Examen Final - 07/09/2020

Apellido y Nombre: Legajo: Carrera:

Condición (Regular-Año / Libre):

****

1. Sea $\mathbb{R}_2[x]$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficentes reales de grado a lo sumo 2 y el polinomio nulo, con las operaciones habituales. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ una aplicación definida por:

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & b \\ a & c \end{bmatrix}.$$

   a) Probar que T es una transformación lineal.

   b) Obtener $N(T)$ y $rec(T)$ y las dimensiones de cada uno de dichos subespacios. Determinar si T es un monomorfismo. Justificar la respuesta.

   c) Hallar la matriz asociada a T con respecto a las bases ordenadas $\mathscr{B}_1 = \{x+2, x^2+x+1, 2x^2+2x-1\}$ y $\mathscr{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

2. Sean q_1, q_2 y q_3 vectores ortonormales de $\mathbb{R}^3$ y $A = q_1q_1^T + 2\, q_2q_2^T + 5\, q_3q_3^T$.

   a) Probar que A es simétrica y determinar todos sus autovalores.

   b) Probar que, para todo r_1, r_2 y r_3, vectores ortonormales de $\mathbb{R}^3$, la matriz $B = r_1r_1^T + 2\, r_2r_2^T + 5\, r_3r_3^T$ es semejante a A.

   c) Exhibir una matriz C semejante a A que NO pueda expresarse en la forma $C = s_1s_1^T + 2s_2s_2^T + 5s_3s_3^T$ para ciertos s_1, s_2 y s_3 vectores ortonormales de $\mathbb{R}^3$. Justificar por qué C no puede expresarse de dicha forma.

3. El algoritmo RankPage de Google calcula un vector estocástico (entradas positivas que suman 1) v^* cuyas componentes que se usan para asignar un ranking de importancia entre las páginas de la red asociadas a una búsqueda. Dicho v^* es un autovector particular asociado a una matriz M definida por Page & Brin a partir de la matriz de transición asociada a las relaciones entre las páginas de la red.

   Suponga que la red se conforma de las siguiente páginas con los respectivos links:

   - Página 1: sin links
   - Página 2: link a página 1
   - Página 3: link a página 1
   - Página 4: link a páginas 3 y 5
   - Página 5: link a página 2

   a) Determine la matriz de transición A. Exprese a M con *dumping factor* $p = 0{,}15$, en función de A.

   b) ¿Cómo se define v^* en función de M? ¿Qué resultado nos garantiza la existencia de un único tal v^*?

   c) ¿Es posible utilizar el método de Eliminación de Gauss para calcular a v^*? Justifique. ¿Qué método se emplea sobre redes de millones de páginas y por qué?

(continua en la página siguiente)

4. Dado un espacio vectorial V con producto interno $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$, la norma $\|\, .\, \|$ inducida por este producto verifica la desigualdad de Cauchy-Swartz. Esto es,

$$|\,\langle x,y\rangle\,| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \forall x,y\in V.$$

En la prueba de esta propiedad se construye un vector auxiliar, $z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}\, x$. Suponga que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $\tilde{x} = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}\, x$.

a) ¿Qué ángulo forman $\tilde{x}$ y z?

b) ¿Quién es $\tilde{x}$ (en relación a los vectores x e y)?

c) Demostrar que $\|\tilde{x}\|^2 + \|z\|^2 = \|y\|^2$. Sugerencia: para el cálculo de $\|y\|^2$ recordar que $y = z + \tilde{x}$.

d) Demostrar Cauchy-Swartz.

5. Sea A una matriz $n\times n$ tal que $\lambda = 0$ es un autovalor de multiplicidad geométrica k con $1 \leq k \leq n-1$. ¿Cuál es el rango de A? Justifique.