Práctica: EJERCICIOS RESUELTOS CAPÍTULO 5 (primera parte)

1. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para las siguientes tranformaciones lineales:

   $a)$ $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $T(u,v) = (v,u)$ para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

   $b)$ $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(u,v,w) = (2v, 0, 5w)$ para $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.

   $c)$ $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$T(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + \cdots + x_n, \cdots, x_1 + \cdots + x_n), \qquad x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Resolvemos el $1.c)$.

λ es autovalor de T sii $\exists\ x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ / $T(x) = \lambda x$ (en este caso decimos que x es un autovector de T asociado a λ).

Entonces, si λ es autovalor de T y x su autovector asociado, se debe verificar:

$$T(x) = \lambda x \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i & = & \lambda x_1 \\ & \vdots & \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & = & \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda x_1 = \lambda x_2 = \ldots = \lambda x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

- Si $\lambda = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i$.
  Luego, si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es un autovector asociado a λ, x es de la forma:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, -\sum_{i=1}^{n-1} x_i).$$

  Por lo tanto, un conjunto de autovectores l.i. asociados a $\lambda = 0$ es:

$$\{(1,0,0,\ldots,0,-1), (0,1,0,\ldots,0,-1), \ldots, (0,0,0,\ldots,1,-1)\}.$$

- Si $\lambda \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
  Por lo tanto, un conjunto de autovectores l.i. asociados a $\lambda \neq 0$ es:

$$\{(1,1,\ldots,1,1)\}.$$

7. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $w(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}$ y $w'(x) = \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix}$. Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales lineales:

$$w'(x) = Aw(x), \quad w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix},$$

y determinar λ, α y β tales que $w(x) = \begin{bmatrix} \alpha e^{\lambda x} \\ \beta e^{\lambda x} \end{bmatrix}$ es solución del sistema dado.

Primero, $w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ estaba mal, Eduardo lo aclaró y cambio por $w(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en el archivo que está en comunidades.

Entonces, queremos determinar λ, α y β tales que:

$w'(x) = Aw(x), \quad w(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha\lambda e^{\lambda x} \\ \beta\lambda e^{\lambda x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha e^{\lambda x} \\ \beta e^{\lambda x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha e^{\lambda 0} \\ \beta e^{\lambda 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow.$

Entonces, si consideramos $x = 0$ tenemos:

$\lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 2.$

Ahora bien, para $\lambda = 2$, buscamos α y β tales que:

$2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$

Es decir, buscamos los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 2$ de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ (TERMINAR).

8. Encontrar el polinomio característico y 4 autovectores l.i. de la matriz proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre $\langle a \rangle$ donde $a = (1, 1, 0, -1)^T$.

Primero recordamos que la matriz proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre $\langle a \rangle = \left\langle (1, 1, 0, -1)^T \right\rangle$ es:

$$P = \frac{1}{a^T a} a a^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A partir de P podemos calcular el polinomio característico y los 4 autovectores l.i. de la matriz proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre $\langle a \rangle$.

Antes de ponernos a hacer cálculos, podemos recordar que los autovalores de toda matriz proyección sobre una recta son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. En este caso particular tenemos que, $\lambda_1 = 1$ es autovalor con $a = (1, 1, 0, -1)^T$ autovector asociado (a se proyecta sobre sí mismo) y $\lambda_2 = 0$ es autovalor de multiplicidad 3 y tiene asociado 3 autovectores l.i. que están en $N(P)$ (cada uno de estos autovectores se proyecta sobre el vector nulo).

A partir de lo enunciado, podemos concluir que $p_P(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 1)$. Además, dado que a es autovector asociado a $\lambda_1 = 1$, sólo faltan calcular 3 vectores l.i. que pertenezcan a $N(P)$ (TERMINAR).

9. *a)* Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus filas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es un autovalor de A.

   b) Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus columnas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es un autovalor de A.

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$

a) Sabemos que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \beta$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Veamos que β es un autovalor de A.

β es autovalor de A si y solo si existe $v \neq 0$ tal que $Av = \beta v$.

Si consideramos $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ resulta

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, dado que existe $v = \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ tal que $Av = \beta v$, resulta β autovalor de A.

$b)$ Consideramos ahora $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \beta$ para todo $j = 1, \dots, n$ en A.

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \beta \quad \forall\, j = 1, \dots, n$ en $A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \beta \quad \forall\, i = 1, \dots, n$ en $A^T \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta$ es autovalor de $A^T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta$ es autovalor de A.

13. Hallar la matriz cuyos autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ y cuyos autovectores son $x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $x^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ respectivamente.

Buscamos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3a + b & = & 3 \\ 3c + d & = & 1 \\ 2a + b & = & 8 \\ 2a + b & = & 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3a + b & = & 3 \\ 2a + b & = & 8 \end{array} \right. \wedge \left\{ \begin{array}{rcl} 3c + d & = & 1 \\ 2c + d & = & 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3 - 3a & = & 8 - 2a \\ b & = & 3 - 3a \end{array} \right. \wedge \left\{ \begin{array}{rcl} 1 - 3c & = & 4 - 2c \\ d & = & 1 - 3c \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -5 \\ b & = & 18 \end{array} \right. \wedge \left\{ \begin{array}{rcl} c & = & -3 \\ d & = & 10 \end{array} \right. .$$

Por lo tanto, $\begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$.

15. Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones:

$a)$ La matriz diagonalizante S no es única.

$b)$ Si A es diagonalizable, la matriz diagonal es única (salvo ordenamiento de filas) y los elementos de su diagonal son los n autovalores de A.

c) Si S diagonaliza a A, entonces la i-ésima columna de S es un autovector de A.

a) Primero podemos observar que si A es una matriz de tamaño 1×1, en particular, A es una matriz diagonal. Además, cualquier matriz S de tamaño 1×1 no nula verifica:

$$S^{-1}AS = A.$$

Por lo tanto, en este caso, la matriz diagonalizante S no es única.

Vamos a considerar ahora A una matriz diagonalizable de tamaño $n \times n$ con $n \geq 2$. Como A tiene n autovectores l.i. que la diagonalizan, existen distintas matrices S digonalizantes que dependen del orden en que consideramos los autovectores como columnas de dicha matriz.

Así podemos concluir, que para todo matriz A de tamaño $n \times n$ con $n \geq 1$, la matriz diagonalizante S no es única.

b) Como A de tamaño $n \times n$ es diagonalizable, existen n autovectores l.i. de A, x^i asociados a los autovalores λ_i, con $i = 1, \ldots, n$ respectivamente. Sea S la matriz $n \times n$ cuya columna i-ésima es x^i con $i = 1, \ldots, n$. Entonces, para todo $i = 1, \ldots, n$, la columna i-ésima de AS es $Ax^i = \lambda_i x^i$.

Por lo tanto, $AS = S\Lambda$ y la lineal independencia de los autovectores asegura la existencia de S^{-1}. Luego $S^{-1}AS = \Lambda$.

La matriz diagonal es única (salvo ordenamiento de filas que depende del ordenamiento de las columnas de S) y los elementos de su diagonal son los n autovalores de A.

c) Sea S matriz que diagonaliza a A. Sean x^i con $i = 1, \ldots, n$ las columnas de S.

Como S diagonaliza a A, $AS = S\Lambda$. Además, la columna i-ésima de AS es Ax^i y la columna i-ésima de $S\Lambda$ es $\lambda_i x^i$.

Por lo tanto, $Ax^i = \lambda_i x^i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y así resulta que la i-ésima columna de S es un autovector de A.

17. a) Describir una matriz 2×2 que sea inversible pero no diagonalizable.

b) Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea diagonalizable pero no inversible.

a) Consideramos $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Como $det(A) = 4 \neq 0$, A es inversible.

Por otro lado, $\lambda = 2$ es autovalor de multiplicidad 2. Sin embargo, como $N(A - 2I) = \{(v_1, 0) : v_1 \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 0)\rangle$, existe un único vector l.i. en $N(A - 2I)$ asociado al autovalor 2 de multiplicidad 2. Por lo tanto A no es diagonalizable.

b) Consideramos $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A es una matriz diagonalizable ya que es de tamaño 2×2 y tiene 2 autovalores distintos $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$, son fáciles de identificar ya que A es una matriz diagonal.

Sin embargo, A no resulta inversible, pues $det(A) = 0$.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Sea A una matriz $n \times n$. Probar que λ es autovalor de A si y solo si λ es autovalor de A^T.

λ es autovalor de $A \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow det((A - \lambda I)^T) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda$ es autovalor de A^T.