

Contents

1	Variables aleatorias bidimensionales o de mayor dimension	1
1.1	Variables aleatorias bidimensionales	1
1.2	Distribucion de probabilidades marginales y condicionales	3
1.2.1	Probabilidad Condicional	4
1.3	Variables aleatorias independientes	5
1.4	Funciones de una variable aleatoria	6
1.4.1	Esperanza matematica	7
1.4.2	Varianza	8
1.5	Coefficiente de correlacion	9

Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Unidad 6

Autor del resumen:

DEMAGISTRIS, Santiago Ignacio

Julio 2020

1 Variables aleatorias bidimensionales o de mayor dimension

1.1 Variables aleatorias bidimensionales

En nuestro estudio de las variables aleatorias hemos considerado, hasta aquí, sólo el caso unidimensional. Es decir, el resultado del experimento se podía registrar como un solo número x . En muchos casos, sin embargo, nos interesa observar simultáneamente dos o mas características numéricas. Por ejemplo, podríamos observar la cantidad de lluvia total, LL , y el promedio de temperatura, T , en cierta región durante un mes específico, que daría lugar al resultado (ll, t) .

Definición. Sea ϵ un experimento y S un espacio muestral asociado con ϵ . Sean $X = X(s)$ y $Y = Y(s)$ dos funciones que asignan un número real a cada uno de los resultados $s \in S$. Llamamos a (X, Y) **variable aleatoria bidimensional** (que también se denomina vector aleatorio).

Si $X_1 = X_1(s), X_2 = X_2(s), \dots, X_n = X_n(s)$, son n funciones, cada una de las cuales asigna un número real a cada resultado $s \in S$, entonces llamamos a (X_1, \dots, X_n) una **variable aleatoria n-dimensional** (o un vector aleatorio n-dimensional).

Definición.

- (X, Y) es una **variable aleatoria bidimensional discreta** si los valores posibles de (X, Y) son finitos o infinitos numerables. Es decir, los valores posibles de (X, Y) se pueden representar como $(x_i, y_j), i = 1, 2, \dots, n, \dots; j = l, 2, \dots, m, \dots$
- (X, Y) es una **variable aleatoria bidimensional continua** si (X, Y) puede tomar todos los valores en un conjunto no numerable del plano euclidiano. [Por ejemplo, si (X, Y) toma todos los valores en el rectángulo $\{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, diríamos que (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua.]

En otras palabras, (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional si representa el resultado de un experimento aleatorio en el cual hemos medido las dos características numéricas X y Y .

Definición.

- a) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Con cada resultado posible (x_i, y_j) , asociamos un número $p(x_i, y_j)$ que representa $P(X = x_i, Y = y_j)$ y que satisface las condiciones siguientes:

$$\forall_{x_i, y_j} p(x_i, y_j) \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$$

La función p definida para toda (x_i, y_j) en el recorrido de (X,Y) se llama **función de probabilidad** de (X,Y) . El conjunto de ternas $(x_i, y_j, p(x_i, y_j))$, $i, j = 1, 2, \dots$, en algunos casos se denomina **distribución de probabilidades** de (X, Y) .

- b) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua que toma todos los valores en una región R del plano euclidiano. La **función de densidad de probabilidades conjuntas** f es una función que satisface las siguientes condiciones:

$$\forall_{(x,y) \in R} f(x, y) \geq 0$$

$$\int \int_R f(x, y) \, dx \, dy = 1$$

Observaciones

- a) La ultima condicion indica que el volumen total bajo la superficie dada por la ecuación $z = f(x, y)$ es igual a 1.
- b) Como en el caso unidimensional, $f(x, y)$ no representa la probabilidad de nada. Sin embargo, para Δx y Δy positivos y suficientemente pequeñas, $f(x, y)\Delta x\Delta y \sim P(x \leq X \leq x + \Delta x, y \leq Y \leq y + \Delta y)$.
- c) Como en el caso unidimensional, adoptaremos la convención de que $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin R$. Por tanto, podemos considerar f definida para toda (x, y) en el plano y la ultima condición se convierte en $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = 1$.
- d) Si B está en el recorrido de (X, Y) , tenemos

$$P(B) = P[(X(s), Y(s)) \in B] = P[s \in S | (X(s), Y(s)) \in B]$$

Esta ultima probabilidad se refiere a un evento en S y, por tanto, determina la probabilidad de B . En nuestra terminología previa, B y $[s \in S | (X(s), Y(s)) \in B]$ son **eventos equivalentes**.

- Si B esta en el recorrido de (X,Y) , siendo esta ultima discreta, tenemos

$$P(B) = \sum_B \sum_B p(x_i, y_j)$$

, la suma se toma con todos los indices (i, j) para los cuales $(x_i, y_j) \in B$

- Si (X,Y) es continua

$$P(B) = \int \int_B f(x, y) \, dx \, dy$$

Ejemplos p. 125-128

Definición. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. Su función de distribución acumulada (fda) F está definida como

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Observación. Si F es fda de una variable aleatoria bidimensional con fdp conjunta f , entonces

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

donde quiera que F sea diferenciable.

1.2 Distribución de probabilidades marginales y condicionales

Con cada variable aleatoria bidimensional (X,Y) asociamos dos variables aleatorias unidimensionales llamadas X y Y , respectivamente. Es decir, podemos interesarnos por la distribución de probabilidades de X o por la distribución de probabilidades de Y . Dada una variable aleatoria bidimensional (X,Y) obtenemos las respectivas **distribuciones marginales** (de X y de Y) de la siguiente manera:

- a) **Caso Discreto.** Puesto que $X = x_i$ debe ocurrir con $Y = y_j$, para alguna j , y puede ocurrir solo con una j tenemos:

$$p_x(x_i) = P_x(X = x_i) = P_{(x,y)}(X = x_i, Y = y_1 \circ X = x_i, Y = y_2 \circ \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{(x,y)}(x_i, y_j).$$

La función p_x definida para x_1, x_2, \dots , representa la **distribución marginal de probabilidades de X** . Análogamente definimos $q_y(y_j) = P_y(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{(x,y)}(x_i, y_j)$. como la **distribución marginal de probabilidades de Y** .

- b) **Caso Continuo.** Sea f la fdp conjunta de la variable aleatoria bidimensional continua (X,Y) . Definimos f_x y f_y , las funciones de densidad de probabilidades marginales de X y Y , respectivamente, como sigue

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \quad f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

Estas fdp corresponden a las fdp básicas de las variables aleatorias unidimensionales X y Y , respectivamente. Por ejemplo,

$$P_x(c \leq X \leq d) = P_{(x,y)}[c \leq X \leq d, -\infty \leq Y \leq \infty] = \int_c^d \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = \int_c^d f_x(x)dx$$

Ejemplos p. 129-130

Definición. Decimos que una variable aleatoria bidimensional continua está **distribuida uniformemente** en una región R en un plano euclidiano si

$$f(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } (x, y) \in R \\ 0 & \text{si } \text{otherwise} \end{cases}$$

Debido a la condición $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$, lo anterior implica que la constante es igual a $\frac{1}{\text{area}(R)}$. Suponemos que R es una región con Área finita distinta de cero.

Ejemplos p. 131-132

1.2.1 Probabilidad Condicional

Distribución de probabilidades condicionales.

Caso discreto. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional.

$$P_x(x_i|y_i) = P_x(X = x_i|Y = y_i) = \frac{p(x_i, y_i)}{p_y(y_i)}, \text{ si } p_y(y_i) > 0$$

$$P_y(y_i|x_i) = P_y(Y = y_i|X = x_i) = \frac{p(x_i, y_i)}{p_x(x_i)}, \text{ si } p_x(x_i) > 0$$

Observación. Para una j dada, $p(x_i|y_j)$ satisface todas las condiciones de una distribución de probabilidades. Tenemos $p(x_i|y_j) \geq 0$ y también

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i|y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(x_i, y_j)}{p_y(y_j)} = \frac{p_y(y_j)}{p_y(y_j)} = 1$$

Caso continuo. Definición. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua con fdp conjunta f . Sean f_x y f_y las fdp marginales de X y Y , respectivamente

La fdp **condicional** de X para $Y = y$ dada, está definida por

$$f_x(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}, \quad h(y) > 0$$

$$f_y(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}, \quad g(x) > 0$$

Observaciones.

- a) Las fdp condicionales anteriores satisfacen todas las exigencias de una fdp unidimensional. Así, para y fija, tenemos $f_x(x|y) \geq 0$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f_y(y)}dx = \frac{1}{f_y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{f_y(y)}{f_y(y)} = 1$$

- b) Supongamos que (X, Y) representan la altura y el peso de una persona, respectivamente. Sea f la fdp conjunta de (X,Y) y sea f_x la fdp marginal de X (sin tomar en cuenta Y). Por tanto, $\int_{5.8}^6 f_x(x)dx$ representaría la probabilidad del evento $(5.8 \leq X \leq 6)$ sin tomar en cuenta el peso Y. Por su parte $\int_{5.8}^6 f_x(x|150)dx$ se interpretaría como $P(5.8 \leq X \leq 6|Y = 150)$. Estrictamente hablando, esta probabilidad condicional no está definida en los términos de nuestra convención previa con la probabilidad condicional, puesto que $P(Y = 150) = 0$. Sin embargo, sólo usamos la integral anterior para definir esta probabilidad. Sobre una base intuitiva, ciertamente, éste debe ser el significado de dicho número.

Ejemplo p. 134

1.3 Variables aleatorias independientes

Tal como definimos el concepto de independencia entre dos eventos A y B, ahora definiremos las variables aleatorias independientes. Lo que queremos decir intuitivamente es que X y Y son variables aleatorias independientes si el resultado de X, digamos, de ninguna manera influye en el resultado de Y. Ésta es una noción extremadamente importante y hay muchas situaciones en que dicha suposición se justifica.

Definicion.

- a) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Decimos que X y Y son variables aleatorias independientes si y sólo si $p(x_i, y_j) = p_x(x_i)p_y(y_j)$ para toda i y j. Esto es, $P_{(x,y)}(X = x_i, Y = y_j) = P_x(X = x_i)P_y(Y = y_j)$, para toda i y j.
- b) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua. Decimos que X y Y son variables aleatorias independientes si y sólo si $f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$ para toda (x, y), donde f es la fdp conjunta, y f_x y f_y son las fdp marginales de X y Y, respectivamente.

Teorema

- a) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Entonces X y Y son independientes si y sólo si $p_x(x_i|y_j) = p_x(x_i)$ para toda i y j (o lo que es equivalente, si y solo si $p_y(y_j|x_i) = p_y(y_j)$ para toda i y j).
- b) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua. Entonces X y Y son independientes si y solo si $f_x(x|y) = f_x(x)$, o lo que es equivalente, si y sólo si $f_y(y|x) = f_y(y)$ para toda (x,y)

Ejemplos p. 135-136

Observacion. De la definición de la distribución marginal de probabilidades (en cualesquiera de los casos, discreto o continuo) es claro que la distribución conjunta de probabilidades determina, en forma única, la distribución marginal de probabilidades. Es decir, que conociendo la fdp f conjunta podemos obtener las fdp marginales f_x y f_y . Sin embargo, lo inverso no es verdadero. Es decir, en general, el conocimiento de las fdp marginales f_x y f_y no determina la fdp conjunta f . Esto sólo es verdadero cuando X y Y son independientes, porque en este caso tenemos $f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$.

Teorema. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Sean A y B eventos cuya ocurrencia (o no ocurrencia) depende sólo de X y Y respectivamente. (Esto es, A es un subconjunto de R_x , el recorrido de X , mientras que B es un subconjunto de R_y , el recorrido de Y .) Entonces, si X y Y son variables aleatorias independientes, tenemos $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Dem. p. 137

1.4 Funciones de una variable aleatoria

Al definir una variable aleatoria X señalamos enfáticamente que X es una función definida del espacio muestral S a los números reales. Al definir una variable aleatoria bidimensional (X, Y) , tratamos un par de funciones, $X = X(s)$, $Y = Y(s)$, cada una de las cuales está definida en el espacio muestral de algún experimento y cada una de las cuales asigna un número real a cada $s \in S$, produciendo así el vector bidimensional $[X(s), Y(s)]$.

Consideremos ahora $Z = H_1(X, Y)$, una función de las dos variables aleatorias X y Y . Debe ser claro que $Z = Z(s)$ es otra vez una variable aleatoria. Consideremos la siguiente sucesión de pasos.

- a) Se realiza el experimento ϵ y se obtiene el resultado s
- b) Se evalúan los números $X(s)$ y $Y(s)$.
- c) Se evalúa el número $Z = H_1[X(s), Y(s)]$

El valor de Z depende claramente de s , el resultado original del experimento. Esto es, $Z = Z(s)$ es una función que asigna a cada resultado $s \in S$ un número real, $Z(s)$. Por lo tanto, Z es una variable aleatoria. Algunas variables aleatorias importantes que nos van a interesar son $X + Y$, XY , X/Y , $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, etcétera.

Ejemplo ilustrador p. 138

1.4.1 Esperanza matematica

Sea (X_1, X_2, \dots, X_n) una variable aleatoria n-dimensional, se define a $Z = H(X_1, X_2, \dots, X_n)$ como una funcion real de dicha variable, donde H es una funcion real definida en $D \subset R^n$. Por lo tanto, Z es una variable aleatoria (unidimensional) y definimos $E(Z)$ como sigue:

- a) **Caso Discreto.** Si Z es una variable aleatoria discreta con valores posibles z_1, z_2, \dots y con $p(z_i) = P(Z = z_i)$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i p(z_i)$$

- b) **Caso Continuo.** Si z es una variable aleatoria continua con fdp f, tenemos

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z) dx$$

Teorema. Sea (X_1, X_2, \dots, X_n) una variable aleatoria n-dimensional, y sea $Z = H(X_1, X_2, \dots, X_n)$

- a) Si (X_1, X_2, \dots, X_n) es una variable aleatoria discreta y si $p(x_{1i}, \dots, x_{nk}) = P(X_1 = x_{1i}, \dots, X_n = x_{nk})$ tenemos

$$E(Z) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R(X_1 \times \dots \times X_n)} H(x_1, x_2, \dots, x_n) p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- b) Si (X_1, X_2, \dots, X_n) es una variable aleatoria continua con fdp conjunta f, tenemos

$$E(Z) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \right)^n H(x_1, x_2, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Ejemplo bidimensional p. 168.

Propiedades.

- a) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con una distribución de probabilidades conjunta. Sean $Z = H_1(X, Y)$ y $W = H_2(X, Y)$. Entonces, $E(Z + W) = E(Z) + E(W)$. **D/ p. 169**
- b) Sean X y Y dos variables aleatorias cualesquiera. Entonces, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$. (se deduce de la propiedad (a) al hacer $H_1(X, Y) = X$ y $H_2(X, Y) = Y$)
- c) Si $X = C$, donde C es una constante, entonces $E(X) = C$. **D/ p. 169**
- d) Supongamos que C es una constante y X es una variable aleatoria. Entonces, $E(CX) = CE(X)$. **D/ p. 169**
- e) Sean X_1, X_2, \dots, X_n n variables aleatorias. Entonces, $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$
- f) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional y supongamos que X y Y son **independientes**. Entonces $E(XY) = E(X)E(Y)$. **D/ p.171**

Observaciones

- a) Combinando las propiedades b,c,d, se observa que si $Y = aX + b$, donde a y b son constantes, entonces $E(Y) = aE(X) + b$. En palabras, la esperanza de una función lineal es esa misma función lineal de las esperanzas. Esto no es cierto a menos que esté implicada una función lineal
- b) Al combinar la observación a, con la propiedad a, obtenemos: $E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$, donde las a_i son constantes.

Ejemplos p. 171-175

1.4.2 Varianza

- a) **Caso discreto.**

$$V(Z) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R(X_1, X_2, \dots, X_n)} [H(X_1, X_2, \dots, X_n) - E(Z)]^2 p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- b) **Caso continuo.**

$$V(Z) = \int_{R^n} [H(X_1, X_2, \dots, X_n) - E(Z)]^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Propiedades.

- a) Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, y si X y Y son independientes, entonces $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. **D/p.180.**
- b) Sean X_1, \dots, X_n n variables aleatorias independientes. Entonces, $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$. Se demuestra con el ítem (a) e inducción matemática

Observación. El ítem a, es solo válido para cuando las variables aleatorias son independientes. La varianza no posee la propiedad de linealidad que dimos para la esperanza, es decir, $V(aX + b) \neq aV(X) + b$. En su lugar tenemos $V(aX + b) = a^2 V(X)$. De aquí obtenemos que si X_1, \dots, X_n son variables aleatorias independientes dos a dos. Entonces

$$V(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i)$$

1.5 Coeficiente de correlacion

Hasta ahora nos hemos interesado en asociar parámetros como $E(X)$ y $V(X)$ con la distribución de variables aleatorias unidimensionales. Estos parámetros miden, en el sentido antes descrito, ciertas características de la distribución. Si tenemos una variable aleatoria bidimensional (X, Y) , se encuentra un problema análogo. Por supuesto, podemos presentar nuevamente las variables aleatorias unidimensionales X y Y asociadas con (X, Y) . Sin embargo, surge la pregunta de si hay un parámetro significativo que mida de alguna manera el “grado de asociación” entre X y Y . Esta es una noción vaga que se precisará más adelante. Demos la siguiente definición formal.

Definición. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Definimos ρ_{xy} , el **coeficiente de correlación** entre X e Y , como sigue:

$$\rho_{xy} = \frac{E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Observaciones

- a) Suponemos que todas las esperanzas existen y que $V(X)$ y $V(Y)$ son distintas de cero. Cuando no hay dudas de cuáles variables aleatorias están implicadas escribiremos simplemente ρ en vez de ρ_{xy} .
- b) El numerador de ρ , $E[X - E(X)][Y - E(Y)]$, se llama **covarianza** de X e Y , y algunas veces se denota con σ_{xy} .
- c) El coeficiente de correlación es una cantidad adimensional.

Teorema

$$\rho = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

D/p. 190

Teorema Si X y Y son independientes, entonces $\rho = 0$. Se deduce del teorema anterior. $E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow \rho = 0$

Observación. El recíproco del teorema anterior no es verdadero en general. Esto es, podemos tener $\rho = 0$, y aun así X y Y no necesitan ser independientes. Si $\rho = 0$ decimos que X y Y son no correlacionados. Así, siendo no correlacionados e independientes no son, en general, equivalentes. Que el coeficiente de correlación sea 0, indica que las variables no están linealmente relacionadas, pero pueden presentar otro patrón de relación. El ejemplo siguiente ilustra este punto (p. 190)

Teorema. $-1 \leq \rho \leq 1$. D/p.191

Teorema. Supongamos que $\rho^2 = 1$. Luego $Y = AX + B$, donde A y B son constantes. En palabras, si el coeficiente de correlación ρ es ± 1 , entonces Y es una función lineal de X (con probabilidad 1). D/p.192

Teorema. Supongamos que X y Y son dos variables aleatorias para las cuales $Y = AX + B$, donde A y B son constantes. Entonces, $\rho^2 = 1$. Si $A > 0$, $\rho = 1$; si $A < 0$, $\rho = -1$. D/p.192

Observacion. Los teoremas anteriores establecen las siguientes características importantes del coeficiente de correlación: el coeficiente de correlación es una medida del grado de linealidad entre X y Y . Los valores de ρ próximos a $+1$ o -1 indican un alto grado de linealidad, mientras que los valores de ρ próximos a 0 indican una ausencia de tal linealidad. Los valores positivos de ρ muestran que Y tiende a aumentar con valores crecientes de X , mientras que los valores negativos de ρ muestran que Y tiende a disminuir con valores crecientes de X . Existe una considerable confusión acerca de la interpretación del coeficiente de correlación. Un valor de ρ cercano a cero sólo indica la ausencia de una relación lineal entre X y Y . No impide la posibilidad de alguna relación no lineal.

Ejemplo p. 193-194