Capítulo 2: Espacios Vectoriales (4ta. Parte).

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Outline

Lema: Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial y $U \subset V$. Entonces:

1. Si U genera a V y sus vectores son l.d., entonces existe $u \in U$ tal que $U \setminus \{u\}$ genera a V.
2. Si los vectores de U son l.i. entonces, para todo $w \in V$ tal que $w \notin \langle U \rangle$ resulta que $U \cup \{w\}$ es un conjunto de vectores l.i..

Prueba: ejercicio (en realidad ya está probado, dicho de otras formas, en los resultados de la parte 3).

Así enunciadas, estas propiedades nos brindan un método para construir bases de un espacio vectorial V a partir de un conjunto generador o a partir de un conjunto de vectores l.i.

Recordemos que una base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores l.i. que generan el espacio. Como una base es un generador del espacio, todo vector se puede escribir como una combinación lineal de vectores de la base. Veremos que esa combinación lineal es única para cada vector.Esto es:

Lema: Sea $\mathscr{B} = \{w^1, w^2, \ldots, w^k\}$ una base del espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ y $v \in V$. Entonces, existe una única combinación lineal de elementos de $\mathscr{B}$ que generan a v.

Prueba: (Para todo $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, notamos $\alpha v = \alpha \odot v$ y $v + w = v \oplus w$) Sean $\alpha_i, \beta_i,\ i = 1, \ldots, k$, tales que $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w^i$ y $v = \sum_{i=1}^{k} \beta_i w^i$. Debemos probar que $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Tenemos:

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w^i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i w^i \Longrightarrow \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) w^i = 0.$$

Como los elementos de $\mathscr{B}$ son l.i., entonces $\alpha_i - \beta_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Equivalentemente, $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i = 1, \ldots, k$. $\square$

Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y $\mathscr{B} = \{w^1, w^2, \ldots, w^n\}$ una base de V.
De acuerdo al lema anterior, todo elemento de V tiene asociada una única n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de valores de $\mathbb{K}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w^i$.
Recíprocamente, por cada n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de valores de $\mathbb{K}$ tenemos un único vector de V asociado, i.e. $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w^i$.
Esto es, existe una correspondencia $1-1$ entre los elementos de V y el conjunto $\mathbb{K}^n$ de n-uplas de $\mathbb{K}$.

Definición: Dados un espacio vectorial V de dimensión n, una base *ordenada* $\mathscr{B}$ de V y $v \in V$, llamamos *representación de* v *en* $\mathscr{B}$ y lo notamos $[v]_{\mathscr{B}}$ a la única n-upla de escalares que permite obtener a v como combinación lineal de elementos $\mathscr{B}$. Esto es, $[v]_{\mathscr{B}} \in \mathbb{K}^n$.

Ejemplos:

1. V es el espacio de los polinomios de grado a lo sumo 2, a coeficientes reales, $\mathscr{B} = \{x^2+x, 1-x, 2\}$ base ordenada de V y $p \in V$ tal que $p(x) = 7x^2 - 2x + 5$. ¿Quién es $[p]_{\mathscr{B}}$? Tenemos que hacer las cuentas. Buscamos $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$7x^2 - 2x + 5 = \alpha_1 \, (x^2 + x) + \alpha_2 \, (1 - x) + \alpha_3 \, 2.$$

¡Observar que es importante el orden!

Trabajando algebraicamente llegamos a

$$7x^2 - 2x + 5 = \alpha_1 x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\alpha_2 + 2\alpha_3).$$

Por lo tanto, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es la solución del sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & & & & & = & 7 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = & -2 \\ & & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 5 \end{array}$$

Ejemplos:

1. (continuación)

¿Y si ahora queremos encontrar la representación de otro polinomio?

Sea $q \in V$ tal que $q(x) = -x^2 + 3x + 7$. ¿Cómo encontramos $[q]_{\mathscr{B}}$?

Volvemos a plantear

$$-x^2 + 3x + 7 = \alpha_1 \left(x^2 + x\right) + \alpha_2 \left(1 - x\right) + \alpha_3\, 2.$$

y trabajamos algebraicamente el lado derecho. Pero es el mismo que antes, así que vamos a llegar al mismo lado derecho que antes! Tenemos entonces:

$$-x^2 + 3x + 7 = \alpha_1 x^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\alpha_2 + 2\alpha_3)$$

y ahora $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ debe satisfacer:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & & & & & = & -1 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = & 3 \\ & & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 7 \end{array}$$

Es el mismo sistema, con diferente lado derecho.

Ejemplos:

1. (continuación)
   En general, si $r \in V$ y $r(x) = ax^2 + bx + c$, $[r]_{\mathscr{B}}$ es la solución de un sistema del tipo $Ax = b(r)$ donde
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
   ¿Quién es $b(r)$? Probar que $b(r) = [a,b,c]^T$.

   Observación: Más adelante vamos a ver que podemos obtener a A sin el trabajo algebraico. Pero por ahora, es lo que tenemos.
2. Sea V el espacio de las matrices reales 2×2, los elementos de $\mathscr{B}$ son (en ese orden)
   $$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplos:

2. (continuación) Buscamos la representación de $M = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ en $\mathscr{B}$.

   Tenemos $[M]_{\mathscr{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ tal que

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

   Por lo tanto $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ debe satisfacer el sistema

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & -1 \\ \alpha_1 & & & + & \alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 3 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & + & \alpha_4 & = & 7 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & & & = & 5 \end{array}$$

   Si cambiamos la matriz a representar, sólo cambiará el lado derecho del sistema.

Veamos algo más sencillo:

Ejemplos(continuación):

(3) $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathscr{B} = \{(1,2),(9,0)\}$. ¿Cuál es la representación de $v = (1,1)$ en $\mathscr{B}$?

En forma similar a lo anterior, buscamos (α_1, α_2) tal que

$$(1,1) = \alpha_1\,(1,2) + \alpha_2\,(9,0) = (\alpha_1 + 9\,\alpha_2, 2\,\alpha_1)$$

Llegamos a $[v]_{\mathscr{B}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{18})$.

...fea representación del punto $(1,1)$ en $\mathbb{R}^2$, ¿no?

Si elegimos $\mathscr{B}' = \{(1,0),(0,1)\}$, tenemos $[v]_{\mathscr{B}'} = (1,1) = v$.

Veamos algunos otros ejemplos, en los mismos espacios vectoriales que ya trabajamos:

Ejemplos:

(4) V espacio de polinomios de grado a lo sumo 2, $\mathscr{B} = \{x^2, x, 1\}$ y $p \in V$ tal que $p(x) = 7x^2 - 2x + 5$.

¿Quién es $[p]_{\mathscr{B}}$? No necesitamos hacer muchas cuentas. Tenemos $[p]_{\mathscr{B}} = (7, -2, 5)$.

(5) V espacio de matrices 2×2 y los elementos de $\mathscr{B}$ son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Cuál es la representación de $M = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$?. De nuevo las cuentas son muy fáciles: $[M]_{\mathscr{B}} = (-1, 3, 7, 5)$.

¿Hay bases *buenas y malas*? Eso es parte de lo que vamos a ver en el Capítulo 3. Las *buenas* que propusimos son las *canónicas*, pero veremos que hay otras *buenas* que nos simplifican los cálculos (ortonormales).

Vimos que en todos los casos, para encontrar la representación de un vector en una base, terminamos resolviendo un sistema. En el caso de $\mathbb{R}^n$ obtener la matriz de coeficientes de ese sistema es sencillo.

Sea $\mathscr{B}_1 = \{v^1, \dots, v^n\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^n$ y $w \in \mathbb{R}^n$. Buscamos $[w]_{\mathscr{B}_1}$.

Sea B la matriz $n \times n$ que tiene por columnas a los vectores de $\mathscr{B}_1$ (i.e. $B^j = v^j$, $j = 1, \dots, n$). Entonces, toda combinación lineal de los vectores de $\mathscr{B}_1$ puede expresarse como Bx, con $x \in \mathbb{R}^n$.
Por lo tanto, para enontrar $[w]_{\mathscr{B}_1}$ resolvemos el sistema $Bx = w$ (vía Eliminación Gaussiana). ¿El sistema $Bx = w$ tiene solución única?

Supongamos que $\mathscr{B}_2 = \{z^i : i = 1, \dots, n\}$ es otra base de $\mathbb{R}^n$ y $\tilde{B}$ la matriz no singular asociada ($\tilde{B}^i = z^i$, $i = 1, \dots, n$). La pregunta que nos hacemos es:

¿qué relación existe entre $x = [w]_{\mathscr{B}_1}$ e $y = [w]_{\mathscr{B}_2}$?

$$\mathscr{B}_1 \longrightarrow B \quad \mathscr{B}_2 \longrightarrow \tilde{B}$$

$$x = [w]_{\mathscr{B}_1} \quad y = [w]_{\mathscr{B}_2}$$

Sabemos que x e y verifican, respectivamente, $Bx = w$ y $\tilde{B}y = w$. Por lo tanto,

$$Bx = \tilde{B}y \Longrightarrow y = \tilde{B}^{-1}(Bx) = (\tilde{B}^{-1}B)x = Tx$$

donde $T = \tilde{B}^{-1}B$. Esto es, $T[w]_{\mathscr{B}_1} = [w]_{\mathscr{B}_2}$.

La matriz T *transforma* la representación en la base $\mathscr{B}_1$ en la representación en la base $\mathscr{B}_2$ y se llama *matriz de cambio de base* (de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$).

¿Cómo podemos obtener a T? ¡Sin calcular inversas!

Como $T = \tilde{B}^{-1}B$, su columna i-ésima T^i se obtiene con el producto entre $\tilde{B}^{-1}$ y la columna i-ésima $B^i = v^i$ de B. Así, $T^i = \tilde{B}^{-1}v^i$ o, equivalentemente, T^i es la solución del sistema $\tilde{B}x = v^i$. Esto es:

la columna i-ésima de la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$ es la representación del vector i-ésimo de la base $\mathscr{B}_1$ en la base $\mathscr{B}_2$.

Ejemplo: Sean $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ y $U = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, su forma triangular superior. Sabemos que $\mathscr{B}_1 = \{A^1, A^2\}$ y $\mathscr{B}_2 = \{U^1, U^2\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$. (Justificar.)
Si X es la la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$, sus columnas X^1 y X^2 son, respectivamente, la representación de A^1 y A^2 en $\mathscr{B}_2$. Equivalentemente, X es la matriz 2×2 que verifica $UX = A$. Es fácil verificar que
$X = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} & -\frac{1}{28} \\ \frac{4}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}$.

Queremos ahora encontrar la matriz de cambio de base en espacios vectoriales generales.

Definición: Dado un espacio vectorial V y $\mathscr{B}_1 = \{v^1, \ldots, v^k\}$, $\mathscr{B}_2 = \{w^1, \ldots, w^k\}$ dos bases de V, la *matriz de cambio de base de* $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$ es una matriz M de tamaño $k \times k$ que verifica:

$$[v]_{\mathscr{B}_2} = M[v]_{\mathscr{B}_1}, \text{ para todo } v \in V.$$

Veremos que, en cualquier espacio vectorial vale el resultado visto para $\mathbb{R}^n$. Esto es, la columna i-ésima de la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$ es la representación del vector i-ésimo de la base $\mathscr{B}_1$ en la base $\mathscr{B}_2$.

Observación: Si $\mathscr{B} = \{v^1, \ldots, v^k\}$ una base de V, $[v^j]_{\mathscr{B}} = e^j \in \mathbb{R}^k$.

Lema: Sean V un espacio vectorial y $\mathscr{B}_1 = \{v^1, \ldots, v^k\}$, $\mathscr{B}_2 = \{w^1, \ldots, w^k\}$ dos bases de V. Entonces, la matriz M de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$ es la matriz $k \times k$ tal que, para todo $i = 1, \ldots, k$, su columna i-ésima M^i verifica $M^i = [v^i]_{\mathscr{B}_2}$.

Prueba: Como M debe verificar $[v]_{\mathscr{B}_2} = M[v]_{\mathscr{B}_1}$ para todo $v \in V$, en particular verifica $[v^i]_{\mathscr{B}_2} = M[v^i]_{\mathscr{B}_1} = M\, e^i$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Como Me^i es la columna i-ésima M^i de M, resulta necesario entocnces que

$$M^i = [v^i]_{\mathscr{B}_2} \text{ para todo } i = 1, \ldots, k.$$

Ejercicio: Probar que esta condición es suficiente, esto es, que, si M es la matriz tal que $M^i = [v^i]_{\mathscr{B}_2}$ para todo $i = 1, \ldots, k$, entonces $[v]_{\mathscr{B}_2} = M[v]_{\mathscr{B}_1}$ para todo $v \in V$.

Conclusión: Para calcular la matriz M de cambio de una base $\mathscr{B}_1 = \{v^1, \ldots, v^k\}$ a otra base $\mathscr{B}_2$, debemos obtener, para todo $i = 1, \ldots, k$, $[v^i]_{\mathscr{B}_2}$ y ésas serán las columnas de M.

Ejemplo: Dada $\mathscr{B}_1 = \{x^2 + x, 1 - x, 2\}$ base ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ y $p(x) = 7x^2 - 2x + 5$, ya obtuvimos $[p]_{\mathscr{B}_1}$ utilizando su definición. Veamos cómo podemos hacerlo usando un cambio de base. Si $\mathscr{B}_2 = \{x^2, x, 1\}$ (base canónica) sabemos que $[p]_{\mathscr{B}_2} = (7, -2, 5)$. Si calculamos la matriz M de cambio de base de $\mathscr{B}_2$ a $\mathscr{B}_1$, sabemos que $[p]_{\mathscr{B}_1} = M[7, -2, 5]^T$.

Ejemplo: (continuación)
$\mathscr{B}_1 = \{x^2+x, 1-x, 2\}$, $\mathscr{B}_2 = \{x^2, x, 1\}$, $p(x) = 7x^2 - 2x + 5$, M matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_2$ a $\mathscr{B}_1$. Las columnas de M son $[x^2]_{\mathscr{B}_1}$, $[x]_{\mathscr{B}_1}$ y $[1]_{\mathscr{B}_1}$.

Tenemos:

$$x^2 = (x^2+x) + (1-x) - \frac{1}{2}2, \quad x = -(1-x) + \frac{1}{2}2, \quad 1 = \frac{1}{2}2$$

Por lo tanto

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ y } \ [p]_{\mathscr{B}_1} = M\,[7,-2,5]^T = [7,9,-2]^T.$$

Verificamos:
$7(x^2+x) + 9(1-x) - 2\,.\,2 = 7x^2 + 7x + 9 - 9x - 4 = 7x^2 - 2x + 5 = p(x)$

Ejemplo: (continuación)
$\mathscr{B}_1 = \{x^2+x, 1-x, 2\}$, $\mathscr{B}_2 = \{x^2, x, 1\}$, $p(x) = 7x^2 - 2x + 5$, $\tilde{M}$ matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$. Las columnas de $\tilde{M}$ son $[x^2+x]_{\mathscr{B}_2}$, $[1-x]_{\mathscr{B}_2}$ y $[2]_{\mathscr{B}_2}$.

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cuando mostramos cómo calcular $x = [p]_{\mathscr{B}_1}$, vimos que x es la solución de un sistema $Ax = b$. Podemos observar que $A = \tilde{M}$ y $b = [p]_{\mathscr{B}_2}$.
Ejercicio: Sea V un espacio vectorial y $\mathscr{B}_{1,2}$ dos bases ordenadas de V. Entonces, para todo $v \in V$, $[v]_{\mathscr{B}_1}$ es la solución de un sistema $Ax = b$ donde $b = [v]_{\mathscr{B}_2}$ y A es la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_1$ a $\mathscr{B}_2$.

Observación útil: Si elegimos como $\mathscr{B}_2$ una *base buena* (en nuestro ejemplo, la canónica) es sencillo calcular A y b para obtener la representación de cualquier vector en $\mathscr{B}_1$.

Sea A una matriz $n \times n$. Cuando A multiplica a un vector $x \in \mathbb{R}^n$, podemos decir que *lo transforma* en el vector $Ax \in \mathbb{R}^n$. Podemos decir que A *transforma* o *mapea* a $\mathbb{R}^n$ en si mismo.

Veamos algunos ejemplos en $\mathbb{R}^2$:

1. $A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = c\, I_2, \quad c \in \mathbb{R}.$
   Es fácil ver que $Ax^T = cx^T$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, si $c > 0$, A *expande* o *contrae* al vector x (dependiendo de si $c > 1$ o $c < 1$). En el caso $c < 0$, además, cambia su sentido.
2. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tenemos: $A\,(x_1, x_2)^T = (-x_2, x_1)^T$. O sea, A rota a todo vector de $\mathbb{R}^2$, 90º a la izquierda.

(3) Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ¿qué transformación está realizando A sobre $\mathbb{R}^2$?.

Ejercicio.

(4) Analicemos el caso $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. En este caso, $A(x_1, x_2)^T = (0, x_2)^T$.

O sea, A nos brinda *la segunda componente del vector*. Dicho de otra manera, la proyección del vector sobre su segunda componente.

Observar que este es el único de los ejemplos presentados donde el conjunto imagen de la transformación que realiza A es un subespacio de dimensión menor que el espacio dominio.

Rotar, estirar, proyectar, son transformaciones que podemos realizar también en $\mathbb{R}^3$ y que podemos abstraerlas para $\mathbb{R}^n$. Todas ellas podrán modelarse como el producto de una matriz $n \times n$ por un vector.

Sin embargo, no toda transformación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ podrá expresarse a partir de una matriz. ¿Por ejemplo? La translación. En realidad, cualquier transformación que *mueve el origen* ya que, cualquiera sea A, $A0 = 0$.

Más específicamente, las transformaciones definidas por las matrices $n \times n$ verifican ser *lineales*, esto es:

$$A(\alpha v + \beta w) = \alpha A v + \beta A w.$$

Extendemos este concepto a cualquier transformación de un espacio vectorial en otro.

Definición: Sean $(V, \oplus, \odot)$ y $(W, +, \cdot)$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Una *transformación lineal de V en W* es una función

$$T : V \longrightarrow W$$

tal que, para todo $v, w \in V$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, verifica

$$T\left((\alpha \odot v) \oplus (\beta \odot w)\right) = \alpha \cdot T(v) + \beta \cdot T(w).$$

Ejemplos:

1. La funciones definidas a partir del producto por una matriz son transformaciones lineales. En general, dada una matriz A, $m \times n$, la función

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & v & \longrightarrow & T(v) = Av \end{array}$$

es una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

2. En espacios vectoriales generales V y W, la *función nula* que asigna a todo vector de V el vector nulo de W es una transformación lineal. Justificar.

3. También la *función identidad* definida de un espacio vectorial en si mismo y que a cada vector v le asigna el propio v es una transformación lineal. Justificar.

4. Sea $R[x]$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales. La *función derivación* de $R[x]$ en $R[x]$ es una transformación lineal.

Ejemplos:

4. (continuación)
   Sea $D : R[x] \longrightarrow R[x]$ tal que, para todo $p \in R[x]$, $D(p) = p'$. Recordemos que si $p(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r x^r$, entonces p' es el polinomio tal que $p'(x) = \sum_{r=1}^{n} a_r \, r \, x^{r-1}$. Por lo tanto D está bien definida.

   Queremos probar que, para todo $p, q \in R[x]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$D(\alpha p + \beta q) = \alpha D(p) + \beta D(q)$$

   o, equivalentemente,

$$(\alpha p + \beta q)'(x) = \alpha p'(x) + \beta q'(x) \; \forall x \in \mathbb{R},$$

   lo cual sabemos es válido por las propiedades de la derivada en funciones reales.

Ejemplos (continuación):

(5) Observar que el operador *derivación* también es un operador lineal del espacio vectorial de las funciones derivables en $U \subset \mathbb{R}$ en el espacio vectorial de funciones definidas en U.

(6) La *integración* también puede ser vista como un operador lineal del espacio vectorial $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ de funciones continuas en $\mathbb{R}$ en sí mismo. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}(\mathbb{R}) \\ & f & \longrightarrow & I(f) \end{array}$$

tal que $I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observar que, como $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, f es integrable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $I(f)$ está bien definida. Además, sabemos que $I(f)$ es derivable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $I(f) \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Ejercicio: Probar que I es un operador lineal.

Ejemplos (continuación):

(7) Sea $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $\mathbb{R}$ y $[a,b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$. Definimos:

$$\begin{array}{rccl} I_a^b: & \mathscr{C}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longrightarrow & I_a^b(f) = \int_a^b f(t)dt \end{array}$$

Como $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, f es integrable en $\mathbb{R}$ y por lo tanto $I_a^b(f) \in \mathbb{R}$ está bien definida.

Ejercicio: Probar que I_a^b es una transformación lineal de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$.

Definición: Dada una transformación lineal del espacio vectorial V en el espacio vectorial W definimos:

- El *recorrido de* T, denotado $Rec(T)$, es el conjunto imágen de la función. Esto es, $Rec(T) = \{T(v) : v \in V\}$.
- El *nulo* o *kernel de* T, denotado $N(T)$ es el conjunto pre-imágen a través de T del vector nulo de W. Esto es, $N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$.

Lema: Sea T un operador lineal de V en W. Entonces, $Rec(T)$ es un subespacio vectorial de W y $N(T)$ es un subespacio vectorial de V.
Prueba: Ejercicio.

Ejemplos:

1. Sean A es una matriz $m \times n$ y T es el operador lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ asociado (i.e. $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$). Entonces, $N(T) = N(A)$ y $Rec(T) = C(A)$. Por esta razón, se suele identificar el operador con la matriz y nos permitimos hablar de una matriz como operador. Y siempre que no lleve a confusión, cualquiera sea el operador T, también nos permitimos notar a $T(v)$ como Tv.

2. Sea D el operador derivación D aplicado al espacio vectorial de las funciones polinómicas. ¿Quién es $N(D)$? Son aquellos polinomios cuya derivada da el polinomio nulo. Por lo tanto,

$$N(D) = \{p \in R[x] : gr(p) = 0\},$$

los polinomios constantes. ¿Y quién $Rec(D)$? Ejercicio.

Ejemplos:(continuación)

(2) Sea I el operador integración de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ en $\mathscr{C}(\mathbb{R})$. En el kernel o espacio nulo de I qué funciones tenemos? Funciones continuas cuya función integral es la función constante nula.
¿Cómo probar que $N(I)$ sólo contiene a la función constante nula? Ejercicio. (hay que recurrir a lo que aprendimos en Análisis Matemático) .
¿Y quién es $Rec(I)$? Ejercicio: probar que $Rec(I) \neq \mathscr{C}(\mathbb{R})$ y caracterizar el subespacio vectorial de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ correspondiente a $Rec(I)$.

Notación: Dados V y W dos espacios vectoriales, notamos con $\mathscr{L}(V,W)$ al conjunto de todas sus trasformaciones lineales.

Las transformaciones lineales también se denominan *homomorfismos de espacios vectoriales*. De esa otra denominación surgen los términos:

- *monomorfismo*, para las transformaciones lineales inyectivas,
- *epimorfismo*, para las transformaciones lineales sobreyectivas, e
- *isomorfismo*, para las transformaciones lineales biyectivas.

Es claro que una transformación lineal $T \in \mathscr{L}(V,W)$ es un epimorfismo si $Rec(T) = W$.
La inyectividad de una transformación lineal está asociada a su espacio nulo:

Lema: Sea $T \in \mathscr{L}(V,W)$. Entonces, T es un monomorfismo si y solo si $N(T) = \{0\}$.

Prueba: Sea T monomorfismo. Claramente, como T es transformación lineal, $T(0) = 0$ (justificar). Además, como T es inyectiva, no existe otro vector en V cuya imagen sea $0 \in W$. Por lo tanto, $N(T) = \{0\}$.
Debemos probar ahora que si $N(T) = \{0\}$ entonces T es inyectiva o, equivalentemente,

$$Tv = Tw \Rightarrow v = w.$$

Tenemos:

$$Tv = Tw \Rightarrow Tv - Tw = 0 \Rightarrow T(v-w) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v - w \in N(T) \Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w.$$

De acuerdo a los resultados anteriores, dada una matriz A, $m \times n$, ¿Cuándo A *es* un isomorfismo?

La transformación lineal (definida por) A va de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Si A es un isomorfismo, en particular es inyectiva y resulta $N(A) = \{0\}$. Por lo tanto, $rg(A) = n \leq m$. Justificar. .
Además, A debe ser sobreyectiva o sea que su recorrido, $C(A) = \mathbb{R}^m$. Como la dimensión de $\mathbb{R}^m$ es m y es generado por las n columnas l.i. de A, tenemos que $m = n$. Como $rg(A) = n$, A es una matriz no singular.

Para recordar: las únicas matrices que definen isomorfismos son las matrices cuadradas no singulares.

Las transformaciones lineales inyectivas (monomorfismos) preservan lineal independencia. Esto es:

Lema: Sea T un monomorfismo de V en W y sean $\{v^1, \ldots, v^k\}$ vectores l.i. en V. Entonces, $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ son vectores l.i. en W.

Prueba: Considermos una combinación lineal nula en W de los vectores en $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$,

$$\alpha_1 Tv^1 + \ldots + \alpha_k Tv^k = 0 \in W.$$

Entonces,

$$T(\alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_k v^k) = 0$$

y $\alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_k v^k \in N(T)$.
Como T es inyectiva, $N(T) = \{0\}$ y por lo tanto $\alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_k v^k = 0 \in V$.
Finalmente, como los vectores de $\{v^1, \ldots, v^k\}$ son l.i. por hipótesis, tenemos que necesariamente $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$.
Por lo tanto los vectores $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ son vectores l.i. en W.

Corolario: Sea T un monomorfismo de V en W y $\{v^1, \ldots, v^k\}$, una base de V. Entonces, $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ es una base de $Rec(T)$.

Prueba: Por el lema anterior sabemos que los vectores de $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ son l.i. y, claramente, pertenecen a $Rec(T)$. Sólo tenemos que probar que $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$ genera $Rec(T)$.
Sea $w \in Rec(T)$ y $v \in V$ tal que $w = Tv$. Como $\{v^1, \ldots, v^k\}$ es una base de V, existen $\alpha_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, k$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i.$$

Entonces,

$$w = Tv = T \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, Tv^i,$$

resultando que w es generado por los vectores $\{Tv^1, \ldots, Tv^k\}$. $\square$

Corolario: Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión n y T una transformación lineal de V en W. Entonces, son equivalentes:

1. T es isomorfismo
2. T es monomorfismo
3. T es epimorfismo.

Prueba:

- $(1) \Rightarrow (2)$ Obvio.
- $(2) \Rightarrow (3)$ Como T es monomorfismo, si $\mathscr{B}_V = \{v^1, \ldots, v^n\}$ es una base de V, $\mathscr{B}_W = \{Tv^1, \ldots, Tv^n\}$ es una base de W. Entonces, para todo $w \in W$, $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i Tv^i$. Por lo tanto, si $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v^i$, es fácil ver que $Tv = w$. Por lo tanto T es epimorfismo.
- $(3) \Rightarrow (1)$ Ejercicio.

Observación: Toda transformación lineal de un espacio vectorial V en otro W queda unívocamente definida por las imágenes a través de T de los elementos de una de sus bases.
Esto es, si $\mathscr{B} = \{v^1, \ldots, v^t\}$ es una base de V, para *conocer a* T, la única información que necesito es $T(v^i), i = 1, \ldots, t$.
En efecto, contando con esa información, si queremos saber como actua T sobre cualquier vector $z \in V$, encontramos su representación en términos de la base. Esto es, si

$$z = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i v^i$$

entonces,

$$Tz = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i T v^i.$$

Con los resultados anteriores obtenemos este importante resultado:

Lema: Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Entonces, V y W son isomorfos si y solo si V y W tienen la misma dimensión.

Prueba:
Si V y W son isomorfos, existe T isomorfismo de V en W. En particular, T es inyectiva y si $\{v^1, \dots, v^k\}$ es una base de V, entonces $\{Tv^1, \dots, Tv^k\}$ una base $Rec(T)$. Como T es también sobreyectiva, $Rec(T) = W$ y por lo tanto $\{Tv^1, \dots, Tv^k\}$ es una base de W. Por lo tanto, ambos espacios tienen la misma dimensión, k.
Para demostrar la recíproca partimos de dos bases (del mismo cardinal) $\{v^1, \dots, v^k\}$ y $\{w^1, \dots, w^k\}$ de V y W, respectivamente. Debemos probar que existe un isomorfismo de T de V en W.
Definimos a T como la transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(v^i) = w^i$ para $i = 1, \dots, k$. Por lo visto anteriormente, con esta información conocemos la imagen de T en todo su dominio (justificar).
Sólo resta probar que T es biyectiva. Ejercicio.

Corolario: Todo espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Observación: El resultado anterior es válido para cualquier cuerpo $\mathbb{K}$, esto es, todo espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ de las n-uplas de elementos de $\mathbb{K}$.

Observar que un isormorfismo puede ser pensado como *un espejo* entre los espacios vectoriales. Todo lo que *sucede* o *es válido* en uno de ellos, puede *reflejarse* en el otro.

Así, el corolario anterior justifica por qué poner el énfasis en conocer los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$.

Más aún, veremos que toda transformación lineal de un espacio V de dimensión n en un espacio W de dimensión m puede pensarse como una matriz $m \times n$.

Ya vimos que una matriz A de tamaño $m \times n$ define una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ a través de la ley

$$\begin{array}{cccc} A: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longrightarrow & Ax \end{array}$$

Es fácil ver que cualquier transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ puede ser pensada como una transformación definida por una matriz $m \times n$.

En efecto, sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y sean $e^i, i = 1, \ldots, n$ los vectores canónicos en $\mathbb{R}^n$. Definimos la matriz $m \times n$ A, cuya i-ésima columna $A^i = Te^i$. Es fácil verificar que $Tv = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. En efecto, dado $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, sabemos que $v = \sum_{i=1}^n v_i e^i$. Por lo tanto,

$$Tv = \sum_{i=1}^{n} v_i Te^i = \sum_{i=1}^{n} v_i A^i = Av.$$

Ejemplo: Sea

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & v=(v_1,v_2) & \longrightarrow & Tv=(0,v_1,v_2) \end{array}.$$

Probar que T es una transformación lineal. ¿Qué espacio ocupa la imágen de T en $\mathbb{R}^3$? Ejercicio.
Construimos A cuya primer columna es $T(1,0)=(0,1,0)$ y su segunda columna es $T(0,1)=(0,0,1)$, esto es,

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es fácil chequear que $A(v_1,v_2)=(0,v_1,v_2)=T(v_1,v_2)$.

Veamos que, en realidad, toda transformación lineal de *cualquier espacio vectorial de dimensión* n en *cualquier espacio vectorial de dimensión* m puede ser representado por una matriz $m\times n$.

Sean V y W espacios vectoriales, $\mathscr{B}_V = \{v^1,\dots,v^n\}$ y $\mathscr{B}_W = \{w^1,\dots,w^m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente. Sea $T \in \mathscr{L}(V,W)$.
Para todo $v \in V$, $[v]_{\mathscr{B}_V \in \mathbb{R}^n}$ y $[Tv]_{\mathscr{B}_W} \in \mathbb{R}^m$. Queremos una matriz $m \times n$ que nos permita obtener $[Tv]_{\mathscr{B}_W}$ a partir de $[v]_{\mathscr{B}_V}$.

Definición: Denominamos *matriz asociada a T (respecto a $\mathscr{B}_V$ y a $\mathscr{B}_W$)* a la matriz A_T de tamaño $m \times n$ tal que, para todo $v \in V$, $[Tv]_{\mathscr{B}_W} = A_T[v]_{\mathscr{B}_V}$.

Lema: Sea A_T la matriz $m \times n$ tal que su columna i-ésima es el vector $[Tv^i]_{\mathscr{B}_W}$, $i = 1,\dots,n$. Entonces, A_T es la matriz asociada a T (respecto a $\mathscr{B}_V$ y a $\mathscr{B}_W$).

Prueba: Para todo $i = 1,\dots,n$, sea $[Tv^i]_{\mathscr{B}_W} = (\beta_1^i,\dots,\beta_m^i) \in \mathbb{R}^m$.
Sea $v \in V$ tal que $[v]_{\mathscr{B}_V} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Entonces,

$$Tv = T(\sum_{i=1}^n \alpha_i v^i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i Tv^i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \beta_j^i w^j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_j^i) w^j.$$

Por lo tanto, $[Tv]_{\mathscr{B}_W} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_1^i,\dots,\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_m^i\right)$. Debemos verificar que $A_T(\alpha_1,\dots,\alpha_n)^T = [Tv]_{\mathscr{B}_W}$ (Ejercicio). $\square$

Ejemplo: Sea p_k la función *potencia* k*-ésima* ($k \in \mathbb{N}_0$), esto es, $p_k(t) = t^k$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo 2 y $\mathscr{B}_V = \{p_k : k = 0, 1, 2\}$, su base canónica ordenada.
Sea W el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo 3 y $\mathscr{B}_W = \{p_k : k = 0, 1, 2, 3\}$, su base canónica ordenada.
Consideremos la transformación lineal *integración*:

$$\begin{array}{rccl} T: & V & \longrightarrow & W \\ & p & \longrightarrow & Tp : (Tp)(x) = \int_0^x p(t)dt. \end{array}$$

Queremos conocer A_T. Para ello, necesitamos conocer $[Tp_k]_{\mathscr{B}_W}$, $k = 0, 1, 2$.
Tenemos

$$Tp_k(x) = \int_0^x t^k dt = \frac{t^{k+1}}{k+1}\Big|_0^x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} = \frac{1}{k+1}p_{k+1}(x).$$

Entonces, $Tp_k = \frac{1}{k+1}p_{k+1}$, $k = 0, 1, 2$.

Ejemplo: (continuación) $\quad T\,p_k = \frac{1}{k+1}\,p_{k+1},\; k = 0,1,2.$

Para obtener A_T necesitamos conocer $[Tp_k]_{\mathscr{B}_W}$, $k = 0,1,2$. Recordar que $\mathscr{B}_W$ es la base ordenada $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$. Entonces:

- $[Tp_0]_{\mathscr{B}_W} = [p_1]_{\mathscr{B}_W} = (0,1,0,0)$.
- $[Tp_1]_{\mathscr{B}_W} = [\frac{1}{2}p_2]_{\mathscr{B}_W} = (0,0,\frac{1}{2},0)$.
- $[Tp_2]_{\mathscr{B}_W} = [\frac{1}{3}p_3]_{\mathscr{B}_W} = (0,0,0,\frac{1}{3})$.

Así,

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Sea $p \in V$ tal que $p(x) = ax^2 + bx + c$. Entonces, $[p]_{\mathscr{B}_V} = (c,b,a)$.
Como $(Tp)(x) = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx$ resulta $[T\,p]_{\mathscr{B}_W} = (0,c,\frac{b}{2},\frac{a}{3})$.
Es fácil chequear que $[T\,p]_{\mathscr{B}_W} = A_T[p]_{\mathscr{B}_V}$.

Observación: Toda la información de una tranformación lineal T entre espacios de dimensión finita de V en W puede ser *almacenada* en la matriz A_T.
En efecto, conocida A_T (respecto a bases ordenadas $\mathscr{B}_V$, $\mathscr{B}_W$ de V y W, respectivamente), para conocer el comportamiento de T sobre cualquier elemento $v \in V$ sólo necesitamos hacer el producto $A_T[v]_{\mathscr{B}_V}$. Así obtenemos $[T\,v]_{\mathscr{B}_W}$ y con ello toda la información necesaria para conocer a Tv, la imagen de v a través de la transformación T.

No es difícil probar la siguiente relación:

Lema: Sea T una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y A_T su matriz asociada a bases ordenadas de los mismos. Entonces, $Rec(T)$ y $N(T)$ son isomorfos, respectivamente, a $C(A_T)$ y $N(A_T)$. Así, T es epimorfismo (monomorfimo) de V en W si y solo si la transformación lineal definida por A_T (de $\mathbb{R}^{dimV}$ en $\mathbb{R}^{dimW}$) también lo es.

Prueba: Ejercicio.

Como las transformaciones lineales son funciones, podemos definir su suma y su producto por escalar de la forma estándar que se define en funciones. Tenemos entonces:

Teorema: Dados dos espacios vectoriales V y W sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, las transformaciones lineales de V en W definen un espacio vectorial con la suma y producto por escalar estándares en funciones.
Prueba: Ejercicio.

También podemos analizar, en los casos que la operación sea posible, qué tipo de funciones son la composición de dos transformaciones lineales o la inversa de un isomorfismo. Tenemos los siguientes resultados:
Lema: Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, T un isomorfismo de V en W y T^{-1} la función inversa de T. Entonces, T^{-1} es un isomorfismo de W en V.

Prueba: Claramente T^{-1} es biyectiva. Sólo tenemos que probar que es un transformación lineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $w^1, w^2 \in W$. Debemos probar

$$T^{-1}(\alpha w^1 + \beta w^2) = \alpha T^{-1}(w^1) + \beta T^{-1}(w^2).$$

Prueba: (continuación)
Por definición de función inversa sabemos que

$$T^{-1}(\alpha w^1 + \beta w^2) = \alpha T^{-1}(w^1) + \beta T^{-1}(w^2) \iff$$
$$\iff T(\alpha T^{-1}(w^1) + \beta T^{-1}(w^2)) = \alpha w^1 + \beta w^2$$

Como T es una transformación lineal, tenemos:

$$T(\alpha T^{-1}(w^1) + \beta T^{-1}(w^2)) = \alpha T(T^{-1}(w^1)) + \beta T(T^{-1}(w^2)) = \alpha w^1 + \beta w^2$$

con lo cual queda demostrado que T^{-1} es una transformación lineal y por lo tanto, T^{-1} es un isomorfismo de W en V.

En lo referido a composición podemos demostrar:

Lema: Sean V, W y U tres espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, T^1 una transformación lineal de V en W y T^2 una transformación lineal de W en U. Entonces, $T = T^2 \circ T^1$ es una transformación lineal de V en U.

Prueba: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $v^1, v^2 \in V$. Debemos probar que

$$T(\alpha v^1 + \beta v^2) = T^2(T^1(\alpha v^1 + \beta v^2)) = \alpha \, Tv^1 + \beta \, Tv^2.$$

Como T^1 es una transformación lineal,

$$T^2(T^1(\alpha v^1 + \beta v^2)) = T^2(\alpha \, T^1 v^1 + \beta \, T^1 v^2)$$

Como T^2 es también una transformación lineal, tenemos:

$$T^2(\alpha \, T^1 v^1 + \beta \, T^1 v^2) = \alpha T^2(T^1 v^1) + \beta T^2(T^1 v^2) = \alpha T v^1 + \beta T v^2$$

con lo que queda demostrado que T es una transformación lineal.

Hemos visto que siempre que trabajemos con espacios de dimensión finita, todo lo que querramos saber sobre transformaciones lineales entre ellos lo conocemos a partir de las transformaciones lineales definidas por matrices. Nos preguntamos ahora quiénes serán las transformaciones inversa y composición cuando trabajamos con transformaciones lineales asociadas a matrices.

En lo referido a inversas, hemos visto que la trasformación lineal definida por una matriz A es un isomorfismo si y solo si A es cuadrada no singular.

Es fácil probar entonces:
Ejercicio Si A es una matriz cuadrada no singular, los isomorfismos definidos por A y A^{-1} son isomorfismos inversos.

Por otra parte, si A es una matriz $m \times n$, A define un homomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Entonces, si B es una matriz $p \times m$, podemos definir el homomorfismo $B \circ A$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$. Nos preguntamos quién es la matriz que define al homomorfismo $B \circ A$.

También es sencillo probar:
Ejercicio Sea A una matriz $m \times n$ y B, una matriz $p \times m$. Entonces la matriz BA define al homomorfismo $B \circ A$.

¿Qué podemos decir de las matrices asociadas a una composición de transformaciones lineales o a la inversa de un isomorfismo?

Teorema: Sean $\mathscr{B}_U, \mathscr{B}_V$ y $\mathscr{B}_W$, bases ordenadas de los espacios vectoriales de dimensión finita U, V, W, respectivamente. Sea T una transformación lineal de U en V y R una transformación lineal de V en W, con A_T y A_R sus respectivas matrices asociadas (respecto a las bases mencionadas).
Entonces:

1. Si T es un isomorfismo, A_T es inversible y $(A_T)^{-1}$ es la matriz asociada a T^{-1}.
2. Si $S = R \circ T$, entonces $A_S = A_R A_T$

Prueba: Ejercicio.