Capítulo 2: Espacios Vectoriales (primera parte)

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Outline

Outline

1. Analizar si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas son espacios vectoriales reales. (obs: cuando no se explicitan las operaciones suma y producto por escalares es porque se consideran las habituales).
   a) El conjunto de los números reales no negativos $\mathbb{R}_+$.
   b) El conjunto de los números reales positivos, con la suma de dos vectores x, y definida como $x.y$ y el producto por un real c como x^c.
   c) El conjunto de las funciones pares.
   d) El conjunto de las funciones continuas con el producto de una función por un escalar c definido como $(cf)(x) = f(cx)$.
   e) El conjunto de las funciones reales biyectivas con la suma de dos funciones definida como $(f+g)(x) = f(g(x))$.
   f) El conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 3, incluído el polinomio nulo.
   g) $\mathbb{R}^2$ con la suma de $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ definida como $x + y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$.

b) $(V,\oplus,\odot)$ con $x\oplus y = x\cdot y$ y $c\odot x = x^c$ ES un espacio vectorial:

b) $(V, \oplus, \odot)$ con $x \oplus y = x \cdot y$ y $c \odot x = x^c$ ES un espacio vectorial:

- Sean $x > 0, y > 0$. Tenemos que $x \oplus y = xy > 0$, por lo cual la **suma** $\oplus$ **es cerrada**.

b) $(V,\oplus,\odot)$ con $x\oplus y = x\cdot y$ y $c\odot x = x^c$ ES un espacio vectorial:

- Sean $x>0, y>0$. Tenemos que $x\oplus y = xy > 0$, por lo cual la **suma** $\oplus$ **es cerrada**.
- Sean $x>0, y>0, z>0$. Dado que son número reales,

$$x\oplus(y\oplus z) = x(yz) = (xy)z = (x\oplus y)\oplus z$$

y por lo tanto la **suma** $\oplus$ **es asociativa**.

$b)$ $(V,\oplus,\odot)$ con $x\oplus y = x\cdot y$ y $c\odot x = x^c$ ES un espacio vectorial:

- Sean $x>0, y>0$. Tenemos que $x\oplus y = xy > 0$, por lo cual la **suma** $\oplus$ **es cerrada**.
- Sean $x>0, y>0, z>0$. Dado que son número reales,

$$x\oplus(y\oplus z) = x(yz) = (xy)z = (x\oplus y)\oplus z$$

  y por lo tanto la **suma** $\oplus$ **es asociativa.**
- Sean $x>0, y>0$. Dado que son número reales,

$$x\oplus y = xy = yx = y\oplus x,$$

  y por lo tanto la **suma** $\oplus$ **es conmutativa**.

- Observemos que $1 \in \mathbb{R}$ es tal que $1 \oplus x = 1x = x$ para todo $x > 0$. Luego, como $1 > 0$ (visto en $AM\ I$) 1 **es el elemento neutro de la suma** $\oplus$.

- Observemos que $1 \in \mathbb{R}$ es tal que $1 \oplus x = 1x = x$ para todo $x > 0$. Luego, como $1 > 0$ (visto en $AM\ I$) 1 **es el elemento neutro de la suma** $\oplus$.
- Sea $x > 0$. Observemos que como x es un número real distinto de 0, existe el número x^{-1} real positivo tal que $x \oplus x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$. Luego, **todo elemento tiene su opuesto respecto de la suma** $\oplus$.

- Observemos que $1 \in \mathbb{R}$ es tal que $1 \oplus x = 1x = x$ para todo $x > 0$. Luego, como $1 > 0$ (visto en $AM\ I$) 1 **es el elemento neutro de la suma** $\oplus$.
- Sea $x > 0$. Observemos que como x es un número real distinto de 0, existe el número x^{-1} real positivo tal que $x \oplus x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$. Luego, **todo elemento tiene su opuesto respecto de la suma** $\oplus$.
- Sea $x > 0$ y $c \in \mathbb{R}$. Es claro que $c \odot x = x^c$ es un número real positivos. Luego, el **producto** $\odot$ **es cerrado**.

- Observemos que $1 \in \mathbb{R}$ es tal que $1 \oplus x = 1x = x$ para todo $x > 0$. Luego, como $1 > 0$ (visto en $AM\ I$) 1 **es el elemento neutro de la suma** $\oplus$.
- Sea $x > 0$. Observemos que como x es un número real distinto de 0, existe el número x^{-1} real positivo tal que $x \oplus x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1$. Luego, **todo elemento tiene su opuesto respecto de la suma** $\oplus$.
- Sea $x > 0$ y $c \in \mathbb{R}$. Es claro que $c \odot x = x^c$ es un número real positivos. Luego, el **producto** $\odot$ **es cerrado**.
- Sea $x > 0$ y $1 \in \mathbb{R}$. Observamos que

$$1 \odot x = x^1 = x,$$

y por lo tanto 1 **es el elemento neutro del producto** $\odot$.

- Sea $x > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$(a \cdot b) \odot x = x^{a \cdot b} = x^{b \cdot a} = (x^b)^a = (b \odot x)^a = a \odot (b \odot x).$$

- Sea $x > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$(a \cdot b) \odot x = x^{a \cdot b} = x^{b \cdot a} = (x^b)^a = (b \odot x)^a = a \odot (b \odot x).$$

- Sea $x, y > 0$ y $a \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$c \odot (x \oplus y) = c \odot (x \cdot y) = (x \cdot y)^c = x^c \cdot y^c = x^c \oplus y^c = (c \odot x) \oplus (c \odot y),$$

y por lo tanto el **producto $\odot$ es distributivo con respecto a la suma $\oplus$**.

- Sea $x > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$(a \cdot b) \odot x = x^{a \cdot b} = x^{b \cdot a} = (x^b)^a = (b \odot x)^a = a \odot (b \odot x).$$

- Sea $x, y > 0$ y $a \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$c \odot (x \oplus y) = c \odot (x \cdot y) = (x \cdot y)^c = x^c \cdot y^c = x^c \oplus y^c = (c \odot x) \oplus (c \odot y),$$

  y por lo tanto el **producto $\odot$ es distributivo con respecto a la suma $\oplus$**.
- Sea $x > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Observemos que

$$(a + b) \odot x = x^{a+b} = x^a \cdot x^b = x^a \oplus x^b = (a \odot x) \oplus (b \odot x),$$

  y por lo tanto el **producto $\odot$ es distributivo con respecto a la suma $+$**.

$e)$ El conjunto de las funciones reales biyectivas con las operación de suma ($\oplus$) definida como la composición de funciones y el producto por un escalar usual NO ES un espacio vectorial:

$e)$ El conjunto de las funciones reales biyectivas con las operación de suma ($\oplus$) definida como la composición de funciones y el producto por un escalar usual NO ES un espacio vectorial:

- Por ejemplo falla la **conmutatividad**:

e) El conjunto de las funciones reales biyectivas con las operación de suma ($\oplus$) definida como la composición de funciones y el producto por un escalar usual NO ES un espacio vectorial:

- Por ejemplo falla la **conmutatividad**:

  Sean $f(x) = 2x$ y $g(x) = x + 1$ dos funciones reales biyectivas tenemos:

e) El conjunto de las funciones reales biyectivas con las operación de suma ($\oplus$) definida como la composición de funciones y el producto por un escalar usual NO ES un espacio vectorial:

- Por ejemplo falla la **conmutatividad**:

  Sean $f(x) = 2x$ y $g(x) = x + 1$ dos funciones reales biyectivas tenemos:

$$(f \oplus g)(x) = f(g(x)) = 2(x+1) = 2x+2 \neq 2x+1 = g(f(x)) = (g \oplus f)(x).$$

Outline

9. Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $C(\mathbb{R})$, donde $C(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, o explicar por qué no lo es.

   a) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.
   b) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$.
   c) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$.
   d) El conjunto de funciones constantes.
   e) $\{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

9. Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $C(\mathbb{R})$, donde $C(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, o explicar por qué no lo es.
   a) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.
   b) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$.
   c) $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$.
   d) El conjunto de funciones constantes.
   e) $\{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Recordemos que si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ define un subespacio de V si, para todo $u_1, u_2 \in U$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, resulta $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$.

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

$c)$ ¿$U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$ es subespacio de V?

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

$c)$ ¿$U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$.

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

$c)$ ¿$U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U.

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

$c)$ ¿$U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U.

Sean $f_1, f_2 \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

$c)$ ¿$U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U.

Sean $f_1, f_2 \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

¿Podemos asegurar que $\alpha f_1 + \beta f_2 \in U$?.

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

$c)$ ¿$U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U.

Sean $f_1, f_2 \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

¿Podemos asegurar que $\alpha f_1 + \beta f_2 \in U$?.

Sabemos que que $\alpha f_1 + \beta f_2$ es una función continua en $\mathbb{R}$ (por propiedades de las funciones continuas o porque ya sabemos que $C(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares de funciones habituales).

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

$c)$ ¿$U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U.

Sean $f_1, f_2 \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

¿Podemos asegurar que $\alpha f_1 + \beta f_2 \in U$?.

Sabemos que que $\alpha f_1 + \beta f_2$ es una función continua en $\mathbb{R}$ (por propiedades de las funciones continuas o porque ya sabemos que $C(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares de funciones habituales).

Entonces, sólo debemos ver si $(\alpha f_1 + \beta f_2)(2) = 0$.

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

$c)$ ¿$U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U.

Sean $f_1, f_2 \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

¿Podemos asegurar que $\alpha f_1 + \beta f_2 \in U$?.

Sabemos que que $\alpha f_1 + \beta f_2$ es una función continua en $\mathbb{R}$ (por propiedades de las funciones continuas o porque ya sabemos que $C(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares de funciones habituales).

Entonces, sólo debemos ver si $(\alpha f_1 + \beta f_2)(2) = 0$.

Tenemos entonces

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(2) = \alpha f_1(2) + \beta f_2(2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 + 0 = 0$$

Vamos a resolver los apartados $c)$ y $e)$.

$c)$ ¿$U = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U.

Sean $f_1, f_2 \in U$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

¿Podemos asegurar que $\alpha f_1 + \beta f_2 \in U$?.

Sabemos que que $\alpha f_1 + \beta f_2$ es una función continua en $\mathbb{R}$ (por propiedades de las funciones continuas o porque ya sabemos que $C(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalares de funciones habituales).

Entonces, sólo debemos ver si $(\alpha f_1 + \beta f_2)(2) = 0$.

Tenemos entonces

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)(2) = \alpha f_1(2) + \beta f_2(2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0 + 0 = 0$$

Por lo tanto U define un subespacio vectorial de las funciones continuas en $\mathbb{R}$.

e) ¿$U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de V?

e) ¿$U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$.

e) ¿$U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U (basta considerar $\alpha = \beta = 0$).

e) ¿$U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U (basta considerar $\alpha = \beta = 0$).

Como hemos visto, debemos probar que $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$ para todo $f_1, f_2 \in U$ y todo $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$.

e) ¿$U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U (basta considerar $\alpha = \beta = 0$).

Como hemos visto, debemos probar que $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$ para todo $f_1, f_2 \in U$ y todo $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$.

Sean $f_1, f_2 \in U$. Entonces, $f_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

e) ¿$U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U (basta considerar $\alpha = \beta = 0$).

Como hemos visto, debemos probar que $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$ para todo $f_1, f_2 \in U$ y todo $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$.

Sean $f_1, f_2 \in U$. Entonces, $f_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Sean $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$. Veamos si $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$. Tenemos:

e) ¿$U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U (basta considerar $\alpha = \beta = 0$).

Como hemos visto, debemos probar que $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$ para todo $f_1, f_2 \in U$ y todo $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$.

Sean $f_1, f_2 \in U$. Entonces, $f_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Sean $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$. Veamos si $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$. Tenemos:

$$(\gamma f_1 + \nu f_2)(x) = \gamma f_1(x) + \nu f_2(x) = \gamma(\alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x) + \nu(\alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x) =$$

$$(\gamma\alpha_1 + \gamma\beta_1 \operatorname{sen} x) + (\nu\alpha_2 + \nu\beta_2 \operatorname{sen} x) = (\gamma\alpha_1 + \nu\alpha_2) + (\gamma\beta_1 + \nu\beta_2) \operatorname{sen} x.$$

e) ¿$U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U (basta considerar $\alpha = \beta = 0$).

Como hemos visto, debemos probar que $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$ para todo $f_1, f_2 \in U$ y todo $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$.

Sean $f_1, f_2 \in U$. Entonces, $f_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Sean $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$. Veamos si $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$. Tenemos:

$$(\gamma f_1 + \nu f_2)(x) = \gamma f_1(x) + \nu f_2(x) = \gamma(\alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x) + \nu(\alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x) =$$

$$(\gamma\alpha_1 + \gamma\beta_1 \operatorname{sen} x) + (\nu\alpha_2 + \nu\beta_2 \operatorname{sen} x) = (\gamma\alpha_1 + \nu\alpha_2) + (\gamma\beta_1 + \nu\beta_2) \operatorname{sen} x.$$

Por lo tanto, tomando $\alpha = \gamma\alpha_1 + \nu\alpha_2$ y $\beta = \gamma\beta_1 + \nu\beta_2$ tenemos que $(\gamma f_1 + \nu f_2)(x) = \alpha + \beta \operatorname{sen} x$. Luego, $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$.

e) ¿$U = \{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subespacio de V?

Por definición, $U \subseteq V$. Además $U \neq \emptyset$ ya que la función nula pertenece al conjunto U (basta considerar $\alpha = \beta = 0$).

Como hemos visto, debemos probar que $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$ para todo $f_1, f_2 \in U$ y todo $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$.

Sean $f_1, f_2 \in U$. Entonces, $f_1(x) = \alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x$ y $f_2(x) = \alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x$ para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$.

Sean $\gamma, \nu \in \mathbb{R}$. Veamos si $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$. Tenemos:

$$(\gamma f_1 + \nu f_2)(x) = \gamma f_1(x) + \nu f_2(x) = \gamma(\alpha_1 + \beta_1 \operatorname{sen} x) + \nu(\alpha_2 + \beta_2 \operatorname{sen} x) =$$

$$(\gamma\alpha_1 + \gamma\beta_1 \operatorname{sen} x) + (\nu\alpha_2 + \nu\beta_2 \operatorname{sen} x) = (\gamma\alpha_1 + \nu\alpha_2) + (\gamma\beta_1 + \nu\beta_2) \operatorname{sen} x.$$

Por lo tanto, tomando $\alpha = \gamma\alpha_1 + \nu\alpha_2$ y $\beta = \gamma\beta_1 + \nu\beta_2$ tenemos que $(\gamma f_1 + \nu f_2)(x) = \alpha + \beta \operatorname{sen} x$. Luego, $\gamma f_1 + \nu f_2 \in U$.

Por lo tanto U define un subespacio vectorial de las funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Outline

11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.

b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?

11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.

b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?

a) Un subespacio vectorial que contiene cierto vector, contiene el producto de todo escalar del cuerpo sobre el cuál trabajamos por dicho vector (por definición de subespacio).

11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.
b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?

a) Un subespacio vectorial que contiene cierto vector, contiene el producto de todo escalar del cuerpo sobre el cuál trabajamos por dicho vector (por definición de subespacio).

Teniendo en cuenta lo que acabamos de mencionar y la definición de espacio generado sabemos que, un subespacio U de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contiene a A es $U = \langle A \rangle$,

11. Sean

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\quad \text{y} \quad B=\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.

b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?

a) Un subespacio vectorial que contiene cierto vector, contiene el producto de todo escalar del cuerpo sobre el cuál trabajamos por dicho vector (por definición de subespacio).

Teniendo en cuenta lo que acabamos de mencionar y la definición de espacio generado sabemos que, un subespacio U de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contiene a A es $U=\langle A\rangle$, más aún, en el ejercicio 22. probaremos que $\langle A\rangle$ es el menor suespacio vectorial que contiene a A.

11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.
b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?

a) Un subespacio vectorial que contiene cierto vector, contiene el producto de todo escalar del cuerpo sobre el cuál trabajamos por dicho vector (por definición de subespacio).

Teniendo en cuenta lo que acabamos de mencionar y la definición de espacio generado sabemos que, un subespacio U de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contiene a A es $U = \langle A \rangle$, más aún, en el ejercicio 22. probaremos que $\langle A \rangle$ es el menor suespacio vectorial que contiene a A.

Además, es claro que $B \notin U$ (¿por qué?).

11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$a)$ Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.
$b)$ Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?

$a)$ Un subespacio vectorial que contiene cierto vector, contiene el producto de todo escalar del cuerpo sobre el cuál trabajamos por dicho vector (por definición de subespacio).

Teniendo en cuenta lo que acabamos de mencionar y la definición de espacio generado sabemos que, un subespacio U de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contiene a A es $U = \langle A \rangle$, más aún, en el ejercicio 22. probaremos que $\langle A \rangle$ es el menor suespacio vectorial que contiene a A.

Además, es claro que $B \notin U$ (¿por qué?). Luego U es un subespacio vectorial que verifica as condiciones de $a)$.

$b)$ Llamamos W a cierto subespacio que contiene a A y a B.

b) Llamamos W a cierto subespacio que contiene a A y a B. ¿$I \in W$?

b) Llamamos W a cierto subespacio que contiene a A y a B. ¿$I \in W$?

Por definición de subespacio sabemos que W contiene a todas las combinaciones lineales de los elementos que pertenecen a W,

$b)$ Llamamos W a cierto subespacio que contiene a A y a B. ¿$I \in W$?

Por definición de subespacio sabemos que W contiene a todas las combinaciones lineales de los elementos que pertenecen a W, en particular, todas las combinaciones lineales de A y B.

$b)$ Llamamos W a cierto subespacio que contiene a A y a B. ¿$I \in W$?

Por definición de subespacio sabemos que W contiene a todas las combinaciones lineales de los elementos que pertenecen a W, en particular, todas las combinaciones lineales de A y B.

Es claro que I es combinación lineal de A y B ya que,

$b)$ Llamamos W a cierto subespacio que contiene a A y a B. ¿$I \in W$?

Por definición de subespacio sabemos que W contiene a todas las combinaciones lineales de los elementos que pertenecen a W, en particular, todas las combinaciones lineales de A y B.

Es claro que I es combinación lineal de A y B ya que,

$$I = 1 \cdot A - 1 \cdot B.$$

b) Llamamos W a cierto subespacio que contiene a A y a B. ¿$I \in W$?

Por definición de subespacio sabemos que W contiene a todas las combinaciones lineales de los elementos que pertenecen a W, en particular, todas las combinaciones lineales de A y B.

Es claro que I es combinación lineal de A y B ya que,

$$I = 1 \cdot A - 1 \cdot B.$$

Por lo tanto, si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, debe contener a I.

$b)$ Llamamos W a cierto subespacio que contiene a A y a B. ¿$I \in W$?

Por definición de subespacio sabemos que W contiene a todas las combinaciones lineales de los elementos que pertenecen a W, en particular, todas las combinaciones lineales de A y B.

Es claro que I es combinación lineal de A y B ya que,

$$I = 1 \cdot A - 1 \cdot B.$$

Por lo tanto, si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, debe contener a I.

¿Cómo resolverían el ejercicio si no fuese tan evidente que I es combinación lineal de las matrices dadas?

Outline

12. Sea V un espacio vectorial y W_1 y W_2 dos subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

12. Sea V un espacio vectorial y W_1 y W_2 dos subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Sabemos que, para $i = 1, 2$, W_i es un subespacio vectorial de V y por lo tanto, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $w_i^1, w_i^2 \in W_i$, tenemos que $\alpha w_i^1 + \beta w_i^2 \in W_i$.

12. Sea V un espacio vectorial y W_1 y W_2 dos subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Sabemos que, para $i = 1,2$, W_i es un subespacio vectorial de V y por lo tanto, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $w_i^1, w_i^2 \in W_i$, tenemos que $\alpha w_i^1 + \beta w_i^2 \in W_i$.

$\Leftarrow)$ Claramente, si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$ resulta $W_1 \cup W_2 = W_2$ o $W_1 \cup W_2 = W_1$, respectivamente.

12. Sea V un espacio vectorial y W_1 y W_2 dos subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Sabemos que, para $i = 1, 2$, W_i es un subespacio vectorial de V y por lo tanto, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y todo $w_i^1, w_i^2 \in W_i$, tenemos que $\alpha w_i^1 + \beta w_i^2 \in W_i$.

$\Leftarrow)$ Claramente, si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$ resulta $W_1 \cup W_2 = W_2$ o $W_1 \cup W_2 = W_1$, respectivamente.

En ambos casos $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V.

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.
Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.

Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.

Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.

Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$.

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.
Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.
Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.
Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Veremos que $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no define un espacio vectorial.

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.
Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.
Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.
Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Veremos que $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no define un espacio vectorial.
Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$,

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.
Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.
Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.
Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Veremos que $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no define un espacio vectorial.
Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$.

$\Rightarrow)$ Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.
Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.
Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.
Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Veremos que $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no define un espacio vectorial.
Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_1 + w_2 \in W_1$.

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.
Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.
Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.
Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Veremos que $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no define un espacio vectorial.
Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_1 + w_2 \in W_1$. Como W_1 es un espacio vectorial $-w_1 \in W_1$ y por lo tanto $(-w_1) + (w_1 + w_2) \in W_1$.

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.

Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.

Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Veremos que $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no define un espacio vectorial.

Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_1 + w_2 \in W_1$. Como W_1 es un espacio vectorial $-w_1 \in W_1$ y por lo tanto $(-w_1) + (w_1 + w_2) \in W_1$.

Pero $(-w_1) + (w_1 + w_2) = w_2 \notin W_1$ y llegamos a una contradicción.

$\Rightarrow)$ Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.
Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.
Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.
Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Veremos que $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no define un espacio vectorial.
Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_1 + w_2 \in W_1$. Como W_1 es un espacio vectorial $-w_1 \in W_1$ y por lo tanto $(-w_1) + (w_1 + w_2) \in W_1$.
Pero $(-w_1) + (w_1 + w_2) = w_2 \notin W_1$ y llegamos a una contradicción. Esta contradicción provino de suponer que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$.

$\Rightarrow$) Debemos probar ahora que si $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial de V, entonces $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.
Para ello probaremos la contrarecíproca, esto es, si W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, entonces $W_1 \cup W_2$ no es un subespacio vectorial de V.
Como W_1 no es un subconjunto de W_2 y W_2 no es un subconjunto de W_1, existen $w_1 \in \{x \in W_1 : x \notin W_2\}$ y $w_2 \in \{x \in W_2 : x \notin W_1\}$.
Claramente $w_1, w_2 \in W_1 \cup W_2$. Veremos que $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no define un espacio vectorial.
Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_1 + w_2 \in W_1$. Como W_1 es un espacio vectorial $-w_1 \in W_1$ y por lo tanto $(-w_1) + (w_1 + w_2) \in W_1$.
Pero $(-w_1) + (w_1 + w_2) = w_2 \notin W_1$ y llegamos a una contradicción. Esta contradicción provino de suponer que $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$.

Entonces $w_1 + w_2 \notin W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ no es un s.e.v. de V.

Outline

16. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \text{y}\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

16. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \text{y}\ \ E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Vamos a obtener $N(E)$ y $C(E)$. Los restantes se resuelven en forma similar.

16. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \text{y} \; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos a obtener $N(E)$ y $C(E)$. Los restantes se resuelven en forma similar.

E es una matriz 3×2. Entonces $N(E)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y $C(E)$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

16. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \text{y}\ \ E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Vamos a obtener $N(E)$ y $C(E)$. Los restantes se resuelven en forma similar.

E es una matriz 3×2. Entonces $N(E)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y $C(E)$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Empecemos con $C(E)$.

16. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \text{y} \; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos a obtener $N(E)$ y $C(E)$. Los restantes se resuelven en forma similar.

E es una matriz 3×2. Entonces $N(E)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y $C(E)$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Empecemos con $C(E)$.

Sabemos que $C(E)$ es el espacio generado por los vectores columna de E, esto es, el conjunto de combinaciones lineales de los vectores columna de E.

16. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \text{y} \; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos a obtener $N(E)$ y $C(E)$. Los restantes se resuelven en forma similar.

E es una matriz 3×2. Entonces $N(E)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y $C(E)$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Empecemos con $C(E)$.

Sabemos que $C(E)$ es el espacio generado por los vectores columna de E, esto es, el conjunto de combinaciones lineales de los vectores columna de E.

Observemos que E tiene dos columnas y una de ellas es el vector nulo.

16. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \text{y} \; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos a obtener $N(E)$ y $C(E)$. Los restantes se resuelven en forma similar.

E es una matriz 3×2. Entonces $N(E)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ y $C(E)$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Empecemos con $C(E)$.

Sabemos que $C(E)$ es el espacio generado por los vectores columna de E, esto es, el conjunto de combinaciones lineales de los vectores columna de E.

Observemos que E tiene dos columnas y una de ellas es el vector nulo.

Por lo tanto, $C(E)$ es el conjunto de combinaciones lineales de su primer columna.

Formalmente:

$$C(E) = \{\alpha(1,2,0) + \beta(0,0,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Formalmente:

$$C(E) = \{\alpha(1,2,0) + \beta(0,0,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Geométricamente,

Formalmente:

$$C(E) = \{\alpha(1,2,0) + \beta(0,0,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Geométricamente, $C(E)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con vector dirección $(1,2,0)$.

Formalmente:

$$C(E)=\{\alpha(1,2,0)+\beta(0,0,0):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{\alpha(1,2,0):\alpha\in\mathbb{R}\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\rangle$$

Geométricamente, $C(E)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con vector dirección $(1,2,0)$.

Veamos quién es $N(E)=\{x\in\mathbb{R}^2 : Ex=0\}$.

Formalmente:

$$C(E) = \{\alpha(1,2,0) + \beta(0,0,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Geométricamente, $C(E)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con vector dirección $(1,2,0)$.

Veamos quién es $N(E) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ex = 0\}$.

Es fácil verificar que si $x = (x_1, x_2)$, $Ex = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Formalmente:

$$C(E)=\{\alpha(1,2,0)+\beta(0,0,0):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{\alpha(1,2,0):\alpha\in\mathbb{R}\}=\left\langle\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\rangle$$

Geométricamente, $C(E)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con vector dirección $(1,2,0)$.

Veamos quién es $N(E)=\{x\in\mathbb{R}^2 : Ex=0\}$.

Es fácil verificar que si $x=(x_1,x_2)$, $Ex=\begin{bmatrix}x_1\\2x_1\\0\end{bmatrix}$.

Por lo tanto, $x=(x_1,x_2)\in N(E)$ si y solo si $x_1=0$.

Formalmente:

$$C(E) = \{\alpha(1,2,0) + \beta(0,0,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Geométricamente, $C(E)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con vector dirección $(1,2,0)$.

Veamos quién es $N(E) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ex = 0\}$.

Es fácil verificar que si $x = (x_1, x_2)$, $Ex = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, $x = (x_1, x_2) \in N(E)$ si y solo si $x_1 = 0$.

Tenemos entonces, $N(E) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} = \langle (0,1) \rangle$.

Formalmente:

$$C(E) = \{\alpha(1,2,0) + \beta(0,0,0) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(1,2,0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Geométricamente, $C(E)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con vector dirección $(1,2,0)$.

Veamos quién es $N(E) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ex = 0\}$.

Es fácil verificar que si $x = (x_1, x_2)$, $Ex = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, $x = (x_1, x_2) \in N(E)$ si y solo si $x_1 = 0$.

Tenemos entonces, $N(E) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\} = \langle (0,1) \rangle$.

Geométricamente,

Formalmente:

$$C(E)=\{\alpha(1,2,0)+\beta(0,0,0):\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}=\{\alpha(1,2,0):\alpha\in\mathbb{R}\}=\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\rangle$$

Geométricamente, $C(E)$ es la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con vector dirección $(1,2,0)$.

Veamos quién es $N(E)=\{x\in\mathbb{R}^2 : Ex=0\}$.

Es fácil verificar que si $x=(x_1,x_2)$, $Ex=\begin{bmatrix}x_1\\2x_1\\0\end{bmatrix}$.

Por lo tanto, $x=(x_1,x_2)\in N(E)$ si y solo si $x_1=0$.

Tenemos entonces, $N(E)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1=0\}=\langle(0,1)\rangle$.

Geométricamente, es el eje *vertical* del plano coordenado.

Outline

19. *a)* Sean U_1, U_2 subespacios vectoriales de V. Probar que $V = U_1 \oplus U_2$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:
i) $V = U_1 + U_2$.
ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

b) Encontrar un contraejemplo para demostrar que el resultado anterior no puede extenderse a más de dos subespacios, es decir, probar que para $m \geq 3$ NO ES VÁLIDA la siguiente afirmación.
Sean U_i, $i = 1, \ldots, m$ subespacios vectoriales de V. Entonces, si se verifican las siguientes dos condiciones:
i) $V = U_1 + U_2 + \ldots + U_m$,
ii) $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_m = \{0\}$,
resulta $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$.

19. *a*) Sean U_1, U_2 subespacios vectoriales de V. Probar que $V = U_1 \oplus U_2$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:
i) $V = U_1 + U_2$.
ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

b) Encontrar un contraejemplo para demostrar que el resultado anterior no puede extenderse a más de dos subespacios, es decir, probar que para $m \geq 3$ NO ES VÁLIDA la siguiente afirmación.
Sean U_i, $i = 1, \ldots, m$ subespacios vectoriales de V. Entonces, si se verifican las siguientes dos condiciones:
i) $V = U_1 + U_2 + \ldots + U_m$,
ii) $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_m = \{0\}$,
resulta $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$.

a) Vamos a probar que, dados $U_1, U_2 \subset V$ subespacios, $V = U_1 \oplus U_2$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:
i) $V = U_1 + U_2$.
ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

$\Leftarrow)$ Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

$\Leftarrow$) Sea $v \in V$, por i) sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

¿u_1, u_2 son únicos?

$\Leftarrow)$ Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

¿u_1, u_2 son únicos?

Supongamos que existen $\overline{u}_1 \in U_1$ y $\overline{u}_2 \in U_2$ tales que $v = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Entonces,

$\Leftarrow)$ Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

¿u_1, u_2 son únicos?

Supongamos que existen $\overline{u}_1 \in U_1$ y $\overline{u}_2 \in U_2$ tales que $v = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Entonces,

$$v = u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \ \Rightarrow$$

$\Leftarrow$) Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

¿u_1, u_2 son únicos?

Supongamos que existen $\overline{u}_1 \in U_1$ y $\overline{u}_2 \in U_2$ tales que $v = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Entonces,

$$v = u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \;\Rightarrow\; u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \;\Rightarrow$$

$\Leftarrow)$ Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

¿u_1, u_2 son únicos?

Supongamos que existen $\overline{u}_1 \in U_1$ y $\overline{u}_2 \in U_2$ tales que $v = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Entonces,

$$v = u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \;\Rightarrow\; u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \;\Rightarrow$$
$$\underbrace{u_1 - \overline{u}_1}_{\in U_1,\ pues\ U_1\ subev.} = \underbrace{\overline{u}_2 - u_2}_{\in U_2,\ pues\ U_2\ subev.} \Rightarrow$$

$\Leftarrow)$ Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

¿u_1, u_2 son únicos?

Supongamos que existen $\overline{u}_1 \in U_1$ y $\overline{u}_2 \in U_2$ tales que $v = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Entonces,

$$v = u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \ \Rightarrow \ u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \ \Rightarrow$$
$$\underbrace{u_1 - \overline{u}_1}_{\in U_1,\ pues\ U_1\ subev.} = \underbrace{\overline{u}_2 - u_2}_{\in U_2,\ pues\ U_2\ subev.} \Rightarrow$$
$$u_1 - \overline{u}_1,\ \overline{u}_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2 \overset{ii)}{\Rightarrow}$$

$\Leftarrow)$ Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

¿u_1, u_2 son únicos?

Supongamos que existen $\overline{u}_1 \in U_1$ y $\overline{u}_2 \in U_2$ tales que $v = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Entonces,

$$v = u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \; \Rightarrow \; u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \; \Rightarrow$$
$$\underbrace{u_1 - \overline{u}_1}_{\in U_1,\ pues\ U_1\ subev.} = \underbrace{\overline{u}_2 - u_2}_{\in U_2,\ pues\ U_2\ subev.} \Rightarrow$$
$$u_1 - \overline{u}_1,\ \overline{u}_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2 \overset{ii)}{\Rightarrow} u_1 - \overline{u}_1 = 0 \wedge \overline{u}_2 - u_2 = 0 \; \Rightarrow$$

$\Leftarrow)$ Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

¿u_1, u_2 son únicos?

Supongamos que existen $\overline{u}_1 \in U_1$ y $\overline{u}_2 \in U_2$ tales que $v = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Entonces,

$$v = u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \Rightarrow u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \Rightarrow$$

$$\underbrace{u_1 - \overline{u}_1}_{\in U_1,\ pues\ U_1\ subev.} = \underbrace{\overline{u}_2 - u_2}_{\in U_2,\ pues\ U_2\ subev.} \Rightarrow$$

$$u_1 - \overline{u}_1,\ \overline{u}_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2 \stackrel{ii)}{\Rightarrow} u_1 - \overline{u}_1 = 0 \wedge \overline{u}_2 - u_2 = 0 \Rightarrow$$

$$u_1 = \overline{u}_1 \wedge \overline{u}_2 = u_2.$$

$\Leftarrow)$ Sea $v \in V$, por $i)$ sabemos que existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

¿u_1, u_2 son únicos?

Supongamos que existen $\overline{u}_1 \in U_1$ y $\overline{u}_2 \in U_2$ tales que $v = \overline{u}_1 + \overline{u}_2$. Entonces,

$$\begin{gathered} v = u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \Rightarrow u_1 + u_2 = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 \Rightarrow \\ \underbrace{u_1 - \overline{u}_1}_{\in U_1,\ pues\ U_1\ subev.} = \underbrace{\overline{u}_2 - u_2}_{\in U_2,\ pues\ U_2\ subev.} \Rightarrow \\ u_1 - \overline{u}_1,\ \overline{u}_2 - u_2 \in U_1 \cap U_2 \overset{ii)}{\Rightarrow} u_1 - \overline{u}_1 = 0 \wedge \overline{u}_2 - u_2 = 0 \Rightarrow \\ u_1 = \overline{u}_1 \wedge \overline{u}_2 = u_2. \end{gathered}$$

Por lo tanto, $v \in V$ se escribe de manera única como $v = u_1 + u_2$ con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$. Así resulta $V = U_1 \oplus U_2$.

$\Rightarrow$) Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

$\Rightarrow)$ Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

Por definición de suma directa vale $i)$ $V = U_1 + U_2$ ($+$ suma habitual).

$\Rightarrow)$ Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

Por definición de suma directa vale $i)$ $V = U_1 + U_2$ ($+$ suma habitual).

¿$U_1 \cap U_2 = \{0\}$?

$\Rightarrow)$ Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

Por definición de suma directa vale $i)$ $V = U_1 + U_2$ ($+$ suma habitual).

¿$U_1 \cap U_2 = \{0\}$?

Consideramos $v \in U_1 \cap U_2$, luego v puede descomponerse como:

$\Rightarrow$) Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

Por definición de suma directa vale i) $V = U_1 + U_2$ ($+$ suma habitual).

¿$U_1 \cap U_2 = \{0\}$?

Consideramos $v \in U_1 \cap U_2$, luego v puede descomponerse como:

* $v = v + 0$ con $v \in U_1$ y $0 \in U_2$

$\Rightarrow$) Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

Por definición de suma directa vale i) $V = U_1 + U_2$ ($+$ suma habitual).

¿$U_1 \cap U_2 = \{0\}$?

Consideramos $v \in U_1 \cap U_2$, luego v puede descomponerse como:

* $v = v + 0$ con $v \in U_1$ y $0 \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ y U_2 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_2$), o bien

$\Rightarrow$) Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

Por definición de suma directa vale $i)$ $V = U_1 + U_2$ ($+$ suma habitual).

¿$U_1 \cap U_2 = \{0\}$?

Consideramos $v \in U_1 \cap U_2$, luego v puede descomponerse como:

* $v = v + 0$ con $v \in U_1$ y $0 \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ y U_2 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_2$), o bien
* $v = 0 + v$ con $0 \in U_1$ y $v \in U_2$

$\Rightarrow$) Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

Por definición de suma directa vale $i)$ $V = U_1 + U_2$ ($+$ suma habitual).

¿$U_1 \cap U_2 = \{0\}$?

Consideramos $v \in U_1 \cap U_2$, luego v puede descomponerse como:

* $v = v + 0$ con $v \in U_1$ y $0 \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ y U_2 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_2$), o bien
* $v = 0 + v$ con $0 \in U_1$ y $v \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que U_1 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_1$ y $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$).

$\Rightarrow)$ Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

Por definición de suma directa vale $i)$ $V = U_1 + U_2$ ($+$ suma habitual).

¿$U_1 \cap U_2 = \{0\}$?

Consideramos $v \in U_1 \cap U_2$, luego v puede descomponerse como:

* $v = v + 0$ con $v \in U_1$ y $0 \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ y U_2 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_2$), o bien
* $v = 0 + v$ con $0 \in U_1$ y $v \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que U_1 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_1$ y $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$).

Ahora bien, como $V = U_1 \oplus U_2$, por unicidad de la descomposción $v + 0 = 0 + v$,

$\Rightarrow)$ Sabemos que $V = U_1 \oplus U_2$.

Por definición de suma directa vale $i)$ $V = U_1 + U_2$ ($+$ suma habitual).

¿$U_1 \cap U_2 = \{0\}$?

Consideramos $v \in U_1 \cap U_2$, luego v puede descomponerse como:

* $v = v + 0$ con $v \in U_1$ y $0 \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$ y U_2 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_2$), o bien
* $v = 0 + v$ con $0 \in U_1$ y $v \in U_2$ (esto lo podemos hacer ya que U_1 es suespacio vectorial entonces $0 \in U_1$ y $v \in U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$).

Ahora bien, como $V = U_1 \oplus U_2$, por unicidad de la descomposción $v + 0 = 0 + v$, entonces $v = 0$ y se verifica $ii)$.

$b)$ Veamos ahora que el resultado no puede extenderse a m subespacios con $m \geq 3$.

b) Veamos ahora que el resultado no puede extenderse a m subespacios con $m \geq 3$.

Consideramos $U_1 = \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle$, $U_2 = \langle\{(1,1,0)\}\rangle$ y $U_3 = \langle\{(0,0,1)\}\rangle$.

b) Veamos ahora que el resultado no puede extenderse a m subespacios con $m \geq 3$.

Consideramos $U_1 = \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle$, $U_2 = \langle\{(1,1,0)\}\rangle$ y $U_3 = \langle\{(0,0,1)\}\rangle$.

U_1, U_2, U_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ (U_1 es el plano xy y U_2, U_3 son rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen).

b) Veamos ahora que el resultado no puede extenderse a m subespacios con $m \geq 3$.

Consideramos $U_1 = \langle \{(1,0,0),(0,1,0)\} \rangle$, $U_2 = \langle \{(1,1,0)\} \rangle$ y $U_3 = \langle \{(0,0,1)\} \rangle$.

U_1, U_2, U_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ (U_1 es el plano xy y U_2, U_3 son rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen).

Tenemos que:

* $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$,
* $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{(0,0,0)\}$.

b) Veamos ahora que el resultado no puede extenderse a m subespacios con $m \geq 3$.

Consideramos $U_1 = \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle$, $U_2 = \langle\{(1,1,0)\}\rangle$ y $U_3 = \langle\{(0,0,1)\}\rangle$.

U_1, U_2, U_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ (U_1 es el plano xy y U_2, U_3 son rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen).

Tenemos que:

* $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$,
* $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{(0,0,0)\}$.

Sin embargo, la suma NO es directa ya que existe más de una forma de escribir por ejemplo el vector $(2,2,0)$:

b) Veamos ahora que el resultado no puede extenderse a m subespacios con $m \geq 3$.

Consideramos $U_1 = \langle \{(1,0,0),(0,1,0)\} \rangle$, $U_2 = \langle \{(1,1,0)\} \rangle$ y $U_3 = \langle \{(0,0,1)\} \rangle$.

U_1, U_2, U_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ (U_1 es el plano xy y U_2, U_3 son rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen).

Tenemos que:

* $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$,
* $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{(0,0,0)\}$.

Sin embargo, la suma NO es directa ya que existe más de una forma de escribir por ejemplo el vector $(2,2,0)$:

- $(2,2,0) = \underbrace{2 \cdot (1,0,0) + 2 \cdot (0,1,0)}_{\in U_1} + \underbrace{0 \cdot (1,1,0)}_{\in U_2} + \underbrace{0 \cdot (0,0,1)}_{\in U_3}$,

b) Veamos ahora que el resultado no puede extenderse a m subespacios con $m \geq 3$.

Consideramos $U_1 = \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle$, $U_2 = \langle\{(1,1,0)\}\rangle$ y $U_3 = \langle\{(0,0,1)\}\rangle$.

U_1, U_2, U_3 son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ (U_1 es el plano xy y U_2, U_3 son rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen).

Tenemos que:

* $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2 + U_3$,
* $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{(0,0,0)\}$.

Sin embargo, la suma NO es directa ya que existe más de una forma de escribir por ejemplo el vector $(2,2,0)$:

- $(2,2,0) = \underbrace{2\cdot(1,0,0)+2\cdot(0,1,0)}_{\in U_1} + \underbrace{0\cdot(1,1,0)}_{\in U_2} + \underbrace{0\cdot(0,0,1)}_{\in U_3}$,
- $(2,2,0) = \underbrace{0\cdot(1,0,0)+0\cdot(0,1,0)}_{\in U_1} + \underbrace{2\cdot(1,1,0)}_{\in U_2} + \underbrace{0\cdot(0,0,1)}_{\in U_3}$.

Outline

20. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

20. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

Aplicando el resultado obtenido en el ejercicio 19., debemos encontrar W subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$ que verifique:
i) $\mathbb{R}[x] = U + W$,
ii) $U \cap W = \{0\}$.

20. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

Aplicando el resultado obtenido en el ejercicio 19., debemos encontrar W subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$ que verifique:

$i)$ $\mathbb{R}[x] = U + W$,
$ii)$ $U \cap W = \{0\}$.

Observemos que $U = \left\langle \{x^2, x^5\} \right\rangle$.

20. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

Aplicando el resultado obtenido en el ejercicio 19., debemos encontrar W subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$ que verifique:
$i)$ $\mathbb{R}[x] = U + W$,
$ii)$ $U \cap W = \{0\}$.
Observemos que $U = \left\langle \{x^2, x^5\} \right\rangle$.
Luego, pensando en cómo escribir un polinomio cualquiera a coeficientes reales y teniendo en cuenta las potencias que faltan a partir de U, consideramos

20. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

Aplicando el resultado obtenido en el ejercicio 19., debemos encontrar W subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$ que verifique:
$i)$ $\mathbb{R}[x] = U + W$,
$ii)$ $U \cap W = \{0\}$.
Observemos que $U = \left\langle \{x^2, x^5\} \right\rangle$.
Luego, pensando en cómo escribir un polinomio cualquiera a coeficientes reales y teniendo en cuenta las potencias que faltan a partir de U, consideramos

$$W = \left\langle \{x^i : i \in \mathbb{Z}_+ - \{2, 5\}\} \right\rangle.$$

Veamos que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

Veamos que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

$i)$ $\mathbb{R}[x] = U + W$ ya que:

Veamos que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

$i)$ $\mathbb{R}[x] = U + W$ ya que:

$\supseteq)$ $\mathbb{R}[x] \supseteq U + W$ por definición.

Veamos que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

i) $\mathbb{R}[x] = U + W$ ya que:

- $\supseteq$) $\mathbb{R}[x] \supseteq U + W$ por definición.
- $\subseteq$) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, luego

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Veamos que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

i) $\mathbb{R}[x] = U + W$ ya que:

$\supseteq$) $\mathbb{R}[x] \supseteq U + W$ por definición.

$\subseteq$) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, luego

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa y teniendo en cuenta que U y W son subespacios, podemos escribir:

Veamos que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

i) $\mathbb{R}[x] = U + W$ ya que:

- $\supseteq$) $\mathbb{R}[x] \supseteq U + W$ por definición.
- $\subseteq$) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, luego

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa y teniendo en cuenta que U y W son subespacios, podemos escribir:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n =$$

$$= \underbrace{a_2 x^2 + a_5 x^5}_{\in U} + \underbrace{a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \ldots + a_n x^n}_{\in W}.$$

Veamos que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

i) $\mathbb{R}[x] = U + W$ ya que:

- $\supseteq$) $\mathbb{R}[x] \supseteq U + W$ por definición.
- $\subseteq$) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$, luego

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa y teniendo en cuenta que U y W son subespacios, podemos escribir:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n =$$

$$= \underbrace{a_2 x^2 + a_5 x^5}_{\in U} + \underbrace{a_0 + a_1 x + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \ldots + a_n x^n}_{\in W}.$$

Por lo tanto $p \in U + W$. Así resulta $\mathbb{R}[x] \subseteq U + W$.

ii) $U \cap W = \{0\}$ pues:

ii) $U \cap W = \{0\}$ pues:

$\supseteq$) $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).

ii) $U \cap W = \{0\}$ pues:

- $\supseteq)$ $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).
- $\subseteq)$ Sea $p \in U \cap W$, luego

ii) $U \cap W = \{0\}$ pues:

- $\supseteq$) $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).
- $\subseteq$) Sea $p \in U \cap W$, luego
  - * $p(x) = ax^2 + bx^5$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ya que $p \in U$,

ii) $U \cap W = \{0\}$ pues:

- $\supseteq$) $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).
- $\subseteq$) Sea $p \in U \cap W$, luego
  - * $p(x) = ax^2 + bx^5$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ya que $p \in U$,
  - * $p(x) = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_4x^4 + c_6x^6 + \ldots + c_nx^n$ con $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, 3, 4, 6, \ldots, n\}$ ya que $p \in W$.

ii) $U \cap W = \{0\}$ pues:

$\supseteq$) $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).

$\subseteq$) Sea $p \in U \cap W$, luego

- $p(x) = ax^2 + bx^5$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ya que $p \in U$,
- $p(x) = c_0 + c_1 x + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \ldots + c_n x^n$ con $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, 3, 4, 6, \ldots, n\}$ ya que $p \in W$.

Entonces,

$$ax^2 + bx^5 = c_0 + c_1 x + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \ldots + c_n x^n \Rightarrow$$

ii) $U \cap W = \{0\}$ pues:

$\supseteq)$ $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).

$\subseteq)$ Sea $p \in U \cap W$, luego

* $p(x) = ax^2 + bx^5$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ya que $p \in U$,
* $p(x) = c_0 + c_1 x + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \ldots + c_n x^n$ con $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, 3, 4, 6, \ldots, n\}$ ya que $p \in W$.

Entonces,

$$ax^2 + bx^5 = c_0 + c_1 x + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \ldots + c_n x^n \Rightarrow$$

$$0 + 0x + ax^2 + 0x^3 + 0x^4 + bx^5 + 0x^6 + \ldots 0x^n =$$
$$c_0 + c_1 x + 0x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + 0x^5 + c_6 x^6 + \ldots + c_n x^n$$

ii) $U \cap W = \{0\}$ pues:

$\supseteq$) $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).

$\subseteq$) Sea $p \in U \cap W$, luego

* $p(x) = ax^2 + bx^5$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ya que $p \in U$,
* $p(x) = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_4x^4 + c_6x^6 + \ldots + c_nx^n$ con $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, 3, 4, 6, \ldots, n\}$ ya que $p \in W$.

Entonces,

$$ax^2 + bx^5 = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_4x^4 + c_6x^6 + \ldots + c_nx^n \Rightarrow$$

$0 + 0x + ax^2 + 0x^3 + 0x^4 + bx^5 + 0x^6 + \ldots 0x^n =$
$c_0 + c_1x + 0x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + 0x^5 + c_6x^6 + \ldots + c_nx^n$
Igualando término a término tenemos que:
$0 = c_0,\ \ 0 = c_1,\ \ a = 0,\ \ 0 = c_3,\ \ 0 = c_4,\ \ b = 0,\ \ 0 = c_6,\ \ \ldots,\ \ 0 = c_n.$

ii) $U \cap W = \{0\}$ pues:

$\supseteq$) $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).

$\subseteq$) Sea $p \in U \cap W$, luego

- $p(x) = ax^2 + bx^5$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ya que $p \in U$,
- $p(x) = c_0 + c_1 x + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \ldots + c_n x^n$ con $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, 3, 4, 6, \ldots, n\}$ ya que $p \in W$.

Entonces,

$$ax^2 + bx^5 = c_0 + c_1 x + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \ldots + c_n x^n \Rightarrow$$

$0 + 0x + ax^2 + 0x^3 + 0x^4 + bx^5 + 0x^6 + \ldots 0x^n =$
$c_0 + c_1 x + 0x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + 0x^5 + c_6 x^6 + \ldots + c_n x^n$
Igualando término a término tenemos que:
$0 = c_0,\ 0 = c_1,\ a = 0,\ 0 = c_3,\ 0 = c_4,\ b = 0,\ 0 = c_6,\ \ldots,\ 0 = c_n.$

Por lo tanto $p(x) = 0$, donde 0 representa el polinomio nulo. Así tenemos $U \cap W \subseteq \{0\}$.

$ii)$ $U \cap W = \{0\}$ pues:

$\supseteq)$ $U \cap W \supseteq \{0\}$ ya que U y W son subespacios ($0 \in U$ y $0 \in W$).

$\subseteq)$ Sea $p \in U \cap W$, luego

* $p(x) = ax^2 + bx^5$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ya que $p \in U$,
* $p(x) = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_4x^4 + c_6x^6 + \ldots + c_nx^n$ con $c_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{0, 1, 3, 4, 6, \ldots, n\}$ ya que $p \in W$.

Entonces,

$$ax^2 + bx^5 = c_0 + c_1x + c_3x^3 + c_4x^4 + c_6x^6 + \ldots + c_nx^n \Rightarrow$$

$0 + 0x + ax^2 + 0x^3 + 0x^4 + bx^5 + 0x^6 + \ldots 0x^n =$
$c_0 + c_1x + 0x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + 0x^5 + c_6x^6 + \ldots + c_nx^n$

Igualando término a término tenemos que:

$0 = c_0, \; 0 = c_1, \; a = 0, \; 0 = c_3, \; 0 = c_4, \; b = 0, \; 0 = c_6, \; \ldots, \; 0 = c_n.$

Por lo tanto $p(x) = 0$, donde 0 representa el polinomio nulo. Así tenemos $U \cap W \subseteq \{0\}$.

Queda probado que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

OUTLINE

21. En el espacio vectorial de las matrices reales de orden 3, describir el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos:

a)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

c)

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$c)\quad U=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}=$$
$$=\{A,B,C,D\}$$

$c)$ $$U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \\ = \{A, B, C, D\}$$

El espacio generado por el conjunto U es el espacio vectorial que contiene todas las combinaciones lineales de los elementos de U.

$$c)\quad U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \\ = \{A, B, C, D\}$$

El espacio generado por el conjunto U es el espacio vectorial que contiene todas las combinaciones lineales de los elementos de U.

Podríamos describir dicho subespacio como:

c) $$U=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}=$$
$$=\{A,B,C,D\}$$

El espacio generado por el conjunto U es el espacio vectorial que contiene todas las combinaciones lineales de los elementos de U.

Podríamos describir dicho subespacio como:

$$W=\{\alpha A+\beta B+\gamma C+\nu D:\alpha,\beta,\gamma,\nu\in\mathbb{R}\}=\langle\{A,B,C,D\}\rangle=\langle U\rangle\,.$$

$$c)\quad U=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}=$$
$$=\{A,B,C,D\}$$

El espacio generado por el conjunto U es el espacio vectorial que contiene todas las combinaciones lineales de los elementos de U.

Podríamos describir dicho subespacio como:

$$W=\{\alpha A+\beta B+\gamma C+\nu D:\alpha,\beta,\gamma,\nu\in\mathbb{R}\}=\langle\{A,B,C,D\}\rangle=\langle U\rangle\,.$$

Ahora bien, si miramos las matrices del cunjunto U, podemos observar que $B=A-C$,

c) $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} =$
$= \{A, B, C, D\}$

El espacio generado por el conjunto U es el espacio vectorial que contiene todas las combinaciones lineales de los elementos de U.

Podríamos describir dicho subespacio como:

$$W = \{\alpha A + \beta B + \gamma C + \nu D : \alpha, \beta, \gamma, \nu \in \mathbb{R}\} = \langle \{A, B, C, D\} \rangle = \langle U \rangle .$$

Ahora bien, si miramos las matrices del cunjunto U, podemos observar que $B = A - C$, entonces podemos describir al subespacio W con una cantidad menor de matrices:

$$c)\quad U=\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}=$$
$$=\{A,B,C,D\}$$

El espacio generado por el conjunto U es el espacio vectorial que contiene todas las combinaciones lineales de los elementos de U.

Podríamos describir dicho subespacio como:

$$W=\{\alpha A+\beta B+\gamma C+\nu D:\alpha,\beta,\gamma,\nu\in\mathbb{R}\}=\langle\{A,B,C,D\}\rangle=\langle U\rangle\,.$$

Ahora bien, si miramos las matrices del cunjunto U, podemos observar que $B=A-C$, entonces podemos describir al subespacio W con una cantidad menor de matrices:

$$W=\langle\{A,C,D\}\rangle\,.$$

Outline

22. Recordar que, dado V un espacio vectorial y $S \subset V$, $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S. Demostrar las siguientes proposiciones:

   a) Si $S \subseteq T \subseteq V$, entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$.
   b) $S \subseteq \langle S \rangle$.
   c) Si $S \subseteq T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subseteq T$. Observar que a partir de esta propiedad sabemos que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.
   d) S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S \rangle = S$.
   e) Si $\langle S \rangle = U$, entonces $\langle U \rangle = U$.
   f) Sea $W \subseteq V$. Entonces:
      1. $\langle S \cap W \rangle \subset \langle S \rangle \cap \langle W \rangle$.
      2. $\langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$.
   g) ¿Valen las contenciones inversas en los items *a*) y *f*)?

22. Recordar que, dado V un espacio vectorial y $S \subset V$, $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S. Demostrar las siguientes proposiciones:

   a) Si $S \subseteq T \subseteq V$, entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$.
   b) $S \subseteq \langle S \rangle$.
   c) Si $S \subseteq T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subseteq T$. Observar que a partir de esta propiedad sabemos que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.
   d) S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S \rangle = S$.
   e) Si $\langle S \rangle = U$, entonces $\langle U \rangle = U$.
   f) Sea $W \subseteq V$. Entonces:
      1. $\langle S \cap W \rangle \subset \langle S \rangle \cap \langle W \rangle$.
      2. $\langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$.
   g) ¿Valen las contenciones inversas en los items a) y f)?

Vamos a probar el ítem c).

Veamos que $\langle S \rangle \subseteq T$.

Veamos que $\langle S \rangle \subseteq T$.

Consideramos $x \in \langle S \rangle$, ¿$x \in T$?

Veamos que $\langle S\rangle \subseteq T$.

Consideramos $x \in \langle S\rangle$, ¿$x \in T$?

Dado $x \in \langle S\rangle$, como $\langle S\rangle$ denota el subespacio de V generado por S tenemos que:

Veamos que $\langle S\rangle \subseteq T$.

Consideramos $x \in \langle S\rangle$, ¿$x \in T$?

Dado $x \in \langle S\rangle$, como $\langle S\rangle$ denota el subespacio de V generado por S tenemos que:

$$\exists\, I \subseteq \mathbb{N},\ I \text{ finito } /\ x = \sum_{i\in I} \alpha_i s_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C}),\ s_i \in S \underbrace{\Rightarrow}_{S\subseteq T}$$

Veamos que $\langle S\rangle \subseteq T$.

Consideramos $x \in \langle S\rangle$, ¿$x \in T$?

Dado $x \in \langle S\rangle$, como $\langle S\rangle$ denota el subespacio de V generado por S tenemos que:

$$\exists\, I \subseteq \mathbb{N},\ I \text{ finito} \ /\ x = \sum_{i\in I} \alpha_i s_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C}),\ s_i \in S \underbrace{\Rightarrow}_{S\subseteq T}$$

$$\exists\, I \subseteq \mathbb{N},\ I \text{ finito} \ /\ x = \sum_{i\in I} \alpha_i s_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C}),\ s_i \in T \quad \underbrace{\Rightarrow}_{T\ subev.\ de\ V}$$

Veamos que $\langle S\rangle \subseteq T$.

Consideramos $x \in \langle S\rangle$, ¿$x \in T$?

Dado $x \in \langle S\rangle$, como $\langle S\rangle$ denota el subespacio de V generado por S tenemos que:

$$\exists\, I \subseteq \mathbb{N},\ I \text{ finito } /\ x = \sum_{i\in I} \alpha_i s_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C}),\ s_i \in S \underbrace{\Rightarrow}_{S\subseteq T}$$

$$\exists\, I \subseteq \mathbb{N},\ I \text{ finito } /\ x = \sum_{i\in I} \alpha_i s_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C}),\ s_i \in T \quad \underbrace{\Rightarrow}_{T\ subev.\ de\ V}$$

$$x \in T$$

Veamos que $\langle S\rangle \subseteq T$.

Consideramos $x \in \langle S\rangle$, ¿$x \in T$?

Dado $x \in \langle S\rangle$, como $\langle S\rangle$ denota el subespacio de V generado por S tenemos que:

$$\exists\, I \subseteq \mathbb{N},\ I \text{ finito} \,/\, x = \sum_{i\in I} \alpha_i s_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C}),\ s_i \in S \underbrace{\Rightarrow}_{S\subseteq T}$$

$$\exists\, I \subseteq \mathbb{N},\ I \text{ finito} \,/\, x = \sum_{i\in I} \alpha_i s_i,\ \ \alpha_i \in \mathbb{R}(o\ \mathbb{C}),\ s_i \in T \quad \underbrace{\Rightarrow}_{T\ subev.\ de\ V}$$

$$x \in T$$

Por lo tanto $\langle S\rangle \subseteq T$.

Observación: $\langle S\rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S:

Observación: $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S:

Por un lado sabemos que $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S,

Observación: $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S:

Por un lado sabemos que $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S, luego $S \subseteq \langle S \rangle$ (¿por qué vale la contención?)

Observación: $\langle S\rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S:

Por un lado sabemos que $\langle S\rangle$ denota el subespacio de V generado por S, luego $S \subseteq \langle S\rangle$ (¿por qué vale la contención?)

Además, por lo que probamos en el apartado $c)$,

Observación: $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S:

Por un lado sabemos que $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S, luego $S \subseteq \langle S \rangle$ (¿por qué vale la contención?)

Además, por lo que probamos en el apartado $c)$, si T es otro subespacio vectorial de V que contiene a S resulta que $\langle S \rangle \subseteq T$.

Observación: $\langle S\rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S:

Por un lado sabemos que $\langle S\rangle$ denota el subespacio de V generado por S, luego $S \subseteq \langle S\rangle$ (¿por qué vale la contención?)

Además, por lo que probamos en el apartado $c)$, si T es otro subespacio vectorial de V que contiene a S resulta que $\langle S\rangle \subseteq T$.

Luego podemos concluir que $\langle S\rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.