Álgebra Lineal - LCC - LM - PM **2020**

Examen Final - 07/09/2020

Apellido y Nombre: Legajo: Carrera:

Condición (Regular-Año / Libre):

********** ********** **********

1. Sea $\mathbb{R}_1[x]$ el espacio vectorial de polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 1 (incluyendo el polinomio nulo), con las operaciones habituales.
   Para $p,q \in \mathbb{R}_1[x]$, se define el producto $\langle .\,,.\rangle$ tal que $\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$.
   a) Demostrar que $\langle .\,,.\rangle$ es un producto interno.
   b) Sea $W = \{p \in \mathbb{R}_1[x] : p(x) = a_0 + a_1 x \wedge a_0 = 0\}$. Hallar $W^{\perp}$ y $proy_{s/W}(3x+1)$, respecto a $\langle .\,,.\rangle$
2. Sea A una matriz cuadrada real:
   a) Probar que $A^T A$ tiene autovalores reales.
   b) Probar que $A^T A$ tiene autovalores no negativos.
   Sugerencia: Sea (λ, x) autovalor y autovector de $A^T A$. Probar que $\lambda \|x\|^2 = \|Ax\|^2$.
   c) Probar que $I + A^T A$ es invertible.
3. El algoritmo RankPage de Google calcula un vector estocástico (entradas positivas que suman 1) v^* cuyas componentes que se usan para asignar un ranking de importancia entre las páginas de la red asociadas a una búsqueda. Dicho v^* es un autovector particular asociado a una matriz M definida por Page & Brin a partir de la matriz de transición asociada a las relaciones entre las páginas de la red.
   Suponga que la red se conforma de las siguiente páginas con los respectivos links:
   - Página 1: sin links
   - Página 2 y 3: link a página 1
   - Página 4 y 5 : link a página 2
   - Página 6,7, 8: link a página 3

   a) Determine la matriz de transición A asociada a la red. y la matriz M asociada a esta red con *dumping factor* $p = 0{,}15$, escrita en función de A. ¿Cómo se interpreta el parámetro p?
   b) ¿Cómo se define v^* en función de M? ¿Qué resultado nos garantiza la existencia de un único tal v^*?
   c) ¿Es posible utilizar el método de eliminación de Gauss para encontrar a v^*? Justifique.
   d) ¿Qué método se emplea sobre redes de millones de páginas y por qué?
4. Sea A es una matriz real.
   a) Pruebe que A es una matriz $m \times n$ de rango 1 si y solo si existen $u \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ y $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tales que $A = uv^T$.
   b) Pruebe que si $u \in \mathbb{R}^n$ y $\|u\| = 1$, la matriz $A = uu^T$ es una matriz de proyección, esto es, A es simétrica e idempotente ($A^2 = A$).
   c) Pruebe que si A es una matriz simétrica, entonces A es combinación lineal de matrices de rango 1. ¿Qué relación existe entre A y cada matriz de rango 1 en esta combinación lineal?
5. Describir el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt (G-S). ¿Qué relación existe entre el k-ésimo vector generado por G-S y los $k-1$ vectores generados anteriormente? Justifique.