

Práctica: CAPÍTULO 3 - ORTOGONALIDAD (segunda parte)

Cuando no se especifica lo contrario, el producto interno en \mathbb{R}^n es $x^T y$ y el espacio vectorial \mathbb{R}^n se considera con suma y producto por escalares habituales.

1. En cada uno de los siguientes casos, considerar a L como el subespacio de \mathbb{R}^3 tal que $L = \langle a \rangle$. Calcular $\text{proy}_{s/L} b$ y comprobar que el vector $b - \text{proy}_{s/L} b$ es perpendicular al vector a .

$$a) \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$b) \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } a = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Sea W un subespacio vectorial de V y $\{w^1, \dots, w^p\}$ base ortogonal de W . Sea $v \in V - W$, probar que $v - \text{proy}_{s/W} v$ es perpendicular a w para todo $w \in W$.
3. Sea W un subespacio de \mathbb{R}^n con una base ortogonal $\{w^1, \dots, w^p\}$ y sea $\{v^1, \dots, v^q\}$ una base ortogonal de W^\perp .
 - a) Explicar por qué $\{w^1, \dots, w^p, v^1, \dots, v^q\}$ es un conjunto ortogonal.
 - b) Explicar por qué el conjunto definido en el ítem anterior genera \mathbb{R}^n .
Sugerencia: Utilizar el ejercicio anterior.
 - c) Demostrar que $\dim W + \dim W^\perp = n$.
4.
 - a) Sean $v^1 = (2, 1), v^2 = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt y encontrar una base ortogonal $\{w^1, w^2\}$ en \mathbb{R}^2 . Dibujar los vectores v^1, v^2, w^1 y w^2 .
 - b) Sean $v^1 = (1, 0, 0), v^2 = (1, 1, 1), v^3 = (1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt y encontrar una base ortogonal $\{w^1, w^2, w^3\}$ en \mathbb{R}^3 . Dibujar los vectores v^1, v^2, v^3, w^1, w^2 y w^3 .
5.
 - a) Encontrar un conjunto ortonormal q^1, q^2, q^3 para el cual q^1 y q^2 generan el espacio columna de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

- b) ¿Cuál es el espacio asociado a A que contiene a q^3 ?

$$6. \text{ Sea } W \text{ el subespacio de } \mathbb{R}^4 \text{ generado por } v^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } v^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- a) Si $y = (3, 1, 5, 1)^T$, escribirlo como la suma de un vector en W y uno en W^\perp .
 - b) Si $y = (3, -1, 1, 13)^T$, encontrar el punto más cercano a y en W .
7. Sea V el subespacio de \mathbb{R}^4 generado por los vectores $v^1 = (1, -1, 0, 0)^T$ y $v^2 = (0, 1, -1, 0)^T$.
 - a) Hallar una base ortonormal para V .
 - b) Hallar una base para V^\perp .
 - c) Extender la base hallada en a) a una base ortonormal de \mathbb{R}^4 .
 8. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Probar que $Ax = b$ es un sistema inconsistente.
 b) Encontrar las ecuaciones normales asociadas al sistema.
 c) Encontrar \hat{x} , la solución que minimiza el error $\|b - Ax\|$.
 d) Calcular el error.
 e) Encontrar \tilde{b} , la proyección de b sobre el espacio columna de A .
9. Sea A una matriz de tamaño $n \times k$ con columnas l.i.. Probar que $A^T A$ es invertible.
10. Sea A una matriz de tamaño $n \times k$ con columnas l.i. y P la matriz de proyección sobre $C(A)$. Probar que P es simétrica e idempotente (i.e $P^2 = P$ y $P^T = P$). Recíprocamente, probar que toda matriz simétrica e idempotente es una matriz de proyección.

Ayuda: Para probar la recíproca, probar que Pb es la proyección de b sobre $C(P)$.

11. Sean $u^1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$, $u^2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$ y $U = [u^1 u^2]$.
- a) Calcular $U^T U$ y $U U^T$.
 b) Sean $y = (4, 8, 1)^T$ y $W = C(U)$. Calcular $proy_{s/W}$ y $(U U^T)y$.
12. a) Hallar una base ortogonal para el subespacio S de \mathbb{R}^4 generado por todas las soluciones de:

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

- b) Calcular una base para S^\perp .
 c) Encontrar $u \in S$ y $v \in S^\perp$ tales que $u + v = w = (1, 1, 1, 1)^T$.

13. Sean

$$u^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- a) Hallar la matriz de proyección sobre el espacio $W = \langle \{u^1, u^2\} \rangle$.
 b) Calcular la proyección de b sobre W^\perp .
 c) Hallar la matriz de proyección sobre el espacio W^\perp .
14. Hallar la matriz de proyección sobre el plano $2x + y - z = 0$ de \mathbb{R}^3 .
15. Determinar los valores a, b, \dots, f de manera que las siguientes matrices sean ortogonales.

a)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & c \end{bmatrix}.$$

b)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & d \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

16. a) Encontrar c, x_1, x_2, x_3 y x_4 de modo que la matriz

$$Q = c \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & x_1 \\ -1 & 1 & -1 & x_2 \\ -1 & -1 & -1 & x_3 \\ -1 & -1 & 1 & x_4 \end{bmatrix}$$

sea ortogonal.

- b) Obtener la proyección del vector $b = (1, 1, 1, 1)^T$ sobre el espacio generado por la primera columna de Q . Luego proyectar b sobre el espacio generado por las dos primeras columnas de Q .

17. Sea A una matriz de columnas l.i. y tamaño $k \times n$. Sea Q la matriz que se obtiene ortonormalizando las columnas de A .

a) Probar que $R = Q^T A$ es triangular superior inversible.

b) Probar que $A = QR$.

18. a) ¿Qué múltiplo de $a^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ debe restarse a $a^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ para que el resultado sea ortogonal a a^1 ?

b) Encontrar una factorización QR de $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

19. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar una factorización QR de A .

20. Sea Q una matriz ortogonal $n \times n$. Probar que:

a) $Q^T = Q^{-1}$.

b) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Qx\| = \|x\|$.

21. Sean $V = \mathcal{C}([-1, 1])$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$, $B = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ donde $p_j : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}/p_j(x) = x^j, j = 0, 1, 2, 3$ y $W = \langle B \rangle$.

a) Aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt y obtener una base ortogonal B' de W .

b) Sea $f \in V$ tal que $f(x) = \sin(x)$ para todo $x \in [-1, 1]$. Obtener $\text{proy}_{s/W} f$.

Ayuda: Evitar el cálculo de las integrales usando las siguientes identidades:

$$\int_{-1}^1 \sin(x) dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 x \sin(x) dx = 2 \sin(1) - 2 \cos(1) \left(\simeq \frac{3}{5} \right)$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sin(x) dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 x^3 \sin(x) dx = 10 \cos(1) - 6 \sin(1) \left(\simeq \frac{1}{3} \right)$$

c) ¿Cuál es la recta más próxima a la parábola $y = x^2$?

Ayuda: Considerar $Z = \langle \{p_0, p_1\} \rangle$ el conjunto de rectas y $f \in V$ tal que $f(x) = x^2$.