Práctica: CAPÍTULO 2 - ESPACIOS VECTORIALES (*segunda parte*)

1. Decidir en cada caso si b está en el subespacio generado por los correspondientes w_i.

   a) $w_1 = (1,1,0)$, $w_2 = (2,2,1)$, $w_3 = (0,0,2)$ y $b = (3,4,5)$.

   b) $w_1 = (1,2,0)$, $w_2 = (2,5,0)$, $w_3 = (0,0,2)$, $w_4 = (0,0,0)$ y b cualquiera.

2. Reducir A y B a su forma escalonada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

   Luego:

   a) Encontrar el rango de cada una de las matrices. ¿Cuáles son las variables libres en cada caso?

   b) Hallar los vectores que generan $N(A)$ y $N(B)$.

3. Si A es una matriz escalonada cuadrada y no singular entonces A es una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal.

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Consideramos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

   a) Hallar la forma escalonada U de A, las variables libres y los vectores que generan $N(A)$.

   b) Describir una solución general del sistema $Ax = b$.

6. *a*) Describir las condiciones sobre b para que el siguiente sistema tenga solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

   b) Determinar el rango de la matriz y una solución particular del sistema.

7. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) Sea A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times n$ no singular. Entonces, $N(BA) = N(A)$.

   b) Sea R la matriz escalonada reducida que se obtiene a partir de A vía eliminación gaussiana. Entonces, $N(A) = N(R)$.

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

   a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

   b) $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$, donde A es la matriz dada en a).

   c) $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$, donde A es la matriz dada en a).

9. Sea A matriz $m \times n$. Probar que si A tiene r columnas pivots, entonces A^T tiene r columnas pivot.

10. ¿Cuáles son las soluciones especiales de $Rx = 0$ y $R^T y = 0$ para las siguentes matrices R?

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Explicar por qué las filas y columnas pivots de A simpre proporcionan una submatriz invertible de A de tamaño $r \times r$.

12. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

se pide:

a) Reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$ para obtener un sistema triangular $Ux = c$.

b) Encontrar condiciones sobre b_1, b_2 y b_3 para que el sistema tenga solución.

c) Describir el espacio columna de A. ¿Cuál es el plano de $\mathbb{R}^3$ que representa el espacio columna $C(A)$?

d) Describir el espacio nulo de A. ¿Cuál es la matriz de soluciones especiales?

e) Encontrar una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la solución completa $x = x_P + x_N$.

13. Calcular el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} I & I & I \end{bmatrix}.$$

14. La ecuación $x - 3y - z = 0$ determina un plano en $\mathbb{R}^3$.

a) ¿Cuál es la matriz A asociada a esta ecuación?

b) ¿Cuáles son las variables libres?

c) Una de las soluciones especiales es $(3, 1, 0)$, ¿cuál es la otra?

d) El plano $x - 3y - z = 12$, paralelo al plano dado, contiene al punto particular $(12, 0, 0)$. Escribir la componente que falta para describir la forma que tienen los puntos en este plano:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

15. Construir una matriz cuyo espacio columna contenga a $(1, 1, 5)$ y a $(0, 3, 1)$ y cuyo espacio nulo contenga a $(1, 1, 2)$.

16. *a*) Encontrar una matriz de tamaño 1×3 cuyo espacio nulo conste de todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$.

b) Hallar una matriz de tamaño 3×3 con el mismo espacio nulo considerado en a).

17. Probar que un vector fila no nulo de una matriz no puede pertenecer a su espacio nulo.

18. Sean A y B matrices tales que $AB = 0$. Demostrar que el espacio columna de B está contenido en el espacio nulo de A.

19. Sea A una matriz $m \times n$. Probar que A es de rango 1 si y solo si existen $0 \neq u \in \mathbb{R}^m$ y $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ tal que $A = uv^T$.

20. *a*) Verificar que las siguientes matrices son de rango 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1,5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & bc \end{bmatrix}.$$

b) Calcular el rango de AB y de AM.

21. Dados a, b, c con $a \neq 0$, ¿cómo debe elegirse d para que A tenga rango 1?. Con esta elección, factorizar a A en uv^T donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

22. Dar en cada caso una matriz que cumpla con las condiciones dadas o justificar por qué no existe:

a) Su espacio columna está generado por los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y su espacio fila está generado por $(1, 1)$ y $(1, 2)$.

b) Su espacio columna tiene a $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ pero no a $(1, 1, 1)$.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Describir las soluciones completas de la forma $x = x_P + x_N$ de los siguientes sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

a) ¿Cuáles son las condiciones que deben satisfacer b_1 y b_2 (en caso de existir alguna) para que $Ax = b$ tenga solución?

b) Encontrar dos vectores en el espacio nulo de A y la solución completa de $Ax = b$.

3. Hallar la forma reducida y las soluciones especiales del espacio nulo de las siguientes matrices, siendo $c \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & c & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1-c & 2 \\ 0 & 2-c \end{bmatrix}.$$

4. Sea $Ax = b$ un sistema con infinitas soluciones. Responder

a) ¿Por qué es imposible que el sistema $Ax = \overline{b}$ tenga una única solución?

b) ¿Es posible que el sistema $Ax = \overline{b}$ no tenga solución?

5. Construir una matriz cuyo espacio columna contenga a $(1, 1, 1)$ y cuyo espacio nulo es la recta de múltiplos de $(1, 1, 1, 1)$.

6. Sean A y B matrices de tamaño $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente y denotamos por $rg(M)$ el rango de la matriz M. Probar que:

a) $rg(AB) \leq rg(A)$ y $rg(AB) \leq rg(B)$.

b) Si $m = n = p$ y $AB = I$, entonces $rg(A) = n$ y B resulta la inversa de A.

7. Sean A y C de tamaños 2×3 y 3×2, respectivamente. Probar que $CA \neq I$ y dar un ejemplo que verifique $AC = I$. Para $m < n$, una matriz inversa a derecha no es inversa a izquierda.