CAPÍTULO 2: ESPACIOS VECTORIALES (2DA. PARTE).

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Outline

1. Resolviendo sistemas de ecuaciones lineales
2. Matrices Escalonadas
3. Espacio Nulo de matrices escalonadas reducidas
4. Espacio Nulo de una matriz arbitraria
5. Resolviendo $Ax = b$

Dada una matriz A, $m \times n$, nuestro objetivo es describir el conjunto $\mathscr{S}$ de *todas las soluciones del sistema* $Ax = b$.

Recordemos:

- *Espacio columna de* A: subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columna de A. Lo notamos $C(A)$.
- *Espacio nulo de* A: subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

¿Qué relación tienen estos espacios vectoriales con el conjunto $\mathscr{S}$ de soluciones de un sistema de ecuaciones $Ax = b$?

Sabemos:

- $\mathscr{S} \neq \emptyset$ si y solo si $b \in C(A)$. (Justificar)
- Si A es $n \times n$ y no singular, $C(A) = \mathbb{R}^n$, $N(A) = \{\mathbf{0}\}$ y, para todo $b \in \mathbb{R}^n$, $\mathscr{S}$ tiene un único elemento i.e. $\mathscr{S} = \{A^{-1}b\}$.

El siguiente resultado será fundamental para poder describir el conjunto $\mathscr{S}$.

Teorema: Sea A una matriz $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Sea $\mathscr{S}$ el conjunto de soluciones del sistema $Ax = b$. Entonces:

1. $\mathscr{S} = \emptyset$ si y solo si $b \notin C(A)$.
2. Sea $b \in C(A)$ y $x_P \in \mathscr{S}$. Entonces, $\mathscr{S} = \{x_P + x_N : x_N \in N(A)\}$.

Prueba:

1. Se deduce de la propia definición de $C(A)$, el espacio columna de A.
2. Probemos primero que $\{x_P + x_N : x_N \in N(A)\} \subseteq \mathscr{S}$.
   Sea $x_N \in N(A)$. Debemos probar que $x_P + x_N \in \mathscr{S}$, i.e. $A(x_P + x_N) = b$.
   En efecto,
   $$Ax = A(x_P + x_N) = Ax_P + Ax_N = b + 0 = b.$$
   Probemos ahora que $\mathscr{S} \subseteq \{x_P + x_N : x_N \in N(A)\}$.
   Sea $x \in \mathscr{S}$ y definamos $x_N = x - x_P$. Debemos probar que $x_N \in N(A)$, i.e. $Ax_N = 0$. En efecto, $A(x - x_P) = Ax - Ax_P = b - b = 0$. $\square$

Ejercicio: Sean $x_1 \neq x_2$ dos soluciones del sistema $Ax = b$.

1. Encontrar dos vectores no nulos en $N(A)$.
2. Encontrar una tercer solución del sistema $Ax = b$.

Solución:

1. Sabemos que cualquier solución del sistema $Ax = b$ se puede expresar como una solución particular más un elemento de $N(A)$. Como x_1 es una solución particular y x_2 también es solución del sistema, existe $x_N \in N(A)$ tal que $x_2 = x_1 + x_N$. Entonces, $x_N = x_2 - x_1 \neq 0$ y $x_N \in N(A)$. Como $N(A)$ es un espacio vectorial, $7x_N \in N(A)$ y $7x_N \neq x_N$.
2. Para obtener soluciones del sistema, debemos sumar una solución particular con un elemento de $N(A)$. Por ejemplo, tomando x_1 como solución particular y $7x_N = 7(x_2 - x_1) \in N(A)$, obtenenos $x_3 = x_2 + 7x_N = 8x_2 - 7x_1$ solución del sistema.

El teorema anterior nos dice que para describir el conjunto $\mathscr{S}$ de soluciones del sistema $Ax = b$, debemos:

- describir $N(A)$, el espacio nulo de A, y
- conocer una solución particular x_P del mismo o decidir que no existe tal solución. Para esto, debemos decidir si $b \in C(A)$ o no.

Conclusión: resolver sistemas lineales con A matriz de coeficientes es *casi equivalente* a conocer los espacios columna y nulo de A.

Empecemos con el espacio nulo...

Habíamos comentado que el espacio nulo de una matriz $m \times n$ (subespacio de $\mathbb{R}^n$) podría tener cualquier *dimensión* entre 0 (A matriz no singular) y n (A matriz nula). Hacia ese punto nos dirigimos.

Empezaremos analizando casos correspondientes a matrices A con una cierta estructura.

$$A = \begin{bmatrix} \odot & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \odot & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \odot & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \odot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} m = 5,\ n = 8,\ m^* = 4 \\ j(1) = 1,\ j(2) = 2 \\ j(3) = 4,\ j(4) = 8 \end{array}$$

Definición: Una matriz A no nula $m \times n$ y $m^* = \max\{i \in \{1, \ldots, m\} : A_i \neq 0\}$.
A es una *matriz escalonada* si verifica las siguientes condiciones:

1. $A_j \neq 0$ para todo j tal que $1 \leq j \leq m^*$. (*las filas nulas están todas al final*).
2. Si para $i = 1, \ldots, m^*$ definimos $j(i) = \min\{k \in \{1, \ldots, n\} : A_i^k \neq 0\}$ entonces $j(i) < j(i+1)$ para todo i tal que $1 \leq i \leq m^* - 1$. ($A_i^{j(i)}$ *pivot de fila i*)

Observar que para todo $k > i$, $A_k^{j(i)} = 0$ (*las entradas debajo del pivot son nulas*).

$$A = \begin{bmatrix} \odot & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \odot & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \odot & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \odot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $i = 1, \ldots m^*$, a las filas A_i se las denomina *filas pivots* de A, a las entradas (no nulas) $(i, j(i))$, *pivots* de A y a las columnas $A^{j(i)}$, *columnas pivots* de A.

A_1, A_2, A_3 y A_4 son filas pivots y A^1, A^2, A^4 y A^8 son columnas pivots.

Ejercicio: Si A es una matriz escalonada cuadrada y no singular entonces A es una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal.

Comentario: No es difícil ver que aplicando el Método de Eliminación de Gauss podemos llevar a toda matriz $m \times n$ a su forma escalonada.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1. Primer pivot: columna 1, fila 1. Ceros debajo del primer pivot ✓
2. Segundo pivot:
   - columna pivot? Primer columna a la derecha de la columna pivot anterior con alguna entrada no nula en las filas abajo de la fila pivot anterior $\rightarrow$ Columna 3.
   - fila pivot? Podríamos elegir cualquier fila (de la 2 en adelante) con entrada no nula en la columna pivot (filas 4 o 5).
     Convenio: Si la fila i tiene entrada no nula en la columna pivot i la elegimos como fila pivot. Si no, elegimos siempre la fila más abajo con entrada no nula en la columna pivot. $\rightarrow$ Fila 5.
   - Ceros abajo del pivot? Antes debemos permutar la fila 5 con la fila 2.

$$A = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \color{red}{3} & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{25}\times} \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \color{red}{3} & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \color{red}{3} & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(3) Pivot 3: primer columna posterior a la del pivot anterior con entradas no nulas debajo de la fila pivot anterior $\rightarrow$ columna 4. Como la entrada de la fila 3 es no nula en la columna pivot, esa es la fila pivot.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Otro Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 9 & 8 \\ -1 & -3 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\textit{pivot 1}=A_1^1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Columna pivot 2: primer columna a la derecha de la columna del pivot 1, con entradas no nulas en filas debajo de la fila pivot 1 $\longrightarrow$ columna 3.
Fila pivot 2: Como $A_2^3 = 0$, podríamos elegir fila 3 o 4. Por convenio elegimos *la de más abajo*.

¿Por qué lo elegimos así?

La fila 2 es una fila nula y recordemos que en una matriz escalonada las filas nulas deben ir todas al final. Eligida la fila pivot, la fila 2 (fila nula) va a ser permutada con esta fila pivot. Permutándola con la *fila más abajo* hará que aparezca menos veces como candidata a fila pivot y debamos permutarla otra vez.

Fila pivot 2 $\longrightarrow$ fila 4.
Aplicamos la permutación P_{24}.

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{24}\times} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

Hacemos los ceros debajo del pivot 2 ($A'_{23} = 6$) y obtenemos:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz escalonada con $m^* = 2$, U^1 y U^3 columnas pivots, U_1 y U_2 filas pivots.

Uno más:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Columna pivot 1: primer columna no nula $\rightarrow$ columna 2.
Fila pivot 1: como la entrada de la fila 1 de la columna pivot $A_1^2 = 1$ es no nula $\rightarrow$ fila 1.
Con A_1^2 como pivot, hacemos los ceros debajo de él y obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

matriz escalonada, con una sola columna y una sola fila pivots.

Regla General :

1. *Columna pivot* $i+1$: primer columna a la derecha de la columna del pivot i con entradas no nulas en alguna fila por debajo de la fila i.
2. *Fila pivot* $i+1$: fila $i+1$, si la entrada $i+1$ de la columna pivot $i+1$ es no nula. Caso contrario, última fila con entrada no nula en la columna pivot $i+1$.
3. Si la fila pivot $i+1$ es la fila j con $j > i+1$, permutar fila $i+1$ con fila j.

Gauss nos permite extender el resultado sobre factorización LU que teníamos para matrices cuadradas no singulares:

Teorema: Sea A matriz $m \times n$. Entonces, existen P matriz de permutación, L matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y U matriz escalonada tales que $PA = LU$.

Para resolver el sistema $Ax = b$, encontrada la matriz escalonada U, seguiremos operando con matrices elementales de manera de llegar a una matriz *escalonada reducida*.

Definición: Una matriz R es *escalonada reducida* si R es escalonada con todos los pivots iguales a 1 y todas sus entradas por encima de los pivots son nulas.

Veamos el esquema de una matriz escalonada reducida:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tal como hicimos con Gauus-Jordan, cualquier matriz escalonada puede transformarse, vía matrices elementales, en una matriz escalonada reducida.

Ejemplo:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Primero debemos hacer los ceros por arriba de los pivots. En este caso sólo en el segundo pivot. Obtenemos:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener los 1's en los pivots, dividimos cada fila por su pivots (equivalentemente, pre-multiplicamos por una matriz diagonal).

Obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Recordemos que queremos describir $N(A)$, para toda A, ya que juega un papel fundamental en la descripción del conjunto $\mathscr{S}$ de soluciones de un sistema $Ax = b$. ¿Qué relación hay entre $N(A)$ y $N(R)$, si R es la matriz escalonada reducida que llegamos aplicando eliminación gaussiana a partir de A?

Ejercicio:

- Sea A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times n$ no singular. Entonces, $N(BA) = N(A)$.
- Sea R la matriz escalonada reducida que se obtiene a partir de A vía eliminación gaussiana. Entonces, $N(A) = N(R)$.

Consideremos el sistema $Rx = 0$, con R una matriz escalonada reducida:

$$Rx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8]^T = 0.$$

Las variables correspondientes a las columnas pivots se denominan *variables pivots* y las restantes, *variables libres*.

Por cada valor arbitrario que le asignemos a las variables libres obtendremos una solución del sistema donde los valores de las variables pivots quedan unívocamente definidas.

En nuestro ejemplo, teníamos:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí las variables pivots son x_1 y x_3 mientras que las x_2, x_4 y x_5 son libres.

Las filas nulas corresponden a ecuaciones del tipo $0x = 0$ y podemos descartarlas.
Si asignamos valores arbitrarios a las libres, por ejemplo, $x_2 = t$, $x_4 = s$ y $x_5 = w$, las variables pivots x_1 y x_3 deben satisfacer las dos primeras ecuaciones. Tenemos entonces:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 + & 3t & - & s - & 2w = 0 \\ & & x_3 + & s + & \frac{4}{3}w = 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rl} x_1 = & -3t + s + 2w \\ x_3 = & -s - \frac{4}{3}w \end{array}$$

O sea, las soluciones del sistema $Rx = 0$ son de la forma

$$x = \begin{bmatrix} -3t+s+2w \\ t \\ -s-\frac{4}{3}w \\ s \\ w \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ con } t,s,w \in \mathbb{R}.$$

Observar que $N(R)$ es el espacio generado por los vectores

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Estos tres vectores son las *soluciones especiales del sistema* $Rx = 0$.

Tenemos una *solución especial* por cada variable libre.

Resumiendo, con

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$N(R)$ es el espacio generado por las soluciones especiales, las cuales se obtienen fijando cada variable libre en 1 y las restantes en cero:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observar que los valores de las variables pivots en la solución especial asociada a una variable libre son los opuestos de las entradas de la columna de R asociada a la varible libre, en las filas pivots.

Llamamos N a la matriz cuyas columnas son las soluciones especiales de $Rx = 0$. O sea,

$$N = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observación: N es única salvo permitación de columnas. En general, si las variables están ordenadas por algún índice, usamos el orden de columnas correspondiente al orden en las variables libres.

Como vimos, toda matriz A puede transformarse en una matriz R escalonada reducida vía operaciones elementales y permutaciones, de manera que $N(A)$, el conjunto de soluciones del sistema $Ax = 0$, coincide con el conjunto de soluciones del sistema $Rx = 0$.

Para describir $N(A)$, cualquiera sea A, seguimos los siguientes pasos:

1. Encontramos R e identificamos variables libres y variables pivots.
2. Para cada variable libre, encontramos la solución del sistema donde esa variable libre vale 1 y las restantes libres valen 0.
3. El espacio $N(A)$ es el espacio generado por las soluciones especiales encontradas en el ítem anterior.

Lema: Si A es una matriz $m \times n$ con $m < n$, entonces $N(A) \neq \{0\}$.

Prueba: Si R es la forma escalonada reducida de A, el sistema $Rx = 0$ tiene a lo sumo m variables pivots (a lo sumo, una for fila). Como $m < n$, el sistema tiene al menos una variable libre, con su correspondiente solución especial, no nula. $\square$

Por lo observado anteriormente, siempre que $m < n$, el sistema $Ax = 0$ (o equivalentemente el espacio $N(A)$) tiene soluciones distintas de la trivial ($x = 0$).

Más aún, si $m < n$, $N(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, cuya *dimensión* coincide con el número de variables libres (si hay sólo una, será una recta en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo).

Esta idea de *dimensión* de los subespacios la veremos más adelante. Pero es importante ir recordando:

1. La *dimensión* del espacio nulo coincide con el número de variables libres.
2. Veremos que la *dimensión* del espacio columna coincide con el número de variables pivots.

Antes terminemos de resolver los sistemas $Ax = b$, con b cualquier vector.

Habíamos visto que el conjunto $\mathscr{S}$ de soluciones del sistema $Ax = b$ se podía describir a partir de una solución particular del mismo más cualquier elemento de $N(A)$. Ya vimos cómo describir todos los elementos de $N(A)$, nos falta saber cómo encontrar una solución particular de $Ax = b$.

Esta solución particular puede encontrarse fácilmente si aplicamos al lado derecho b las mismas operaciones que aplicamos para llevar A a su forma escalonada U o a su forma escalonada reducida R. Luego, eligiendo cualquier valor de las variables libres, obtenemos la solución particular (si la hubiera). Por supuesto, la solución particular más sencilla de obtener será la que corresponde a poner las variables libres en 0.

En nuestro ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 9 & 8 \\ -1 & -3 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

fue transformada vía operaciones elementales y permutaciones a su forma escalonada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si estamos resolviendo el sistema $Ax = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$ y aplicamos a b las mismas operaciones, obtenemos el sistema equivalente:

(continuación)

$$Ux = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_4 \\ b_3 - \frac{5}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_4 \\ b_2 - 2b_1 \end{bmatrix} = b'$$

Las dos últimas ecuaciones de este sistema son:

$$0 = b_3 - \tfrac{5}{2}b_1 - \tfrac{1}{2}b_4 \quad \text{y} \quad 0 = b_2 - 2b_1.$$

Por lo tanto, el sistema tendrá solución si y solo si nuestro vector lado derecho b verifica estas ecuaciones. Equivalentemente, $b \in C(A)$ si y solo si $b_3 - \frac{5}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_4 = 0$ y $b_2 - 2b_1 = 0$.

Si $b \in C(A)$, las dos últimas ecuaciones del sistema $Ux = b'$ se satisfacen y nos queda sólo resolver:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= b_1 \\ 6x_3 + 6x_4 + 8x_5 &= b_1 + b_4 \end{aligned}$$

(continuación)
Nos queda sólo resolver:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= b_1 \\ 6x_3 + 6x_4 + 8x_5 &= b_1 + b_4, \end{aligned}$$

donde x_1 y x_3 son variables pivots y las restantes son variables libres.

Estamos buscando una solución particular del sistema, asignemos un valor arbitrario a las variables libres... lo más sencillo es asignarle el valor cero.

Resolvemos con $b = (0,0,1,2) \in C(A)$. Tenemos entonces:
$x_2 = x_4 = x_5 = 0$ y

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= b_1 = 0 \\ 6x_3 &= b_1 + b_4 = 2. \end{aligned}$$

Lelgamos a un sistema triangular superior sin ceros en la diagonal: resolvemos por sustitución para atrás.

La solución particular del sistema es $x_P = (-1, 0, \frac{1}{3}, 0, 0)$.

Tenemos entonces que el conjunto $\mathscr{S}$ de soluciones del sistema $Ax = b$ está descripto por los x's tales que $x = x_P + x_N$, donde x_P es la solución particular encontrada y x_N es cualquier vector en $N(A)$. Por lo visto anteriormente, los elementos de $\mathscr{S}$ son los $x \in \mathbb{R}^5$ tales que

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

con $t, s, w \in \mathbb{R}$.

Observación: El espacio $\mathscr{S}$ es un espacio 3-dimensional en $\mathbb{R}^5$, pero no es un subespacio vectorial (no contiene $x = 0$). Es paralelo al espacio nulo de la matriz de coeficientes, desplazado por una solución particular.

Presentamos un concepto que será fundamental en todo lo que sigue.

Definición: El *rango* de una matriz es el número de pivots en su forma escalonada.

Ejemplos:
¿Cuál es el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}?$$

Vimos que su forma escalonada era

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, hay una sola fila y columna pivots y el rango de A es 1.

Ejercicio: A es una matriz $m \times n$ de rango 1 si y solo si existen $0 \neq u \in \mathbb{R}^m$ y $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ tal que $A = u^T v$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix}, \quad Ax = b$$

- Reducir $[A, b]$ (hasta $Ux = c$, U escalonada).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix} = [U, c]$$

x_2, x_4: variables libres $\qquad$ x_1, x_3: variables pivots.

- Describir $C(A)$.
  Sabemos que $b \in C(A)$ si $Ax = b$ tienen solución. O, equivalentemente, si $Ux = c$ tiene solución. Por lo tanto,

$$C(A) = \{b \in \mathbb{R}^3 : b_3 + b_2 - 5b_1 = 0\}.$$

Observemos que $C(A)$ es un plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

- (continuación)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix} = [U, c]$$

Por definición, $C(A)$ es el espacio generado por los (4) vectores columna de A. Como sabemos que $C(A)$ es un espacio de dimensión 2, no necesitamos los 4 vectores columna de A para generarlo. ¿Qué dos vectores columna de A generan a $C(A)$?. Observemos que $A^2 = 2A^1$ y $A^4 = 2A^1 + A^3$. Por lo tanto, A^2 y A^4 no generan nungún vector diferente a los que generan A^1 y A^3 y resulta $C(A) = \langle A^1, A^3 \rangle$. Observemos que A^1 y A^3 son las columnas pivots.

Probaremos más adelante que, para toda matriz A, $C(A)$ es el espacio generado por las columnas pivots ¡de A, no de R!. Por ahora lo aceptamos como resultado válido.

(continuación)

- Describir $N(A)$.

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccl} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{array}\right] = [U, c]$$

Las soluciones especiales corresponden a las soluciones de $Rx = 0$ correspondientes a ($x_2 = 1,\ x_4 = 0$) y a ($x_2 = 0,\ x_4 = 1$). Así:

$$N = \left[\begin{array}{rr} -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right].$$

- Describir $N(A)$ (continuación).

$$N = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que los valores de x_1 y x_3 correspondientes a estas soluciones especiales las podemos encontrar también en la forma reducida de A (o de U).

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

(continuación)

- Resolver el sistema $Ax=b$ para $b=(0,-6,6)$.

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1=0 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2=-6 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3=6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1=0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2-2b_1=-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3+b_2-5b_1=0 \end{array}\right]$$

Debemos obtener una solución particular x^P del sistema. Fijamos las libres en cero.
$x_2^P=x_4^P=0 \Longrightarrow x_1^P+3x_3^P=0,\ 2x_3^P=-6 \Longrightarrow x_1^P=9,\ x_3^P=-3$. Así una solución general del sistema es:

$$x=\left[\begin{array}{c} 9 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{array}\right]+t\left[\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]+s\left[\begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{array}\right];s,t\in\mathbb{R}.$$

Pensemos ahora en sentido contrario: debemos encontrar una matriz 2×3 y $b \in \mathbb{R}^2$ tales que el conjunto solución del sistema $Ax = b$ se describe por

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Lo más sencillo es pensar en una matriz A que sea escalonada reducida.
¿Cuántos pivots debe tener?
De acuerdo a la descripción de las soluciones del sistema, hay sólo una variable libre. Por lo tanto, debe tener dos pivots. Tenemos entonces que A tendrá la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}.$$

(continuación)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & r \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ es la solución especial de $Ax = 0$ correspondiente a fijar la variable libre x_3 en 1 y como A es escalonada reducida, los valores de las variables pivots en esta solución están en la columna correspondente a la variable libre, con signos opuestos. Por lo tanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Finamente, para conocer el lado derecho b, como $x^P = (1, 2, 0)^T$ es una solución particular del sistema tenemos que $b = Ax^P = (1, 2)$.

Sean A una matriz $m \times n$ de rango r, $b \in \mathbb{R}^m$, x_P una solución particular del sistema $Ax = b$ y N la matriz $n \times (n-r)$ correspondiente a todas las soluciones especiales de $N(A)$.
Encontrar una solución particular y todas las soluciones especiales de los siguientes sistemas:

1. $Ax = 2b$
   La matriz de coeficientes se mantiene y por lo tanto, tenemos el mismo espacio nulo y la misma matriz N de soluciones especiales. Sólo debemos encontrar una solución particular. Es fácil chequear que $2x_P$ es solución particular de este sistema.

2. $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}$

   Como $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} Ax \\ Ax \end{bmatrix}$ una solución particular es $\begin{bmatrix} x_P \\ x_P \end{bmatrix}$.

2 (continuación)
Veamos quién es la matriz de soluciones especiales del espacio nulo.

En este caso debemos convencernos que si R es la matriz escalonada reducida que se obtiene a partir de A, entonces $\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ es la matriz escalonada reducida que se obtiene a partir de $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ (Ejercicio).

Entonces, el rango es r y las variables libres son las mismas que en el sistema $Ax = b$. Por lo tanto N es la matriz de soluciones especiales también para este caso.