Trabajo práctico: Unidad 5

Ejercicio 1

Se ha observado que un termómetro sometido a condiciones meteorológicas adversas da una medición entre dos grados más y dos menos de la temperatura real. El error cometido sigue una variable aleatoria continua con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x) & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Hallar k de modo tal que $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad.

b) Hallar la función de distribución acumulada.

c) Calcular la probabilidad de que el termómetro cometa un error de entre -1 y 1 grado.

d) Determinar el valor de c para el cual se verifica $P(X > c) = 0,1$.

Solución

a) Para que f sea una función de densidad de probabilidad, tiene que cumplir la condición de cierre $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, que implica:

Recordar que también debe cumplirse que f(x)>=0 para todo x

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow 0 + \int_{-2}^{2} f(x)dx + 0 = 1$$

$$\int_{-2}^{2} k(2-x)dx = 1 \Leftrightarrow k\int_{-2}^{2} (2-x)dx = 1 \Leftrightarrow k(\int_{-2}^{2} 2dx - \int_{-2}^{2} xdx) = 1$$

$$\int_{-2}^{2} 2dx = 2x|_{-2}^{2} = 2 \cdot 2 - (-2 \cdot 2) = 4 - (-4) = 4 + 4 = 8$$

$$\int_{-2}^{2} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = 2 - 2 = 0$$

Por lo tanto $k(\int_{-2}^{2} 2dx - \int_{-2}^{2} xdx) = k(8-0) = k \cdot 8 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{k} = \mathbf{\frac{1}{8}}$

b) Si $t < -2$

$P(T \leq t) = F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = 0$

Si $-2 \leq t \leq 2$

$P(T \leq t) = F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{t} \frac{1}{8}(2-x)dx = \frac{1}{8}\int_{-2}^{t}(2-x)dx$

$\int_{-2}^{t}(2-x)dx = \int_{-2}^{t} 2dx - \int_{-2}^{t} xdx = 2x|_{-2}^{t} - \frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{t} = (2t-(-4)) - (\frac{t^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}) = 2t+4-\frac{t^2}{2}+2 = 6+2t-\frac{t^2}{2}$

$\frac{1}{8}\int_{-2}^{t}(2-x)dx = \frac{1}{8}(6+2t-\frac{t^2}{2}) = \frac{6}{8} + \frac{2t}{8} - \frac{t^2}{16} = \frac{3+t}{4} - \frac{t^2}{16}$

Por lo tanto

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -2 \\ \frac{3+t}{4} - \frac{t^2}{16} & \text{si } -2 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

c) $P(-1 \leq t \leq 1) = P(t \leq 1) - P(t \leq -1) = F(1) - F(-1) = (\frac{4}{4} - \frac{1}{16}) - (\frac{2}{4} - \frac{1}{16}) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$

d) $P(X > c) = 0,1 \Rightarrow P(X \leq c) = 1 - 0,1 = 0,9$

$F(c) = \frac{3+c}{4} - \frac{c^2}{16} = 0.9$

$\dfrac{3+c}{4} - \dfrac{c^2}{16} = \dfrac{9}{10}$

$20(c+3) - 5c^2 = 72$

$20c + 60 - 5c^2 = 72$

$-5c^2 + 20c - 12 = 0$

$c_1 = \dfrac{2(5-\sqrt{10})}{5} \approx 0,7351,\ c_2 = \dfrac{2(5+\sqrt{10})}{5} \approx 2,6325$

Como $c_2 = 2,6325 > 2 \Rightarrow P(X > c_2) = F(c_2) = 1$. Entonces c_2 no verifica la condición $P(X > c2) = 0,1$.

Por lo tanto el valor de c para cual se verifica $P(X > c) = 0,1$ es $\mathbf{0,7351}$.

Ejercicio 2

Se ha comprobado que el tiempo de vida de cierto tipo de marcapasos sigue una distribución exponencial con media de 16 años. ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona a la que se le ha implantado este marcapasos se le deba reimplantar otro antes de 20 años? Si el marcapasos lleva funcionando correctamente 5 años en un paciente, ¿cuál es la probabilidad de que haya que cambiarlo antes de 25 años?

Solución

Definimos la variable aleatoria continua
T: "El tiempo de vida en años de un cierto tipo de mascarpasos"
$T \rightsquigarrow Exp\left(\alpha = \dfrac{1}{16}\right)$

Por lo tanto

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$

$P(T \leq 20) = F(20) = 1 - e^{-\frac{20}{16}} \approx 0,7135$
La probabilidad de que a una persona a la que se le ha implantado este marcapasos se le deba reimplantar otro antes de 20 años es 0,7135.

$$P(T \leq 25 | T \geq 5) = \frac{P(5 \leq T \leq 25)}{P(T \geq 5)}$$

$P(5 \leq T \leq 25) = P(T \leq 25) - P(T \leq 5) = F(25) - F(5) = (1 - e^{-\frac{25}{16}}) - (1 - e^{-\frac{5}{16}}) = e^{-\frac{5}{16}} - e^{-\frac{25}{16}} = 0,522$

$P(T \geq 5) = 1 - P(T \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{16}}) = e^{-\frac{5}{16}} \approx 0,7316$

$$P(T \leq 25 | T \geq 5) = \frac{0,522}{0,7316} \approx 0,7135$$

Podemos ver que $P(T \leq 25 | T \geq 5) = P(T \leq 20 + 5 | T \geq 5) = P(T \leq 20)$, lo que verifica la propiedad de *falta de memoria*. O sea la probabilidad de tener que esperar un tiempo t no depende del tiempo que ya haya transcurrido.

$\boxed{\text{En realidad la propiedad de falta de memoria es P(T>25/T>5)=P(T>20)}}$

Ejercicio 3

La duración de un láser semiconductor a potencia constante tiene una distribución normal con media 7.000 horas y desviación típica de 600 horas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el láser falle antes de 5.000 horas?

b) ¿Cuál es la duración en horas excedida por el 95 % de los láseres?

c) Si se hace uso de tres láseres en un producto y se supone que fallan de manera independiente. ¿Cuál es la probabilidad de que tres sigan funcionando después de 7.000 horas?

Solución

Defenimos la variable aleatoria continua X dónde :

X : "Duración en horas de un láser semiconductor a potencia constante".

~~Rx = {0, 1, 2, ... , n, ...}~~

Atención: X es una variable aleatoria continua

Por enunciado sabemos que X $\sim$ N(7000,600^2), es decir que $\mu = 7000$ y $\sigma = 600$

a) $P(X < 5000) = P\left(\frac{X-7000}{600} < \frac{5000-7000}{600}\right) = \Phi(-3,33) = 0{,}0004$

b) Nos pide la duración para la cual fallan el 5% de los láseres por lo tanto :

$$0.05 = P(X < h) = P\left(\frac{X-7000}{600} < \frac{h-7000}{600}\right) = \Phi\left(\frac{h-7000}{600}\right) = \Phi(k)$$

$$\Phi(k) = 0,05 \Leftrightarrow k = -1,64 \Rightarrow \frac{h-7000}{600} = -1,64 \Rightarrow h = -1,65 \cdot 600 + 7000 = 6010$$

Por lo tanto la duración en horas excedida por el 95 % de los láseres es 6010

c) Comenzaremos el análisis buscando la probabilidad de que un láser siga funcionando despues de las 7000 horas :

P(X>7000) = 1 − P(X < 7000) = 1 − $P\left(\frac{X-7000}{600} < \frac{7000-7000}{600}\right)$ =1 − Φ(0) = 1 − 0,5 = 0,5

Como en nuestro producto se utilizan 3 láseres podemos análizar la situación como sigue :

Sean

$X1_t$ = ”El primer dura laser t horas”

$X2_t$ = ”El segundo laser dura t horas”

$X3_t$ = ”El tercer dura laser t horas”

Donde

$P(Xi_{7000})$ = 0,5 = $P(\overline{Xi_{7000}})$, con i $\in \{1,2,3\}$

Por lo tanto estamos en búsqueda de P($\overline{X1_{7000}} \cap \overline{X2_{7000}} \cap \overline{X3_{7000}}$) y como estos fallan de manera independiente tenemos que :

P($\overline{X1_{7000}} \cap \overline{X2_{7000}} \cap \overline{X3_{7000}}$) = P($\overline{X1_{7000}}$) $\cdot P(\overline{X2_{7000}}) \cdot P(\overline{X3_{7000}}) = 0,5^3 = 0,125$

Ejercicio 4

Sea que T_c denota la temperatura en grados centígrados (Celsius) a la que está expuesta una computadora en el campo. Suponga que T_c tiene distribución uniforme en el intervalo (15,21). Sea T_f la temperatura de campo en grados Fahrenheit, de modo que $T_f = \frac{9}{5}T_c + 32$. Calcule la función de densidad de probabilidad de T_f .

Solución

Como T_c es una variable aleatoria continua con distribución uniforme en el intervalo (15,21) sabemos que:

Atención: es conveniente indicar los rangos de variación de la variable

$$f_{T_C}(t_C) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } 15 \leq t_C \leq 21 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F_{T_C}(t_C) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_c < 15 \\ \frac{t_C - 15}{6} & \text{si } 15 \leq t_C \leq 21 \\ 1 & \text{si } t_c > 21 \end{cases}$$

Su fdp es f(x) $= \dfrac{1}{21-15} = \dfrac{1}{6}$

Su fda es F(x) $= \dfrac{x-15}{6}$

Prestar atención al nombre de las variables

Sea G la fda de T_f :

G(y)$=P(Y \leq y) = P(\frac{9}{5} \cdot X + 32 \leq y) = P(X \leq (y-32) \cdot \frac{5}{9}) = F((y-32) \cdot \frac{5}{9}) = \dfrac{(y-32) \cdot \frac{5}{9} - 21}{6}$

Por lo que podemos calcular la función de densidad de probabilidad g de T_f :

g(y) = G'(y) $= \frac{d}{dy}G(y) = \dfrac{5}{54}$

Escribir claramente la expresión de g(y)

Puesto que f(x) > 0 para $15 < x < 21$, encontramos que:

g(y) > 0 para $\frac{9}{5} \cdot (15) + 32 < y < \frac{9}{5} \cdot (21) + 32$

es decir g(y) > 0 para $59 < y < 69,8$