Capítulo 5 - Autovalores y Autovectores (3ra. parte) [1]

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

[1] Siguiendo *Linear Algebra and its applications*, G. Strang.

Outline

Vimos que si A tiene n autovectores l.i. y S es la matriz que tiene por columnas esos autovectores, $S^{-1}AS$ *transforma a* A en una matriz diagonal con sus mismos autovalores. También vimos que no todas las matrices son diagonalizables.

Nos preguntamos ahora sobre *el efecto* que tiene sobre una matriz A una transformación del tipo $M^{-1}AM$ donde M es una matriz inversible cualquiera.

Definición: Dada una matriz inversible M, la transformación que a toda matriz A la lleva a $M^{-1}AM$ es una *transformación de similaridad o semenjanza*. Decimos que A es *semejante* a B si existe M inversible tal que $B = M^{-1}AM$.

Observación: Una matriz es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

Ejercicio: La relación de semejanza entre matrices es una relación de equivalencia.

¿Qué propiedades comparten las matrices semejantes?

Lema: Sean las matrices A, M y $B = M^{-1}AM$. Entonces A y B tienen los mismos autovalores. Además, si x es un autovector de A correspondiente a λ entonces $M^{-1}x$ es un autovector de B correspondiente a λ.

Prueba: Sea λ un autovalor de A y x un autovector asociado. Entonces $Ax = \lambda x$. Como $A = MBM^{-1}$, tenemos $MBM^{-1}x = \lambda x$ o, equivalentemente, $B(M^{-1}x) = \lambda(M^{-1}x)$. Por lo tanto, λ es un autovalor de B y $M^{-1}x$ autovector asociado. $\square$

Ejercicio: Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Dada una matriz A, la matriz de *estructura más sencilla* que comparte los autovalores con A es la matriz diagonal que definimos como Λ. Pero sabemos que no todas las matrices son semejantes a su matriz Λ.

A lo fines de muchas aplicaciones prácticas, dada una matriz A nos interesa saber cuál de todas sus matrices semejantes tiene la *estructura más sencilla*.

Transformaciones de semenjanza y cambios de variables

Las transformaciones de semejanza aparecen naturalmente en los *cambios de variables* en sistemas lineales. Por ejemplo, en los sistemas de ecuaciones diferenciales o sistemas en diferencias.

Sea $u^{(k)} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$, la solución del sistema de diferencias $u^{(k+1)} = Au^{(k)}$ con A matriz $n \times n$. Un *cambio de variables* queda definido por una relación $u = Mv$, con M matriz inversible. Así, el sistema se transforma en $Mv^{(k+1)} = AMv^{(k)}$ o, equivalentemente, $v^{(k+1)} = (M^{-1}AM)v^{(k)}$.
Los cambios de variables se realizan cuando el nuevo sistema resulta *más fácil* de resolver que el inicial. Por ejemplo, si M diagonaliza a A, el nuevo sistema es $v^{(k+1)} = \Lambda v^{(k)}$ o, equivalentemente, $v_j^{(k+1)} = \lambda_j v_j^{(k)}, j = 1, \ldots, n$.
Este tipo de sistema se denomina *desacoplado* y es la foma más sencilla a la que podemos aspirar.

Si A no es diagonalizable, ¿Cuál es el *mejor cambio de variables* que podemos hacer? Dicho de otra manera, ¿cuál es la matriz *más sencilla* semejante a A?

Recordemos que toda transformación lineal T entre espacios vectoriales V y W de dimensión finita tiene una matriz asociada. Esta matriz está determinada por las bases en las que estemos trabajando en dominio y codominio de T.

Cuanto trabajamos con una transformación lineal T de un espacio vectorial de dimensión finita V en sí mismo, si elegimos dos bases distintas $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ de V tendremos dos matrices distintas asociadas a T. Sin embargo, no sería lógico que fueran *tan diferentes*:

Lema: Sea T una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita V en si mismo y $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ dos bases ordenadas de V. Sean A y B las matrices asociadas a T considerando las bases $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$, respectivamente. Entonces A es semejante a B.

Prueba: Ejercicio. (Ayuda: probar que $B = M^{-1}AM$ donde M es la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}_2$ a $\mathscr{B}_1$).

Recordemos que si $\mathscr{B} = \{v^1, \ldots, v^n\}$ es la base de V en la que estamos trabajando, la matriz asociada a una transformación T tiene en su columna i-esima el vector representacion de Tv^i en $\mathscr{B}$.

Ejemplo:

Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la proyección sobre la recta $y = -x$. Podemos trabajar con $\mathscr{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$, la base canónica de $\mathbb{R}^2$ o con una base *elegida especialmente para* T.

Para obtener la matriz asociada a T con la base canónica, deberíamos calcular la proyección de $(1,0)$ y $(0,1)$ sobre la recta . En cambio, si elegimos la base de $\mathscr{B}_2 = \{(1,-1),(1,1)\}$, las proyecciones son más sencillas: $T(1,-1) = (1,-1)$ y $T(1,1) = (0,0)$. Y la matriz resulta:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo: (continuación)
Para obtener la matriz A asociada a T con la base canónica, sólo necesitamos la matriz M de cambio de base de $\mathscr{B}_2$ a la base canónica. O sea, la representación de los vectores de $\mathscr{B}_2$ en la báse canónica. Así, finalmente $A = MBM^{-1}$.

Ejercicio: Sea T la proyección en $\mathbb{R}^2$ sobre la recta que pasa por el origen formando un ángulo θ con el eje x. Construir la matriz A asociada a T con la base canónica de $\mathbb{R}^2$ a partir de la matriz B asociada a T con una base que contiene un vector sobre la recta y un vector ortogonal a la recta.

Nos habíamos planteado cuál es la matriz semejante *más sencilla* que puede tener cualquier matriz.
Este primer (importante!) resultado nos dice esa *forma sencilla* puede ser triangular.

Teorema (Lema de Schur) Sea A una matriz $n \times n$. Entonces, existe una matriz unitaria U tal que $U^{-1}AU = T$, con T una matriz triangular.

Prueba: después.

Observación: T tiene los autovalores de A en su diagonal. Y el lema vale para toda matriz, no necesariamente diagonalizable.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tiene autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad 2. El autoespacio asociado a λ tiene dimensión 1, generado por $(1,1)$. Por lo tanto, A no es diagonalizable. Es fácil verificar que si $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, entonces

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T.$$

El Lema de Schur nos asegura que toda matriz es semejante a una matriz triangular. Más aún, la matriz U que define la tranformación de semejanza que lleva cualquier matriz A a una triangular T es una matriz unitaria (matriz compleja con sus columnas ortonormales según el producto interno estándar en $\mathbb{C}^n$). Esto es, toda matriz es *triangularizable por una matriz unitaria*.

$$U^{-1}AU = T.$$

Vimos anteriormente (parte 2) que si una matriz hermitiana (resp. simétrica) era diagonalizable, la matriz diagonalizante podía ser elegida con columnas ortonormales, O sea, la matriz diagonalizante puede ser elegida unitaria (resp. ortogonal) .
El Lema de Schur nos permite probar que todas las matrices hermitianas (y por ende las simétricas) son diagonalizables por una matriz unitaria.

Teorema Espectral: Toda matriz hermitiana (resp. simétrica) A puede ser diagonalizable por una matriz unitaria U (resp. ortogonal Q).

Prueba: Sea A una matriz hermitiana. Por el Lema de Schur, existen U matriz unitaria y T matriz triangular tales que $U^{-1}AU = T$. Entonces,

$$T^H = (U^{-1}AU)^H = U^H A^H (U^{-1})^H = U^H AU = T.$$

Así, T es una matriz triangular tal que $T = T^H$. Por lo tanto, T es diagonal. $\square$

Corolario: Las matrices hermitianas tienen n autovectores ortonormales.

También vimos (parte 2) que si una matriz es diagonalizable por una matriz ortogonal, admitía una descomposición como suma de matrices de proyección sobre espacios de dimensión 1. Esta descomposición se denomina *descomposición espectral* de la matriz.
En general, tenemos el siguiente resultado:

Teorema: Si A es diagonalizable por una matriz unitaria, entonces admite una descomposición espectral. Esto es, si $\lambda_i, i = 1, \ldots, k$ son los autovalores diferentes de A, entonces, $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ donde P_i es la matriz proyección sobre autoespacio asociado a λ_i.

Prueba: Por hipotesis, existe U unitaria que diagonaliza a A. Esto es,
$U^{-1}AU = U^H AU = \Lambda$
(suponemos los autovalores ordenados de manera que λ_i, $i = 1, \ldots, k$, son los k autovalores diferentes y a partir del $k+1$ aparecen las repeticiones de estos.)

Prueba: (continuación) Por lo tanto,

$$A = U\Lambda U^H = [U^1, \ldots, U^n] \ \Lambda \begin{bmatrix} (U^1)^H \\ \cdots \\ \cdots \\ (U^n)^H \end{bmatrix} = \lambda_1 U^1 (U^1)^H + \ldots + \lambda_n U^n (U^n)^H.$$

Como U es unitaria sus columnas son autovectores de norma 1 y $U^i(U^i)^H$ es la matriz proyección sobre el espacio generado por el autovector U^i.

Si para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$ definimos $r(i) = \{j : \lambda_j = \lambda_i\}$, tenemos:

$$A = \lambda_1 \sum_{j \in r(1)} U^j (U^j)^H + \ldots + \lambda_k \sum_{j \in r(k)} U^j (U^j)^H$$

y, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, $\sum_{j \in r(i)} U^j (U^j)^H$ es la matriz proyección sobre el autoespacio asociado a λ_i (justificar). $\square$

Por los resultados anteriores tenemos:

Corolario: Toda matriz hermitiana (resp. simétrica) admite una descomposición espectral.

Nos preguntamos qué otras matrices son diagonalizables por una matriz unitaria (equivalentemente, admiten una descomposición espectral). Esas matrices son las *matrices normales*.

Definición: N es una *matriz normal* si el producto con su hermitiana conmuta. Esto es, si $NN^H = N^H N$.

Observación: las matrices hermitianas y unitarias son normales. (Justificar).

Ejercicio: Existen matrices normales no hermitianas y no unitarias. ¿Las hermitianas sesgadas son normales?

Ejercicio (en la práctica): Sea T una matriz triangular. Entonces T es normal si y solo si T es diagonal.

Teorema: Sea A matriz $n \times n$. Entonces, existe U unitaria tal que $U^{-1}AU = \Lambda$ si y solo si A es normal.

Prueba: Sea A una matriz normal. Por el Lema de Schur, existe U, matriz unitaria, tal que $U^{-1}AU = U^HAU = T$, con T triangular. Veremos que T es hermitiana y por ende diagonal. Tenemos,

$$TT^H = (U^HAU)(U^HA^HU) = U^H(AA^H)U = U^H(A^HA)U =$$

$$= U^HA^H(UU^H)AU = (U^HA^HU)(U^HAU) = T^HT.$$

Por lo tanto, T es normal. Como T es triangular, T es diagonal y $T = \Lambda$.

Recíprocamente, sea U matriz unitaria tal que $U^{-1}AU = \Lambda$. Debemos probar que A es normal. (Ejercicio). □

Vimos el siguente método para decidir si una matriz cualquiera es diagonalizable:

1. Calcular los autovalores diferentes de A: $\lambda_i, i = 1, \ldots, p$.
2. Para todo $i = 1, \ldots, p$, calcular $d_i = dim N(A - \lambda_i I)$.
3. Si $\sum_{i=1}^{p} d_i < n$ entonces A no es diagonalizable, caso contrario, A es diagonalizable,

Sabemos que el paso complicado es el paso 1, el cálculo de los autovalores de A.

Antes de empezar el cálculo, podemos chequear si tenemos la suerte de que sea normal (¿conmuta el producto con su hermitiana?).

Si no es normal, aún puede ser diagonalizable. En caso de serlo, sabemos que no admite una matriz diagonalizante unitaria. (justificar).

Si una matriz es normal, es diagonalizable por una matriz unitaria y admite la descomposición espectral.

¿Cómo obtenemos tal descomposición?

1. Calculamos sus autovalores.
2. Encontramos una base ortonormal de cada autoespacio.
3. construimos U unitaria diagonalizante de A tomando los vectores de las bases encontradas como sus columnas.
4. $A = \lambda_1 U^1 (U^1)^H + \ldots + \lambda_n U^n (U^n)^H$ (podemos asociar autovalores iguales).

Volvemos a preguntarnos, ¿cuál es la matriz más sencilla que es semejante a una matriz (no diagonalizable) dada?

El Lema de Schur, nos permite llegar hasta una matriz triangular a través de una transformación de semejanza definida por una matriz unitaria. Si nos permitimos transformaciones de semejanza con cualquier matriz no singular M, ¿cuál será la forma *más diagonal posible* a la que podemos llevar a A? Ésta es la denominada *Forma de Jordan*.

Si A es una matriz $n \times n$ con s autovectores l.i. entonces A es semejante a una matriz *diagonal por bloques* J, con s *bloques de Jordan*, $J_1, \ldots, J_s$.

Definición: Una matriz $k \times k$, con $k \geq 2$ es un *bloque de Jordan* si es una matriz con todas las entradas de su diagonal iguales, las entradas en la segunda diagonal superior son iguales a 1 y el resto de las entradas nulas. Toda matriz 1×1 es también un bloque de Jordan.

Así, cada bloque de Jordan es de la forma

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Probar que si A es un bloque de Jordan $k \times k$ con α en las entradas de su diagonal, α es el único autovalor de A con $ma(\alpha) = k$ y $mg(\alpha) = 1$.

Definición: Una *Forma de Jordan* es una matriz *diagonal por bloques de Jordan*. Esto es, sus bloques *se ubican en la diagonal* y, por fuera de ellos, las entradas son todos nulas.

Observación: Las matrices diagonales son formas de Jordan. (todo los bloques de tamaño 1×1).

Esto es, una Forma de Jordan con s bloques tiene la siguiente estructura:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

Como J es triangular superior, sus autovalores son los elementos de su diagonal.

Ejercicio: Probar que la multiplicidad geométrica de un autovalor de J es el número de bloques de Jordan en los que este autovalor aparece en su diagonal.

La *forma más sencilla* a la que puede ser llevada cualquier matriz por transformaciones de similitud o semejanza es *su Forma de Jordan*. Más aún, la Forma de Jordan *caracteriza* a matrices semejantes.

Teorema: Toda matriz es semejante a una Foma de Jordan. Más aún, dos matrices son semejantes si y solo si tienen la misma Forma de Jordan (salvo permutación en el orden de sus bloques de Jordan sobre la diagonal).

Dada una matriz, llamamos *su forma de Jordan* a la Forma de Jordan semejante a ella.

Corolario: La forma de Jordan de una matriz tiene, por cada autovalor, tantos bloques de Jordan con ese autovalor como la multiplicidad geométrica del autovalor.

Ejercicio: ¿Cuál es la forma de Jordan de una matriz diagonalizable?

Ejercicio: Sean A y B matrices con un mismo único autovalor λ de multiplicidad geométrica $p \geq 2$. ¿Son A y B necesariamente semejantes? ¿Y si $p = 1$?.

La Forma de Jordan es un importante resultado desde el punto de vista teórico ya que nos proporciona la forma *más diagonal* (matriz más *rala*) a la que podemos aspirar entre las matrices semejantes a una dada.
Además, la Forma de Jordan *caracteriza* a las matrices semejantes. Esto es, dos matrices son semejantes si y solo si tienen la misma forma de Jordan.

Sin embargo, carece de valor práctico ya que su construcción es extremadamente técnica e inestable (pequeños cambios en una entrada de la matriz original pueden llevar a Formas de Jordan totalmente diferentes).

Prueba del Lema de Schur:
Debemos probar que, para toda matriz A de tamaño $n \times n$, existe una matriz unitaria $U^{(n)}$ tal que $(U^{(n)})^{-1}AU^{(n)} = T^{(n)}$, con $T^{(n)}$ matriz triangular. La prueba es por inducción en n.

Si $n = 1$, la propiedad es trivial y la matriz diagonalizante $U^{(1)}$ es la identidad 1×1. Supongamos que para toda matriz A de tamaño $k \times k$ existe una matriz unitaria $U^{(k)}$ tal que $(U^{(k)})^{-1}AU^{(k)} = T^{(k)}$, con $T^{(k)}$ triangular.

Sea A una matriz de tamaño $(k+1) \times (k+1)$. Tomamos λ_1, autovalor de A, y x^1 un autovector (normalizado) asociado a λ_1. Sea U_1 una matriz unitaria $(k+1) \times (k+1)$ cuya primer columna es x^1 (siempre existe por G-S) y $M = U_1^{-1}AU_1$. Si M^1 es la primer columna de M tenemos:

$$M^1 = Me^1 = (U_1^H AU_1)e^1 = U_1^H A(U_1 e^1) = U_1^H Ax^1 = \lambda_1(U_1^H x^1).$$

Como las filas de U_1^H son las columnas de U_1 conjugadas, y las columnas de U_1 son ortonormales, la primer componente de $U_1^H x^1$ es la norma de x^1 (que es 1) y las restantes componentes son cero.

Así, existen M_k matriz $k \times k$ y $b = (b_1, \ldots, b_k)$ tales que

$$U_1^{-1} A U_1 = \left[\begin{array}{cccc} \lambda_1 & b_1 & \ldots & b_k \\ 0 & & & \\ \vdots & & M_k & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

Por hipótesis de inducción, existe $U^{(k)}$ unitaria tal que $(U^{(k)})^{-1} M_k U^{(k)} = T^{(k)}$, con $T^{(k)}$ triangular.

Sea U_2 la matriz $(k+1) \times (k+1)$ cuya primer columna y primera fila son el vector $e^1 \in \mathbb{R}^{k+1}$ y $U^{(k)}$ es su submatriz $k \times k$ en su esquina inferior derecha. Esto es,

$$U_2 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & U^{(k)} & \\ 0 & & & \end{array} \right]$$

Es fácil verificar que U_2 es unitaria. (Justificar). Además, U_2^{-1} tiene en su primer columna y en su primera fila al vector $e^1 \in \mathbb{R}^{k+1}$ y la submatriz $k \times k$ en su esquina inferior derecha es $(U^{(k)})^{-1}$. Esto es,

$$U_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \; \dots \; 0 \\ 0 & \\ \vdots & (U^{(k)})^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Finalmente, definiendo $U^{(k+1)} = U_1 U_2$, resulta $U^{(k+1)}$ unitaria (Justificar).
Sólo resta probar que $(U^{(k+1)})^{-1} A U^{(k+1)} = T^{(k+1)}$, con $T^{(k+1)}$ matriz triangular.
Tenemos

$$(U^{(k+1)})^{-1} A U^{(k+1)} = (U_2^{-1} U_1^{-1}) A (U_1 U_2) = U_2^{-1} (U_1^{-1} A U_1) U_2 = U_2^{-1} M U_2.$$

Por lo tanto,
$U_{k+1}^{-1}AU_{k+1} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \ \dots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & (U^{(k+1)})^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 \ \dots \ b_k \\ 0 & \\ \vdots & M_k \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \ \dots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & U^{(k)} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_1 \ \dots \ b_k \\ 0 & \\ \vdots & (U^{(k)})^{-1}M_k \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \ \dots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & U^{(k)} \\ 0 & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & bU^{(k)} & \\ 0 & & & \\ \vdots & & (U^{(k)})^{-1}M_kU^{(k)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & bU^{(k)} & \\ 0 & & & \\ \vdots & & T^{(k)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $(U^{(k+1)})^{-1}AU^{(k+1)} = T^{(k+1)}$ es una matriz triangular. □

$Tr(n,A)$
Entrada: n, A matriz $n \times n$
Salida: U matriz $n \times n$ unitaria tal que $U^{-1}AU$ es triangular.
Algoritmo:

1. $[1] \longleftarrow Tr(1,A)$. Parar.
2. Obtener un autovalor λ, de A y un autovector (normalizado) x asociado a λ.
3. Construir U_1, matriz unitaria cuya primer columna es x (G-S)
4. Obtener M' matriz esquina inferior derecha $(n-1) \times (n-1)$ de $U_1^{-1}AU_1$.
5. $U \longleftarrow Tr(n-1,M')$
6. Construir U_2 matriz $n \times n$ con primer columna y primera fila $e^1 \in \mathbb{R}^n$ y U es su submatriz esquina inferior derecha.
7. $U \longleftarrow U_1U_2$. Parar.