Examen Final - 07/09/2020

Apellido y Nombre: Legajo: Carrera:

Condición (Regular-Año / Libre):

******* ******** ******** *******

1. Sea $\mathbb{R}_1[x]$ el espacio vectorial de polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 1 (incluyendo el polinomio nulo), con las operaciones habituales.

   Para $p,q \in \mathbb{R}_1[x]$ tales que $p(x) = a_0 + a_1 x$ y $q(x) = b_0 + b_1 x$ se define el producto $\langle .\,,.\rangle$ de la siguiente manera:
   $$\langle p,q\rangle = a_0 b_0 + 2a_1 b_1.$$

   a) Probar que $\langle .\,,.\rangle$ es un producto interno.

   b) Calcular $dist(p_1, p_2)$ siendo $p_1(x) = 1$ y $p_2(x) = 1+2x$ con el producto interno $\langle .\,,.\rangle$.

   c) Dado $S = \langle\{x\}\rangle$, obtener $S^{\perp}$, respecto a $\langle .\,,.\rangle$.

2. Sea $v \in \mathbb{R}^3$ un vector de norma 1 y $H = I - 2vv^T$.

   a) Probar que $H^2 = I$.

   b) Demostrar que H es simétrica y ortogonal.

   c) Listar todos los autovalores de H con sus respectivas multiplicidades algebraica y geométrica.
   Sugerencia: Considerar $W = \langle\{v\}\rangle$ y analizar Hv y Hu con $u \in W^{\perp}$.

3. El algoritmo RankPage de Google calcula un vector estocástico (entradas positivas que suman 1) v^* cuyas componentes que se usan para asignar un ranking de importancia entre las páginas de la red asociadas a una búsqueda. Dicho v^* es un autovector particular asociado a una matriz M definida por Page & Brin a partir de la matriz de transición asociada a las relaciones entre las páginas de la red.

   Suponga que la red se conforma de las siguiente páginas con los respectivos links:

   - Página 1: sin links
   - Página 2: links a páginas 3 y 5
   - Página 3: link a página 1
   - Página 4: links a páginas 2 y 5
   - Página 5: link a páginas 2 y 4
   - Página 6: link a página 3

   a) Determine la matriz de transición A asociada a la red y determine la matriz M asociada a esta red con *dumping factor* $p = 0{,}15$. ¿Cómo se interpreta el parámetro p?

   b) ¿Qué sistema de ecuaciones resolvería para calcular v^*? ¿Qué resultado nos garantiza la existencia de solución de este sistema?

   c) ¿Qué método emplearía para calcular a v^* en este ejemplo? ¿Qué método se emplea sobre redes de millones de páginas y por qué?

(continua en la página siguiente)

4. Sea A una matriz $n \times n$ y Λ la matriz diagonal con los n autovalores de A en la entradas de su diagonal. Pruebe las siguientes afirmaciones:

   a) A es diagonalizable si y solo si A tiene n autovectores l.i..

   b) Si A es semejante a una matriz diagonal D entonces $D = \Lambda$ (igualdad salvo permitaciones de filas).

   c) Si la dimensión del autoespacio de cada uno de sus autovalores coincide con su multiplicidad algebraica entonces A es semejante a una matriz diagonal.

5. Sean V y W espacios vectoriales tales que $dim\, V = dim\, W = n$ y T una transformación lineal de V a W. Probar:

   a) Si T es un monomorfismo entonces T es un isomorfismo.

   b) Si T es un epimorfismo entonces T es un isomorfismo.