## Álgebra Lineal - LCC - LM - PM **2020**

**Autoevaluación 4**

---

**Apellido, nombre y carrera:**

*****Recordar que sólo una de las opciones es correcta.*****

1. La siguiente matriz es normal:

   (A) $\begin{bmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ -i & 2i & 1-i \\ 0 & -1-i & 1-i \end{bmatrix}$.

   (B) $\begin{bmatrix} 2i & i & 0 \\ 1-i & 2i & 1-i \\ 0 & 1-i & 3i \end{bmatrix}$.

   (C) $\begin{bmatrix} 2i & i & 0 \\ i & 2i & 1-i \\ 0 & -1-i & 3i \end{bmatrix}$.

   (D) $\begin{bmatrix} 2i & i & 0 \\ i & 2i & 1-i \\ 0 & -i & 3i \end{bmatrix}$.

2. Sea $A$ una matriz y $S = \begin{bmatrix} 4 & 1-i & 0 \\ 1+i & i & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliza a $A$. Entonces:

   (A) $x = (4, 1-i, 0)$ es autovector de $A$.
   (B) $S^{-1}AS$ tiene todas entradas distintas en la diagonal.
   (C) $x = (4, 1+i, 7)$ es autovector de $A$.
   (D) Ninguna de las anteriores es una condición necesaria.

3. Consideramos la secuencia
$$g_0 = 0;\ g_1 = 1;\ g_{k+2} = \frac{g_{k+1} + g_k}{2}, k \geq 0.$$
   Definimos $x_k = \begin{bmatrix} g_{k+1} \\ g_k \end{bmatrix}$.

   *a*) Sea $A$ tal que, para todo $k \geq 0$, $x_{k+1} = Ax_k$. Entonces,

   (A) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (C) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (B) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
   (D) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   *b*) Sea $A$ tal que, para todo $k \geq 0$, $x_{k+1} = Ax_k$. Para $i = 1, 2$, sea $\lambda_i$ autovalor de $A$, $V_i$ su autoespacio asociado y $\lambda_1 > \lambda_2$. Entonces:
   (A) $V_1 = \langle(1, 1)\rangle$ y $V_2 = \left\langle(\frac{1}{2}, 1)\right\rangle$.
   (B) $V_1 = \langle(1, 1)\rangle$ y $V_2 = \left\langle(1, -\frac{1}{2})\right\rangle$.
   (C) $V_1 = \langle(1, 1)\rangle$ y $V_2 = \langle(1, -2)\rangle$.
   (D) $V_1 = \langle(1, 1)\rangle$ y $V_2 = \langle(-2, 1)\rangle$.

   *c*) (A) $g_k = -\frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]$.

(B) $g_k = \dfrac{2}{3}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k\right]$.

(C) $g_k = -\dfrac{2}{3}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}\right]$.

(D) $g_k = \dfrac{2}{3}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}\right]$.

4. *a*) Para toda matriz $A$, podemos afirmar que:
   (A) Existe una matriz unitaria $U$ tal que $U^{-1}AU$ es una matriz diagonal.
   (B) Existe una matriz normal $N$ tal que $N^{-1}AN$ es una matriz diagonal.
   (C) Existe una matriz normal $N$ tal que $N^{-1}AN$ es una matriz triangular.
   (D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

   *b*) Consideramos la matriz $A = \begin{bmatrix} -5+i & -15 \\ 2 & 6+i \end{bmatrix}$.
   La siguiente matriz $U$ es unitaria y triangulariza a $A$ (Lema de Schur):

   (A) $U = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
   (B) $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (C) $U = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (D) $U = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Sea $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces:

   *a*) (A) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que los dos autovalores de $A(t)$ son números complejos conjugados, no reales.
   (B) Para todo $t \in \mathbb{C}$, $A(t)$ tiene dos autovalores de multiplicidad $1$.
   (C) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = 1$ es un autovalor de $A(t)$ de multiplicidad $2$.
   (D) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = 2$ es un autovalor de $A(t)$ de multiplicidad $2$.

   *b*) (A) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $(-3, 1)$ es un autovector de $A(t)$.
   (B) No existe $v \in \mathbb{C}^2$ tal que $v$ es autovector de $A(t)$ para todo $t \in \mathbb{C}$.
   (C) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $A(t)$ tiene un autovalor de multiplicidad $1$ y la dimensión del autoespacio asociado es $2$.
   (D) Existen $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ linealmente independientes autovectores de $A(t)$ para todo $t \in \mathbb{C}$.

   *c*) (A) $A(t)$ es diagonalizable para todo $t$.
   (B) No existe valor de $t$ tal que $A(t)$ resulta diagonalizable.
   (C) Existe un único valor de $t$ tal que $A(t)$ resulta diagonalizable.
   (D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

## RESOLUCIONES

1. Si $A$ es una matriz de tamaño $n \times n$, una forma rápida de chequear si es normal, sin utilizar la definición, es verificar si cumple la condición necesaria $\|A^i\| = \|A_i\|$ para todo $i = 1, \ldots, n$ (ejercicio $4$. de la Práctica: Capítulo $5$ (tercera parte)).

   Haciendo los correspondientes cálculos, se observa que la única matriz que cumple esta condición es la matriz de la opción **(C)**. Como sabemos que hay una opción correcta, ésta es la que vale.

   La otra forma de resolución es aplicar la definición y verificar que la matriz de la opción **(C)** es la única que conmuta el producto con su hermitiana.

2. Como $S$ diagonaliza a $A$, sabemos que las columnas de $S$ son autovectores linealmente independientes asociados a los autovalores que aparecen en la diagonal de la matriz $S^{-1}AS$.

   Podemos observar que, el vector $x$ dado en la opción **(C)** corresponde a la primer columna de la matriz $S$. Por lo tanto esta es la opción correcta.

3. Este ejercicio es común a todos los temas y su resolución ya está en comunidades.

4. *a*) Por el Lema de Schur sabemos que para toda matriz $A$ de tamaño $n \times n$ existe una matriz $U$, también de tamaño $n \times n$, tal que $U^{-1}AU$ es triangular.

   Por otro lado, observamos que las matrices unitarias son normales.

   Luego, combinando ambos resultados obtenemos que **(C)** es la opción correcta.

   *b*) Como las columnas de toda matriz unitaria tiene norma 1, podemos descartar la opción **(C)** cuya primer columna tiene norma $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   Con las otras tres opciones, sólo debemos realizar los productos $U^TAU$ y descubrir cuál de estos productos resulta una matriz triangular. Haciendo los cálculos llegaremos a que la opción **(D)** es la correcta.

5. *a*) Comenzamos calculando el polinomio característico asociado a $A(t) = \begin{bmatrix} t & 1-t \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$det(A(t) - \lambda I) = (t - \lambda)\lambda - (1 - t) = \lambda^2 - \lambda t + (t - 1) = (\lambda - 1)(\lambda - (t - 1)).$$

   Es claro que $\lambda = 1$ es uno de los autovalores de $A(t)$, cualquiera sea $t$. Así descartamos las opciones **(A)** y **(D)**.
   Además, si consideramos $t = 2$:

$$det(A(t) - \lambda I) = (\lambda - 1)^2 \text{ y } \lambda = 1 \text{ resulta un autovalor de multiplicidad igual a 2.}$$

   Por lo tanto la opción correcta es **(C)**.

   *b*) A partir de *a*) tenemos que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = t - 1$ son los autovalores asociados a $A(t)$.

   Para determinar los autovectores asociados a cada autovalor $\lambda$ describimos $N(A - \lambda I)$. Así obtenemos:

$$N(A(t) - I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad N(A(t) - (t-1)I) = \left\langle = \begin{bmatrix} t-1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

   Luego, considerando $t = -2$ resulta **(A)** la opción correcta.

   *c*) $A(t)$ es una matriz de tamaño $2 \times 2$, por lo tanto si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $A(t)$ resulta diagonalizable. Como existen infinitos valores de $t$ para los cuales $\lambda_1 \neq \lambda_2$, quedan descartadas las opciones **(B)** y **(C)**.

   Resta comprobar si la opción **(A)** es correcta, o sea, si $A$ es diagonalizable para todo $t$. En realidad, por lo mencionado anteriormente, sólo debemos verificar si $A$ es diagonalizable para $t = 2$ y $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Así, $A(2)$ es diagonalizable si y solo si el espacio $N(A(2) - I)$ tiene dimensión 2. Por lo visto en el apartado anterior, $N(A(2) - I)$ tiene dimensión 1 y por lo tanto $A(2)$ no es diagonalizable.
   Por lo tanto, **(D)** es la opción correcta.