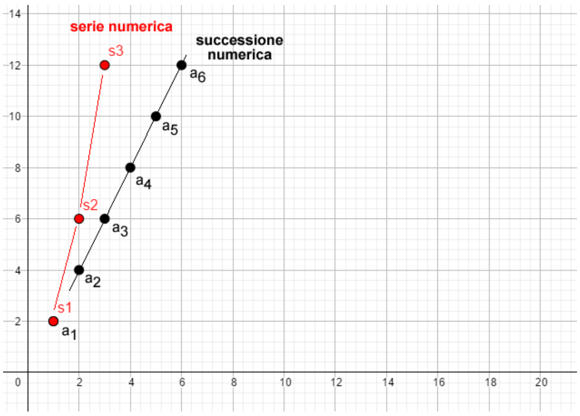
- Una successione è **monotona crescente** se:
  $a_n < a_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
  Al crescere di n otterremmo val. sempre più grandi
- Una successione è **monotona non decrescente** se:
  $a_n \leq a_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
- Una successione è **monotona decrescente** se:
  $a_n > a_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$
  Al crescere di n otterremo val. via via più piccoli
- Una successione è **monotona non crescente** se:
  $a_n \geq a_{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$

Tecniche comuni per lo studio della monotonia:
(usando opportunemente <, ≤, >, ≥ otterremmo tutti i casi)

1) Dalla disuguaglianza $a_n < a_{n+1}$ segue $a_{n+1} - a_n > 0$
2) Se $(a_n)_n$ è una successione **positiva** allora dalla disequazione:
   $$a_n < a_{n+1} \leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$
3) Sia f:[0, +∞) → ℝ una funz reale di variabile reale, continua e derivabile con f'(x)>0 ∀x ∈ (0, +∞) allora la successione $a_n = f(n)$ è crescente

Serie Numerica

sabato 10 maggio 2025 12:51



Sia $(a_n)_n$ una **successione di num reali.**
Diciamo **serie numerica (o somma parziale) sn** la somma dei primi n termini di una successione an.

$$s_1 = a_1;\ \ s_2 = a_1 + a_2; \dots; s_n = a_1 + a_2 + \dots + s_n \ \ oppure\ \ s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Es: $a_n = 2n$ → i primi termini sono 2, 4, 6, 8, …
La serie numerica s_n della successione è:

$$s_1 = 2$$
$$s_2 = 2 + 4 = 6$$
$$s_3 = 2 + 4 + 6 = 12$$
$$s_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$$
…

Pertanto la serie num. s_n delle somme parziali è:

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \dots s_n$$
$$2, 6, 12, 20, \dots, s_n$$

La successione è una sequenza di termini a_k.
La serie è la sequenza delle somme parziali s_k di una successione numerica.
Es: il termine $a_3 = 6$. Il termine s_3 è la somma parziale dei primi tre termini della successione a_n, ossia $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 4 + 6 = 12$

Si parla di **serie infinita** quand n = ∞

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

La serie infinita è uguale al **limite della serie s_n** per n che tende a infinito

$$\lim_{n\to\infty} s_n$$

Il limite della serie determina **il carattere della serie**, ossia la sua proprietà di essere **regolare** (**convergente, divergente**), se non è nessuna delle due allora si dice **serie irregolare**

Confronto tra Sommatorie e Integrali

Se si ha una funz f(x) **positiva, decrescente e continua** per x maggiore o uguale a un certo n allora:

- $\int_n^l f(x)dx \le \sum_{i=n}^{l-1} f(i) \le \int_n^l f(x)dx + f(n)$
- $\sum_{i=n}^{l} f(i) \ge \int_n^{l+1} f(x)dx$

Es:

- Serie armonica da 2 a l con f(x) = $\frac{1}{x}$:
$$\sum_{i=2}^{l} \frac{1}{i} \ge \int_2^{l+1} \frac{1}{x}dx = \ln(l+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{l+1}{2}\right)$$
- f

Carattere della Serie

Il **carattere** di una serie numerica è la proprietà della serie che tende all'infinito di essere:

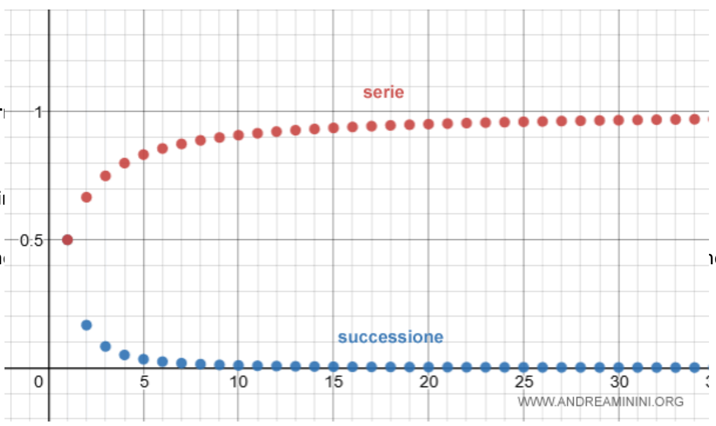
- **Convergente**: Se il limite esiste ed è **un num. finito**
$$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$
Nota: la somma della serie è uguale alla sommatoria della successione a_n da 1 a ∞
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$
- **Divergente**: Se il limite esiste ed è **più o meno infinito**
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$$
- **Indeterminata**: se il limite della serie **non esiste** → **serie ir**

Convergenza

Una serie s_n è **convergente** se il limite per n → ∞ è un **numero fi**

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \ \ e \ \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Nota: Qualsiasi serie convergente è composta da una successione … ne che converge a zero determini una serie convergente.



Es: serie di Mengoli

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

I primi termini della serie sono i seguenti

$$s_1 = \frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$$
$$s_2 = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$s_3 = \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Per n → ∞, la serie s_n **converge a 1**

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

La successione a_n della serie è:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

I termini della successione a_n sono:

$$a_1 = \frac{1}{1*2} = \frac{1}{2}$$
$$a_2 = \frac{1}{2*3} = \frac{1}{6}$$
$$a_3 = \frac{1}{3*4} = 1/12$$

Per n → ∞, la successione a_n **tende a 0**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

Serie Divergente

Una serie s_n è **divergente** se il limite della serie è **infinito** per n → ∞

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$$

Se la successione a_n **non tende a 0** per n → ∞, allora **la serie diverge**

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \;\rightarrow\; s_n \; diverge$$

Es:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{100}$$

I primi termini della serie sono:

$$s_1 = \frac{1}{100} = 0.01$$
$$s_2 = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} = 0.03$$
$$s_3 = \frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \frac{3}{100} = 0.06$$

Per n → ∞, la serie s_n tende a ∞, quindi **è divergente**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{100} = \infty$$

Serie Geometrica

La serie geometrica è:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k \quad dove\ r\ è\ una\ costante$$

Il carattere della serie dipende dalla costante r:

- r ≥ 1 → la serie **diverge**
- -1 < r < 1 → la serie **converge** ed ha per somma $\frac{1}{1-r}$
- r ≤ -1 → la serie è **irregolare**

Serie Armonica

La serie armonica è una serie **divergente** e ha questa forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Serie Armonica Generalizzata

La serie armonica generalizzata è:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k)^p} \quad dove\ p \in \mathbb{R}\ e\ p > 0$$

E il suo carattere dipende da p:

- p ≤ 1 → la serie **diverge**
- p > 1 → la serie **converge**

Criteri di Convergenza

Criterio degli Infinitesimi

Data una successione a termini non negativi a_n, preso un num reale p qualsiasi, se esiste il limite della successione

$$l = \lim_{n\to\infty} n^p * a_n$$

allora la serie a_n è:

- **Convergente** se l ≠ + ∞ ∧ p > 1
- **Divergente** se l ≠ 0 ∧ p ≤ 1

Criterio del Rapporto

Data una successione a termini positivi, se esiste il limite della successione

$$l = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- Se l < 1 → la serie **converge**
- Se l > 1 → la serie **diverge**
- Se l = 1 → inconcludente

Criterio della Radice

Data una successione a termini non negativi a_n, se esiste il limite della radice

$$l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

- Se l < 1 → la serie è **convergente**
- Se l > 1 → la serie è **divergente**