7 - Pile e Code

Pila

Specifica sintattica

Una pila è una sequenza di elementi di un certo tipo in cui è possibile **aggiungere o togliere elementi solo da un estremo della sequenza (la "testa")**.
Può essere visto come un caso speciale di lista in cui l'ultimo elemento inserito è il primo a essere rimosso (LIFO) e non è possibile accedere ad alcun elemento che non sia quello in testa.
Tipi: `pila` `boolean` `tipoelem`
Operatori:

Operatore	Input (Dominio)	Output (Codominio)
`creapila`	`()`	`pila`
`pilavuota`	`(pila)`	`boolean`
`leggipila`	`(pila)`	`tipoelemento`
`fuoripila`	`(pila)`	`pila`
`inpila`	`(tipoelemento.pila)`	`pila`

Il comportamento di questi operatori è il seguente:

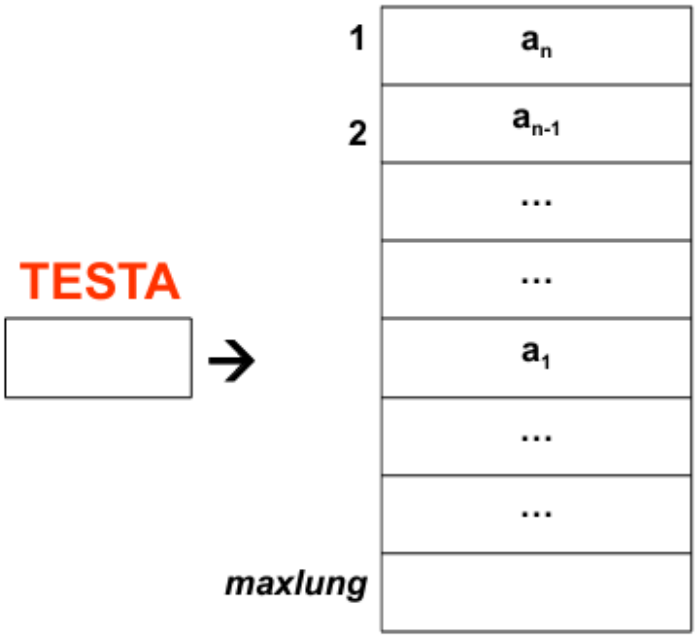
- `creapila=p` : crea semplicemente una pila vuota (`p=<>`)
- `pilavuota(p)=b` : definito anche come **empty**, fa in modo che b restituisca **vero** se la pila p è una sequenza vuota, **falso** se è presente qualcosa, in modo tale da controllare se la pila è vuota o no.
- `leggipila(p)=a` : definito anche come **top**, per il suo utilizzo richiede che la pila sia piena poiché non si può prelevare dalla cima se non è presente nulla. Se questo è vero allora questo operatore restituirà il primo valore presente in cima alla lista senza rimuoverlo (ricordo quando con la monopoli la creammo noi da 0 sta funzione).
- `fuoripila(p)=p` : definita anche come **pop**, essa restituisce una **nuova** pila `p'` che è uguale alla pila originale **senza** il primo elemento (`p' = <a_2, a_3, ..., a_n>`). Se la pila aveva un solo elemento (`n=1`), la nuova pila sarà vuota (`p' = <>`). Attenzione alcune pile restituiscono anche l'elemento rimosso tramite questa funzione ma non è valido per tutte.
- `inpila(a,p)=p'` : detta anche **push**, intuibile come quest'ultima funzione infine metta l'elemento a in cima alla nuova pila p'.

Realizzazioni

Una pila è semplicemente un **caso particolare di una lista**. È una lista in cui tutte le operazioni (inserimento, cancellazione, lettura) avvengono **solo su un estremo**: la testa della lista (cioè la `primolista`).
Di conseguenza, non abbiamo bisogno di reinventare le implementazioni. Possiamo mappare direttamente gli operatori della Pila (Stack) su quelli della Lista (List):
- **`creapila()`** corrisponde a **`crealista()`**.
- **`pilavuota(p)`** corrisponde a **`listavuota(p)`**.
- **`leggipila(p)`** (Legge la cima) corrisponde a **`leggilista(primolista(p), p)`** (Legge il primo elemento della lista).
- **`fuoripila(p)`** (Rimuove la cima) corrisponde a **`canclista(primolista(p), p)`** (Cancella il primo elemento della lista).
- **`inpila(a,p)`** (Aggiunge in cima) corrisponde a **`inslista(a, primolista(p), p)`** (Inserisce come primo elemento della lista).

Realizzazione con Vettore

Si utilizza un array di **dimensione fissa** (`maxlung`) e un "**cursore**" (un indice intero) che chiamiamo **`TESTA`**.



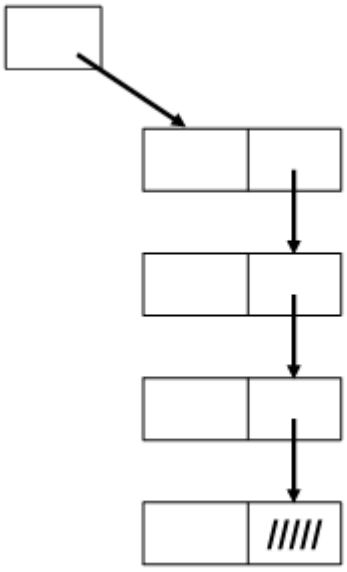
Il funzionamento di questa implementazione ha una complessità computazionale pari a $O(1)$.
A differenza dell'implementazione *generale* della lista (dove `insLista` e `cancLista` in mezzo richiedevano uno scorrimento), qui le operazioni avvengono solo a un'**estremità**.
Il cursore `TESTA` tiene traccia della posizione del **primo elemento libero** (o dell'ultimo inserito).

- **`inpila` (push):** Inserisce l'elemento nella posizione `TESTA` e incrementa `TESTA`. Questa è un'operazione a **tempo costante con C.C pari a:** $O(1)$.

- `fuoripila` **(pop):** Decrementa `TESTA`, rendendo anch'essa a **tempo costante** $O(1)$.
- `leggipila` **(top):** Legge l'elemento alla posizione `TESTA-1`, con C.C. sempre a **tempo costante**, come i precedenti.

Realizzazione con Puntatori

L'implementazione è una semplice **lista concatenata**



A differenza della rappresentazione vettoriale essa ha il vantaggio di essere **dinamica** (non ha un `maxlung` fisso) e mantiene l'efficienza di $O(1)$ per tutte le operazioni.
Si utilizza un **singolo puntatore** (`testa`) che punta **solo ed esclusivamente** alla cella in cima alla pila.
- `inpila` **(push):** Crea una nuova cella, fa in modo che il suo puntatore `next` punti alla vecchia `testa`, e infine aggiorna la `testa` facendola puntare alla nuova cella (equivale a `inslista` in testa).
- `fuoripila` **(pop):** Salva un puntatore temporaneo alla `testa`, aggiorna la `testa` facendola puntare a `testa->next`, e dealloca la cella temporanea (equivale a `canclista` in testa).
- `leggipila` **(top):** Restituisce il valore contenuto nella cella puntata da `testa`.

Pile e Procedure Ricorsive

Una delle funzioni più particolari ed interessanti della pila è la possibilità di eseguire programmi **ricorsivi**.
L'esecuzione di una procedura ricorsiva prevede il **salvataggio dei dati** su cui lavora la procedura al momento della **chiamata** ricorsiva. Questi dati vengono letteralmente **impilati** in una pila e viene chiamata poi il programma interno che procede con la sua esecuzione. Quando la chiamata interna termina, il suo stato viene rimosso dalla pila (pop), e i dati della chiamata precedente vengono "ripristinati** (top/pop), permettendole di continuare da dove si era interrotta l'esecuzione esterna.

Se si studia il meccanismo appena descritto si nota come le chiamate ricorsive vengano *annidate* una dentro l'altra; la più **recente** è sempre la **prima a terminare**, questo non è altro che il funzionamento del **LIFO**, ovvero una pila in tutto e per tutto.

Grazie a questa struttura possiamo sempre trasformare un programma ricorsivo in uno **iterativo**. I programmi ricorsivi, come sappiamo, sono ottimi per problemi di rango n poiché permettono in termini di avere soluzioni al problema di rango inferiore a n, è definibile una soluzione per assioma sul problema di rango minimo (che va da 0 a 1).

Un esempio pratico è l'**aspirale di Fibonacci**.
Questa successione è definita come una sequenza dove il $k-esimo$ elemento è uguale alla somma dei due che lo precedono, per $k > 2$.

$$fib(1) = 1 \;\; fib(2) = 1 \;\; fib(k) = fib(k-1) + fib(k+2)$$

Questa sequenza è facilmente ricreabile tramite funzione ricorsiva che calcola il $k-esimo$ numero della successione:

```
int fib(int k){
    if(k=1) or (k=2) then
        f=1
    else
        f=fib(k-1)+fib(k-2)
    return f
}

//Supponendo siano per k=4, nella pila vedremo
fib(4)
fib(3),fib(4)
fib(2),fib(3),fib(4)
fib(1),fib(3),fib(4)
```

La torre di Hanoi

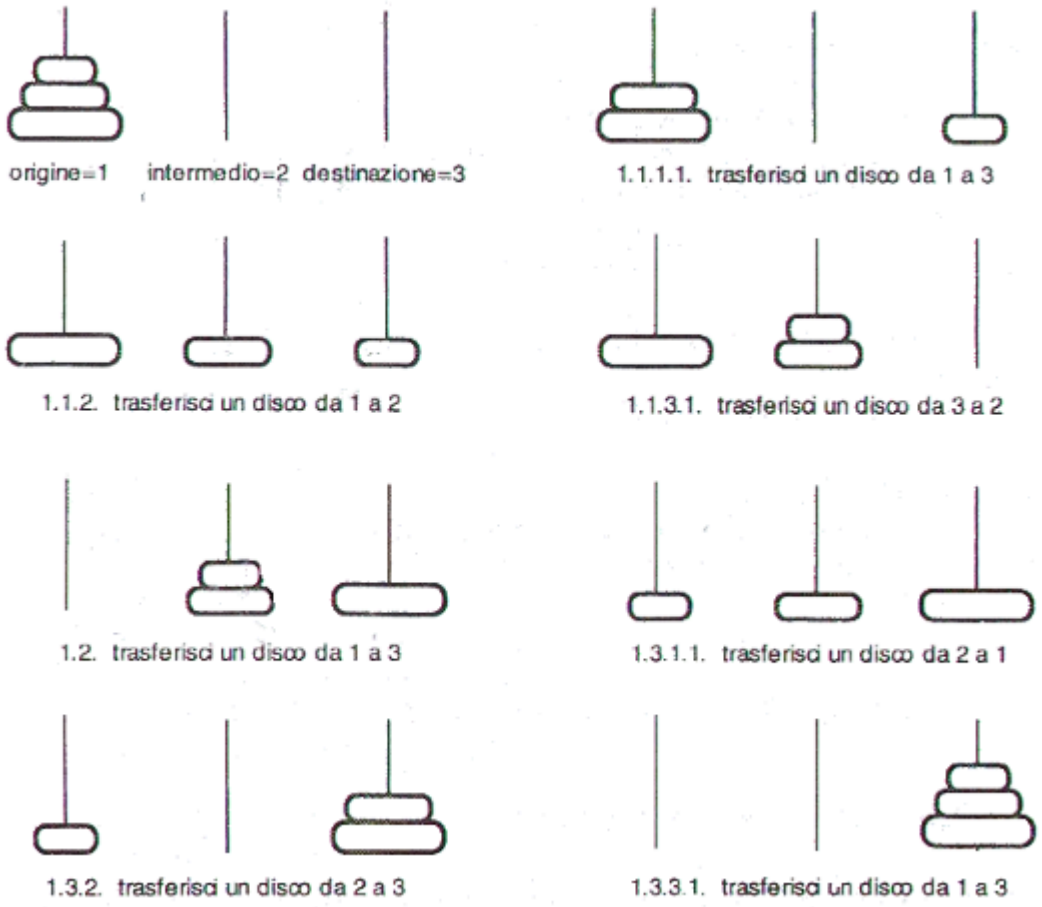
La logica dietro il problema del monastero tibetano dice:
Ci sono *n* dischi d'oro, tutti di diametro diverso, infilati in un piolo (origine).
Sono impilati in ordine di diametro decrescente, dal più grande in basso al più piccolo in cima.

- **Obiettivo:** Spostare l'intera pila di dischi su un altro piolo (destinazione), creando una catasta identica a quella di partenza.
- Le **Regole**:

1. È possibile usare un terzo piolo ("intermedio") per gli spostamenti.

2. Si può spostare **un solo disco per volta**.
3. Non è **mai** possibile sovrapporre un disco più grande su uno più piccolo.

La soluzione ricorsiva



Come si può vedere nella figura, la strategia per spostare n dischi da un'origine a una destinazione è definita scomponendo il problema:

1. Muovi i primi $n-1$ dischi (i più piccoli) dal piolo di *origine* al piolo *intermedio* (usando la destinazione come appoggio).
2. Muovi il disco rimanente (l'unico rimasto, il più grande) dal piolo di *origine* al piolo di *destinazione*.
3. Muovi gli $n-1$ dischi che avevi "parcheggiato" sull'intermedio, dal piolo *intermedio* al piolo di *destinazione*(usando l'origine come appoggio).

In pseudo-code ricorsivo sarebbe:

```
move(int n, pole origine,pole destinazione,pole intermedio){
    if n=1 then
        muovi_un_disco_da_origine_a_destinazione
    else
        move(n-1, origine,intermedio,destinazione)
        muovi_un_disco_da_origine_a_destinazione
```

```
        move(n-1, intermedio,destinazione,origine)
}
```

Definizione dei tipi usati:

- `pole` : enumerativo con valore origine, destinazione e intermedio
- `interopos` : intero maggiore di 0.

Il codice diviene:

```
torre(){
    cin>>numerodischi
    cout<<"per "<<numerodischi<<"dischi i movimenti richiesti sono: "
    move(numerodischi,origine,intermedio,destinazione)
}

printpole(pole p){
    case p of
        origine: cout<<"origine"
        intermedio: cout<<"intermedio"
        destinazione: cout<<"destinazione"
}

muovisorg_a_destin(){
    cout<<"muovi un disco da"
    printpole(origine)
    cout<<"a "
    printpole(destinazione)
    cout<<"usando come intermedio"
    printpole(intermedio)
}

move(interpos n, pole ori, pole intermedio, pole destin){
    if n=1 then
        muovisorg_a_destin()
    else
        move(n-1,ori,destin,intermedio)
        muovisorg_a_destin()
        move(n-1,intermedio,ori,destin)
}
```

La Trasformazione Iterativa

È **sempre possibile trasformare una procedura ricorsiva in una iterativa usando una pila** .
Il metodo consiste nel simulare manualmente ciò che il computer fa automaticamente con la pila delle chiamate di sistema:

- Si crea una Pila all'inizio.
- Ogni chiamata ricorsiva viene sostituita da una sequenza di istruzioni che:
  1. **Salva (`inpila`)** sulla Pila lo stato corrente: i valori dei parametri, le variabili locali e, soprattutto, un'etichetta di "ritorno" (per sapere dove riprendere dopo).
  2. Assegna ai parametri i nuovi valori per la "finta" chiamata successiva.
  3. Effettua un `goto` (salto) all'inizio della procedura.
- Alla fine della procedura, si aggiunge un blocco di codice che:
  1. Controlla se la Pila non è vuota.
  2. **Estrae (`fuoripila` / `leggipila`)** lo stato salvato.
  3. Esegue un `goto` all'etichetta di ritorno che era stata salvata.

L'Implementazione Iterativa

```
/* * Definizione di tipi (pseudocodice):
 * tipoelem: elemento strutturato con componenti
 * - numerodischi: interopos
 * - piolorig, piolodest, pioloaus: pole
 * - ritorno: intero
 */

// Procedura iterativa per la Torre di Hanoi
move(int n, pole sorgente, pole destinazione, pole ausiliario)
{
    // s è la pila per gestire la ricorsione
    creapila(s);

1: // Etichetta per l'inizio della "chiamata"
    if (n == 1) {
        muovisorg_a_destin;
        goto 3; // "Ritorna" dalla chiamata
    }

    // --- Simula la chiamata: move(n-1, sorgente, ausiliario,
destinazione) ---
```

```
    // Salva lo stato corrente prima della "ricorsione"
    stato.numerodischi = n;
    stato.piolorig = sorgente;
    stato.pioloaus = ausiliario;
    stato.piolodest = destinazione;
    stato.ritorno = 2; // Indirizzo di ritorno
    inpila(stato, s);

    // Imposta i parametri per la nuova "chiamata"
    n = n - 1;
    // Scambia destinazione e ausiliario
    temp = destinazione;
    destinazione = ausiliario;
    ausiliario = temp;

    goto 1; // "Chiama"

2: // Etichetta per il ritorno dalla prima chiamata
    muovisorg_a_destin; // Mossa centrale

    // --- Simula la chiamata: move(n-1, ausiliario, destinazione,
sorgente) ---
    // Salva lo stato corrente
    stato.numerodischi = n;
    stato.piolorig = sorgente;
    stato.pioloaus = ausiliario;
    stato.piolodest = destinazione;
    stato.ritorno = 3; // Indirizzo di ritorno
    inpila(stato, s);

    // Imposta i parametri per la nuova "chiamata"
    n = n - 1;
    // Scambia sorgente e ausiliario
    temp = sorgente;
    sorgente = ausiliario;
    ausiliario = temp;

    goto 1; // "Chiama"

3: // Etichetta per il "ritorno" (pop dalla pila)
```

```
    if (not pilavuota(s)) {
        // Ripristina lo stato precedente
        stato = leggipila(s);
        fuoripila(s);
        n = stato.numerodischi;
        sorgente = stato.piolorig;
        destinazione = stato.piolodest;
        ausiliario = stato.pioloaus;

        // Salta all'indirizzo di ritorno corretto
        case stato.ritorno of
        {
            2: goto 2;
            3: goto 3;
        }
    }
    // Se la pila è vuota, l'algoritmo termina
}
```

Questo codice è complesso, ma simula la ricorsione:

1. **Definizione:** Definisce un `tipoelem` (elemento della Pila) che è una struttura (`stato`) per salvare tutti i parametri (n, pioli) e l'etichetta di ritorno .
2. **Inizio:** Crea una Pila (`creapila(s)`) e definisce l'etichetta `1:` .
3. **Prima Chiamata Ricorsiva (Sostituzione):** La prima `move(n-1, ...)` della versione ricorsiva viene sostituita :
   - Salva lo stato attuale e `stato.ritorno = 2` (l'etichetta `2:` da cui ripartire) .
   - Fa `inpila(stato, s)`.
   - Aggiorna le variabili per la chiamata `n-1` .
   - Salta a `goto 1`.
4. **Seconda Chiamata Ricorsiva (Sostituzione):** Alla label `2:`, dopo aver mosso il disco , la seconda `move(n-1, ...)` viene sostituita :
   - Salva lo stato attuale e `stato.ritorno = 3` (l'etichetta `3:` che è la fine) .
   - Fa `inpila(stato, s)`.
   - Aggiorna le variabili .
   - Salta a `goto 1`.
5. **Il Ritorno (Gestione Pila):** All'etichetta `3:`, gestisce la Pila:
   - Se la pila non è vuota, estrae l'ultimo stato (`stato = leggipila(s)`, `fuoripila(s)`) .
   - Ripristina tutte le variabili (`n = stato.numerodischi`, ecc.).

- Usa un `case` per saltare all'etichetta di ritorno salvata (`goto 2` o `goto 3`)

Valutazione di un'espressione postfissa

Calcolare un'espressione aritmetica complessa, come

$$5 * (((9 + 8) * (4 * 6)) + 7)$$

non è banale perché richiede di **memorizzare i risultati intermedi** (ad esempio, `9+8` deve essere calcolato e "messo da parte" prima di essere moltiplicato).

- **Lo Strumento:** Una **Pila** (Stack) è il meccanismo ideale per gestire questa memoria temporanea, grazie alla sua natura LIFO.
- **La Semplificazione (Notazione Postfissa):** Invece di valutare la complessa notazione "infissa" (dove l'operatore sta *tra* gli operandi), la slide introduce un problema più semplice: valutare un'espressione in **forma postfissa** (o "notazione polacca inversa").
  - **Definizione di Postfissa:** In questa notazione, ogni operatore appare *dopo* i suoi due argomenti.
    - Esempio: `(9 + 8)` diventa `9 8 +`.

Conversione di un'espressione infissa in postfissa

Ma come otteniamo l'espressione postfissa?
È possibile **usare una Pila anche per convertire** un'espressione da infissa (con parentesi) a postfissa.
L'Algoritmo di Conversione: è un'algoritmo preciso che scorre l'espressione infissa da sinistra a destra:

1. **Se incontri un numero (operando):** Lo scrivi direttamente nell'**output**.
2. **Se incontri una parentesi aperta `(` :** La **ignori**.
3. **Se incontri un operatore (`+`, `*`, ...):** Lo inserisci (push) nella **Pila**.
4. **Se incontri una parentesi chiusa `)` :** Estrai (pop) l'operatore che sta in cima alla Pila e lo scrivi nell'**output**.

Tracciamento (Trace) dell'Esempio: L'esecuzione di questo algoritmo sull'espressione $5 * (((9 + 8) * (4 * 6)) + 7)$ (le parentesi esterne sono implicite per la regola 4).

Input Letto	Azione	Output	Pila
`5`	Scrivi numero	`5`	`< >`
`*`	Push operatore	`5`	`<*>`
`9`	Scrivi numero	`5 9`	`<*>`
`+`	Push operatore	`5 9`	`<+, *>`
`8`	Scrivi numero	`5 9 8`	`<+, *>`

Input Letto	Azione	Output	Pila
`)`	Pop operatore	`5 9 8 +`	`<*>`
`*`	Push operatore	`5 9 8 +`	`<*, *>`
`4`	Scrivi numero	`5 9 8 + 4`	`<*, *>`
`*`	Push operatore	`5 9 8 + 4`	`<*, *, *>`
`6`	Scrivi numero	`5 9 8 + 4 6`	`<*, *, *>`
`)`	Pop operatore	`5 9 8 + 4 6 *`	`<*, *>`
`)`	Pop operatore	`5 9 8 + 4 6 * *`	`<*>`
`+`	Push operatore	`5 9 8 + 4 6 * *`	`<+, *>`
`7`	Scrivi numero	`5 9 8 + 4 6 * * 7`	`<+, *>`
`)`	Pop operatore	`5 9 8 + 4 6 * * 7 +`	`<*>`
`)`	Pop operatore	`5 9 8 + 4 6 * * 7 + *`	`< >`

Alla fine, la pila è vuota e l'output è l'espressione postfissa corretta.

Coda

Una Coda è un tipo astratto per una sequenza di elementi, ma con regole di accesso specifiche.
Funzionamento:
- È possibile **aggiungere** elementi solo a un estremo, chiamato **"fondo"** (o retro).
- È possibile **togliere** elementi solo dall'altro estremo, chiamato **"testa"**.
Questa strategia è nota come **FIFO (First In First Out)**. Il primo elemento che è entrato sarà il primo ad uscire.
La coda è perfetta per rappresentare situazioni di **attesa** (come una fila alla cassa), dove chi arriva prima viene servito per primo.

Sintassi

- **Tipo**: `coda`, `boolean`, `tipoelem`
- **Operatori**:

Operatore	Input (Dominio)	Output (Codominio)	Descrizione
`creacoda`	`()`	`coda`	Crea una coda nuova.
`codavuota`	`(coda)`	`boolean`	Controlla se la coda è vuota.
`leggicoda`	`(coda)`	`tipoelem`	Legge l'elemento in testa.
`fuoricoda`	`(coda)`	`coda`	Rimuove l'elemento in testa.

Operatore	Input (Dominio)	Output (Codominio)	Descrizione
`incoda`	`(tipoelem, coda)`	`coda`	Aggiunge un elemento in fondo.

Specifica Semantica

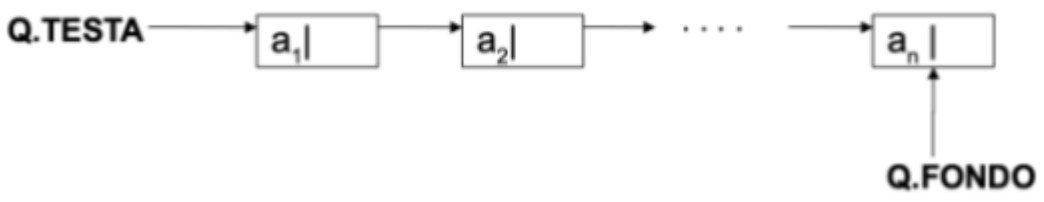
Una coda q è vista come una sequenza $q =< a_1, a_2, \ldots, a_n >$, dove a_1 è la **testa** (il "First In") e a_n è il **fondo** .

- **`creacoda = q'`** : Crea una coda vuota, `q'=<>` .
- **`codavuota(q) = b`** : Restituisce `vero` se q è vuota, `falso` altrimenti.
- **`leggicoda(q) = a` (Leggere dalla Testa)**: La coda non deve essere vuota (n≥1) e se non è vuota, restituisce l'elemento in testa, $a = a_1$.
- **`fuoricoda(q) = q'` (Rimuovere dalla Testa)**: Prima di essere eseguito bisogna controllare che la coda non sia vuota (n≥1) . Dopo di che restituisce una nuova coda `q'` che contiene tutti gli elementi, *cancellando* il primo: $q\prime =< a_2, a_3, \ldots, a_n >$.
- **`incoda(a, q) = q'` (Aggiungere in Fondo)**: Premettendo che non ci siano elementi nella coda (n≥0) .Esso restituisce una nuova coda `q'` con il nuovo elemento a aggiunto **in fondo** alla sequenza: $q\prime =< a_1, a_2, \ldots, a_n, a >$.

Rappresentazione

A differenza della Pila (dove si agisce solo su un estremo), la coda richiede accesso a **entrambi gli estremi** poiché eseguo la prima operazione aggiungere in fondo, successivamente deve togliere dalla testa.
La rappresentazione sequenziale (un semplice array) che era accettabile per la pila, qui diventa **inappropriata**.
Questo perché se usassimo un array semplice, l'operazione `fuoricoda` (togliere dalla testa, indice 0) richiederebbe di "**spostare**" tutti gli altri elementi di una posizione a sinistra. Questa è un'operazione molto costosa: $O(n)$, cioè il suo tempo di esecuzione dipende dalla **grandezza** della coda.

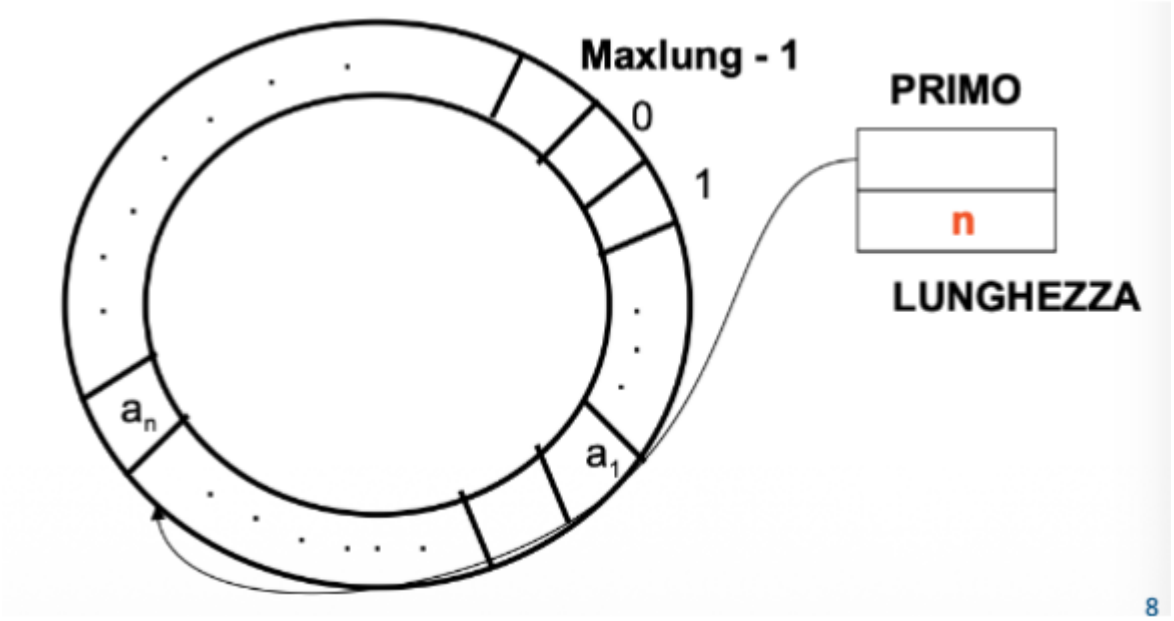
Rappresentazione con Puntatori



Questa implementazione è la più **flessibile**, è basata su una **lista concatenata** ove vengono usati **due puntatori**:

1. `Q.TESTA` : che punta alla prima cella della lista
2. `Q.FONDO` che punta all'ultima cella della lista
   In modo tale che `Q.TESTA` venga usata per le funzione di `leggicoda` e `fuoricoda`, mentre `Q.FONDO` svolge le operazioni di `incoda`.
   In questo modo è facilmente riconoscibile la **coda vuota**, poiché il puntatore alla testa risulterà `NULL`.

Realizzazione con Vettore Circolare



Questa è la variante "intelligente" che risolve il problema dello spostamento verso sinistra nell'array.
Invece di spostare gli elementi, in questa versione si **spostano i puntatori**.
Si usano due indici:

1. `PRIMO` : indica la posizione dell'elemento in testa (a_1).
2. `LUNGHEZZA` : tiene traccia di quanti elementi ci sono o dove si trova l'ultimo.

- **Operazioni (Esempio):**
  - **`incoda(e)` (Aggiungere):** Si inserisce `e` nella posizione `(PRIMO + LUNGHEZZA) % maxlung` e si incrementa `LUNGHEZZA`.
  - **`fuoricoda()` (Togliere):** Non si tocca l'array, si incrementa solo l'indice `PRIMO = (PRIMO + 1) % maxlung` e si decrementa `LUNGHEZZA-1`.
    Anche in questo caso, entrambe le operazioni principali `incoda` e `fuoricoda` diventano a **tempo costante** $O(1)$. Il suo unico limite è la dimensione fissa `maxlung` dell'array ma sicuramente aumenta l'efficienza dei precedenti.

esercizi su code e pile:
Data una coda q di interi, creare una nuova coda q_1 che contenga solo i numeri positivi di q.
Algoritmo (`estrai`):

1. Crea una `q1` vuota.
2. Finché `q` non è vuota:
3. Leggi l'elemento `e` dalla testa di `q`.
4. Se `e > 0`, mettilo in coda su `q1`.
5. Togli l'elemento da `q` (`fuoricoda(q)`).

```
estrai (coda q per riferimento, coda q1 per riferimento)
    creacoda(q1)
    while not codavuota(q)
        e = leggicoda(q)
        if e > 0 then
            incoda(e, q1)
        fuoricoda(q)
```

Attenzione! l'algoritmo **distrugge la coda originale** q. Alla fine del processo, q sarà vuota.

Per risolvere questo problema bisogna utilizzare una **coda ausiliaria** `quaux`:

```
estrai1 (coda q per riferimento, coda q1 per riferimento)
    creacoda(q1)
    creacoda(qaux)
    while not codavuota(q) do
        e = leggicoda(q)
        if e > 0 then
            incoda (e,q1)
        fuoricoda(q)
        incoda(e, qaux)
    creacoda(q)

// ripristino della coda originaria

while not codavuota(qaux) do
    e = leggicoda(qaux)
    incoda (e,q)
    fuoricoda (qaux)
```

Algoritmo (`estrai1`):

1. Crea `q1` e `qaux` vuote.
2. **Primo ciclo (Svuotamento di `q`):**
   - Finché `q` non è vuota:

- Leggi `e` da `q`.
- Se `e > 0`, metti `e` in `q1`.
- Togli `e` da `q`.
- **Metti `e` in `qaux`** (questo salva ogni elemento, positivi o no, nell'ordine originale).

3. **Secondo ciclo (Ripristino di `q`):**
   - Ora `q` è vuota e `qaux` contiene tutti gli elementi originali.
   - Finché `qaux` non è vuota:
   - Leggi `e` da `qaux`, toglilo da `qaux` e rimettilo in `q`.