Probabilidad y Estadística

Trabajo Práctico: Unidad 6

12.06.2020

Obukhova Daria

O-1732/9

Demagistris Santiago
D-4110/6

1. Un juego consiste en apostar una cantidad c de dinero a un número de entre diez equiprobables. Si sale ese número el beneficio obtenido es 5c, mientras que si no sale se pierde c, es decir, el beneficio es -c. ¿Cuál es la probabilidad de que después de 50 apuestas no se pierda dinero? Considerar que siempre se apuesta la misma cantidad c de dinero.

Defino X : "Cuánta plata gano en una jugada"

Debería resolver el ejercicio para un valor genérico de $c>0$

$$E(X) = \frac{1}{10} \cdot 5 + \frac{9}{10} \cdot (-1) = -\frac{2}{5}$$

$$V(X) = \frac{9}{10} \cdot \left(-1 + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{10} \cdot \left(5 + \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$$

Defino Y : "Cuánta plata gano en 50 jugadas", que por definición es la suma de 50 X

Usamos TCL y aproximamos a Y como

¿Qué supuestos asume para poder usar TCL?

$$\mu = n \cdot E(X) = 50 \cdot -\frac{2}{5} = -20$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot V(X)} = \sqrt{50 \cdot \frac{81}{25}} = 12,73$$

$$\therefore Y \sim N(-20,\ 12.73)$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(Y > 0) &= 1 - P(Y \leq 0) \\ &= 1 - \phi\left(\frac{0+20}{12,73}\right) \\ &= 1 - \phi(\overset{1,57}{\cancel{0,57}}) \\ &= 1 - 0,9418 = 0,0582 \end{aligned}$$

2. Se supone que la probabilidad de que un pasajero opte por una compañía aérea dada para hacer un viaje es 0,5. Tomando un grupo de 400 pasajeros potenciales, esta compañía vende billetes a cualquiera que se lo solicita mientras que la capacidad de su avión es de 230 pasajeros. Se pide:

a) La probabilidad de que la compañía tenga un overbooking, es decir, que un pasajero no tenga asiento.

b) Si existen 10 compañías aéreas que realizan el mismo viaje y cuyas condiciones son similares a la anterior, ¿cuál será la probabilidad de que al menos dos de ellas tenga un overbooking?

Sea X la variable aleatoria " cantidad de pasajeros en una cierta compañía aérea ", podemos observar que X tiene una distribución binomial con una probabilidad de 0,5. Sabiendo que n = 400 y suponiendo cada decisión del pasajero independiente podemos utilizar el TCL, aproximando la distribución binomial a una distribución normal con los siguientes parámetros :

$$X \sim Bi\ (400,\ 0,5) \Rightarrow$$

$$(1) \qquad E(X) = 400 \cdot 0,5 = 200$$

$$(2) \qquad V(X) = 200\ (1 - 0,5) = 100$$

$$por\ (1)\ y\ (2)\quad los\ parámetros\ de\ la\ aproximacion\ normal\ son\ 200\ y\ 10$$

$$\therefore\ X \sim N(200, 10)$$

a)

La compañía va a sufrir un overbooking si más de 231 pasajeros la escogieron, por lo tanto debemos calcular

$$
\begin{aligned}
P\,(X \geq 231) &= 1 - P\,(X < 231) \\
&= 1 - \phi\left(\frac{231-\mu}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \phi\,(3,1) \quad 0{,}00135 \\
&= 1 - 0{,}999 = 0{,}001
\end{aligned}
$$

b)

Defino Z = "Cantidad de empresas con overbooking"

$$Z \sim Bi\,(10,\ 0.001)$$

¿Qué supuestos asume para plantear un modelo de distribución binomial?

$$
\begin{aligned}
P(Z \geq 2) &= 1 - P(Z < 2) \\
&= 1 - \left(\binom{10}{0} \cdot 0{,}999^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}999^{9}\right) \\
&\simeq \cancel{0{,}000045}
\end{aligned}
$$

0,00008

¿De qué otra forma se puede encontrar una solución aproximada del problema?

3. Una pieza puede presentar distintos tipos de defectos. Según su importancia para el funcionamiento de la pieza se clasificaron en: defecto tipo D1 o D2.

Sean las variables aleatorias:

X = "nº de defectos tipo D1 que presenta una pieza"
Y = "nº de defectos tipo D2 que presenta una pieza"

Se sabe que:

- E(X) = 0,3 ; V(X) = 0,21 ; E(Y) = 0,8 ; V(Y) = 0,56
- 20% de las piezas tienen 2 defectos tipo D2
- (b) 15% de las piezas tienen 1 defecto tipo D1 y ninguno tipo D2
- (c) 50% de las piezas que no tienen defectos tipo D1, tienen 1 defecto tipo D2
- X e Y son variables aleatorias discretas

Al ser variables aleatorias discretas se puede obtener :

$$E\ (X)\ =\ 0\ \cdot\ p_x\ (0)\ +\ 1\ \cdot\ p_x\ (1)\ =\ p_x\,(1)$$

$$p_x\ (1) =\ E\ (X)\ =\ 0,3$$
$$p_x\ (0)\ =\ 1\ -\ p_x\,(1)\ =\ 0,7$$

$$E\ (Y)\ =\ 0\ \cdot\ p_y\ (0)\ +\ 1\ \cdot\ p_y\ (1)\ +\ 2\ \cdot\ p_y\ (2) =\ p_y\,(1)\ +\ 2\ \cdot\ p_y\ (2)$$

$$(1) \qquad p_y\ (1)\ +\ 2\ \cdot\ p_y\ (2) =\ E\ (Y)\ =\ 0,8$$

$$V\ (Y)\ =\ E\left((Y)^2\right)\ -\ E\ (Y)^{\ 2}\ =\ E\left((Y)^2\right)\ -\ 0,64\ =\ p_y\,(1)\ +\ 4\ \cdot\ p_y\ (2)\ -\ 0,64$$

$$\Longleftrightarrow\ \ p_y\ (1)\ \ +\ \ 4\ \cdot\ p_y\ (2)\ \ = (0,56\ +\ 0,64)\ \ =\ \tfrac{6}{5}\ \ \Longleftrightarrow\ \ (2) \qquad p_y\,(1)\ \ =\ \tfrac{6}{5}\ -\ 4\ \cdot\ p_y\ (2)$$

por (1) y (2) sabemos que

$$\frac{6}{5}\ -4\ \cdot\ p_y\ (2)\ \ +2\ \cdot\ p_y\ (2)\ \ =\ 0,8$$

$$\Longleftrightarrow\ \ -2 \cdot p_y\ (2)\ \ =\ \ -\frac{2}{5}\ \ \Longleftrightarrow\ \ p_y\ (2)\ \ =\ \frac{1}{5}$$

por lo tanto podemos obtener

$$p_y(1) = \frac{6}{5} - 4 \cdot p_y\ (2) = \frac{6}{5} - 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

y

$$p_y(0) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Por (c) sabemos que :

$$P(Y = 1 ;\ X = 0) = 0,5 \cdot p_x(0) = 0,35$$

Por (b) sabemos que :

$$P(X = 1 ;\ Y = 0) = 0,15$$

a) Teniendo en cuenta todos los datos, complete la siguiente tabla probabilidades conjuntas y sus marginales

X\Y	0	1	2	$p_x(X)$
0	0,25	0,35	0,1	0,7
1	0,15	0,05	0,1	0,3
$p_y(Y)$	0,4	0,4	0,2	1

Por los datos obtenidos en la tabla :

$$P(Y = 1 ;\ X = 0) = 0,5 \cdot p_x(0) = 0,35$$

Obtención de P (X = 0 ; Y = 0)

$$0,4 = p_y\ (0) = P\ (X = 0\,;\, Y = 0) + P\ (X = 1\,;\, Y = 1)$$
$$= P\ (X = 0\,;\, Y = 0) + 0,15$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$P\ (X = 0\,;\, Y = 0) = 0,4 - 0,15 = 0,25$$

Obtención de P (X = 1 ; Y = 2)

$$0,3 = p_x\ (1) = P\ (X = 1\,;\, Y = 0) + P\ (X = 1\,;\, Y = 1)$$
$$+ P\ (X = 1\,;\, Y = 2)$$
$$= P\ (X = 1\,;\, Y = 2) + 0,20$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$P\ (X = 1\,;\, Y = 2) = 0,3 - 0,20 = 0,10$$

Obtención de P (X = 1 ; Y = 2)

$$0,7 = p_x\ (0) = P\ (X = 0\,;\, Y = 0) + P\ (X = 0\,;\, Y = 1)$$
$$+ P\ (X = 0\,;\, Y = 2)$$
$$= P\ (X = 0\,;\, Y = 2) + 0,6$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$P\ (X = 0\,;\, Y = 2) = 0,7 - 0,6 = 0,1$$

b) Analice si X e Y son variables aleatorias independientes. En caso de no serlo, halle el coeficiente de correlación. Justifique su respuesta.

No son variables aleatorias independientes ya que por ejemplo :

$$P(X = 1 \mid Y = 1|) = \frac{P\ (X = 1\ ;\ Y = 1)}{p_y\ (1)} = 0,125 \ \ != p_x\ (1)$$

Coeficiente de correlación

$$\rho_{xy} = \frac{E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\}}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$\rho_{xy} = \frac{E\{[X \cdot Y - X \cdot E\ (Y) + E(X) \cdot Y - E\ (X) \cdot E(Y)]\}}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$\rho_{xy} = \frac{E\ (X \cdot Y) - E\ (X \cdot E\ (Y)) + E\ (E(X) \cdot Y\ ) - E\ (E\ (X) \cdot E(Y))}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$\rho_{xy} = \frac{E\ (X \cdot Y) - E\ (X) \cdot E(Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$\begin{aligned} E\ (X \cdot Y) &= p(1,1) \cdot 1 \cdot 1 + p(1,2) \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 0,05 + 0,2 = 0,25 \end{aligned}$$

$$E\ (X \cdot Y) = 0,25 \Rightarrow p_{xy} = \frac{0{,}25 - 0{,}3 \cdot 0{,}8}{0{,}343} \simeq 0,03$$

c) Calcule P(Y=2/X=0). Interprete el resultado de la probabilidad obtenido en función de la población en estudio.

$$P\ (Y = 2 \mid X = 0|) = \frac{P\ (X = 0\ ;\ Y = 2)}{p_x\ (0)} = \frac{0,1}{0,7} \sim 0,143$$

Este resultado se puede interpretar como que el 14.3% de las piezas que no poseen defectos del tipo D1 tienen 2 defectos del tipo D2

d) Un punto de inspección pre-venta detecta el tipo y nº de defectos. El costo de reparación de cada tipo de defecto es diferente. Un defecto tipo D1 tiene un costo de reparación de \$3, en cambio uno tipo D2 tiene un costo de \$4. Halle el valor esperado y la varianza del costo de reparación por pieza.

Realizaremos ambos cálculos teniendo en cuenta la suma de variables aleatorias

Expresar este desarrollo de manera más clara y resumida

$$\begin{aligned} Costo_{reparación} &= p_x(0) \cdot 0 \cdot 3 + p_x(1) \cdot 1 \cdot 3 \\ &\quad + p_y(0) \cdot 0 \cdot 4 + p_y(1) \cdot 1 \cdot 4 \\ &\quad + p_y(2) \cdot 2 \cdot 4 \\ &= p_x(1) \cdot 3 + p_y(1) \cdot 4 + p_y(2) \cdot 8 \\ &= 0,3 \cdot 3 + 0,4 \cdot 4 + 0,2 \cdot 8 \\ &= 4,1 \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor esperado de costo de reparación es de \$ 4,1 por pieza.

Como las variables aleatorias X e Y son dependientes nos encontramos con que

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

En nuestro caso estamos interesados en

$$V(3X + 4Y) = 3^2 \cdot V(X) + 4^2 \cdot V(Y) + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot Cov(X,Y)$$

$$= 10,94 + 24 \cdot Cov(X,Y)$$

$$= 10,94 + 0,1 = 11,04$$

Por lo tanto la varianza del costo de reparación por pieza es de 11,04

La varianza está expresada en pesos al cuadrado