Examen Final - 07/09/2020

Apellido y Nombre: Legajo: Carrera:

Condición (Regular-Año / Libre):

************** ***************

1. Sean $S^{2\times 2}$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente, el espacio vectorial de las matrices simétricas 2×2 y el espacio vectorial de los polinomios a coeficentes reales de grado a lo sumo 2 (incluyendo el polinomio nulo), con las operaciones habituales. Sea $T : S^{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x]$ una aplicación definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = (a+2b+3c)x^2 + (4a+5b+6c)x + (7a+8b+9c).$$

   a) Probar que T es una transformación lineal.

   b) Hallar la matriz asociada a T con respecto a las bases ordenadas $\mathscr{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{x^2, x, 1\}$.

   c) Obtener $N(T)$ y $rec(T)$ y las dimensiones de cada uno de dichos subespacios. Determinar si T es un monomorfismo. Justificar la respuesta.

2. *a*) Dar un ejemplo de una matriz NO diagonalizable A que satisfaga $\det(A-tI) = (4-t)^4$. Justificar por qué no es diagonalizable.

   b) Exhibir una matriz B no semejante a A tal que $\det(A-tI) = \det(B-tI)$. Justificar por qué no son semejantes.

   c) Exhibir dos matrices distintas y semejantes C y D, NO diagonales, tales que $\det(C-tI) = \det(D-tI) = (1-t)(2-t)(3-t)(4-t)$. Justificar por qué son semejantes.

3. El algoritmo RankPage de Google calcula un vector estocástico (entradas positivas que suman 1) v^* cuyas componentes que se usan para asignar un ranking de importancia entre las páginas de la red asociadas a una búsqueda. Dicho v^* es un autovector particular asociado a una matriz M definida por Page & Brin a partir de la matriz de transición asociada a las relaciones entre las páginas de la red.

   Suponga que la red se conforma de las siguiente páginas con los respectivos links:

   - Página 1: links a páginas 2 y 3
   - Página 2: links a páginas 1 y 3
   - Página 3: links a páginas 1 y 2
   - Página 4: link a página 5
   - Página 5: link a página 4

   a) Determine la matriz de transición A y la matriz M en función de A con *dumping factor* $p = 0{,}15$. ¿Cómo se interpreta el parámetro p?

   b) ¿Cómo calcularía el vector v^* utilizando el método de eliminación de Gauss?

   c) ¿Qué método para el cálculo de v^* se desprende del *Power Method Convergence Theorem*?

   d) ¿Qué puede comentar sobre la complejidad computacional de uno y otro método?

(continua en la página siguiente)

4. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Sea $\mathscr{B} = \{v^1, \ldots, v^n\}$ una base ordenada de V.

   a) Sean W un subespacio de V, $v \in V$ y $z = v - proy_{s/W} v$. Probar que $z \in W^{\perp}$.

   b) Para $i = 1, \ldots, n$, sea u^i el i-ésimo vector obtenido por el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt aplicado a $\mathscr{B}$. Sea $W^k = < \{u^1, \ldots, u^k\} >$, $1 \leq k \leq n-1$. Probar que u^{k+1} es la componente de v^{k+1} en $(W^k)^{\perp}$.

5. Sea A es una matriz $m \times n$.

   a) Probar que, para toda matriz B de tamaño $n \times p$ resulta $C(AB) \subset C(A)$.

   b) Probar que si $rg(A) = n$ y $n < m$ entonces A no tiene inversa a derecha. Sugerencia: es posible utilizar el apartado anterior.