1. *a*) Encontrar la solución general del siguiente sistema $Ax = b$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} u & + & 2v & + & w & & & = & 1 \\ 2u & + & 5v & + & w & + & z & = & 1 \\ & & v & + & w & + & 3z & = & -1 \end{array} .$$

b) Sea A la matriz de coeficientes del sistema anterior. Sean $b \in \mathbb{R}^3$ y $c \in \mathbb{R}^4$ tales que los sistemas $Ax = b$ y $A^T y = c$ admiten solución. Demuestre que $A^T y = c$ tiene solución única y $Ax = b$, infinitas soluciones.

SOLUCIÓN:

a) Expresamos el sistema en su forma matricial y lo transformamos por medio de las operaciones elementales que llevan a la matriz de coeficientes a su forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{33}(1/2)} \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{23}(1)} \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{13}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

La solución general del sistema es:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Justificación:

- Las soluciones del sistema $Ax = b$ son de la forma $x_P + x_N$, donde x_P es una solución particular y x_N es un elemento de $N(A)$.
- Una solución particular corresponde a poner las variables libres en cero.
  Observamos que, para un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es escalonada reducida, la solución particular se contruye fácilmente con los términos en el lado derecho (azul).
- Sabemos que el espacio nulo de A está generado por las soluciones especiales, estas corresponden a poner una de las variables libres en 1 y las demás en 0.
  Observamos que, mirando la columna respectiva de una solución especial en la matriz escalonada reducida asociada a A, podemos determinar fácilmente los valores correspondientes a las variables pivots (rojo).

Notación: $E_{ij}(k)$ es la matriz identidad con entrada ij igual a k.

Verificación de las cuentas:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr|rcrcrcrcr} 3 & + & 2\cdot(-1) & + & 0 & & & = & 1 & 5 & + & 2\cdot(-2) & + & (-1) & & & = & 0 \\ 2\cdot 3 & + & 5\cdot(-1) & + & 0 & + & 0 & = & 1 & 2\cdot 5 & + & 5\cdot(-2) & + & (-1) & + & 1 & = & 0 \\ & & -1 & + & 0 & + & 3\cdot 0 & = & -1 & & & -2 & + & (-1) & + & 3\cdot 1 & = & 0 \end{array}$$

b) Sean x_P e y_P tales que

$$\begin{aligned} A\, x_P &= b, \\ A^T y_P &= c. \end{aligned}$$

Por lo explicado en *a*), la solución general de los sistemas $Ax = b$ y $A^T y = c$ es

$$\begin{aligned} &x_P + x_N \qquad x_N \in N(A), \\ &y_P + y_N \qquad y_N \in N(A^T), \end{aligned}$$

respectivamente.
Por lo visto en *a*), $N(A) \neq \{0\}$ y por ende $Ax = b$ tiene infinitas soluciones.
Dado que por el teorema fundamental del álgebra lineal tenemos que

$$\dim(N(A^T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(C(A)) = 3 - rg(C(A)) = 3 - 3 = 0,$$

resulta que $N(A^T) = \{0\}$, lo que nos lleva a concluir que y_P es solución única del sistema $A^T y = c$.

2. Sea $U = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 2} : A_1 + A_2 = A_3\}$ (A_i indica la fila i-ésima de la matriz A).

   a) Probar que U es un subespacio vectorial del espacio de $\mathbb{R}^{3\times 2}$ y determinar una base $\mathscr{B}$ de U.

   b) Determinar una base $\mathscr{B}'$ de U que difiera en un elemento con $\mathscr{B}$ y hallar la matriz de cambio de base de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$.

   c) Hallar la representación en $\mathscr{B}$ de $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN:

a) Sea $A \in U$ tal que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

para $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Por la propiedad que define a U tenemos que:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ a+c & b+d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como los coeficientes a, b, c, d son arbitrarios,

$$U = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$$

y por lo tanto U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{3\times 2}$.

Observamos además que los generadores propuestos son linealmente independientes ya que si $A = 0_{3\times 3}$, entonces $a = b = c = d = 0$ por igualdad de matrices.

Como son linealmente independientes y generan U resultan una base de U.

b) Construimos la base $\mathscr{B}'$ a partir de $\mathscr{B}$, reemplazando un elemento por su doble **(*)**.

$$\mathscr{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

La matriz de cambio de base $E \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ es tal que su i-ésima columna es la representación de el i-ésimo elemento de $\mathscr{B}$ en la base $\mathscr{B}'$, esto es:

$$E^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad E^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad E^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Luego,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(*) Si reemplazamos un elemento v de una base B por:

$$w = \alpha_v v + \sum_{\substack{u \in B \\ u \neq v}} \alpha_u u, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ para } i \in B,$$

entonces el conjunto resultante B' es una base si $\alpha_v \neq 0$.

c) Observando el ejercicio a), vemos que la base $\mathscr{B}$ es tal que

$$[A]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$[M]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sean T_1 y T_2 las transformaciones lineales del espacio tales que, a cada vector, T_1 lo proyecta sobre el plano xz y T_2 lo refleja respecto del plano xy.

   a) Obtener las matrices A y B tales que, para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $T_1(v) = Av$ y $T_2(v) = Bv$.

   b) Determinar qué efecto realiza AB sobre los vectores del espacio.

   c) Dar una base de $N(T_1)$ y una base de $Rec(T_2)$.

   d) Determinar cuál de las dos trasformaciones es un isomorfismo, expresar cuál es el efecto que realiza sobre los vectores del espacio su transformación inversa y obtener la matriz asociada a ésta, sin calcular inversas de matrices.

SOLUCIÓN:

a) Aplicamos cada transformación sobre los elementos de la base canónica para determinar A y B:

$$A^1 = T_1(e_1) = e_1 \qquad B^1 = T_2(e_1) = e_1$$
$$A^2 = T_1(e_2) = 0_3 \qquad B^2 = T_2(e_2) = e_2$$
$$A^3 = T_1(e_3) = e_3 \qquad B^3 = T_2(e_3) = -e_3$$

Luego,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Notación: e_i es el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^3$.

b) Como la matriz producto AB es la matriz asociada a la composición de transformaciones lineales $T_1 \circ T_2$, resulta que la matriz AB representa la proyección sobre el plano xz de una reflexión respecto al plano xy.
Notamos que saber el efecto de una matriz producto sobre los vectores del espacio nos permite calcular AB sin hacer el producto de matrices (el cual es computacionalmente costoso para matrices grandes):

$$(AB)^1 = (T_1 \circ T_2)(e_1) = T_1(e_1) = e_1,$$
$$(AB)^2 = (T_1 \circ T_2)(e_2) = T_1(e_2) = 0_3,$$
$$(AB)^3 = (T_1 \circ T_2)(e_3) = T_1(-e_3) = -e_3.$$

Concluimos que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Calculamos las bases a partir de las matrices asociadas:

$$N(T_1) = N(A) \overset{(1)}{=} N(R_A) = \langle\{e_2\}\rangle$$
$$Rec(T_2) = C(B) \overset{(2)}{=} \mathbb{R}^3 = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$$

(1) La matriz escalonada reducida asociada a A es $R_A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(2) Dado que B es una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal resulta que es una matriz no singular, por lo tanto, para cualquier $b \in \mathbb{R}^3$ existe x tal que $Bx = b$.

d) Como $N(A) \neq \{0\}$, T_1 no es un monomorfismo y por ende no puede ser un isomorfismo.
Como $C(B) = \mathbb{R}^3$, T_2 es un epimorfismo; además, como el dominio y codominio de T_2 tienen igual dimensión, epimorfismo es equivalente a isomorfismo.
Veamos que $T_2^{-1} = T_2$ calculando la transformación $T_2 \circ T_2$ sobre la base canónica:

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_2)(e_1) &= T_2(e_1) = e_1, \\ (T_2 \circ T_2)(e_2) &= T_2(e_2) = e_2, \\ (T_2 \circ T_2)(e_3) &= T_2(-e_3) = e_3.\end{aligned}$$

Como una transformación lineal queda unívocamente definida por sus valores en una base, tenemos que $T_2 \circ T_2 = Id$ y por lo tanto $T_2^{-1} = T_2$.
Dado que los efectos y la matriz asociada de T_2^{-1} son los mismos que T_2 concluimos el ejercicio.

4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

   a) Sea $n(A,b)$ el número de soluciones de $Ax = b$. Existen matrices A tales que $n(A,b_1) = 0$ y $n(A,b_2) = 1$ para ciertos b_1, b_2.

   b) Sean A y B matrices $m \times n$ tales que $C(A) = C(B)$. Entonces, $N(A) = N(B)$.

SOLUCIÓN:

   a) Tenemos que entender que nos dicen las condiciones sobre los espacios fundamentales de una hipotética matriz A de dimensiones $m \times n$.

   - Si $n(A,b_1) = 0$, entonces $Ax = b_1$ no admite solución, lo que es equivalente a decir que $b_1 \notin C(A)$.
   - Si $n(A,b_2) = 1$, entonces $Ax = b_2$ admite solución única, esto implica que $N(A) = \{0\}$.

   Hechas estas observaciones, no es muy difícil demostrar que cualquier matriz de rango NO completo y de columnas linealmente independientes es una matriz que sirve como ejemplo para este ejercicio:
   Verdadero, si A es igual a un vector no nulo v del plano entonces fácilmente vemos que $n(A,v) = 1$ y que si w es un vector no paralelo a v entonces $n(A,w) = 0$.

   b) Observamos que $\dim(C(A)) = \dim(C(B))$ implica que $\dim(N(A)) = \dim(N(B))$, PERO el ejercicio pregunta por una igualdad de conjuntos.
   Notamos que el siguiente par de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   verifican que $C(A) = C(B) = \mathbb{R}^2$ pero $N(A) = \langle \{e_3\} \rangle \neq N(B) = \langle \{e_2\} \rangle$.
   Concluimos que el enunciado es Falso.