Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Métodos Numéricos

Sucesiones y Series Numéricas

Alumno:

Demagistris, Santiago Ignacio

Septiembre 2020

1 Ejercicio 1

En cada caso determinar si la sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su límite.

a) $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$**,** $\alpha > 0$

Sea $f(x) = a_x$:

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \Rightarrow f'(x) = -\alpha x^{-(\alpha+1)}$

Como $x > 0$ ya que f(x) está definida con dominio en N y por consigna sabemos que $\alpha > 0$, entonces $f'(x)$ es negativa por lo que $f(x)$ es estrictamente decreciente.

Criterio de la integral:

$\int_1^\infty f(x)dx = lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\alpha}dx = lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b =$

$\int_1^\infty f(x)dx = lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) =$

$\int_1^\infty f(x)dx = lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) - \frac{1}{1-\alpha}$

Caso $\alpha > 1$

Considero $c = 1 - \alpha$, donde c es negativo.

$\int_1^\infty f(x)dx = lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^c}{1-\alpha}\right) - \frac{1}{c} = lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{(1-\alpha)b^c}\right) - \frac{1}{c} = 0 - \frac{1}{c} = -\frac{1}{c} \Rightarrow s_n = \sum_{n=1}^\infty a_n$ converge $\Rightarrow^{(1)} lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Por lo tanto a_n converge a 0.

Caso $\alpha < 1$

Sabemos que a_n es estrictamente decreciente. Verifiquemos que está acotada por 0:

Sea $n \in N$, supongamos que $\exists k \leq 0, \frac{1}{n^\alpha} \leq k$

$\frac{1}{n^\alpha} \leq k \iff 1 \leq kn^\alpha \Rightarrow n^\alpha < 0 \iff n < 0$. Contradicción.

Por lo tanto $\forall k \leq 0, \frac{1}{n^\alpha} > k \Rightarrow 0$ es cota inferior de a_n. Como sabemos que es estrictamente decreciente y tiene cota inferior, entonces a_n converge.

$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

(1): Condición necesaria para la convergencia de una serie.

Como $lim_{n\to\infty} a_n = 0$**,** a_n **converge a 0.**

b) $a_n = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1}$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1}) =^{(1)}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n =^{(1)} lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n}) - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) =^{(2)}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n =^{(2)} lim_{n\to\infty}(1) - lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) \ - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = (1-0) - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) = 1 - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) =^{(3)}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n =^{(3)} 1 - lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1}) = 1 - 1 = 0$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(1) Regla del producto del límite.

(2) Regla de la diferencia del límite.

(3) L'hopital caso $\frac{\infty}{\infty}$.

Como $lim_{n\to\infty} a_n = 0$**,** a_n **converge a 0.**

c) $a_n = \frac{3n^2-n+4}{2n^2+1}$

$$lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2-n+4}{2n^2+1}) =^{(1)}$$

$$lim_{n\to\infty}a_n =^{(1)} lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2}{2n^2+1}) - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{2n^2+1}) + lim_{n\to\infty}(\frac{4}{2n^2+1}) =$$

$$lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2}{2n^2+1}) - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{2n^2+1}) + 0 =$$

$$lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2}{2n^2+1}) - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{2n^2+1}) =^{(2)}$$

$$lim_{n\to\infty}a_n =^{(2)} lim_{n\to\infty}(\frac{6n}{4n}) - lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4n}) =$$

$$lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{6n}{4n}) - 0 =^{(2)} lim_{n\to\infty}(\frac{6}{4}) = \frac{3}{2}$$

$$lim_{n\to\infty}a_n = \frac{3}{2}$$

(1) Regla de la suma y diferencia del límite.

(2) L'hopital caso $\frac{\infty}{\infty}$.

Como $lim_{n\to\infty}a_n = \frac{3}{2}$, a_n converge a $\frac{3}{2}$.

d) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

$$lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Como $lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}\cos\frac{n\pi}{2}$, cuando n tiende a infinito a_n está acotado entre 1 y -1 pero no presenta un límite. Por lo tanto la sucesión diverge.

e) $a_n = \frac{n!}{n}$

$$lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n}$$

$$lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)!}{n}$$

$$lim_{n\to\infty}a_n = lim_{n\to\infty}(n-1)! = \infty$$

Como $lim_{n\to\infty}a_n = \infty$, a_n diverge.

$f)\ a_n = \frac{n^p}{e^n}, \quad p > 0$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{n^p}{e^n}) =^{(1)}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n =^{(1)} lim_{n\to\infty}(\frac{pn^{p-1}}{e^n}) = \ldots =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{p^p}{e^n}) =^{(2)} = 0$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(1) L'hopital caso $\frac{\infty}{\infty}$.

(2) $\epsilon > 1$, por lo cual $\epsilon^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Como $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a_n converge a 0.

$g)\ a_n = \sqrt[n]{n}$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) = lim_{n\to\infty} n^{1/n} =^{(1)}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n =^{(1)} lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{1/n}} = e^{lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln n}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = e^{lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} =^{(2)} e^{lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1$$

(1) L'hopital caso ∞^0.

(2) L'hopital caso $\frac{\infty}{\infty}$.

Como $lim_{n\to\infty} a_n = 1$, a_n converge a 1

2 Ejercicio 2

En cada caso determinar si la serie converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su suma.

a) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Podemos observar que $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n(n+1)}) = 0 \Rightarrow s_n$ puede converger.

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow b_n = \frac{1}{n} \quad (1)$

(1) $\Rightarrow$ $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n-1} =^{(1)} b_1 - b_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (2)$

(2) $\Rightarrow$ $lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} =^{(2)}= lim_{n\to\infty} 1 - lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + 0 = 1$

(1) Propiedad telescópica.

(2) Regla de la diferencia del límite.

La serie s_n converge a 1.

b) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

Podemos observar que $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n(n+2)}) = 0 \Rightarrow s_n$ puede converger.

$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} =$

$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} =$

$s_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (1)$

Sea $b_n = \frac{1}{n}$, por (1) y propiedad telescópica, $s_n = 1 + (b_1 - b_{n+1} - (1 - \frac{1}{2})) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \quad (2)$

(2) $\Rightarrow$ $lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty}(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}) = \frac{3}{2}$. **Por lo tanto s_n converge a 1.5**

c) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Podemos observar que $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}) = lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}\sqrt{(1+\frac{1}{n^2})}} = lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{(1+\frac{1}{n^2})}} =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{n^2})}} = 1$$

En vista de que a_n converge en 1 y por el teorema 7, entonces la serie s_n diverge.

d) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$

Podemos observar que s_n es una serie geométrica y que r < 0, por lo que nos encontramos frente a una serie alternada. Sabemos que:

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto s_n converge a $\frac{2}{3}$.

e) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3(\frac{3}{2})^n$

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3(\frac{3}{2})^n = 3\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n \Rightarrow \frac{s_n}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n$$

Se puede observar que $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n$ es una serie geométrica y como $r = \frac{3}{2}$ sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad y \quad lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \infty \quad (1)$$

(1)$\Rightarrow lim_{n\to\infty} s_n = 3\ lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = 3\ \infty = \infty$. **Por lo tanto s_n diverge.**

f) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

Corolario 1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ diverge.

Podemos observar que $a_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{2^n}{2^n} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^n})$

(1) Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{1}{2^n}$

(2) Sea $b_n = 1$, $t_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \Rightarrow t_n$ diverge.

(3) Sea $c_n = \frac{1}{2^n}$, $k_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, donde k_n es una serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$. Por lo tanto k_n converge.

Por corolario 1, (1), (2) y (3) a_n diverge.

g) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

Podemos observar que $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. Intentaré buscar a y b tal que $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{a}{(2n+1)} - \frac{b}{(2n+3)}$

$$\frac{a}{(2n+1)} - \frac{b}{(2n+3)} = \frac{a(2n+3)-b(2n+1)}{(2n+1)} = \frac{2n(a-b)+3a-b}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$1 = 2n(a-b) + 3a - b \iff a = b \text{ y } 1 = 3a - b = 2a \Rightarrow b = a = 1/2 \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \qquad a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{(2n+3)}\right)$$

Sea $b_n = \frac{1}{2n+1}$, entonces $a_n = b_n - b_{n+1}$ y por propiedad telescópica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = lim_{n\to\infty}\,(b_1 + b_{n+1}) = lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n+1}\right) =^{(2)} \frac{1}{3} + lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

(2) Regla de la suma del limite

Por lo tanto s_n converge a $\frac{1}{3}$

h) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right)$

Podemos trabajar a s_n como :

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = t_n - k_n$$

Sea $b_n = \frac{1}{2^n}$

$$t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^n \Rightarrow^{(1)} t_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$lim_{n\to\infty} t_n = lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} =^{(2)} \frac{1}{1-r} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Sea $c_n = \frac{1}{3^n}$

$$k_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{1}{3})^n \Rightarrow^{(1)} k_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$lim_{n\to\infty} t_n = lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} =^{(2)} \frac{1}{1-r} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Propiedad de linealidad

Sea $\beta = -1$ y $\alpha = 1$, entonces $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha b_n + \beta c_n =$, como t_n y k_n convergen, entonces por propiedad de linealidad s_n converge en $\alpha 2 + \beta \frac{3}{2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

i) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$, por lo tanto sabemos que $a_n = \frac{n!}{2^n}$

Criterio del cociente

$$lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n!}\right) = lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)n!}{2(2^n)} \frac{2^n}{n!}\right) = lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)}{2}\right) = \infty$$

Por lo tanto s_n diverge.