Álgebra Lineal 2020 (LCC- LM- PM)

Graciela Nasini - Yanina Lucarini - Eduardo Martinez

nasini,lucarini, eduardom@fceia.unr.edu.ar

Introducción

$$\text{Álgebra Lineal} \longleftrightarrow \text{Espacios vectoriales}$$

Diferentes enfoques:

- más teórico/abstracto, más *bonito*, más matemático
- más práctico. aplicaciones y computabilidad, más ciencias de la computación

$$\text{Aplicaciones y computabilidad} \longleftrightarrow \text{sistemas de ecuaciones}$$

Espacios vectoriales, sistemas de ecuaciones...qué tienen que ver?

En Álgebra II vieron sistemas de ecuaciones y espacios vectoriales......qué se acuerdan? palabras, ejemplos...

- Espacios vectoriales: $\mathbb{R}^n$, otro? palabras? combinación lineal, bases, dimensión, independencia lineal?
- Sistemas de ecuaciones: matrices, determinantes, Cramer, Gauss?, inversa, matriz singular, sistema singular

Todo esto es Álgebra Lineal, todo forma parte de lo mismo.

Multiplicación de Matrices

A matriz $m \times n$, B matriz $n \times p$, entonces AB es matriz $m \times p$

Caso $p = 1$**:**
B es un vector
AB es $m \times 1$: AB es un vector. *¿Qué tipo de vector es?*
$A = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \end{bmatrix}$, A^j: vector columna j de A , $B = (a, b, c)$
$AB = aA^1 + bA^2 + cA^3$: AB es una combinación lineal de los vectores columna de A

El producto de una matriz por un vector es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz

Multiplicación de Matrices

Caso $m = 1$: A es un vector.
AB es $1 \times p$: AB es un vector. *¿Qué tipo de vector es?*

$$A = (a, b, c) \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$$, B_j: vector fila j de B

$AB = aB_1 + bB_2 + cB_3$: AB es una combinación lineal de los vectores fila de B

El producto de un vector por una matriz es una combinación lineal de las filas de la matriz

Multiplicación de Matrices

Caso general:

- Cada entrada de AB es el producto de un vector fila de A y un vector columna de B

$$(AB)_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \times (\text{columna } j \text{ de } B) = A_i B^j$$

- Cada columna de AB es el producto de A por cada columna de B:

$$\text{columna } j \text{ de } AB = A \times \text{ columna } j \text{ de } B$$

Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de A

- Cada fila de AB es el producto cada fila de A por B:

$$\text{fila } i \text{ de } AB = (\text{fila } i \text{ de } A) \times B.$$

Cada fila de AB es una combinación lineal de las filas de B

Multiplicación de Matrices

RECORDAR:

1. **El producto de una matriz por un vector es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz**
2. **El producto de un vector por una matriz es una combinación lineal de las filas de la matriz**
3. **Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de A**
4. **Cada fila de AB es una combinación lineal de las filas de B**

Sistemas de ecuaciones lineales

$(n = 2)$

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & = & 3 & (1) \\ 4x & + & 5y & = & 6 & (2) \end{array}$$

¿Métodos de resolución? ¿Interpretación geométrica?

Método 1: Eliminación de Gauss:

- Paso 1:
  $ec(2) - 4 \times ec(1) \longmapsto -3y = -6 \longrightarrow y = 2$
- Paso 2:
  Sustitución en (1) o en (2): $x = -1$

Sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & = & 3 & (1) \\ 4x & + & 5y & = & 6 & (2) \end{array}$$

Método 2: Cramer (*toda la información necesaria está en los coeficientes de las ecuaciones: tiene que haber una fórmula que la solución en función de esa información!*)

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1 \times 6 - 3 \times 4}{1 \times 5 - 2 \times 4} = 2 \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times 5 - 2 \times 6}{1 \times 5 - 2 \times 4} = -1$$

¿cuál es más sencillo?

Para $n = 2$ el esfuerzo es más o menos similar

¿cuándo n es muy grande?

Obs: $n = 1000$ es un tamaño *moderado* en las aplicaciones.

- Cramer: 1000 determinantes que involucran 1000000 de números cada uno.
- Gauss: después haremos los cálculos, pero es muy bueno, es el que se usa.

Un primer indicio: aún en el ejemplo de $n = 2$, una vez obtenido y por Cramer, claramente hubiera sido más sencillo obtener x por sustitución que calculando los determinantes.

Método de Eliminación de Gauss

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
2u & + & v & + & w & = & 5 & (1) \\
4u & - & 6v & & & = & -2 & (2) \\
-2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 & (3)
\end{array}
$$

$$Ax = b$$

Paso 1: Eliminar u de las ecuaciones (2) y (3).
Restar a las ecuaciones (2) y (3), múltiplos de la ecuación (1)

- $ec(2) - 2 \times ec(1) \longrightarrow -8v - 2w = -12$
- $ec(3) - (-1) \times ec(1) \longrightarrow 8v + 3w = 14$

Para obtener el múltiplicador ℓ de la ecuación (1) a restar en cada caso, dividimos el coeficiente de u en la ecuacion a modificar por el coeficiente de u en $ec(1)$

$$\text{coeficiente de } u \text{ en } ec(1) = 2 \longmapsto \textit{primer pivot}.$$

Método de Eliminación de Gauss

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2u & + & v & + & w & = & 5 & (1) \\ & - & 8v & - & 2w & = & -12 & (2) \\ & & 8v & + & 3w & = & 14 & (3) \end{array}$$

Paso 2: Eliminar v de la ecuación (3).
Restar a la ecuación (3) un múltiplo de la ecuación (2)

- $ec(3) - (-1) \times ec(2) \longrightarrow w = 2$

Para obtener el multiplicador ℓ de la ecuación (2) a restar, dividimos el coeficiente de v en la ecuacion (3) por el coeficiente de v en $ec(2)$

$$\text{coeficiente de } v \text{ en } ec(2) = -1 \longmapsto \textit{segundo pivot}.$$

Método de Eliminación de Gauss

Obtenemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & - & 8v & - & 2w & = & -12 \\ & & & & 1w & = & 2 \end{array}$$

$$Ux = b' \text{ donde } U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad U \text{ es matriz triangular superior}$$

$Ux = b''$ sistema triangular; fácil de resolver via *sustitución para atrás*:

$$(ec3)\ w = 2 \longmapsto (ec2)\ v = 1(ec1)\ \longmapsto u = 1.$$

Método de Eliminación de Gauss

eliminación para adelante + sustitución para atrás

Siempre funciona? Siempre que los pivots no sean nulos! Y si aparece un pivot nulo?

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = \\ 4u & + & 6v & + & 8w & = \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & & + & 3w & = \\ & & 2v & + & 4w & = \end{array} \quad \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & 2v & + & 4w & = \\ & & & & 3w & = \end{array}$$

Permutando las filas dos y tres llegamos al sistema triangular.
Observar que, independientemente del lado derecho, el sistema tendrá solución única.

$$Ax = b \text{ sistema no singular} \leftrightarrow A \text{ no singular}$$

Método de Eliminación de Gauss

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & \\ 4u & + & 4v & + & 8w & = & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & \\ & & & & 3w & = & \\ & & & & 4w & = & \end{array}$$

Ejemplo 2.1:

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & \\ & & & & 3w & = & 6 \\ & & & & 4w & = & 7 \end{array}$$

No hay solución factible

Ejemplo 2.2:

$$\begin{array}{rcrcrcl} u & + & v & + & w & = & \\ & & & & 3w & = & 6 \\ & & & & 4w & = & 8 \end{array}$$

hay infinitas soluciones factibles

Independientemente del lado derecho, el sistema NO tendrá solución única: sistema singular$\longleftrightarrow$ matriz de coeficientes singular

Costo computacional

¿Cuál es el *costo computacional* del método de eliminación de Gauss?
¿Cuántas operaciones aritméticas realizamos en un sistema de n ecuaciones y n incógnitas?
(Caso no singular e ignoramos las operaciones en el lado derecho)

Operaciones involucradas:
dividir por el pivot para obtener el multiplicador ℓ, multiplicar cada coeficiente de la ecuación por ℓ, restar los coeficientes.
Convenimos: multiplicar y restar $=$ 1 operación

En el primer paso, por cada una de las $n-1$ ecuaciones a modificar, tenemos:

1. n coeficientes que se multiplicar y restan$\longmapsto$ n operaciones
2. un cálculo de pivot

Costo computacional

Primer paso: $(n-1)n = n^2 - n$ operaciones
Cuando nos quedan k ecuaciones, $k^2 - k$ operaciones
En total $\sum_{k=1}^{n} k^2 - k = \frac{n^3-n}{3}$

- $n = 1 \longrightarrow 0$ operaciones
- $n = 2 \longrightarrow 2$ operaciones
- $n = 100 \longrightarrow \approx 10^6$ operaciones

Costo eliminación: $O(n^3)$

¿qué pasa con la sustitución?
Es más rápida: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

Costo total: $O(n^3) + O(n^2) = O(n^3)$

¿Se puede resolver un sistema de orden $n \times n$ más rápido?

Costo computacional

Hace 30 años se suponía que no. Sin embargo, existe hoy un método que lo resuelve en $Cn^{log_2 7} \approx Cn^{2,8}$.
Más rápido? $Cn^{2,376}$

No interés práctico, C es muuuuy grande y el código es tan horrible que sólo tiene un interés teórico. Seguimos con Gauss!

Obs: El nuevo problema es el costo de resolver un sistema de orden $n \times n$ con varios procesadores en paralelo.

Método de eliminación y multiplicación de matrices

$$
(S) \quad \begin{array}{rcrcrcrl} 2u & + & v & + & w & = & 5 & (1) \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 & (2) \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 & (3) \end{array}
$$

$$(S)\ Ax = b$$

- **Paso 1**: eliminar u de las ecuaciones (2) y (3)
  $ec(2) - 2 \times ec(1) \longrightarrow -8v - 2w = -12$
  $ec(3) - (-1) \times ec(1) \longrightarrow 8v + 3w = 14$
- **Paso 2**:eliminar v a la ecuación (3)
  $ec(3) - (-1) \times ec(2) \longrightarrow w = 2$

Método de eliminación y multiplicación de matrices

Obtenemos:

$$(S) \quad \begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & - & 8v & - & 2w & = & -12 \\ & & & & 1w & = & 2 \end{array}$$

$$(S)\ Ux = b''$$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ ; \ b'' = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} \quad U \text{ es triangular superior.}$$

¿Cómo podemos obtener U y b'' a partir de A y b?

Método de eliminación y multiplicación de matrices

- **Paso 1**:
  $ec(2) - 2 \times ec(1) \longrightarrow -8v - 2w = -12$

  (nueva fila 2) $=$ (fila 2 de A) $- 2\times$ (fila 1 de A) $\longmapsto$ es el trabajo de las matrices elementales!

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$ec(3) - (-1) \times ec(1) \longrightarrow 8v + 3w = 14$

$$FA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$FEA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

(recordemos, las matrices elementales conmutan)

Método de eliminación y multiplicación de matrices

$$FEA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Paso 2**: (en FEA)
  $ec(3) - (-1) \times ec(2) \longrightarrow w = 2$

$$G(FEA) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (FEA) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$(GFE)A = U$, donde

$$GFE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo reconstruyo A a partir de U? *desarmar cada paso...*
$A = (E^{-1}F^{-1}G^{-1})U$

Método de eliminación en términos de multiplicación de matrices

$A = (E^{-1}F^{-1}G^{-1})U$

Recordemos:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}F^{-1}G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$A = LU$

Método de eliminación y multiplicación de matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

Observación:

- L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación
- U es una matriz triangular superior con los pivotes en la diagonal.

Siempre que no aparezcan pivots nulos, podremos reconstruir A de esta manera.........

Factorización LU

Propiedad: Dada una matriz cuadradra A, si en el método de eliminación de Gauss no aparece ningún pivot nulo, A admite una *factorización LU*. Esto es, $A = LU$ donde:

- L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación
- U es una matriz triangular superior con los pivotes en la diagonal.

Teorema: La descomposición LU esúnica.
Sea $A = L_1U_1$ y $A = L_2U_2$ donde, para $i = 1, 2$, L_i es triangular inferior con 1's en la diagonal, U_i es triangular superior sin ceros en la diagonal. Entonces $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$.
Prueba: Ejercicio más adelante.

Factorización LU

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ? & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ No tiene factorización LU

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $L = I$; $U = A$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Factorización LU

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$; $L = A$; $U = I$

Factorización LU y resolución de sistemas

$$Ax = b \leftrightarrow L(Ux) = b$$

¿Cómo resuelven los códigos?

1. $Lc = b$ sistema triangular $\longrightarrow \frac{n^2}{2}$ operaciones
2. $Ux = c$ sistema triangular $\longrightarrow \frac{n^2}{2}$ operaciones

Costo de la resolución:

1. Factorizar $A \longrightarrow O(n^3)$ operaciones
2. Resolver los sistemas triangulares $\longrightarrow n^2$ operaciones

Obs: Si tengo la factorizacion LU puedo resolver varios sistemas, con diferentes RHS, muy fácilmente.

Factorización LDV

Propiedad: Dada una matriz cuadradra A, si en el método de eliminación de Gauss no aparece ningún pivot nulo, A admite una *factorización LDV*. Esto es, $A = LDV$ donde:

- L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación
- D es una matriz diagonal con los pivotes en la diagonal.
- U es una matriz triangular superior con 1's en la diagonal.

Teorema: La descomposición LDV esúnica.
Sea $A = L_1 D_1 V_1$ y $A = L_2 D_2 V_2$ donde, para $i = 1, 2$, L_i es triangular inferior con 1's en la diagonal, U_i es triangular superior con 1's en la diagonal y D_i es matriz diagonal sin ceros en la diagonal. Entonces $L_1 = L_2$, $U_1 = U_2$ y $D_1 = D_2$.
Prueba. Ejercicio.

Cambio de filas y matrices de permutación

Ejemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$PAx = Pb$$

Cambio de filas y matrices de permutación

Ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- Si $d = 0$, A es singular.
- Si $d \neq 0$:

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad P_{13}A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$$

- Si $a \neq 0$,

$$P_{23}P_{13}A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad ; \quad P_{23}P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cambio de filas y matrices de permutación

Propiedad: Sea A una matriz cuadrada. Si la elimación de Gauss puede ser completada (caso no singular) existe una matriz de permutación P tal que PA tiene factorización LU.

Ejemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times P_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = LU = L \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} U$$

Matrices inversibles

Hasta ahora...

A es no singular si existe una permutación de sus filas que evita los ceros en las posiciones de pivot.

Equivalentemente...

A es no singular si existe matriz de permutación P tal que PA admite descomposición LU (y LDV).

Equivalentemente...

A es no singular si $Ax = b$ tienen solución única para todo b.

Qué otras formas de identificar "A no singular" recuerdan?

$detA \neq 0$, A tiene inversa, otras...

Vamos a concentrarnos en "A tiene inversa", o sea, A *inversible*.

Matrices inversibles

Definición: B es la inversa de A si $BA = AB = I$.

Observación: No toda matriz tiene inversa.
Ejemplos:

1. Matriz nula ($A = 0$ o $A = \mathbf{0}$)
2. A no cuadrada. Por qué?
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Por qué?

Lema: Toda matriz tiene a lo sumo una matriz inversa.

Prueba: Sean B yC matrices inversas de A. Entonces, $BA = I$ y $AC = I$.
Tenemos:
$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$.

Notamos la inversa de A con A^{-1}.

Matrices inversibles

Lema: Si A y B son matrices inversibles entonces A^{-1} y AB son inversibles con $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Prueba: Ejercicio.

Pregunta: Si A es inversible y B no es inversible, puede ser AB inversible? Ejercicio.

Observaciones:

- Si A es inversible, $Ax = b$ tiene una única solución para todo b, $x = A^{-1}b$.
- Si existe $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$, A no es inversible. Por qué?

$$x = A^{-1}b$$

Esto hace más fácil la resolución de sistemas de ecuaciones cuadrados?

Cómo encontramos A^{-1}?

Gauss-Jordan

Recordemos el método de Gauss:

$$Ax = b \longleftrightarrow L^{-1}A = L^{-1}b \longleftrightarrow Ux = \tilde{b}$$

Podemos pensar que L^-1 actua sobre la Matriz extendida: $[A, b]$

$$[A, b] \overset{L^{-1}}{\rightarrow} [L^{-1}A, L^{-1}b] = [U, \tilde{b}]$$

Para calcular A^{-1} debemos resolver $AX = I$. Podemos encontrar a X encontrando cada una se sus vectores columnas.

- Gauss: n sistemas $Ax^i = e_i, i = 1, \ldots, n$.

$$[A, e_1, \ldots, e_n] \overset{L^{-1}}{\rightarrow} [U, L^{-1}e_1, \ldots, L^{-1}e_1] = [U, I]$$

A partir de acá,

- Gauss: Hace n procesos de sustitución para atrás.
- Gauss-Jordan lo mejora:

$$[A, e_1, \ldots, e_n] = [A, I] \overset{L^{-1}}{\rightarrow} [U, L^{-1}] \overset{U^{-1}}{\rightarrow} [I, U^{-1}L^{-1}] = [I, A^{-1}]$$

Ejemplo: Ver Strang Sección 1.6

Gauss-Jordan

Gauss-Jordan es muy eficiente, pero sólo si nos piden A^{-1}!
Para resolver sistemas, NO calculamos A^{-1}

Observación: Gauss-Jordan en realidad encuentra B tal que $AB = I$.
Cómo sabemos que $BA = I$?

Cómo encuentra Gauss- Jordan a B?

$$(D.E \dots E \dots E \dots P \dots E)[A, I] = [I, B]$$

$$(D.E \dots E \dots L^{-1})[A, I] = [I, B]$$

Entonces,
$(D.E \dots E \dots L^{-1})A = I$ y $(D.E \dots E \dots L^{-1}) = B$

Recordar: A invertible $\iff$ A no singular $\iff$ Gauss encuentra n pivots no nulos (tal vez permutando)$\iff$....

veremos varias otras caracterizaciones....

Matrices simétricas

Definición: Dada una matriz A $m \times n$, A^T es la matriz $n \times m$ tal que $A^T_{ij} = A_{ji}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y todo $j = 1, \ldots, m$., Equivalentemente, si $(A^T)_i = A^i$ para todo $i = 1, \ldots, n$, o si $(A^T)^i = A_i$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

Propiedades: $(A^T)^T = A$ y $(AB)^T = B^T A^T$

Lema: Si A es inversible, A^T también lo es y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
Prueba:
$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$ y $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I$.

Definición: A es simétrica si $A = A^T$.

Observación: A simétrica $\Longrightarrow$ A cuadrada.

Lema: A simétrica e inversible, entonces A^{-1} es simétrica.
Prueba: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$.

Matrices simétricas

Propiedad: Para toda matriz R $m \times n$, RR^T y $R^T R$ son simétricas.
Prueba: ejercicio.

Propiedad: Si A es simétrica y no singular admite una descomposición LDL^T, donde L es triangular inferior con 1's en la diagonal y D matriz diagonal sin ceros en la diagonal.
Prueba: $A = LDV \Longrightarrow A^T = V^T D^T L^T = A$ Por unicidad de la descomposición $V = L^T$.

Comentario: Si A es simétrica, el proceso de Eliminación de Gauss se puede hacer en $\frac{n^3}{6}$ (en vez de $\frac{n^3}{3}$).