Examen Final - 21/08/2020

Apellido y Nombre: Legajo: Carrera:
Condición (Regular-Año / Libre):

****

1. Sea $\mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los pares ordenados de polinomios de grado a lo sumo dos, a coeficientes reales, con suma y producto habituales. Se define

$$\begin{array}{rccl}\Phi: & \mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & (p,q) & \longrightarrow & \Phi(p,q)=p(0)\,q(0)+2\,p(-1)\,q(-1).\end{array}$$

   Determinar si Φ es un producto interno.

2. Sea $H=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : a=2b=3c\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, con suma, producto por escalares y producto interno habituales de $\mathbb{R}^3$.
   a) Determinar una base ortonormal para $H^{\perp}$.
   b) Expresar el vector $v=(1,2,-1)$ como la suma de un vector $h\in H$ con un vector $p\in H^{\perp}$.

3. Sea A una matriz simétrica y ortogonal.
   a) Probar que $A^2=I$.
   b) Listar todos los posibles autovalores que puede tener A. Justificar.
   c) La siguiente matriz A es simétrica y ortogonal.

$$A=\begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}1 & -0{,}7\\ -0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}1 & -0{,}7\\ -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}98 & -0{,}14\\ -0{,}7 & -0{,}7 & -0{,}14 & 0{,}02\end{bmatrix}.$$

   Determinar los autovalores de A con su correspondiente multiplicidad algebraica y geométrica (No es necesario desarrollar el determinate de $A-\lambda I$, recordar que la traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores).

4. Sea n el número de páginas web en Internet. El *Rank Algorithm* de Google calcula un vector estocástico (entradas no negativas y que suman 1) $v^*\in\mathbb{R}^n$ cuyas componentes se usan para asignar un orden de importancia entre las mismas como respuestas a una búsqueda en la red. Dicho v^* es un autovector particular de una matriz asociada a las relaciones entre las páginas.

   Supongamos que $n=4$ y las páginas tienen los siguientes links:

   - Página 1: links a páginas 2 y 3
   - Página 2: link a página 3
   - Página 3: links a páginas 1, 2 y 4
   - Página 4: links a páginas 1 y 2

   a) ¿Cómo calcularía el vector v^*? Explique el procedimiento hasta el cálculo del autovector, no es necesario obtener v^*.
   b) ¿ Qué resultado teórico nos garantiza la buena definición (existencia y unicidad) de tal v^*? Justifique.
   c) Considerando que la página 2 es la que más links hacia ella tiene (3 links) ¿es de esperar que la componente v_2^* sea la mayor de la componentes de v^*? Justifique.

(Continúa en la página siguiente)

5. Sea A una matriz $n \times m$ con todas sus columnas l.i. y las matrices Q y R, una descomposición QR de A. Sean A^i y Q^i las columnas i-ésimas de A y Q, respectivamente, y W el espacio generado por A^1.

    a) Probar que $Q^1 \in W$.

    b) Probar $\{Q^i : 2 \leq i \leq m\}$ definen una base ortonormal de $W^{\perp}$. (Ayuda: observar que $Q^T A = R$).

6. Sean dadas A y U, dos matrices $n \times n$ tales que U es unitaria y diagonaliza a A.

    a) ¿Cuál es la forma más sencilla de calcular los autovalores de A? ¿Cuál es la mínima cantidad de autovalores diferentes que puede tener A?

    b) Una vez calculados los autovalores, ¿cómo calcularía A^6? Justifique.

    c) ¿Es A^{23} diagonalizable por una matriz unitaria? Justifique.