Capítulo 5 (3ra. parte)

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Outline

1. Algoritmo de triangularización

2. Matrices diagonalizables

$Tr(n,A)$: algoritmo recursivo basado en la prueba de Lema de Schur.

Entrada: n, A matriz $n \times n$
Salida: U matriz $n \times n$ unitaria tal que $U^{-1}AU$ es triangular.
Algoritmo:

1. Si $n = 1$, $U \longleftarrow [1]$. Parar.
2. Obtener un autovalor λ, de A y un autovector (normalizado) x asociado a λ.
3. Construir U_1, matriz unitaria cuya primer columna es x (G-S)
4. Obtener M' matriz esquina inferior derecha $(n-1) \times (n-1)$ de $U_1^{-1}AU_1$.
5. $U \longleftarrow Tr(n-1, M')$
6. Construir U_2 matriz $n \times n$ con primer columna y primera fila $e^1 \in \mathbb{R}^n$ y U es su submatriz esquina inferior derecha.
7. $U \longleftarrow U_1 U_2$. Parar.

Ejercicio: Considerar la matriz $A = \begin{bmatrix} -5+i & -15 \\ 2 & 6+i \end{bmatrix}$.
Aplicar el algoritmo de triangularización basado en la prueba de Lema de Schur para obtener una matriz unitaria U que triangularice a la matriz A.

Siguiendo el algoritmo de triangularización basado en la prueba de Lema de Schur tenemos:

1) $n = 2$.
2) Calculando los autovalores y autovectores normalizados correspondientes asociados a A tenemos:

$$\lambda_1 = i \text{ autovalor de } A \text{ y } x^1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1).$$

3) Construimos U_1, matriz unitaria cuya primer columna es x^1 (G-S):

$$U_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$

4) Obtenemos M' esquina inferior derecha 1×1 de $U_1^{-1}AU_1$. Haciendo las cuentas tenemos:

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} i & 17 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $M' = [1+i]$.

5) U es la matriz que se obtiene aplicando de manera recursiva el algoritmo a M'. Como M' es de tamaño 1×1 resulta

$$U = [1].$$

6) Construimos U_2 matriz 2×2 con primer columna y primera fila $e^1 \in \mathbb{R}^2$ y U es su submatriz esquina inferior derecha. Luego,

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7) Por lo tanto,

$$U = U_1U_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} I = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, ¿qué herramientas tenemos hoy para saber si es diagonalizable?

Podemos seguir el siguiente método:

1. Calcular los autovalores diferentes de A: $\lambda_i, i = 1, \ldots, p$.
2. Para todo $i = 1, \ldots, p$, calcular una base $\mathscr{B}_i$ de $N(A - \lambda_i I)$.
3. Si $\sum_{i=1}^{p} |\mathscr{B}_i| < n$, A no es diagnalizable. PARAR.
4. A es diagonalizable y la matriz S que tiene por columnas los vectores en $\cup_{i=1}^{p} \mathscr{B}_i$ es matriz diagonalizante de A.

El paso complicado en este método es el paso 1, el cálculo de los autovalores de A.

Si sólo queremos saber si es diagonalizable, podemos chequear si tenemos la suerte de que sea normal o sea, si conmuta el producto con su hermitiana. Si no es normal, habrá que aplicar el procedimiento anterior.