Proprietà degli eventi

sabato 25 gennaio 2025 14:46

Gli argomenti riassunti sono quelli necessari per passare gli esercizi da calcolare/determinare per l'esame.
Quindi non ci saranno Lemmi, spiegazioni dettagliate degli argomenti o argomenti lunghi come legge dei grandi numeri o altro

I simboli utilizzati sono basati sugli appunti di CasuFrost e SimoneLid
La prof e Exyss usano S per indicare lo spazio campionario e x per l'evento elementare
Ω = insieme ambiene o spazio campionario o spazio degli eventi elemntari: insieme contenente tutti i possibili esiti di un fenomeno
Un **evento** è un **sottoinsieme di Ω**, con possibili **esiti** indicati con ω
$|A|$ indica la **cardinalità di un evento** cioè il **numero di esiti contenuti in un evento**

Es: Lancio un dado ($\Omega = \{1, 2, 3, \}$)
L'evento A in cui esca un numero inferiore o uguale a tre si può dire:

- per **enumerazione**: $A = \{1, 2, 3\}$
- per **descrizione**: A = {facce di un dado il cui valore è al massimo 3}
- per **notazione matematica**: $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \leq 3\}$

Consideriamo l'evento $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$

- **Evento unione**: evento in cui accade **evento A oppure evento B**
  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ dove $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A \vee \omega \in B$
  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- **Evento intersezione**: evento in cui accade **evento A e anche evento B**
  $A \cap B = \{2\}$ dove $\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A \wedge \omega \in B$
  $|A \cap B| = |A|*|B| = |AB|$
- **Evento complementare**: evento contenente tutti gli esiti che non sono in un evento
  $A^C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$
  $B - A = B \cap A^C$
  - Evento complementare dell'evento complementare:
    $(A^C)^C = A$
  - **Esclusione**
    $A^C = \Omega - A \Rightarrow A = \Omega - A^C$

Proprietà degli insiemi

- **Proprietà disgiuntiva**
  $A \cap A^C = \emptyset$
- **Proprietà associativa**
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Proprietà distributiva**
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ e $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- **Legge di De Morgan**
  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Probabilità

sabato 25 gennaio 2025 14:11

Probabilità classica

avendo uno spazio campionario Ω e un evento E t.c. E ⊆ Ω, la **probabilità** di tale evento è:

$\mathbb{P}(E) = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ totali\ possibili} = \frac{|E|}{|\Omega|}$

Da questa formula seguono i seguenti **assiomi** della probabilità classica:

- $0 \leq \mathbb{P}(E) \leq 1$
- $\mathbb{P}$(evento impossibile) = $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- $\mathbb{P}$(evento certo) = $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(E^C) = 1 - \mathbb{P}(E)$ con E^C evento complementare dell'evento E (ovviamente $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E^C)$)

È necessario saper **costruire bene** la **probabilità**, cioè comprendere quali sono i casi favorevoli e quelli totali

Esempio:

- Lancio un dado (Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6})
  Quale è la probabilità che esca un numero pari (A = {2, 4, 6}) (A = {ω ∈ Ω | ω è pari}
  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$ (50% di probabilità che esca un num. pari)
- Lancio due monete ($\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ = {T, C}x{T, C} = {TT, TC, CT, CC})
  Quale è la probabilità che esca "una volta testa ed una volta croce" (A = {T} x {C} = {TC, CT}) (A = $\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid (\omega_1 = T \wedge \omega_2 = C) \vee (\omega_1 = C \wedge \omega_2 = T)\}$
  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = 0.5$
- Effettuo 5 lanci di dadi ($|\Omega| = 6^5$). Quale è la probabilità che esca "**almeno un lancio diverso**"?
  Invece che analizzare gli esiti contenuti nell'insieme ambiente (poiché contiene troppi esiti possibili), possiamo **effettuare il calcolo sull'evento complementare**
  $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6) \mid \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
  A^C = {"Lanci tutti uguali a loro"} = {11111, 22222, 33333, 44444, 55555, 66666}
  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{|A^C|}{|\Omega|} = 1 - \frac{6}{6^5} \approx 99.92\%$

Probabilità dell'unione di eventi (Principio Inclusione/Esclusione)

Siano A, B, C ⊂ Ω tre eventi non necessariamente disgiunti, per trovare la probabilità di A ∪ B dovrei fare :

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Con 3 eventi dovrei fare:

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Il **pattern** esteso su n insiemi è:

- **Aggiungiamo n** insiemi singoli
- **Sottraiamo** tutte le intersezioni a **due**
- **Aggiungiamo** tutte le intersezioni a **tre**
- **Sottraiamo** tutte le intersezioni a **quattro**
- … e cosi via

la formula generica è:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n} \bigcap_{k=1}^{i} A_{j_k}$$

È simile alla **cardinalità** dell'**unione di insiemi.**

Ad esempio se vogliamo calcolare la cardinalità di A ∪ B ∪ C, abbiamo

|A ∪ B ∪ C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC|

Per **la cardinalità dell'intersezione degli insiemi** invece è un po' più semplice:

Ad esempio se vogliamo calcolare la cardinalità di A ∩ B ∩ C sappiamo che (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C) = A ∩ B ∩ C, quindi

|A ∩ B ∩ C| = |(A ∩ B) ∩ C| = |A ∩ B| * |C| = |A| * |B| * |C| = |ABC|

Esempio

- Considero un mazzo di carte da 52 carte
  Quale è la probabilità che "pesco un asso o una carta di picche"
  - A = {ω ∈ Ω | ω = asso}, |A| = 4 (poiché ci sono 4 assi in un mazzo)
  - B = {ω ∈ Ω | ω = carta picche}, |B| = 13 (poiché per ogni seme ci sono 13 carte)
  - A ∪ B = {(ω ∈ Ω | ω = asso ∨ ω = picche}
    $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A|+|B|-|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{4+13-1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$
    Oppure per il principio di **inclusione/esclusione**
    $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} - \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

Proprietà Condizionata

Dati due eventi A e B, l'evento B|A (B condizionato da A) si verifica se si verifica B sapendo che si è gia verificato A

$\mathbb{P}(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Se la probabilità è **uniforme** si ha:

$\mathbb{P}(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$

Teorema di Bayes

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) * \mathbb{P}(B)$

Quindi:

$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B) * \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$

Probabilità Totale

Usato nel caso in cui avessimo **probabilità diverse a seconda delle condizioni verificatesi prima**.

Sia A un evento e $\{B_1, \ldots, B_n\}$ una **famiglia di eventi** di Ω che godono delle seguenti proprità:

- Sono a due a due **incompatibili** o mutualmente esclusivi ($B_i \cap B_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$)
- Sono **esaustivi**, cioè ricoprono lo spazio campione Ω ($B_1 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$)
- Hanno probabilità **non nulla** ($\mathbb{P}(B_i) \neq 0 \ \ \forall i$)

La formula **della probabilità totale** è:

La probabilità $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)*\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_n)*\mathbb{P}(B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) * \mathbb{P}(A|B_i)$

Da cui si ricava la formula del **valore atteso totale**: Sia X una var. aleatoria

$E[X] = E[X|B_1]*\mathbb{P}(B_1) + \ldots + \mathbb{P}(X|B_n)*\mathbb{P}(B_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) * \mathbb{P}(X|B_i)$

E da cui ricaviamo la formula per la **probabilità totale condizionata**:

La probabilità $\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(B_i)*\mathbb{P}(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j)*\mathbb{P}(A|B_j)}$

Proprietà delle Probabilità

Considerati due eventi A, B, se:

- Sono **compatibili** (entrambi gli eventi p**ossono accadere nello stesso momento**), allora:
  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
  $\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Sono **incompatibili/disgiunti** (il verificarsi di un evento **impedisce il verificarsi contemporaneo** dell'altro), allora:
  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (in quanto se A, B sono incompatibili allora $\mathbb{P}(A \cap B) = \emptyset$)
  $\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A)$
- Sono **indipendenti** (il verificarsi del primo **non modifica** la **prob**. del secondo), allora:
  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$, oppure
  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
- Sono **dipendenti** (il verificarsi del primo **modifica la prob.** del secondo), allora:
  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B|A)$
- Sono **correlati**
  - **Positivamente**, se:
    $\mathbb{P}(A \cap B) > \mathbb{P}(A)*\mathbb{P}(B)$ o $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$
  - **Negativamente**, se:
    $\mathbb{P}(A \cap B) < \mathbb{P}(A)*\mathbb{P}(B)$ o $\mathbb{P}(A|B) < \mathbb{P}(A)$

Distribuzione Congiunta

Siano X e Y due var. aleatorie $X = \begin{cases} x_1 \ \omega_{x1} \\ x_2 \ \omega_{x2} \\ x_3 \ \omega_{x3} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} y_1 \ \omega_{y1} \\ y_2 \ \omega_{y2} \end{cases}$

La **distribuzione congiunta** è data da:

$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\})$ $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \frac{|X=x, Y=y|}{|\Omega|}$

Possiamo rappresentare la distribuzione congiunta **sotto forma di tabella**:

	x_1	x_2	x_3	Dist Y
y_1	$\mathbb{P}(x_1, y_1)$	$\mathbb{P}(x_2, y_1)$	$\mathbb{P}(x_3, y_1)$	$\mathbb{P}(y_1)$
y_2	$\mathbb{P}(x_1, y_2)$	$\mathbb{P}(x_2, y_2)$	$\mathbb{P}(x_3, y_2)$	$\mathbb{P}(y_2)$
Dist X	$\mathbb{P}(x_1)$	$\mathbb{P}(x_2)$	$\mathbb{P}(x_3)$	1

Dalla distribuzione congiunta possiamo calcolare le **distribuzioni marginali** (singole) di X e Y, sommando le righe per X e le colonne per Y

$\mathbb{P}(X = x_0) = \sum_{y \in Im(Y)} \mathbb{P}(X = x_0, Y = y)$ $\quad \mathbb{P}(Y = y_0) = \sum_{x \in Im(X)} \mathbb{P}(X = x, Y = y_0)$

Per controllare che X e Y esistono bisogna controllare che tutte le probabilità congiunte nella tabella si **sommano a 1**

$$\sum P(X = x, Y = y) = 1$$

Calcolo Combinatorio

venerdì 13 dicembre 2024 10:42

n = *numero di oggetti* k = *numero di posti*	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione r di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • *conta l'ordine*	$P_n = n!$	$P^r_n = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_k!}$
Disposizioni • $n \neq k$ • *conta l'ordine*	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\quad n > k$	$D^r_{n,k} = n^k$
Combinazioni • $n \neq k$ • *non conta l'ordine*	$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $\quad n > k$	$C^r_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Capire la Probabilità

Gli elementi sono **distinti** (diversi l'uno dall'altro)?

- **Si** = **senza ripetizione/reinserimento**
- **No = con ripetizione/reinserimento**

Il **num. di oggetti (n) è uguale al num. di posti (k)?**

- **Si = Permutazione**
  - **Con ripetizione: $P_n = n!$**
  - **Senza ripetizione: $P_n^r = \frac{n!}{r1!*r2!*\cdots*rk!}$**
- **No → Conta l'ordine degli elementi?**
  - **Si = Disposizioni**
    - **Con ripetizione: $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$**
    - **Senza ripetizione: $D^r_{n,k} = n^k$**
  - **No = Combinazioni**
    - **Con ripetizione: $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$**
    - **Senza ripetizione: $C^r_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$**

Le formule del calcolo combinatorio sono usate per determinare il **num. di modi in cui si può organizzare**, **scegliere o disporre** un insieme di elem., a seconda delle regole del problema (ripetizioni e ordine rilevante).

1) **Permutazioni**: **conta l'ordine, il num. di elementi è uguale al num. di posti**
   - **Senza ripetizione**: Calcolo del num. di modi in cui è possibile **disporre tutti gli elementi** di un insieme **in un ordine**, senza che alcun elemento venga ripetuto

     Es casi: ordinare un gruppo di persone, anagramma di una parola con lettere diverse

     $$P_n = n!$$

     dove n è il num. di elementi

     Esempio:

     Quanti anagrammi (anche senza senso) posso fare con la parola LIBRO?
     - n = 5 (lettere), k = 5 (posti per le lettere)
     - **conta l'ordine**: per formare un anagramma
     - **senza ripetizione**: le 5 lettere sono tutte **distinte**
     - $P_n = 5! = 120$ (posso formare 120 parole diverse)
     - Es: LIBRO, LORBI, ROBLI, RILBO, ORILB, ORBIL, …

   - **Con ripetizione:** Calcolo del num. di **disposizioni** di **n elementi** dove alcuni di essi possono **ripetersi un num. specifico di volte**.

     Es casi: anagramma con lettere ripetute (es. ANNA), determinare le disposizioni possibili di oggetti identici e distinti (es. palline di colori diversi con alcuni ripetuti)

$$P_n^r = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\,\dots r_k!}$$

dove r_1, r_2, …, r_k sono le molteplicità degli elem. che si ripetono

Esempio:

Quanti anagrammi (anche senza senso) posso formare con la parola MAMMA?

- n = 5 (lettere), k = 5 (posti per le lettere)
- **conta l'ordine**: per formare l'anagramma
- **con ripetizione**: r_1 = 3 (lettera M), r_2 = A (lettera A); le 5 lettere non sono tutte distinte
- $P_n^r = \frac{5!}{3!*2!} = \frac{120}{6*2} = 10$ (posso formare 10 parole diverse)
- Es: MAMMA, MMAAM, MAAMM, AMMAM, AAMMM, …

2) **Disposizioni**: **conta l'ordine, il num. di elementi è diverso dal num. di posti**
   - **Senza ripetizione**: Calcolo del num. di modi in cui si possono **scegliere e ordinare k elementi** da un insieme di **n elem.**, senza ripetizione

     Es casi: assegnare posti a sedere ad un gruppo di persone scegliendo solo alcuni, formare un gruppo dirigente (es. presidente, vice) da un insieme di candidati, determinare in quanti modi si possono scegliere e ordinare k vincitori da una competizione con n partecipanti

     $$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

     Esempio:

     In quanti modi diversi 5 alunni si possono sedere su 3 sedie numerate?
     - n = 5 (alunni), k = 3 (posti)
     - **conta l'ordine**: le sedie sono numerate quindi conta l'ordine con cui gli alunni si siedono (es BAC ≠ BCA)
     - **senza ripetizione**: gli alunni sono persone distinte, non c'è ripetizione di essi
     - $D_{n,k} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2} = 60$ (gli alunni si possono sedere in 60 modi diversi)
     - Es: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, …

   - **Con ripetizione**: Calcolo del num. di modi in cui si possono **scegliere e ordinare k elememnti** da un insieme di **n elem.**, con ripetizione

     Es casi: determinare in quanti modi posso creare PIN o password con ripetizioni di cifre o lettere, scegliere e ordinare oggetti da un insieme di elementi disponibili infinite volte.

     $$D_{n,k}^r = n^k$$

     Esempio:

     Quanti PIN di 4 cifre possono creare usando le cifre da 1 a 3
     - n = 3 (cifre), k = 4 (posti)
     - **conta l'ordine**: le cifre hanno posizioni ben precise
     - **con ripetizione**: r = 4; ciascuna cifra può ripetersi fino a 4 volte
     - $D^r_{n,k} = 3^4 = 81$ (posso formare 81 cifre di 4 cifre)
     - Es: 123, 121, 111, 313, 222, 321, 132, …

1) **Combinazioni**: **ordine non rilevante, il num. di elementi è diverso dal num. di posti**
   - **Senza ripetizione**: Calcolo del num. di modi in si possono **scegliere k elementi da un insieme di n elem.**, senza ripetizioni e senza considerare l'ordine

     Es casi: scegliere membri di una squadra senza considerare l'ordine, selezionare oggetti da un insieme più grande (es. 3 frutti da un cesto di 10), creare gruppo di studio da un insieme di studenti

     $$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

     Esempio:

     Quanti gruppi di 3 persone si possono formare da un insieme di 5 persone (A, B, C, D, E)?
     - n = 5 (persone), k = 3 (posti)
     - **non conta l'ordine**: non conta l'ordine delle persone (es. BCD = DBC)
     - **senza ripetizione**: le persone sono distinte
     - $C_{n,k} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!*(5-3)!} = \frac{120}{6*2} = 10$ (10
     - Es: ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE

     Coefficiente Binomiale con più val

     $$\binom{n}{k1, k2, \dots km} = \frac{n!}{k1! * k2! * \dots * km!}$$

Es casi: dividere **n oggetti** in **m gruppi**
Esempio:
Su un gruppo di 30 persone divisi in 3 gruppi A, B e C rispettivamente di 12, 12 e 6 persone. Qual è la probabilità che 2 di queste persone siano nello stesso gruppo?

p = $\frac{\binom{28}{10,12,6}+\binom{28}{12,10,6}+\binom{28}{12,12,4}}{\binom{30}{12,12,6}}$, dove:

- $\binom{28}{10,12,6}$ sono i modi per dividere 28 persone (30-2) nei gruppi (si presuppone in questo caso che le 2 persone siano nel gruppo A (12-2 = 10))
- $\binom{30}{12,12,6}$ sono i modi per dividere le 30 persone totali nei 3 gruppi

○ **Con ripetizione**: Calcolo del num. di modi in cui si possono **scegliere**
Es casi: distribuire k oggetti identici tra n contenuti diversi, scegliere combinazione di oggetti con ripetizioni possibili (es. comprare 3 caramelle scegliendo tra 5 gusti diversi),

$$C^r_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k+1}{k}$$

Esempio:
Assegnati due contagocce, il primo contenente 5 gocce di colore bianco e il secondo con 5 gocce di colore nero. Mischiado tra loro 5 gocce scelte tra i due colori, quanti colori diversi si possono formare?

- n = 2 (2 colori), k = 5 (5 gocce)
- **non conta l'ordine**: per la composizione del nuovo colore non conta l'ordine
- **con ripetizione**: per ogni colore si hanno 5 gocce
- $C^r_{n,k} = \frac{(2+5-1)!}{5!*(2-1)!} = \frac{6!}{5!*1} = 6$ (posso formare solo 6 colori diversi : bianco (5 gocce bianche), nero (5 gocce nere) e 4 sfumature di grigio
- Es: BBBBB, NNNNN, BBBBN, BBBNN, BBNNN, BNNNN

Var. Aleatorie

lunedì 27 gennaio 2025 15:54

Proprietà Valore Atteso

Il **valore atteso** di una var aleatoria X indica attorno a quale val. ci si aspetta che cadano i val. assunti da X.
Il calcolo è:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(x)} x \cdot \Im(\{x\})$$

Linearità

Prese due var. aleatorie **indipendenti** X, Y e a, b ∈ ℝ, per **linearità del val. atteso** si ha:

- E(aX) = aE(X), dove a ∈ ℝ
- E(aX ± b) = aE(X) ± b
- E(aX ± bY) = aE(X) ± bE(Y)
- E(X + Y) = E(X) + E(Y)
- E(X * Y) = E(X) * E(Y)

Monotomia

Se X ≤ Y ⇒ E(X) ≤ E(Y)
È anche il caso in cui se $X^n \leq X^{n+k}$ ⇒ $E(X^n) \leq E(X^{n+k})$

Il **valore atteso condizionato** è il val atteso calcolato usando la distribuzione condizionata:

$$E(Y|X = x) = \sum_{y \in Im(Y)} y\mathbb{P}(y|X = x)$$

Proprietà Varianza

La **varianza** misura quanto una var. aleatoria è **dispersa intorno alla sua media**
La **varianza** di una var aleatoria X è una funzione **V** (maggiore di 0), definita come:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \sum_{x \in Im(X)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \Im(\{x\}) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

dove:

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 \cdot P(X = x_i)$$

In cui:

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x \in Im(X)} \sum_{y \in Im(Y)} (xy) \cdot \mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$$

V(aX) = a^2*V(X)

Varianza tra due var. aleatorie:

V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2[E(X*Y) - E(X)*E(Y)]
V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab[E(X*Y) - E(X)*E(Y)]

Esempio

Giochiamo alla lotteria dove possiamo vincere i seguenti premi:

- **10 euro** con prob. **ℙ(X = 10) = 0.3**
- **20 euro** con prob. **ℙ(X = 20) = 0.4**
- **50 euro** con prob. **ℙ(X = 50) = 0.3**

Valore atteso:

E(X) = $\sum_i x_i * \mathbb{P}(X = x_i)$ = (10*0.3) + (20*0.4) + (50*0.3) = 3 + 8 + 15 = 26

In media ci si aspetta di vincere 26 euro per ogni partita

Varianza:

V(X) = $E(X^2)$ - $[E(X)]^2$

- Calcoliamo $E(X^2)$:
  $E(X^2)$ = (10^2*0.3)+(20^2*0.4)+(50^2*0.3) = (100*0.3)+(400*0.4)+(2500*0.3) = 30+160+750 = 940
- Calcoliamo $[E(X)]^2$:
  $[E(X)]^2$ = 26^2 = 676
- Calcoliamo la varianza:

$V(X) = 940 - 676 = 264$

Le vincite variano di 264 rispetto al val. atteso di 26€

Indipendenza

Due var. X, Y sono **indipendenti** se:

$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) * \mathbb{P}(Y = y)$

Se X e Y **sono indipendenti**, vale che:

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Variabili Indicatori

Le var. **indicatori** assumono solo **due valori** e vengono usate per **semplificare il calcolo del valore atteso**.

Sia X una var. aleatoria che conta il num. di volte in cui si verifica un certo evento in un insieme di prove

$$I_i = \begin{cases} 1 \text{ se l'evento } A_i \text{ si verifica} \\ 0 \text{ se l'evento } A_i \text{ non si verifica} \end{cases}$$

Il **val. atteso di I_i** sarà $E[i_i] = \mathbb{P}(A_i)$

La **somma di queste var.** indicatori fornisce il **num. totale di successi** in un esperimento:

$X = I_1 + I_2 + \dots I_n$

$E[X] = E[I_1] + \dots E[I_n] = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$

Esempio

Lancio di un dado

- Lanciamo un dado 10 volte
- Vogliamo contare quante volte esce il num. 3

Definiamo la var. indicatore per il lancio i-esimo:

$$I_i = \begin{cases} 1 \text{ se esce } 3 \text{ nel lancio } i \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Il num. tot. di volte in cui otteniamo 3 è:

$X = I_1 + I_2 + \dots + I_{10}$

Dato che la prob. di ottenere **3** è **$\mathbb{P}(A_i) = 1/6$**, il val. atteso è:

$E[X] = 10*(1/6) \approx 1.67$

Covarianza

La **covarianza** è un val. associato a **2 val. aleatorie** che misura la loro **relazione di dipendenza**

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \begin{cases} 0 & X, Y \text{ indip.} \\ E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) & X, Y \text{ non indip.} \end{cases}$$

In cui:

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x \in Im(X)} \sum_{y \in Im(Y)} (xy) \cdot \mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$$

La varianza invece:

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2[\underbrace{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}_{\text{covarianza}}]$$

Se Cov(X, Y) è **particolarmente grande**, significa che sapendo che **X è grande** allora è **più probabile** che anche **Y è grande**

Se invece è **molto piccola**, indica che X e Y tendono a **variare insieme leggermente** nella stessa direzione ma **potrebbero essere indipendenti** tra loro.

Cov(X, X) = V(X)

Cov(aX, bX) = a*b*V(X)

Cov(aX+bY, Z) = a*Cov(X,Z) + b*Cov(Y, Z)

Cov(X, aY+bZ) = a*Cov(X,Y) + b*Cov(X,Z)

Cov(aX+bY, cW+dZ) = a*c*Cov(X,W) + a*d*Cov(X,Z) + b*c*Cov(Y,W) + b*d*Cov(Y,Z)

Se X e Y sono **indipendenti (Cov(X,Y) = 0)**, per **linearità**:

Cov(aX, bX) = a*b*Cov(X, X) = a*b*V(X)

Cov(aX+bY, cX+dY) = a*c*Cov(X,X) + b*d*Cov(Y,Y) = a*c*V(X) + b*d*V(Y)

Esempio

Abbiamo 2 var. X e Y con la seguente distribuzione congiunta

X	Y	$\mathbb{P}$(X = x, Y = y)
1	2	0.2
1	3	0.3

2	2	0.1
2	3	0.4

1) **Calcolo il val atteso di X e Y** $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$
   - Calcoliamo le **probabilità marginali** di X:

     ℙ(X = 1) = 0.2 + 0.3 = 0.5

     ℙ(X = 2) = 0.1 + 0.4 = 0.5
   - Calcoliamo E(X)

     E(X) = 1 * 0.5 + 2 * 0.5 = 1.5
   - Calcoliamo le **probabilità marginali** di Y:

     ℙ(Y = 2) = 0.2 + 0.1 = 0.3

     ℙ(Y = 3) = 0.3 + 0.4 = 0.7
   - Calcoliamo E(Y)

     E(Y) = 2 * 0.3 + 3 * 0.7 = 2.7

2) **Calcolo di E(X*Y)** $\mathbb{E}[XY] = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} x \cdot y \cdot \mathbb{P}(X = x, Y = y)$
   - Calcoliamo ogni termine:
     - X = 1, Y = 2 ⇒ 1 * 2 * 0.2 = 0.4
     - X = 1, Y = 3 ⇒ 1 * 3 * 0.3 = 0.9
     - X = 2, Y = 2 ⇒ 2 * 2 * 0.1 = 0.4
     - X = 2, Y = 3 ⇒ 2 * 3 * 0.4 = 2.4
   - Sommiamo

     E(X*Y) = 0.4 + 0.9 + 0.4 + 2.4 = 4.1

3) **Calcolo della covarianza** $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

   Cov(X, Y) = 4.1 - (1.5 * 2.7) = 4.1 - 4.05 = 0.05

Per determinare l'indipendenza tra X e Y, bisogna verificare la condizione

ℙ(X = x, Y = y) = ℙ(X = x) * ℙ(Y = y), ∀x ∈ Im(X), y ∈ Im(Y)

Nel nostro caso, verifichiamo l'indipendenza tra X = 1, Y = 2:

ℙ(X = 1, Y = 2) = 0.2

ℙ(X = 1) = 0.2+0.3 = 0.5

ℙ(Y = 2) = 0.1+0.2 = 0.3

Se fossero indipendenti, avremmo:

ℙ(X = 1, Y = 2) = ℙ(X = 1) * ℙ(Y = 2) = 0.5*0.3 = 0.15

Però ℙ(X = 1, Y = 2) = 0.2 $\neq 0.15$, quindi X e Y **non sono indipendenti**

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

Var Note

martedì 7 gennaio 2025 09:31

Riassunto Rapido

Bernoulli X ~ Bern(p) $\mathbb{P}(X=x)=\begin{cases} p, & \text{se } x=1 \\ 1-p, & \text{se } x=0 \end{cases}$	Un singolo **esperimento** con **due esiti** (successo/fallimento).
Binomiale X ~ Bin(n, p) $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$	Conteggio di **successi** in **n prove indipendenti** (con reinserimento).
Ipergeometrica X ~ Hyper(N, m, n) $\mathbb{P}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	Probabilità di estrazione dell'elemento m in **n estrazioni senza reinserimento** in una popolazione di N elem. totali (popolazione finita).
Geometrica X ~ Geom(p) $\mathbb{P}(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$	Conteggio dei **tentativi necessari** per ottenere il **primo successo**.
Binomiale Negativa X ~ BinNeg(r, p) $\mathbb{P}(X=k)=\binom{k-1}{r-1}\cdot p^r\cdot(1-p)^{k-r}$	Conteggio dei **tentativi necessari** per ottenere un **numero fissato di successi**.
Poisson X ~ Poisson(λ) $\mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	Numero di **eventi rari** in un **intervallo fissato** (tempo, spazio, ecc.).
Multinomiale X ~ Multi(n, k, {p_1, …, p_k}) $\mathbb{P}(n_1,n_2,\ldots,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\cdot p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$	Conteggio dei **successi** in **più categorie** con **probabilità associate** (estensione della binomiale).

Bernoulli

Bernoulli si concentra su un **singolo esperimento** con **due possibili esiti: successo (1) o fallimento (0)**
X ~ Bern(p)
Im(X) = {0, 1}

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X=x)=\begin{cases} p, & \text{se } x=1 \\ 1-p, & \text{se } x=0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(X = x) = p^x * (1-p)^{1-x}$ per $x \in \{0, 1\}$

Val. Atteso:

E(X) = p

Varianza:

V(X) = p * (1 - p)

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Esperimenti con **solo esiti binari**, come il lancio di una moneta o un test vero/falso
- Come riconoscere:
  - Devi calcolare la prob. di **successo o insuccesso per un singolo evento**
  - L'esperimento ha **solo due esiti (binario)**

Esempio

Lancio un dado. Qual è la probabilità che esca 6?

- X = 1, se esce 6
- X = 0, in caso contrario

- $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1/6$
- $\mathbb{P}(X = 0) = 1-p = 5/6$

- E(X) = 1/6
- V(X) = 1/6 * (5/6) = 5/36

Binomiale

La Binomiale si concentra sul **num. di successi** in **n prove indipendenti**
X ~ Bin(n, p)
Im(X) = {0, …, n}

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

- $\binom{n}{k}$ è il num. di **possibili successi su n prove**
- **k**: num. **successi**
- **n**: num. **prove**

Val. Atteso:
E(X) = n * p

Varianza:
V(X) = n * p * (1 - p)

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Modelli con **esiti ripetuti**, come test a risposta multipla o controlli qualità
- Hai **n prove indipendenti**, dove ognuna ha solo **due esiti** (**successo/insuccesso**) e vuoi calcolare il **num. di successi**

Esempio

Lancio una moneta **10 volte**. Qual è la probabilità di ottenere **6 teste?**

- **Prove tot:** n = 10
- **Prob. successo**: p = 1/2
- **Num. successi**: k = 6

Formula:

$$\mathbb{P}(X = 6) = \binom{10}{6} * \left(\frac{1}{2}\right)^6 * \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 210 * \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{105}{2^9} = \frac{105}{512}$$

E(X) = 10*1/2 = 5
V(X) = 10*1/2*1/2 = 5/2

Ipergeometrica

La Ipergeometrica si concentra sulla **probabilità di estrazione di un elem. di un certo tipo da un campione di due tipi di elementi (A e B)**.
X ~ Hyper(N, m, n)

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{k}) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- N = num. di elementi totali del campione
- m = num. di elementi del tipo interessato nel campione (A)
- n = num. di elementi estratti senza rimpiazzo (o totale estrazioni effettuate)
- k = num. di elementi estratti del tipo interessato (A)
- $\binom{N}{n}$ è il num. di possibili estrazioni di n elementi dagli elementi totali
- $\binom{m}{k}$ è il num. di possibili estrazioni di k elementi tra gli m del campione A
- $\binom{N-m}{n-k}$ è il num. di possibili estrazioni dei restanti n-k elementi tra gli N-m del campione B

Val. Atteso:
E(X) = $\frac{m*r}{n}$

Varianza:
V(X) = $\frac{m-n}{m-1}(n*p)(1-p)$ dove p = r/m

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Si usa per l'estrazione **senza reinserimento**, dove gli elem. sono **finiti e divisi in due categorie**
- Serve per calcolare il num. di **successi** dell'estrazione di **un** elemento

Esempio

Urna con **10 palline rosse e 20 blu**. Estraggo **5 palline senza reinserirle**. Quale è la prob. di **ottenere 2 rosse?**

- **Palline tot:** n = 30
- **Rosse tot:** m = 10
- **Estrazioni effettuate**: r = 5
- **Probabilità:** p = 5/10 = 1/2

Formula:

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{30-10}{5-2}}{\binom{30}{5}} = \frac{(9*8)(10*19*6)}{29*13*6*7*9} = \frac{1520}{2639}$$

$$E(X) = \frac{10*5}{30} = \frac{5}{3}$$

Geometrica

La Geometrica si concentra sul **num. di prove necessarie (k) per il primo successo (p = 1) in una sequenza di esperimenti**

X ~ Geom(p)

Im(X) = {0, ..., ∞} = ℕ

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

- **k**: num. **prove per il primo successo**

Val. Atteso:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Varianza:

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Analisi di processi **ripetuti fino al successo**, come difetti in una linea di produzione o tempi di attesa
- Utile per calcolare il **num. di prove necessarie** per ottenere il **primo successo,** dove ogni prova ha due esiti (successo/insuccesso)

Esempio

Qual è la probabilità di ottenere la **prima testa al terzo lancio di una moneta?**

- **Probabilità:** p = 1/2
- **Num. prove**: k = 3

Formula:

$$\mathbb{P}(X = 3) = (1/2)^{3-1} * 1/2 = 1/4 * 1/2 = 1/8$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$V(X) = \frac{1-\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

Binomiale Negativa

La Bin. Negativa si concentra sul **num. di prove necessarie** per ottenere **un certo num. di successi**

X ~ BinNeg(r, p)

Im(X) = {r, r+1, ..., ∞}

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{k-r}$$

- **r**: num. **successi desiderati**
- **k**: num. **tot. di prove**

Val. Atteso:

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

Varianza:

$V(X) = \frac{r*(1-p)}{p^2}$

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Modelli con **più successi**, come il num. di tentativi per raggiungere obiettivi multipli
- Utile per calcolare il **num. di prove necessarie** per ottenere un **certo num. di successi** (le prove sono indipendenti)

Esempio

Qual è la probabilità di ottenere **3 teste al quinto lancio di una moneta?**

- **Successi desiderati**: r = 3
- **Prove totali**: k = 5
- **Probabilità**: p = 1/2

Formula:

$\mathbb{P}(X = 5) = \binom{5-1}{3-1} * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \binom{4}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6 * \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{2^5} = \frac{3}{16}$

$E(X) = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

$V(X) = \frac{3*\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = 3 * 2 = 6$

Poisson

Poisson si concentra sul **num. di eventi (k) in un intervallo** data una **media di eventi (λ)**

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

$Im(X) = \{0, \ldots, \infty\} = \mathbb{N}$

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- **λ: media eventi nell'intervallo**

Val. Atteso:

$E(X) = \lambda$

Varianza:

$V(X) = \lambda$

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Gli eventi accadono a un **tasso medio noto λ** e sono **indipendenti** e **non possono accadere contemporaneamente**
- Eventi **distribuiti** nel tempo o nello spazio, come arrivi in una coda o guasti

Esempio

Un call center riceve in **media 5 chiamate l'ora**. Qual è la prob. di **ricevere esattamente 3 chiamate in un'ora?**

- **Tasso medio:** λ = 5
- **Num. eventi**: k = 3

Formula:

$\mathbb{P}(X = k) = \frac{5^3 * e^{-5}}{3!} = \frac{125}{6e^5}$

$E(X) = V(X) = 5$

Multinomiale

La Multinomiale si concentra sul **num. di successi di molteplici eventi indipendenti**

$(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \text{Multi}(n, k, \{p_1, p_2, \ldots, p_k\})$

$Im(X_i) = \{0, \ldots, n\}$

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$$

- **k**: num. **possibili esiti**
- **n**: num. **eventi**

- $\{p_1, \ldots, p_k\}$: rispettive probabilità per ogni esito
- Ogni esito $i \le k$ (k esiti) ha probabilità p_i, dove
- $n_i > 0$: num. eventi in ogni esito
- $n_1 + \ldots + n_k = n$

Val. atteso:

$E(X_i) = n * p_i$

Varianza:

$V(X_i) = n * p_i * (1 - p_i)$

$Cov(X_i) = -n * p_i * p_j$, per $i \neq j$

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Es. Distribuzione del voto in un'elezione o distribuzione delle preferenze in un sondaggio con più opzioni
- Conteggio di **esiti** in **categorie multiple**, come risultati di un dado a k facce lanciato n volte
- Calcolare le prob. di **diverse combinazioni di esiti** in **n prove** con **più di due categorie**

Esempio

Lancio un dado **6 volte**, qual è la prob. di ottenere **2 "1", 3 "2" e 1 "3"?**

- **Totale prove:** $n = 6$
- **Prove:** $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 1$
- **Probabilità associate**: $p_1 = 1/6$, $p_2 = 1/6$, $p_3 = 1/6$

Formula:

$$\mathbb{P}(n_1, n_2, n_3) = \frac{6!}{2!*3!*1!} * \left(\frac{1}{6}\right)^2 * \left(\frac{1}{6}\right)^3 * \left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{6*5*4*3*2}{3*2*2} * \frac{1}{36} * \frac{1}{216} * \frac{1}{6} = \frac{5}{18*216} = \frac{5}{388}$$

Var. Continue

lunedì 27 gennaio 2025 17:44

Le **var. aleatorie Continue**, rispetto a quelle normali, hanno **immagine continua** (0, +∞), con cardinalità non numerabile.
È necessario quindi vedere la probabilità che la **var. aleatoria risulti in un certo intervallo**

Densità di Probabilità (PDF)

La funzione $\mathbf{f_X}$ è detta **densità di probabilità** è descrive come è **distribuita** la probabilità nell'**intervallo [a, b]**.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ f(x) & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

- Per calcolare la **probabilità** in un **intervallo [c, d]**:
  $$\mathbb{P}(c < x < d) = \int_c^d f_X(x)dx$$
- Il **val. atteso** è:
  $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$$
- La **varianza** è:
  $$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x)dx = E(X^2) - [E(X)]^2$$
  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f_X(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x)dx\right]^2$

Distribuzione Uniforme Continua

La **distribuzione uniforme continua** è una var. aleatoria continua dove vi è **uguale proabilità in [a, b]**
La funzione è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio

Distribuzione Cumulativa (CDF)

La **funzione di distribuzione cumulativa** $\mathbf{F_X}$ misura la prob. che la var. aleatoria continua X **assuma un val. ≤ x**:

$F_X : R \rightarrow [0, 1]$
$F_X(b) = \mathbb{P}(x \leq b)$

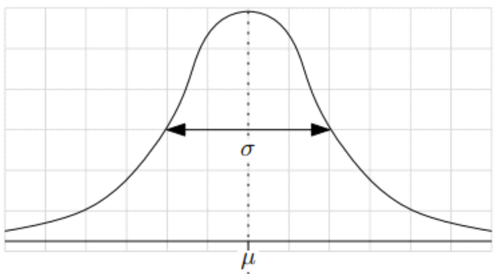
Per calcolare la prob. che **x sia compreso in un intervallo**

$\mathbb{P}(a < x \leq b) = \mathbb{P}(x \leq b) - \mathbb{P}(x \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$

Essa è una **primitiva della densità** e il suo calcolo è:

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$$

Esempio



Var. Aleatoria Gaussiana o Normale

La var. aleatoria **Gaussiana o Normale** si occupa della classificazione degli errori dovuti alla misurazione di grandezze fisiche.
Una var. aleatoria X è detta **gaussiana** se la sua funz. di **densità di probabilità** è data da:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

- **E(X) = μ: media**, determina la pos. della curva
- **V(X) = σ²: varianza**, determina la dispersione della curva

Standardizzazione

Una var. gaussiana X con media μ e varianza σ² può essere trasformata in una var. **standardizzata** Z con media 0 e varianza 1
Formula per standardizzare:

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

- E(Z) = 0
- V(Z) = 1

Quindi:

X = σZ + μ

La standardizzazione è utile per:
- **Confrontare var. con distribuzioni normali diverse**
- **Usare le tavole della distribuzione normale standard per calcolare probabilità**

Probabilità con Z:

La probabilità che X assuma val. compresi tra **a e b** può essere trovata tramite sta

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma})$$

TABELLA 5.1 L'AREA $\Phi(x)$ DEL TRAPEZOIDE DELLA DENSITÀ NORMALE A SINISTRA DI x

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890

Esempio

Se X ~ N(μ = 3, σ^2 = 4), calcolare ℙ(X < 6)
- μ = 3
- σ = √4 = 2

Possiamo calcolarlo in due modi:
1) Calcolare direttamente prima Z
    - Z = $\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$
    - ℙ(Z < 6) = ℙ(1.5)= ϕ(1.5) = 0.9332
2) Calcolare X con Z
    - X = σ*Z + μ = 2*Z + μ
    - ℙ(X < 6) = ℙ(2*Z+3 < 6) = ℙ(2*Z < 3) = ℙ(Z < 1.5) = ϕ(1.5) = 0.9332

Da ricordare

sabato 1 febbraio 2025 15:23

"L'estrazione viene fatta **almeno** k volte" $\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X < k)$
Es. Abbiamo due urne A e B con k palline bianche e m palline nere in entrambi.
Sia X il num. di estrazioni effettuate finche non esce **almeno una pallina bianca da almeno una delle due urne.**
p = $\mathbb{P}(A \geq 1, B \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(A = 0, B = 0)$

Ad un giocatore G_1 vengono date a caso 13 carte da un mazzo di 52. Qual è la prob. che abbia 3 assi:

$p_1 = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{10}}{\binom{52}{13}}$ in cui:

- $\binom{4}{3}$ modi di scegliere 3 assi tra i 4 disponibili nel mazzo intero
- $\binom{48}{10}$ modi di scegliere le 10 carti restanti di G_1 (13-3 assi) tra le 48 carte rimanenti che non sono assi (52-4 assi)
- $\binom{52}{13}$ possibili esiti del mazzo di G_1

Segue una distribuzione **ipergeometrica**

Seguendo l'esempio precedente. Le 52 carte vengono distribuite a caso tra 4 giocatori G_1, G_2, G_3 e G_4 (ognuno ha 13 carte).
Qual è la probabilità che almeno un giocatore abbia 3 assi.
Definiamo E = "almeno un giocatore riceve 3 assi" e E_i = "G_i riceve tre assi", $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$

Poiché i 4 eventi sono **incompatibili tra loro** (se G_1 ha i 3 assi allora è impossibile che gli altri giocatori abbiano i 3 assi)

$p_2 = \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) + \mathbb{P}(E_3) + \mathbb{P}(E_4)$

Per **simmetria** (siccome le probabilità che ogni giocatore abbia i 3 assi è equiprobabile per tutti e 4) abbiamo,

$p_1 = \mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}(E_4)$, quindi

$p_2 = 4 * p_1$

Enunciati Utili

martedì 4 febbraio 2025 14:54

Enunciati che potrebbe chiedere all'esame di cui forse in parte non ho inserito negli appunti

- **var. Identicamente distribuite**
  Due variabili aleatorie X, Y sono dette **identicamente distribuite** se P(X ∈ A) = P(Y ∈ A) per ogni A ⊂ R
- **Assiomi della probabilità di Kolmogorov**
  - $\mathbb{P}(A) \geq$ per ogni evento
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  - **Assioma di additività numerabile (σ-additività)**
- **Assioma di additività numerabile (σ-additività)**
  Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono eventi **mutualmente esclusivi** ($A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$
  $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$
- **Monotonicità**
  Se $A \subseteq B$, allora $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- **Definizione di var. aleatoria** (non penso che lo chieda tutto)
  Una funz. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ è una **var. aleatoria**. Essa si divide in **discreta** e **continua**
  - **Discreta**: una var. aleatoria X si dice **discreta** se i suoi val. formano un insieme finito $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oppure un insieme infinito numerabile
  - **Continua**: una var. aleatoria X si dice **continua** se esiste una funz. **non negativa** f (detta **funzione di densità**) t.c. per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ abbiamo
    - Se $A = \mathbb{R}$
      $\mathbb{P}(X \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$
    - Se A = [a, b]
      $\mathbb{P}(X \in A) = \int_{a}^{b} f(x)dx$
- **Proprietà delle somme di var. aleatorie indipendenti**
  Se X e Y sono **indipendenti**, allora
  - E(X + Y) = E(X) + E(Y)
  - V(X + Y) = V(X) + V(Y) (perche la covarianza è 0 se sono indipendenti)
  - Cov(X, Y) = 0
- **Proprietà di perdità di memoria**
  La var. aleatoria **geometrica X** e la var. **esponenziale X** soddisfano
  $\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$
- **Diseguaglianza di Chebyshev**
  Per una var. aleatoria X con **val. atteso μ e varianza σ²**
  $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k*\sigma) \leq 1/k^2$
  Conseguenza: la prob. che X si discosti molto dal val. atteso è **piccola**

Modello Probabilistico

giovedì 12 dicembre 2024 12:04

Definiamo meglio il **modello probabilistico**, esso ha 3 elementi:

- **Spazio Campionario: Ω**
- **Insieme delle Parti: $\mathcal{P}$**
- **Probabilità: $\mathbb{P}$**

1 - Lo Spazio Campionario

Lo **spazio campionario o spazio degli eventi elementari** contiene **tutti** i **possibili risultati** di un esperimento e si indica con Ω

$|\Omega|$ = **cardinalità** dell'insieme (num. di elem.)

Indichiamo con $\omega_1, \ldots, \omega_n$ gli **eventi elementari di un esperimento** ($\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$)

Es.

Lancio di una moneta: $\Omega = \{T, C\} = \{0, 1\}$, $|\Omega| = 2$

Lancio di un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega| = 6$

Compleanni di 25 persone: $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{25})\ \omega \in [1, 365]\}$, $|\Omega| = 365^{25}$ e $|\omega| = 25$

2 - Insieme delle Parti

L'**evento**, ossia una **domanda binaria** sull'esito dell'esperimento, è un qualsiasi **sottoinsieme** di Ω, compresi gli elementi singoli di Ω, detti **eventi elementari**.

Un **evento binario** è un evento che 2 probabilità: che **esso accada** o che **esso non accada** (o sì o no oppure vero o falso).

Su tali eventi sono definite delle **op. insiemistiche** di **unione, intersezione e complemento**.

L'insieme delle parti, definita con $\mathcal{P}$, è l'**insieme** di **tutti i possibili sottoinsiemi** di Ω, ossia tutti i possibili eventi la quale si può misurare la probabilità.

Si noti che $|\Omega| = n \Rightarrow |\mathcal{P}| = 2^n$

Esempi

Lancio di una moneta: $\Omega = \{T, C\} \rightarrow \mathcal{P} = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}$

Lancio di un dado a 4 facce, possiamo porre:

- ω_1 l'evento elementare {punteggio ottenuto è 1}
- ω_2 l'evento elementare {punteggio ottenuto è 2}
- ω_3 l'evento elementare {punteggio ottenuto è 3}
- ω_4 l'evento elementare {punteggio ottenuto è 4}

In modo che $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ e $\mathcal{P}(\Omega)$ è l'insieme i cui **elementi sono tutti i sottoinsiemi di Ω**:

$\mathcal{P}(\Omega) = \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\},$

$\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_3, \omega_4\},$

$\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}\}$

- $\emptyset$ è l'**insieme vuoto** che non contiene elementi (cardinalità 0)
- $\{\omega_i\}$ sono i **singoletti**, che contengono un unico elemento (cardinalità 1)
- $\{\omega_i, \omega_j\}$ sono sottoinsiemi con due elementi (cardinalità 2)
- $\{\omega_i, \omega_j, \omega_k\}$ sono sottoinsiemi con tre elementi (cardinalità 3)
- $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ coincide con Ω, ma è un sottoinsieme di se stesso con 4 elementi (cardinalità 4)

$|\Omega| = 4$, $\mathcal{P}(\Omega) = 16$

Se l'esperimento è il lancio di un dado allora $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Vogliamo definire l'**evento A** come la probabilità che l'esito del lancio sia **maggiore di 4**

$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \geq 4\} = \{4, 5, 6\}$

$A \subseteq \Omega$, $\{4, 5, 6\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Invece l'evento in cui l'esito sia 2 o 3, è l'unione dei due eventi elementari
$A=\{2\}$ e $B=\{3\} \rightarrow C = A \cup B = \{2, 3\}$.

3 - La Funzione Probabilità

La **probabilità** è una funzione che **associa** ad ogni evento $A \in \mathcal{P}$ un num. tra 0 ed 1, dove 0 indica che l'evento è **impossibile** e 1 che l'evento è **certo** ($\mathbb{P}: \mathcal{P} \rightarrow [0, 1]$)
La funzione $\mathbb{P}$ deve soddisfare **3 condizioni**:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. (la probabilità dell'insieme vuoto è impossibile)
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C)$ (la probabilità che si verifichi un evento di Ω è certa)
- $\mathbb{P}$ è una **funzione additiva**, ossia:
    - Se $A,B \in \mathcal{P}$ sono eventi **disgiunti** ($A \cap B = \emptyset$), allora $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
    - Se $A,B \in \mathcal{P}$ sono eventi **non disgiunti** ($A \cap B \neq \emptyset$), allora $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Considerazioni:

- $\Omega = A \cup A^C \Rightarrow \mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}$ è una funzione **monotona** rispetto all'inclusione degli insiemi, cioè se $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Costruire la Probabilità

lunedì 16 dicembre 2024 16:06

Quando si vuole misurare la probabilità di un evento, bisogna costruire un **modello probabilistico**, definendo gli eventi elementari e la probabilità di essi.
Definiamo la nuova funzione della **probabilità degli eventi elementari** p, che ha come dominio gli eventi elementari Ω, e non gli eventi di $\mathcal{P}$.

$p: \Omega \to [0, 1]$

Risulta chiaro che $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Definiamo quindi $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, e risulta chiaro che :

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}) = 1$$

La probabilità di un **modello probabilistico**, si dice **uniforme** se $p(\omega) = 1/|\Omega|\ \forall \omega \in \Omega$, e significa che tutti gli eventi elementari hanno la **stessa probabilità** di accadere.

Ne deriva che la **probabilità di un evento $A \in \mathcal{P}$ è $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega|$**

Esempio:

- Un dado generico ha probabilità uguali per ciascun evento
  $p(i) = 1/6 \approx 0.16, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  $p(1) = p(2) = \ldots = p(6) \approx 0.16$
  $p(\{3, 4\}) \approx 0.16 + 0.16 \approx 0.32$ (probabilità che esca un 3 o un 4)
- Avendo un dado **truccato** in cui è più probabile che esca il numero 6 avremmo:
  $p(1) = p(2) = p(3) = 0.1$
  $p(4) = p(5) = 0.2$
  $p(6) = 0.3$
  $p(\{3, 4\} = 0.1 + 0.2 = 0.3$ (probabilità che esca un 3 o un 4)

Estrazione palline

In una scatola ci sono **3 palle bianche** e **2 palle nere** (tot. 5).
Facendo 2 estrazioni **casuali**, qual è la probabilità che la **seconda** estratta sia **bianca**?
Se numeriamo le palle bianche **1, 2, 3** e le palle nere **4, 5** allora:

- **Num. totale di casi**: $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in [1, 5] \wedge \omega_1 \neq \omega_2\} \Rightarrow |\Omega| = 5*4 = 20$
  - È l'insieme delle coppie estratte (ω_1 è la prima palla estratta e ω_2 è la seconda)
  - $|\Omega| = 5*4$ poiché ci sono 5 possibilità alla prima estrazione e 4 alla seconda
- **Casi favorevoli**: $A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_2 \in [1, 3]\} \Rightarrow |A| = 3*4 = 12$
  - È l'insieme delle coppie in cui la seconda palla è bianca ($\omega_2 \in \{1, 2, 3\}$)
  - Per ogni ω_2, ci sono 4 possibili val. per ω_1
  - $|A| = 3*4$ poiché ci sono 3 possibilità per la seconda palla bianca e 4 per la prima palla

Essendo la probabilità di estrazione **uniforme**:
$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = 12/20 = 0.6$ quindi una probabilità del 60%

Esempio

Il Problema dei Compleanni

Quante sono le probabilità che in un gruppo di **25 persone**, 2 sono nate **lo stesso giorno**?

- Iniziamo **modellizzando** il problema ⇒ possibili date di nascita = 365 ⇒ *PossibiliDate* = {1, 2, 3, …, 365}
- La probabilità che un **individuo T** sia nato il giorno **i** è di 1 su 365 ⇒ $\mathbb{P}$(T è nato il giorno i) = 1/365
  Questa probabilità si dice **uniforme** perché tutti i 365 esiti hanno la stessa probabilità 1/365 di risultare veri.
- La probabilità che **T** sia nato il giorno **i** e **C** sia nato il giorno **j** è:
  $\mathbb{P}$(T nato giorno i e C nato giorno j) = $\mathbb{P}$(T nato giorno i) * $\mathbb{P}$(C nato giorno j) = $(1/365)*(1/365) = (1/365)^2$
  Questo si chiama **concetto di indipendenza**
- Quindi le probabilità che 25 persone sono nate in 25 giorni predeterminati sono:
  $\mathbb{P}(a_1$ è nato i_1, a_2 è nato $i_2, \ldots, a_{25}$ è nato $i_{25}) = (1/365)^{25}$
- Però a noi interessa la probabilità che 2 persone siano nate lo stesso giorno.
  Per trovare ciò però dobbiamo prima definire il **modello probabilistico**

Modello Probabilistico

Sia l'esperimento la **data di nascita di k persone**, il nostro Ω sarà l'insieme di tutte le **possibili combinazioni** lunghe 25 di numeri da 1 a 365 (quindi $|\Omega| = 365^{25}$).

Un elemento $\omega \in \Omega$ rappresenta una **sequenza di date** di nascita di 25 persone. Es. $\omega = (12, 45, 52, 64, 365, \dots, 152, 1, 3)$ e $|\omega| = 25$ (quindi va da ω_1 a ω_{25})

La probabilità **uniforme** che un certo evento dallo spazio degli eventi $\Omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ accada è $\mathbb{P}(\omega_i) = 1/|\Omega|$.

Definiamo A come l'evento in cui **almeno 2 persone** fanno il compleanno **lo stesso giorno**

$A = \{\omega \in \Omega: \exists \omega_i, \omega_j \in \omega \mid i \neq j \land \omega_i = \omega_j\}$

quindi "**Esistono** due date di **nascita uguali** ($\omega i = \omega j$) per due **persone diverse** ($i \neq j$, i e j sono le posizioni di due persone in ω)

Quindi A è un **sottoinsieme** di Ω in cui tutti gli elementi (ω) hanno 2 date uguali.

Le probabilità che tale evento accada sono: $\mathbb{P}(A) = |A| / |\Omega|$

Piuttosto che trovare l'evento in cui ci sono almeno 2 persone con lo stesso compleanno, è più facile trovare il suo **complementare**, ossia l'evento in cui **nessuno** fa il compleanno **lo stesso giorno**.

$A^C = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \neq j, \omega_i \neq \omega_j\}$

quindi "**Per ogni coppia di persone diverse** ($i \neq j$) le loro date di nascita **non coincidono** ($\omega_i \neq \omega_j$)"

Quindi A^C rappresenta l'evento in cui tutte le 25 persone hanno **date di nascita diverse tra loro**

Una volta trovata la probabilità di A^C, sapremo che $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C)$

essendo k = 25 e n = 365 → $|A^C| = n * (n-1) * (n-2) * \dots * (n-k+1) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - (|A^C| / 365^{25})$

k	4	16	22	23	63
$\mathbb{P}(A)$	0.06	0.28	0.42	0.50	0.99

Quindi Intervistando 25 persone, c'è una **probabilità superiore al 50%** che almeno due persone **condividano il compleanno**

Proprietà degli Eventi

lunedì 9 dicembre 2024 19:05

Consideriamo l'evento in cui al lancio di un dado esce una faccia pari:

$A = \{\omega \in \Omega \mid \omega\%2 = 0\} = \{2, 4, 6\}$

E l'evento in cui esce una faccia minore o uguale a 3:

$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$

- L'**evento unione (∨)** tra i due è:
  $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ dove $\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A \lor \omega \in B$
- L'**evento intersezione (∧)** è:
  $D = A \cap B = \{2\}$ dove $\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A \land \omega \in B$

Quest'ultimo evento è detto **evento elementare o singleton**, ossia un insieme con un solo elem.

Ora definiamo l'evento in cui escano facce dispari, quindi l'**evento complementare di A**. Possiamo definirlo come:

- $A^C = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$
- $A^C = S - A$ (**esclusione**: eliminiamo tutti gli esiti di A dall'insieme ambiente Ω)

Volendo rappresentare l'evento con le **facce ≤ 3** ∧ **dispari** possiamo definire tale evento in **due modi**:

- **L'intersezione** tra l'evento delle facce **≤ 3** e l'evento delle facce **dispari**:
  $E = B \cap A^C$
- L'**esclusione** tra l'evento delle facce **≤ 3** e l'evento delle facce **pari**:
  $E = B - A$

Quindi, ne traiamo che

$B - A = B \cap A^C$

Proprietà insiemi

Trattandosi di insiemi, gli eventi godono delle proprietà ad essi legati:

- **Proprietà disgiuntiva**
  $A \cap A^C = \emptyset$
- **Proprietà associativa**
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Proprietà distributiva**
  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ e $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- **Legge di De Morgan**
  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- **Esclusione disgiuntiva (XOR)**
  $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Nozioni Insiemistiche

martedì 14 gennaio 2025 14:24

Nozioni di tipo insiemistico con **interpretazione "logica"**

(i) A ⊆ B (A implica B)

- A ⊆ B significa che **ogni evento elem.** che rende **verificato A** rende **verificato anche B**

ovvero il verificarsi di A implica il verificarsi di B e dunque

- **A ⊆ B** : "**A implica B**"

(ii) Ω (Evento certo)

- Ω è un **evento vero qualunque evento elementare si verifichi**

poiché esso contiene tutti gli eventi elementari

- **Ω : evento certo**

(iii) Ø (Evento impossibile)

- L'insieme vuoto Ø è un **evento che non è mai verificato**

poiché non contiene nessun evento elementare possibile

- **Ø : evento impossibile**

(iv) A ∪ B = Ω (Eventi esaustivi)

- A ∪ B = Ω significa che l'evento costituito dal verificarsi di entrambi gli eventi A e B **coincide con l'evento certo Ω**
- **A ∪ B = Ω : A e B sono esaustivi**
  ovvero è certo che se ne **verifichi almeno uno dei due**

(v) A ∩ B = Ø (Eventi incompatibili)

- A ∩ B = Ø significa che l'evento costituito dal verificarsi di entrambi gli eventi A e B **coincide con l'evento impossibile Ø**
- **A ∩ B = Ø : A e B sono incompatibili**
  ossia è certo che se ne **verifichi al più uno dei due eventi**
  ovvero è certo che se ne **verifichi al massimo uno dei due eventi**

Esempi

Esempi con il lancio di un dado a 6 facce

(i)

- A: {num. estratto è pari} = {2, 4, 6}
- B: {num. estratto è maggiore di 1} = {2, 3, 4, 5, 6}
- A ⊆ B poiché ogni num. pari è anche maggiore di 1
- **Se A è verificato anche B lo è**

(ii)

- Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
- Qualunque num. esca, Ω è verificato, poiché include tutti i risultati possibili

(iii)

- In un lancio di un dado a 6 facce, Ø può rappresentare l'evento {num. estratto è 7}
- Poiché non esiste il num. 7 sul dado, questo evento **non è mai verificato**

(iv)

- A: {num. estratto è pari} = {2, 4, 6}
- B: {num. estratto è dispari} = {1, 3, 5}
- A ∪ B = {1, 2, 3, 4 , 5, 6} = Ω
  Almeno uno dei due eventi A o B si verifica sempre

(v)

- A: {num. estratto è pari} = {2, 4, 6}
- B: {num. estratto è dispari} = {1, 3, 5}
- A ∩ B = Ø
  È impossibile che un numero sia contemporaneamente pari e dispari

Calcolo combinatorio

giovedì 12 dicembre 2024 14:31

Teorema fondamentale del Calcolo Combinatorio

Dati 2 **insiemi finiti e non vuoti** A e B si possono formare $|A| * |B|$ diverse coppie ordinate prendendo un elem. da A e uno da B

$|A \times B| = |A| * |B|$

Con k insiemi con la stessa cardinalità n:

$|A \times \ldots \times Z| = n^k$

Esempio:
Lanciando un dado **6 volte**, quale è la probabilità che esca **almeno una volta 6**?
Un evento elem. ω è una n-upla (elenco ordinato di n oggetti) di 6 elementi (i lanci) composta da num. da 1 a 6 (esiti del dado)

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6) \mid \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

Per il **principio moltiplicativo** $|\Omega| = 6^6$.
Invece che calcolare la cardinalità di $A = \{\omega \in \Omega \mid \exists \omega_i \in \omega \rightarrow \omega_i = 6\}$, ossia tutti gli eventi elem. in cui 6 compare in almeno un lancio, ci è più facile calcolare il suo complementare, cioè tutti gli eventi in 6 non compare mai, ossia ogni n-upla di 6 lanci composta da numeri da 1 a 5 (esiti del dado escluso 6)

$A^C = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6) \mid \omega_i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

Per principio moltiplicativo $|A^C| = 5^6$. Avendo $|A^C|$, possiamo trovare la probabilità di A:

$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C) = 1 - (|A^C| / |\Omega|) = 1 - (5^6 / 6^6) \approx 1 - 0.33 = 0.66$

Raggruppamenti

Il calcolo combinatorio studia i **raggruppamenti** che si possono ottenere:

- Con **n elementi su k posti.**
- E **senza/con ripetizioni** degli elementi

Esistono 3 raggruppamenti possibili

Permutazioni

Sono raggruppamenti realizzati quando il num. di oggetti è **uguale** dal num. di posti e **conta l'ordine** della disposizione.
La permutazione con ripetizione è anche detta **anagramma**.
Es.
Num. di anagrammi della parola "pippo" (5 elem., 3 ripetizioni di "p")
$P_n = n!/r! = 5!/3! = 120/6 = 20$

Esempi:

- **Senza ripetizione**:
  Abbiamo 3 lettere A, B, C. Vengono disposte in tutti i modi possibili senza ripetizioni
  - $P_n(3) = 3! = 6$ permutazioni
  - ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA
- **Con ripetizione**:
  Abbiamo 3 lettere A, A, B, in cui A si ripete 2 volte e B una volta. Vengono disposte in tutti i modi possibili con ripetizioni
  - $P^r_n(3) = 3!/(2!*1!) = 6/2 = 3$ permutazioni
  - AAB, ABA, BAA

Disposizioni

Sono raggruppamenti realizzati quando il num. di oggetti è **diverso** dal num. di posti e **conta l'ordine** della disposizione.

Esempi:

- **Senza ripetizione**:
  Abbiamo 3 lettere A, B, C e 2 posti. Ogni lettera viene scelta una sola volta e la lista è ordinata
  - $D_{n,k}(3, 2) = 3!/(3-2)! = 3!/1! = 6$ disposizioni
  - AB, AC, BA, BC, CA, CB
- **Con ripetizione:**
  Abbiamo 3 lettere A, B, C e 2 posti. Le lettere possono essere usate più volte
  - $D^r_{n,k}(3, 2) = 3^2 = 9$ disposizioni
  - AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC

Combinazioni

Sono raggruppamenti realizzati quando il num. di oggetti è **diverso** dal num. di posti e **non conta l'ordine** della disposizione.

Esempi:

- **Senza ripetizione**:
  Abbiamo 4 lettere A, B, C, D e 2 posti. Non conta l'ordine (quindi AB = BA)
  - $C_{n,k}(4, 2) = 4!/(2!*(4-2)!) = 24/(2*2) = 6$ combinazioni

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- **Senza ripetizione**:
  Abbiamo 4 lettere A, B, C, D e 2 posti. Non conta l'ordine (quindi AB = BA) $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
  - $C_{n,k}(4, 2) = 4!/(2!*(4-2)!) = 24/(2*2) = 6$ combinazioni
  - AB, AC, AD, BC, BD, CD
- **Con ripetizione**:
  Abbiamo 3 lettere A, B, C e 2 posti. Non conta l'ordine $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n+k-1-k)! \cdot k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$
  - $C^r_{n,k}(3, 2) = (3+2-1)!/(2!*(3-1)!) = 4!/(2!*2!) = 24/4 = 6$ combinazioni
  - AA, AB, AC, BB, BC, CC

n = *numero di oggetti* k = *numero di posti*	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione r di oggetti
Permutazioni • $n = k$ • *conta l'ordine*	$P_n = n!$	$P^r_n = \frac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}$
Disposizioni • $n \neq k$ • *conta l'ordine*	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ $n > k$	$D^r_{n,k} = n^k$
Combinazioni • $n \neq k$ • *non conta l'ordine*	$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $n > k$	$C^r_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Coefficiente Binomiale

Il **coefficiente binomiale** rappresenta i modi di scegliere k elementi da un insieme n.

Senza ripetizione	**Con ripetizione**
$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$	$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n+k-1-k)! \cdot k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!}$

Inoltre vale la proprietà:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Binomio di Newton

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, vale che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

Proprietà Coefficiente Binomiale

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n-1} = n$

Esempi Estrazione

venerdì 13 dicembre 2024 10:53

Esempi SimoneLid e CasuFrost

Ci sono diversi tipi di estrazione da un urna:

Estrazione ordinate con rimpiazzo

- Eseguiamo **k estrazioni** di **n palline**
- Ci **interessa l'ordine:** quindi $\{1, 2, 3\} \neq \{1, 3, 2\}$
- **Con rimpiazzo**: pescata la pallina si **reinserisce** nell'urna (un elem. può essere estratto **più** volte)

Formula:

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \mid \omega_i \in [1, n]\} \Rightarrow |\Omega| = n^k$

Esempio:

Estrazione ordinate senza rimpiazzo

- Eseguiamo **k estrazioni** di **n palline**
- Ci **interessa l'ordine:** quindi $\{1, 2, 3\} \neq \{1, 3, 2\}$
- **Senza rimpiazzo**: pescata la pallina si **rimuove** dall'urna (un elem. può essere estratto **una sola** volta)

Formula:

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \mid \omega_i \in [1, n], \omega_i \neq \omega_j\} \Rightarrow |\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!}$

Esempio:

In un palazzo di **10 piani** ci sono **7 persone** in ascensore, quale è la probabilità che **tutti scendano** su **piani diversi**?

ω_i = n-upla di 7 elem. (persone) con numeri che vanno da 1 a 10 (piani)

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_7) \mid \omega_i \in [1, 10])\} \Rightarrow |\Omega| = 10^7$

A = {scendono tutti a piani diversi} = $\{\omega \in \Omega \mid \omega_i \neq \omega_j\} \Rightarrow |A| = 10! / (10-7)! = 10! / 3!$

$\mathbb{P}(A) = A / \Omega = (10! / 3!) / 10^7 \approx 0.06$ (6%)

Estrazione non ordinate senza rimpiazzo

- Eseguiamo **k estrazioni** di **n palline**
- **Non ci interessa l'ordine:** quindi $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 3, 1\} = \dots$
- **Senza rimpiazzo**: pescata la pallina si **rimuove** dall'urna (un elem. può essere estratto **una sola** volta)

Formula:

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \mid i \neq j \Rightarrow \omega_i \neq \omega_j\} \Rightarrow |\Omega| = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$

Esempio:

Abbiamo **10 palline** in **4 scatole**, qual è la probabilità che nella **scatola A ci siano 5 palline**?

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \mid \omega_i = [1, 4]\} \Rightarrow |\Omega| = 4^{10} = 1048576$ (sequenza di 10 elem. (palline) che vanno da 1 a 4 (scatole))

$A = \{\omega \in \Omega \mid j = \{\omega_i = 1\} \mid |j| = 5\} \Rightarrow |A| = \binom{10}{5} * 3^5 = 252*243 = 61236$ (scegliamo 5 palline tra le 10 disponibili (coefficiente binomiale) e assegnamo le restanti 5 palline alle altre 3 scatole (3^5))

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{10!}{5! \cdot 5!}}{4^{10}}$$

$\mathbb{P}(A) = 61236/1048576 \approx 0.058$ (5.8%)

Abbiamo **40 carte** divise in **4 semi** ognuno con carte da **1 a 10**, **4 giocatori** ricevono a testa **10 carte**:

$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{10}) \mid \omega_i \neq \omega_j \wedge \omega_i \in [1, 40]\} \Rightarrow |\Omega| = \binom{40}{10}$ (sequenza di 10 carte ognuna diversa dall'altra che vanno da 1 a 40)

1. Quale è la probabilità io che abbia tutte le carte di denari?
   $A = \{(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)\} \implies |A| = 1$
   $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\binom{40}{10}}$
2. Quale è la probabilità che io riceva il 7 di denari?
   $A = \{\omega \in \Omega | (7, \omega_2, ..., \omega_{10})\} \implies |A| = \binom{39}{9}$
   $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{39}{9}}{\binom{40}{10}} = \frac{1}{4}$
3. Quale è la probabilità che io riceva tutti e 4 i 7?
   $A = \{\omega \in \Omega | (7, 17, 27, 37, \omega_5, ..., \omega_{10})\} \implies |A| = \binom{36}{6}$
   $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{36}{6}}{\binom{40}{10}}$
4. Quale è la probabilità che io riceva un solo 7?
   $|A| = \binom{4}{1}\binom{36}{9}$
   $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{36}{9}}{\binom{40}{10}}$
5. Quale è la probabilità che i 4 giocatori ricevano un 7 a testa?
   Descrivo i 4 giocatori con i puni cardinali: N, E, S e O.
   $\Omega = \{(\omega_1^N, ..., \omega_{10}^N), (\omega_1^E, ..., \omega_{10}^E), (\omega_1^S, ..., \omega_{10}^S), (\omega_1^O, ..., \omega_{10}^O) | \omega_i \neq \omega_j \wedge \omega_i \in [1, 40]\} \implies$
   $|\Omega| = \binom{40}{10}\binom{30}{10}\binom{20}{10}\binom{10}{10}$
   $|A| = \underbrace{\binom{4}{1}\binom{36}{9}}_{N} \cdot \underbrace{\binom{3}{1}\binom{27}{9}}_{E} \cdot \underbrace{\binom{2}{1}\binom{18}{9}}_{S} \cdot \underbrace{\binom{1}{1}\binom{9}{9}}_{O}$

1) L'unico modo per soddisfare la condizione è avere **esattamente** quelle **10 carte**
2) Dopo aver ricevuto il 7 di denari, devo scegliere **altre 9 carte** dalle **restanti 39**
3) Ricevo tutti e 4 i 7, più altre **6 carte** scelte dalle **36 rimanenti**
4) Scelgo **1 carta** tra i **4 sette**, e poi scelgo **9 carte** tra le **36 rimanenti**
5) Ω: Ogni giocatore riceve 10 carte e l'ordine non conta. Lo spazio campionario totale è calcolato dividendo le carte tra i 4 giocatori
   A: Ogni giocatore deve ricevere esattamente un 7:
   a. **N** riceve **1 sette** e **9 carte** dalle **36 rimanenti** (40 meno i 4 sette)
   b. **E** riceve **1 sette** e **9 carte** dalle **27 rimanenti** (36 meno le 9 precedenti)
   c. **S** riceve **1 sette** e **9 carte** dalle **18 rimanenti** (27 meno le 9 precedenti)
   d. **O** riceve **1 sette** e **9 carte rimanenti**

   $|A| = |A_N| * |A_E| * |A_S| * |A_O|$

Estrazione non ordinate con rimpiazzo

- Eseguiamo **k estrazioni** di **n palline**
- **Non ci interessa l'ordine:** quindi {1, 2, 3} = {1, 3, 2} = {2, 3, 1} = …
- **Con rimpiazzo**: pescata la pallina si **reinserisce** nell'urna (un elem. può essere estratto **più** volte)

Formula:

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_k) \mid \omega_1 \leq \omega_2 \leq ... \leq \omega_k\}$

Se ho due eventi **concatenati** ma indistinguibili come il lancio di due dadi:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \leq \omega_2\} \implies |\Omega| = \frac{n^2 + n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Considerando n come il **num. di esiti possibili.**

Nel caso in cui ci siano **k>2 eventi concatenati**, come k lanci di dadi o k estrazioni, con **n esiti possibili**, la cardinalità di Ω è:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n+k-1-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Esempio:

- Lancio di **2 dadi (k)** a **6 facce (n)**:

  $|\Omega| = \frac{6^2+6}{2} = \frac{42}{2} = 21 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \binom{7}{2}$

- Lancio di **10 dadi (k) a 6 facce (n)**:

  $|\Omega| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{6+10-1}{10} = \binom{15}{10}$

Esempi Exyss

Estrazione con reinserimento

Con ordine

Abbiamo 2 tipi di palline: **rosse** (quantità indicata con R) e **bianche** (quantità indicata con B).
Considerando la somma di **N palline**, otteniamo che le rispettive **probabilità di estrazione** di ogni pallina, nel caso venissero **reinserite** nell'urna, è:

$\mathbb{P}(R) = R/N = 1 - \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(B) = B/N = 1 - \mathbb{P}(R)$

Poiché ad ogni estrazione vengono **reinserite** nell'urna, la probabilità d'estrazione di ogni pallina rimane uguale. Dunque la probabilità di **estrarre k volte una pallina dello stesso colore** è:

$$P(\texttt{k volte pallina rossa}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} R\right) = \frac{R}{N} \cdot \frac{R}{N} \cdot ... \cdot \frac{R}{N} = \left(\frac{R}{N}\right)^k$$

$$P(\texttt{k volte pallina bianca}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{k} B\right) = \frac{B}{N} \cdot \frac{B}{N} \cdot ... \cdot \frac{B}{N} = \left(\frac{B}{N}\right)^k$$

Ad esempio, l'evento in cui viene estratta la sequenza BBBRRRBRR è:

$\mathbb{P}(\text{BBBRRRBRR}) = \mathbb{P}(B)^3 * \mathbb{P}(R)^3 * \mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(R)^2 = \mathbb{P}(B)^4 * \mathbb{P}(R)^5 = (R^5 * B^3) / N^8$

Analogamente, l'evento in cui viene estratta la sequenza BRBRRBBB è:

$\mathbb{P}(BRBRRBBB) = \mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(R) * \mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(R)^2 * \mathbb{P}(B)^3 = \mathbb{P}(B)^5 * \mathbb{P}(R)^3 = (R^3 * B^5) / N^8$

Notiamo come effettuando **n estrazioni**, la probabilità di estrarre una **determinata sequenza ordinata** con **k elementi di un tipo** e **n-k elementi di un altro** è:

$\mathbb{P}$(Seq. ord. con n estr. su 2 tipi) = $\mathbb{P}(E_1)^k * \mathbb{P}(E_2)^{n-k} = (E_1^k * E_2^{n-k}) / N^n$ (dove N è la somma degli elementi di E_1 ed E_2)

Senza ordine

Nel caso **non ci interessi l'ordine delle estrazioni**, dunque qualsiasi sequenza di k elem. di un tipo e n-k di un altro, allora sarà necessario moltiplicare la probabilità per il numero di **anagrammi di n elem. contenenti k e n-k ripetizioni**, per poter considerare tutte le possibili sequenze:

$\mathbb{P}$(k elem. 1, n-k elem. 2) = $n!/(k! * (n-k)!) * \mathbb{P}(E_1)^k * \mathbb{P}(E_2)^{n-k}$

Tuttavia, notiamo come il calcolo degli anagrammi corrisponda ad una **scelta di k elem. su n** (coefficiente binomiale):

$$P(\texttt{k elem. 1, n-k elem. 2}) = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\cdot P(E_1)^k \cdot P(E_2)^{n-k} = \binom{n}{k}\cdot P(E_1)^k \cdot P(E_2)^{n-k}$$

Considerando la **somma di tutte le possibili k estrazioni non ordinate di elem. di un tipo**, dunque k = 0, 1, ..., n, otteniamo:

$$\texttt{P al variare di K} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot P(E_1)^k \cdot P(E_2)]^{n-k}$$

Notiamo come la sommatoria sia il **Binomio di Newton**, il cui teorema afferma

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k \cdot b^{n-k} = (a+b)^n$$

Dunque otteniamo:

$$\texttt{P al variare di K} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot P(E_1)^k \cdot P(E_2)^{n-k} =$$
$$= [P(E_1) + P(E_2)]^n = [P(E_1) + (1 - P(E_1))]^n = 1^n = 1$$

Estrazione senza reinserimento

Vediamo il caso in cui le palline vengano rimosse dall'urna, diminuendo il num. tot. di palline.

Nella **prima estrazione**, la probabilità di estrarre una pallina rossa e una bianca rimangono invariate:

$\mathbb{P}_1(R) = R/N = 1 - \mathbb{P}_1(B)$

$\mathbb{P}_1(B) = B/N = 1 - \mathbb{P}_1(R)$

Immaginiamo che alla prima estrazione venga **estratta e rimossa una pallina bianca**.

Le nuove probabilità di estrazione sono:

$\mathbb{P}_2(R) = R/(N-1)$

$\mathbb{P}_2(B) = (B-1)/(N-1)$

Dunque volendo calcolare l'estrazione di due palline bianche **di seguito** avremmo:

$\mathbb{P}(BB) = \mathbb{P}_1(B) * \mathbb{P}_2(B) = (B*(B-1))/(N*(N-1))$

Se estraessimo le due palline bianche in **contemporanea** avremmo il rapporto tra una scelta di 2 palline sulle B tot. e una di 2 palline sulle N tot.:

$$P(\texttt{BB contemp}) = \frac{\binom{B}{2}}{\binom{N}{2}} = \frac{B!}{(B-2)!\cdot 2!}\cdot\frac{(N-2)!\cdot 2!}{N!} =$$
$$= \frac{B(B-1)(B-2)!}{(B-2)!}\cdot\frac{(N-2)!}{N(N-1)(N-2)!} = \frac{B(B-1)}{N(N-1)}$$

Quindi l'estrazione in **contemporanea** è **identica a quella sequenziale**

Se **non conta l'ordine** degli elem. e se **non si hanno reinserimenti**, la probabilità di effettuare k estrazioni di un tipo e n-k di un altro su un tot. di n estrazioni è:

$$P(\texttt{k estr. 1, n-k estr. 2}) = \frac{\binom{E_1}{k}\cdot\binom{E_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Esclusione/Inclusione

lunedì 16 dicembre 2024 16:08

Principio di Esclusione/Inclusione

Siano A, B, C ⊂ Ω tre eventi non necessariamente disgiunti, per trovare la probabilità di A ∪ B dovrei fare:

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Con 3 eventi dovrei fare:

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - (\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Dimostrazione per distributività e principio di esclusione/inclusione

$$|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$$
$$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|)$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Formula generica:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n} \bigcap_{k=1}^{i} A_{j_k}$$

o anche

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \ldots, \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 < i_1 < i_2 \ldots, < i_k < n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \ldots, \cap A_{i_k})$$

o

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

o

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Esempio con cardinalità di 3 insiemi

Abbiamo 3 insiemi:

- A_1: studenti di **matematica** ($|A_1| = 50$)
- A_2: studenti di **fisica** ($|A_2| = 40$)
- A_3: studenti di **informatica** ($|A_3| = 30$)

Tot (non totale studenti): 120

E le sovrapposizioni:

- $|A_1 \cap A_2| = 10$: studenti di **matematica e fisica**
- $|A_1 \cap A_3| = 5$: studenti di **matematica e informatica**
- $|A_2 \cap A_3| = 8$: studenti di **fisica e informatica**
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2$: studenti di **matematica, fisica e informatica**

Formula per 3 insiemi:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$
$= 50 + 40 + 30 - 10 - 5 - 8 + 2 = 99$

Ci sono **99 studenti unici**

Stesura con la sommatoria

1. Sommatoria per i singoli insiemi ($k = 1$):

$$\sum_{i=1}^{3} |A_i| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 50 + 40 + 30$$

2. Sommatoria per le intersezioni di due insiemi ($k = 2$):

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} |A_i \cap A_j| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| = 10 + 5 + 8$$

3. Sommatoria per l'intersezione di tutti e tre gli insiemi ($k = 3$):

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq 3} |A_i \cap A_j \cap A_k| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2$$

Sostituendo:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (50 + 40 + 30) - (10 + 5 + 8) + 2 = 99$

Notevoli

venerdì 13 dicembre 2024 13:27

Probabilità con valori tendenti ad infinito

Se abbiamo una **permutazione** e vogliamo sapere la probabilità che $\forall i \ \omega_i \neq i$ con n tendente a ∞ allora:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(B) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{e}$$

Quindi la probabilità che in una permutazione non vi siano **punti fissi** è **costante**, e vale 1/e

Spazi di Probabilità Prodotto

Dati due eventi **indipendenti** l'uno dall'altro (non si influenzano tra loro, es lancio moneta e lancio dado) $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ e $(\Omega_2, \mathbb{P}_2)$, lo spazio degli eventi elementari dei due eventi è il prodotto cartesiano dei due:

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \Omega_i\}$

Se i due esperimenti **non si influenzano**, la probabilità di una coppia di esiti è la **probabilità prodotto**:

$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) * \mathbb{P}_2(\{\omega_2\})$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_1(A) * \mathbb{P}_2(B) \quad A \subset \Omega_1, B \subset \Omega_2$

Bisogna verificare che la somma delle probabilità di tutte le coppie faccia 1:

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \cdot \mathbb{P}_2(\{\omega_2\})$$

$$\sum_{\omega_1 \in \Omega_1} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \cdot \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} \mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) = 1 \cdot 1 = 1$$

Se le probabilità $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$ sono **uniformi** su Ω_1 e Ω_2, allora $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 * \mathbb{P}_2$ è uniforme su $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.
Si dimostra facilmente:

$$\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \mathbb{P}_1(\omega_1) \cdot \mathbb{P}_2(\omega_2) = \frac{1}{|\Omega_1|} \cdot \frac{1}{|\Omega_2|} = \frac{1}{|\Omega_1| \cdot |\Omega_2|} = \frac{1}{|\Omega_1 \times \Omega_2|} = \frac{1}{|\Omega|}$$

Esempio:

- A = Lancio una moneta = {T, C}
- B = Viene misurata la temperatura in Brasile (che varia dai 10 ai 50 gradi) = $\{\mathbb{N} \mid 10 \leq \omega \leq 50\}$
  $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 \in \{T, C\}, \omega_2 \in \mathbb{N} \mid 10 \leq \omega_2 \leq 50\}$

Lancio due dadi:

- A = {somma = 7} = $\{\omega_1 + \omega_2 = 7\}$
- B = {1° dado = 5} = $\{\omega_1 = 5\}$
- Sono eventi indipendenti perché qualsiasi sia il risultato del primo dado si può sempre arrivare a 7 col secondo
  $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 + \omega_2 = 7, \omega_1 = 5\}$

Indipendenza tra eventi

lunedì 16 dicembre 2024 16:09

In un modello probabilistico $(\Omega, \mathbb{P})$, due eventi $A, B \subseteq \Omega$ sono **indipendenti** se:

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$ (la probabilità composta di due eventi è uguale al prodotto delle singole probabilità)

Con **3 eventi** $A, B, C \subseteq \Omega$ si dice che sono **indipendenti** se:

- La probabilità composta tra due eventi è uguale al prodotto delle singole probabilità:
  - $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B)$
  - $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(C)$
  - $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(C)$
- La probabilità composta tra tutti e tre gli eventi è uguale al prodotto delle singole probabilità:
  - $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(C)$

Nel caso generale si dice che n eventi $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ sono **indipendenti** se:

$\forall k \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \Rightarrow \mathbb{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{ik}) = \mathbb{P}(A_{i1}) * \mathbb{P}(A_{i2}) * \dots * \mathbb{P}(A_{ik})$ (la probabili composta di tutti gli eventi è uguale al prodotto delle singole probabilità

Esempio:

- Estraggo **una carta** da un mazzo di 40.

  $\Omega = \{\omega \mid 1 \leq \omega \leq 40\}$
- Ed ho 2 eventi:
  - A = {estraggo un 7}
  - B = {estraggo una carta di denara}
- Tali eventi sono **indipendenti**, dato che l'estrazione di un 7 non condiziona la probabilità di estrarre una carta di denara, e viceversa
- Infatti $\mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B) = 1/10 * 1/4 = 1/40 = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{\text{estraggo un 7 di denara}\})$

Schema di Bernoulli

lunedì 16 dicembre 2024 16:43

Preso un **esperimento binario** (con solo 2 esiti es. {0, 1}, {T, C}, {vero, falso}) ripetuto **n volte**, gli esiti vengono codificati con 0 ed 1, si ha:

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \ldots \times \{0, 1\}$ (per n volte) $= \{0, 1\}^n$

Lo schema è quello di uno spazio di probabilità prodotto, dove $(\Omega_i, \mathbb{P}_i)$ definisce ogni lancio.
Si definisce una costante **p ∈ [0, 1]** t.c., per ogni lancio risulta:

- $\mathbb{P}(\{1\}) = p$
- $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$

Ovviamente se p = 1/2, la probabilità è **uniforme**. Scegliendo diversi lanci risulta:

- n = 2 ⇒ $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$ con:
  - $\mathbb{P}(00) = (1 - p)^2$
  - $\mathbb{P}(01) = \mathbb{P}(10) = p*(1 - p)$
  - $\mathbb{P}(11) = p^2$
- n = 3 ⇒ $\Omega = \{000, 001, 010, \ldots, 110, 111\}$ con:
  - $\mathbb{P}(000) = (1 - p)^3$
  - $\mathbb{P}(001) = \mathbb{P}(010) = \mathbb{P}(100) = p*(1 - p)^2$
  - $\mathbb{P}(011) = \mathbb{P}(101) = \mathbb{P}(110) = p^2*(1 - p)$
  - $\mathbb{P}(111) = p^3$
- In generale, per n lanci risulta che:
  - Sia $A \in \Omega : \mathbb{P}(A) = p^{\text{occorrenze di 1 in A}} * (1 - p)^{\text{occorrenze di 0 in A}}$
  - Risulta comoda la codifica binaria poiché si può scrivere come:

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_n)\}) = p^{\sum_{i=1}^{n} \omega_i} \cdot (1 - p)^{1 - \sum_{i=1}^{n} \omega_i}$$

Lo schema di Bernoulli viene definito con una **coppia (n, p)**
La probabilità che per un evento A su **n esiti** si abbiano **k positivi (1) e n-k negativi (0)** è:

$$\mathbb{P}(A) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

In cui:
  - **n**: num. totale di prove
  - **k**: num. di successi desiderati
  - **p**: probabilità di successo in una singola prova
  - $(^n{}_k)$: coefficiente binomiale

Tale formula è detta **distribuzione binomiale**

Esempi

Lancio Moneta

Si lancia una moneta **5 volte**. Quale è la probabilità di ottenere esattamente **3 teste** (successi)?

- n = 5
- k = 3
- p = 0.5 (probabilità di successo per una moneta equa)

Calcolo:

1. Calcola il coefficiente binomiale:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

2. Calcola la probabilità:

$$P(A) = \binom{5}{3} \cdot (0.5)^3 \cdot (1-0.5)^{5-3}$$

$$P(A) = 10 \cdot (0.5)^3 \cdot (0.5)^2 = 10 \cdot 0.125 \cdot 0.25 = 0.3125$$

Risultato: La probabilità di ottenere 3 teste su 5 lanci è $\mathbb{P}$(A) = 0.3125 o 31.25%

Quiz

Un concorrente risponde a **10 domande** a scelta multipla, ciascuna con **4 opzioni** (probabilità di indovinare del 25%).
Quale è la probabilità che risponda correttamente a **2 domande**?

- n = 10
- k = 2
- p = 0.25

Calcolo:

1. Calcola il coefficiente binomiale:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

2. Calcola la probabilità:

$$P(A) = \binom{10}{2} \cdot (0.25)^2 \cdot (1-0.25)^{10-2}$$

$$P(A) = 45 \cdot (0.25)^2 \cdot (0.75)^8$$

$$P(A) = 45 \cdot 0.0625 \cdot 0.100112915 = 0.28156$$

Risultato: La probabilità di rispondere correttamente a 2 domande su 10 è $\mathbb{P}$(A) ≈ 0.28156 o 28.16%

Problema della Rovina del Giocatore

mercoledì 18 dicembre 2024 19:33

Dati due giocatori A, B con capitali iniziali a, b che scommettono soldi ad un gioco **binario** finchè uno dei due finisce i soldi. Ogni volta che un giocatore vince, riceve 1 euro dall'altro, quindi:

- A vince con probabilità p
- B vince con probabilità 1 - p

Quale è la probabilità che A o B finisca i soldi?

Soluzione SimoneLid

Chiamo S_n la somma che A ha **vinto** a B nei primi **n lanci** in cui:

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = \begin{cases} 1 & \text{con prob } p \\ -1 & \text{con prob } 1-p \end{cases}$$

$$S_{n+1} = S_n + \begin{cases} 1 & \text{con prob } p \\ -1 & \text{con prob } 1-p \end{cases}$$

$$S_n = \begin{cases} b \implies \text{rovina di B} \\ -a \implies \text{rovina di A} \end{cases}$$

Chiamo rispettivamente **$\alpha(x)$ e $\beta(x)$** la probabilità che A e B perdano tutti i soldi nel momento in cui $S_n = x$

$$\alpha(x) = \begin{cases} p \cdot \alpha(x+1) + (1-p)\alpha(x-1) & -a < x < b \\ 1 & x = -a \\ 0 & x = b \end{cases}$$

$$\beta(x) = \begin{cases} p \cdot \beta(x+1) + (1-p)\beta(x-1) & -a < x < b \\ 1 & x = b \\ 0 & x = -a \end{cases}$$

Se le probabilità sono eque quindi $p = \frac{1}{2}$:

$$\alpha(x) = \frac{x+a}{a+b} \implies \alpha(0) = \frac{a}{a+b}$$
$$\beta(x) = \frac{x+b}{a+b} \implies \beta(0) = \frac{b}{a+b}$$

Se le probabilità non sono eque quindi $p \neq \frac{1}{2}$:

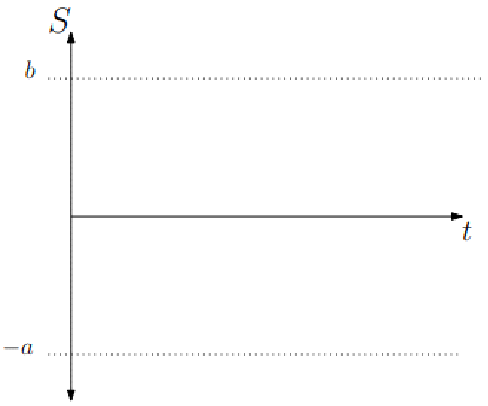
$$\alpha(x) = \frac{1 - (\frac{1-p}{p})^{x+b}}{1 - (\frac{1-p}{p})^{b+a}} \implies \alpha(0) = \frac{1 - (\frac{1-p}{p})^{b}}{1 - (\frac{1-p}{p})^{b+a}}$$
$$\beta(x) = \frac{1 - (\frac{1-p}{p})^{x+a}}{1 - (\frac{1-p}{p})^{b+a}} \implies \beta(0) = \frac{1 - (\frac{1-p}{p})^{a}}{1 - (\frac{1-p}{p})^{b+a}}$$

Visto che $\alpha(x) + \beta(x) = 1$ la probabilità che il gioco duri all'infinito è 0.

Soluzione CasuFrost

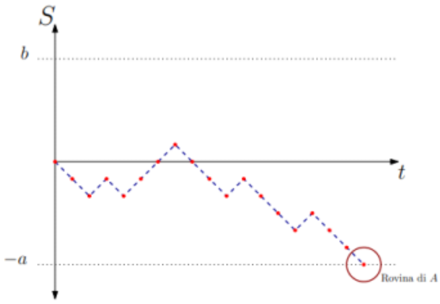
Modellizzazione

Questo problema ha un interpretazione geometrica in cui viene **modellizzato** in uno schema definito come **passeggiata aleatoria**. Si consideri il piano $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$ (**prodotto cartesiano** tra l'insieme dei numeri non negativi e l'insieme di tutti i numeri interi) ⇒ {0, 1, 2, …} x {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}.



- Tipicamente l'insieme $\mathbb{Z}^+$ rappresenta il **numero di turni** nella passeggiata aleatoria
- L'insieme $\mathbb{Z}$ rappresenta lo **stato della ricchezza** del giocatore
- Il prodotto cartesiano è l'insieme delle coppie (t, S), dove:
  - L'asse **t** rappresenta il tempo, o il numero di giocate fatte
  - L'asse **S** rappresenta la somma di denaro vinta da A

- Gli asintoti S = b e S = -a rappresentano il limite di soldi che A può vincere/perdere
- Ad ogni passo (ogni giocata), la **crescita/discesa di S_n** dipende dalle probabilità che **A vinca o no**
- Se A vince al tempo **i**, nel tempo **i+1**, S_n **crescerà** di un'**unità**, altrimenti decrescerà.
    - $t = 0 \implies S_0 = 0$
    - $t = 1 \implies S_1 = \begin{cases} +1 \text{ con probabilità } p \\ -1 \text{ con probabilità } 1-p \end{cases}$
    - $t = 2 \implies S_2 = S_1 + \begin{cases} +1 \text{ con probabilità } p \\ -1 \text{ con probabilità } 1-p \end{cases}$
    - ...
    - $t = n+1 \implies S_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} S_i + \begin{cases} +1 \text{ con probabilità } p \\ -1 \text{ con probabilità } 1-p \end{cases}$



Quindi nel grafico, S_n "**spostandosi**" verso destra, oscillerà avvicinandosi sempre di più a **b** o a **-a**, dove:
- $S_n = b \Rightarrow$ il giocatore **B** si è **rovinato**, vince A
- $S_n = -a \Rightarrow$ il giocatore **A** si è **rovinato**, vince B

La probabilità che A si rovini (cioè se $S_n = -a$) si può calcolare con la formula delle **probabilità totali**.
Introduciamo un nuovo parametro **x**, equivalente a S_0 (valore iniziale di S), dove x = 0.
- $\alpha(x)$: la **probabilità** che S_n raggiunga **-a** dal punto di partenza x
- $\beta(x)$: la **probabilità** che S_n raggiunga **b** dal punto di partenza x
- Inizialmente x = 0, ma ad ogni passo x incrementa/decrementa di 1
- $S_n^{(x)}$: **somma vinta da A** nell'istante t = n, dove però $S_0^{(x)} \neq 0 = x$

Definiamo una **relazione ricorsiva**, usando la formula della **probabilità totale**:

$\beta(x) = \mathbb{P}(S_n \mathrel{+}= 1) * \mathbb{P}(\text{B si rovina} \mid S_n \mathrel{+}= 1) + \mathbb{P}(S_n \mathrel{-}= 1) * \mathbb{P}(\text{B si rovina} \mid S_n \mathrel{-}= 1)$

Ne consegue:

$\beta(x) = p * \beta(x + 1) + (1 - p) * \beta(x - 1)$ finchè $x = -a \lor x = b$

in cui:
- p: probabilità che A **vinca** la **prossima** giocata ($S_n + 1$)
- (1 - p): probabilità che A **perda** la **prossima** giocata ($S_n - 1$)
- $\beta(x + 1)$: probabilità che A raggiunga S = b partendo da x + 1 (cioè dopo aver **vinto** una giocata)
- $\beta(x - 1)$: probabilità che A raggiunga S = b partendo da x - 1 (cioè dopo aver **perso** una giocata
- Se A ha **alte probabilità** di vincere (**p è alto**), allora $\beta(x)$ dipenderà più da $\beta(x + 1)$, e viceversa
- $\beta(b) = 1$, guadagno massimo
- $\beta(-a) = 0$, A si è rovinato

Esempio
Supponiamo che:
- p = 0.6: 60% probabilità di vincere ogni giocata
- b = 3: il giocatore vince se guadagna 3 unità
- a = 2: il giocatore si rovina se perde 2 unità

Scenario:
- La probabilità $\beta(0)$ (x=0 punto inziale) dipende da:
    - $\beta(0) = 0.6 * \beta(1) + 0.4 * \beta(-1)$
- Dobbiamo calcolare ricorsivamente $\beta(1)$ e $\beta(-1)$ fino a raggiungere x = b o x = -a

Calcolo ricorsivo
Partendo da

$\beta(x) = p * \beta(x + 1) + (1 - p) * \beta(x - 1)$ finchè $x = -a \lor x = b$

definiamo la **relazione ricorsiva**:

$$\begin{cases} \beta(x) = p \cdot \beta(x+1) + (1-p) \cdot \beta(x-1) \\ \beta(b) = 1 \\ \beta(-a) = 0 \end{cases}$$

Sviluppiamo il calcolo per ottenere la **formula esplicita**, iniziando a calcolare l'incremento:

$$(p+(1-p))\beta(x) = p \cdot \beta(x+1) + (1-p) \cdot \beta(x-1) \iff p(\beta(x+1)-\beta(x)) = (1-p)(\beta(x)-\beta(x-1)) \iff \beta(x+1) - \beta(x) = \frac{1-p}{p}(\beta(x) - \beta(x-1))$$

Per definizione[1], un **incremento** è:

$\beta(x + 1) = \beta(x) + (\beta(x + 1) - \beta(x))$

Gli incrementi di $\beta(x)$ sono **proporzionali** (simili alla funzione esponenziale) al precedente incremento.
Avendo trovato il val. ad ogni **incremento generico**, procediamo calcolando l'incremento ad ogni passo:

β(x + 1) = β(x) + (β(x + 1) - β(x))

Gli incrementi di β(x) sono **proporzionali** (simili alla funzione esponenziale) al precedente incremento.
Avendo trovato il val. ad ogni **incremento generico**, procediamo calcolando l'incremento ad ogni passo:

- passo 0) $\beta(-a) = 0$
- passo 1) $\beta(-a+1) = \beta(-a+1) - \beta(-a) = \beta(-a+1) - 0 = \gamma$

Abbiamo definito γ come l'incremento ad ogni passo

p

- passo 2) $\beta(-a+2) = \beta(-a+1) + \beta(-a+2) - \beta(-a+1) + \frac{1-p}{p}\gamma = \gamma + \gamma\frac{1-p}{p}$ $= \gamma\left(1 + \frac{1-p}{p}\right)$
- passo 3)
  $\beta(-a+3) = \beta(-a+2) + \beta(-a+3) - \beta(-a+2) = \beta(-a+2) + \frac{1-p}{p}[\beta(-a+2) - \beta(-a+1)] =$
  $\gamma + \gamma\frac{1-p}{p} + \gamma(\frac{1-p}{p})^2$ $= \gamma\left(1 + \frac{1-p}{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2\right)$
- ...
- $\beta(x) = \gamma\left[1 + \frac{1-p}{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 + \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 \ldots + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a-1}\right]$

PASSO 2 RISCRITTO

$$\beta(-a+2) = \underbrace{\beta(-a+1)}_{\gamma} + \left(\beta(-a+2) - \beta(-a-1)\right) =$$

$$= \gamma + \left(\frac{1-p}{p}\left(\underbrace{\beta(-a+1)}_{\gamma} - \underbrace{\beta(-a)}_{0}\right)\right) = \gamma + \frac{1-p}{p}\cdot\gamma = \gamma\left(1 + \frac{1-p}{p}\right)$$

Quindi si ha che

$$\beta(x) = \gamma \cdot \sum_{k=0}^{x+a-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^k = \gamma \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a}}{1 - \frac{1-p}{p}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\eta = \frac{1-p}{p}$$

Per trovare γ, poniamo :

$$\beta(b) = 1 = \gamma \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}}{1 - \frac{1-p}{p}} \implies \gamma = \frac{1 - \frac{1-p}{p}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}}$$

Quindi, in forma esplicita :

$$\beta(x) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}}$$

Osservazione: la probabilità che il gioco non finisca mai è 0 poiché α(a) + β(b) = 1

$$\alpha(a) + \beta(b) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+b}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}} + \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}} = 1$$

Osservazione: se p = 1/2, si ha:

$$\lim_{p \to \frac{1}{2}} \beta(x) = \lim_{p \to \frac{1}{2}} \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{b+a}} = \frac{a+x}{a+b}$$

Esempio

Se A parte da 5 euro con p = 0.4 e B parte da 7 euro con p = 0.6, si ha che:

- La probabilità che B si rovini è : $\frac{1 - \left(\frac{1-0.4}{0.4}\right)^5}{1 - \left(\frac{1-0.4}{0.4}\right)^{5+7}} \simeq 0,05$

Definizione Incremento

In matematica, l'incremento di una funzione f(x) tra 2 punti è definito come:

Δf(x) = f(x + 1) - f(x)

Cioè la differenza tra il val della funzione nel punto x + 1 e il punto x

Possiamo riscrivere la definizione come:

f(x + 1) = f(x) + Δf(x) ⇒ f(x + 1) = f(x) + (f(x + 1) - f(x))

Nel nostro caso avremmo

β(x + 1) = β(x) + (β(x + 1) - β(x))

Condizionata

mercoledì 18 dicembre 2024 18:00

Definizione della **probabilità condizionata**:
Dato uno **spazio di probabilità (Ω, $\mathbb{P}$)**, e due eventi A, B $\subseteq \Omega$,
denominiamo $\mathbb{P}$(B|A) la probabilità che **B si verifichi**, con la **condizione** che **A sia già verificato** $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

E se la probabilità è **uniforme** si ha che

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|A|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|A|}$$

Esempio

Estrazione:

- Estraggo **2 palline** da un'urna con **3 palle bianche** e **2 nere** senza rimettere le palle nell'urna dopo l'estrazione
  Qual è la probabilità che la **seconda** sia **bianca**:
  - Nel caso in cui la **prima sia bianca**:
    $$\mathbb{P}(2B|1B) = \frac{\mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(1B)} = \frac{3/10}{6/10} = \frac{1}{2}$$
  - Nel caso in cui la **prima sia nera**:
    $$\mathbb{P}(2B|1N) = \frac{\mathbb{P}(BB)}{\mathbb{P}(1N)} = \frac{3/10}{4/10} = \frac{3}{4}$$

Lancio moneta:

- Lancio **2 volte** una moneta.
  Qual è la probabilità che al **secondo** lancio esca **testa**, sapendo che al **primo** lancio è uscito **testa**?
  - Ω = {TT, TC, CT, CC}, $|\Omega|$ = 4
  - E = {TT} è l'evento in cui esce testa due volte, |E| = 1
  - F = {TT, TC} è l'evento corrispondente all'uscita di testa nel primo lancio, |F| = 2
  - $\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}.$

Composte

mercoledì 18 dicembre 2024 18:01

La probabilità **composta** è il concetto per esprimere la probabilità di un evento, a seguito di una **sequenza di eventi** che si **condizionano** fra loro.
Dati **k** eventi $A_1, A_2, \dots, A_k$, la probabilità che **accadano** tutti, ognuno dando per scontato il precedente è:

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_k|A_1 \cap ... \cap A_{k-1})$$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = P(A_1 \cap ... \cap A_k)$$

- Data una scatola con **b palline bianche** e **n nere**, faccio **k estrazioni.**
- A_1 = {la prima è nera}
- A_2 = {la seconda è nera}
- fino ad A_k = {la k-esima è nera}
- La probabilità che **tutte** le palline estratte siano **nere**, è **uguale** alla **composizione** di tutti questi eventi riguardo la i-esima estrazione
- Bisogna notare che l'evento in cui le **prime i palline** sono **nere**, è uguale alla probabilità che l'**i-esima** sia **nera** con la **condizione** che le **i-1 palline precedenti** siano **nere**

$$\mathbb{P}(\{\text{tutte nere}\}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)... \cdot \mathbb{P}(A_k|A_1 \cap ..., A_{k-1}) =$$

$$= \mathbb{P}(A_1)\frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} \cdot ... \cdot \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ..., A_k)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ..., A_{k-1})} = \text{ per semplificazione } =$$

$$= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ..., A_k) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i)$$

Totale

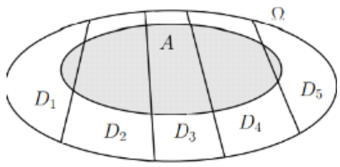
mercoledì 18 dicembre 2024 18:01

Vediamo il caso in cui si verifichi un evento che può avere **probabilità diverse** a seconda della **condizione** verificatasi prima.

Sia Ω, $\mathbb{P}$ uno spazio di probabilità, se $D_1, D_2, \dots, D_k$ è una partizione di Ω, t.c. $\bigcup_{i=1}^{k} D_i = \Omega$,

- La probabilità di $A \subseteq \Omega$ ($A =$ evento che segue uno degli eventi D_i) vale:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(D_i)\mathbb{P}(A|D_i)$$



- La probabilità di un preciso D_i dato l'esito dell'evento A condizionato dagli eventi D_i:

$$\mathbb{P}(D_i|A) = \frac{\mathbb{P}(D_i)\mathbb{P}(A|D_i)}{\sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(D_j)\mathbb{P}(A|D_j)}$$

Esempio

Si lancia una moneta

- Se esce **testa**, si pesca una **pallina** da un sacco con 2 palline nere e 3 bianche
- Se esce **croce**, si pesca una **pallina** da un sacco con 2 palline nere e 1 bianca.

L'esito della moneta, condiziona la probabilità che la pallina estratta sia **bianca**.

Se le **condizioni** possono **influire** sulla **probabilità** dell'evento sono **disgiunte**.
In questo caso lo sono perché, se esce testa o croce, la probabilità sarà:

- $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = 1/2$
- Se esce **testa**:
  - $\mathbb{P}(\{\text{esce bianca}\}|T)$ = n. bianche/tot palline = 3/5
- Se esce **croce**:
  - $\mathbb{P}(\{\text{esce bianca}\}|C)$ = n. bianche/tot palline = 1/3
- Calcolo:

  $\mathbb{P}(\{\text{esce bianca}\}) = \mathbb{P}(T)*\mathbb{P}(\{\text{esce bianca}\}|T) + \mathbb{P}(C)*\mathbb{P}(\{\text{esce bianca}\}|C)$

  $= 1/2 * 3/5 + 1/2 * 1/3 = 3/10 + 1/6 = 14/30 \approx 0.4666 = 46.66\%$

Altro lancio di una moneta

- Se esce **testa**, si pesca una **pallina** da un sacco con 3 palline nere e 2 bianche
- Se esce **croce**, si pesca una **pallina** da un sacco con 2 palline nere e 1 bianca

Quale è la probabilità che esca una pallina bianca?

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(T)*\mathbb{P}(B|T) + \mathbb{P}(C)*\mathbb{P}(B|C) = 1/2 * 2/5 + 1/2 + 1/3 = 11/30$

Sapendo che è uscita una pallina bianca, qual è la probabilità che sia uscito testa?

$$\mathbb{P}(T|B) = \frac{\mathbb{P}(T\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(B|T)}{\mathbb{P}(T)\mathbb{P}(B|T)+\mathbb{P}(C)\mathbb{P}(B|C)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{6}{11}$$

Bayes

mercoledì 18 dicembre 2024 18:29

Enunciato del teorema di Bayes

Siano E, F due eventi con probabilità non nulle.
La probabilità **condizionata** di E rispetto a F e: $\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E) \cdot \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F)}$

Nel caso in cui abbiamo che n eventi $D_1, D_2, \ldots, D_n$ siano una partizione di Ω,
e sia $A \subseteq \Omega$ un evento che segue uno degli eventi D_i,
sapendo che si è verificato A, possiamo calcolare la probabilità che si sia verificato ogni singolo D_i:

$$\mathbb{P}(D_i|A) = \frac{\mathbb{P}(D_i) \cdot \mathbb{P}(A|D_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(D_j) \cdot \mathbb{P}(A|D_j)}$$

Se A, B sono disgiunti, allora $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$

Variabile Aleatoria

mercoledì 18 dicembre 2024 19:33

Dato uno schema $(\Omega, \mathbb{P})$ una **variabile aleatoria "non conosciuta"** X è una **funzione** su Ω a valori reali:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$X = \begin{cases} x_1 & \omega_1 = \dots \\ \dots \\ x_n & \omega_n = \dots \end{cases}$$

$$Im(X) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$$

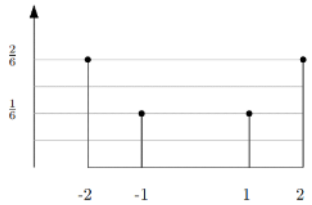
Tale variabile rappresenta una "**scommessa**" sull'esito di un esperimento, ad **ogni evento elementare** (o insieme di eventi elementari) è **associato** un **valore reale.**

Un **esperimento aleatorio** è un esperimento il cui esito **non può essere predetto** con certezza prima di essere eseguito

Esempio

1) Lancio dado equo tra 2 giocatori A e B
    - Esce 1 o 2 → A paga 2 euro
    - Esce 3 → A paga 1 euro
    - Esce 4 → B paga 1 euro
    - Esce 5 o 6 → B paga 2 euro

$$X_1 = \begin{cases} -2 \text{ se } \omega = 1,2 \\ -1 \text{ se } \omega = 3 \\ 1 \text{ se } \omega = 4 \\ 2 \text{ se } \omega = 5,6 \end{cases}$$



   Tale pagamento è esprimibile come **variabile aleatoria**, dove il val. rappresenta la quota vinta/persa da A

   In questo caso, X_1 **non è iniettiva** (a ogni elemento del dominio (nel nostro caso x_k) un elemento del codominio (ω_k)), poiché se lo fosse stato, sarebbe possibile conoscere l'esito del dato (nel nostro caso, se A paga 2 euro, non sappiamo se è uscito 1 o 2 (-2 → 1,2) , pero se A paga 1 euro sappiamo con certezza che è uscito 3 (-1 → 3))

   Una var aleatoria X può essere rappresentata come un **istogramma**

2) Lancio di 2 monete
    - Ω = {(T, T), (T, C), (C, T), (C, C)
    - X potrebbe rappresentare il num di **teste ottenute**
        - X((T, C)) = 1
        - X((T, T)) = 2

La funzione di probabilità aleatoria è segnata come $\mathfrak{I}$ sul pdf CasuFrost, μ sul pdf SimoneLid e H^X su pdf della prof

Definizione CasuFrost

Si concentra sulla **probabilità dell'immagine**.

La probabilità $\mathbb{P}$ su Ω, **induce** una probabilità **sull'immagine** della variabile aleatoria, denominata **Im(X)**, mediante la **funzione $\mathfrak{I}$.**

- **Immagine di X**: l'immagine è l'insieme di tutti i val. che X può assumere al variare di ω
    $Im(X) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$
- Probabilità di un certo val **$x_1 \in$ Im(X)**:
    Sia $x_1 \in Im(X)$, $\mathfrak{I}(\{x_1\}) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_1\})$
  Rappresenta la probabilità che X assuma un certo valore x_1, definisce la **distribuzione** della var aleatoria
- **Notazione**: $\mathfrak{I}(\{x_1\})$ si può scrivere anche come $\mathbb{P}(X = x_1)$

Definizione SimoneLid

Espande il concetto introducendo la **probabilità indotta**

- La probabilità $\mathbb{P}$ induce una probabilità μ_X su Im(X) mediante (distribuzione):
    $\mu_X(\{\omega\}) = \mathbb{P}(x) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x)$
- **Formula inversa**: Si può anche esprimere come:
    $\mu_X = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$
  Dove $X^{-1}(B)$ è il **pre-immagine** di un insieme $B \subseteq \mathbb{R}$, cioè:
    $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \subset B\}$
  E rappresenta l'insieme di tutti gli ω che portano a valori di X in B
- **Probabilità uniforme**: Se $\mathbb{P}$ è **uniforme** (tutti gli ω in Ω sono **equiprobabili**), allora:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{|X = x|}{|\Omega|}$$

    - $|X = x|$: num. di eventi $\omega \in \Omega$ t.c. $X(\omega) = x$
    - $|\Omega|$: cardinalità spazio campionario

Definizione Prof Nappo

Descrive come la variabile aleatoria **suddivide** lo spazio campionario in **sottoinsiemi**

- **Partizione**: Una **partizione** di Ω è un insieme di **sottoinsiemi disgiunti** $\{H_1^X, H_2^X, \dots, H_n^X\}$, dove ogni $\mathbf{H_k^X}$ corrisponde agli $\omega \in \Omega$ che portano al val x_k di X:
  $H_k^X := \{\omega \in \Omega: X(\omega) = x_k\}$, k = 1, 2, …, n
  Più sinteticamente:
  $H_k^X := \{X = x_k\}$, k = 1, 2, …, n
  dove x_k sono i val distinti che X può assumere
- **Dipendenza da x**: Per mettere in evidenza il val di x, si scrive:
  $H_x^X = \{X = x\}$, per $x \in Im(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

In genere si indicano con $\mathbf{x_i}$ gli elem. di $Im(X) = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Esempi

1) Lancio di un dado
   - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   - X = val. mostrato dal dado

   Probabilità che X = 3 è:
   $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 3\})$
   $\mathbb{P}(X = 3) = |X = 3|/|\Omega| = 1/6$

   La partizione dello spazio campionario è:
   $H_x^X = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$
   Ogni H_x^X è un insieme **singoletto**, ad es:
   $H_3^X = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 3\} = \{3\}$
2) Facciamo **n lanci** di moneta in cui $p = \mathbb{P}(T)$
   - X = **num di teste**
   - $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i = [0, 1]\}$
   - $X(\omega) = \text{numero di } 1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$
   - $Im(X) = \{0, 1, \dots, n\}$
   - $\Im(\{k\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$

Valore Atteso

sabato 28 dicembre 2024 11:51

Il **valore atteso** di una var aleatoria X è una funzione E definita nel seguente modo:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in Im(x)} x \cdot \Im(\{x\})$$

È dato dalla **somma** dei **possibili val** di tale variabile, ciascuno **moltiplicato** per la **probabilità** di **verificarsi**

- Il valore atteso è **lineare**:
  - E(aX) = aE(X), dove a ∈ ℝ
  - E(aX ± b) = aE(X) ± b
  - E(aX ± bY) = aE(X) ± bE(Y)

- Prese due var. aleatorie indipendenti X, Y:
  E(X + Y) = E(X) + E(Y)
  E(X * Y) = E(X) * E(Y)

Proprietà di monotomia
La **proprietà di monotomia del val. atteso** afferma che se ci sono due val. alea. X e Y, e **X ≤ Y** (X minore o uguale a Y per ogni esito), allora **E(X) ≤ E(Y)**

$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

se X ha val. in ℕ allora $X^5 \leq X^{10} \Rightarrow E(X^5) \leq E(X^{10})$

Esempio

Lancio di un dado tra giocatori A e B

- X = quota in euro vinta da A in base all'esito del dado (se negativa, è la quota che A deve pagare a B)

In questo gioco A è **ovviamente avvantaggiato**, dato che in soli **2 esiti** su 6 dovrà pagare.
In base a questo schema, **A** si troverà a **vincere più denaro di B**.
Tale quota è data da:

E(X) = (-1)*(2/6) + 0*(1/6) + 1*(1/6) + 2*(2/6) = 0.5

Quindi per rendere il gioco equo, A prima di ogni lancio dovrebbe dare a B 0.5 euro

$$X = \begin{cases} -1 \text{ se } \omega = 1, 2 \\ 0 \text{ se } \omega = 3 \\ 1 \text{ se } \omega = 4 \\ 2 \text{ se } \omega = 5, 6 \end{cases}$$

Valore Atteso Condizionato

Date due var aleatorie X, Y **non indipendenti** tra loro, la probabilità condizionata è:

$$\mathbb{P}(y|X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}$$

Il **valore atteso condizionato** è il val atteso calcolato usando la distribuzione condizionata:

$$E(Y|X = x) = \sum_{y \in Im(Y)} y\mathbb{P}(y|X = x)$$

Varianza

sabato 28 dicembre 2024 14:00

La **varianza** di una var aleatoria è una funzione **V** (maggiore di 0), definita come:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \sum_{x \in Im(X)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \Im(\{x\}) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

o più semplicemente:

$$V(X) = \sum_{x \in Im(X)} [x - E(X)]^2 \mathbb{P}(x)$$

E rappresenta lo **scarto quadratico medio**, ossia una misura di quanto i val. si **discostino quadraticamente** dal **val. atteso**.
Una variazione **piccola** indica che la var aleatoria è **distribuita vicino** al val. medio.

Se V(X) = 0, allora X è **costante**

Esempi

1) Lancio di un dado tra giocatori A e B
   - X = quota in euro vinta da A in base all'esito del dado (se negativa, è la quota che A paga a B)
   - E(X) = 0.5

$$X_1 = \begin{cases} -1 \text{ se } \omega = 1,2 \\ 0 \text{ se } \omega = 3 \\ 1 \text{ se } \omega = 4 \\ 2 \text{ se } \omega = 5,6 \end{cases}$$

   In questo caso la **varianza** rappresenta il **rischio** che si corre, dato che, se la **possibile perdita** fosse molto alta, la varianza risulterebbe a sua volta elevata.
   In questo caso si ha:
   $V(X_1) = (-1 - 0.5)^2 * (2/6) + (0 - 0.5)^2 * (1/6) + (1 - 0.5)^2 * (1/6) + (2 - 0.5)^2 * (2/6) =$
   $= 2.25 * (2/6) + 0.25 * (1/6) + 0.25 * (1/6) + 2.25 * (2/6) = (4.5 + 0.25 + 0.25 + 4.5)/6 = 9.5/6 = (19/2)/6 = 19/12 \approx 1.58$
   La **variazione non è elevata**, in quanto il rischio di perdita (rispetto a quello di vincita) non rapp
   differenza di denaro.

$$X_2 = \begin{cases} -50 \text{ se } \omega = 1,2 \\ 0 \text{ se } \omega = 3 \\ 1 \text{ se } \omega = 4 \\ 2 \text{ se } \omega = 5,6 \end{cases}$$

   Se dovessi cambiare il denaro perso si avrebbe:
   $V(X_2) = (-50 - 0.5)^2 * (2/6) + (0 - 0.5)^2 * (1/6) + (1 - 0.5)^2 * (1/6) + (2 - 0.5)^2 * (2/6) \approx 850$

2) $X = \begin{cases} -3 & \omega = 1 \\ -2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{cases}$
   - $\mathbb{P}(x_i)$ = 1/6 (equiprobabile)
   - E(X) = (-3)*(1/6) + (-2)*(1/6) + (-1)*(1/6) + 1*(1/6) + 2*(1/6) + 3*(1/6) = (1/6)*(-3 -2 -1 +1 +2 +3) = (1/6)*0 = 0
   - $V(X) = (-3 - 0)^2 * (1/6) + (-2 - 0)^2 * (1/6) + (-1 - 0)^2 * (1/6) + (1 - 0)^2 * (1/6) + (2 - 0)^2 * (1/6) + (3 - 0)^2 * (1/6) =$
     $= (1/6)*((-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2) = (1/6)*(9 + 4 + 1 + 1 + 4 + 9) = 28*(1/6) = 14/3 \approx 4.66$

Covarianza

domenica 29 dicembre 2024 12:32

La **covarianza** è un **valore** associato a 2 var aleatorie che misura la **relazione di dipendenza** di due var aleatorie.
Semplicemente fornisce una **misura di quanto le due varino assieme**.

$$\mathrm{COV}(X,Y)=\begin{cases}0 & X,Y \text{ indip.}\\ E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y) & X,Y \text{ non indip.}\end{cases}$$

In cui:

$$E(X\cdot Y)=\sum_{x\in Im(X)}\sum_{y\in Im(Y)}(xy)\cdot\mathbb{P}(X=x\cap Y=y)$$

La varianza invece:

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2[\underbrace{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}_{\text{covarianza}}]$$

La covarianza può anche essere espressa come la **differenza** tra il **val atteso** del loro **prodotto** e il **prodotto** dei loro val **attesi**

- Cov(X, Y) = E(X*Y) - E(X) * E(Y)

Proprietà:
Cov(X, X) = V(X)
Cov(aX, bX) = a*b*V(X)
Cov(aX+bY, Z) = a*Cov(X,Z) + b*Cov(Y, Z)
Cov(X, aY+bZ) = a*Cov(X,Y) + b*Cov(X,Z)
Cov(aX+bY, cW+dZ) = a*c*Cov(X,W) + a*d*Cov(X,Z) + b*c*Cov(Y,W) + b*d*Cov(Y,Z)

Esso può essere negativo o positivo e se Cov(X, Y) è **particolarmente grande**, significa che sapendo che **X è grande** allora è **più probabile** che anche **Y è grande**.
In generale la covarianza è limitata:

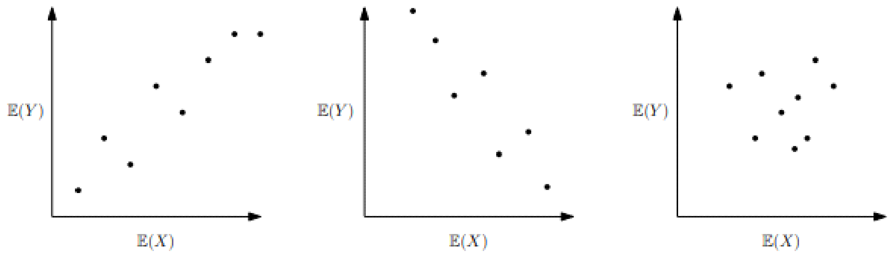
$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{(V(X))} * \sqrt{(V(Y))}$

Esempio

Eseguo una misurazione su un circuito

- X = differenza di potenziale
- Y = intensità di corrente

La misurazione ci permette di osservare gli **effetti aleatori**, dovuti a fattori da noi non controllabili, poiché, nonostante la differenza di potenziale sia **costante**, diverse misurazioni differiscono nei val decimali.
Eseguo **n misurazioni**, e rappresento su un piano cartesiano il risultato, in cui E(X) è l'asse delle ascisse e E(Y) delle ordinate



$\mathrm{Cov}(X,Y)>0$ — X,Y sono positivamente correlate
$\mathrm{Cov}(X,Y)<0$ — X,Y sono negativamente correlate
$\mathrm{Cov}(X,Y)\simeq 0$ — X,Y non sono correlate

Se la covarianza fra due var aleatorie è **prossima allo zero**, ciò può indicare che esse sono **indipendenti**

Esempio 2

Abbiamo 2 var aleatorie X e Y con la seguente distribuzione congiunta:

X	Y	ℙ(X = x, Y = y)
1	2	0.2
1	3	0.3
2	2	0.1
2	3	0.4

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{x\in\mathrm{Im}(X)}x\cdot\mathbb{P}(X=x)$$

1) **Calcolo il val atteso di X e Y**
   - Calcoliamo le **probabilità marginali** di X:
     $\mathbb{P}(X = 1) = 0.2 + 0.3 = 0.5$
     $\mathbb{P}(X = 2) = 0.1 + 0.4 = 0.5$
   - Calcoliamo E(X)
     E(X) = 1 $\mathbb{E}[XY] = \sum_{x\in \mathrm{Im}(X)} \sum_{y\in \mathrm{Im}(Y)} x \cdot y \cdot \mathbb{P}(X = x, Y = y)$
   - Calcoliamo le **probabilità marginali** di Y:
     $\mathbb{P}(Y = 2) = 0.2 + 0.1 = 0.3$
     $\mathbb{P}(Y = 3) = 0.3 + 0.4 = 0.7$
   - Calcoliamo E(Y)
     E(Y) = 2 * 0.3 + 3 * 0.7 = 2.7

2) Calcolo di E(X*Y)
   - Calcoliamo ogni termine:
     - X = 1, Y = 2 ⇒ $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
     - X = 1, Y = 3 ⇒ 1 * 3 * 0.3 = 0.9
     - X = 2, Y = 2 ⇒ 2 * 2 * 0.1 = 0.4
     - X = 2, Y = 3 ⇒ 2 * 3 * 0.4 = 2.4
   - Sommiamo
     E(X*Y) = 0.4 + 0.9 + 0.4 + 2.4 = 4.1

3) **Calcolo della covarianza**
   Cov(X, Y) = 4.1 - (1.5 * 2.7) = 4.1 - 4.05 = 0.05

Conclusione
La covarianza tra X e Y è
Cov(X, Y) = 0.05
Una **covarianza positiva**, seppur molto piccola, indica che X e Y tendono a variare insieme leggermente nella stessa direzione ma potrebbero essere indipendenti tra loro.

Il fatto che siano indipendenti **non è implicato necessariamente**.
Per determinare l'indipendenza tra X e Y, bisogna verificare la condizione
$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) * \mathbb{P}(Y = y), \forall x \in \mathrm{Im}(X), y \in \mathrm{Im}(Y)$

Nel nostro caso, verifichiamo l'indipendenza tra X = 1, Y = 2:
$\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 0.2$
$\mathbb{P}(X = 1) = 0.2+0.3 = 0.5$
$\mathbb{P}(Y = 2) = 0.1+0.2 = 0.3$

Se fossero indipendenti, avremmo:
$\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \mathbb{P}(X = 1) * \mathbb{P}(Y = 2) = 0.5*0.3 = 0.15$

Però $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 0.2 \neq 0.15$, quindi X e Y **non sono indipendenti**

Var Indipendenti

sabato 28 dicembre 2024 19:17

Date due var aleatorie X, Y esse si dicono **indipendenti** se
$\forall x \in Im(X)$ e $\forall y \in Im(Y)$ vale che:

$$\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) * \mathbb{P}(Y = y)$$

Se prendo n var aleatorie $X_1, X_2, \dots, X_n$ esse sono indipendenti se:

$$\mathbb{P}(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) * \dots * \mathbb{P}(X_n = x_n),\ \forall x_i \in Im(X_i)$$

Proposizione: Se X e Y **sono indipendenti**, vale che:

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Dimostrazione della Proposizione

- Sviluppo la **varianza della somma**:
  - Scrivo la definizione di varianza
    $$V(X + Y) = E([X + Y - E(X + Y)]^2)$$
  - Scompongo E(X+Y)
    $$E([X + Y - E(X + Y)]^2) = E([X - E(X) + Y - E(Y)]^2)$$
  - Applico la funzione quadratica
    $$E([X - E(X) + Y - E(Y)]^2) = E((X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2((X - E(X))*(Y - E(Y))))$$
  - Separo le 3 parti
    $$E((X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2((X - E(X))*(Y - E(Y)))) = E(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2 + 2E((X - E(X))*(Y - E(Y)))$$
  - Riscrivo la definizione di varianza per $E(X - E(X))^2$ e $E(Y - E(Y))^2$
    $$E(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2 + 2E((X - E(X))*(Y - E(Y))) = V(X) + V(Y) + 2E((X - E(X))*(Y - E(Y)))$$
- Il termine $E((X - E(X))*(Y - E(Y)))$ è detto **covarianza** (Covarianza) (val numerico che fornisce una misura di quanto le due varino assieme)
- Se X e Y sono **indipendenti**, bisogna dimostrare che la covarianza è **nulla**.
  Se la covarianza è nulla, allora **E(X*Y) = E(X) * E(Y)**, questo perché (per linearità del val atteso):
  $$E((X - E(X))*(Y - E(Y))) = 0$$
  $$E(X*Y - X*E(Y) - E(X)*Y + E(X)*E(Y)) = 0$$
  $$E(X*Y) - E(X)*E(Y) - E(X)*E(Y) + E(X)*E(Y) = 0$$
  $$E(X*Y) - E(X)*E(Y) = 0$$
  $$E(X*Y) = E(X)*E(Y)$$
- Quindi bisogna dimostrare che, se X, Y sono **indipendenti**, **E(X*Y) = E(X) * E(Y)**
  Passo finale della dimostrazione :
  $$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)Y(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot \sum_{y \in Im(Y)} y \cdot \sum_{\omega \in \Omega | X(\omega)=x \wedge Y(\omega)=y} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \tag{62}$$
- Per indipendenza : $\mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$ Riscrivo :
  $$\sum_{x \in Im(X)} x\mathbb{P}(X = x) \cdot \sum_{y \in Im(Y)} y\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \quad \blacksquare \tag{63}$$

Vincita Media in un Gioco Equo

martedì 7 gennaio 2025 09:44

Dimostreremo che se un gioco è **equo**, la **vincita media** (val. atteso), sarà sempre 0 per qualunque strategia adottata

Si consideri il gioco della **roulette**, dove non vi è lo 0, quindi la pallina può finire o **su rosso o su nero**

Prima strategia

Si adotta una certa strategia:
- al **1° turno**, si gioca **1 euro**
  - **Vittoria**: prendo il raddoppio e finisco
  - **Sconfitta**: gioco la quota giocata in precedenza ma raddoppiata
- Gioco per **n turni**
  - **Vittoria**: la somma vinta sarà sempre 1 euro
  - **Sconfitta**: la somma persa sarà 2^n - 1 euro
- Definisco la var. aleatoria V che rappresenta la vincita, dove p = 1/2 ad ogni turno
$$V = \begin{cases} 1 \text{ con probabilità } 1 - \frac{1}{2^n} \\ -(2^n - 1) \text{ con probabilità } \frac{1}{2^n} \end{cases}$$
- La prob. di **vittoria** è **molto alta**, e la **quota vinta è bassa**
- La prob. di **sconfitta** è **molto bassa** ma la **quota persa è molto alta** (somma esponenziale di denaro rispetto ai lanci fatti)
- Calcolo val. atteso di V:
$$E(V) = (1 - 1/2^n) - (2^n - 1) * 1/2^n = (1 - 1/2^n) - (1 - 1/2^n) = 0$$

Ora vediamo che, qualsiasi strategia si adotti, la vincita media sarà sempre zero
- Introduco X_i, che restituisce:
  - 1, se all'**i-esimo** turno è uscito **rosso**
  - 0, se è uscito **nero**
- Ovviamente $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, X_i e X_j sono **indipendenti**.
- **Generalizziamo** l'idea di **strategia** adottata
  - Al 1° turno, punto sul rosso una **quantità f_0, se $f_0 < 0$** allora sto puntando sul **nero** una quantità **$|f_0|$**
  - Chiamo V_1 la vincita al 1° turno, che varrà $V_1 = f_0 * X_1$
  - Al 2° turno, la **quota** da scommettere, sarà **influenzata dal risultato**,
    sarà quindi una funz. di parametro X_1, ossia **$f_1(X_1)$**,
    la prossima vincita sarà $V_2 = V_1 + f_1(X_1) * X_2 = f_0 * X_1 + f_1(X_1) * X_2$
  - Ad ogni **k-esimo turno**, vi sarà una funz. $f_k(X_1, X_2, \dots, X_{k-1})$, che deciderà la somma da puntare in base ai risultati precedenti
  - Su n turni, si avrà che:
$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(X_1 \dots, X_{i-1}) \cdot X_i$$
  - L'insieme di queste funz. f_i arbitrarie, stabilisce una **strategia di gioco**.
- Calcoliamo il val. atteso per **linearità**:
$$\mathbb{E}(V_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(f_{i-1}(X_1 \dots, X_{i-1}) \cdot X_i) = \text{ per indipendenza } = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(f_{i-1}(X_1 \dots, X_{i-1})) \cdot \mathbb{E}(X_i)$$
- Ma $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, si ha che $E(X_i) = 0$, quindi:
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(f_{i-1}(X_1 \dots, X_{i-1})) \cdot \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(f_{i-1}(X_1 \dots, X_{i-1})) \cdot 0 = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$$

Legge dei Grandi Numeri

martedì 7 gennaio 2025 11:00

Prima di enunciare il teorema della **legge dei grandi numeri**, si consideri il seguente esempio:

Vi è una var. aleatoria **binomiale S_n**, si effettuano n lanci ed ha parametro p.
Vogliamo vedere che succede se il num. di lanci n, **tende all'infinito.**
Piuttosto che considerare S_n, considero S_n/n e si avrà che:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} = \frac{k}{n}) = 0$$

La prob. che S_n assuma uno specifico val., con l'aumentare dei lanci verso l'infinito tende a 0.

Si consideri ora il **val. atteso** $E(S_n/n)$, che è uguale a p (il val. atteso della binomiale è n*p)
Vedremo che in un **intorno di ampiezza 2δ** del val. atteso, la prob. che S_n assuma val. contenuto nell'intorno, sarà certa

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(p-\delta \leq \frac{S_n}{n} < p+\delta) = 1$$

Graficamente nell'istogramma, se il num. di lanci tende all'infinito, le stanghette al di fuori di un intorno del val. atteso tenderanno a diventare sempre più piccole, tendendo a 0

Enunciato

Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ delle var. aleatorie **indipendenti** e **identicamente distribuite** (hanno la stessa distribuzione), e sia

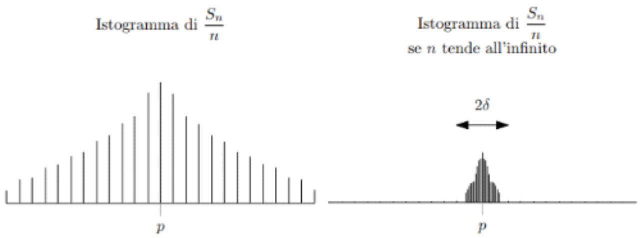
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X_i) \quad \forall i \text{ dato che la distribuzione è identica}$$

E ne consegue che:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_i)| < \delta) = 1 \quad \forall \delta > 0$$



Prima di dimostrare tale enunciato introduciamo 2 concetti

Lemma

Sia Y una var. aleatoria **arbitraria** ma **sempre positiva**, e sia λ un **num. reale sempre positivo**, si ha che:

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Y)$$

Dimostrazione Lemma

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) = \sum_{y \in Im(Y) | y > \lambda} 1 \cdot \mathbb{P}(Y=y) \leq \sum_{y \in Im(Y) | y > \lambda} \frac{y}{\lambda} \cdot \mathbb{P}(Y=y) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda} \sum_{y \in Im(Y)} y \cdot \mathbb{P}(Y=y) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Y) \quad \blacksquare$$

Lemma (Chebyshev)

Sia X una var. aleatoria, e λ un **num. reale sempre positivo**, si ha che:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot \mathbb{V}(X)$$

Questo vuol dire che la prob. che X e il suo val. atteso differiscano al più di λ, è sempre minore o uguale a $(1/\lambda^2)*V(X)$

Dimostrazione Lemma

Sia X la nostra var. aleatoria, definisco una nuova var. aleatoria $Y = (X - E(X))^2$, noto che Y è **sempre positivo**, ma anche λ lo è, quindi posso applicare il **lemma precedente** e dire che:

$$\mathbb{P}(Y \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Y) \implies \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Ma (X - E(X)) è V(X) quindi:

$$\mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq (1/\lambda^2)*V(X)$$

Dimostrazione Legge dei Grandi Numeri

Calcoliamo il val. atteso di S_n/n:

$$\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n} \cdot (n \cdot \mathbb{E}(X_i)) = \mathbb{E}(X_i)$$

Quindi il val. atteso, è identico al val. atteso di una qualsiasi delle var X_i che la compone

Calcoliamo la varianza: (non ho intenzione di riscrivere e screenshottare tutto, copio direttamente tutto il testo)

$$\mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \text{ uso l'indipendenza } = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n^2}n \cdot \mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X_i) \qquad (92)$$

Possiamo affermare che : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{V}(X_i) = 0$. Voglio dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_i)| < \delta) = 1 \quad \forall\delta > 0$, allora, mi basta dimostrare che il suo complementare abbia probabilità 0. Passo al complementare, ossia :

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_i)| \geq \delta)$$

So che $\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \mathbb{E}(X_i)$, quindi riscrivo :

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| \geq \delta)$$

Ma questo, è proprio il caso del *Lemma di Chebyshev*, quindi so che :

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| \geq \delta) \leq \frac{1}{\lambda^2}\mathbb{V}(\frac{S_n}{n})$$

Adesso, voglio sapere cosa succede se n tende all'infinito, ho dimostrato prima che, se $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = 0$, quindi posso riscrivere :

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| \geq \delta) \leq 0$$

Ma la probabilità non può essere minore di zero, quindi è certo che :

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| \geq \delta) = 0$$

Essendo questo il complementare di $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| < \delta)$, ne concludo che :

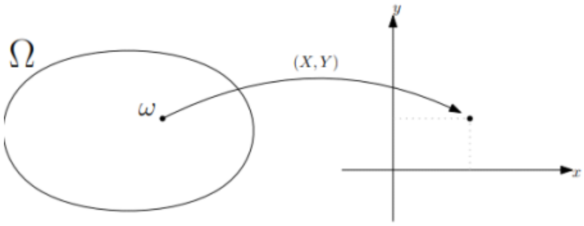
$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| < \delta) = 1 - \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| \geq \delta) = 1 - 0 = 1$$

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(\frac{S_n}{n})| < \delta) = 1 \qquad \blacksquare$$

Distribuzione Congiunta di Var. Aleatorie

martedì 7 gennaio 2025 18:19

Siano X e Y due var. aleatorie, si vuole guardare alla distribuzione di esse in maniera **congiunta**, ad ogni evento, sarà quindi associato il risultato delle due var., che sarà un punto su $\mathbb{R}^2$



$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$

$Im(X, Y) \subset Im(X) \times Im(Y) \subset \mathbb{R}^2$

Scrivendo le due var. come: $X = \begin{cases} x_1 & \omega_{x_1} \\ x_2 & \omega_{x_2} \\ x_3 & \omega_{x_3} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} y_1 & \omega_{y_1} \\ y_2 & \omega_{y_2} \end{cases}$

La **distribuzione congiunta** è data da:

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x \wedge Y(\omega) = y\}) \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \frac{|X = x, Y = y|}{|\Omega|}$$

Possiamo rappresentare la distribuzione congiunta **sotto forma di tabella**:

	x_1	x_2	x_3	Dist Y
y_1	$\mathbb{P}(x_1, y_1)$	$\mathbb{P}(x_2, y_1)$	$\mathbb{P}(x_3, y_1)$	$\mathbb{P}(y_1)$
y_2	$\mathbb{P}(x_1, y_2)$	$\mathbb{P}(x_2, y_2)$	$\mathbb{P}(x_3, y_2)$	$\mathbb{P}(y_2)$
Dist X	$\mathbb{P}(x_1)$	$\mathbb{P}(x_2)$	$\mathbb{P}(x_3)$	1

Dalla distribuzione congiunta possiamo calcolare le **distribuzioni marginali** (singole) di X e Y, sommando le righe per X e le colonne per Y:

$$\mathbb{P}(X = x_0) = \sum_{y \in Im(Y)} \mathbb{P}(X = x_0, Y = y) \qquad \mathbb{P}(Y = y_0) = \sum_{x \in Im(X)} \mathbb{P}(X = x, Y = y_0)$$

Esempi

1) Lancio dado
   - Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   - p = 1/6
   - Consideriamo due var. aleatorie X e Y, la cui immagine rappresenta la somma in denaro vinta (o persa) in base all'esito del dado:

     $$X = \begin{cases} -1 \text{ se } \omega = 1, 2 \\ 0 \text{ se } \omega = 3, 4 \\ 1 \text{ se } \omega = 5, 6 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} -2 \text{ se } \omega = 1, 2, 3 \\ 2 \text{ se } \omega = 4, 5, 6 \end{cases}$$

   - Rappresento la **probabilità congiunta** con una tabella in cui le righe sono l'immagine di X e le colonne l'immagine di Y

Y \ X	-1	0	1
-2	2/6	1/6	0
2	0	1/6	2/6

     - ℙ(X = -1, Y = -2) = |X = -1, Y = -2|/|Ω| = |{1, 2} ∩ {1, 2, 3}|/6 = |{1, 2}|/6 = 2/6
     - ℙ(X = 0, Y = -2) = |X = 0, Y = -2|/|Ω| = |{3, 4} ∩ {1, 2, 3}|/6 = |{3}|/6 = 1/6
     - ℙ(X = -1, Y = 2) = |X = -1, Y = 2|/|Ω| = |{1, 2} ∩ {4, 5, 6}|/6 = |∅|/6 = 0/6 = 0
   - Si possono ricavare le distribuzioni delle var. (**distribuzioni marginali**) dalla tabella, sommando tutti i val. di una riga, è possibile ottenere la **distribuzione di Y** e **X**

Y \ X	-1	0	1	
-2	2/6	1/6	0	2/6 + 1/6 = 3/6
2	0	1/6	2/6	2/6 + 1/6 = 3/6
	2/6+ 0 = 2/6	1/6+ 1/6 = 2/6	2/6+ 0 = 2/6	

	-1	0	1	Dist X
-2	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{3}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$
Dist Y	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

   - Sapendo il risultato di X possiamo cambiare le prob. del risultato di Y:

$$X = -1 \implies \begin{cases} \mathbb{P}(Y = -2 | X = -1) = 1 \\ \mathbb{P}(Y = 2 | X = -1) = 0 \end{cases}$$
$$X = 0 \implies \begin{cases} \mathbb{P}(Y = -2 | X = 0) = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(Y = 2 | X = 0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$X = 1 \implies \begin{cases} \mathbb{P}(Y = -2 | X = 1) = 0 \\ \mathbb{P}(Y = 2 | X = 1) = 1 \end{cases}$$

- Sapendo il risultato di Y possiamo cambiare le prob. del risultato di X:

$$Y = -2 \implies \begin{cases} \mathbb{P}(X = -1 | Y = -2) = \frac{2}{3} \\ \mathbb{P}(X = 0 | Y = -2) = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(X = -1 | Y = -2) = 0 \end{cases}$$
$$Y = 2 \implies \begin{cases} \mathbb{P}(X = -1 | Y = 2) = 0 \\ \mathbb{P}(X = 0 | Y = 2) = \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(X = -1 | Y = 2) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Var. Indicatori

giovedì 30 gennaio 2025 13:48

Le **variabili indicatori** sono var. aleatorie che assumono **solo due valori** (come la var. **Bernoulliana**):

- 1 se l'evento **accade** (E)
- 0 altrimenti (E^C)

Sono utili nel **conteggio di eventi** nelle estrazioni, poiché permettono di modellare la presenza o l'assenza di un elemento di un campione.
Semplifica il calcolo del val. atteso, poiché, invece di calcolare il val. atteso di una var. complessa, possiamo **sommare il val. atteso** di singole var. indicatori

Sia X una var. aleatoria che conta il num. di volte in cui si verifica un certo evento in un insieme di prove.
Definiamo la **variabile indicatore** di un evento $\mathbf{A_i}$ come:

$$I_i = \begin{cases} 1\ se\ l'evento\ A_i\ si\ verifica \\ 0\ se\ l'evento\ A_i\ non\ si\ verifica \end{cases}$$

Il **val. atteso di $\mathbf{I_i}$** sarà:

$E[I_i] = 1*\mathbb{P}(A_i) + 0*(1-\mathbb{P}(A_i)) = \mathbb{P}(A_i)$

La **somma** di queste var. indicatori fornisce il **num. totale di successi** in un esperimento:

$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$ dove n è il num. tot di prove

Il **val. atteso di X** è dato da:

$E[X] = E[I_1] + E[I_2] + \dots + E[I_n]$

Poiché $E[I_i] = \mathbb{P}(A_i)$, otteniamo:

$E[X] = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n)$

Esempi

Lancio di un dado

- Lanciamo un dado 10 volte
- Vogliamo contare quante volte esce il num. 3

Definiamo la var. indicatore per il lancio i-esimo:

$$I_i = \begin{cases} 1\ se\ esce\ 3\ nel\ lancio\ i \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$

Il num. tot. di volte in cui otteniamo 3 è:

$X = I_1 + I_2 + \dots + I_{10}$

Dato che la prob. di ottenere **3** è $\mathbf{\mathbb{P}(A_i) = 1/6}$, il val. atteso è:

$E[X] = 10*(1/6) \approx 1.67$

Estrazione da un mazzo di carte

- Abbiamo 40 carte e ne estraiamo 5 **senza rimpiazzo**
- Vogliamo calcolare il **num. di assi estratti**

Definiamo la var. indicatore:

$$I_i = \begin{cases} 1\ se\ la\ i-esima\ carta\ è\ un\ asso \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$

Il num. tot. di assi estratti è:

$X = I_1 + I_2 + \dots + I_5$

La prob di estrarre un asso **alla prima estrazione è $\mathbf{\mathbb{P}(A_1) = 1/10}$** e per le successive estrazioni, la prob. cambia a seconda delle carte gia estratte. Tuttavia, possiamo stimare il val. atteso usando la **linearità dell'attesa:**

$E[X] = 5*(1/10) = 1/2 = 0.5$

Certa

sabato 28 dicembre 2024 19:14

È il caso in cui la var. aleatoria X è una funzione **costante**, quindi assume sempre lo **stesso valore**, indipendentemente dall'esito:

$\exists x^{\sim} \in \mathbb{R} \mid X(\omega) = x^{\sim}\ \forall \omega \in \Omega$ quindi $|\mathrm{Im}(X)| = 1$

Formalmente significa che $X(\omega) = x^{\sim}$ per ogni $\omega \in \Omega$, dove $x\sim$ è **una costante**

Ovviamente la varianza è nulla

$V(X) = 0$

Esempio

Lancio di una moneta

- $\Omega = \{T, C\}$
- X = assegna sempre 1 indipendentemente dal risultato (cioè $X(\omega) = 1$ per ogni $\omega \in \Omega$)
- $X(T) = 1$
- $X(C) = 1$
- $\mathrm{Im}(X) = \{1\}$
- $\mathbb{P}(X = 1) = 1$
- $E[X] = 1$
- $V(X) = E[(1 - 1)^2] = E[0] = 0$

Bernoulli

sabato 28 dicembre 2024 19:15

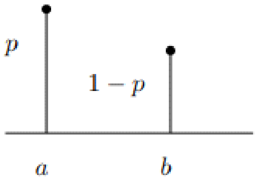
$X \sim Bern(p)$
"~" significa "**distribuito come**"

- p = probabilità

$Im(X) = \{0, 1\}$

La **var aleatoria di Bernoulli** è un modello che descrive un esperimento binario.
Sia $p \in [0, 1]$ una **costante reale**, e X una var aleatoria che ha solo 2 val nell'immagine:
$Im(X) = \{a, b\}$, dove $\Im(\{a\}) = p$ e $\Im(\{b\}) = 1-p$.
Dove rispettivamente a = 1 e b = 0

- $\mathbb{P}(X = 1) = p$
- $\mathbb{P}(X = 0) = 1-p$



In questo caso **varianza** e **valore atteso** valgono:

- $E(X) = 0*(1-p) + 1*p = p$
- $V(X) = (0 - p)^2 * (1-p) + (1 - p)^2 * p = p^2 * (1-p) + (1-p) * p = p * (p * (1-p) + (1-p)(1-p)) = p * ((1-p)(p + 1 - p)) = p * (1-p)$
- Se p = 1/2, la varianza è **massima** [1/2 * (1 - 1/2) = 1/2 * 1/2 = 1/4]
- Se p = 1 o p = 0, la varianza è nulla [1*(1-1) = 1*0 = 0 / 0*(1-0) = 0]

Esempi

1) Lancio di una moneta:
   - $\Omega = \{T, C\} = \{1, 0\}$
   - $\mathbb{P}(X = 1) = p = 0.5$
   - $\mathbb{P}(X = 0) = 1-p = 0.5$
   - $E(X) = 0 * (1-0.5) + 1 * 0.5 = 0.5$
   - $V(X) = 0.5 * (1-0.5) = 0.5 * 0.5 = 0.25$
2) Lancio di un dado:
   - Definiamo X:
     - X = 1, se esce 6
     - X = 0, in caso contrario
   - $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1/6$
   - $\mathbb{P}(X = 0) = 1-p = 5/6$
   - $E(X) = 1/6$
   - $V(X) = (1/6) * (5/6) = 5/36 \approx 0.139$

Binomiale

sabato 28 dicembre 2024 16:38

X ~ Bin(n, p)

- p = probabilità

Im(X) = {0, …, n}

n ∈ ℕ

La **var. aleatoria Binomiale** descrive il num. di **successi** in una **serie** di **prove indipendenti**, ognuna con probabilità **p di successo**

Considerando lo **schema di Bernoulli**:

- $\Omega = \{0, 1\}^n$
- $p = \mathbb{P}(\omega_i) = 1$
- X = conta il num. di successi (1)
- $X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i.$
- Im(X) = {0, …, n}

Es. Se n = 2 si ha:

$$X = \begin{cases} 0 \text{ se } \omega = 00 \\ 1 \text{ se } \omega = 01 \\ 1 \text{ se } \omega = 10 \\ 2 \text{ se } \omega = 11 \end{cases}$$

Abbiamo già visto in precedenza qual è la probabilità che il num. di 1 sia k:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Il **valore atteso** è:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = n \cdot p$$

La **varianza**:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) + (\mathbb{E}(X))^2 = np + n(n-1)p^2 + (np)^2 = np(1-p)$$

Spiegazione Valore Atteso

1. Fattorizziamo $k \cdot \binom{n}{k}$:

Utilizziamo la relazione:

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

che si può derivare dalla definizione di coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Moltiplicando per k, otteniamo:

$$k \cdot \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Sostituendo nella somma, abbiamo:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot p^k (1-p)^{n-k}.$$

2. Rinominiamo l'indice della somma:

Per semplificare i limiti della somma, poniamo $j = k - 1$, quindi:

$$k = j + 1, \quad k = 1 \implies j = 0, \quad k = n \implies j = n - 1.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\mathbb{E}[X] = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \cdot p^{j+1} (1-p)^{(n-1)-j}.$$

3. Fattorizziamo p:

Notiamo che $p^{j+1} = p \cdot p^j$. Possiamo quindi scrivere:

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot p \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \cdot p^j (1-p)^{(n-1)-j}.$$

4. Riconosciamo una distribuzione binomiale:

La somma:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \cdot p^j (1-p)^{(n-1)-j}$$

è la somma delle probabilità di una distribuzione binomiale con $n - 1$ prove e probabilità di successo p. Questa somma vale 1 (perché la somma delle probabilità di tutte le uscite di una variabile aleatoria è sempre 1).

5. Risultato finale:

Quindi otteniamo:

$$\mathbb{E}[X] = n \cdot p \cdot 1 = n \cdot p.$$

Dimostrazione della Varianza

Dimostrazione che

V(X) = E(X²) - (E(X))²

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x \in Im(X)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Quindi calcoliamo il valore di $\mathbb{E}(X^2)$ per la variabile aleatoria di bernoulli :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 1 \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=2}^{n-1} (k-1) \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Sostituisco $h = k - 2$:

$$np + n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)!}{(h-2)!(n-h-2)!} p^h (1-p)^{n-h-2} = np + n(n-1) \binom{n-2}{h} p^h (1-p)^{n-h-2}$$

$$= np + n(n-1)p^2$$

Quindi :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) + (\mathbb{E}(X))^2 = np + n(n-1)p^2 + (np)^2 = np(1-p)$$

Ipergeometrica

venerdì 24 gennaio 2025 16:57

X ~ Hyper(n, m, r)

- n = popolazione del campione
- m = num. di unità con data caratteristica
- r = num. campioni estratti senza reimmissione

La **variabile aleatoria ipergeometrica** descrive il num. di **successi in un campione di dim. fissa**, **estratto senza ripetizione e senza reimmissione.**
È molto utile per problemi in cui hai una popolazione finita divisa in **due categorie** (successi e insuccessi) e desideri analizzare un campione estratto da essa.

Avendo in un'urna A con **n** elem. totali, vengono estratte **r** elem. di B (con cardinalità **m**)

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

- n = num. di elementi totali del campione
- m = num. di elementi del tipo interessato nel campione
- r = num. di elementi estratti (o totale estrazioni effettuate)
- k = num. di elementi estratti del tipo interessato
- $\binom{n}{r}$ è il num. di possibili estrazioni di r elementi da A
- $\binom{m}{k}$ è il num. di possibili estrazioni di k elementi tra gli m di B
- $\binom{n-m}{r-k}$ è il num. di possibili estrazioni dei restanti r-k elementi tra gli n-h non in B

Il **valore atteso:**

E(X) = $\frac{m*r}{n}$

La **varianza:**

V(X) = $\frac{m-n}{m-1}(n*p)(1-p)$

Esempio

- Vengono effettuate **5 estrazioni senza ripetizione** da un'urna contenente **7 palline nere** e **8 bianche**.
  Posto X il num. di **palline nere estratte**, vogliamo sapere la probabilità che vengano **estratte 4 palline nere**

  X ~ Hyper(15, 7, 5) (15 = tot. palline, 7 = nere, 5 = estrazioni)

  $\mathbb{P}$(X = 4) = $\frac{\binom{7}{4}\binom{8}{1}}{\binom{15}{5}} = \frac{(7*5)*8}{3*7*11*13} = \frac{40}{429}$

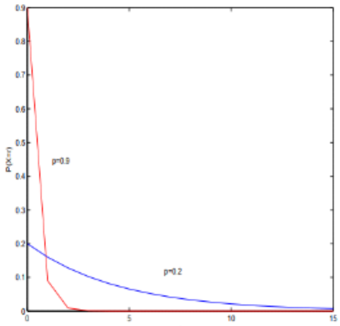
Geometrica

domenica 29 dicembre 2024 12:31

$X \sim Geom(p)$
- p = probabilità di successo in ogni prova

$Im(X) = \{1, \dots, \infty\}$

La **variabile aleatoria geometrica** si comporta in modo simile alla var aleatoria binomiale
Si ha uno spazio di probabilità $\Omega = \{0, 1\}$, cioè una parola lunga **infinite cifre** che possono essere 0 o 1
$X = Inf(i \mid \omega_i = 0)$: restituisce il num. di **tentativi necessari** affinché si ottenga il **primo 1**
$Im(X) = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots, \infty\}$



Le probabilità decrescono esponenzialmente in base alla probabilità di successo

La distribuzione è definita come:

$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} * p, k = 1, 2, 3, \dots$
- p: probabilità di successo in ogni prova
- $(1 - p)^{k-1}$: probabilità di **fallire** per k-1 tentativi consecutivi prima del primo successo

Il **valore atteso**:

$E(X) = 1/p$

La **varianza**:

$V(X) = (1-p)/p^2$

Funzione di sopravvivenza

Data una var. aleatoria geometrica X, la probabilità che 1 **non sia presente nei primi k numeri**:

$G(k) = \mathbb{P}(\{\text{Non è uscito testa nei primi k lanci}\})\ \mathbb{P}(X > k) = (1 - p)^k$

Esempio:
- p = 0.2
- X = num. prove necessarie per ottenere il primo successo
- Calcoliamo $\mathbb{P}(X > 3)$:

  $\mathbb{P}(X > 3) = (1 - 0.2)^3 = 0.8^3 = 0.512$
- Quindi c'è una probabilità del 51.2% che il primo successo **non avvenga nei primi 3 tentativi**

Perdita di memoria

Data una var. aleatoria geometrica X, la probabilità che 1 **sia presente dopo k+l numeri** sapendo che nei **primi k non c'era**:

$\mathbb{P}(X = k+l \mid X > k) = \mathbb{P}(l)$

Esempio:
Calcoliamo $\mathbb{P}(X = 5 \mid X > 3)$:
- p = 0.2
- Quale è la probabilità che il primo successo si **verifichi al 5° tentativo**, sapendo che nei **primi 3 tentativi non c'è stato successo**

  $\mathbb{P}(X = 5 \mid X > 3) = \mathbb{P}(X = 2)$
- Calcolo $\mathbb{P}(X = 2)$:

  $\mathbb{P}(X = 2) = (1 - 0.2)^{2-1} * 0.2 = 0.8 * 0.2 = 0.16$
- Quindi:

  $\mathbb{P}(X = 5 \mid X > 3) = 0.16$

La proprietà di **perdita di memoria** implica che **non importa quanto tempo sia passato senza successo**, la distribuzione futura rimane **invariata** e **dipende** solo dalla **prob. di successo p**.

Esempi

1) Calcoliamo la probabilità che testa uscirà prima o poi:

   $$\mathbb{P}(\{\text{ prima o poi esce testa }\}) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

   Con l'andare avanti dei lanci, tendendo all'infinito, la probabilità che la **prima testa** esca al k-esimo lancio tende a 0:

   $$\lim_{k \to +\infty}(1-p)^{k-1} \cdot p = 0$$

2) p = 0.2 (20%)

X = num. tentativi necessari affinché si ottenga il primo successo

a. **Calcolo prob. primi val. di X**
   - k = 1:
     $\mathbb{P}(X = 1) = (1 - 0.2)^{1-1} * 0.2 = 0.8^0 * 0.2 = 1 * 0.2 = 0.2$
   - k = 2:
     $\mathbb{P}(X = 2) = (1 - 0.2)^{2-1} * 0.2 = 0.8 * 0.2 = 0.16$
   - k = 3:
     $\mathbb{P}(X = 3) = (1 - 0.2)^{3-1} * 0.2 = 0.8^2 * 0.2 = 0.64 * 0.2 = 0.128$
   - k = 4:
     $\mathbb{P}(X = 4) = (1 - 0.2)^{4-1} * 0.2 = 0.8^3 * 0.2 = 0.512 * 0.2 = 0.1024$

   Le probabilità **decrescono esponenzialmente**
b. **Valore Atteso e Varianza**
   - E(X):
     $E(X) = 1/p = 1/0.2 = 5$

     In media sono necessari **5 tentativi** per ottenere il primo successo
   - V(X):
     $V(X) = (1-p)/p^2 = (1-0.2)/(0.2)^2 = 0.8/0.04 = 20$

3) In una produzione di chiodi si **scarta** in media un **5%** della produzione poiché inferiore al minimo permesso.
   Il controllo conta quanti chiodi vengono presi prima di prenderne uno imperfetto.
   p = 0.05 (5%)
   X = num. chiodi presi fino al primo imperfetto
   $\mathbb{P}(X = k) = (0.95)^{k-1} * 0.05$

r	1	2	3	4	5
P(X=r)	0.05	0.0475	0.0451	0.0429	0.0407

4) In un laboratorio, un esperimento ha il **30%** di probabilità di dare una **risposta positiva**
   Quante prove occorre fare per avere una probabilità del **90%** di una risposta positiva?
   p = 0.3 (30%)
   X = num. di prove
   - $\mathbb{P}(X = 1) = 0.7^0 * 0.3 = 0.3$
   - $\mathbb{P}(X = 2) = 0.7^1 * 0.3 = 0.21$
   - ...
   - $\mathbb{P}(X = 6) = 0.7^5 * 0.3 = 0.88$
   - $\mathbb{P}(X = 7) = 0.7^6 * 0.3 = 0.91$

   Dobbiamo effettuare **7 esperimenti** prima di avere una probabilità del 90% di una risposta positiva

Bin. Negativa (Pascal)

domenica 29 dicembre 2024 12:31

X ~ BinNeg(r, p)

- r = num. successi
- p = probabilità successo di una prova

Im(X) = {r, r+1, …, ∞}

La **distribuzione binomiale negativa** fornisce il num. di **prove necessarie** per ottenere un **certo num. di successi** in una **serie di prove indipendenti**.

Essa fornisce la **probabilità di ottenere r successi nelle prime k prove.**

- **probabilità di successo p:** prob. di ottenere un successo in una **singola prova**
- **num. di successi desiderati r**: **num.** tot di **successi** che si vogliono **ottenere**
- **num. prove necessarie k: num. prove** da effettuare **per** ottenere **k successi**

Quindi X è una var. aleatoria **binomiale negativa** che presa una **stringa** potenzialmente infinita di **0 e 1** conta quando appare l'**n-esimo 1**:

X = num. prove necessarie per ottenere r successi

Im(X) = {r, …, +∞)

Probabilità che 1 esca la r-esima volta dopo k:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

- $k \geq r$: num. **totale di prove** (inclusi successi e fallimenti)
- $\binom{k-1}{r-1}$: num. **combinazioni r-a successi tra k-1 prove**
- p: prob. **successo** di una prova
- 1-p: prob. **fallimento** di una prova

Val. atteso:

E(X) = r/p

Varianza:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Esempi

1) Probabilità di ottenere **3 teste** lanciando una moneta (**p = 0.5**).
   Se supponiamo che siano necessari **5 lanci** per ottenere 3 teste, allora la prob. di successo è:
   $$P(X = 5) = \binom{4}{2} \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^2 = 0.3125$$
   Quindi la prob. di ottenere **3 teste in 5 lanci** è del 31.25%

2) Vogliamo ottenere **r = 3 successi** in un esperimento con p = 0.25
   Qual è la prob. che siano necessarie esattamente **k = 5 prove**?
   $$\mathbb{P}(X = 5) = \binom{5-1}{3-1} \cdot (0.25)^3 \cdot (1-0.25)^{5-3}$$
   - Coefficiente binomiale:
     $$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$
   - $(0.25)^3$:
     $$(0.25)^3 = 0.015625$$
   - $(1 - 0.25)^2$:
     $$(1-0.25)^2 = 0.75^2 = 0.5625$$
   - Totale:
     6 * 0.015625 * 0.5625 ≈ 0.053

Quindi la prob. di ottenere 3 successi in 5 prove è circa 0.053 (5.3%)

Geometrica vs Binomiale Negativa

lunedì 30 dicembre 2024 17:17

La differenza tra la **distribuzione geometrica** e la **distribuzione binomiale negativa** è che:
- **Geometrica**:
  - **Descr: num. totale di tentativi necessari prima di un successo**.
  - **Descr. semplice:** (tempo necessario per **ottenere** il **primo successo**)
  - **Parametri**: probabilità di successo
- **Binomiale negativa**:
  - **Descr: num. di fallimenti prima del k-esimo successo**
  - **Descr. semplice:** (tempo necessario per **ottenere** un **certo num. fisso** di **successi**)
  - **Parametri:** num. desiderato di successi; probabilità di successo

in una successione di esperimenti **bernoulliani indipendenti e identicamente distribuiti**

Esempio

Lancio di una moneta
p = 0.5

- La prob. di **ottenere il primo successo in 3 prove** si calcola con la **distribuzione geometrica**:
  - X = num. prove necessarie per ottenere il primo successo
    $\mathbb{P}(X = 3) = (1 - 0.5)^2 * 0.5 = 0.5^2 * 0.5 = 0.5^3 = 0.125$
- La prob. di **ottenere 3 successi in 5 prove** si calcola con la **distribuzione binomiale negativa**:
  - X = num. prove necessarie per ottenere 3 successi
    $\mathbb{P}(X = 5) = \binom{4}{2} * 0.5^3 * 0.5^2 = (4! / ((4-2)! * 2!) * 0.5^5 = (4! / (2!*2!)) * 0.5^5 = (24/4) * 0.5^5 = 6*0.03125 = 0.1875$

Poisson

domenica 29 dicembre 2024 12:31

X ~ Poisson(λ)

- λ = num. medio di eventi attesi per unità di tempo

Im(X) = {0, …, ∞)

Esempio:
Un azienda vuole calcolare la prob., in un lasso di tempo determinato, di **arrivo** dei suoi **clienti** in un'ipotetica coda

- λ **tasso degli arrivi**: in **un unità di tempo**, la **prob**. che **arrivi un cliente** è λ
- **n intervalli**: **l'intervallo** di tempo si **divide** in **n intervalli** di uguale dimensione
- **λ/n**: prob. che **ad ogni intervallo arrivi un cliente**

Ora l'azienda, vuole essere più precisa, e rendere gli **intervalli** di tempo **ancora più piccoli**, aumentando n.
L'azienda vuole calcolare la prob. che arrivi un cliente in un **istante infinitesimale** di tempo.

Quindi la **var. aleatoria di Poisson** è usata per modellare il **num. di eventi** che si verificano in un **intervallo di tempo** o spazio fissato, quando gli eventi accadono in modo **indipendente** e con una **probabilità costante**

Definizione

Sia λ ∈ (0, ∞) e $X^{(n)}$ una var. aleatoria **binomiale** di parametro λ/n, la **var. aleatoria di Poisson**, è tale var binomiale, con il presupposto che **n tenda all'infinito**

$$\lim_{n \to +\infty} X^{(n)}$$

La distribuzione della var. aleatoria di **Poisson** vale esattamente:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X^{(n)} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

dove:

- k ∈ {0, 1, 2, …}: num. eventi
- λ > 0: num. medio di eventi attesi per unità di tempo

Val. atteso (media) e Varianza:

E(X) = λ
V(X) = λ

Var Indipendenti di Poisson

Date due var. di Poisson X_1, X_2:

X_1 ~ Poisson(λ_1)
X_2 ~ Poisson(λ_2)

La prob. che $X_1 + X_2 = k$:

$$\mathbb{P}(k) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_1)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}$$

Quindi possiamo scrivere $X_1 + X_2$ come:

$X_1 + X_2$ ~ Poisson($\lambda_1 + \lambda_2$)

Approssimazione

Quando n (num. prove) è **grande** e p (prob. successo) **è piccolo**, la bin. Bin(n, p) si può **approssimare** con la distribuzione di **Poisson**, dove λ = n * p

X ~ Bin(n, p) → X ~ Poisson(λ = n*p)

Esempi

Num chiamate in un'ora

In un call center arrivano in media λ = 3 chiamate all'ora
Qual è la prob. che arrivino esattamente **2 chiamate in un'ora**?

- Calcolo

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{3^2 e^{-3}}{2!}$$

- Calcolo e^{-3}:
  $e^{-3} \approx 0.0498$
- Calcolo prob.
  $\mathbb{P}(X = 2) = (9 * 0.0498)/2 \approx 0.224$

- La prob. che arrivino esattamente 2 chiamate in un'ora è ≈ 22.4%

Incidenti stradali

Su una strada si verificano in media λ = 4 incidenti al giorno
Qual è la prob. che **non** si verifichino incidenti in un giorno?

- Calcolo
  $$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} = e^{-4}$$
- Calcolo e^{-4}
  $e^{-4} \approx 0.0183$
- Calcolo prob.
  $\mathbb{P}(X = 0) = (1 * 0.0183)/1 = 0.0183$

- La prob. che non ci siano incidenti in un giorno è del 1.83%

Multinomiale

domenica 29 dicembre 2024 12:31

$(X_1, X_2, \ldots, X_k) \sim \text{Multi}(n, k, \{p_1, p_2, \ldots, p_k\})$
- n = num. eventi
- k = num. possibile di esiti
- $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ = probabilità per ogni esito

$Im(X_i) = \{0, \ldots, n\}$
$n \in \mathbb{N}$

La distribuzione **multinomiale** è una **generalizzazione** della **distribuzione binomiale**.
Mentre **la binomiale** descrive **il num. di successi in due eventi**, **la multinomiale** è usata quando **abbiamo più di due eventi**

Una var. aleatoria **multinomiale** è una var. X che presi **n eventi composte da 1, …, k esiti**, con $p_1, \ldots, p_k$ probabilità associate, conta **quanti eventi cadono in ciascuna categoria (evento) in n prove indipendenti.**

La distribuzione è

$$\mathbb{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i$$

- **k**: num. **possibili esiti**
- **n**: num. **eventi**
- $\{p_1, \ldots, p_k\}$: rispettive probabilità per ogni esito
- Ogni esito $i \leq k$ (k esiti) ha probabilità p_i, dove
- $n_i > 0$: num. eventi in ogni esito
- $n_1 + \ldots + n_k = n$

Val. atteso:
$E(X_i) = n * p_i$

Varianza:
$V(X) = n * p_i * (1 - p_i)$

Covarianza tra due esiti i e j:
$Cov(X_i, X_j) = -n * p_i * p_j$
(perché un evento in un esito riduce il num. di eventi disponibili per gli altri esiti)

La **distribuzione marginale di X_i**:

$$\mathbb{P}(n_i) = \binom{n}{n_i} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{n - n_i}$$

Se sappiamo che un num. j è uscito n_j volte:

$$\mathbb{P}(n_i | n_j) = \frac{\mathbb{P}(n_i, n_j)}{\mathbb{P}(n_j)}$$

Esempi

- In un elezione ci sono 3 candidati: A, B, C
- Ci sono **n = 10 elettori**
- La prob. che un elettori voti per:
  - A: $p_A = 0.5$
  - B: $p_B = 0.3$
  - C: $p_C = 0.2$
- Qual è la prob. che 5 elett. votino per A, 3 per B e 2 per C?
- Calcolo distribuzione:

$$\mathbb{P}(X_1 = 5, X_2 = 3, X_3 = 2) = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} \cdot (0.5)^5 \cdot (0.3)^3 \cdot (0.2)^2$$

- Calcolo 10!, 5!, 3!, 2!:

$$10! = 3628800, \quad 5! = 120, \quad 3! = 6, \quad 2! = 2$$

$$\frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3628800}{120 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{3628800}{1440} = 2520$$

- Calcolo i termini probabilistici:

$$(0.5)^5 = 0.03125, \quad (0.3)^3 = 0.027, \quad (0.2)^2 = 0.04$$

- Moltiplico tutto:

$$\mathbb{P}(X_1 = 5, X_2 = 3, X_3 = 2) = 2520 \cdot 0.03125 \cdot 0.027 \cdot 0.04$$
$$= 2520 \cdot 0.00003375 = 0.08505$$

- Quindi la prob. è circa 8.5%

Riassunto

martedì 7 gennaio 2025 09:31

Bernoulli

Bernoulli si concentra su un **singolo esperimento** con **due possibili esiti: successo (1) o fallimento (0)**
X ~ Bern(p)
Im(X) = {0, 1}

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p, & \text{se } x = 1 \\ 1 - p, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{P}(X = x) = p^x * (1-p)^{1-x}$ per $x \in \{0, 1\}$

Val. Atteso:

E(X) = p

Varianza:

V(X) = p * (1 - p)

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Esperimenti con **solo esiti binari**, come il lancio di una moneta o un test vero/falso
- Come riconoscere:
    - Devi calcolare la prob. di **successo o insuccesso per un singolo evento**
    - L'esperimento ha **solo due esiti (binario)**

Esempio

Lancio un dado. Qual è la probabilità che esca 6?

- X = 1, se esce 6
- X = 0, in caso contrario

- $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1/6$
- $\mathbb{P}(X = 0) = 1-p = 5/6$
- E(X) = 1/6
- V(X) = 1/6 * (5/6) = 5/36

Binomiale

La Binomiale si concentra sul **num. di successi** in prove **indipendenti**
X ~ Bin(n, p)
Im(X) = {0, …, n}

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

- $\binom{n}{k}$ è il num. di **possibili successi su n prove**
- **k**: num. **successi**
- **n**: num. **prove**

Val. Atteso:

E(X) = n * p

Varianza:

V(X) = n * p * (1 - p)

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Modelli con **esiti ripetuti**, come test a risposta multipla o controlli qualità
- Hai **n prove indipendenti**, dove ognuna ha solo **due esiti** (**successo/insuccesso**) e vuoi calcolare il **num. di successi**

Esempio

Lancio una moneta **10 volte**. Qual è la probabilità di ottenere **6 teste?**

- **Prove tot:** n = 10
- **Prob. successo**: p = 1/2
- **Num. successi**: k = 6

Formula:

$$\mathbb{P}(X = 6) = \binom{10}{6} * \left(\frac{1}{2}\right)^6 * \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 210 * \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{105}{2^9} = \frac{105}{512}$$

E(X) = 10*1/2 = 5

V(X) = 10*1/2*1/2 = 5/2

Ipergeometrica

La Ipergeometrica si concentra sulla **probabilità di estrazione di un elem. di un certo tipo da un campione di due tipi di elementi**.

X ~ Hyper(n, m, r)

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

- n = num. di elementi totali del campione
- m = num. di elementi del tipo interessato nel campione
- r = num. di elementi estratti (o totale estrazioni effettuate)
- k = num. di elementi estratti del tipo interessato
- $\binom{n}{r}$ è il num. di possibili estrazioni di r elementi da A
- $\binom{m}{k}$ è il num. di possibili estrazioni di k elementi tra gli m di B
- $\binom{n-m}{r-k}$ è il num. di possibili estrazioni dei restanti r-k elementi tra gli n-h non in B

Val. Atteso:

$$E(X) = \frac{m*r}{n}$$

Varianza:

$$V(X) = \frac{m-n}{m-1}(n*p)(1-p) \text{ dove } p = r/m$$

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Si usa per l'estrazione **senza reinserimento**, dove gli elem. sono **finiti e divisi in due categorie**
- Serve per calcolare il num. di **successi** dell'estrazione di **un** elemento

Esempio

Urna con **10 palline rosse e 20 blu**. Estraggo **5 palline senza reinserirle**. Quale è la prob. di **ottenere 2 rosse?**

- **Palline tot:** n = 30
- **Rosse tot:** m = 10
- **Estrazioni effettuate**: r = 5
- **Probabilità:** p = 5/10 = 1/2

Formula:

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{30-10}{5-2}}{\binom{30}{5}} = \frac{(9*8)(10*19*6)}{29*13*6*7*9} = \frac{1520}{2639}$$

$$E(X) = \frac{10*5}{30} = \frac{5}{3}$$

Geometrica

La Geometrica si concentra sul **num. di prove necessarie (k) per il primo successo (p = 1) in una sequenza di esperimenti**

X ~ Geom(p)

Im(X) = {0, …, ∞} = ℕ

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

- **k**: num. **prove per il primo successo**

Val. Atteso:

$E(X) = \frac{1}{p}$

Varianza:

$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Analisi di processi **ripetuti fino al successo**, come difetti in una linea di produzione o tempi di attesa
- Utile per calcolare il **num. di prove necessarie** per ottenere il **primo successo,** dove ogni prova ha due esiti (successo/insuccesso)

Esempio

Qual è la probabilità di ottenere la **prima testa al terzo lancio di una moneta?**

- **Probabilità:** p = 1/2
- **Num. prove**: k = 3

Formula:

$\mathbb{P}(X = 3) = (1/2)^{3-1} * 1/2 = 1/4 * 1/2 = 1/8$

$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$V(X) = \frac{1-\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$

Binomiale Negativa

La Bin. Negativa si concentra sul **num. di prove necessarie** per ottenere **un certo num. di successi**

X ~ BinNeg(r, p)

Im(X) = {r, r+1, …, ∞}

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{k-r}$$

- **r**: num. **successi desiderati**
- **k**: num. **tot. di prove**

Val. Atteso:

$E(X) = \frac{r}{p}$

Varianza:

$V(X) = \frac{r*(1-p)}{p^2}$

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Modelli con **più successi**, come il num. di tentativi per raggiungere obiettivi multipli
- Utile per calcolare il **num. di prove necessarie** per ottenere un **certo num. di successi** (le prove sono indipendenti)

Esempio

Qual è la probabilità di ottenere **3 teste al quinto lancio di una moneta?**

- **Successi desiderati**: r = 3
- **Prove totali**: k = 5
- **Probabilità**: p = 1/2

Formula:

$\mathbb{P}(X = 5) = \binom{5-1}{3-1} * \left(\frac{1}{2}\right)^3 * \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \binom{4}{2} * \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 6 * \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{2^5} = \frac{3}{16}$

$E(X) = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$

$V(X) = \frac{3*\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = 3 * 2 = 6$

Poisson

Poisson si concentra sul **num. di eventi (k) in un intervallo** data una **media di eventi (λ)**
X ~ Poisson(λ)
Im(X) = {0, …, ∞} = ℕ

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

- **λ: media eventi nell'intervallo**

Val. Atteso:

E(X) = λ

Varianza:

V(X) = λ

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Gli eventi accadono a un **tasso medio noto λ** e sono **indipendenti** e **non possono accadere contemporaneamente**
- Eventi **distribuiti** nel tempo o nello spazio, come arrivi in una coda o guasti

Esempio

Un call center riceve in **media 5 chiamate l'ora**. Qual è la prob. di **ricevere esattamente 3 chiamate in un'ora?**

- **Tasso medio:** λ = 5
- **Num. eventi**: k = 3

Formula:

$\mathbb{P}(X = k) = \frac{5^3 * e^{-5}}{3!} = \frac{125}{6e^5}$

E(X) = V(X) = 5

Multinomiale

La Multinomiale si concentra sul **num. di successi di molteplici eventi indipendenti**
$(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ ~ Multi(n, k, $\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$)
$Im(X_i) = \{0, \ldots, n\}$

Distribuzione:

$$\mathbb{P}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$$

- **k**: num. **possibili esiti**
- **n**: num. **eventi**
- $\{p_1, \ldots, p_k\}$: rispettive probabilità per ogni esito
- Ogni esito $i \leq k$ (k esiti) ha probabilità p_i, dove
- $n_i > 0$: num. eventi in ogni esito
- $n_1 + \ldots + n_k = n$

Val. atteso:

$E(X_i) = n * p_i$

Varianza:

$V(X_i) = n * p_i * (1 - p_i)$
$Cov(X_i) = -n * p_i * p_j$, per $i \neq j$

Quando si usa e come riconoscerla in un testo

- Es. Distribuzione del voto in un'elezione o distribuzione delle preferenze in un sondaggio con più opzioni
- Conteggio di **esiti** in **categorie multiple**, come risultati di un dado a k facce lanciato n volte
-

Esempio

Formula:

$\mathbb{P}(X = x) =$

Densità di Probabilità (PDF)

mercoledì 8 gennaio 2025 17:50

Data una var. aleatoria X, questa è continua se $Im(X) \subseteq \mathbb{R}$ con **cardinalità potenzialmente infinità** (es. temperatura in una giornata, tempo necessario per completare un compito)

X ~ Unif([a, b])

Vi sono casi in cui una var., invece di avere un immagine con un sottoinsieme **numerabile** dei $\mathbb{R}$, ha un immagine **continua**, con **cardinalità non numerabile**.
In questi casi la probabilità che la var. aleatoria assuma un certo val. sarà sempre nulla

$\mathbb{P}(X = c) = 0, \forall c \in Im(X)$

La domanda da porci è se la probabilità che la var. aleatoria **risulti in un certo intervallo**:

$\mathbb{P}(X \in [x, x + \delta * x]) = f_X(x) * \delta * x + o(\delta * x)$

Densità di Probabilità

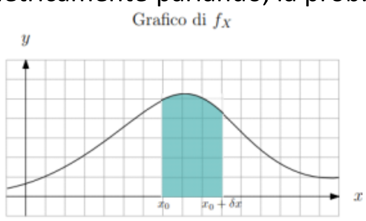
La funzione f_X è detta **densità di probabilità** e descrive come è **distribuita** la probabilità **nell'intervallo [a, b].**
Rappresenta esattamente il grafico sul piano cartesiano, dei valori che può assumere X, con le **rispettive probabilità**

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ f(x) & a < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

f_X sempre > 0

La probabilità che una var. aleatoria continua rientri in un certo intervallo è uguale alla **somma nel continuo** delle **prob. dei val. nell'intervallo**.
Dato che si parla di somma nel continuo, essa è uguale all'**integrale definito nell'intervallo di f_X**

Geometricamente parlando, la prob. sarà **uguale all'area sottesa dalla curva f_X**



$$\mathbb{P}(X \in [x_0, x_0 + \delta x]) = \int_{x_0}^{x_0 + \delta x} f_X(x)dx =$$

- Quindi per calcolare la prob. in un intervallo [c, d]:

  $$\mathbb{P}(c < x < d) = \int_c^d f_X(x)dx$$

- La somma di tutte le prob. di ogni evento, ossia **l'evento certo**, deve essere uguale a 1, quindi:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

- Il **val. atteso** sarà:

  $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx$$

- La **varianza** sarà $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$:

  $$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x)dx = E(X^2) - [E(X)]^2$$

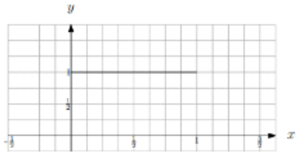
  $$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f_X(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x)dx\right]^2$$

Esempio

X ~ Unif([0, 1])
Sia X una var. aleatoria continua uniforme nell'intervallo [0, 1], si può immaginare come un

generatore di num. casuali, la funzione di densità sarà:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ 1 \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ se } x > 1 \end{cases}$$



- Siano a < b, si avrà che:

  $$\mathbb{P}(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = \int_a^b 1dx = |x|_a^b = b - a$$

  Esempio:
  - a = 0.3
  - b = 0.7
  - $\mathbb{P}(0.3 \leq x \leq 0.7) = \int_{0.3}^{0.7} 1dx = |x|_{0.3}^{0.7} = 0.7 - 0.3 = 0.4$
  - La prob. che x si trovi nell'intervallo [0.3, 0.7] è del 40%
- Val. atteso:

  $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_0^1 x \cdot 1dx + \int_0^{+\infty} x \cdot 0dx = \left|\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

- Varianza:

  $$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_0^1 x^2dx - \left[\int_0^1 xdx\right]^2 = \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left|\left(\frac{1}{2}\right)^2\right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Siano X e Y due val. aleatore **continue indipendenti**, con **funzioni densità f_X e f_Y**, allora la var. Z = X + Y, avrà densità:

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx$$

Distribuzione Uniforme Continua

Un esempio semplice di var. aleatoria continua è una **distribuzione uniforme continua**. Supponiamo che X possa assumere val in [a, b] con **uguale probabilità**.

La funzione di distribuzione uniforme continua è:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio

- Intervallo [0, 10]
- f(x) = $\frac{1}{10-0}$ = 0.1
- Per calcolare la prob. che X assuma un val. tra 2 e 5:

  $$\mathbb{P}(2 \leq X \leq 5) = \int_2^5 f(x)dx = \int_2^5 0.1dx = 0.1 * (5 - 2) = 0.3$$

- La prob. che X assuma un valore tra 2 e 5 è del 30%

Distribuzione Cumulativa (CDF)

giovedì 9 gennaio 2025 12:25

Data una var. aleatoria continua X, la **funzione distribuzione (cumulativa)** misura la prob. che la var. aleatoria X assuma un valore **minimo o uguale a x**:

$F_X : R \to [0, 1]$

$F_X(b) = \mathbb{P}(x \le b)$

Per calcolare la prob. che **x sia compreso in un intervallo**:

$\mathbb{P}(a < x \le b) = \mathbb{P}(x \le b) - \mathbb{P}(x \le a) = F_X(b) - F_X(a)$

Da questo possiamo dire che la funzione **distributiva**, è una **primitiva della densità**:

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$$

- È **crescente** quindi:
  $$F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad F_X(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$
- La derivata della funzione distribuzione (quando esiste) è uguale alla densità di probabilità
  $$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$$

Siano X, Y due var. aleatorie **continue e indipendenti**, con rispetti funz. **densità** f_X e f_Y, definiamo Z = max(X, Y), calcoliamo la distribuzione:

$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \le z) = \mathbb{P}(\max(X, Y) \le z) = \mathbb{P}(X \le z, Y \le z)$

Per indipendenza avrò:

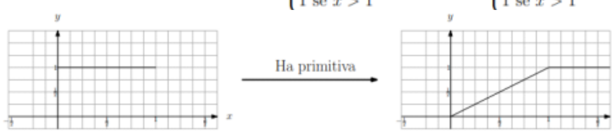
$\mathbb{P}(X \le z) * \mathbb{P}(Y \le z) = F_X(z) * F_Y(z)$

Esempi

La **distribuzione** della var. aleatoria **continua uniforme** nell'intervallo [0, 1]

- La funz. di **densità di probabilità** è:
  $$f_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
- CDF:
  $$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$
- Calcolo casi distinti della CDF:
  - **Caso x < 0**
    Quando x < 0, $f_X(t) = 0$ per tutti i t < 0
    Perché la PDF della distribuzione uniforme è **fuori dall'intervallo [0, 1]**
    $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$
  - **Caso 0 ≤ x ≤ 1**
    Quando 0 ≤ x ≤ 1, $f_X(t) = 1$ nell'intervallo [0, x]
    $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{0}^{x} 1\,dt = [t]_0^x = x - 0 = x$$
    Quindi
    $F_X(x) = x$, per $0 \le x \le 1$
  - **Caso** x > 1
    Quando x > 1, $f_X(t) = 0$ per t > 1
    Quindi la CDF **include tutta la prob. accumulata fino a x = 1**.
    La prob. totale è 1, perché la distribuzione uniforme su [0, 1] copre tutto lo spazio probabilistico
    $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} f_X(t)\,dt = 1$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ \int_0^x 1dy \text{ se } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ x \text{ se } 0 \le x \le 1 \\ 1 \text{ se } x > 1 \end{cases}$$



Esempi

Bernoulli

X ~ Bern(p)

La PDF di una var. **Bernoulli** con prob. di successo **p** è:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \end{cases}$$

La CDF è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

- $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- Calcolo casi della CDF:
  - **Caso x < 0:**
    nessun val. è possibile
    $F_X(x) = 0$
  - **Caso $0 \leq x \leq 1$**:
    L'unico val. possibile è X = 0
    $F_X(x) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$
  - **Caso x > 1**:
    Tutti i val. sono inclusi:
    $F_X(x) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = (1 - p) + p = 1$

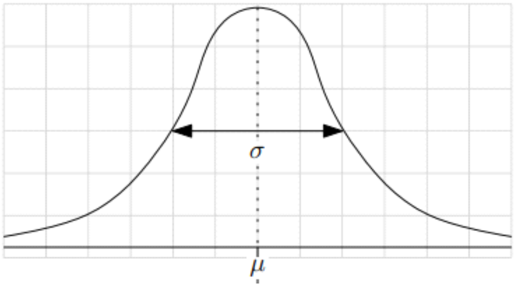
Gaussiana

domenica 12 gennaio 2025 16:11

Teoria degli Errori

Per i processi di misurazione, è nota la **teoria degli errori**;
Essa si occupa della classificazione degli errori dovuti alla misurazione di grandezze fisiche.

Quando si misura l'intensità di corrente passante per un punto in un circuito, si legge un val. reale, soggetto a fluttuazioni totalmente aleatorie, dovute dall'inaccuratezza dello strumento di misura, causante errori casuali, non sistematici.
Supponiamo di misurare un milione di volte tale corrente, questo sarà l'istogramma:



- **μ**: val "**teorico**" che dovrebbe assumere la misurazione
  (nell'esempio dell'intensità di corrente, sarebbe quello dato dalle leggi di Ohm)
- **σ**: **ampiezza di fluttuazione**

Variabile Aleatoria Gaussiana

Questo comportamento è descritto dalla val. aleatoria **Gaussiana** o **Normale** definita con:
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (l'ampiezza di fluttuazione è sempre positiva, quindi si scrive al quadrato)
La **densità di probabilità** è:
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

Essendo una densità, **l'area sotto al grafico è sempre 1**

Il **val. atteso** è:
$E(X) = \mu$

La **varianza** è:
$V(X) = \sigma^2$

Calcolo val. atteso e varianza CasuFrost pag. 42

Standardizzazione

Una qualsiasi var. **Gaussiana** può essere "**standardizzata"** in modo che i suoi parametri risultino
- **Media** $\mu = 0$
- **Varianza** $\sigma = 1$

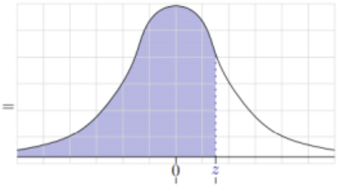
Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
Considero una nuova var. $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
Ossia misuro X a partire dalla media in unità σ, si avrà che $Z \sim N(0, 1)$
$X = \sigma Z + \mu$

Si può dimostrare che, l'integrale su tutta la retta reale della densità, **è uguale a 1**,
ma si **non può calcolare** analiticamente l'integrale della funz. di densità, in quanto non si può trovare una sua primitiva;
Sia **c** una **costante** e $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, non si può calcolare $\mathbb{P}(X < c)$

Tuttavia tramite il **calcolo numerico**, si può approssimare (con una precisione di 4 cifre decimali) l'**integrale definito**, di fatto esiste una tabella che stila i val. di tale integrale.

Sia ϕ una **funzione integrale** definita nel seguente modo:

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \mathbb{P}(X < z) =$$



La tabella ha sulle ascisse e sulle ordinate dei **val. reali**, ed alle **posizioni (i, j)** è riportato il **val. della funzione ϕ** della somma dei num. reali alle pos. i e j:

z	0.00	0.01	0.02	...	0.04	...	0.09
0.0	0.5	0.5040	0.5080	*	*	*	*
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	*	*	*	*
0.2	*	*	*	*	*	*	*
.	*	*	*	*	*	*	*
1.3	*	*	*	*	0.9099	*	*
.	*	*	*	*	*	*	*
3.4	*	*	*	*	*	*	0.9998

Nell'esempio riportato

$$\phi(1.3 + 0.04) = \phi(1.34) = \int_{-\infty}^{1.34} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.9099$$

$\mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \phi(b) - \phi(a)$
$\phi(-a) = 1 - \phi(a)$

Simmetria
Nel caso in cui volessimo calcolare la prob. che il val. sia maggiore di un certo num. $z \leq 0$ basta usare la **simmetria**:

$$\mathbb{P}(Z > z) = \mathbb{P}(Z < -z)$$

Esempio
Sia X ~ N(-1, 4), si calcoli $\mathbb{P}(X > 0)$
- Definisco Z:
$$Z = \frac{X - (-1)}{\sqrt{4}} = \frac{X}{2} \Rightarrow X = 2Z - 1$$
- Ho che:
$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(2Z + 1 > 0) = \mathbb{P}(Z > -1/2)$$
Che per **simmetria della densità** è uguale a $\mathbb{P}(Z < 1/2) = 0.6915$

$\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1) = \phi(1) - \phi(-1) = 0.8413 * 0.1587 = 0.6826$
La prob. che Z si trovi in [-1, 1] è del 68.26%
$\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1.5) = \phi(1.5) - \phi(-1) = 0.9332 * 0.1587 = 0.7745$
$\mathbb{P}(-3 \leq Z \leq 2) = \phi(2) - \phi(-2) = 0.9772 * 0.0228 = 0.9544$
$\mathbb{P}(-3 \leq Z \leq 3) = \phi(3) - \phi(-3) = 0.9987 * 0.0013 = 0.9974$

Verifica Area sotto al Grafico
- Dobbiamo verificare che:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(X)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{1}{2}*\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx = 1$$
- **Sostituzione per standardizzare:**
  - **Cambio di variabile**:
  $$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \mu + z\sigma$$
  - La **derivata** è:
    - $\frac{d}{dx}(x - \mu) = 1 - 0 = 1$
    - La costante σ rimane **invariata nel denom.** (poiché non dipende da x)
    $$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow dx = \sigma dz$$
  - **Sostituendo** abbiamo:
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{1}{2}*\frac{(\mu+z\sigma-\mu)^2}{\sigma^2}} \sigma dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz$$
- **Semplifichiamo il fattore**
  - Il σ in $\sqrt{2\pi\sigma^2}$ si può portare fuori dalla radice
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
- A questo punto il nostro integrale è identico a quello della **normale standardizzata** (Z ~ N(0, 1))
Gauss calcolò che tale integrale è uguale a 1 (non viene presentata dimostrazione nel corso)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$

Limite Centrale

lunedì 13 gennaio 2025 14:00

Teorema del Limite Centrale (TLC)

Questo teorema descrive come la **somma** (o la media) **di un grande num. di var. aleatorie indipendenti e identicamente distribuite** tenda a seguire una **distribuzione normale**, anche se le singole var. non sono normalmente distribuite.

Data una var. aleatoria binomiale $S_n \sim Bin(n, p)$, sapendo che per la **legge dei grandi numeri**:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = p$$

è possibile ricondurre l'**istogramma** di S_n/n ad una var. aleatoria **Gaussiana**:

$$\frac{S_n}{n} \to W\left(\mu = p, \sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Siano invece **n var. aleatorie indipendenti**: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **identicamente distribuite**, con:

- $E(Xi) = \mu$
- $V(Xi) = \sigma^2$

Consideri la loro somma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Abbiamo già visto nel **teorema della legge dei grandi numeri** che:

- $E(Sn) = n*\mu$
- $V(S_n) = n*\sigma^2$

Teorema di Moivre-Laplace

Esso afferma che per grandi valori di n, la **distribuzione binomiale** si può approssimare con una **distribuzione normale (gaussiana)**

Considero ora una nuova var:

$$Z_n = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$$

o

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Dove Z è una variabile standardizzata che segue una distribuzione normale standard N(0, 1), ovvero:

$$P(a \leq S_n \leq b) = P\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq Z \leq \frac{b - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

o

$$P(a \leq X \leq b) \approx P(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}})$$

Questa var. è ottenuta **standardizzando** S_n, cioè:

- Sottraiamo la media $n*\mu$ per ottenere una **variabile centrata**
- Dividiamo per la **deviazione standard** $\sqrt{\boldsymbol{n} * \boldsymbol{\sigma}^2}$ per ottenere una **variabile adimensionale**

Se n → ∞, tale var. aleatoria tenderà a diventare la **var. aleatoria Gaussiana normalizzata:**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} = Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leq \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}} \leq b) = \mathbb{P}(a \leq Z \leq b) = \phi(-a) \cdot \phi(b)$$

Tale teorema estende ciò che diceva la legge dei grandi numeri, quando **n tende ad infinito,** la somma di tali var. aleatorie, in un intorno del val. atteso, **convergerà** perfettamente alla funz. di densità della var. aleatoria **Gaussiana**

Interpretazione

Il teorema **generalizza** la **legge dei grandi numeri**, che afferma che la media S_n/n tende al val. atteso μ quando n → ∞

Quindi il Teorema del Limite Centrale aggiunge che la **distribuzione delle somme** si avvicina a una distribuzione normale,
indipendentemente dalla distribuzione originale delle X_i, purché:

- Le X_i abbiano **media e varianza finite**
- **n sia sufficientemente grande**

Supponiamo di voler calcolare la prob. che la somma S_n si trovi in [a, b]. Possiamo usare il TLC:

$$P(a \leq S_n \leq b) = P\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq Z \leq \frac{b - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

E usiamo la tabella della normale standard per calcolare le prob. corrispondenti

In base al risultato devo scegliere se questa probabilità è accettabile o no

Es. TLC

lunedì 13 gennaio 2025 14:46

Pesatura di bottiglie

Una macchina riempie bottiglie d'acqua e ogni bottiglia ha un peso casuale X_i, indipendente dagli altri, con:

- **Media μ** = 500 grammi (peso medio per bottiglia)
- **Deviazione standard σ** = 5 grammi

Il distributore produce n = 100 bottiglie in un lotto.
Vogliamo calcolare la prob. che il **peso totale** del lotto

$$S_n = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

sia compreso tra 49'850 grammi $\leq S_n \leq$ 50'150 grammi

Applichiamo il TLC

1) **Media e varianza di S_n**:
   - **Media**: $E(S_n) = n*\mu = 100*500 = 50'000$ grammi
   - **Deviazione standard**: $\sqrt{(Var(S_n))} = \sqrt{(n*\sigma^2)} = \sqrt{(100*25)} = \sqrt{2500} = 50$ grammi
2) **Probabilità standardizzata**:
   Per applicare il TLC, standardizziamo i val. a = 49850 e b = 50150

$$Z_a = \frac{a - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{49850 - 50000}{50} = -3$$
$$Z_b = \frac{b - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \frac{50150 - 50000}{50} = +3$$

3) **Calcolo della probabilità**:
   Dal TLC, sappiamo che S_n standardizzato segue una normale standard N(0, 1).
   La prob. che S_n sia tra **[a, b]** è:
   $\mathbb{P}(a \leq S_n \leq b) = \mathbb{P}(Z_a \leq Z \leq Z_b) = \mathbb{P}(-3 \leq Z \leq 3)$
4) **Uso la tabella della normale standard**
   - $\phi(3) = 0.9987$
   - $\phi(-3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$

   Quindi:
   $\mathbb{P}(-3 \leq Z \leq 3) = \phi(3) - \phi(-3) = 0.9987 - 0.0013 = 0.9974$
5) **Risultato**
   La prob. che il peso totale del lotto sia compreso tra 49'850 e 50'150 grammi è:
   $\mathbb{P}(49850 \leq S_n \leq 50150) = 0.9974$ (circa 99.74%)

Questa probabilità elevata indica che il peso totale del lotto sarà quasi sempre vicino al val. atteso 50'000, con una piccola variabilità dovuta al TLC

Verifica dell'Equità di una Moneta

Vediamo un altro caso di applicazione del **teorema del limite centrale**.
Vi è una **moneta presunta equa**.
Per decretare se è **effettivamente equa o no** bisogna effettuare un test statistico.

Si effettuano n = 10'000 lanci, e si osserva:

- **5'500 testa**
- **4'500 croce**

In base a questo dato vogliamo dare un decreto sull'equità, ci chiediamo se questa **fluttuazione** sia compatibile con il fatto che **la moneta sia equa**.

- S_n: var. aleatoria **binomiale** che restituisce il num. di **teste** nel lancio di una moneta equa
- **Probabilità lancio**: p = 0.5
- **Media**: $E(S_n) = n*p = 10000*0.5 = 5000$

- **Varianza**: $V(S_n)$ = n*p*(1-p) = 10000*0.5*0.5 = 10000 * 0.25 = 2500
- **Deviazione standard**: √($V(S_n)$) = √(2500) = 50

Vogliamo calcolare $\mathbb{P}(|S_n - E(S_n)| \geq 5500 - 5000) = \mathbb{P}(|S_n - 5000| \geq 500)$
Se la **prob.** di tale evento è **troppo piccola**, esso sarà un chiaro segnale che la **moneta non sia equa**.

Usiamo la **disuguaglianza di Chebysnev**, che ricordiamo affermare che:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot \mathbb{V}(X)$$

Ho quindi che:

$$\mathbb{P}(|S_n - 5000| \geq 500) \leq \frac{1}{500^2} \cdot \mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{500^2} \cdot 10^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{100}$$

So che la prob. che escano **5500 teste**, è **minore di un centesimo**, ma questo dato non è abbastanza preciso, ci serve una **approssimazione più specifica**.
Possiamo calcolare analiticamente questa probabilità, facendo tendere il num. di lanci verso ∞

Introduco una nuova var. casuale normalizzata:

$$Z = \frac{|S_n - \mathbb{E}(S_n)|}{\sqrt{\mathbb{V}(S_n)}}$$

So che, per il TLC, se n → ∞, allora Z tende ad essere una var. aleatoria **Gaussiana N(0, 1)**

$$P(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq 500) = P\left(\left|\frac{S_n - 5000}{50}\right| \geq \frac{500}{50}\right)$$

$$P(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq 500) = P(|Z| \geq 10)$$

La prob. $\mathbb{P}(|Z| \geq 10)$ corrisponde alla somma delle code della normale standard a destra Z = 10 e a sinistra Z = -10

Per una normale standard:

$\mathbb{P}(|Z| \geq 10) = 2 * \mathbb{P}(Z \geq 10)$

Per val. cosi grandi possiamo approssimare usando l'asintotico della funz. normale:

$\mathbb{P}(Z \geq 10) = \mathbb{P}(Z < -10) \sim e^{-10^2} = e^{-100}$

La probabilità $\mathbb{P}(|S_n - 5000| \geq 500)$, cioè che ci sia una discrepanza di almeno 500 teste dal num. effettivo, è praticamente nullo.
Questo indica che la **deviazione osservata non è compatibile** con l'ipotesi che la moneta sia equa, e possiamo concludere con alta confidenza che la **moneta non è equa**

Simulare una var. Aleatoria Arbitraria

lunedì 13 gennaio 2025 16:55

Risulta estremamente utile poter **simulare una var. aleatoria**.

Consideriamo X la var. aleatoria di **Bernoulli** di parametro **p**,
voglio simulare tale var., usando il generatore di num. casuali, ossia la var. aleatoria **uniforme U in [0, 1]**
In questa var., abbiamo tutta l'**aleatorietà** necessaria per **simulare X**, infatti X si può definire come:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq U \leq (1-p) \\ 1 & \text{se} \quad (1-p) < U \leq p \end{cases} \sim \text{V.A. di Bernoulli di parametro } p$$

Lemma

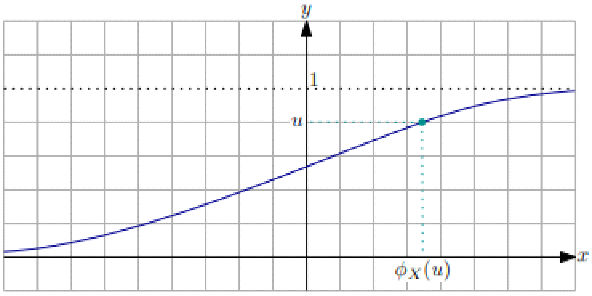
Sia X una qualsiasi var. aleatoria **arbitraria**, allora esiste un applicazione ϕ_X: [0, 1] → ℝ t.c. X ~ ϕ_X(U)
dove U è la var. aleatoria **uniforme** nell'intervallo [0, 1].
Il lemma, afferma che una qualsiasi var. aleatoria può **essere simulata** con una **var. aleatoria uniforme**.
Bisogna ora capire, come trovare questa funz. ϕ_X

Osservazione

La funz. ϕ_X è costruita **esplicitamente a partire dalla var. X** da simulare.
Essa sarà la **funzione inversa** della distribuzione di X

Sia X una var. aleatoria **arbitraria continua**, e sia **f_X la sua densità**, sempre positiva.
La funz. **distribuzione F_X**, sappiamo essere $\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, essendo la sua derivata sempre positiva,
possiamo affermare che F_X sia una funz. **monotona crescente**, quindi **biettiva**

$$F_X : (-\infty, +\infty) \to [0,1] \quad \text{pongo} \quad \phi_X = F_X^{-1} \implies \phi_X(U) = X$$



Dimostrazione

Basta verificare che la funz. di **distribuzione** di ϕ_X(U) sia uguale a quella di X, ossia F_X

∀x ∈ ℝ, ℙ(ϕ(X) ≤ x) = ℙ(F_x^{-1}(U) ≤ x) = essendo F_X monotona crescente = ℙ(U ≤ F_X(x)) = ℙ(U ≤ F_X(x)) = F_X(x)

Esempi

$$X \backsim Bern(p) = \begin{cases} 1 & \mathbb{P}(1) = p \\ 0 & \mathbb{P}(0) = (1-p) \end{cases}$$

Questa var. può essere generata tramite U:

$$X = \begin{cases} 0 & 0 < U \leq 1-p \\ 1 & 1-p < U \leq p \end{cases}$$

X ~ Poisson(λ)

ℙ(k) $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

Questa var. può essere costruita tramite U:

$$X = \begin{cases} 0 & 0 < U \le e^{-\lambda} \\ 1 & e^{-\lambda} < U \le e^{-\lambda}(1+\lambda) \\ ... & \\ k & e^{-\lambda}(1+\lambda+...+\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}) < U \le e^{-\lambda}(1+\lambda+...+\frac{\lambda^k}{k!}) \end{cases}$$

Roba Esame

venerdì 13 dicembre 2024 11:13

**Ripassare aggiungendo robe dall'exyss (piu definizioni ma piu vecchio)

Programma

MANCA LA ROBA IPERGEOMETRICA
- Introduzione alla teoria della probabilità. Assiomi e regole di corrispondenza.
- Spazi di probabilità discreti, eventi e loro operazioni. ✓
- Calcolo combinatorio: disposizioni, combinazioni, con e senza ripetizione. Coefficienti binomiali e multinomiali. ✓
- Principio di inclusione esclusione ed applicazione al problema di accoppiamento. ✓
- Spazi di probabilità prodotto. Eventi indipendenti. Schemi di Bernoulli. ✓
- Distribuzione binomiale, multinomiale e ipergeometrica. ✓ (tranne ipergeometrica)
- Probabilità condizionate. Formule delle probabilità composte, delle probabilità totali e di Bayes. ✓
- Successioni di eventi crescenti e decrescenti. σ-additività e proprietà di continuità della probabilità.
- Passeggiata aleatoria. Problema della rovina del giocatore. ✓
- Variabili aleatorie discrete: distribuzione, valore di attesa, varianza e covarianza. ✓
- Variabili aleatorie indipendenti. ✓
- Variabili aleatorie di Bernoulli e binomiali. ✓
- Variabile geometrica e sua perdita di memoria, variabile binomiale negativa. ✓
- Somma di variabili aleatorie indipendenti. ✓ (penso? limite centrale)
- Variabile di Poisson come limite di binomiali. ✓
- Distribuzioni congiunte, marginali e condizionate. ✓
- Diseguaglianza di Chebyshev e legge debole dei grandi numeri. ✓
- Valore di attesa condizionato e sua interpretazione geometrica. ✓ (tranne l'interpretazione geometrica
- Variabili aleatorie continue: densità di probabilità, funzione di distribuzione, valore di attesa e varianza.
- Variabile aleatoria uniforme. Rappresentazione di Skorohood.
- Variabile esponenziale come limite di geometriche.
- Variabili aleatorie gaussiane. Teorema di De Moivre Laplace sull'approssimazione della distribuzione binomiale con la gaussiana.

Metodologia Esame

L’esame mira a valutare l’apprendimento tramite una prova scritta (consistente nella risoluzione di problemi dello stesso tipo di quelli svolti nelle esercitazioni) e una prova orale (consistente nella discussione del compito e dei temi più rilevanti illustrati nel corso). Se si supera la prova scritta (ottenendo almeno 18/30) si viene ammessi alla prova orale. (ulteriori informazioni nella pagina e-learning/moodle del corso)
Qualora le condizioni sanitarie lo rendano necessario, la prova scritta, o parte di esse, potrebbe essere sostituita da esercizi da svolgere a casa e da discutere all’esame orale.
Per superare l'esame occorre conseguire un voto non inferiore a 18/30. Il voto viene valutato per il 50% con il voto dello scritto e per il 50% con il voto dell'orale.
Lo studente deve dimostrare di aver acquisito una conoscenza sufficiente degli argomenti in programma e di essere in grado di svolgere almeno i più semplici tra gli esercizi assegnati.
Per conseguire un punteggio pari a 30/30 e lode, lo studente deve invece dimostrare di aver acquisito una conoscenza eccellente di tutti gli argomenti trattati durante il corso ed essere in grado di raccordarli in modo logico e coerente.

Esame 15-1-25

venerdì 24 gennaio 2025 12:32

Esame 15/1/2025:
Formulario: Utile per capire quale var. alea. ci sarà tra gli esercizi. Non scrive la formula ma solo la varianza e il val. atteso
diviso in 7 esercizi a risposta aperta divisi in due parti:

- 1° parte: esercizi corti in cui bisogna usare variabili aleatorie per **calcolare** (svolgere calcoli e dare soluzione) una probabilità o **determinare** (scrivere la formula) la probabilità o enunciare un argomento

- 2° parte: esercizi piu lunghi che richiedono l'uso di una variabile aleatoria nota o una variabile continua e sono divisi in due domande
  Necessario conoscere:
  - Variabili aleatorie note
  - Variabili aleatorie continue

Calcolo delle Probabilità , Anno Accademico 2024-2025
Esame 15.01.2025 - **Tempo a disposizione: 1 ora e 45m**

DATI DELLO STUDENTE:

- Nome e Cognome: ....
- Numero di Matricola: ....

Non scrivere dentro la seguente tabella:

1	2	3	4	5	TOT	6a	6b	7a	7b

LEGGERE CON ATTENZIONE:

- L'uso di testi, appunti, formulari e gadget elettronici non è autorizzato.
- Motivare chiaramente i procedimenti e i risultati proposti.
- **Nei punti con scritto "calcolare" i calcoli vanno svolti e la soluzione deve essere data come numero frazionario a/b con a e b espliciti. Per gli altri punti non è richiesto lo svolgimento dei calcoli**

FORMULARIO

- Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
- Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
- Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
- Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.
- Se X è v.a. binomiale negativa di parametri r, p, allora $E(X) = r/p$ e $Var(X) = r(1-p)/(p^2)$

PRIMA PARTE (filtro)

ESERCIZIO 1. Lancio un dado fino a quando esce 5 per la prima volta e chiamo T il numero di lanci effettuati complessivamente. <u>Calcolare</u> $P(T=3)$ e $E[T]$.
Svolgimento:

ESERCIZIO 2. Estraggo 2 carte da un mazzo da 40 senza rimpiazzo. Sia X il numero di carte di bastoni estratte e sia Y il numero di carte di coppe estratte. <u>Calcolare</u> $E[2X-3Y]$.
Svolgimento:

1

Calcolo delle Probabilità , Anno Accademico 2024-2025
Esame 15.01.2025 - **Tempo a disposizione: 1 ora e 45m**

DATI DELLO STUDENTE:

- Nome e Cognome: ....
- Numero di Matricola: ....

Non scrivere dentro la seguente tabella:

1	2	3	4	5	TOT	6a	6b	7a	7b

LEGGERE CON ATTENZIONE:

- L'uso di testi, appunti, formulari e gadget elettronici non è autorizzato.
- Motivare chiaramente i procedimenti e i risultati proposti.
- **Nei punti con scritto "calcolare" i calcoli vanno svolti e la soluzione deve essere data come numero frazionario a/b con a e b espliciti. Per gli altri punti non è richiesto lo svolgimento dei calcoli**

FORMULARIO

- Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
- Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
- Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
- Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.
- Se X è v.a. binomiale negativa di parametri r, p, allora $E(X) = r/p$ e $Var(X) = r(1-p)/(p^2)$

PRIMA PARTE (filtro)

ESERCIZIO 1. Lancio un dado fino a quando esce 5 per la prima volta e chiamo T il numero di lanci effettuati complessivamente. <u>Calcolare</u> $P(T=3)$ e $E[T]$.
Svolgimento:

T – v.a. geometrica di parametro $p = 1/6 = P(\text{esco } 5)$ in un lancio

- $P(T=3) = P(E \cap F \cap G) \underset{\text{INDIP}}{=} P(E)P(F)P(G) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$

dove E = "non esco 5 al 1° lancio", F = "non esco 5 al 2° lancio", G = "esco 5 al 3° lancio") ← Andava bene anche dire che per $T = \text{geom}(p)$ vale $P(T=n) = (1-p)^{n-1}p$

- $E[T] = \frac{1}{p} = 6$

ESERCIZIO 2. Estraggo 2 carte da un mazzo da 40 senza rimpiazzo. Sia X il numero di carte di bastoni estratte e sia Y il numero di carte di coppe estratte. <u>Calcolare</u> $E[2X-3Y]$.
Svolgimento:

X, Y = ipergeom $(n=2, N=40, m=10) \Rightarrow E[X] = E[Y] = \frac{nm}{N} = \frac{2 \cdot 10}{40} = \frac{1}{2}$
$E[2X-3Y] = 2E[X] - 3E(Y)$ per linearità valore atteso
$= 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

ESERCIZIO 3. Dispongo di 3 libri di Matematica, 2 libri di Storia e 3 libri di Geografia, tutti distinti. Li allineo a caso su di una mensola. Determinare la probabillità che i libri vengano allineati lasciando vicini i libri della stessa materia (cioè i 3 libri di Matematica devono essere uno dopo l'altro formando un blocco, analogamente per i 2 libri di Storia e poi per i 3 libri di Geografia).
Svolgimento:

ESERCIZIO 4. Abbiamo un dado truccato per cui 1 esce con probabilità 1/2 e gli altri numeri escono con probabilità 1/10. Calcolare $P(E|F)$ dove E:="esce 1", F:="esce un numero dispari".
Svolgimento:

ESERCIZIO 5. Enunciare il principio di inclusione-esclusione per 2 eventi E, F ed il principio di inclusione-esclusione per tre eventi E, F, G.
Svolgimento:

SECONDA PARTE

ESERCIZIO 6. L'Azienda Rossi & Co. produce lampadine.
Una lampadina ha probabilità 0.10 di essere difettosa se prodotta con il macchinario A, ha probabilità 0.20 di essere difettosa se prodotta con il macchinario B e ha probabilità 0.30 di essere difettosa se prodotta con il macchinario C.
Si stima che il 70% delle lampadine prodotte dall'azienda siano prodotte con il macchinario A, il 20% con il macchinario B e il 10% con il macchinario C.

(a) Si sceglie a caso una lampadina e questa risulta difettosa. Calcolare la probabilità che sia stata prodotta con il macchinario C.
(b) Supponendo che la produzione e lo stato delle lampadine siano indipendenti da lampadina a lampadina, calcolare media e varianza del numero di lampadine difettose in una confezione di 100 lampadine prodotte dall'azienda.

Svolgimento:

2

ESERCIZIO 3. Dispongo di 3 libri di Matematica, 2 libri di Storia e 3 libri di Geografia, tutti distinti. Li allineo a caso su di una mensola. Determinare la probabillità che i libri vengano allineati lasciando vicini i libri della stessa materia (cioè i 3 libri di Matematica devono essere uno dopo l'altro formando un blocco, analogamente per i 2 libri di Storia e poi per i 3 libri di Geografia).
Svolgimento:

\# modi per ordinare i tre blocchi

\# modi di allineare libri di Mat dentro blocco di Mat

\# modi per allineare libri di Storia dentro blocco di Storia

$$\text{probabilità} = \frac{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3!}{8!}$$

\# modi per allineare libri di Geografia dentro blocco di Geogr.

\# modi di allineare gli 8 libri (nota: gli allineamenti sono equi probab.li)

ESERCIZIO 4. Abbiamo un dado truccato per cui 1 esce con probabilità 1/2 e gli altri numeri escono con probabilità 1/10. Calcolare $P(E|F)$ dove E:="esce 1", F:="esce un numero dispari".
Svolgimento:

$$P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{P(\{1\})}{P(\{1,3,5\})} \overset{\text{x additività finita}}{=} \frac{P(\{1\})}{P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{5\})}$$

$$= \frac{1/2}{1/2+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}} = \frac{5/10}{7/10} = \frac{5}{7}$$

ESERCIZIO 5. Enunciare il principio di inclusione-esclusione per 2 eventi E, F ed il principio di inclusione-esclusione per tre eventi E, F, G.
Svolgimento:

- Per 2 eventi:
  $P(E\cup F) = P(E) + P(F) - P(E\cap F)$
- Per 3 eventi:
  $P(E\cup F\cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E\cap F) - P(E\cap G) - P(F\cap G) + P(E\cap F\cap G)$

3

SECONDA PARTE

ESERCIZIO 6. L'Azienda Rossi & Co. produce lampadine.
Una lampadina ha probabilità 0.10 di essere difettosa se prodotta con il macchinario A, ha probabilità 0.20 di essere difettosa se prodotta con il macchinario B e ha probabilità 0.30 di essere difettosa se prodotta con il macchinario C.
Si stima che il 70% delle lampadine prodotte dall'azienda siano prodotte con il macchinario A, il 20% con il macchinario B e il 10% con il macchinario C.

(a) Si sceglie a caso una lampadina e questa risulta difettosa. Calcolare la probabilità che sia stata prodotta con il macchinario C.
(b) Supponendo che la produzione e lo stato delle lampadine siano indipendenti da lampadina a lampadina, calcolare media e varianza del numero di lampadine difettose in una confezione di 100 lampadine prodotte dall'azienda.

Svolgimento:

a) A = "la lamp è prodotta da macchinario A"
B = " " " " " " B"
C = " " " " " " C"
D = "la lamp è difettosa".

DATI:

$P(D\mid A)=0{,}1$	$P(A)=0{,}7$
$P(D\mid B)=0{,}2$	$P(B)=0{,}2$
$P(D\mid C)=0{,}3$	$P(C)=0{,}1$

Dobbiamo calcolare $P(C|D)$

$$P(C|D) \underset{\text{def di } P(C|D)}{=} \frac{P(C\cap D)}{P(D)} \underset{\text{regola prodotto}}{=} \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} \underset{\text{legge prob totale}}{=} \frac{P(D|C)P(C)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)}$$

$$= \frac{0{,}3\times 0{,}10}{0{,}1\times 0{,}70 + 0{,}2\times 0{,}20 + 0{,}3\times 0{,}10} = \frac{3\times 1}{1\times 7 + 2\times 2 + 3\times 1} = \frac{3}{7+4+3} = \frac{3}{14}$$

Quindi la soluzione è $P(C|D) = \frac{3}{14}$.

b) X = # lamp. difettose nella conf da 100
Per ogni lamp. vedo il suo stato e dico che ho un successo se è difettosa. Per indipendenza, X = # successo in 100 prove indipendenti di tipo successo/insuccesso. Quindi $X = Bin(100, p)$
dove $p = P(\text{singola lamp è difettosa})$

$$\underset{\text{regola prob totale}}{=} 0{,}1\times 0{,}7 + 0{,}2\times 0{,}2 + 0{,}3\times 0{,}1 = \frac{7+4+3}{100} = \frac{14}{100}$$

Quindi $X = Bin\left(100, \frac{14}{100}\right)$ e perciò $E[X] = 100\frac{14}{100} = 14$

e $Var X = 100 \cdot \frac{14}{100}\left(1-\frac{14}{100}\right) = 100 \cdot \frac{14}{100} \cdot \frac{86}{100} = \frac{14\cdot 86}{100} = \frac{7\cdot 43}{25} = \frac{301}{25}$

TABELLA 5.1 L'AREA $\Phi(x)$ DEL TRAPEZOIDE DELLA DENSITÀ NORMALE A SINISTRA DI x

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890

ESERCIZIO 7. Sia X variabile aleatoria gaussiana di media 2 e varianza 9.

(a) Calcolare $E[X^2]$.

(b) Calcolare $P(X < 8)$ (nella pagina accanto trovate una tabella con valori di $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$).

4

TABELLA 5.1 L'AREA $\Phi(x)$ DEL TRAPEZOIDE DELLA DENSITÀ NORMALE A SINISTRA DI x

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890

ESERCIZIO 7. Sia X variabile aleatoria gaussiana di media 2 e varianza 9.

(a) Calcolare $E[X^2]$.

(b) Calcolare $P(X < 8)$ (nella pagina accanto trovate una tabella con valori di $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$).

a) $\mathrm{Var}\,X = E(X^2) - (E(X))^2$

$\mathrm{Var}\,X = 9, \quad EX = 2$

Quindi $9 = E(X^2) - 2^2 = E(X^2) - 4$. Quindi $E(X^2) = 9+4 = 13$

b) Sia Z tale che $X = 2 + 3Z$. Allora Z è gaussiana standard.

$P(X<8) = P(2+3Z<8) = P(3Z<6) = P(Z<2) = \Phi(2)$

Per la tabella $\Phi(2) = 0.9772$

Conclusione: $P(X<8) = 0.9772$

Calcolo delle Probabilità , Anno Accademico 2024-2025

Esame 15.01.2025 - **Tempo a disposizione: 1 ora e 45m**

DATI DELLO STUDENTE:

- Nome e Cognome: ....
- Numero di Matricola: ....

Non scrivere dentro la seguente tabella:

1	2	3	4	5	TOT	6a	6b	7a	7b

LEGGERE CON ATTENZIONE:

- L'uso di testi, appunti, formulari e gadget elettronici non è autorizzato.
- Motivare chiaramente i procedimenti e i risultati proposti.
- **Nei punti con scritto "calcolare" i calcoli vanno svolti e la soluzione deve essere data come numero frazionario a/b con a e b espliciti. Per gli altri punti non è richiesto lo svolgimento dei calcoli**

FORMULARIO

- Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
- Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
- Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
- Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.
- Se X è v.a. binomiale negativa di parametri r, p, allora $E(X) = r/p$ e $Var(X) = r(1-p)/(p^2)$

PRIMA PARTE (filtro)

ESERCIZIO 1. Lancio un dado fino a quando esce 5 per la prima volta e chiamo T il numero di lanci effettuati complessivamente. Calcolare $P(T=2)$ e $E[T-1]$.

Svolgimento:

ESERCIZIO 2. Estraggo 2 carte da un mazzo da 40 senza rimpiazzo. Sia X il numero di carte di bastoni estratte e sia Y il numero di carte di coppe estratte. Calcolare $E[X-3Y]$.

Svolgimento:

TESTO B

Calcolo delle Probabilità , Anno Accademico 2024-2025

Esame 15.01.2025 - **Tempo a disposizione: 1 ora e 45m**

DATI DELLO STUDENTE:

- Nome e Cognome: ....
- Numero di Matricola: ....

Non scrivere dentro la seguente tabella:

1	2	3	4	5	TOT	6a	6b	7a	7b

LEGGERE CON ATTENZIONE:

- L'uso di testi, appunti, formulari e gadget elettronici non è autorizzato.
- Motivare chiaramente i procedimenti e i risultati proposti.
- **Nei punti con scritto "calcolare" i calcoli vanno svolti e la soluzione deve essere data come numero frazionario a/b con a e b espliciti. Per gli altri punti non è richiesto lo svolgimento dei calcoli**

FORMULARIO

- Se X è v.a. binomiale di parametri n, p, allora $E(X) = np$, $Var(X) = np(1-p)$.
- Se X è v.a. geometrica di parametro p, allora $E(X) = 1/p$, $Var(X) = (1-p)/p^2$.
- Se X è v.a. di Poisson con parametro λ, allora $E(X) = \lambda$, $Var(X) = \lambda$.
- Se X è v.a. ipergeometrica di parametri n, N, m (tipo: estraggo senza rimpiazzo n palline da un'urna con m palline bianche e $N-m$ palline nere e X è il numero di palline bianche estratte) allora $E(X) = nm/N$ e $Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p)$ dove $p = m/N$.
- Se X è v.a. binomiale negativa di parametri r, p, allora $E(X) = r/p$ e $Var(X) = r(1-p)/(p^2)$

PRIMA PARTE (filtro)

ESERCIZIO 1. Lancio un dado fino a quando esce 5 per la prima volta e chiamo T il numero di lanci effettuati complessivamente. Calcolare $P(T=2)$ e $E[T-1]$.

Svolgimento:

T è v.a. geometrica di parametro $p = 1/6$

$P(T=n) = (1-p)^{n-1}p \quad n = 1, 2 \ldots$

Quindi $P(T=2) = (1-\frac{1}{6})\frac{1}{6} = \frac{5}{6}\frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

$E[T-1] = E[T] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = 6 - 1 = 5.$

ESERCIZIO 2. Estraggo 2 carte da un mazzo da 40 senza rimpiazzo. Sia X il numero di carte di bastoni estratte e sia Y il numero di carte di coppe estratte. Calcolare $E[X-3Y]$.

Svolgimento:

X = v.a. ipergeometrica $[N=40, m=10, n=2)$ Stesso per Y.

Quindi $E[X] = E[Y] = \frac{mn}{N} = \frac{10 \cdot 2}{40} = 1/2$

$E[X-3Y] = E[X] - 3E[Y] = 1/2 - 3/2 = -1$

ESERCIZIO 3. Dispongo di 4 libri di Musica, 2 libri di Storia e 3 libri di Algebra, tutti distinti. Li allineo a caso su di una mensola. <u>Determinare</u> la probabillità che i libri vengano allineati lasciando vicini i libri della stessa materia (cioè i 4 libri di Musica devono essere uno dopo l'altro formando un blocco, analogamente per i 2 libri di Storia e poi per i 3 libri di Algebra).
Svolgimento:

ESERCIZIO 4. Abbiamo un dado truccato per cui 1 esce con probabilità 1/3 e gli altri numeri escono con probabilità 2/15. <u>Calcolare</u> $P(E|F)$ dove E:="esce 1", F:="esce un numero dispari".
Svolgimento:

ESERCIZIO 5. Dire quando due variabili aleatorie sono dette *identicamente distribuite*
Svolgimento:

SECONDA PARTE

ESERCIZIO 6. L'Azienda Rossi & Co. produce lampadine.
Una lampadina ha probabilità 0.10 di essere difettosa se prodotta con il macchinario A, ha probabilità 0.20 di essere difettosa se prodotta con il macchinario B e ha probabilità 0.30 di essere difettosa se prodotta con il macchinario C.
Si stima che il 70% delle lampadine prodotte dall'azienda siano prodotte con il macchinario A, il 20% con il macchinario B e il 10% con il macchinario C.

(a) Si sceglie a caso una lampadina e questa risulta difettosa. Calcolare la probabilità che sia stata prodotta con il macchinario C.
(b) Supponendo che la produzione e lo stato delle lampadine siano indipendenti da lampadina a lampadina, calcolare media e varianza del numero di lampadine difettose in una confezione di 100 lampadine prodotte dall'azienda.

Svolgimento:

$E[X-3Y] = E[X] - 3E[Y] = 1/2 - 3/2 = -1$

2

ESERCIZIO 3. Dispongo di 4 libri di Musica, 2 libri di Storia e 3 libri di Algebra, tutti distinti. Li allineo a caso su di una mensola. <u>Determinare</u> la probabillità che i libri vengano allineati lasciando vicini i libri della stessa materia (cioè i 4 libri di Musica devono essere uno dopo l'altro formando un blocco, analogamente per i 2 libri di Storia e poi per i 3 libri di Algebra).
Svolgimento:

S = {possibili allineamenti di tutti i libri} sp. campionario con esiti equiprobabili. |S| = 9!

\# ordinamenti dei 3 blocchi: Musica, Storia, Algebra

\# ordinamenti dei 4 libri nel blocco di Musica

\# ordinamenti dei 2 libri nel blocco di Storia

$$\text{prob} = \frac{3!\,4!\,2!\,3!}{9!}$$

\# ordinamenti dei 3 libri nel blocco di algebra

ESERCIZIO 4. Abbiamo un dado truccato per cui 1 esce con probabilità 1/3 e gli altri numeri escono con probabilità 2/15. <u>Calcolare</u> $P(E|F)$ dove E:="esce 1", F:="esce un numero dispari".
Svolgimento:

$$P(E|F) \underset{\text{def prob. condizionata}}{=} \frac{P(E\cap F)}{P(F)} \overset{E\subset F}{=} \frac{P(E)}{P(F)} = \frac{1/3}{9/15} = \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{9} = \frac{5}{9}$$

infatti $P(E) = P(\{1\}) = 1/3$.

$$P(F) = P(\{1,3,5\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{5+2+2}{15} = \frac{9}{15}$$

ESERCIZIO 5. Dire quando due variabili aleatorie sono dette *identicamente distribuite*
Svolgimento:

X e Y v.a. sono dette identicamente distribuite se

$$P(X\in A) = P(Y\in A) \quad \forall A \subset \mathbb{R} \text{ misurabile.}$$

l'ho aggiunto per precisione, ma se non lo avete messo non cambia la valutazione

3

SECONDA PARTE

ESERCIZIO 6. L'Azienda Rossi & Co. produce lampadine.
Una lampadina ha probabilità 0.10 di essere difettosa se prodotta con il macchinario A, ha probabilità 0.20 di essere difettosa se prodotta con il macchinario B e ha probabilità 0.30 di essere difettosa se prodotta con il macchinario C.
Si stima che il 70% delle lampadine prodotte dall'azienda siano prodotte con il macchinario A, il 20% con il macchinario B e il 10% con il macchinario C.

(a) Si sceglie a caso una lampadina e questa risulta difettosa. Calcolare la probabilità che sia stata prodotta con il macchinario C.
(b) Supponendo che la produzione e lo stato delle lampadine siano indipendenti da lampadina a lampadina, calcolare media e varianza del numero di lampadine difettose in una confezione di 100 lampadine prodotte dall'azienda.

Svolgimento:

di 100 lampadine prodotte dall'azienda.
Svolgimento:

a) A = "la lamp. è prodotta da macchinario A"
B = " " " " " " B"
C = " " " " " " C"
D = "la lamp è difettosa".

DATI: $P(D|A)=0{,}1$, $P(D|B)=0{,}2$, $P(D|C)=0{,}3$ | $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}2$, $P(C)=0{,}1$

Dobbiamo calcolare $P(C|D)$

$$P(C|D) \underset{\text{def di } P(C|D)}{=} \frac{P(C\cap D)}{P(D)} \underset{\text{regola prodotto}}{=} \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} \underset{\text{legge prob totale}}{=} \frac{P(D|C)P(C)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)}$$

$$= \frac{0{,}3\times 0{,}10}{0{,}1\times 0{,}70 + 0{,}2\times 0{,}20 + 0{,}3\times 0{,}10} = \frac{3\times 1}{1\times 7 + 2\times 2 + 3\times 1} = \frac{3}{7+4+3} = \frac{3}{14}$$

Quindi la soluzione è $P(C|D) = \frac{3}{14}$.

b) X = # lamp. difettose nella conf da 100
Per ogni lamp. vedo il suo stato e dico che ho un successo se è difettosa. Per indipendenza, X = # successo in 100 prove indipendenti di tipo successo/insuccesso. Quindi $X = Bin(100, p)$
dove $p = P(\text{singola lamp è difettosa})$

$$\underset{\text{reg. delle prob. totali}}{=} 0{,}1\times 0{,}7 + 0{,}2\times 0{,}2 + 0{,}3\times 0{,}1 = \frac{7+4+3}{100} = \frac{14}{100}$$

Quindi $X = Bin\left(100, \frac{14}{100}\right)$ e perciò $E[X] = 100\frac{14}{100} = 14$

e $\mathrm{Var}\,X = 100\cdot\frac{14}{100}\left(1-\frac{14}{100}\right) = 100\cdot\frac{14}{100}\cdot\frac{86}{100} = \frac{14\cdot 86}{100} = \frac{7\cdot 43}{25} = \frac{301}{25}$

TABELLA 5.1 L'AREA $\Phi(x)$ DEL TRAPEZOIDE DELLA DENSITÀ NORMALE A SINISTRA DI x

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890

ESERCIZIO 7. Sia X variabile aleatoria gaussiana di media 3 e varianza 4.

(a) Calcolare $E[X^2]$.

(b) Calcolare $P(X < 6)$ (nella pagina accanto trovate una tabella con valori di $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$).

e $\text{Var}\,X = 100 \cdot \frac{14}{100}\left(1 - \frac{14}{100}\right) = 100 \cdot \frac{14}{100} \cdot \frac{86}{100} = \frac{14 \cdot 86}{100} = \frac{7 \cdot 43}{25} = \frac{301}{25}$

4

TABELLA 5.1 L'AREA $\Phi(x)$ DEL TRAPEZOIDE DELLA DENSITÀ NORMALE A SINISTRA DI x

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890

ESERCIZIO 7. Sia X variabile aleatoria gaussiana di media 3 e varianza 4.

(a) Calcolare $E[X^2]$.

(b) Calcolare $P(X < 6)$ (nella pagina accanto trovate una tabella con valori di $\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$).

a) $\text{Var}\,X = E[X^2] - E[X]^2$

Quindi $E[X^2] = \text{Var}\,X + E[X]^2$

So che $EX = 3$ e $\text{Var}\,X = 4$. Quindi $E[X^2] = \text{Var}\,X + E[X]^2 = 4 + 9 = 13$

b) X è $N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$ (cioè $\sigma = 2$)

Sia Z v.a. tale che $X = \mu + \sigma Z = 3 + 2Z$. Z è v.a. gaussiana standard

$P(X<6) = P(3+2Z<6) = P(2Z<3) = P(Z<1.5)$

$= \Phi(1.5) = 0.9332$

Esami Passati

martedì 14 gennaio 2025 15:26

Laurea triennale in Informatica - Corso di PROBABILITÀ - Prof. Lorenzo Taggi

ESEMPIO 1 PROVA D'ESAME

Le risposte vanno giustificate

Esercizio 1. Un'urna contiene 12 palline, di cui 3 blu e 9 rosse. Antonio estrae due palline senza reinserimento. Se le due palline sono entrambe blu lancia tre dadi, altrimenti ne lancia solo due. Si definiscano i seguenti eventi

- $B_1 = \{$ vengono estratte due palline blu $\}$ $= \{B, B\} \to 3$ DADI
- $B_2 = \{$ non vengono estratte due palline blu $\}$ $= \{B, R\} \cup \{R, B\} \cup \{R, R\} \to 2$ DADI
- $C = \{$ la somma dei valori dei dadi lanciati é uguale a due $\}$
- $D_1 = \{$ la prima pallina estratta é blu $\}$
- $D_2 = \{$ la seconda pallina estratta é blu $\}$

1. Mettere in relazione l'insieme B_1 e la coppia di insiemi D_1 e D_2.
2. Determinare $\mathbb{P}(B_1)$ e $\mathbb{P}(B_2)$.
3. Determinare $\mathbb{P}(C|B_1)$ e $\mathbb{P}(C|B_2)$.
4. Determinare $\mathbb{P}(C)$ e $\mathbb{P}(B_1|C)$.
5. Sia X il numero di dadi lanciati. Determinare l'insieme dei valori che puó assumere la variabile casuale X, la sua densitá discreta, il valore atteso di X, $\mathbb{E}(X)$, e il valore atteso di X^2, $\mathbb{E}(X^2)$.

Esercizio 2. Si consideri una marcia aleatoria $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$, dove $S_0 = 0$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, dove gli incrementi $Z_1, Z_2, \ldots$ sono variabili casuali i.i.d. con densitá discreta $p(1) = \frac{1}{2}$, $p(2) = \frac{1}{4}$, $p(-2) = \frac{1}{4}$.

1. Utilizzare il teorema del limite centrale per approssimare la probabilitá $\mathbb{P}\Big(S_n \in [\frac{n}{2} + a\sqrt{n}, \frac{n}{2} + b\sqrt{n}]\Big)$ per valori di n sufficientemente grandi e $a < b$.
2. Determinarne il valore numerico di tale probabilitá per quando $a = -3/2$ e $b = 3/2$ utilizzando le tavole Gaussiane.

Esercizio 3. In una libreria ci sono 10 scaffali numerati con valori interi da 1 a 10. Uno studente disordinato ha n libri e inserisce ogni libro in uno scaffale scelto a caso, con la stessa probabilitá ogni scaffale puó contenere un numero arbitrariamente grande di libri. La scelta dello scaffale in cui inserire un qualsiasi libro é indipendente dal posizionamento degli altri libri. Si definiscano gli eventi E_k^i e le variabili casuali Z_i e X per $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ e $k \in \{1, \ldots, n\}$ come segue:

- $E_k^i = \{$ il libro k *non* viene inserito nello scaffale i $\}$,
- X é la variabile casuale che corrisponde al numero di scaffali nei quali é stato inserito almeno uno degli n libri,
- Z_i é la variabile casuale che vale 1 se nello scaffale i viene inserito almeno uno degli n libri e vale 0 altrimenti.

Sia X la variabile casuale che corrisponde al numero di scaffali nei quali é stato inserito almeno uno degli n libri, sia

1. Determinare la probabilitá $\mathbb{P}(E_1^1 \cap E_2^1 \cap E_3^1 \ldots \cap E_n^1)$.
2. Esprimere la variabile casuale X come funzione delle variabili casuali $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{10}$.
3. Determinare $\mathbb{E}(X)$.

Esempio 1 Esame

$$P(D_2 | D_1) = \frac{P(D_2 \cap D_1)}{P(D_2)} =$$

Soluzione

Esercizio 1

- $\Omega_{urna} = \{BB, BR, RR\}$
- $\Omega_{dadosingolo} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Se esce BB, lancia 3 dadi
    - $\Omega_{BB} = \{(x1, x2, x3) \mid x1, x2, x3 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
    - $|\Omega_{BB}| = 6^3 = 216$

- Se esce BR o RR, lancia 2 dadi
  - $\Omega_{BR} = \Omega_{RR} = \{(x1, x2) \mid x1, x2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
  - $|\Omega_{BR}| = |\Omega_{RR}| = 6^2 = 36$
- Valori che X può assumere:
  - X = 3: quando vengono estratte due palline blu (BB) (B_1)
  - X = 2: quando vengono estratte BR o RR (B_2)
- Calcolo probabilità degli eventi BB, BR, RR:
  - $\mathbb{P}(BB) = \frac{combinazioni\ BB}{tot\ combinazioni} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22}$
  - $\mathbb{P}(BR) = \frac{combinazioni\ BR}{tot\ combinazioni} = \frac{\binom{3}{1}*\binom{9}{1}}{\binom{12}{2}} = \frac{27}{66} = \frac{9}{22}$
  - $\mathbb{P}(RR) = \frac{combinazioni\ RR}{tot\ combinazioni} = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{36}{66} = \frac{12}{22}$

1. $B_1 = D_1 \cap D_2$
2. $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(D_1 \cap D_2) = \mathbb{P}(D_1) * \mathbb{P}(D_2 \mid D_1) = 3/12 * 2/11 = 6/132 = 1/22$
   $B_2 = (B_1)^C$
   $\mathbb{P}(B_2) = 1 - \mathbb{P}(B_1) = 21/22$
3. $\mathbb{P}(C \mid B_2) = \mathbb{P}(\{\text{primo dado fa 1}\} \cap \{\text{secondo dado fa 1}\} \mid B_2) = 1/36$
   Se B_2 si verifica vengono lanciati i due dadi
   - $\mathbb{P}(\{\text{primo dado fa 1}\}) = 1/6$
   - $\mathbb{P}(\{\text{secondo dado fa 1}\}) = 1/6$
   - I due eventi sono **indipendenti** fra loro
   - $\mathbb{P}(\{\text{primo dado fa 1}\} \cap \{\text{secondo dado fa 1}\}) = 1/6 * 1/6 = 1/36$

   $\mathbb{P}(C \mid B_1) = \mathbb{P}(\{\text{primo dado fa 1}\} \cap \{\text{secondo dado fa 1}\} \cap \{\text{terzo dado fa 0}\} \mid B_2) = 0$
   Poiché se B_1 si verifica allora vengono lanciati 3 dadi e la somma di 3 dadi non può fare 2
4. $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \mid B_1)*\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(C \mid B_2)*\mathbb{P}(B_2) = 0 * 3/12 + 1/36 * 21/22 = 0 + 21/792 = 21/792$
   (probabilità totale)

   $\mathbb{P}(B_1 \mid C) = \mathbb{P}(B_1 \cap C)/\mathbb{P}(C) = 0/(21/792) = 0$
   B_1 e C sono **incompatibili** tra loro ($B_1 \cap C = \emptyset$)
   poiché se vengono estratte 2 palline blu (B_1) allora vengono lanciati tre dadi e la loro somma non può mai essere 0

5. $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(B_1) = 1/22$
   $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(B_2) = 21/22$

   Densità discreta
   - $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(BB) = 1/22$
   - $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(BR) + \mathbb{P}(RR) = 9/22 + 12/22 = 21/22$

   $$E(X) = \sum_x x \cdot P(X = x)$$
   $E(X) = 2*\mathbb{P}(X = 2) + 3*\mathbb{P}(X = 3) = 2*(21/22) + 3*(1/22) = 42/22 + 3/22 = 45/22$

   $$E(X^2) = \sum_x x^2 \cdot P(X = x)$$
   $E(X^2) = 2^2*\mathbb{P}(X = 2) + 3^2*\mathbb{P}(X = 3) = 4*(21/22) + 9*(1/22) = 84/22 + 9/22 = 93/22$

IL RESTO DELLA CORREZIONE È DA PRENDERE SUL DRIVE "Correzione prova 1" NELLE DISPENSE
MO FACCIO SISTEMI OPERATIVI 1

Laurea triennale in Informatica - Corso di PROBABILITÀ - Prof. Lorenzo Taggi

ESEMPIO 2 PROVA D'ESAME

Le risposte vanno giustificate

Per ottenere il massimo dei punteggi occorre fornire risposte esatte senza approssimazioni numeriche

Esercizio 1. Un'urna contiene 9 palline, di cui 3 blu e 6 rosse. Antonio estrae due palline con reinserimento. Se le due palline estratte sono una blu e una rossa lancia due monete equilibrate, altrimenti lancia due monete che hanno entrambe una probabilitá $\frac{2}{3}$ di mostrare testa e una probabilitá $\frac{1}{3}$ di mostrare croce. In entrambi i casi i lanci delle due monete sono indipendenti. Si definiscano i seguenti eventi:

- $B_1 = \{$ le due palline estratte sono una blu e una rossa $\}$
- $B_2 = \{$ le due palline estratte non sono una blu e una rossa $\}$
- $D_1 = \{$ la prima pallina estratta é blu $\}$
- $D_2 = \{$ la seconda pallina estratta é blu $\}$
- $C_1 = \{$ la prima moneta lanciata mostra testa $\}$
- $C_2 = \{$ la seconda moneta lanciata mostra testa $\}$

1. Stabilire quali delle quattro seguenti relazioni sono vere (il numero risposte esatte puó essere zero, uno, o piú di uno): **(a)** $B_1 = D_1^c \cap D_2$, **(b)** $B_1 = D_1^c \cup D_2$ **(c)** $B_1 = (D_1 \cap D_2^c) \cup (D_1^c \cap D_2)$ **(d)** $B_1 = (D_1 \cup D_2^c) \cap (D_1^c \cup D_2)$
2. Determinare $\mathbb{P}(B_1)$ e $\mathbb{P}(B_2)$.
3. Determinare $\mathbb{P}(C_1|B_1)$ e $\mathbb{P}(C_2|B_1)$.
4. Determinare $\mathbb{P}(C_1)$ e $\mathbb{P}(C_2)$
5. Stabilire se gli eventi C_1 e C_2 sono indipendenti presentando una dimostrazione.
6. Sia X la variabile casuale che vale 1 se la prima moneta lanciata mostra testa e 2 se la prima moneta lanciata mostra croce. Determinare il valore atteso di X.

Esercizio 2. Un negoziante acquista 10 confezioni di latte per rivenderle. Le confezioni sono numerate con interi da 1 a 10. Il latte di ogni confezione scade dopo un tempo (espresso in giorni) che corrisponde ad una variabile casuale esponenziale con parametro $\lambda = \frac{1}{15}$. Il tempo di scadenza é indipendente tra le varie confezioni. Si definiscano le variabili casuali X, T_i come segue:

- T_i é il tempo di scadenza della confezione i, con $i \in \{1, \dots, 10\}$,
- X é il numero totale di scatole che scadono entro 10 giorni.

1. Determinare $\mathbb{P}(T_i < 10)$,
2. Determinare $\mathbb{P}(X \geq 2)$,
3. Determinare $\mathbb{E}(X)$.

Esercizio 3. Un milionario generoso ha un numero molto grande n di amici che richiedono un prestito di 10.000 euro, con la promessa di restituirli esattamente alla fine dell'anno. Il milionario stima che ogni suo amico riuscirá a restituire la somma prestata con probabilitá $p = 0.7$ e che invece non restituirá nulla con probabilitá 0.3, indipendentemente dagli altri amici. Sia S_n la variabile casuale che corrisponde alla quantitá totale di denaro che verrá restituita al milionario alla fine dell'anno e sia Z_i la quantitá di denaro che il milionario riceverá dal suo amico i, per $i = 1, 2, \dots n$, alla fine dell'anno.

1. Determinare l'insieme dei valori che puó assumere la variabili casuali Z_i, la sua densitá discreta e la sua media $\mu = \mathbb{E}(Z_i)$, per ogni $i = 1, \dots n$.
2. Esprimere la variabile casuale S_n come funzione delle variabili casuali $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$.
3. Determinare $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(S_n < 6500n)$ applicando la legge dei grandi numeri, specificando qual é il valore di ε con il quale essa é stata applicata.

Esempio 2 Esame

Laurea triennale in Informatica - Corso di PROBABILITÀ - Prof. Lorenzo Taggi

ESEMPIO 3 PROVA D'ESAME

Le risposte vanno giustificate.

Per ottenere il massimo del punteggio occorre presentare risposte esatte senza approssimazioni numeriche.

Esercizio 1. Un'urna contiene 6 palline, di cui 2 blu, 2 rosse e 2 verdi. Antonio estrae cinque palline *con reinserimento*. Se le 5 palline estratte sono tutte blu allora lancia un dado che ha probabilitá $\frac{1}{2}$ di avere come risultato 1 e probabilitá $\frac{1}{10}$ di avere un risultato tra 2 e 6. Se le 5 palline estratte *non sono* tutte blu allora lancia un dado equilibrato. Si definiscano per $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i seguenti eventi:

- $B_i = \{$ la i-esima pallina estratta é blu $\}$
- $D = \{$ le 5 palline estrattte sono tutte blu $\}$
- $C_j = \{$ il risultato del dado lanciato é j $\}$

1. Stabilire quali delle seguenti relazioni é vera (le risposte esatte possono essere zero, una o piú di una): **(a)** $D = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_5$ **(b)** $D = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_5$ **(c)** $D^c = B_1^c \cap B_2^c \cap \ldots \cap B_5^c$ **(d)** $D^c = B_1^c \cup B_2^c \cup \ldots \cup B_5^c$.
2. Determinare $\mathbb{P}(D)$ e $\mathbb{P}(D^c)$.
3. Determinare $\mathbb{P}(C_j|D)$ e $\mathbb{P}(C_j|D^c)$ per ogni $j \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$.
4. Determinare $\mathbb{P}(C_j)$ per ogni $j \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$.
5. Determinare $\mathbb{P}(D|C_1)$.
6. Sia X la variabile casuale che corrisponde risultato del dado lanciato. Determinare l'insieme dei valori che puó assumere la variabile X, la densitá discreta di X, $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(|X|)$.

Esercizio 2. La variabile casuale X é tale che $E(2X + 1) = 3$ e $E((2X + 1)^2) = 13$. Determinare $E(X)$ e $Var(3X)$.

Esercizio 3. Due squadre A e B giocano una contro l'altra infinite volte. Ogni partita termina con una vittoria di una delle due squadre oppure con un pareggio, gli esiti delle partite sono indipendenti. La probabilitá che la squadra A vinca una singola partita é $\frac{1}{4}$, la probabilitá che la squadra B vinca una singola partita é $\frac{1}{2}$. Le partite giocate vengono numerate con interi 1, 2, ... in base all'ordine.

- Sia X la variabile casuale che corrisponde al numero di partite giocate fino alla prima vittoria da parte della squadra A.
- Sia Z_i una variabile casuale che vale 1 se la i-esima partita termina con un pareggio e 0 altrimenti.
- Sia S_n il numero di partite terminate con un pareggio tra le prime n partite giocate.

1. Determinare la densitá discreta della variabile casuale X.
2. Determinare la densitá discreta di Z_i e la media $\mu = \mathbb{E}(Z_i)$.
3. Esprimere S_n come funzione delle variabili casuali $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ e determinare $\lim_{n\to\infty} P(S_n \geq \frac{1}{8}n)$ utilizzando la legge dei grandi numeri, specificando il valore di ε con la quale essa é stata applicata.

Esempio 3 Esame

ESERCIZIO 1 Fabrizio fa il seguente gioco: lancia un dado ben equilibrato a quattro facce numerate da 1 a 4 e successivamente, se ha ottenuto un 1, lancia una moneta truccata in modo che la probabilità di testa sia $p = 4/5$. Fabrizio vince se ottiene testa.

i) $*$ Calcolare la probabilità degli eventi $E = \{Fabrizio\ ottiene\ 1\ con\ il\ dado\}$ ed $F = \{Fabrizio\ vince\}$

ii) $*$ Gli eventi E ed F sono correlati positivamente? sono correlati negativamente? o sono indipendenti?

Giorgio ripete lo stesso gioco per 4 volte. Posto X_1 il numero delle volte in cui Giorgio ottiene 1 con il dado e V il numero delle volte in cui Giorgio vince,

iii) ***(a)*** $*$ Individuare il tipo di distribuzione della variabile aleatoria X_1 ***(b)*** $*$ Calcolare $\mathbb{E}(X_1)$ e $Var(X_1)$

iv) ***(a)*** Individuare il tipo di distribuzione della variabile aleatoria V ***(b)*** Calcolare $\mathbb{E}(V)$ e $Var(V)$

v) Dopo aver calcolato il valore di $\mathbb{P}(V = 3|X_1 = 3)$, calcolare $\mathbb{P}(X_1 = 3|V = 3)$

ESERCIZIO 2 Ci sono 3 urne (esternamente uguali) e ciascuna contiene 5 palline e precisamente
- la 1^a urna contiene 1 pallina bianca e 4 palline rosse
- la 2^a urna contiene 2 palline bianche e 3 palline rosse
- la 3^a urna contiene contiene 4 palline bianche e 1 pallina rossa

Posto $H_i = \{\text{viene scelta l'urna } i\}$, per $i = 1, 2, 3$, si ha che $\mathbb{P}(H_1) = 1/5$, $\mathbb{P}(H_2) = 3/5$ e $\mathbb{P}(H_3) = 1/5$.
Vengono effettuate delle **estrazioni SENZA REINSERIMENTO dall'urna scelta (sempre la stessa)**.
Siano $B_k = \{\text{la } k\text{-sima pallina estratta è bianca}\}$, $R_k = \{\text{la } k\text{-sima pallina estratta è rossa}\}$, per $k \geq 1$.

i) ***(a)****$*$ Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca. ***(b)****$*$ Quanto vale $\mathbb{P}(B_2)$?

ii) **Sapendo che prima pallina estratta è bianca**, ***(a)****$*$ calcolare la probabilità (condizionata) che sia stata scelta la 1^a urna, ***(b)****$*$ calcolare la probabilità (condizionata) che sia stata scelta la 2^a urna, ***(c)****$*$ calcolare la probabilità (condizionata) che sia stata scelta la 3^a urna.

iii) ***(a)****$*$ Calcolare la probabilità **(non condizionata)** dell'evento $A = \{$*la prima pallina estratta e la seconda pallina estratta sono dello stesso colore*$\}$.
(b)*$*$ Gli eventi A ed R_1 sono correlati positivamente? correlati negativamente? o indipendenti?

iv) Posto X_B il numero di palline bianche estratte nelle prime 4 estrazioni, calcolare il valore atteso (non condizionato) di X_B (suggerimento: non è necessario calcolare la densità discreta di X_B, basta scrivere X_B utilizzando le variabili aleatorie $\mathbf{1}_{B_i}$, per $i = 1, 2, 3, 4$, o usare la formula del valore atteso totale.).

v) Calcolare $\mathbb{P}(X_B = 4)$ e $\mathbb{P}(X_B = 3)$

vi) **(FACOLTATIVO)** Calcolare $\mathbb{P}(H_i|\{X_B = 3\})$, per $i = 1, 2, 3$

ESERCIZIO 3 Siano U ed V due variabili aleatorie, entrambe a valori in $\{0, 1, +2\}$ e tali che

$$\mathbb{P}(U = 0, V = 1) = \mathbb{P}(U = 1, V = 0) = \mathbb{P}(U = 1, V = 2) = \mathbb{P}(U = 2, V = 1) = c,$$

$$\mathbb{P}(U = 0, V = 2) = \mathbb{P}(U = 2, V = 0) = 1/4, \qquad \mathbb{P}(U = i, V = j) = 0 \quad \text{in tutti gli altri casi.}$$

i) ***(a)*** $*$ Mostrare che $c = 1/8$. ***(b)*** $*$ Calcolare la densità discreta marginale di V.

ii) Mostrare che ***(a)*** $*$ il valore atteso di V è uguale a 1 e ***(b)*** che la varianza di V vale $3/4$.

iii) ***(a)*** $*$ Calcolare $Cov(U, V)$. ***(b)*** $*$ Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

iv) ***(a)*** Calcolare $\mathbb{P}(UV = 0)$. ***(b)*** Calcolare $\mathbb{P}\left(U = 1, UV = 0\right)$ e $\mathbb{P}\left(U = 1 \middle| \{UV = 0\}\right)$.

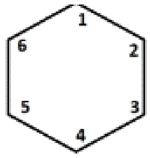
Siano ora X_i, $i \geq 1$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, con la stessa distribuzione di V, e sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

v) ***(a)*** Dopo aver calcolato valore atteso e varianza di $S_{108}/108$ (si usi il fatto che $108 = 27 \cdot 4$), usare la disuguaglianza di Chebyshev, per trovare una minorazione per $\mathbb{P}\left(|S_{108}/108 - 1| \leq 1/4\right)$.
OPPURE (in alternativa)
(b) Dopo aver calcolato valore atteso e varianza di S_{108} trovare un'approssimazione per

$$\mathbb{P}\left(81 \leq S_{108} \leq 135\right).$$

12/2/2020

ESERCIZIO 1 Consideriamo un esagono i cui vertici sono numerati da 1 a 6, come nella figura accanto. Ogni vertice viene colorato a caso (cioè con uguale probabilità) di arancione o di blu, indipendentemente dalla colorazione degli altri vertici. Posto, per $i = 1, 2, \ldots, 6$,



$$A_i = \{\text{il vertice } i \text{ è arancione}\}, \quad B_i = \{\text{il vertice } i \text{ è blu}\},$$

$$C_i = \{\text{il vertice } i \text{ ha lo stesso colore dei suoi due vertici vicini}\}$$

i) $*$ Dopo aver espresso gli eventi C_1 e C_2 tramite gli eventi A_i e B_i, calcolare $\mathbb{P}(C_1)$ e $\mathbb{P}(C_2)$.

ii) $*$ Sia W la variabile aleatoria che conta il numero dei vertici che hanno lo stesso colore dei suoi due vertici vicini. Dopo aver espresso la variabile aleatoria W in termini delle variabili aleatorie $\mathbf{1}_{C_i}$, calcolare il valore atteso di W.

iii) Calcolare $\mathbb{P}(C_1 \cap C_2)$. Gli eventi C_1 e C_2 sono indipendenti?

iv) ***(a)*** $*$ Individuare il tipo di distribuzione della variabile aleatoria X definita come il numero dei vertici colorati di arancione, ***(b)*** $*$ Calcolare $\mathbb{E}(X)$ e $Var(X)$

Supponiamo ora **invece** che ogni vertice venga colorato a caso (cioè con uguale probabilità), sempre indipendentemente dalla colorazione degli altri vertici, ma questa volta di uno dei tre colori **arancione**, **blu** e **giallo**. Siano:A_i e B_i come prima, sia $G_i = \{\textit{il vertice } i \textit{ è giallo}\}$, e siano X_A il numero dei vertici arancioni, X_B il numero dei vertici blu e X_G il numero di vertici gialli.

v) Calcolare $\mathbb{P}\left(X_A = 2, X_B = 2, X_G = 1\right)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap G_6)$ e $\mathbb{P}\left(X_A = 2, X_B = 3, X_G = 1\right)$.
(b) **(FACOLTATIVO)** Calcolare $\mathbb{P}\left(X_B = 3 \middle| X_A = 2\right)$.

ESERCIZIO 2 Alberto ha deciso di giocare ai dadi seguendo la seguente regola: per iniziare da un'urna che contiene 2 palline blu e 3 rosse estrarrà, **SENZA REINSERIMENTO**, due palline e solo successivamente lancerà un dado ben equilibrato: se dall'urna estrarrà solo palline blu punterà su $\{\mathbf{1}\}$, se dall'urna estrarrà solo palline rosse punterà su $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$, altrimenti punterà su $\{\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}\}$. Siano $A = \{\textit{Alberto vince}\}$, e siano

$$H_1 = \{\textit{Estrae solo palline blu}\}, \; H_2 = \{\textit{Estrae solo palline rosse}\}, \; H_3 = \{\textit{Estrae palline di colore diverso}\}.$$

i) $*$ Per $k = 1, 2, 3$, calcolare $\mathbb{P}(H_k)$.

ii) $*$ Calcolare la probabilità che Alberto vinca.

iii) $*$ **Sapendo che Alberto ha vinto**, calcolare la probabilità (**condizionata**) degli eventi H_k (per $k = 1, 2, 3$)

iv) Supponiamo ora **invece** che Alberto faccia una nuova estrazione di due palline, e che continui a lanciare il dado fino a quando vince per la prima volta. Posto T il numero di lanci effettuati, ***(a)*** Calcolare la probabilità che $T = 1$; ***(b)*** Calcolare la probabilità che $T = 2$ *(non è necessario fare i calcoli fino in fondo)*

v) Calcolare il valore atteso di T. *(**sugg:** usare la formula del valore atteso totale)*

ESERCIZIO 3 Siano U ed V due variabili aleatorie a valori in $\{-2, 0, +2\}$ e $\{-2, -1, +1, +2\}$, rispettivamente, e tali che $\mathbb{P}(U = -2, V = i) = c$, $i \in \{-2, -1, +1, +2\}$, $\mathbb{P}(U = 0, V = -2) = \mathbb{P}(U = 0, V = +2) = 1/4$, $\mathbb{P}(U = +2, V = -1) = \mathbb{P}(U = +2, V = +1) = 1/8$, $\mathbb{P}(U = i, V = j) = 0$ in tutti gli altri casi.

i) ***(a)*** $*$ Mostrare che $c = 1/16$. ***(b)*** $*$ Calcolare la densità discreta marginale di V.

ii) Mostrare che ***(a)*** $*$ il valore atteso di V è uguale a 0 e ***(b)*** che la varianza di V vale $23/8$.

iii) ***(a)*** $*$ Calcolare $Cov(U, V)$. ***(b)*** $*$ Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

iv) ***(a)*** Calcolare $\mathbb{P}(|UV| = 2)$. ***(b)*** Calcolare $\mathbb{P}\left(U = 2 \middle| \, |UV| = 2\right)$.

Siano ora X_i, $i \geq 1$ variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, con la stessa distribuzione di V, e sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

v) ***(a)*** Dopo aver calcolato valore atteso e varianza di $S_{184}/184$ (si usi il fatto che $184 = 23 \cdot 8$), usare la disuguaglianza di Chebyshev, per trovare una minorazione per $\mathbb{P}\left(\left|S_{184}/184\right| \leq 1/4\right)$.
OPPURE (in alternativa)
(b) Dopo aver calcolato valore atteso e varianza di S_{184} trovare un'approssimazione per $\mathbb{P}\left(-46 < S_{184} \leq 46\right)$.

22/1/2020

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**
PROVA SCRITTA - 13 febbraio 2019 - canale M-Z - FOGLIO degli ESERCIZI

ESERCIZIO 1. Sia dato un mazzo di carte napoletane (40 carte divise in 4 semi: denari, coppe, bastoni e spade, e ciascun seme con le carte numerate da 1 a 10). Si estraggono dal mazzo 6 carte.

i) (a*) Calcolare la probabilità che *tra le sei carte estratte ci siano un 1, un 2, un 3, un 4, un 5 e un 6* e la probabilità che *tra le sei carte estratte ci siano un 5, un 6, un 7, un 8, un 9 e un 10*. (**NOTA BENE: l'ordine non ha importanza**)
(b*) Calcolare la probabilità che *le sei carte estratte abbiano valori tutti diversi.*

ii) (a*) Calcolare la probabilità che *le sei carte siano tre di denari e tre di coppe.*
(b*) Calcolare la probabilità che *le sei carte siano tre di un seme e tre di un altro seme.*

Si ponga ora X_d il numero delle carte di denari tra le sei carte estratte, e analogamente X_c il numero delle carte di coppe tra le sei carte estratte.

iii) * Individuare il tipo di distribuzione di X_d e calcolare il suo valore atteso.

iv) (a*) Calcolare $\mathbb{P}(X_d = 4, X_c = 4)$. (b*) Le variabili aleatorie X_d e X_c sono indipendenti?

v) Calcolare $\mathbb{P}(X_d = 2, X_c = 2)$.

vi) Calcolare $\mathbb{P}(X_d = 2 | X_c = 2)$.

ESERCIZIO 2. Ci sono 3 urne (esternamente uguali) e ciascuna contiene 6 palline e precisamente
- la 1^a urna contiene 2 pallina bianca e 4 palline rosse
- la 2^a urna contiene 4 palline bianche e 2 palline rosse
- la 3^a urna contiene solo palline rosse

Viene scelta una tra le tre urne lanciando tre monete ben equilibrate: si sceglie la prima urna se escono esattamente due teste, si sceglie la seconda urna se escono esattamente due croci e altrimenti si sceglie la terza urna. Successivamente vengono effettuate **3 estrazioni CON REINSERIMENTO dall'urna scelta (sempre la stessa)**.

i) * Calcolare la probabilità di $U_i = \{\textit{viene scelta l'urna } i\}$, per $i = 1, 2, 3$.

ii) (a)* Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca.
(b)* Calcolare la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca.

iii) * **Sapendo che prima pallina estratta è bianca**, calcolare la probabilità che sia stata scelta la 2^a urna.

iv) * Calcolare la probabilità **(non condizionata)** che le tre palline estratte siano due bianche e una rossa.

v) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria X_R che conta il numero delle palline rosse estratte.
(**suggerimento**: usare la formula del valore atteso totale)

vi) **Sapendo che** le tre palline estratte sono due bianche e una rossa, calcolare α_i = la probabilità (condizionata) che l'urna scelta sia la $i-esima$, per $i = 1, 2, 3$.

ESERCIZIO 3. Siano U e V variabili aleatorie, con U a valori in $\{-2, -1, 1, 2\}$ e V a valori in $\{-1, 0, 1\}$, con
$P(U = -1, V = -1) = P(U = 1, V = -1) = c$,
$P(U = -1, V = 1) = P(U = 1, V = 1) = P(U = -2, V = 0) = P(U = 2, V = 0) = 2c$,
e $P(U = i, V = j) = 0$ per i rimanenti valori di i e j.

i) * Spiegare il motivo per cui $c = 1/10$.

ii) (a*) Calcolare le densità discrete marginali di V e di U
(b*) Mostrare che il valore atteso di V vale $1/5$ e che la sua varianza vale $28/50 = 14/25$.

iii) (a*) Calcolare $Cov(U, V)$. (b*) Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

iv) Calcolare **(a)** la probabilità che $UV = 1$ e **(b)** la probabilità che $U = 1$ **dato che** $UV = 1$.

Siano $\{X_i, i = 1, 2, ..., 350\}$ variabili aleatorie (globalmente) indipendenti e tutte con la stessa legge di V. Sia $Y = \frac{1}{350} \sum_{i=1}^{350} X_i = \frac{1}{350} S_{350}$.

v) **(a) Dopo aver calcolato valore atteso e varianza di** Y,
trovare una minorazione per $P\big(|Y - 1/5| \leq 2/25\big)$ utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev

OPPURE

(b) Dopo aver calcolato valore atteso e varianza di S_{350},
trovare un'approssimazione per $P\big(S_{350} \leq 87,5\big)$ utilizzando le tavole della Gaussiana.

13/2/2019

Laurea triennale in INFORMATICA, Corso di **CALCOLO DELLE PROBABILITA**
PROVA SCRITTA - 23 gennaio 2019 - canale M-Z - FOGLIO degli ESERCIZI

ESERCIZIO 1. Ci sono 3 urne (esternamente uguali) e ciascuna contiene 6 palline e precisamente
- la 1^a urna contiene 2 pallina bianca e 4 palline rosse
- la 2^a urna contiene 4 palline bianche e 2 palline rosse
- la 3^a urna contiene solo palline bianche

Viene scelta una tra le tre urne lanciando due monete ben equilibrate: si sceglie la prima urna se esce testa al primo lancio, si sceglie la seconda urna se testa esce per la prima volta al secondo lancio e altrimenti si sceglie la terza urna. Successivamente vengono effettuate **3 estrazioni SENZA REINSERIMENTO dall'urna scelta (sempre la stessa)**.

i) * Calcolare la probabilità di $U_i = \{\textit{viene scelta l'urna } i\}$, per $i = 1, 2, 3$.

ii) (a)* Calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca.
(b)* Calcolare la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca.

iii) * **Sapendo che prima pallina estratta è bianca**, calcolare la probabilità che sia stata scelta la 2^a urna.

iv) * Calcolare la probabilità **(non condizionata)** che le tre palline estratte siano due bianche e una rossa.

v) **Sapendo che** le tre palline estratte sono due bianche e una rossa, calcolare $\alpha_i =$ la probabilità (condizionata) che l'urna scelta sia la $i-esima$, per $i = 1, 2, 3$.

ESERCIZIO 2. Un'urna contiene tre palline una numerata con 1, una numerata con il numero 2 e la terza numerata con il numero 3. Si fanno **due** estrazioni **CON REINSERIMENTO** dall'urna. Siano X_1 ed X_2 i numeri estratti nella prima e nella seconda estrazione, rispettivamente, e sia N la somma dei numeri estratti.

i) * Mostrare che (a)* $\mathbb{E}[X_1] = 2$ e (b)* $Var(X_1) = \frac{2}{3}$

ii) * Spiegare perché (a)* $\mathbb{E}[N] = 4$, (b)* $Var(N) = 4/3$ *(non è necessario calcolare la legge di N)*

iii) * Calcolare $\mathbb{P}(N = 6)$ e $\mathbb{P}(N = 5)$

iv) Spiegare la validità della seguente tabella

$X_1 \diagdown N$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1/9	1/9	1/9	0	0
2	0	1/9	1/9	1/9	0
3	0	0	1/9	1/9	1/9

v) * (a) Calcolare, spiegando i passaggi, $\mathbb{P}\left(X_1 \le 2 | \frac{N}{X_1} = 2\right)$ e $\mathbb{P}\left(X_1 \le 2 | \frac{N}{X_1} = \frac{5}{2}\right)$
* (b) Gli eventi $\{X_1 \le 2\}$ e $\{\frac{N}{X_1} = 2\}$ sono indipendenti?
* (c) Le variabili aleatorie X_1 e $\frac{N}{X_1}$ sono indipendenti?

ESERCIZIO 3. Nella stessa situazione dell'ESERCIZIO 2., dopo le prime due estrazioni, si lanciano N monete truccate in modo che la probabilità di testa sia $p = 3/4$ (in altre parole: se $N = n$ si lanciano n monete). Sia Y_T il numero di **teste** ottenute in questo modo.

i) * Calcolare $P(Y_T = 6)$ e $P(Y_T = 5)$.

ii) * (a) **Sapendo che sono uscite esattamente 5 teste,** calcolare la probabilità (condizionata) che $N = 5$.
* (b) **Sapendo che sono uscite esattamente 5 teste,** calcolare la probabilità (condizionata) che $N = 3$.
* (c) **Sapendo che sono uscite esattamente 5 teste,** calcolare la probabilità (condizionata) che $N = 6$.

iii) (a) Scrivere, al variare di k, l'espressione della densità discreta condizionata di Y_T dato $N = k$, ossia calcolare $p_{Y_T}(h|N = k) = \mathbb{P}(Y_T = h|\{N = k\})$, **specificando** per quali valori di h è diversa da zero.
(b) Scrivere l'espressione della densità discreta di Y_T *(ATTENZIONE senza eseguire i calcoli).*

iv) Scrivere l'espressione della densità discreta congiunta di N e Y_T, specificando per quali valori è diversa da zero.

v) Mostrare che $\mathbb{E}(Y_T) = 3$ *(suggerimento: utilizzare la formula del valore atteso totale)*

ESERCIZIO 4. Sia data l'urna dell'ESERCIZIO 2., stavolta vengano effettuate n estrazioni, sempre **CON REINSERIMENTO** e, per $i \ge 1$, sia X_i il numero estratto all'$i-esima$ estrazione.
Posto $S_{54} = \sum_{i=1}^{54} X_i$

i) * Calcolare $\mathbb{E}[S_{54}]$ e $Var(S_{54})$

ii) * Calcolare approssimativamente $\mathbb{P}(S_{54} \le 116)$

iii) Calcolare approssimativamente $\mathbb{P}(S_{54} > 100)$

iv) Calcolare approssimativamente $\mathbb{P}(100 < S_{54} \le 116)$

23/1/2019

Esercizi

giovedì 30 gennaio 2025 12:12

Esercizi presi dal compito di G. Nappo del 16 luglio 2020

Es.1

A, B e C sono tre eventi **globalmente indipendenti** e t.c. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/3$

b) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C^C) = 2/27? \Rightarrow \mathbb{P}(A)*\mathbb{P}(B)*\mathbb{P}(C^C) = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$ f

d) $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = 5/27? \Rightarrow \mathbb{P}((\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A \cap B))*\mathbb{P}(C)) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} * \frac{1}{3}\right) * \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right) * \frac{1}{3} = \frac{6-1}{9} * \frac{1}{3} = \frac{5}{27}$

e) $\mathbb{P}$(si verifichino almeno due eventi tra A, B e C) = 7/27?

- Si verificano tutti e tre: $\{X = 3\} = A \cap B \cap C = \frac{1}{3} * \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
- Si verificano solo due: $\{X = 2\} = (A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C) = \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27}$
- Si verfica solo uno: $\{X = 1\} = (A \cap B^C \cap C^C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A^C \cap B^C \cap C) = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$
- Non si verifica nessuno: $\{X = 0\} = A^C \cap B^C \cap C^C = \frac{2}{3} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

$\mathbb{P}$(si verificano almeno due eventi) = $\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}((A \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$

Es. 2

In un urna abbiamo 6 palline:

- 2 arancioni
- 3 bianche
- 1 verde

Estraiamo **due palline senza reinserimento**. Siano

- A_1 = "la prima pallina è arancione"
- A_2 = "la seconda pallina è arancione"
- X_A = num. di palline arancioni estratte

Quale affermazione è corretta?

a) $\mathbb{P}(A_1) > \mathbb{P}(A_2)$
b) $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \mathbb{P}(A_1|A_2)$
c) $E(X) = 2*\mathbb{P}(A_1)$
d) $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$

Risoluzione

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{n.palline\ arancioni}{tot\ palline} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Con $\mathbb{P}(A_2)$ abbiamo due possibili casi:

1) Se la prima estratta è **arancione** (A_1), allora resta 1 pallina arancione su 5 rimanenti
2) Se la prima estratta **non è arancione** (A_1^C), allora restano 2 palline arancioni su 5 rimanenti

Usiamo la formula della probabilità totale

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2|A_1)*\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2|A_1^C)*\mathbb{P}(A_1^C) = \left(\frac{1}{5} * \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} * \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

Quindi **a) è falsa** e **d) è vera**

Dato che $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$

$\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{P(A2 \cap A1)}{P(A1)} = \frac{P(A2 \cap A1)}{P(A2)} = \mathbb{P}(A_1|A_2)$

Quindi **b) è vera**

X_A può assumere i valori 0, 1 o 2

$E(X_A) = \mathbb{P}(X_A = 1)*1 + \mathbb{P}(X_A = 2)*2$

X_A può essere scritto come la somma delle **variabili indicatori** delle estrazioni

$X_A = I_{A1} + I_{A2}$ dove $I_{A1} = \begin{cases} 1 & se\ la\ prima\ palla\ è\ arancione \\ 0 & altrimenti \end{cases}$

Per linearità quindi

$E(X_A) = E(I_{A1}) + E(I_{A2})$

E siccome $E(I_{A1}) = (1*\mathbb{P}(I_{A1} = 1)) + (0*\mathbb{P}(I_{A1} = 0))$, poiché $\mathbb{P}(I_{A1} = 1)$ è semplicemente la probabilità che la prima pallina sia arancione, cioè $\mathbb{P}(A_1)$, otteniamo $E(I_{A1}) = 1*\mathbb{P}(A_1) + 0*(1 - \mathbb{P}(A_1)) = \mathbb{P}(A_1)$, analogamente $\mathbb{P}(I_{A2}) = \mathbb{P}(A_2)$, quindi

$E(X_A) = E(I_{A1}) + E(I_{A2}) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_1) = 2*\mathbb{P}(A_1)$

Quindi **c) è vera**

Es. 3

Siano X e Y due var. aleatorie t.c. E(X) = 1, E(Y) = 2, V(X) = V(Y) = 1 e E(XY) = 3

a) V(X+Y) = 4
b) V(2X+Y) = 9

V(aX+bY) = aV(X) + bV(Y) + 2ab[E(XY) - E(X)*E(Y)]

a) V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2[E(XY) - E(X)*E(Y)] = 1 + 1 + 2(3-2*1) = 2+2 = 4
b) V(2X+Y) = 2V(X) + V(Y) + 2*2[E(XY) - E(X)*E(Y)] = 2 + 1 + 4(3-2*1) = 3+4 = 9

Es. 4
X e Y sono due var**. geometriche indipendenti** (a val. in {1, 2, 3, …}) con E(X) = E(Y) = 4

a) V(X+Y) = 24 (vero)
b) $\mathbb{P}$(X > 3, Y > 2) = $(1/4)^5$ (falso)
c) $\mathbb{P}$(X > 3) = $(3/4)^3$ (vero)
d) $\mathbb{P}$(X+Y = 5) = 4*$(3/4)^3$*$(1/4)^2$ (vero)
e) $\mathbb{P}$(X > 3, Y = 2) = $(3/4)^5$ (falso)

$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} * p$
prima cosa troviamo p e V(X)

E(X) = 1/p ⇒ 4 = 1/p ⇒ p = 1/4

V(X) = V(Y) = $\frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = 3 * 4 = 12$

a) Poiché le var. sono **indipendenti** la **covarianza è 0**
   V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 0 = 12+12 = 24
d) $\mathbb{P}$(X+Y = 5) = $\mathbb{P}$(X=1, Y=4)+$\mathbb{P}$(X=2, Y=3)+$\mathbb{P}$(X=3, Y=2)+$\mathbb{P}$(X=4, Y=1), poiché X e Y hanno la stessa probabilità possiamo fare
   $\mathbb{P}$(X+Y = 5) = 2*$\mathbb{P}$(X=1, Y= 4) + 2*$\mathbb{P}$(X=2, Y=3) = $2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0 * \frac{1}{4}\right) * \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 * \frac{1}{4}\right) + 2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^1 * \frac{1}{4}\right) * \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 * \frac{1}{4}\right) =$
   $2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 * \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) + 2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 * \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 4 * \left(\frac{3}{4}\right)^3 * \left(\frac{1}{4}\right)^2$

Per i problemi b), c) e e) possiamo risolverlo in due modi:

- Calcolando normalmente la probabilità complementare
  $\mathbb{P}$(X > 3) = 1-$\mathbb{P}(X \leq 3) = 1$ - ($\mathbb{P}$(X=1)+$\mathbb{P}$(X=2)+$\mathbb{P}$(X=3)) = $1 - \left(\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0 * \frac{1}{4}\right) + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^1 * \frac{1}{4}\right) + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 * \frac{1}{4}\right)\right) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64}\right) = \frac{64-37}{64} = \frac{27}{64} =$
  $\left(\frac{3}{4}\right)^3$
- O generalizzando la formula $\mathbb{P}$(X > k)
  $\mathbb{P}$(X > 3) = $\mathbb{P}$(i primi 3 tentativi sono insuccessi) = $(1-p)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3$
  Quindi Generalizzando:
  $\mathbb{P}$(X > k) = $\mathbb{P}$(Y > k) = $\left(\frac{3}{4}\right)^k$

b) $\mathbb{P}$(X > 3, Y > 2) = $\mathbb{P}$(X > 3)*$\mathbb{P}$(Y > 2) = $\left(\frac{3}{4}\right)^3 * \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^5$
e) $\mathbb{P}$(X > 3, Y = 2) = $\mathbb{P}$(X > 3)*$\mathbb{P}$(Y = 2) = $\left(\frac{3}{4}\right)^3 * \left(\left(\frac{3}{4}\right)^1 * \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 * \left(\frac{3}{16}\right) = \frac{3^4}{4^5}$

Es. 6
Alberto ha 5 carte con **1 fante** (F) **e 4 cavalli** (C). Mescola bene le carte e prende a caso **due carte**. Alle due carte ottenute **aggiunte 2 fanti e 2 cavalli** ottenendo un mazzetto di 6 carte.
M = {F,F,C,C,?,?} M_1 = {F,F,C,C,C,C} M_2 = {F,F,C,C,C,F}

i) Calcolare la prob. degli eventi
   - F_2 = {mazzetto contiene 2 fanti e 4 cavalli} = {F, F, C, C, C, C} = {estratti 2 cavalli} = {estratto 0 fanti}
   - F_3 = {mazzetto contiene 3 fanti e 3 cavalli} = {F, F, C, C, C, F} = {estratto 1 cavallo} = {estratto 1 fante}
   - F_4 = {mazzetto contiene 4 fanti e 2 cavalli} = {F, F, C, C, F, F} = {estratti 0 cavalli} = {estratti 2 fanti}

n = 5 (carte), k = 2 (carte estratte)

$\mathbb{P}(F_2) = \frac{(comb.2\ C\ su\ 4)*(comb.0\ F\ su\ 1)}{tot.combinazioni} = \frac{\binom{4}{2}*\binom{1}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{\left(\frac{4!}{2!*2!}\right)\left(\frac{1!}{0!*1!}\right)}{\frac{5!}{2!*3!}} = \frac{6*1}{10} = \frac{3}{5}$

$\mathbb{P}(F_3) = 1-\mathbb{P}(F_2) = \frac{(comb.1\ C\ su\ 4)*(comb.1\ F\ su\ 1)}{tot.combinazioni} = \frac{\binom{4}{1}*\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{\left(\frac{4!}{1!*3!}\right)*1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\mathbb{P}(F_4)$ = è impossibile estrarre 2 fanti su 1 solo = $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Bruno estrae una carta dal mazzetto. Posto C_1 = {la carta estratta da Bruno è un cavallo}

ii)
   a. Calcolare $\mathbb{P}(C_1|F_2)$, $\mathbb{P}(C_1|F_3)$ e $\mathbb{P}(C_1)$
   b. Gli eventi F_2 e C_1 sono correlati positivamente, negativamente o indipendenti?
   c. E gli eventi F_3 e C_1?

$\mathbb{P}(C_1|F_2)$ = $\mathbb{P}$(estraggo C da 4C su 6 carte} = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\mathbb{P}(C_1|F_3)$ = $\mathbb{P}$(estraggo C da 3C su 6 carte) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(C_1)$ = uso la prob. totale = $\mathbb{P}(F_2)*\mathbb{P}(C_1|F_2) + \mathbb{P}(F_3)*\mathbb{P}(C_1|F_3) = \frac{3}{5} * \frac{2}{3} + \frac{2}{5} * \frac{1}{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Per controllare la correlazione dobbiamo controllare la differenza tra

- $\mathbb{P}(F2)*\mathbb{P}(C1) = \frac{3}{5} * \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
- $\mathbb{P}(F_2 \cap C_1) = \mathbb{P}(C_1|F_2)*\mathbb{P}(F_2) = \frac{2}{3} * \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Poiché 2/5 è maggiore di 9/25 abbiamo che F_2 e C_1 sono correlati **positivamente**

i) **Sapendo che Bruno ha estratto un cavallo**, calcolare la prob. (condizionata) che il mazzetto contenga 2 fanti e 4 cavalli e che contenga 3 fanti e 3 cavalli.

$\mathbb{P}(F_2|C_1) = \frac{\mathbb{P}(C1|F2)*\mathbb{P}(F2)}{\mathbb{P}(C1)} = \frac{\frac{2}{3}*\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}$ $\mathbb{P}(F_3|C_1) = \frac{\mathbb{P}(C1|F3)*\mathbb{P}(F3)}{\mathbb{P}(C1)} = \frac{\frac{1}{2}*\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}$

Supponiamo ora invece che Bruno estragga una carta, rimetta la carta estratta nel mazzo e estragga a caso una seconda carta. Sia C_2 = {la seconda carta estratta è un cavallo} e sia X il num. tot. di volte in cui viene estratto un cavallo da Bruno.

iv) Calcolare $\mathbb{P}(C_1 \cap C_2)$. Gli eventi C_1 e C_2 sono indipendenti?

Poiché dopo C_1 la carta estratta viene reinserita nel mazzo, la prob. di C_2 sarà uguale a quella di C_1

Per poter calcolare $\mathbb{P}(C_1 \cap C_2)$ dobbiamo calcolare la probabilità totale, calcolando prima $C_1 \cap C_2$ condizionato dall'evento F_2 e dall'evento F_3

$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2|F_2) = \mathbb{P}(C_1|F_2)*\mathbb{P}(C_2|F_2) = \frac{estrarre\ C}{tot.carte} * \frac{estrarre\ C}{tot.carte} = \frac{4}{6} * \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$

$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2|F_3) = \mathbb{P}(C_1|F_3)*\mathbb{P}(C_2|F_3) = \frac{3}{6} * \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(C_1 \cap C_2)$ = prob. totale = $\mathbb{P}(F_2)*\mathbb{P}(C_1 \cap C_2|F_2) + \mathbb{P}(F_3)*\mathbb{P}(C_1 \cap C_3|F_3) = \frac{3}{5} * \frac{4}{9} + \frac{2}{5} * \frac{1}{4} = \frac{4}{15} + \frac{1}{10} = \frac{8+3}{30} = \frac{11}{30}$

$\mathbb{P}(C_1)*\mathbb{P}(C_2) = (\mathbb{P}(C_1))^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

Poiché 11/30 è diverso da 9/25 C_1 e C_2 **sono indipendenti**

v) Calcolare $E(X|F_2)$, $E(X|F_3)$ e $E(X)$

Poiché continuamo il num. di volte in cui viene estratto un cavallo (**successi**) con 2 estrazioni (**prove**), possiamo dire che X ~ Binomiale

- Se condizionata da $F_2 \Rightarrow X \sim Bin(2, \mathbb{P}(F_2|C_1)=2/3)$
- Se condizionata da $F_3 \Rightarrow X \sim Bin(2, \mathbb{P}(F_3|C_1)=1/2)$

E(X) = n*p, quindi:

- $E(X|F_2) = 2 * \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$
- $E(X|F_3) = 2 * \frac{1}{2} = 1$

Per calcolare E(X) possiamo calcolarlo tramite:

- Formula del **val. atteso totale**:
  $E(X) = \mathbb{P}(F_2)*E(X|F_2) + \mathbb{P}(F_3)*E(X|F_3) = \frac{3}{5} * \frac{4}{3} + \frac{2}{5} * 1 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$
- Tramite **var. indicatori**, in cui $X = I_{C1} + I_{C2}$
  $E(X) = E(I_{C1})+E(I_{C2}) = \mathbb{P}(C_1)+\mathbb{P}(C_2) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

Esonero Parziale 20/12/05

domenica 2 febbraio 2025 20:20

ESERCIZIO 1

Si consideri il seguente gioco a premi. Vi sono due mazzi di carte da gioco: un mazzo da 40 e un mazzo da 52. Si lancia una moneta truccata per cui la probabilità di ottenere testa è 1/4. Se il lancio della moneta dà testa allora si estraggono senza rimpiazzo 4 carte dal mazzo da 40, altrimenti si estraggono senza rimpiazzo 4 carte dal mazzo da 52. Si vincono 1000 euro se le 4 carte sono tutte degli assi o hanno tutte lo stesso seme.

1) Determinare la vincita media.

2) Si ripete il gioco in modo indipendente fino al verificarsi di una vincita. Chiamato T il numero di giocate effettuate (includendo nel conteggio di T la giocata vincente) determinare $E(T)$, $Var(T)$ e $E(T^2)$.

Nota: è sufficiente indicare le soluzioni dei punti 1) e 2) in termini di espressioni algebriche eventualmente contenenti fattoriali e coefficienti binomiali

Soluzione:

- M_1 = 40 carte (4 semi*10 carte, 4 assi)
- M_2 = 52 carte (4 semi*13 carte, 4 assi)
- $\mathbb{P}(T) = 1/4$
- $\mathbb{P}(C) = 3/4$

S = "4 assi o 4 carte dello stesso seme"

$\mathbb{P}$(4 assi da n carte) = $\binom{4}{4}$

$\mathbb{P}$(4 carte dello stesso seme da n carte) = $\binom{\frac{n}{4}}{4} * 4$ (dove n/4 indica il numero di carte per ogni seme)

$\mathbb{P}(S|M_1) = \frac{P(4\ assi\ da\ 40\ carte)+P(4\ carte\ stesso\ seme\ da\ 40\ carte)}{P(tot.estrazioni\ possibili\ da\ 40\ carte} = \frac{\binom{4}{4}+4*\binom{10}{4}}{\binom{40}{4}}$

$\mathbb{P}(S|M_2) = \frac{P(4\ assi\ da\ 52\ carte)+P(4\ carte\ stesso\ seme\ da\ 52\ carte)}{P(tot.estrazioni\ possibili\ da\ 52\ carte} = \frac{\binom{4}{4}+4*\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}}$

$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(T)*\mathbb{P}(S|M_1) + \mathbb{P}(C)*\mathbb{P}(S|M_2) = \frac{1}{4} * \frac{1+10*\binom{4}{4}}{\binom{40}{4}} + \frac{3}{4} * \frac{1+13*\binom{4}{4}}{\binom{52}{4}}$

1)

$X = \begin{cases} 1000€\ se\ S \\ 0\ altrimenti \end{cases}$

$E(X) = 1000*\mathbb{P}(X = 1000) = 1000*\mathbb{P}(S)$

2)

$T = Geom(\mathbb{P}(S))$

$E(T) = 1/p$

$V(T) = \frac{1-p}{p^2}$

$E(T^2) = V(T) + E(T)^2 = \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$

ESERCIZIO 2

1) Dire se esistono variabili aleatorie X e Y, con X a valori in $\{0,2\}$ e Y a valori in $\{-1,0,1\}$, la cui densità congiunta è rappresentata dalle entrate della seguente tabella:

$X \setminus Y$	-1	0	1
0	1/6	1/6	0
2	1/3	1/6	1/6

(cioè $p_{(X,Y)}(0,-1) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(0,0) = 1/6$, $p_{(X,Y)}(0,1) = 0$,...).

2) In caso affermativo determinare la densità discreta di X e di Y, la funzione di distribuzione di X e calcolare $E(10X + 3Y)$, $E(XY)$ e $Var(X)$ (*dare il risultato esplicito come numero frazionario svolgendo i calcoli*). Dire inoltre se X e Y sono variabili aleatorie indipendenti.

Soluzione:

1) Esistono poiché la somma delle probabilità nella tabella è uguale a 1

1/6 + 1/6 + 1/3 + 1/6 + 1/6 = 2/6 + 4*1/6 = 6/6 = 1

2) $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2+1+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{6}$

- $X = \begin{cases} \frac{1}{3}\ se\ x = 0 \\ \frac{2}{3}\ se\ x = 2 \end{cases}$
- $Y = \begin{cases} \frac{1}{2}\ se\ x = -1 \\ \frac{1}{3}\quad se\ x = 0 \\ \frac{1}{6}\quad se\ x = 1 \end{cases}$
  - Per **x < 0:** Non ci sono val. di x minori di 0
    $F_X(x) = 0,\ x < 0$
  - Per $0 \leq x < 2$:
    $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/3$
  - Per $x \geq 2$:
    $F_X(x)\ \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0)+\mathbb{P}(X = 2) = 1/3 + 2/3 = 1$
- $F_X = \begin{cases} 0 \qquad se\ x < 0 \\ \frac{1}{3}\ se\ 0 \leq x < 2 \\ 1 \qquad se\ x \geq 2 \end{cases}$

$E(X) = 0 * \frac{1}{3} + 2 * \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$E(X^2) = 0^2 * \frac{1}{3} + 2^2 * \frac{2}{3} = 4 * \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$E(Y) = -1 * \frac{1}{2} + 0 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-3+1}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

- $E(10X + 3Y)$ = per linearità = $10*E(X) + 3*E(Y) = 10 * \frac{4}{3} + 3 * \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{40}{3} - 1 = \frac{40-3}{3} = \frac{37}{3}$
- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{9} = \frac{24-16}{9} = \frac{8}{9}$
- $E(X*Y) = \sum xy * P(X = x, Y = y) = 2 * (-1) * \frac{1}{3} + 2 * 1 * \frac{1}{6} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{6} = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}$
- X e Y **non sono indipendenti** poiché $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{6} \neq$ Type equation here. = $\mathbb{P}(X = 0)*\mathbb{P}(Y = 0)$

ESERCIZIO 3 *(I dati di questo esercizio sono di pura fantasia e non molto realistici)*
La Banca Intesa ha nella città di Udine 3 sportelli Bancomat. Tipicamente, in un dato giorno il numero X_i di volte in cui lo sportello Bancomat i–esimo viene utilizzato è dato da una variabile di Poisson di parametro λ_i, con $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 50$, $\lambda_3 = 20$. X_1, X_2 e X_3 sono indipendenti. Chiamiamo X il numero totale di utilizzi in un dato giorno degli sportelli Bancomat della Banca Intesa nella città di Udine.
1) Determinare il valor medio e la varianza di X(*dare il risultato esplicito*).
2) Qual è la densità discreta di X?
3) Assumendo che in un dato giorno ogni sportello Bancomat sia non funzionante per motivi tecnici con probabilità 0.01 e che il verificarsi di problemi tecnici in un singolo sportello sia indipendente dallo stato degli altri sportelli, determinare il numero medio di sportelli Bancomat della Banca Intesa funzionanti in un dato giorno nella città di Udine (*dare il risultato esplicito*).

Soluzione:
X_1 = Poisson(100), $E(X_1) = V(X_1) = 100$
X_2 = Poisson(50), $E(X_2) = V(X_2) = 50$
X_3 = Poisson(20), $E(X_3) = V(X_3) = 20$

1)
$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 100 + 50 + 20 = 170$

Essendo X_1, X_2 e X_3 **indipendenti**:
$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 100 + 50 + 20 = 170$

oppure:

$X = \text{Poisson}(\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 170)$, $E(X) = V(X) = 170$

2) $p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \; se \; x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 \; altrimenti \end{cases}$

3) Sia N il num. di sportelli funzionanti in un dato giorno. Allora N è una v.a. **binomiale** di parametri n = 3, p = 0.99

   E(N) = 3*0.99 = 2.97

Esame Scritto 8/02/06

domenica 2 febbraio 2025 20:20

ESERCIZIO 1

Andrea, Maria e Carlo fanno parte di un gruppo di 30 ragazzi assunti a part–time da una società di volantinaggio. I 30 ragazzi vengono divisi in tre gruppi: il gruppo A con 12 componenti, il gruppo B con 12 componenti e il gruppo C con 6 componenti. Il gruppo A distribuisce volantini a Trastevere, il gruppo B all'EUR e il gruppo C a San Lorenzo.

Supponendo che tutte le possibili suddivisioni dei 30 ragazzi nei gruppi A,B,C siano equiprobabili determinare la probabilità dei seguenti eventi:

1) Andrea e Maria appartengono allo stesso gruppo,
2) Andrea, Maria e Carlo appartengono a tre gruppi differenti,
3) almeno due dei tre amici (Andrea, Maria e Carlo) stanno nello stesso gruppo,
4) Maria appartiene al gruppo B condizionata al fatto che Andrea appartiene al gruppo A e Carlo appartiene al gruppo C.

Soluzione:

1)

$p_1 = \frac{\binom{28}{10,12,6}+\binom{28}{12,10,6}+\binom{28}{12,12,4}}{\binom{30}{12,12,6}}$ (gli addendi a num. sono il num. di suddivisioni in cui Andrea e Maria siano entrambi rispettivamente in A, B e C)

2)

$p_2 = 3! * \frac{\binom{27}{11,11,5}}{\binom{30}{12,12,6}}$

dove 3! sono le possibili combinazioni in cui i tre amici si possono dividere nei gruppi e dove $\binom{27}{11,11,5}$ sono il num. di suddivisioni in cui tutti e tre sono in gruppi diversi

3)

è il complementare di p_2, quindi $p_3 = 1 - p_2$

4)

Sia E = "Maria sta in B" e F = "Andrea sta in A e Carlo sta in C", abbiamo

$p_4 = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P(tutti\ e\ tre\ sono\ in\ gruppi\ diversi)}{P(Andrea\ è\ in\ A\ e\ Carlo\ in\ C)} = \frac{\binom{27}{11,11,5}}{\binom{28}{11,12,5}}$

ESERCIZIO 2

Da un mazzo di 40 carte si estraggono a caso 5 carte senza rimpiazzo. Chiamare X il numero di assi tra le carte estratte e Y il numero di carte con segno denari tra le carte estratte.

1) Determinare la densità discreta di X e di Y.
2) Determinare la funzione di distribuzione di X.
3) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$. *Nota: dare il risultato della forma a/b con a, b interi*
4) X e Y sono indipendenti? (Motivarne la risposta)

Soluzione:

X ~ Iper(N=40, m=4, n=5) Y ~ Iper(N=40, m=10, n=5)

1)

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \frac{\binom{4}{k}\binom{36}{5-k}}{\binom{40}{5}} \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$

$$p_Y(k) = \mathbb{P}(Y = k) = \begin{cases} \frac{\binom{10}{k}\binom{30}{5-k}}{\binom{40}{5}} \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$

2)

$$F_X(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = \begin{cases} 0 & se\ k < 0 \\ p_X(0) & se\ 0 \leq k < 1 \\ p_X(0) + p_X(1) & se\ 1 \leq k < 2 \\ p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) & se\ 2 \leq k < 3 \\ p_X(0) + p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) & se\ 3 \leq k < 4 \\ 1 & se\ 4 \leq k \end{cases}$$

3)

$E(X) = \frac{5*4}{40} = \frac{1}{2}$

$E(Y) = \frac{5*10}{40} = \frac{5}{4}$

$p_X = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

$p_Y = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

$V(X) = \frac{35}{39} * 5 * \frac{1}{10} * \frac{9}{10} = \frac{35}{13} * \frac{1}{2} * \frac{3}{10} = \frac{7}{13} * \frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{21}{52}$

$V(Y) = \frac{35}{39} * 5 * \frac{1}{4} * \frac{3}{4} = \frac{35}{13} * 5 * \frac{1}{4} * \frac{1}{4} = \frac{175}{208}$

$E(X+Y)$ = per linearità = $E(X) + E(Y) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{2+5}{4} = \frac{7}{4}$

4)

X e Y **non sono indipendenti**. Infatti $\mathbb{P}(X \geq 2, Y = 5) = 0$ mentre $\mathbb{P}(X \geq 2) > 0$ e $\mathbb{P}(Y = 5) > 0$.
Quindi $\mathbb{P}(X \geq 2, Y = 5) \neq \mathbb{P}(X \geq 2)*\mathbb{P}(Y = 5)$

ESERCIZIO 3 (I dati di questo esercizio sono di pura fantasia)
La probabilità di essere affetti della malattia α è pari a 2/1000. Il test per verificare la presenza della malattia α è efficace sugli individui sani con probabilità 97/100 (cioè se un individuo sano fa il test allora dal test risulta che è sano con probabilità 97/100) mentre è efficace sugli individui malati con probabilità 95/100.
1) Dire qual è la probabilità che facendo fare il test ad un individuo scelto a caso questo risulti dal test essere sano.
2) Dire qual è la probabilità che un individuo sia malato condizionata al fatto che dal test risulti malato.

Soluzione:
Si considerino i seguenti eventi:
M = "individuo malato"   S = "individuo sano"
N = "l'individuo è sano in base al test" P = "l'individuo è malato in base al test"
$\mathbb{P}(M) = 2/1000$ $\mathbb{P}(S) = 998/1000$ $\mathbb{P}(N|S) = 97/100$ $\mathbb{P}(P|S) = 3/100$ $\mathbb{P}(N|M) = 5/100$ $\mathbb{P}(P|M) = 95/100$

1)

$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N|M)*\mathbb{P}(M)+\mathbb{P}(N|S)*\mathbb{P}(S) = \frac{5}{100} * \frac{2}{1000} + \frac{97}{100} * \frac{998}{1000}$

2)

$\mathbb{P}(M|P)$ = Bayes = $\frac{P(P|M)*P(M)}{P(P)} = \frac{P(P|M)*P(M)}{P(P|M)*P(M)+P(P|S)*P(S)} = \frac{\frac{95}{100}*\frac{2}{1000}}{\frac{95}{100}*\frac{2}{1000}+\frac{3}{100}*\frac{998}{1000}} = \frac{95*2}{95*2+3*998}$

ESERCIZIO 4
Considerare il seguente gioco: un dado viene lanciato 7 volte di seguito in modo indipendente, ad ogni lancio si vincono 2 euro se esce il numero 1 o il numero 2 altrimenti si perde 1 euro.
Chiamata X la vincita totale, determinare
1) la densità discreta di X,
2) $E(X)$, $Var(X)$, $Cov(X, X)$ *Nota: dare il risultato della forma a/b con a, b interi.*
Si ripete il gioco in modo indipendente fino a quando si ha una vincita totale negativa. Definito T il numero di giocate effettuate (includendo nel conteggio di T la giocata con vincita totale negativa) si determini $E(T)$.

Chiamiamo Z il num. di volte per cui nei 7 lanci sono usciti 1 o 2, quindi Z è il num. di lanci nel gioco per cui si vincono 2 euro.

$X = 2*Z + (-1)*(7-Z) = 3Z - 7$, dove X assume valori in $W = \{-7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14\}$

Dato che Z = Bin(7, 1/3) e che

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(Z = \frac{k+7}{3}\right)$$

si ha

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \binom{7}{\frac{7+k}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{7+k}{3}} * \left(\frac{2}{3}\right)^{7-\frac{7+k}{3}} & se\ k\ \in W \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

2) Dato che Z = Bin(7, 1/3) abbiamo E(Z) = 7/3, V(Z) = $7 * \frac{1}{3} * \frac{2}{3} = \frac{14}{9}$

Quindi E(X) = E(3Z-7) = per linearita = 3E(Z) - 7 = 0

Cov(Z) = V(Z) = 9*V(X) = 14

3) T è una var. aleatoria Geometrica di parametro p con

$$p = \mathbb{P}(X < 0) = p_X(-7) + p_X(-4) + p_X(-1)$$

Quindi E(T) = 1/p

Esame Scritto 12/06/06

domenica 2 febbraio 2025 20:21

ESERCIZIO 1

Siano X e Y variabili aleatorie di Poisson con parametro rispettivamente 4 e 3, indipendenti.

1) Calcolare $E(3XY + Y + X^2)$, $\mathrm{Cov}(X + Y, 3X + Y)$.

2) Dire (e motivarne la risposta) se $E(X^{12}) \leqslant E(X^{200})$.

Soluzione:

1) Abbiamo E(X) = V(X) = 4, $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 20$, E(Y) = V(Y) = 3
   Grazie alla **linearità** del val. atteso e all'indipendenza di X, Y abbiamo
   $E(3XY+Y+X^2) = 3E(X)*E(Y)+E(Y)+E(X^2) = 3*4*3 + 3 + 20 = 59$
   e
   Cov(X+Y, 3X+Y) = Cov(X, 3X) + Cov(Y, Y) = 3V(X) + V(Y) = 15
2) Siccome X ha val. in $\mathbb{N}$, $X^{12} \leq X^{200}$. Per la **proprietà di monotomia** del val. atteso abbiamo che $E(X^{12}) \leq E(X^{200})$

ESERCIZIO 2

Il cuoco di una mensa aperta solo a pranzo decide il menu del giorno secondo il seguente sistema:

Con probabilità 3/4 il primo è pasta e con probabilità 1/4 è riso. Se il primo è pasta allora con probabilità 1/2 il secondo è carne e con probabilità 1/2 il secondo è pesce. Mentre se il primo è riso allora con probabilità 2/3 il secondo è carne e con probabilità 1/3 il secondo è pesce. Il cuoco decide il menu nei vari giorni in modo indipendente seguendo il metodo suddetto. La mensa è funzionante tutti i giorni dell'anno.

Considerare le variabili aleatori X, Y, Z, W definite come segue:
X è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia pasta,
Y è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia riso,
Z è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia carne,
W è il numero di giorni in una settimana in cui si mangia pesce.

1) Calcolare la probabilità che in un dato giorno il primo piatto sia riso sapendo che il secondo è carne.
2) Dire se X e Y sono indipendenti.
3) Dire se X e Z sono indipendenti.
4) Calcolare media e varianza di X e di Z.

Soluzione:
Consideriamo i seguenti eventi:
P_1 = "il primo è pasta", P_2 = "il primo è riso", S_1 = "il secondo è carne", S_2 = "il secondo è pesce"
$\mathbb{P}(P_1) = 3/4$, $\mathbb{P}(P_2) = 1/4$, $\mathbb{P}(S_1|P_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(S_2|P_1) = 1/2$, $\mathbb{P}(S_1|P_2) = 2/3$, $\mathbb{P}(S_2|P_2) = 1/3$
$\mathbb{P}(S_1) = \mathbb{P}(P_1)*\mathbb{P}(S_1|P_1) + \mathbb{P}(P_2)*\mathbb{P}(S_2|P_2) = \frac{3}{4} * \frac{1}{2} + \frac{1}{4} * \frac{2}{3} = \frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{9+4}{24} = \frac{13}{24}$
X = Bin(7, 3/4), Z = Bin(7, 13/24)
$\mathbb{P}(X = k) = \binom{7}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{7-k}$

1) $\mathbb{P}(P_2|S_1)$ = Bayes = $\frac{P(S1|P2)*P(P2)}{P(S1)} = \frac{\frac{2}{3}*\frac{1}{4}}{\frac{13}{24}} = \frac{1}{6} * \frac{24}{13} = \frac{4}{13}$
2) X + Y = 7 (poiché se un giorno fanno riso non possono fare carne) quindi **non sono indipendenti**.
   Ad esempio $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ mentre $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, $\mathbb{P}(Y = 0) > 0$, quindi $\mathbb{P}(X=0,Y=0) \neq \mathbb{P}(X=0)*\mathbb{P}(Y=0)$
   ($\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\mathbb{P}(\emptyset)$ poiché in una settimana devono almeno fare uno dei due piatti. Se in una settimana non fanno riso allora hanno fatto solo carne che sarebbe $\mathbb{P}(X=7,Y=0)$)
3) X e Z **non sono indipendenti**. Ad esempio $\mathbb{P}(X=0) = \left(\frac{1}{4}\right)^7$, $P(Z=0) = \left(\frac{11}{24}\right)^7$ e $\mathbb{P}(X=0,Z=0) = \left(\frac{1}{4}\right)^7 * \left(\frac{1}{3}\right)^7$.
   Quindi $\mathbb{P}(X=0,Z=0) \neq \mathbb{P}(X=0)*\mathbb{P}(Z=0)$
   ($\mathbb{P}(X=0,Z=0) = \left(\frac{1}{4}\right)^7 * \left(\frac{1}{3}\right)^7$ poiché vuol dire che è uscito riso come primo e pesce come secondo per 7 giorni)
4) $E(X) = 7 * \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$, $V(X) = 7 * \frac{3}{4} * \frac{1}{4} = \frac{21}{16}$, $E(Z) = 7 * \frac{13}{24} = \frac{91}{24}$, $V(Z) = 7 * \frac{13}{24} * \frac{11}{24} = \frac{1001}{576}$

ESERCIZIO 3

Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Le palline numerate da 1 a 5 sono verdi e quelle numerate da 6 a 10 sono gialle.

Si estraggono senza rimpiazzo 3 palline a caso dall'urna. Reintrodotte nell'urna si ripete l'estrazione (in modo indipendente).

Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

1) in entrambe le estrazioni vengono estratte solo palline verdi,

2) tra le palline estratte alla prima estrazione e le palline estratte alla seconda estrazione vi è esattamente una pallina in comune,

3) la probabilità che alla seconda estrazione siano uscite esattamente 2 palline verdi sapendo che le palline estratte alla prima estrazione sono tutte gialle e che non vi sono palline in comune tra la prima e la seconda estrazione.

Soluzione:

1) $p_1 = \left(\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}\right) * \left(\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}\right) = \left(\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}}\right)^2$

   Dove:
   - $\binom{5}{3}$ sono le combinazioni di palline verdi dall'estrazione
   - $\binom{10}{3}$ sono le combinazioni possibili di palline nell'estrazione

2) $p_2 = \frac{3*\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}}$

   Dove:
   - 3 è il num. di modi per scegliere la **pallina in comune**
   - $\binom{7}{2}$ è il num. di modi per scegliere le **altre 2 palline** tra quelle rimanenti

3) $p_3 = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{5}{3}} * \frac{2*\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{\binom{5}{3}*2*\binom{5}{2}}{\binom{5}{3}*\binom{7}{3}} = \frac{2*\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}}$

   Infatti poiché le due estrazioni sono **indipendenti** abbiamo che la probabilità nella prima estrazione si cancella e dove l'unica cosa che modifica la probabilità della seconda estrazione è sapere che non ci sono palline in comune con la prima (rimuovendo le 3 palline gialle estratte dalla prima dalla seconda estrazione)

   Dove:
   - $\binom{5}{3}$ sono le combinazioni in cui possiamo scegliere **3 palline gialle** nella **prima estrazione**
   - 2 è il num. di modi per scegliere la **pallina verde nella seconda estrazione**
   - $\binom{5}{2}$ sono le combinazioni in cui possiamo scegliere **2 palline verdi** nella **seconda estrazione**
   - $\binom{5}{3}$ sono le combinazioni per scegliere **3 palline dalla prima estrazione**
   - $\binom{7}{3}$ sono le combinazioni per sceglier le 3 palline **nella seconda estrazione** sapendo che, siccome non ci sono palline in comune con la prima estrazione, abbiamo **7 palline rimanenti** (5 verdi e 2 gialle)

ESERCIZIO 4

Una stringa binaria è una successione finita di 0 e 1, ad esempio

$$0110111100. \tag{0.1}$$

Consideriamo un sistema di copiatura con le seguenti proprietà: data una stringa questa viene ricopiata entrata per entrata in modo indipendente e ogni singola entrata di valore 0 è copiata come 0 (cioè correttamente) con probabilità 2/3 e come 1 con probabilità 1/3,mentre ogni entrata di valore 1 è copiata come 1 (cioè correttamente) con probabilità 4/5 e come 0 con probabilità 1/5,

Data la stringa S chiamiamo S' la "copia" di S ottenuta con il suddetto sistema di copiatura e chiamiamo S'' la "copia" di S' ottenuta applicando nuovamente il suddetto sistema di copiatura. Definiamo N il numero di zeri che compaiono in S'.

1) Se S è la stringa definita in (0.1), quant'è la probabilità che $S' = 0000000000$?
2) Determinare media e varianza di N quando S è la stringa definita in (0.1).
3) Se $S = 0$ quant'è la probabilità che $S'' = 0$?
4) Se $S = 0$ quant'è la probabilità che $S'' = 1$?
5) Se $S = 00$ quant'è la probabilità che $S'' = 01$?

Soluzione:

1) nella stringa definita in (0.1) abbiamo 6 numeri 1 e 4 num. 0. Poiché ogni entrata e copiata in modo indipendente dobbiamo avere che gli 1 vengano copiato come 0 e gli 0 vengano copiati correttamente

   $p_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 * \left(\frac{1}{5}\right)^6$
2) Sia N_a = num. di zeri di S copiati correttamente e N_b = num. di zeri di S copiati erroneamente (da 1 a 0). Allora

   $N = N_a + N_b$

   Siccome $N_a = Bin(4, 2/3)$, $N_b = Bin(6, 1/5)$ e N_a, N_b **indipendenti** abbiamo

   $E(N) = E(N_a) + E(N_b) = 4 * \frac{2}{3} + 6 * \frac{1}{5} = \frac{8}{3} + \frac{6}{5} = \frac{40+18}{15} = \frac{58}{15}$

   e

   $V(N) = V(N_a) + V(N_b) = 4 * \frac{2}{3} * \frac{1}{3} + 6 * \frac{1}{5} * \frac{4}{5} = \frac{8}{9} + \frac{24}{25} = \frac{200+216}{225} = \frac{416}{225}$
3) Scriviamo $\mathbb{P}(S', S'' | S)$ per la probabilità che, facendo 2 copie a partire da S, la prima copia dia S' e la seconda dia S''.

   Allora $\mathbb{P}(0, 0|0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, $\mathbb{P}(0, 1|0) = \frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, $\mathbb{P}(1, 0|0) = \frac{1}{3} * \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, $\mathbb{P}(1, 1|0) = \frac{1}{3} * \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$

   In particolare

   $\mathbb{P}(S'' = 0|S = 0) = \mathbb{P}(0, 0|0) + \mathbb{P}(1, 0|0) = \frac{4}{9} + \frac{1}{15} = \frac{20+3}{45} = \frac{23}{45}$
4) Come sopra abbiamo

   $\mathbb{P}(S'' = 1|S = 0) = \mathbb{P}(0, 1|0) + \mathbb{P}(1, 1| 0) = \frac{2}{9} + \frac{4}{15} = \frac{10+12}{45} = \frac{22}{45}$

   oppure

   $\mathbb{P}(S'' = 1|S = 0) = 1 - \mathbb{P}(S'' = 0|S = 0) = 1 - \frac{23}{45} = \frac{22}{45}$
5) Poiché vengono copiati in modo indipendente $\mathbb{P}(S'' = 01) \Rightarrow \mathbb{P}(S'' = 0) * \mathbb{P}(S'' = 1)$

   $\mathbb{P}(S'' = 01|S = 00) = \mathbb{P}(S'' = 0|S = 0) * \mathbb{P}(S'' = 1|S = 0) = \frac{23}{45} * \frac{22}{45}$

Esame Scritto 17/07/06

lunedì 3 febbraio 2025 10:50

ESERCIZIO 1

Si consideri il seguente esperimento:

Da un'urna contenente 5 palline rosse, 3 palline verdi e 1 pallina gialla si estraggono senza rimpiazzo 3 palline. Sia X in numero di palline rosse estratte. Se $X = 0$ allora si estraggono altre 2 palline senza rimpiazzo dalle rimanenti 6 palline.

Chiamato Y il numero totale di palline rosse estratte, determinare:

1) $E(X)$, $Var(X)$, $Var(2X+1)$, $E(X^2)$, (*dare la soluzione come numero frazionario*)

2) la densità discreta di Y.

Soluzione:

X = Iper(9, 5, 3), $p_X = \frac{5}{9}$ $E(X) = \frac{5*3}{9} = \frac{5}{3}$, $V(X) = \frac{6}{8} * 3 * \frac{5}{9} * \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$, $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = \frac{5}{9} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{3}$, $V(2X+1) = 2^2*V(X) = 4 * \frac{5}{9} = \frac{20}{9}$

$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{k}*\binom{4}{3-k}}{\binom{9}{3}}$, per k = 0, 1, 2, 3

Se X > 0 allora non si fa la seconda estrazione e Y = X

Se X = 0 allora si esegue la seconda estrazione

2) Se nella prima estrazione abbiamo estratto 0 palline rosse (X = 0) allora nella seconda avremmo 5 palline rosse su 6, quindi è impossibile non estrarre una pallina rossa nella seconda estrazione ($\mathbb{P}(Y=0|X=0) = 0$) percio Y assume solo val. 1, 2, 3

   $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(Y = k|X = 0)*\mathbb{P}(X = 0)$

   $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(Y = 1|X = 0)*\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{5}{1}*\binom{4}{2}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{5}{1}}{\binom{6}{2}} * \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$

   $\mathbb{P}(Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(Y = 2|X = 0)*\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{5}{2}*\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{2}} * \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}$

   $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(Y = 3|X = 0)*\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}$

   (in questo caso $\mathbb{P}(Y = 3|X = 0) = 0$ poiché possiamo estrarre solo 2 palline nella seconda estrazione e se nella prima abbiamo estratto 0 palline rosse allora nella seconda possiamo estrarne massimo 1 o 2)

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente esperimento:

Si dispone di un dado e di una moneta truccata per cui testa esce con probabilità 1/3 e croce esce con probabilità 2/3. Si lancia il dado. Sia K il numero uscito. Se $K = 1,2$ allora si lancia la moneta 3 volte, se $K = 3,4,5$ allora si lancia la moneta 4 volte mentre se $K = 6$ allora si lancia la moneta 2 volte. Tutti i lanci sono indipendenti.

Sia X il numero di volte in cui è uscita testa nel suddetto esperimento.

1) Determinare la probabilità che $X = 2$ (*dare la soluzione come numero frazionario*).

2) Determinare la probabilità che $K = 5$ sapendo che $X = 2$(*dare la soluzione come numero frazionario*).

3) Dire se X e K sono indipendenti.

Soluzione:

$\mathbb{P}(T) = 1/3$

La v.a. X si forma con 3 variabili **binomiali** separate in base a K.

X_0 = "# testa se K = 1,2" = Bin(3, 1/3) $\Rightarrow \mathbb{P}(X = m|K = 1,2) = \mathbb{P}(X_0 = m) = \binom{3}{m} * \left(\frac{1}{3}\right)^m * \left(\frac{2}{3}\right)^{3-m}$ con m=0, 1, 2, 3

X_1 = "# testa se K = 3,4,5" = Bin(4, 1/3) $\Rightarrow \mathbb{P}(X = m|K = 3,4,5) = \mathbb{P}(X_1 = m) = \binom{4}{m} * \left(\frac{1}{3}\right)^m * \left(\frac{2}{3}\right)^{4-m}$ con m=

X_2 = "# testa se K = 6" = Bin(2, 1/3) $\Rightarrow \mathbb{P}(X = m|K = 6) = \mathbb{P}(X_2 = m) = \binom{2}{m} * \left(\frac{1}{3}\right)^m * \left(\frac{2}{3}\right)^{2-m}$

$X = X_0 + X_1 + X_2$

1) $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X_0 = 2)*\mathbb{P}(K = 1,2) + \mathbb{P}(X_1 = 2)*\mathbb{P}(K = 3,4,5) + \mathbb{P}(X_2 = 2)*\mathbb{P}(K = 6) =$

   $= \binom{3}{2} * \left(\frac{1}{3}\right)^2 * \left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} * \frac{2}{6} + \binom{4}{2} * \left(\frac{1}{3}\right)^2 * \left(\frac{2}{3}\right)^{4-2} * \frac{3}{6} + \binom{2}{2} * \left(\frac{1}{3}\right)^2 * \left(\frac{2}{3}\right)^{2-2} * \frac{1}{6} =$

   $= 3 * \frac{1}{9} * \frac{2}{3} * \frac{1}{3} + 6 * \frac{1}{9} * \frac{4}{9} * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{9} * 1 * \frac{1}{6} = \frac{2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{1}{54} = \frac{4+8+1}{54} = \frac{13}{54}$

2) $\mathbb{P}(K = 5|X = 2)$ = Bayes = $\frac{P(X = 2|K = 5)*P(K=2)}{P(X=2)} = \frac{P(X_1=2)*\frac{1}{6}}{\frac{13}{54}} = \frac{\binom{4}{2}*\left(\frac{1}{3}\right)^2*\left(\frac{2}{3}\right)^2*\frac{1}{6}}{\frac{13}{54}} = 6 * \frac{1}{9} * \frac{4}{9} * \frac{1}{6} * \frac{54}{13} = \frac{4}{3} * \frac{2}{13} = \frac{8}{39}$

3) X e K **non sono indipendenti**. Infatti $\mathbb{P}(X = 3, K =2) = 0$ (????? io non so perche la prof dica che $\mathbb{P}(X = 3, K = 2) = 0$ anche perché è falso. Riscrivo la risposta con un altro esempio)

   Infatti $\mathbb{P}(X = 3, K = 6) = 0$ (poiché eseguiamo 2 lanci se K = 6 e non possiamo avere 3 teste) mentre $\mathbb{P}(X = 3) > 0$ e $\mathbb{P}(K = 6) > 0$.

   Quindi $\mathbb{P}(X = 3, K = 6) \neq \mathbb{P}(X = 3)*\mathbb{P}(K = 6)$

ESERCIZIO 3

X, Y, Z sono variabili aleatorie indipendenti, X, Y sono variabili geometriche con valore atteso $E(X) = 4$, $E(Y) = 3$ mentre Z è variabile di Poisson con $E(Z) = 1$.

1) Determinare $E(4X + 10Y + X^2YZ)$, $Cov(2X + 1, Y + Z + 3)$, $Var(X + 2Y + Z)$ (*dare la soluzione come numero frazionario*).

Soluzione:

E(Poisson(λ)) = λ, E(Geometrica(p)) = 1/p

E(X) = 4 $\Rightarrow$ X ~ Geom(1/4), E(Y) = 3 $\Rightarrow$ Y ~ Geom(1/3), E(Z) = 1 $\Rightarrow$ Z = Poisson(1)

$V(X) = \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{3}{4} * 16 = 12$, $V(Y) = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} * 9 = 6$, V(Z) = 1

$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = 12 + 4^2 = 28$

1) Per linearità e indipendenza delle var.

   $E(4X + 10Y + X^2YZ) = 4E(X) + 10E(Y) + E(X^2)E(Y)E(Z) = 4*4 + 10*3 + 28*3*1 = 16 + 30 + 84 = 130$

   $V(X + 2Y + Z) = V(X) + 2^2V(Y) + V(Z) = 12 + 4*6 + 1 = 37$

   siccome Cov(X, Y) = 0 se X e Y indipendenti,

   Cov(2X + 1, Y + Z + 3) = 0

ESERCIZIO 4

Da un mazzo di 40 carte si estraggono 5 carte. Determinare la probabilità dei seguenti eventi:

1) le 5 carte sono tutte di bastoni e includono il cavallo di bastoni,

2) vi sono esattamente 4 carte di denari o vi è esattamente un cavallo,

3) o vi sono esattamente 4 carte di denari o vi è esattamente un cavallo.

Soluzione:

1) $p_1 = \frac{1*\binom{9}{4}}{\binom{40}{5}}$

- 1 è il cavallo di bastoni estratto
- $\binom{9}{4}$ sono le combinazioni delle altre 4 carte da estrarre dalle 9 carte di bastoni rimaste (senza contare il cavallo infatti)

2) Siano gli eventi A = "vi sono esattamente 4 carte di denari" e B = "vi è esattamente un cavallo". Allora per il **principio di esclusione/inclusione**

   $p_2 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

   $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{10}{4}*\binom{30}{1}}{\binom{40}{5}} = \frac{\binom{10}{4}*30}{\binom{40}{5}}$

   - $\binom{10}{4}$ sono le combinazioni delle 4 carte di denari da estrarre dalle 10 carte di denari totali
   - $\binom{30}{1}$ sono le altre 30 carte restanti da poter estrarre

   $\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{4}{1}*\binom{36}{4}}{\binom{40}{5}} = \frac{4*\binom{36}{4}}{\binom{40}{5}}$

   - $\binom{4}{1}$ sono i 4 cavalli possibili da estrarre

   (36)

ESERCIZIO 4

1)

$$p_1 = \frac{\binom{9}{4}}{\binom{40}{5}}$$

2) Sia A l'evento che vi sono esattamente 4 carte di denari e sia B l'evento che vi è esattamente un cavallo. Allora

$$P(A) = \frac{30\binom{10}{4}}{\binom{40}{5}}$$

$$P(B) = \frac{4\binom{36}{4}}{\binom{40}{5}}$$

Se si verifica $A \cap B$ allora ho due possibilità incompatibili:

a) vi sono il cavallo di denari, 3 carte di denari diverse dal cavallo e 1 carta che non è di denari e non è un cavallo,

b) vi sono 4 carte di denari diverse dal cavallo e 1 cavallo non di denari.

Il primo evento, caso (a), si verifica con probabilità

$$\frac{\binom{9}{3}27}{\binom{40}{5}}$$

mentre il secondo evento, caso (b), si verifica con probabilità

$$\frac{\binom{9}{4}3}{\binom{40}{5}}$$

Quindi

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{9}{3}27 + \binom{9}{4}3}{\binom{40}{5}}$$

Per il principio di inclusione–esclusione (qui banale)

$$p_2 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{4}{1} * \binom{36}{4}}{\binom{40}{5}} = \frac{4 * \binom{36}{4}}{\binom{40}{5}}$$

- $\binom{4}{1}$ sono i 4 cavalli possibili da estrarre
- $\binom{36}{4}$ sono le restanti 36 carte da estrarre nelle 4 estrazioni rimaste

Se si verifica $A \cap B$ allora ho due possibilità incompatibili:

a) vi sono il cavallo di denari, 3 carte di denari diverse dal cavallo e 1 carta che non è di denari e non è un cavallo
b) vi sono 4 carte di denari diverse dal cavallo e 1 cavallo non di denari

$$\mathbb{P}(a) = \frac{\binom{1}{1} * \binom{9}{3} * \binom{27}{1}}{\binom{40}{5}} = \frac{\binom{9}{3} * 27}{\binom{40}{5}}$$

- $\binom{1}{1}$ è il cavallo di denari estratto
- $\binom{9}{3}$ sono le combinazioni delle 3 carte di denari (senza il cavallo ⇒ 10 - cavallo = 9)
- $\binom{27}{1}$ sono le combinazioni delle 27 carte restanti nel mazzo che non sono denari o cavallo (40 - 10 denari - 3 cavalli (il quarto cavallo è nei denari) = 27)

$$\mathbb{P}(b) = \frac{\binom{9}{4} * \binom{3}{1}}{\binom{40}{5}} = \frac{\binom{9}{4} * 3}{\binom{40}{5}}$$

- $\binom{9}{4}$ sono le combinazioni delle 4 carte di denari diverse dal cavallo (10 denari - cavallo)
- $\binom{3}{1}$ è il cavallo non di denari (4 cavalli totali - cavallo di denari)

Quindi

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\binom{9}{3} * 27}{\binom{40}{5}} + \frac{\binom{9}{4} * 3}{\binom{40}{5}} = \frac{\binom{9}{3} * 27 + \binom{9}{4} * 3}{\binom{40}{5}}$$

$p_2 = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3) $p_3 = \mathbb{P}((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- $A \cup B$: vi sono 4 carte di denari o un cavallo
- $A \cap B$: vi sono 4 carte di denari e un cavallo
- Viene rimossa l'intersezione cosi che accada o A o B ma non tutti e due insieme

Quindi

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{9}{3} 27 + \binom{9}{4} 3}{\binom{40}{5}}$$

Per il principio di inclusione–esclusione (qui banale)

$$p_2 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

3)

$$p_3 = P((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$$