**Universidad Nacional de Rosario**

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

# Algebra Lineal

## *Unidad 0*

Autor del resumen:

Charles Chaplin

Septiembre 2020

# Contents

**1 Introduccion a vectores** **2**
1.1 Preguntas importantes . . . 3
1.2 Ideas importantes . . . 3

**2 Módulos y producto punto** **4**
2.1 Producto punto o producto interno . . . 4
2.2 Módulos y vectores unitarios . . . 4
2.3 Ángulo entre vectores . . . 5
2.4 Ideas importantes . . . 6

**3 Matrices** **7**
3.1 Ecuaciones lineales . . . 8

# 1 Introduccion a vectores

El corazón del álgebra lineal está en dos operaciones, ambas con vectores. Sumamos vectores para obtener $v + w$. Los multiplicamos con números c y d para obtener $cv$ y $dw$. Combinando estas dos operaciones (sumar $cv$ a $dw$) obtenemos la **combinación lineal** $cv + dw$

$$cv + dw = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c + 2d \\ c + 3d \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Los vectores cv se encuentran sobre una linea. Cuando w no se encuentra sobre esa linea, con **las combinaciones cv+dw podemos obtener cualquier vector dentro del plano 2 dimensional.** Si planteamos lo mismo con cuatro vectores, v,w,u,z, en un espacio de 4 dimensiones, sus combinaciones $cu + dv + ew + fz$ podrían completar el espacio, pero no siempre. Estos vectores y sus combinaciones podrían encontrarse sobre una linea o un plano.

**Ejemplos de vectores y combinaciones lineales. p.13**[1]

**Vector columna**

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$v_1$ : primera componente de v $\qquad$ $v_2$ : segunda componente de v

**Suma de vectores**

Sea $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ y $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$; entonces, $v + w = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$

**Multiplicación por escalar**

Sea $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$; entonces, $cv = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \end{bmatrix}$[2]

**Combinación lineal**

Ahora al combinar la suma de vectores con la multiplicación por escalar obtenemos la combinación lineal de v y w.

La suma +dw es una **combinación lineal cv+dw**

**Ejemplos de combinaciones lineales y representación grafica, 2 y 3 dimensiones. p. 114-116**

[1] **idea: "No se pueden sumar peras con naranjas"**
[2] El numero c es llamado **escalar**

## 1.1 Preguntas importantes

Para un vector u, las unicas combinaciones lineales son los multiplos cu. Para dos vectores, las combinaciones son cu+dv. Para tres vectores, las combinaciones son cu+dv+ew. Ahora... podriamos imaginar todas las combinaciones?. Para toda c,d,e y sean u,v,w vectores tridimensionales:

1. Qué se obtiene de todas las combinaciones de cu?
2. Qué se obtiene de todas las combinaciones de cu+dv?
3. Qué se obtiene de todas las combinaciones de cu+dv+ew?

Las respuestas dependen de los vectores u,d y w. Si estos fuesen vectores nulos, entonces toda combinación sería nula. Si estos son típicos vectores no nulos, aquí hay tres respuestas:

1. Las combinaciones cu dan como resultado una recta que pasa por (0,0,0)
2. Las combinaciones de cu+dv dan como resultado un plano que pasa por (0,0,0)
3. Las combinaciones de cu+dv+ew dan como resultado el espacio tridimensional

El vector nulo esta en la recta que pasa por u porque c puede ser 0. El vector nulo esta en el plano que conforman u y v porque c y d pueden ser 0. Cuando incluimos un tercer vector, las combinaciones ew dan como resultado una recta. Si esta tercer recta no esta en el plano conformado por u y v entonces las combinaciones cu+dv+ew recrean el espacio tridimensional.

Esta es la situación típica, **linea**, después **plano**, luego **espacio**. Otras posibilidades también existen; cuando w se puede recrear a partir de una combinación lineal cv+du, este tercer vector se encuentra en el plano de los dos primeros. Por lo tanto las combinaciones lineales entre los tres vectores no salen del plano uv y asi es como no se llega a obtener el espacio tridimensional.

## 1.2 Ideas importantes

1. Un vector en un espacio bidimensional tiene 2 componentes $v_1$ y $v_2$.
2. v+w=$(v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ y cw=$(cw_1, cw_2)$ son hallados una componente a la vez.
3. Una combinación lineal de tres vectores u,v,w es cu+dv+ew
4. Al pensar en todas las combinaciones posibles de u, u y v; y de u,v y w. En tres dimensiones estas combinaciones comunmente conforman una linea, luego un plano y luego el espacio tridimensional.

**Ejemplos p. 17-22**

# 2 Módulos y producto punto

## 2.1 Producto punto o producto interno

El producto punto [1] de $v = (v_1, v_2)$ con $w = (w_1, w_2)$ es el número $v \cdot w$:

$$v = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

**Ejemplos p. 21-22**

**Punto principal.** Para $v \cdot w$, multiplicar cada $v_i$ por $w_i$. Luego $v \cdot w = v_1 w_1 + ... + v_n w_n$

## 2.2 Módulos y vectores unitarios

Un caso importante es el producto punto de un vector consigo mismo.

**Definicion.** El modulo $||v||$ de un vector v es la raiz cuadrada de $v \cdot v$

$$modulo\ = ||v|| = \sqrt{v \cdot v} = (v_1^2 + ... + v_n^2)^{(1/2)}$$

**Ejemplos p.24**

**Definición.** Un vector unitario u es un vector cuyo modulo es igual a 1. Luego $u \cdot u$=1

**Ejemplos p.24-25**

[1] La interpretación geométrica del producto punto v.w es que v.w nos devuelve la longitud de la proyeccion ortogonal de v sobre w.

**Vector unitario.** u = $v/||v||$ es un vector unitario en la misma dirección que v.

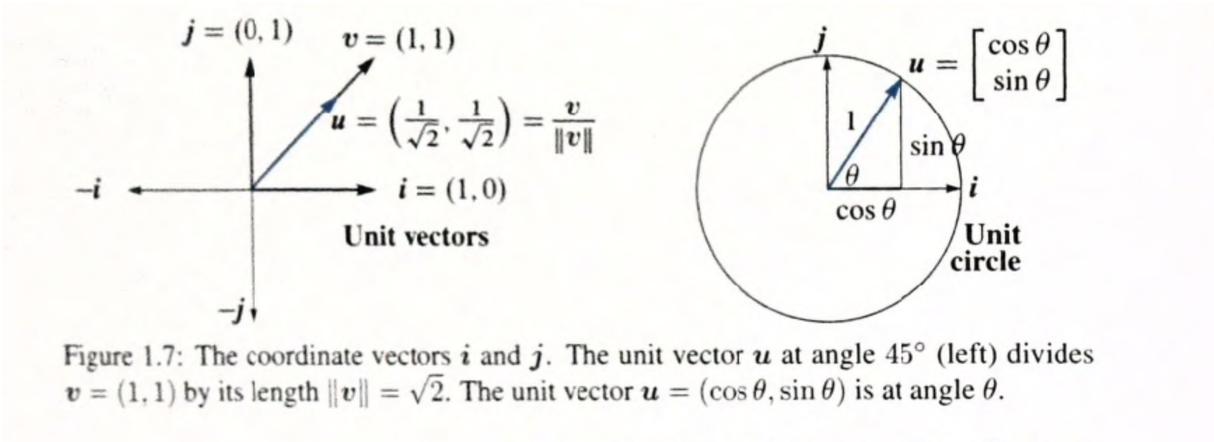


Figure 2.1: Vector unitario.

## 2.3 Ángulo entre vectores

**Angulos rectos.** El producto punto es $v \cdot w = 0$ cuando w es perpendicular a v

**Demostracion p.25**

Ahora supongamos que $v \cdot w$ es distinto de 0. Puede ser negativo o puede ser positivo. El signo de $v \cdot w$ nos dice inmediatamente si el ángulo entre estos vectores es mayor o menor a 90. El ángulo es menor a 90 cuando $v \cdot w$ es positivo y mayor en el caso restante.

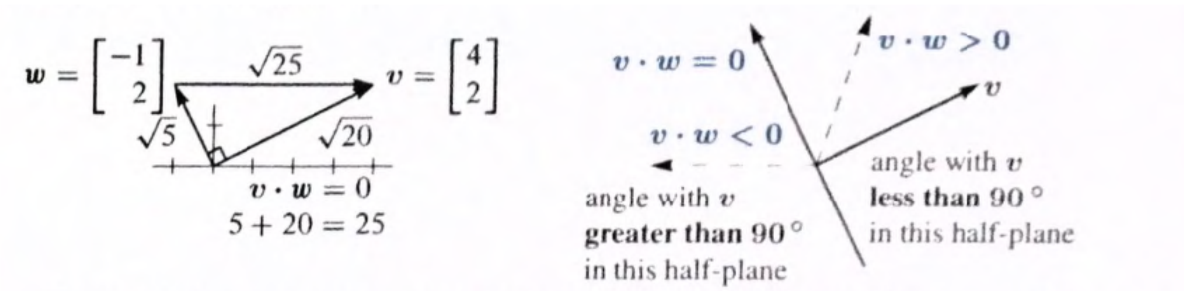


Figure 2.2: Ángulo entre vectores

**El producto punto nos revela $\theta$.** Para vectores unitarios u y U, el producto punto $u \cdot U$ es el coseno de $\theta$. Esto se mantiene verdadero en n dimensiones.

$$u \cdot U = \cos\theta \Rightarrow |u \cdot U| \leq 1$$

Si v y w no son vectores unitarios, obtenemos u = v / $||v||$ y U = w / $||w||$. Luego con el producto punto entre u y U obtenemos $\cos\theta$.

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{||v|| \; ||w||}$$

**Desigualdad del SCHWARZ.** $|v \cdot w| \leq ||v|| ||w||$

**Desigualdad de triangulo.** $|v + w| \leq ||v|| + ||w||$

**Ejemplos p. 27**

## 2.4 Ideas importantes

1. El producto punto $v \cdot w$ multiplica cada componente $v_i$ por $w_i$ y suma todos los $v_i w_i$
2. El modulo $||v||$ es la raiz cuadrada de $v \cdot v$. Luego $u = v/||v||$ es un vector unitario
3. El producto interno $v \cdot w$=0 cuando los vectores son perpendiculares.
4. **Desigualdad del SCHWARZ.** $|v \cdot w| \leq ||v|| ||w||$

$$\cos\theta = \frac{v \cdot w}{||v|| \; ||w||}$$

**Ejemplos y problemas p. 28-33**

# 3 Matrices

**Ejemplos e ideas p. 33**

Sean u, v y w tres vectores, en donde:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Sus combinaciones lineales en un espacio tridimensional son $x_1u + x_2v + x_3w$. Las combinaciones de los vectores serian:

$$x_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1u_1 + x_2v_1 + x_3w_1 \\ x_1u_2 + x_2v_2 + x_3w_2 \\ x_1u_3 + x_2v_3 + x_3w_3 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo la combinación usando una matriz obtenemos una matriz multiplicada por un vector columna:

$$Ax = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1u_1 + x_2v_1 + x_3w_1 \\ x_1u_2 + x_2v_2 + x_3w_2 \\ x_1u_3 + x_2v_3 + x_3w_3 \end{bmatrix}$$

Esto es mas que solo una definicion de Ax, ya que reescribir nos trae un cambio en el punto de vista. Al principio, $x_1, x_2, x_3$ multiplicaban los vectores. Ahora la matriz es multiplicando esos números. **La matriz A actua sobre el vector x**. El resultado de Ax es **una combinación lineal b de las columnas de A.**

**Ejemplo matriz diferencia p.34** [1]

[1] Con números podemos resolver esta ecuacion con producto punto (por filas), con letras lo correcto es trabajarlo por columnas.

## 3.1 Ecuaciones lineales

Un cambio mas del punto de vista es crucial. Hasta ahora, losánúmeros $x_1, x_2, x_3$ eran datos. La parte derecha era desconocida. **Ahora pensamos b como dato y x como incognita**

**Ejemplos matriz diferencia y matriz ciclica p.33-37**

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$$

Donde u,v y w son vectores columnas, deducimos que A es invertible (no-singular) si estos vectores columnas son **mutuamente independientes**, es decir:

$$0u + 0v + 0w = 0$$

es la unica combinación lineal tal que Ax=0 (x es vector nulo).

En cambio A es singular si sus vectores columnas son dependientes, es decir que existen $x_1, x_2, x_3$ tal que:

$$x_1 u + x_2 v + x_3 w = 0$$

además del vector nulo.

Por lo tanto

a) Si Ax=0 tiene unica solución $\Rightarrow$ A es invertible

b) Si Ax=0 tiene multiples soluciones $\Rightarrow$ A es singular

**Ideas importantes:**

1) La mutliplicación de una matriz por un vector: Ax = combinación lineal de las columnas de A.

2) La solución a $Ax = b$ es $x = A^{-1}b$, cuando A es invertible.

**Ejemplos y Ejercicios p. 38-42**