Álgebra Lineal LCC - LM - PM 2020

Práctica: CAPÍTULO 1 - MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. ¿Verdadero o falso?

   a) Si A^2 está definida, entonces A es necesariamente una matriz cuadrada.

   b) Si AB y BA están definidas, entonces A y B son matrices cuadradas.

   c) Si AB y BA están definidas, entonces AB y BA son matrices cuadradas.

   d) Si $AB = B$, entonces $A = I$.

2. Consideramos las matrices A, B, C, D y E. Supongamos que los productos AB y CDE están bien definidos. Sin realizar de manera explícita dichos productos, ¿qué productos de matrices podría realizar si sólo se quiere conocer

   a) la tercera columna de AB?

   b) la primera fila de AB?

   c) el elemento en la fila 3, columna 4 de AB?

   d) la entrada de la fila 1, columna 1 de CDE?

3. Encontrar ejemplos de matrices de orden 2 tales que:

   a) $A^2 = -I$, con A matriz de entradas reales.

   b) $B^2 = \mathbf{0}$, con $B \neq \mathbf{0}$.

   c) $CD = -DC$ y $CD \neq \mathbf{0}$.

   d) $EF = \mathbf{0}$ y ninguna de las dos matrices tiene entradas nulas.

4. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar.

   a) Si la primera y la tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y la tercera columna de AB.

   b) Si la primera y la tercera fila de B son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.

   c) Si la primera y la tercera fila de A son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.

   d) Sean A y B matrices de tamaño $n \times n$, entonces $(AB)^2 = A^2B^2$.

5. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Escribir la primer fila de AB como combinación lineal de las filas de B.

   b) Escribir la primer columna de AB como combinación lineal de las columnas de A.

6. Dada A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, definimos $T_i = A^i B_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

   a) ¿Qué dimensión tiene T_i, para todo $i = 1, \ldots, n$?

   b) Probar que

$$AB = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

7. Sea A una matriz de tamaño $n \times p$ y $B = E_{ij}(\ell)A$. Probar que para todo $i \neq j$ y $k = 1, \ldots, n$, $B_k = A_k$ si $k \neq i$ y además, $B_i = A_i + \ell A_j$ si $k = i$.

8. Probar que $E_{ij}(\ell)E_{kj}(t) = E_{kj}(t)E_{ij}(\ell)$.

9. Probar que la inversa de la matriz $E_{ij}(\ell)$ es $E_{ij}(-\ell)$.

10. Sean P_{ij} la matriz de permutación simple de tamaño $n \times n$ que se obtiene al intercambiar las filas i y j de I y A, una matriz $n \times p$. Probar que $P_{ij}A$ es la matriz $n \times p$ que se obtiene intercambiando las filas i y j de A.

    Sugerencia: Si e_k es el vector canónico de $\mathbb{R}^n$ con un 1 en la entrada k, probar que $e_k A = A_k$ y recordar que si la fila k de $P_{ij}A$ es el producto de la fila k de $E_{ij}(\ell)$ por A.

11. Probar que si P es una matriz de permutación $n \times n$ y A es una matriz $n \times p$, entonces PA es la matriz $n \times p$ obtenida al permutar las filas de A de la misma manera que se permutan las filas de I para obtener P.

    Sugerencia: Usar lo hecho para producto por matrices de permutación simple.

12. En cada ítem, encontrar la matriz C que transforma A en B, es decir, C tal que $CA = B$.

    a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$

    b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}.$

    c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{bmatrix}.$

    d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

13. Sean

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

    Obtener EF, FE y E^2 utilizando las propiedades de las matrices elementales.

14. Resolver los siguientes sistemas utilizando eliminación gaussiana e identificar las matrices de eliminación y/o permutación utilizadas en cada caso.

$$a)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & + & & & 4x_3 & = & -5 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & = & 6 \end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & -4 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 7x_3 & = & -8 \\ -4x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 7 \end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & - & 8x_2 & + & 3x_3 & = & 32 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

15. Determinar los valores de a y b para los cuáles la matriz A es no singular siendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 3 \end{bmatrix}$$

16. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

    Resolver el sistema y hallar la factorización LU de A.

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A invertible, es única.

18. *a*) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & & & + & 2x_4 & = & 6 \\ & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 8 \\ & & & & 6x_3 & + & 5x_4 & = & -4 \end{array}\right.$$

b) Si A es la matriz de coeficientes del sistema anterior, resolver el sistema $Ax = \tilde{b}$ para los casos $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) ¿Existe $\tilde{b}$ tal que el sistema $Ax = \tilde{b}$ no tiene solución única?

19. Encontrar los factores L, D, U para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Resolver el sistema $A^T x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

20. Encontrar P tal que PA admite una factorización LDV y mostrar tal factorización.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

21. Sea $A = \begin{bmatrix} E \\ I \end{bmatrix}$, donde E es una matriz de tamaño $m \times n$ e I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. ¿Existe B tal que $AB = I$?.

22. Hallar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -3 & 9 & \frac{1}{3} \\ 6 & 1 & 3 & \frac{1}{9} & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

24. Sean A y B matrices inversibles. Probar que A^{-1} y AB son inversibles con $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

25. Sean A y B matrices tales que A es inversible y B es no inversible. ¿Puede ser AB inversible?

26. Sean P_{ij} la matriz de permutación simple de tamaño $n \times n$ que se obtiene al intercambiar las filas i y j de I. Probar que:

    a) P_{ij} es simétrica.

    b) $(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$.

    c) Para toda matriz de permutación, su inversa es su transpuesta.

27. Probar que si A es simétrica $n \times n$, $(A_i)^T = A^i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

28. Sea R una matriz $m \times n$. Probar que RR^T y $R^T R$ son simétricas.
    Sugerencia: Recordar que $(AB)_{ij} = A_i B^j$.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Exhibir la matriz M de orden 3 tal que, para toda matriz A de orden 3, MA que produce los siguientes cambios en A:

   a) suma 5 veces la fila 1 a la fila 2.

   b) suma -7 veces la fila 2 a la fila 3.

   c) intercambia las filas 1 y 2, y luego las filas 2 y 3.

2. Utilizando las propiedades de las matrices de permutación y matrices elementales, obtener los siguientes productos de matrices:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Una matriz "noroeste" tiene ceros por abajo de la antidiagonal que va de $(1, n)$ a $(n, 1)$ mientras que una matriz "sureste" tiene ceros por encima de dicha antidiagonal. Si una *matriz noroeste* A se multiplica por una *matriz sureste* B, ¿qué tipo de matrices son AB y BA?

4. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Verificar que $Ax = 0$. ¿Existen otros vectores x que verifiquen dicha igualdad?

5. Sean A y B matrices de tamaño 3×3. Determinar la única matriz B que verifica, para toda matriz A:

   a) $BA = 4A$.

   b) $BA = 4B$.

   c) BA tiene intercambiadas las columnas 1 y 3 de A y la fila 2 sin cambios.

   d) Todas las filas de BA son iguales a la fila 1 de A.

6. Resolver los siguientes problemas:

   a) X es dos veces más viejo que Y y la suma de la edad de ambos es igual a 39. Encontrar X e Y.

   b) $(x, y) = (2, 5)$ y $(3, 7)$ están en la recta $y = mx + c$. Encontrar m y c.

   c) La parábola $y = a + bx + cx^2$ pasa por los puntos $(x, y) = (1, 4)$, $(2, 8)$ and $(3, 14)$. Encontrar (a, b, c).

7. *a*) Determinar las matrices que llevan la siguiente matriz A a su forma triangular U

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   b) Calcular la matriz $E = E_{32}E_{31}E_{21}$ que realiza todos los pasos de la eliminación $EA = U$.

8. Encontrar la matriz inversa de

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$