

Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

# PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

*Tp final*

Autor:

Demagistris, Santiago Ignacio

Agosto 2020

## 0.1 Ejercicio 1

a) El espacio muestral sobre el cual estamos trabajando es  $S=\{0,1\}$ , donde cara es 1 y cruz es 0.  $I_n$  y  $S_n$

$n = 100$  Cantidad de tiradas

```
simulacion = simular(n)
```

```
simular <- function(n){
```

```
  In <- tirarMoneda(n) (n tiradas de una moneda)
```

```
  Xn <- cumsum(In) (numero de caras al momento n - Frecuencia relativa acumulada -)
```

```
  vectorTiradas <- c(1:n)
```

```
  return (data.frame(Xn,vectorTiradas)) }
```

```
tirarMoneda<-function(n){ (Tirar moneda n veces)
```

```
  return(sample(0:1,100,replace = TRUE)) (Vector de longitud n donde cada posicion tiene 1 o 0) }
```

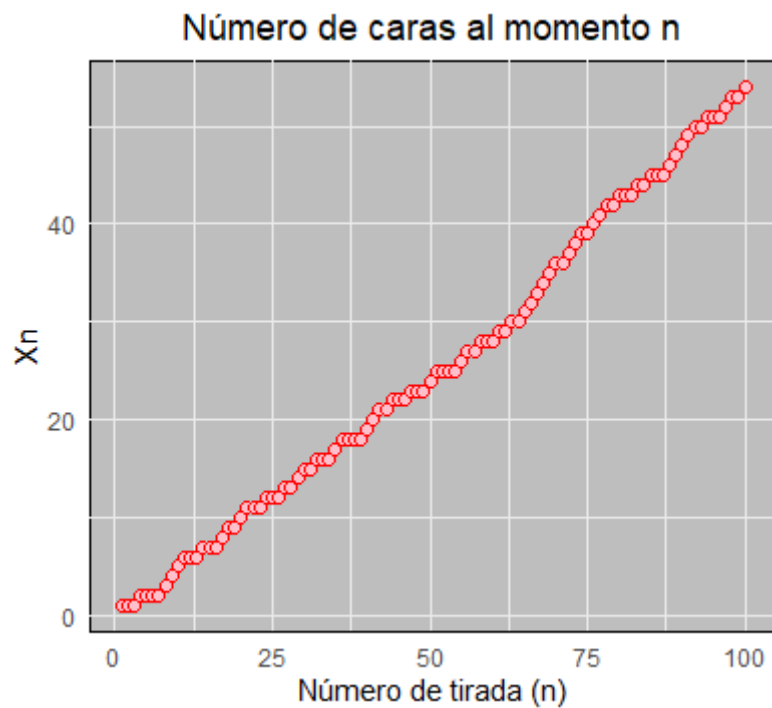


Figure 1: Tiradas de moneda

Sea  $A=\{\text{"Obtener cara al lanzar la moneda"}\}$ . Podemos observar que se obtuvo un total de 54 caras en este proceso, por lo tanto  $P(A) \simeq \frac{54}{100} = 0.54 = p$

b)

( $\mathbf{P(X=1)}$ ). Sabemos que  $X = \{\text{"Número de veces que ocurrió el evento A"}\}$  y que  $X \sim Bi(n, 0.54)$  (siendo  $p = 0.54$  observado en la simulación). Por lo tanto  $P(X = 1) = \binom{n}{1}(0.54)(0.46)^{n-1}$  y  $E(X) = n \cdot 0.54$ .

c) Sea  $Y = \text{Número de tiradas hasta que salgan 3 caras}$ .  $Y \sim \text{Pascal}$ , por lo que

$$P(Y = k) = \binom{k-1}{3-1} 0.54^3 0.46^{k-3} = \binom{k-1}{2} 0.54^3 0.46^{k-3}$$

y  $E(Y) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0.54} \simeq 5.55$ . Es decir que se espera que entre la 5ta y la 6ta tirada de la moneda obtengamos 3 caras.

d) La implementación que utilice para sesgar la moneda es la siguiente:

```
tirarMonedaSesgada <- function(n){
  return (sample(0:2,100, replace =TRUE)%%2) }
```

De esta manera trabajo sobre un espacio muestral  $S_x\{0, 1, 2\}$ , donde  $A = \{1\} = \{\text{"Obtuve cara"}\}$  y  $A^c = \{\text{"Obtuve Cruz"}\}$

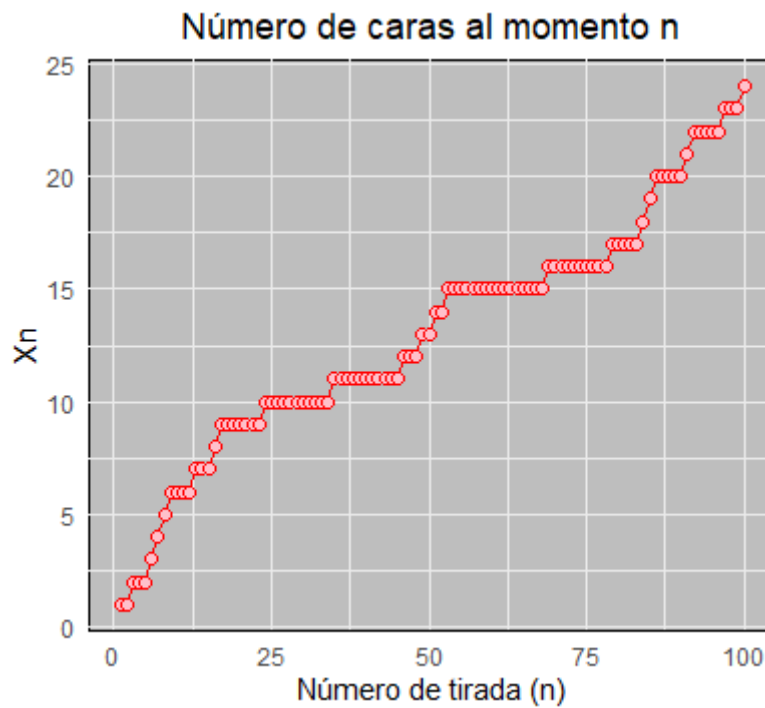


Figure 2: Tiradas de moneda sesgada

Al simular el proceso con  $n=100$  obtuve que salieron en total 24 caras, por lo tanto podría aproximar  $P(A) \simeq 0.24$ . Por lo tanto  $P(X = 1) = \binom{n}{1}(0.24)(0.76)^{n-1}$  y  $E(X) = n \cdot 0.24$

## 0.2 Ejercicio 2

Para simular la situacion implemente lo siguiente:

```
simular <- function(n){  
  
  In <- tirarMoneda(n) - Tiro n veces la moneda  
  
  Tiradas <- c(1:n) - Genero el eje X  
  
  Dn = variableAleatoria(In) - Obtengo la variable aleatoria Dn apartir de In  
  
  Xn = cumsum(Dn) - Obtengo el desplazamiento como la frecuencia relativa acumulada de Dn  
  
  proceso1 <- data.frame(In,Tiradas)  
  
  proceso2 <- data.frame(Dn,Tiradas)  
  
  midf <- data.frame( "Proceso1" = In, "Proceso2" = Xn )  
  
  return(midf)  
  
}  
  
tirarMoneda <- function(n){ - Tirar moneda n veces  
  
  return(sample(0:1,n,replace = TRUE))  
  
}  
  
variableAleatoria <- function(In){ - Obtengo Dn  
  
  Dn <- c()  
  
  for (i in In){  
  
    Dn <- c(Dn,(2 * i) - 1)  
  
  }  
  
  return (Dn)  
  
}
```

### Moneda vs Posicion vs Desplazamiento

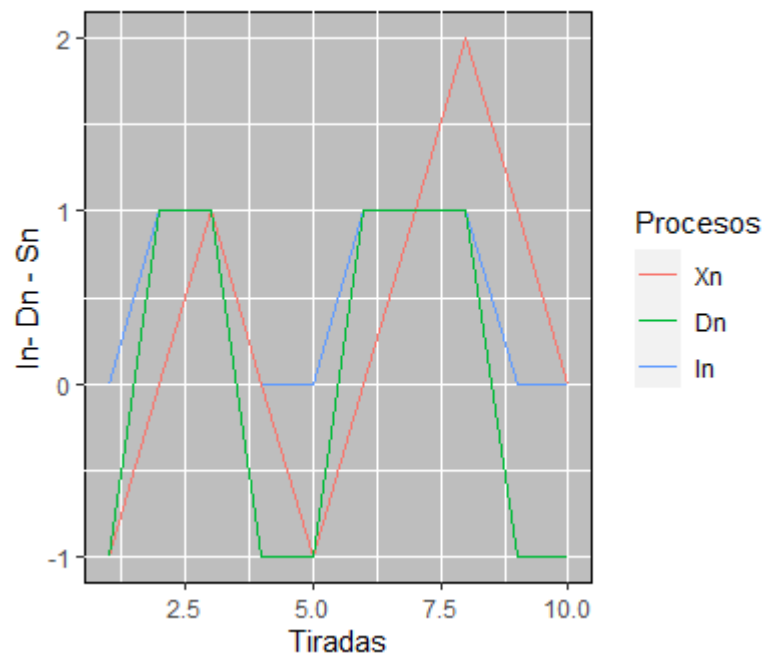


Tabla de frecuencias

In	Dn	Sn
0	-1	-1
1	1	0
1	1	1
0	-1	0
0	-1	-1
1	1	0
1	1	1
1	1	2
0	-1	1
0	-1	0

La trayectoria descrita por  $X_n$  es causa del lanzamiento de la moneda (10 veces en este caso). Cada vez que salga cara en la moneda el sujeto se desplazara 1 unidad en el espacio y cuando salga cruz un 0. (Cara representado con 1 y cruz representado con 0). La decision de desplazamiento esta dada por  $D_n$ , mientras que  $X_n$  solo describe la trayectoria, es decir la frecuencia acumulada de los resultados obtenidos.

### 0.3 Ejercicio 3

a) En R implemente lo siguiente para simular el proceso:

```
proceso <- function(plataInicial,S,p){

  limiteInferior = 0

  limiteSuperior = S

  plataActual = plataInicial

  ganar = p

  perder = 1-ganar

  vectorProbabilidad = c(ganar,perder)

  trayectoria = c(plataInicial)

  termino = FALSE

  while (!termino) {

    if(tirada(vectorProbabilidad) == ganar){

      plataActual = plataActual + 1 }

    else{

      plataActual = plataActual - 1 }

    trayectoria = c(trayectoria,plataActual)

    if(plataActual == limiteSuperior){termino = TRUE}

    if(plataActual == limiteInferior){termino = TRUE}

  }

  return (trayectoria[length(trayectoria)] == S)

}
```

```

tirada<-function(probabilidades){

probabilidades = sort(probabilidades)

intervaloAleatorio = 1000000 - Probabilidades de hasta 6 digitos despues del .

tirada = sample(1:intervaloAleatorio,1)

posicion = 1

for (i in probabilidades){

if (posicion == length(probabilidades)){

return (i) } if(tirada <= i*1000000){

return (i) Devuelvo la probabilidad que ocurrio }

posicion = posicion +1

} }

```

- b) Para realizar la simulacion usare  $k=50$ ,  $p=0.55$ ,  $S=100$ ,  $\text{perder}=0$ . El resultado obtenido fue el siguiente:

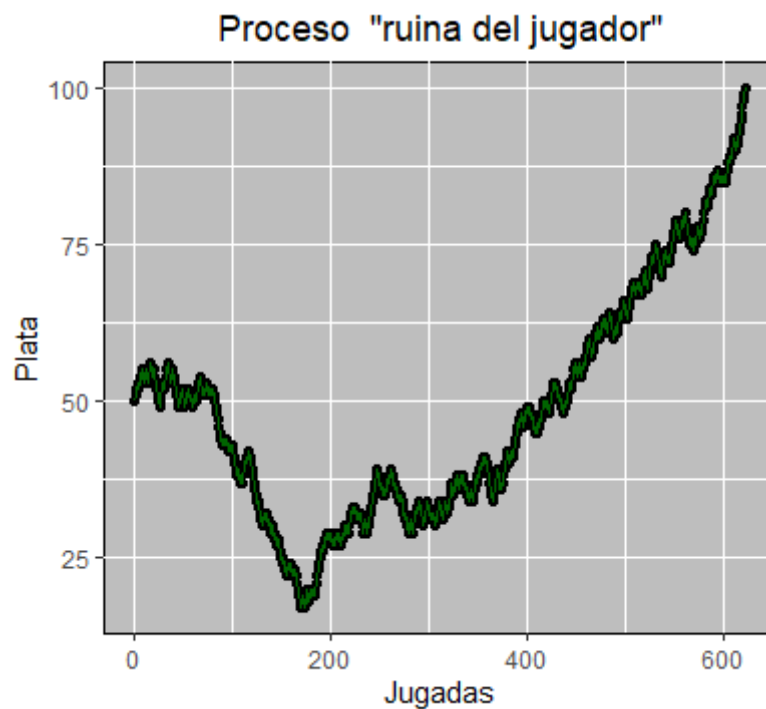


Figure 3: Trayectoria. Ruina del jugador

c) Para simular esto, implemente en R: `probabilidadRuina <- function(plataInicial,S,p,n){`

```
frecRuina = 0
```

```
for (i in c(1:n)){
```

```
  if(!proceso(plataInicial,S,p)){
```

```
    frecRuina = frecRuina+1
```

```
  } } return (frecRuina/n)
```

```
}
```

Con  $k=20$ ,  $S=60$ ,  $p=0.5001$  y 1000 trayectorias obtuve una aproximacion a la probabilidad de caer en la ruina de 0.678



## 0.4 Ejercicio 4

- a) Al realizar la simulacion observe 50000 repeticiones del experimento y obtuve un promedio de 21.08484 minutos.
- b) Sea  $S=\{ii, id, d\}$  el espacio muestral de un experimento  $\epsilon$  que consiste en observar las decisiones del raton. Estas corresponden a elegir izquierda-izquierda, elegir izquierda-derecha y elegir derecha respectivamente. Si definimos una variable aleatoria  $X$  tal que:

$$X(s) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = "ii" \\ 5 & \text{si } x = "id" \\ 3 & \text{si } x = "d" \end{cases}$$

Ahora definimos una variable aleatoria  $Y = \{\text{numero de repeticiones hasta que el evento } \{2\} \text{ ocurra}\}$  y observamos que  $Y$  se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que  $P(\{2\}) = P(ii \cap i) = P(ii|i)P(i) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ , por lo que  $E(Y) = \frac{2}{\frac{1}{6}} = 12$ . Luego definimos una variable aleatoria  $Z = \{\text{numero de repeticiones hasta que el evento } \{3\} \text{ ocurra}\}$  y observamos que  $Z$  se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que  $P(\{3\}) = \frac{1}{2}$ , por lo que  $E(Y) = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$ . Luego definimos una variable aleatoria  $W = \{\text{numero de repeticiones hasta que el evento } \{5\} \text{ ocurra}\}$  y observamos que  $W$  se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que  $P(\{5\}) = P(id \cap i) = P(id|i)P(i) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ , por lo que  $E(Y) = \frac{5}{\frac{2}{6}} = 15$ . Por lo tanto  $p(\{\text{Salga}\})$  tiene un peso en minutos de  $E(Y) = 12$ , mientras que  $1-p$  tiene un peso en minutos de  $E(Z+W) = E(Z) + E(W) = 21$ . Por lo que el tiempo esperado para que la rata salga del laberinto es de  $121/31/2 + 215/6 = 19,5$  minutos.

## 0.5 Ejercicio 5

- a) La matriz de transición  $P$  es no-regular. Esta cadena de Markov presenta 4 clases de comunicación (una por cada estado). El estado M es absorbente, por lo cual la cadena de Markov es absorbente, los demás estados son de transición.
- b) Para  $n=10$  pasos obtenemos la matriz  $P^n$ , donde  $P_{ij}^n$  representa la probabilidad de llegar a  $j$  desde  $i$  en  $n$  pasos.

$$P^{10} \simeq \begin{pmatrix} 0.99004 & 0.00969 & 0.000214 & 0.00005069 \\ 0 & 0.94159 & 0.04078 & 0.0176248 \\ 0 & 0 & 0.425037 & 0.5749629 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Partiendo desde un estado luego de 10 unidades de observación en la evolución de esta persona podemos observar:

”Suceptible”. **Suceptible.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto siga en su estado de suceptibilidad de 0.99004, luego de 10 unidades de observación.

**VIH.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga VIH de 0.00969, luego de 10 unidades de observación.

**SIDA.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.000214, luego de 10 unidades de observación.

**Muerto.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.00005069, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto es suceptible, en 10 unidades de observación, es altamente probable que se mantenga en esta condición.

”VIH”. **Suceptible.** Partiendo desde VIH no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado ”suceptible”, luego de 10 unidades de observación.

**VIH.** Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condición de 0.94159, luego de 10 unidades de observación.

**SIDA.** Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.04078, luego de 10 unidades de observación.

**Muerto.** Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.0176248, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto está diagnosticado con VIH, tiene altas probabilidades de mantener su condición y no puede librarse de su enfermedad.

”SIDA”. **Suceptible.** Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de ”suceptibilidad”, luego de 10 unidades de observación.

**Suceptible.** Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de ”VIH”, luego de 10 unidades de observación.

**SIDA.** Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condición de 0.425037, luego de 10 unidades de observación.

**Muerto.** Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.5749629, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto está diagnosticado con SIDA, tiene un 57% de morir luego de 10 unidades de observación. No puede volver a la condición de VIH, ni a la de suceptible, mientras que se puede mantener con SIDA con una probabilidad de 0.425037%.

Por otro lado si está muerto... bueno, digamos que es el estado absorbente por excelencia.

c) Sabemos que

$$Q = \begin{pmatrix} 0.999 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0.994 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0.918 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Y por lo tanto,

$$F = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & 0 & \frac{500}{41} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Donde F es la matriz fundamental, en la cual  $F_{ij}$  es el numero esperado de visitas a j dado que la cadena comienza en i. Por lo tanto, si iniciamos en el estado

”Suceptible” el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 1178.862

”VIH” el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 178.862

”SIDA” el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 12.19

Cada uno de los resultados obtenidos de acuerdo al estado desde el que se comienza a contabilizar, es el promedio de unidades de observacion para que la persona llegue al estado de muerte.

d) COMPLETAR LO TENGO EN CUADERNILLO

## 0.6 Ejercicio 6

a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad (4)$$

b) Simulacion

c) Obtuve el siguiente vector de frecuencias relativas :  $[0.25, 0.16, 0.04, 0.06, 0.10, 0.34, 0.05]$ . Por lo cual con  $n=100$  suponemos que el rango de las paginas a,b,c,...,g corresponden con las posiciones desde 1 a 7 del vector obtenido por medio de la simulacion.

## 0.7 Ejercicio 7

a) Sea  $X_t$  el numero de llamads que recibe Juan durante un intervalo de tiempo t. Sabemos que  $X_t$  tiene una distribucion de Poisson con parametro  $= 10textos/hora$ . Por lo tanto,  $P()$

## 0.8 Ejercicio 8

- a) Dada la distribucion inicial  $\pi_0$ , y la matriz de transicion  $P$ , luego de dos semanas nos encontramos con la siguiente probabilidad de ataques a los puertos:

$$\pi_0 P^2 = (0 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4})$$

$$\pi_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{8}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Los puertos con menos probabilidad de ser atacados son el 135 y 445, mientras que el que tiene mas probabilidad de ser atacado es el 139. Se puede observar que el puerto 80 no tiene posibilidad de ser atacado.