Trabajo Practico

UNIDAD 3

Santiago Demagistris D-4110/6
Daria Obukhova O-1732/9

Trabajo práctico Unidad 3 Abril/2020
Probabilidad y Estadística

Resolver los siguientes ejercicios justificando las operaciones realizadas e indicando los supuestos asumidos para encontrar la solución.

1. Una empresa dedicada al procesamiento de datos considera que al probar por primera vez el programa se pueden encontrar:

i. Errores importantes (que ocasiona que el programa falle por completo)

ii. Errores menores (fallas que permiten que el programa se corra, pero que en algunas situaciones producen resultados erróneos)

iii. Ningún error

De experiencias anteriores se conoce que la probabilidad que al correr por primera vez el programa se encuentren errores importantes es 0,6; de encontrar errores menores es 0,3 y de no encontrar errores es 0,1. En caso de haber errores se trata de corregirlos y se vuelve a probar el programa.

La siguiente tabla muestra las probabilidades de los resultados en la 2da prueba condicionada a los de la 1era:

2do resultado → ---------------------------- 1er resultado ↓	Importante	Menor	Ninguno
Importante	0.3	0.5	0.2
Menor	0.1	0.3	0.6
Ninguno	0	0.2	0.8

Análisis del experimento

$$S = \{I1, I2, M1, M2, N1, N2\}$$

-Este conjunto en la realidad seria ~~in~~finito numerable, pero lo adaptamos a la situación planteada-

Donde los sucesos se describen como sigue:

- {I1} = {Error importante a la hora de correr el programa por primera vez}
- {I2} = {Error importante a la hora de correr el programa por segunda vez}
- {M1} = {Error menor a la hora de correr el programa por primera vez}
- {M2} = {Error menor a la hora de correr el programa por segunda vez}
- {N1} = {Ningun error a la hora de correr el programa por segunda vez}
- {N2} = {Ningun error a la hora de correr el programa por primera vez}

Según la información brindada :

- $P(I1) = 0.6$ $\quad$ $P(M1) = 0.3$ $\quad$ $P(N1) = 0.1$
- $P(I2 \mid I1) = 0.3$ $\quad$ $P(M2 \mid I1) = 0.5$ $\quad$ $P(N2 \mid I1) = 0.2$
- $P(I2 \mid M1) = 0.1$ $\quad$ $P(M2 \mid M1) = 0.3$ $\quad$ $P(N2 \mid M1) = 0.6$
- $P(I2 \mid N1) = 0$ $\quad$ $P(M2 \mid M1) = 0.2$ $\quad$ $P(N2 \mid M1) = 0.9$

a) Construir una tabla igual a la anterior donde cada celda represente la probabilidad de la intersección de los sucesos.

Calculo de intersecciones

$P(\{I1 \cap I2\}) = P(I2 \mid I1) * P(I1) = 0.3 * 0.6 = 0.18$

$P(\{I1 \cap M2\}) = P(M2 \mid I1) * P(I1) = 0.5 * 0.6 = 0.3$

$P(\{I1 \cap N2\}) = P(N2 \mid I1) * P(I1) = 0.2 * 0.6 = 0.12$

$P(\{M1 \cap I2\}) = P(I2 \mid M1) * P(M1) = 0.1 * 0.3 = 0.03$

$P(\{M1 \cap M2\}) = P(M2 \mid M1) * P(M1) = 0.3 * 0.3 = 0.09$

$P(\{M1 \cap N2\}) = P(N2 \mid M1) * P(M1) = 0.6 * 0.3 = 0.18$

$P(\{N1 \cap I2\}) = P(I2 \mid N1) * P(N1) = 0 * 0.1 = 0$

$P(\{N1 \cap M2\}) = P(M2 \mid N1) * P(N1) = 0.2 * 0.1 = 0.02$

$P(\{N1 \cap N2\}) = P(N2 \mid N1) * P(N1) = 0.8 * 0.1 = 0.08$

TABLA DE INTERSECCIONES

2do resultado → ---------------------------- 1er resultado ↓	Importante	Menor	Ninguno
Importante	0.18	0.3	0.12
Menor	0.03	0.09	0.18
Ninguno	0	0.02	0.08

b) Encontrar la probabilidad de descubrir un error importante durante la segunda prueba.

Es importante destacar la suposición de que {I1}, {M1} y {N1} son sucesos mutuamente excluyentes, ya que si ocurre uno de estos, los demás no pueden ocurrir.

$$P(I2) = P(I2 \mid I1 \cup M1 \cup N1) = (P(I2 \cap (I1 \cup M1 \cup N1))) \;/\; P(I1 \cup M1 \cup N1) =$$

(algebra de conjuntos, propiedad probabilidad de union de sucesos mutuamentes excluyentes)

$$= (P(I2 \cap I1 \cup I2 \cap M1 \cup I2 \cap N1)) \;/\; (P(I1) + P(M1) + P(N1)) =$$

(definicion de probabilidad de union de sucesos)

$$= (P(I2 \cap I1) + P(I2 \cap M1) + P(I2 \cap N1) - P(I2 \cap I1 \cap I2 \cap M1 \cap I2 \cap N1)) \;/\; (0.6 + 0.3 + 1) =$$

(interseccion de sucesos mutuamente excluyentes)

$$= (0.18 + 0.03 + 0 - 0) / 1 = 0.21$$

La probabilidad de descubrir un error importante durante la segunda prueba es de 0.21

c) Encontrar la probabilidad de error menor en la primera prueba sabiendo que el error en la segunda prueba es importante.

$P(M1 \mid I2) = P(M1 \cap I2) / P(I2) = 0.03 / 0.21 = 1/7$

d) Analizar la independencia entre los resultados de la primera prueba con los de la segunda.

Utilizando el mismo despeje que en el item b obtenemos $P(M2) = 0.41$, $P(N2) = 0.38$

Independencias entre :

(probabilidades condicionales obtenidas de la primer tabla)

I2 e I1 : $P(I2 \mid I1) = 0.18 \neq 0.21 = P(I2)$ => I2 e I1 no son mutuamente independientes

M2 y M1 : $P(M2 \mid M1) = 0.3 \neq 0.41 = P(M2)$ => M2 y M1 no son mutuamente independientes

N2 y N1 : $P(N2 \mid N1) = 0.8 \neq 0.38 = P(N2)$ => N2 y N1 no son mutuamente independientes

Falta analizar otras seis combinaciones de sucesos

2. Considere un canal de comunicación digital de 1 bit. Determine la probabilidad del evento “se comete error en la transmisión”, es decir: habiendo recibido un 0 se haya emitido un 1, o bien, habiendo recibido un 1 se haya emitido un 0.

Considere que el transmisor tiene la misma probabilidad de enviar un 0 o un 1.

Análisis del experimento

Espacio muestral:

S = {(0,1), (0,0), (1,1), (1,0)}

Donde en (x,y), x representa la transmisión e y representa la recepción. Es decir, el espacio muestral adoptado son tuplas de transmisión y recepción.

Sucesos:

A = {“enviar 1”} = {(1,0), (1,1)}

B = {“enviar 0”} = {(0,1), (0,0)}

E = {“error en la transmisión”} = {(0,1), (1,0)}

Conviene elegir sucesos simples:
S0:"se envía un 0"
S1:"se envía un 1"
R0:"se recibe un 0"
R1:"se recibe un 1"

Segun la información brindada en el enunciado P(A) = P(B) = k y suponemos que k>0

A, B son una partición de S:

- $A \cap B = \{\}$ => A y B son mutuamente excluyentes
- A U B = S
- P(A) = P(B) = k, k >0

Obtención de P(A) y P(B)

$$1 = P(S) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2k + P(\{\}) = 2k - 0 = 2k$$

por lo tanto, 1 = 2k => k = 1/2

con lo que P(A) = P(B) = ½

Obtención de P(E)

$$P(E) = P(E|S) = P(E \mid A \cup B) = P(E \cap (A \cup B)) / P(A \cup B) =$$

-[P(AUB) = P(S) = P1], distribución de la intersección de la unión de sucesos-

$$= P((E \cap A) \cup (E \cap B)) =$$

- Definición de probabilidad de la unión de conjuntos -

$$= P(E \cap A) + P(E \cap B) - P(E \cap A \cap E \cap B) =$$

- [A ∩ B = {}] -

$$= P(E \cap A) + P(E \cap B) =$$

- deducido de la probabilidad condicional -

$$= P(E|A) * P(A) + P(E|B) * P(B) =$$

- [P(A) = P (B) = ½] -

$$= (P(E|A) + P(E|B)) / 2$$

3. Muchos sistemas de comunicaciones pueden modelarse de la siguiente forma:

- Primero, el usuario entra un 0 o un 1 al sistema, y la señal correspondiente es transmitida.
- Segundo, el receptor toma una decisión acerca la entrada que hizo el usuario según la señal que le llegó.

Supongamos que el usuario envía "0" con probabilidad (1-p) y "1" con probabilidad p, y que el receptor toma decisiones erróneas aleatorias con probabilidad Ɛ.

Para i=0,1, sean los sucesos Ai:"entrada fue i", y Bi:"decisión del receptor fue i".

Según la información brindada, la probabilidad de tomar decisiones correctas es de 1-ε, con lo cual nuestros datos sobre el experimento de acuerdo a las suposiciones dadas son :

$P(A1) = p$

$P(A0) = 1 - p$

$P(B0 |A0) = 1 - \varepsilon$ **- probabilidad de tomar una decisión correcta -**

$P(B0 |A1) = \varepsilon$ **- probabilidad de tomar una decisión errónea -**

$P(B1 |A0) = \varepsilon$ **- probabilidad de tomar una decisión errónea -**

$P(B1 |A1) = 1 - \varepsilon$ **- probabilidad de tomar una decisión correcta -**

a. Encontrar las probabilidades [Ai∩Bj] para i=0,1 y j=0,1.

$P(A1\cap B1) = P(B1 |A1)* P(A1) = (1 - \varepsilon) * p$

$P(A1\cap B0) = P(B0 |A1)* P(A1) = \varepsilon * p$

$P(A0\cap B1) = P(B1 |A0)* P(A0) = \varepsilon * (1 - p)$

$P(A0\cap B0) = P(B0 |A0)* P(A0) = (1 - \varepsilon) * (1 - p)$

b. Encontrar el valor de Ɛ para el cual el input del canal es independiente del output. ¿Puede un canal de ese tipo ser usado para transmitir información?

Para que el input sea independiente del output se debe cumplir que:

- $P (A1\cap B1) = P(A1) * P(B1)$
- $P (A0\cap B1) = P(A0) * P(B1)$
- $P (A1\cap B0) = P(A1) * P(B0)$
- $P (A0\cap B0) = P(A0) * P(B0)$

Es decir, Ai Bj son mutuamente independientes para i=0,1 y j=0,1

Búsqueda de ε para lograr la independencia de los sucesos

$P(A1 \cap B1) = P(B1 | A1) * P(A1) = (1 - \varepsilon) * p \Rightarrow P(B1) = (1 - \varepsilon)$

$P(A0 \cap B1) = P(B1 | A0) * P(A0) = \varepsilon * (1 - p) \Rightarrow P(B1) = \varepsilon$

Por lo tanto se tendría que cumplir que $\varepsilon = (1 - \varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = ½ \Rightarrow P(B1) = 1/2$

Verificación de los casos restantes

$P(A1 \cap B0) = P(B0 | A1) * P(A1) = \varepsilon * p \Rightarrow P(B0) = \varepsilon = 1/2$

$P(A0 \cap B0) = P(B0 | A0) * P(A0) = (1 - \varepsilon) * (1 - p) \Rightarrow P(B0) = (1 - \varepsilon) = 1/2$

Como las P(B0) coincidieron entonces se cumplen estas condiciones

Como se cumplieron las 4 condiciones mencionadas anteriormente, Ai Bj son mutuamente independientes para i=0,1 y j=0,1

c. Indicar qué sucesos son mutuamente excluyentes.

A1∩~~A2~~ A0 = {“La entrada fue 1 y ~~2~~ 0”} = {} => A1 y ~~A2~~ A0 son mutuamente excluyentes

B1∩~~B2~~ B0 = {“La salida fue 1 y ~~2~~ 0”} = {} => B1 y ~~B2~~ B0 son mutuamente excluyentes

d. Encontrar cual fue la entrada más probable dado que el receptor muestra un 1

Las probabilidades condicionales son:

$P(A1 | B1) = P(A1 \cap B1) / P(B1)$

Si transmitimos 1 y recibimos 1, teniamos una probabilidad P(B1) de $1 - \varepsilon$.

por lo que $P(A1 | B1) = (1 - \varepsilon) * p) / 1 - \varepsilon = p$

$P(A0 | B1) = P(A0 \cap B1) / P(B1)$

Si transmitimos 0 y recibimos 1, teniamos una probabilidad P(B1) de ε.

por lo que $P(A0 | B1) = (\varepsilon * (1 - p)) / \varepsilon = 1 - p$

Por lo tanto la entrada ~~mas~~ más probable es aquella cuya probabilidad de intersección sea mayor.