Capítulo 1: Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

OUTLINE

Outline

4. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar.
   a) Si la primera y la tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y la tercera columna de AB.
   b) Si la primera y la tercera fila de B son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.
   c) Si la primera y la tercera fila de A son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.
   d) Sean A y B matrices de tamaño $n \times n$, entonces $(AB)^2 = A^2B^2$.

4. Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justificar.
   a) Si la primera y la tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y la tercera columna de AB.
   b) Si la primera y la tercera fila de B son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.
   c) Si la primera y la tercera fila de A son iguales, también lo son la primera y la tercera fila de AB.
   d) Sean A y B matrices de tamaño $n \times n$, entonces $(AB)^2 = A^2B^2$.

   a) VERDADERO, ya que

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} B^1 & B^2 & B^3 & \dots & B^n \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \quad A \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} AB^1 & AB^2 & AB^3 & \dots & AB^n \end{bmatrix}.
\end{array}
$$

b) FALSO, pues

$$
\begin{array}{cc}
 & \left[\begin{array}{c} \\ B \\ \\ \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} A_1B \\ A_2B \\ A_3B \\ \vdots \\ A_nB \end{array}\right]
\end{array}.
$$

b) FALSO, pues

$$\begin{array}{cc} & \left[\begin{array}{c} \\ B \\ \\ \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} A_1B \\ A_2B \\ A_3B \\ \vdots \\ A_nB \end{array}\right] \end{array}.$$

Entonces, por ejemplo consideramos:

b) FALSO, pues

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \\ A_3 B \\ \vdots \\ A_n B \end{bmatrix} \end{array}.$$

Entonces, por ejemplo consideramos:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 7 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

OUTLINE

6. Dada A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, para todo $i = 1, \ldots, n$ definimos $T_i = A^i B_i$.
   a) ¿Qué dimensión tiene T_i, para todo $i = 1, \ldots, n$?
   b) Probar que
   $$AB = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

6. Dada A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, para todo $i = 1, \ldots, n$ definimos $T_i = A^i B_i$.
   a) ¿Qué dimensión tiene T_i, para todo $i = 1, \ldots, n$?
   b) Probar que
   $$AB = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Para resolver el apartado $b)$, es importante tal como lo pide el apartado $a)$, identificar el tamaño de T_i.

6. Dada A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$, para todo $i = 1, \ldots, n$ definimos $T_i = A^i B_i$.
   $a)$ ¿Qué dimensión tiene T_i, para todo $i = 1, \ldots, n$?
   $b)$ Probar que
$$AB = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Para resolver el apartado $b)$, es importante tal como lo pide el apartado $a)$, identificar el tamaño de T_i.

Primero observemos que, como A es una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$ entonces AB es una matriz $m \times p$:

$$
\begin{array}{cc}
 & \left[\begin{array}{c} \\ \\ \quad\quad\quad B \quad\quad\quad \\ \\ \\ \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{c} \\ \quad\quad A \quad\quad \\ \\ \end{array}\right] & \left[\begin{array}{c} \\ \quad\quad\quad AB \quad\quad\quad \\ \\ \end{array}\right].
\end{array}
$$

$$\begin{array}{cc} & \left[\begin{array}{ccc} \\ & B & \\ \\ \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccc} & A & \end{array}\right] & \left[\begin{array}{ccc} & AB & \end{array}\right]. \end{array}$$

Por otro lado, calculamos el tamaño de T_i:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \qquad B \qquad \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \quad A \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \qquad AB \qquad \end{bmatrix} \end{array}.$$

Por otro lado, calculamos el tamaño de T_i:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \qquad B_i \qquad \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A^i \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \qquad T_i \qquad \end{bmatrix} \end{array},$$

$$\begin{array}{cc} & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & B & \\ & & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & A & \\ & & \end{array}\right] & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & AB & \\ & & \end{array}\right] \end{array}.$$

Por otro lado, calculamos el tamaño de T_i:

$$\begin{array}{cc} & \left[\begin{array}{ccc} & B_i & \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{c} \\ A^i \\ \\ \end{array}\right] & \left[\begin{array}{ccc} & & \\ & T_i & \\ & & \end{array}\right] \end{array},$$

A^i es una matriz $m \times 1$ y B_i una matriz $1 \times p$ entonces T_i es una matriz $m \times p$. Entonces el tamaño de la matriz $\sum_{i=1}^{n} T_i$ es $m \times p$ y coincide con el tamaño de la matriz AB.

Si $\begin{bmatrix} \\ A^i \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ y

$\begin{bmatrix} & B_i & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i1} & \dots & b_{ik} & \dots & b_{ip} \end{bmatrix}$ luego:

Si $\begin{bmatrix} \\ A^i \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ y

$\begin{bmatrix} \quad B_i \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i1} & \ldots & b_{ik} & \ldots & b_{ip} \end{bmatrix}$ luego:

$$\begin{bmatrix} \\ \quad T_i \quad \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i}b_{i1} & a_{1i}b_{i2} & \ldots & a_{1i}b_{ip} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{ii}b_{i1} & a_{ii}b_{i2} & \ldots & a_{ii}b_{ip} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{mi}b_{i1} & a_{mi}b_{i2} & \ldots & a_{mi}b_{ip} \end{bmatrix}.$$

Entonces,

Entonces,

$$\left[\begin{array}{c} \\ T_1 \\ \\ \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{11}b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}b_{11} & \dots & a_{i1}b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1}b_{11} & \dots & a_{m1}b_{1p} \end{bmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{c} \\ T_2 \\ \\ \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{12}b_{21} & \dots & a_{12}b_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i2}b_{21} & \dots & a_{i2}b_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2}b_{21} & \dots & a_{m2}b_{2p} \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & T_n & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{1n}b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{in}b_{n1} & \dots & a_{in}b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{mn}b_{np} \end{bmatrix}.$$

$$
\vdots
$$

$$
\begin{bmatrix} & & \\ & T_n & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{1n}b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{in}b_{n1} & \dots & a_{in}b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{mn}b_{np} \end{bmatrix}.
$$

Así resulta,

$$\vdots$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & T_n & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{1n}b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{in}b_{n1} & \dots & a_{in}b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{mn}b_{np} \end{bmatrix}.$$

Así resulta,

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = \begin{bmatrix} A_1B^1 & \dots & A_1B^p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_iB^1 & \dots & A_iB^p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_mB^1 & \dots & A_mB^p \end{bmatrix} = AB.$$

Outline

7. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y $B = E_{ij}(\ell)A$. Entonces, probar que para todo $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i$, $B_k = A_k$ y además, $B_i = A_i + \ell A_j$ si $i \neq j$.

7. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y $B = E_{ij}(\ell)A$. Entonces, probar que para todo $k = 1, \ldots, n$, $k \neq i$, $B_k = A_k$ y además, $B_i = A_i + \ell A_j$ si $i \neq j$.

Recordemos que cada fila de $B = E_{ij}(\ell)A$ es una combinación lineal de las filas de A. Cada fila k-ésima de B, B_k, es la combinación lineal de las filas de A donde los escalares de la combinación coinciden con las componentes del vector $(E_{ij}(\ell))_k$.

- Consideramos $k \neq i$, luego
$$(E_{ij}(\ell))_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{pos. } k}, 0, \ldots, 0).$$

- Consideramos $k \neq i$, luego
$$(E_{ij}(\ell))_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{pos. } k}, 0, \ldots, 0).$$

  Entonces,

- Consideramos $k \neq i$, luego

$$(E_{ij}(\ell))_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{pos. } k}, 0, \ldots, 0).$$

Entonces,

$$B_k = (E_{ij}(\ell))_k A = 0 \cdot A_1 + \ldots + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \ldots + 0 \cdot A_n = A_k.$$

- Consideramos $k \neq i$, luego
$$(E_{ij}(\ell))_k = (0,\ldots,\underbrace{1}_{\text{pos. } k},0,\ldots,0).$$
Entonces,
$$B_k = (E_{ij}(\ell))_k A = 0\cdot A_1 + \ldots + 1\cdot A_k + 0\cdot A_{k+1} + \ldots + 0\cdot A_n = A_k.$$
- Consideramos $k = i$ y sin pérdida de generalidad supongamos $i < j$, luego

- Consideramos $k \neq i$, luego
$$(E_{ij}(\ell))_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{pos. } k}, 0, \ldots, 0).$$
Entonces,
$$B_k = (E_{ij}(\ell))_k A = 0 \cdot A_1 + \ldots + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \ldots + 0 \cdot A_n = A_k.$$
- Consideramos $k = i$ y sin pérdida de generalidad supongamos $i < j$, luego
$$(E_{ij}(\ell))_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{pos. } i}, 0, \ldots, \underbrace{\ell}_{\text{pos. } j}, \ldots, 0).$$

- Consideramos $k \neq i$, luego
$$(E_{ij}(\ell))_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{pos. } k}, 0, \ldots, 0).$$
Entonces,
$$B_k = (E_{ij}(\ell))_k A = 0 \cdot A_1 + \ldots + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \ldots + 0 \cdot A_n = A_k.$$
- Consideramos $k = i$ y sin pérdida de generalidad supongamos $i < j$, luego
$$(E_{ij}(\ell))_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{pos. } i}, 0, \ldots, \underbrace{\ell}_{\text{pos. } j}, \ldots, 0).$$
Entonces,

- Consideramos $k \neq i$, luego
$$(E_{ij}(\ell))_k = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{pos. } k}, 0, \ldots, 0).$$
Entonces,
$$B_k = (E_{ij}(\ell))_k A = 0 \cdot A_1 + \ldots + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \ldots + 0 \cdot A_n = A_k.$$
- Consideramos $k = i$ y sin pérdida de generalidad supongamos $i < j$, luego
$$(E_{ij}(\ell))_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{pos. } i}, 0, \ldots, \underbrace{\ell}_{\text{pos. } j}, \ldots, 0).$$
Entonces,
$$B_i = (E_{ij}(\ell))_i A =$$
$$0 \cdot A_1 + \ldots + 1 \cdot A_i + 0 \cdot A_{i+1} + \ldots + \ell A_j + 0 \cdot A_{j+1} + \ldots + 0 \cdot A_n = A_i + \ell A_j.$$

Outline

12. En cada ítem, encontrar la matriz C que transforma A en B, es decir, C tal que $CA = B$.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 9 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 8 \\ 0 & 7 & -1 & -6 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

B **se obtiene a partir de** A**, permutando las filas** A_1 **y** A_2. La matriz de permutación que representa esta transformación es:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

B se obtiene a partir de A, permutando las filas A_1 y A_2. La matriz de permutación que representa esta transformación es:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

B se obtiene a partir de A, permutando las filas A_1 y A_2. La matriz de permutación que representa esta transformación es:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

luego:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -7 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

B se obtiene a partir de A, permutando las filas A_1 y A_2. La matriz de permutación que representa esta transformación es:

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

luego:

$$CA = B \text{ con } C = P_{12}.$$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

B se obtiene a partir de A, cambiando la fila 3 de A por la fila 3 más 3 veces la fila 2 de A. Es decir, $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$ y $B_3 = A_3 + 3A_2$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

B **se obtiene a partir de** A**, cambiando la fila** 3 **de** A **por la fila** 3 **más** 3 **veces la fila** 2 **de** A. Es decir, $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$ y $B_3 = A_3 + 3A_2$.
La matriz que representa esta transformación es:

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

B se obtiene a partir de A, cambiando la fila 3 de A por la fila 3 más 3 veces la fila 2 de A. Es decir, $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$ y $B_3 = A_3 + 3A_2$.
La matriz que representa esta transformación es:

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

B se obtiene a partir de A, cambiando la fila 3 de A por la fila 3 más 3 veces la fila 2 de A. Es decir, $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$ y $B_3 = A_3 + 3A_2$.
La matriz que representa esta transformación es:

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

luego:

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 9 & 5 \end{bmatrix}$, $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

¿Cuál es la matriz C que transforma A en B?

B se obtiene a partir de A, cambiando la fila 3 de A por la fila 3 más 3 veces la fila 2 de A. Es decir, $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2$ y $B_3 = A_3 + 3A_2$.
La matriz que representa esta transformación es:

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

luego:

$$CA = B \text{ con } C = E_{32}.$$

OUTLINE

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A inversible, es única.

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A inversible, es única.

Vamos a probar la unicidad de la descomposición LU:

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A inversible, es única.

Vamos a probar la unicidad de la descomposición LU:

Supongamos que $A = L_1U_1 = L_2U_2$ con:

- U_1 y U_2 matrices triangulares superiores,
- L_1 y L_2 matrices triangulares inferiores con $1's$ en la diagonal.

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A inversible, es única.

Vamos a probar la unicidad de la descomposición LU:

Supongamos que $A = L_1U_1 = L_2U_2$ con:

- U_1 y U_2 matrices triangulares superiores,
- L_1 y L_2 matrices triangulares inferiores con $1's$ en la diagonal.

Observemos que L_1 y L_2 son inversibles (¿por qué?).

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A inversible, es única.

Vamos a probar la unicidad de la descomposición LU:

Supongamos que $A = L_1U_1 = L_2U_2$ con:

- U_1 y U_2 matrices triangulares superiores,
- L_1 y L_2 matrices triangulares inferiores con $1's$ en la diagonal.

Observemos que L_1 y L_2 son inversibles (¿por qué?). Como A es inversible resultan U_1 y U_2 inversibles (¿por qué?).

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A inversible, es única.

Vamos a probar la unicidad de la descomposición LU:

Supongamos que $A = L_1U_1 = L_2U_2$ con:

- U_1 y U_2 matrices triangulares superiores,
- L_1 y L_2 matrices triangulares inferiores con $1's$ en la diagonal.

Observemos que L_1 y L_2 son inversibles (¿por qué?). Como A es inversible resultan U_1 y U_2 inversibles (¿por qué?).

Entonces, $$A = L_1U_1 = L_2U_2 \Rightarrow L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}.$$

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A inversible, es única.

Vamos a probar la unicidad de la descomposición LU:

Supongamos que $A = L_1U_1 = L_2U_2$ con:

- U_1 y U_2 matrices triangulares superiores,
- L_1 y L_2 matrices triangulares inferiores con $1's$ en la diagonal.

Observemos que L_1 y L_2 son inversibles (¿por qué?). Como A es inversible resultan U_1 y U_2 inversibles (¿por qué?).

Entonces, $$A = L_1U_1 = L_2U_2 \;\Rightarrow\; L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}.$$

Ahora bien, $L_2^{-1}L_1$ es una matriz triangular inferior y $U_2U_1^{-1}$ es una matriz triangular superior (¿por qué?). Entonces,

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A inversible, es única.

Vamos a probar la unicidad de la descomposición LU:

Supongamos que $A = L_1U_1 = L_2U_2$ con:

- U_1 y U_2 matrices triangulares superiores,
- L_1 y L_2 matrices triangulares inferiores con $1's$ en la diagonal.

Observemos que L_1 y L_2 son inversibles (¿por qué?). Como A es inversible resultan U_1 y U_2 inversibles (¿por qué?).

Entonces, $$A = L_1U_1 = L_2U_2 \;\Rightarrow\; L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}.$$

Ahora bien, $L_2^{-1}L_1$ es una matriz triangular inferior y $U_2U_1^{-1}$ es una matriz triangular superior (¿por qué?). Entonces,

$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ es una matriz diagonal, y como $L_2^{-1}L_1$ tiene $1's$ en la diagonal, resulta:

17. Probar que la descomposición LU y LDV de una matriz A inversible, es única.

Vamos a probar la unicidad de la descomposición LU:

Supongamos que $A = L_1U_1 = L_2U_2$ con:

- U_1 y U_2 matrices triangulares superiores,
- L_1 y L_2 matrices triangulares inferiores con $1's$ en la diagonal.

Observemos que L_1 y L_2 son inversibles (¿por qué?). Como A es inversible resultan U_1 y U_2 inversibles (¿por qué?).

Entonces, $\quad A = L_1U_1 = L_2U_2 \;\Rightarrow\; L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$.

Ahora bien, $L_2^{-1}L_1$ es una matriz triangular inferior y $U_2U_1^{-1}$ es una matriz triangular superior (¿por qué?). Entonces,

$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$ es una matriz diagonal, y como $L_2^{-1}L_1$ tiene $1's$ en la diagonal, resulta:

$$L_2^{-1}L_1 = I = U_2U_1^{-1} \;\Rightarrow\; L_1 = L_2 \text{ y } U_1 = U_2.$$

Outline

19. Encontrar los factores L, D, U para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

Resolver el sistema $A^T x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

19. Encontrar los factores L, D, U para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

Resolver el sistema $A^T x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \overset{E_{31}(-3)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \overline{U}.$$

19. Encontrar los factores L, D, U para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

Resolver el sistema $A^T x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \overset{E_{31}(-3)}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \overline{U}.$$

$$E_{31}(-3)A = \overline{U} \;\Rightarrow\; A = (E_{31}(-3))^{-1}\overline{U} \;\Rightarrow\; A = L\overline{U} \;\Rightarrow\; A = LDU,$$

19. Encontrar los factores L, D, U para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$.

Resolver el sistema $A^T x = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \overset{E_{31}(-3)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \overline{U}.$$

$$E_{31}(-3)A = \overline{U} \Rightarrow A = (E_{31}(-3))^{-1}\overline{U} \Rightarrow A = L\overline{U} \Rightarrow A = LDU,$$

donde:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } U = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aún falta resolver el sistema $A^T x = b$ con $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Aún falta resolver el sistema $A^T x = b$ con $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Como $A = LDU$ luego, $A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T$.

Aún falta resolver el sistema $A^T x = b$ con $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Como $A = LDU$ luego, $A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T$.

Entonces, $A^T x = b \iff \left(U^T D L^T\right) x = b$.

Aún falta resolver el sistema $A^T x = b$ con $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Como $A = LDU$ luego, $A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T$.

Entonces, $A^T x = b \Leftrightarrow \left(U^T D L^T\right) x = b$.

Por lo tanto, para resolver el sistema anterior resolvemos:

1. $U^T y = b$, donde U^T y b son datos y hallamos $y = \left(D L^T\right) x$.
2. $Dz = y$, donde D e y son datos y hallamos $z = L^T x$.
3. $L^T x = z$, donde L^T y z son datos y hallamos x.

Aún falta resolver el sistema $A^T x = b$ con $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Como $A = LDU$ luego, $A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T$.

Entonces, $A^T x = b \Leftrightarrow \left(U^T D L^T\right) x = b$.

Por lo tanto, para resolver el sistema anterior resolvemos:

1. $U^T y = b$, donde U^T y b son datos y hallamos $y = \left(DL^T\right) x$.
2. $Dz = y$, donde D e y son datos y hallamos $z = L^T x$.
3. $L^T x = z$, donde L^T y z son datos y hallamos x.

Así obtenemos x solución de $A^T x = b$.

Aún falta resolver el sistema $A^T x = b$ con $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Como $A = LDU$ luego, $A^T = (LDU)^T = U^T D^T L^T = U^T D L^T$.

Entonces, $A^T x = b \Leftrightarrow \left(U^T D L^T\right) x = b$.

Por lo tanto, para resolver el sistema anterior resolvemos:

1. $U^T y = b$, donde U^T y b son datos y hallamos $y = \left(DL^T\right) x$.
2. $Dz = y$, donde D e y son datos y hallamos $z = L^T x$.
3. $L^T x = z$, donde L^T y z son datos y hallamos x.

Así obtenemos x solución de $A^T x = b$.

Para hacer menos cuentas, podemos considerar
$A^T = (LDU)^T = (L\overline{U})^T = \overline{U}^T L^T$ y aplicar un razonamiento similar.

Outline

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)}$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2, \frac{2}{7}F_3}$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2, \frac{2}{7}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\ \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2, \frac{2}{7}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}\left(\frac{5}{2}\right)}$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2, \frac{2}{7}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right]$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2,\frac{2}{7}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{12}(3)}$$

23. Encontrar cuando sea posible, las matrices inversas de las matrices de coeficientes del ejercicio 14., utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$c)\quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2,\frac{2}{7}F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}\left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] \xrightarrow{E_{12}(3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{15}{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right] =$$

$[I|A^{-1}]$.

Outline

28. Sea R una matriz $m \times n$. Probar que RR^T y $R^T R$ son simétricas.
Sugerencia: Recordar que $(AB)_{ij} = A_i B^j$.

28. Sea R una matriz $m \times n$. Probar que RR^T y R^TR son simétricas.
Sugerencia: Recordar que $(AB)_{ij} = A_iB^j$.

Sin hacerle caso a la sugerencia, si utilizamos las propiedades de matrices:

- $(A^T)^T = A$,
- $(AB)^T = B^TA^T$,

es sencillo demostrar que RR^T y R^TR son simétricas.

28. Sea R una matriz $m \times n$. Probar que RR^T y R^TR son simétricas.
Sugerencia: Recordar que $(AB)_{ij} = A_iB^j$.

Sin hacerle caso a la sugerencia, si utilizamos las propiedades de matrices:

- $(A^T)^T = A$,
- $(AB)^T = B^TA^T$,

es sencillo demostrar que RR^T y R^TR son simétricas.

Ahora bien, las propiedades antes mencionadas no están probada. ¿Usamos la sugerencia para probar lo pedido?

28. Sea R una matriz $m \times n$. Probar que RR^T y R^TR son simétricas.
Sugerencia: Recordar que $(AB)_{ij} = A_iB^j$.

Sin hacerle caso a la sugerencia, si utilizamos las propiedades de matrices:

- $(A^T)^T = A$,
- $(AB)^T = B^TA^T$,

es sencillo demostrar que RR^T y R^TR son simétricas.

Ahora bien, las propiedades antes mencionadas no están probada. ¿Usamos la sugerencia para probar lo pedido?

Debemos ver si para todo i,j,

- $\left(RR^T\right)_{ij} = \left(RR^T\right)_{ji}$ lo que implica que RR^T es simétrica, y
- $\left(R^TR\right)_{ij} = \left(R^TR\right)_{ji}$ lo que implica que R^TR es simétrica.

Observemos que

Observemos que

- $(RR^T)_{ij} = R_i(R^T)^j = R_i(R_j)^T$.

Observemos que

- $(RR^T)_{ij} = R_i(R^T)^j = R_i(R_j)^T$.
- $(RR^T)_{ji} = R_j(R^T)^j = R_j(R_i)^T$.

Observemos que

- $(RR^T)_{ij} = R_i(R^T)^j = R_i(R_j)^T$.
- $(RR^T)_{ji} = R_j(R^T)^j = R_j(R_i)^T$.

Además, dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ vectores filas,

Observemos que

- $(RR^T)_{ij} = R_i(R^T)^j = R_i(R_j)^T$.
- $(RR^T)_{ji} = R_j(R^T)^j = R_j(R_i)^T$.

Además, dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ vectores filas,

$$uv^T = vu^T. \quad (*)$$

Observemos que

- $(RR^T)_{ij} = R_i(R^T)^j = R_i(R_j)^T$.
- $(RR^T)_{ji} = R_j(R^T)^j = R_j(R_i)^T$.

Además, dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ vectores filas,

$$uv^T = vu^T. \quad (*)$$

Por lo tanto,

Observemos que

- $(RR^T)_{ij} = R_i(R^T)^j = R_i(R_j)^T$.
- $(RR^T)_{ji} = R_j(R^T)^j = R_j(R_i)^T$.

Además, dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ vectores filas,

$$uv^T = vu^T. \quad (*)$$

Por lo tanto,

$$(RR^T)_{ij} = R_i(R_j)^T \stackrel{(*)}{=} R_j(R_i)^T = (RR^T)_{ji},$$

Observemos que

- $(RR^T)_{ij} = R_i(R^T)^j = R_i(R_j)^T$.
- $(RR^T)_{ji} = R_j(R^T)^j = R_j(R_i)^T$.

Además, dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ vectores filas,

$$uv^T = vu^T. \quad (*)$$

Por lo tanto,

$$(RR^T)_{ij} = R_i(R_j)^T \overset{(*)}{=} R_j(R_i)^T = (RR^T)_{ji},$$

y así resulta RR^T simétrica.

Observemos que

- $(RR^T)_{ij} = R_i(R^T)^j = R_i(R_j)^T$.
- $(RR^T)_{ji} = R_j(R^T)^j = R_j(R_i)^T$.

Además, dados $u, v \in \mathbb{R}^n$ vectores filas,

$$uv^T = vu^T. \qquad (*)$$

Por lo tanto,

$$(RR^T)_{ij} = R_i(R_j)^T \overset{(*)}{=} R_j(R_i)^T = (RR^T)_{ji},$$

y así resulta RR^T simétrica.

De modo similar se prueba que $R^T R$ es simétrica.