Capítulo 2: Espacios Vectoriales (1era. Parte).

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Outline

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad Ax = b$$

$$\begin{array}{rcrcrc} 3u & + & v & + & w & = \\ 9u & + & 2v & + & 5w & = \\ 8u & + & 4v & + & 0w & = \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrc} 3u & + & v & + & w & = \\ 0u & - & v & + & 2w & = \\ 0u & + & 0v & + & 0w & = \end{array}$$

Caso 1: No hay solución factible

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3u & + & v & + & w & = & \\ 0u & - & v & + & 2w & = & \\ 0u & + & 0v & + & 0w & = & 7 \end{array}$$

Caso 2: hay infinitas soluciones factibles

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3u & + & v & + & w & = & \\ 0u & - & v & + & 2w & = & \\ 0u & + & 0v & + & 0w & = & 0 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$ matriz singular.

Geometría por columnas:

$$Ax = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} w = b$$

Los vectores $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ subyacen en el mismo plano.

¿Cómo sabemos que subyacen en el mismo plano?

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es, $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$ se obtiene como combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Equivalentemente,

$$(-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Existe una combinación lineal no nula de los tres vectores que nos da el vector nulo. Los tres vectores NO son linealmente independientes.

En general:

El sistema es singular $\leftrightarrow$ los n planos no tienen puntos en común o tienen infinitos puntos en común $\leftrightarrow$ los n vectores columna subyacen en un mismo plano $(n-1)$-dimensional $\leftrightarrow$ los n vectores columna no son linealmente independientes.

Nos interesa entonces estudiar, entre otros, el *espacio que generan* los vectores columna de una matriz.

espacios vectoriales$\longleftrightarrow$ *combinaciones lineales*$\longleftrightarrow$conjunto de *vectores* que pueden ser *sumados y multiplicados* por *escalares*.

- escalares: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, cualquier *cuerpo* $\mathbb{K}$ (*conjunto de escalares, con suma, producto, con elementos neutros, opuestos, recíproco, etc....*)
- ¿vectores? cualquier tipo de elementos, siempre que podamos definir suma y producto por escalares.

Definición: $(V,+,\cdot)$ es un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ si, para todo $u,v,w \in V$ y todo $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, se verifica:

1. (suma cerrada en V) , $u+v \in V$,
2. (suma asociativa y conmutativa) $u+(v+w) = (u+v)+w$ y $u+v = v+u$,
3. (neutro de la suma) existe $0 \in V$ tal que $v+0 = v$
4. (elemento opuesto para la suma) existe $v^* \in V$ tal que $v+v^* = 0$,
5. $\alpha \cdot v \in V$,
6. $1 \in \mathbb{K}$ elemento neutro del producto en $\mathbb{K}$, entonces $1 \cdot v = v$,
7. $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$,
8. $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$,
9. $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

Convenio: cuando hablamos de un espacio vectorial V y no especificamos quién es $\mathbb{K}$, asumimos que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (espacio vectorial real). Cuando no especificamos las operaciones suma y producto es porque consideramos *las habituales*.

Ejemplos:

1. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$ ¡también $\mathbb{R}$!
2. $\mathbb{R}^\infty =$sucesiones reales
3. matrices reales $m \times n \longleftrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$
4. funciones reales definidas en $[a,b]$,
5. funciones reales continuas
6. funciones derivables en x_0,
7. $\{$polinomios a coef. reales$\} \cup \{$polinomio nulo$\}$
8. $\{polinomios\ de\ grado\ a\ lo\ sumo\ n\} \cup \{$polinomio nulo$\}$
9. $\{0\}$?

$V = (\{0\}, +, \cdot)$ con suma y producto en $\mathbb{R}$, ¿es un espacio vectorial? Verifiquemos:

1. ¿suma cerrada en V? $0+0=0 \in V$ ✓
2. ¿suma asociativa y conmutativa? lo hereda de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
3. ¿neutro de la suma? Si, el propio 0.
4. ¿elemento opuesto? Si, 0 es su propio opuesto.
5. ¿$\alpha v \in V$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in V$? $\alpha 0 = 0 \in V$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $1.0 = 0$ ✓

Es fácil ver que se verifican también las propiedades 7., 8. y 9..

Observación: $\{0\} \subset \mathbb{R}$ y la suma y producto por escalares son las de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ que ya sabemos es un espacio vectorial. En estos casos diremos que $(0, +, \cdot)$ es un subespacio de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y veremos más adelante que no es necesario chequear las 9 condiciones.

Verifiquemos algún otro ejemplo:

Funciones reales derivables en $x_0 \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{F}$

- Suma: $f+g$ tal que $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- Producto por escalares: αf tal que $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

1. ¿$f+g \in \mathscr{F}$? ✓ Por qué?
2. suma asociativa y conmutativa ✓
3. ¿Neutro de la suma? La función nula. ¿Está en $\mathscr{F}$ la función nula? ¿Por qué?
4. ¿Quién es el opuesto de $f \in \mathscr{F}$? ¿Pertenece a $\mathscr{F}$ su opuesto?
5. ¿$\alpha f \in \mathscr{F}$? ¿Por qué?
6. $1f = f$ ✓
7. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$ ✓
8. $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$ ✓
9. $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$ ✓

El conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos es un cuerpo algebraico.

1. $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (ejercicio)
2. Matrices $m \times n$ con entradas complejas, también definen un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (ejercicio).

Veamos un ejemplo de un cuerpo algebraico distinto de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$:

Sea $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ con $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, 0 el elemento neutro de $\oplus$, $1 \oplus 1 = 0$, 1 el elemento neutro de $\odot$ y $0 \odot 0 = 0$.

Se puede verificar que $\oplus$ y $\odot$ son asociativas, que todo elemento de $\mathbb{Z}_2$ tiene opuesto, que todo elemento distinto del neutro de $\oplus$ tiene recíproco y que $\odot$ es distributiva respecto de $\oplus$ (ejercicio). Aceptamos que $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ es un cuerpo algebraico.

Ejercicio: Probar que el conjunto de n-uplas con componentes en $\mathbb{Z}_2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$ (con la suma y el producto de un escalar realizado componente a componente). ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$?

- *Unicidad del neutro*:
  Sean $\mathbf{0};\mathbf{0}' \in V$ tales que $\mathbf{0}+v=\mathbf{0}'+v=v$ para todo $v\in V$. Entonces, $\mathbf{0}'=\mathbf{0}$.
  Prueba: Como $\mathbf{0}'+v=\mathbf{0}+v=v$ para todo $v\in V$, en particular, $\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ y $\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'$.
  Por conmutatividad de la suma, $\mathbf{0}=\mathbf{0}'+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}'=\mathbf{0}'$.

  Observación: La unicidad del neutro nos permite definir un símbolo para referirnos a él. Usamos **0** para identificar el neutro de la suma en cualquier espacio vectorial.
- $0v=\mathbf{0}$ para todo $v\in V$.
  Prueba: Sea $v\in V$ y $w=0v$. Usando la distributiva del producto respecto a la suma de escalares (prop. 9.) tenemos

  $$w=0v=(0+0)v=0v+0v=w+w.$$

  Como w tiene un opuesto w^*, tenemos

  $$\mathbf{0}=w^*+w=w^*+(w+w)=(w^*+w)+w=\mathbf{0}+w=w.$$

- *Unicidad del opuesto*: sean $x, \bar{x} \in V$, tal que $x^* + \bar{x} = x + \bar{x} = \mathbf{0}$, entonces $\bar{x} = x^*$.
  Prueba: En práctica.

  Observación: La unicidad del opuesto nos permite definir un símbolo para indicarlo. En función de la propiedad anterior, a partir de ahora notamos con $-v$ al opuesto de v.
- $(-1)v = -v$ para todo $v \in V$. (Ejercicio)
- $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$. (Ejercicio)
- Si $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ entonces $\alpha = 0$ o $v = \mathbf{0}$.
  Prueba: Observar que es suficiente probar que si $\alpha \neq 0$ entonces $v = \mathbf{0}$. Sean $\alpha \neq 0 \in \mathbb{K}$ y $v \in V$ tal que $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$. Como $\alpha \neq 0$, existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha\alpha^{-1} = 1 \in \mathbb{K}$. Tenemos entonces:

$$\alpha \cdot v = \mathbf{0} \Longrightarrow \alpha^{-1}(\alpha \cdot v) = \alpha^{-1}\mathbf{0} \Longrightarrow (\alpha^{-1}\alpha) \cdot v = \mathbf{0} \Longrightarrow 1 \cdot v = v = \mathbf{0}$$

- *Propiedad cancelativa de la suma*: si $z + x = z + y$ entonces $x = y$.
  Prueba: Ejercicio

Otro ejemplo de espacio vectorial:
Sea $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$. Entonces $(\Pi, +, \cdot)$, con $+$ y $\cdot$ las operaciones del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, es un espacio vectorial.

Prueba: para todo $u, v, w \in \Pi$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ debemos verificar:

1. ¿$u + v \in \Pi$? ¿$3(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) = 0$?

   $3(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) =$
   $(3u_1 + 2u_2 + u_3) + (3v_1 + 2v_2 + v_3) = 0 + 0 = 0$
2. ¿suma asociativa y conmutativa? Se hereda del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.
3. ¿existe $0 \in \Pi$ tal que $v + 0 = v$, para todo $v \in \Pi$?
   $\mathbf{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, ¿$\mathbf{0} \in \Pi$? Claramente si.
4. ¿$-v \in \Pi$? Verificar que si.
5. ¿$\alpha \cdot v \in \Pi$? Verificar que si.

6. ¿$1 \cdot v = v$?
7. ¿$(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$?
8. ¿$\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$?
9. ¿$(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$?.

Todas estas se heredan de $\mathbb{R}^3$

Observación: Tenemos $\Pi \subset \mathbb{R}^3$, lo dotamos de las mismas operaciones del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ y resultó ser también un espacio vectorial. Además, para probarlo, no fue necesario verificar muchas de las propiedades ya que se heredan naturalmente de $\mathbb{R}^3$.

Definición: Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial y $U \neq \emptyset \subset V$. Entonces, U es un *subespacio vectorial de* V si $(U,+,\cdot)$ es un espacio vectorial.

Lema: Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial y $U \subset V$. Entonces, U es un *subespacio (vectorial) de* V si y solo si toda combinación lineal de elementos de U pertenece a U; i.e. para todo $u_1, u_2 \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, resulta $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$.

Prueba: Ejercicio.

Ejercicio: Determinar cuales de estos subconjuntos definen subespacios vectoriales.

- $\mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
- $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 5\} \subset \mathbb{R}^3$
- matrices triangulares $n \times n \subset$ matrices $n \times n$.
- matrices simétricas $n \times n \subset$ matrices $n \times n$.

Definición: Dado un espacio vectorial V y un subconjunto de vectores $U \subset V$, llamamos *subespacio generado por* U y lo notamos $\langle U \rangle$ al subespacio de V determinado por todas las combinaciones lineales de elementos de U. Esto es,

$$\langle U \rangle = \{\alpha u + \beta v : u, v \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}.$$

Pregunta: ¿Por qué $\langle U \rangle$ es un subespacio vectorial?

Ejemplos:

1. $U = \{(1,-1)\} \subset \mathbb{R}^2$. ¿Quién es $\langle U \rangle$?

2. $U = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$. ¿Quién es $\langle U \rangle$?

3. $U = \{(1,0,0),(0,1,0),(7,3,0)\} \subset \mathbb{R}^3$. ¿Quién es $\langle U \rangle$?

4. Sean f, g y h las funciones reales tales que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, $g(x) = x$ y $h(x) = x^2$. Sea $U = \{f,g,h\} \subset \{$funciones reales$\}$. ¿Quién es $\langle U \rangle$?

Dada una matriz A, $m \times n$, definimos:

- *Espacio columna de* A: es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por los vectores columna de A. Lo notamos $C(A)$.
- *Espacio nulo de* A: es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$.

Ejercicio: Probar la correcta definición de $N(A)$, o sea, probar que $N(A)$ es un espacio vectorial.

Pregunta: Si A es una matriz 1×3, ¿qué interpretación geométrica tiene su espacio nulo? ¿Y su espacio columna? ¿Qué relación geométrica hay entre ambos espacios?

Dada una matriz A y un vector b, ¿cómo sabemos si $b \in C(A)$?

$b \in C(A)$ si existe una combinación lineal de las columnas de A que nos dé b. O sea, si existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{n} A^i x_i = b.$$

Equivalentemente, si existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$.

Observación: El espacio columna está definido para todas las matrices, no necesariamente cuadradas. Con lo cual, el sistema $Ax = b$ no necesariamente tiene mismo número de ecuaciones e incógnitas.

Lema: Si A es una matriz no singular $n \times n$, $C(A) = \mathbb{R}^n$.
Prueba: De acuerdo a lo anteriormente observado, $C(A) = \mathbb{R}^n$ si y solo si, para todo $b \in \mathbb{R}^n$, el sistema $Ax = b$ tiene solución. Si A es no singular, Gauss encuentra siempre la solución del sistema $Ax = b$, para todo b.

Pregunta: Si A es la matriz nula $m \times n$, ¿quién es $C(A)$?

Veamos algunos casos donde $C(A)$ no es todo $\mathbb{R}^m$ ni el vector nulo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$C(A) = \{x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$$

$C(A)$ es el plano xy de $\mathbb{R}^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$C(A) = \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z \right\}$$

$C(A)$ es el la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y tiene vector dirección $(1, 1, 1)$.

Observación: Si A es una matriz $m \times n$, $C(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. Veremos que este subespacio puede ser de cualquier *dimensión*, entre 0 (A matriz nula) y m (Ejemplo: $m = n$ y A matriz no singular).

Recordemos que, dada una matriz $m \times n$ A, $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ es un espacio vectorial.

Observación 1: $N(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Observación 2: Si A es una matriz cuadrada no singular, $N(A) = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. ¿Por qué?

Observación 3: Si A es la matriz nula $m \times n$, $N(A) = \mathbb{R}^n$. ¿Por qué?

Veremos que el espacio nulo de una matriz $m \times n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ que puede tener cualquier *dimensión* entre 0 (A matriz singular) y n (A matriz nula).

Ejercicio: Dada A una matriz $m \times n$, sea A' la matriz que se obtiene de agregar una columna A^{n+1} a A, donde A^{n+1} es una combinación lineal de las columnas de A. Probar que $C(A) = C(A')$.

Pregunta: ¿Puede ser $N(A) = N(A')$? Claramente no, $N(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ mientras que $N(A') \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. ¿Puede ser $N(A) = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ y $N(A') \neq \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$? Veamos que si con un ejemplo.

Sean

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Observar que B se obtiene agregando a A una columna que es la suma de sus columnas. Por lo tanto $C(A)=C(B)$.

Es fácil ver que $N(A)=\{(0,0)\}$. (Verificar)
¿Cómo sabemos que $N(B)\neq\{(0,0,0)\}$? Es fácil ver que $(1,1,-1)\in N(B)$. (Verificar)
¿Puede ser éste el único elemento no nulo de $N(B)$? Justificar.

Queremos poder describir $C(A)$ y $N(A)$ para cualquier matrix $m\times n$.
En ese camino vamos...