

Práctica: CAPÍTULO 5 - AUTOVECTORES Y AUTOVALORES (primera parte)

Salvo que se mencione lo contrario, los espacios vectoriales son considerados con sus operaciones estándares y sus bases canónicas. Dado V un espacio vectorial, denotamos con $\mathcal{L}(V)$ el espacio de las transformaciones lineales de V en sí mismo.

- Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para las siguientes transformaciones lineales:

a) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(u, v) = (v, u)$ para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

b) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(u, v, w) = (2v, 0, 5w)$ para $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

c) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n, \dots, x_1 + \dots + x_n), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

- Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Probar que, para toda $T \in \mathcal{L}(V)$ y para cada autovalor λ de T , el autoespacio asociado a λ es un subespacio vectorial de V .

- Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para las siguientes matrices:

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad d) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- En cada caso, hallar el autoespacio de A asociado a λ :

$$a) A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 10, \quad b) B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \lambda = 3.$$

- Probar que, si A es una matriz diagonal $n \times n$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $x^i = e_i$ es un autovector asociado a $\lambda_i = A_{ii}$.

- Demostrar que los autovalores de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.

- Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $w(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}$ y $w'(x) = \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix}$. Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$w'(x) = Aw(x), \quad w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix},$$

y determinar λ, α y β tales que $w(x) = \begin{bmatrix} \alpha e^{\lambda x} \\ \beta e^{\lambda x} \end{bmatrix}$ es solución del sistema dado.

- Encontrar el polinomio característico y 4 autovectores l.i. de la matriz proyección de \mathbb{R}^4 sobre $a = (1, 1, 0, -1)^T$.

- a) Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus filas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es un autovalor de A .

- b) Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus columnas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es un autovalor de A .

- Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcular h tal que el autoespacio correspondiente a $\lambda = 5$ sea bidimensional.

- Diagonalizar las siguientes matrices:

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} -7 & -16 & 4 \\ 6 & 13 & -2 \\ 12 & 16 & 1 \end{bmatrix}, \quad d) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

12. Hallar la matriz cuyos autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ y cuyos autovectores son $x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $x^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ respectivamente.
13. Si los autovalores de una matriz A de tamaño 3×3 son 1, 1 y 2, ¿de cuál de las siguientes afirmaciones se tiene la certeza de que son verdaderas?. Justificar la respuesta.
- A es inversible.
 - A es diagonalizable.
 - A no es diagonalizable.
14. Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones:
- La matriz diagonalizante S no es única.
 - Si A es diagonalizable, la matriz diagonal es única (salvo ordenamiento de filas) y los elementos de su diagonal son los n autovalores de A .
 - Si S diagonaliza a A , entonces la i -ésima columna de S es un autovector de A .
15. Sea A una matriz 3×3 con dos autovalores diferentes tales que cada autoespacio es unidimensional. Determinar si A es diagonalizable justificando la respuesta.
16. a) Describir una matriz 2×2 que sea inversible pero no diagonalizable.
 b) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea diagonalizable pero no inversible.

EJERCICIOS ADICIONALES

- Sea A una matriz $n \times n$. Probar que λ es autovalor de A si y solo si λ es autovalor de A^T .
- En cada caso, encontrar los autovalores de la matriz y los autoespacios asociados.

$$a) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
- Comprobar que la traza de A es igual a la suma de los autovalores y el determinante de A , igual a su producto.
 - Si consideramos $B = A - 7I$, ¿Cómo se relacionan los autovalores y autovectores asociados de A y B ?
4. Sea V un espacio de dimensión finita sobre \mathbb{K} y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Sea λ autovalor de T tal que todo $v \in V - \{0\}$ es un autovector asociado a λ . Probar que T debe ser igual a un escalar por la identidad en V .
5. Sea A una matriz 3×3 , triangular superior, con valores 1, 2 y 7 en la diagonal.
- ¿Por qué es correcto afirmar que A es diagonalizable?
 - ¿Cuál es la matriz Λ ?