Práctica: CAPÍTULO 3 - ORTOGONALIDAD (*primera parte*)

Cuando no se especifica lo contrario, el producto interno en $\mathbb{R}^n$ es $x^T y$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se considera con suma y producto por escalares habituales.

Un conjunto de vectores $\{u^1, \ldots, u^n\}$ es un *conjunto ortogonal* si sus vectores son ortogonales dos a dos, es decir, $\left\langle u^i, u^j \right\rangle = 0$ cuando $i \neq j$. Diremos que el conjunto dado es un *conjunto ortonormal* si es un conjunto ortogonal y todos sus vectores tiene norma igual a 1, es decir, es un conjunto ortogonal y $\left\|u^i\right\| = \sqrt{\langle u^i, u^i \rangle} = 1$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Determinar en cada caso si el producto definido es un producto interno en $\mathbb{R}^n$. En caso de no serlo, indicar qué axioma no se verifica.

   a) $u \times v = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \, |v_i|$.

   b) $u \times v = \left|\sum\limits_{i=1}^{n} u_i v_i\right|$.

   c) $u \times v = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$.

   d) $u \times v = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. *a*) Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices reales de tamaño $n \times n$. Verificar que:

   $$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij},$$

   es un producto interno en el espacio de las matrices reales $n \times n$ (conocido como producto de Frobenius).

   b) Probar que $\langle A, B \rangle = tr(AB^T) = tr(BA^T)$.

   La *traza* de una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ está definida como la suma de los elementos de la diagonal principal de A. Es decir, $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

3. Verificar que $\langle f, g \rangle = \int_1^e \log(x) f(x) g(x) dx$ es un producto interno en $\mathcal{C}([1, e])$, espacio de las funciones continuas a valores reales en el intervalo $[1, e]$.

4. Dados $u, v \in V$ espacio vectorial con producto interno, probar que $u = v$ si y solo si $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $w \in V$.

5. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de dos vectores linealmente independientes que no sean ortogonales y un ejemplo de dos vectores ortogonales que no sean linealmente independientes.

6. Dados los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, determinar qué par de vectores son ortogonales.

7. *a*) Verificar que los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales.

   b) Determinar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ donde dos de sus vectores son paralelos a los dados en el apartado anterior.

8. Dada la matriz

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

   calcular:

a) Un vector no nulo x ortogonal al espacio fila de A.

b) Un vector no nulo y ortogonal al espacio columna de A.

c) Un vector no nulo z ortogonal al espacio nulo de A.

9. Sea $\mathcal{C}([1,e])$, con el producto interno definido en el ejercicio 3.

   a) Calcular $\|f\|$ para $f(x)=\sqrt{2}$.

   b) Hallar un polinomio de grado uno que sea ortogonal a $g(x)=1$.

10. Sea $u=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{3}{6},\frac{5}{6}\right)^T$ y sea $P=uu^T$.

    a) Probar que $Pu=u$.

    b) Probar que si v es ortogonal a u entonces $Pv=0$.

    c) ¿Cuál es la dimensión de $N(P)$?. Encontrar una base para $N(P)$.

11. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Si $dim(V)=n$ y $\{v^1,\dots,v^n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos de V, probar que:

    a) $\{v^1,\dots,v^n\}$ es una base de V.

    b) Si $\|v^i\|=1$ para $i\in\{1,\dots,n\}$, $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\langle x,v^i\rangle\right|^2 \quad \forall x\in V$.

12. Sea $W=\left\langle\{v^1,\dots,v^p\}\right\rangle$. Mostrar que si x es ortogonal a todo v^j, para $j\in\{1,\dots,p\}$, luego x es ortogonal a todo vector en W.

13. En cada caso, mostrar que $\{u^1,u^2\}$ o $\{u^1,u^2,u^3\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente, y luego expresar a x como combinación lineal de la base correspondiente.

    a) $u^1=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$, $u^2=\begin{bmatrix}6\\4\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}9\\-7\end{bmatrix}$.

    b) $u^1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $u^2=\begin{bmatrix}-1\\4\\1\end{bmatrix}$, $u^3=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}8\\-4\\-3\end{bmatrix}$.

14. Dados $u=(u_1,u_2), v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ definimos el producto interno:

$$\langle u,v\rangle=u_1v_1-u_2v_1-u_1v_2+4u_2v_2.$$

    a) Calcular $\|e^1\|$ y $\|e^2\|$.

    b) Determinar el ángulo formado por los vectores e^1 y e^2.

    c) Verificar la desigualdad de Cauchy-Swartz para $u=(u_1,u_2)$ y $v=e^1$.

15. Sea V un espacio vectorial con producto interno y W un subespacio vectorial de V. Demostrar las siguientes proposiciones:

    a) $v\in W^\perp$ si y solo si v es ortogonal a todo vector $u\in U$ donde $\langle U\rangle=W$.

    b) $W^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

    c) $(W^\perp)^\perp=W$.

16. Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ matrices reales de tamaño $n\times n$ y

$$\langle A,B\rangle=\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij},$$

    un producto interno en el espacio de las matrices reales $n\times n$.

    a) Hallar una base ortogonal para $\mathbb{R}^{n\times n}$ para dicho producto interno.

    b) Hallar $W^\perp$ siendo $W\subseteq\mathbb{R}^{2\times 2}$ el espacio generado por $\left\{\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) Ídem *b*) para $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

17. Calcular el complemento ortogonal del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,1,2)$ y $(1,2,3)$.
    Sugerencia: Pensar los vectores como filas de una matriz A.

18. Si V es el complemento ortogonal de W en $\mathbb{R}^n$, ¿existe una matriz tal que el espacio fila coincide con V y el espacio nulo es W?

19. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

    a) Si V es ortogonal a W, entonces $V^\perp$ es ortogonal a $W^\perp$.

    b) Si V es ortogonal a W y W es ortogonal a Z entonces V es ortogonal a Z.

20. Sea S el hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que contienen a todos los vectores que satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Calcular una base para el espacio $S^\perp$.

21. Sean

$$u^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, u^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, u^4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

    Sean $V = \langle \{u^1, u^2, u^3\} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ y $W = \langle \{u^4\} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

    a) Probar que $V = W^\perp$.

    b) Escribir x como suma de dos vectores, uno en V y el otro en W.

22. Si la ecuación $Ax = b$ tiene solución, entonces existe un único p en $C(A^T)$ solución del sistema.