Álgebra Lineal LCC - LM - PM **2020**

Práctica Complementaria: CAPÍTULO 1 - MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Probar que si una matriz A es triangular inferior y triangular superior entonces A es matriz diagonal.
2. Probar que el producto de matrices triangulares superiores (respectivamente inferiores) es una matriz triangular superior (respectivamente inferior) y las entradas en su diagonal son el producto de las entradas en las diagonales de cada una de las matrices factores.
3. Decimos que una matriz cuadrada es no singular si, mediante el Mótodo de Eliminación Gaussiana (transformaciones elementales y permutaciones) podemos llevarla a una matriz triangular superior sin ceros en su diagonal.

   Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes, siendo A una matriz $n \times n$:

   - A es no singular.
   - El sistema $Ax = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^n$.
   - A es inversible.
4. Probar que, si luego de aplicar el método de Eliminación de Gauss aparece un pivot nulo, independientemente del lado derecho, el sistema no tendrá solución única.
5. Probar las matrices triangulares sin ceros en la diagonal son no singulares. Sugerencia: separar en los casos triangular superior y triangular inferior.
6. Sean D y A matrices $n \times n$, con D una matriz diagonal y sea $B = DA$.

   Probar que, la fila k-ésima de B es la igual a la fila k-ésima de A por la entrada k-ésima de la diagonal de D. Esto es, $B_k = D_k^k A_k$, para $k = 1, \dots, n$.
7. Sean P_{ij} y $E_{k\ell}(\alpha)$ matrices del mismo orden, de permutación elemental y elemental, respectivamente. Probar que,

$$P_{ij}E_{k\ell}(\alpha) = \begin{cases} E_{k\ell}(\alpha)P_{ij} & \text{si} \quad k \neq i, k \neq j \\ E_{j\ell}(\alpha)P_{ij} & \text{si} \quad k = i \\ E_{i\ell}(\alpha)P_{ij} & \text{si} \quad k = j \end{cases}$$

8. Si A es no singular, probar que existe una matriz P de permutación y una matriz E producto de matrices elementales tales que EPA es triangular superior sin ceros en la diagonal.
9. Sea A una matriz cuadrada no singular (el Método de Elimación de Gauss termina con U matriz triangular superior sin ceros en la diagonal). Probar que, existe una matriz de permutación P tal que PA tiene factorización LU (y factorización LDV).
10. Probar que la inversa de una matriz inversible triangular superior (respectivamente, superior) es una matriz triangular inferior (respectivamente, inferior).