Capítulo 4 - Determinantes [1]

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

[1] Siguiendo *Linear Algebra and its applications*, G. Strang.

Outline

El determinante de una matriz cuadrada, difinido ya en Álgebra II, puede ser visto como una función de las matrices $n \times n$ en los reales.

Entre otras propiedades, sabemos que el determinante caracteriza la singularidad o no de una matriz ("A es singular si y solo si $det(A) = 0$"). También nos da una fórmula explícita para las entradas de A^{-1} (A no singular) o la solución de un sistema $Ax = b$ (regla de Cramer).

Sin embargo, la existencia de esas fórmulas no cambia la forma en que calculamos. También para el cálculo del determinante, el método más eficiente será la Eliminación Gaussiana.

La aplicación más importante del determinante es como test de inversibilidad de la matriz $A - \lambda I$ (restamos $\lambda \in \mathbb{R}$ a los elementos de la diagonal de A). Los valores de λ tales que $A - \lambda I$ es singular se denominan *autovalores de* A. Este será el tema del Capítulo 5.

Convenio: A partir de ahora, y a lo largo de todo este capítulo, todas las matrices son cuadradas $n \times n$.

Veremos que las siguientes propiedades del determinante son *las más importantes* en el sentido de que permiten *definirlo*:

1. El determinante de la matriz identidad es 1.
2. El determinante cambia su signo si permutamos dos de sus filas.
3. El determinante es *lineal en la primera fila*.

   Para $n = 2$, si
$$A = \begin{bmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 & \alpha u_2 + \beta v_2 \\ b & c \end{bmatrix}$$
   resulta
$$det(A) = \begin{vmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 & \alpha u_2 + \beta v_2 \\ b & c \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ b & c \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ b & c \end{vmatrix}.$$

   En general, si $A_1 = \alpha u + \beta v$ y $A_u\, , A_v$ son las matrices obtenidas reemplazando A_1 por u y por v, respectivamente, entonces:
$$det(A) = \alpha\ det(A_u) + \beta\ det(A_v).$$

Observación importante: La tercer propiedad NO es la linealidad de la función determinante. Esto es, en general,

$$det(\alpha A + \beta B) \neq \alpha \; det(A) + \beta \; det(B).$$

Dicho de otra manera, el determinate NO ES una transformación lineal del espacio de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$.

Por otro lado, la propiedad 3 establece la *linealidad en la primer fila*. Sin embargo, combinando con la propiedad 2, tenemos que el determinante es lineal en todas sus filas. (Ejercicio).

A partir de esta observación, la propiedad 3. la reescribimos como:

3. El determinante es *lineal en cada una de sus filas*.

Veremos que las tres propiedades presentadas *definen* al determinante. Esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una única función del $\mathbb{R}^{n \times n}$ en $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades (1), (2) y (3).

Probaremos primero toda función f de $\mathbb{R}^{n\times n}$ en $\mathbb{R}$ que verifica (1), (2) y (3) debe también verificar muchas de las propiedades que conocemos de determinante.

4. Si A tiene dos filas iguales, $f(A)=0$.
   Prueba Si A tiene dos filas iguales y las intercambio, obtengo $A'=A$. Sin embargo, por Prop. (2), $f(A')=-f(A)$. Por lo tanto $f(A)=-f(A)$ lo cual implica $f(A)=0$. $\square$
5. Si a una fila de A le resto un múltiplo de otra de sus filas, el valor de f no cambia.
   Prueba: Ejercicio (Ayuda: usar Prop. (3) y Prop. (4))
6. Si A tiene una fila nula, entonces $f(A)=0$.
   Prueba: Ejercicio (Ayuda: Propiedades (5) y (4)).
7. Si A es una matriz diagonal, $f(A)$ es el producto de las entradas de A en la diagonal. Esto es, $f(A)=A_1^1A_2^2\dots A_n^n$.
   Prueba: Ejercicio (Ayuda: Propiedades (1), (3) y (6)).

Estamos en condiciones de probar:

Teorema: Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una única función del conjunto de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades (1), (2) y (3).

Prueba:
Sea $n \in \mathbb{N}$ y f una función del conjunto de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades (1), (2) y (3).

Sea A una matriz $n \times n$ y apliquemos el método de Eliminación de Gauss hasta obtener la matriz diagonal D. Notemos con $A^{(k)}$ la matriz que se obtiene en el paso k del proceso de eliminación de Gauss. Entonces, $A^{(0)} = A$ y sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^{(p)} = D$.

Para $k = 1, \ldots, p$ vale lo siguiente:

1. Por Propiedad (5), si $A^{(k)}$ se obtuvo en un paso de eliminación, $f(A^{(k)}) = f(A^{(k-1)})$.
2. Por Propiedad (2), si $A^{(k)}$ se obtuvo en un paso de permutación de filas, $f(A^{(k)}) = -f(A^{(k-1)})$.

Prueba (continuación):

Por lo tanto, $f(A)=f(D)$ si el número de pasos de permutación de filas es par y $f(A)=-f(D)$ en caso contrario.

Por propiedad (1), $f(D)$ está unívocamente determinado y es el producto de las entradas de su diagonal. Por lo tanto, el valor de $f(A)$ también queda unívocamente determinado. $\square$

El teorema anterior nos permite realizar a siguiente definición:

Definición: Dado $n \in \mathbb{N}$, llamamos *determinante* a la función det del conjunto de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ que verifica las propiedades (1), (2) y (3).

A continuación, seguiremos verificando la validez (a partir de esta definición) de otras propiedades ya conocidas del determinante.

8. Si A es una matriz triangular, $det(A)$ es el producto de las entradas de A en su diagonal. Esto es, $det(A) = A_1^1 A_2^2 \dots A_n^n$.

   Prueba: Aplicando Eliminación Gaussiana podemos llegar desde A a la matriz diagonal D con las mismas entradas en la diagonal, sin realizar permutaciones. Por lo tanto,

$$det(A) = det(D) = A_1^1 A_2^2 \dots A_n^n. \quad \square$$

Observar que la propiedad (8) nos provee de un método de cálculo del determinante de una matriz: aplicamos Gauss hasta su forma triangular superior y obtenemos el determinante multiplicando las entradas de la diagonal, multiplicado por -1 en el caso de que se hayan realizado un número impar de permutaciones de filas.
Además, esta propiedad es la llave para obtener el *test de singularidad*.

9. (Test de singularidad) $det(A) = 0$ si y solo si A es singular.
   Prueba: Ejercicio.

10. $det(A.B) = det(A)\,det(B)$.

Prueba:
Sabemos que si B es singular, $A.B$ también lo es, para toda A. (Ejercicio).

Por lo tanto, si B es singular, por Prop. 9., $det(AB) = det(B) = 0$ y vale $det(AB) = det(A)\,det(B)$.
Sea entonces B una matriz $n \times n$ no singular. Debemos probar que, para toda matriz A, $det(AB) = det(A)\,det(B)$.

Para esto, vamos a hacer uso de la *unicidad* en las funciones que satisfacen las propiedades (1), (2) y (3).

Definimos una función f del conjunto de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ tal que, para toda A matriz $n \times n$, $f(A) = \frac{det(AB)}{det(B)}$.

La estrategia de la demostración es probar que f satisface las propiedades (1), (2) y (3). En tal caso, tendremos que $f = det$, esto es, para toda matriz A, $f(A) = \frac{det(AB)}{det(B)} = det(A)$ y la tesis quedaría demostrada .

10. **Prueba**(continuación):
Sólo resta entonces probar que f satisface las propiedades (1), (2) y (3).

- Prop. (1): ¿$f(I) = 1$? Es fácil chequear que si.
- Prop. (2): Sea A' una matriz que se obtiene intercambiando las filas i y j de A. Debemos probar que $f(A') = \frac{det(A'B)}{det(B)} = -f(A)$.

  Como $A'B$ se obtiene intercambiando las filas i y j de AB, por Prop.2 de la función det sabemos que $det(A'B) = -det(AB)$. Por lo tanto $f(A') = -f(A)$.
- Prop. (3): Sea A una matriz cuya primer fila A_1 se escribe como combinación lineal de vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$, i.e. $A_1 = \alpha u + \beta v$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sean $A[u]$ y $A[v]$ las matrices obtenidas a partir de A, reemplazando A_1 por u y por v, respectivamente. Debemos probar que

$$f(A) = \alpha f(A[u]) + \beta f(A[v]).$$

10. **Prueba**(continuación):
Observemos que la primer fila de AB será $\alpha(uB)+\beta(vB)$. Llamamos $AB[uB]$ y $AB[vB]$ a las matrices obtenidas a partir de AB reemplazando su primer fila, respectivamente, por uB y por vB. Por propiedad 3. de det tenemos que

$$det(AB)=\alpha\, det(AB[uB])+\beta\, det(AB[vB]).$$

Solo resta observar que $AB[uB]=A[u]B$ y $AB[vB]=A[v]B$. Por lo tanto,

$$f(A)=\frac{det(AB)}{det(B)}=\alpha\frac{det(A[u]B)}{det(B)}+\beta\frac{det(A[v]B)}{det(B)}=\alpha f(A[u])+\beta f(A[v]).$$

$\square$

Observación: el método de eliminación de Gauss provee una prueba alternativa de la Prop. (10). (ver Strang).

11. $det(A^T) = det(A)$.

    Prueba: Si A es singular, A^T también lo es y por lo tanto ambas matrices tienen determinante nulo.

    Sea A una matriz no singular. Consideremos la descomposición LDV de A, esto es $PA = LDV$. Tenemos entonces $det(PA) = det(LDV)$.
    Por Propiedad 10.,

$$det(P)det(A) = det(L)det(D)det(V).$$

    Por otro lado, $A^T P^T = (PA)^T = (LDV)^T = V^T D^T L^T$ y por lo tanto

$$det(A^T)det(P^T) = det(V^T)det(D^T)det(L^T).$$

    Como L, L^T, U y U^T son matrices triangulares con 1's en la diagonal, por la Propiedad 8. sus determinantes son iguales a 1. Además, D es matriz diagonal, por lo tanto $D = D^T$.

11. (continuación)
Tenemos entonces:
$$det(P)det(A) = det(D) = det(A^T)det(P^T).$$
Llegamos a
$$det(P)det(A) = det(A^T)det(P^T).$$
Por Propiedad (2), los determinates de P y P^T son 1 o -1. Como P y P^T son matrices inversas (ejercicio), tenemos que $PP^T = I$ y por lo tanto, $det(P)det(P^T) = 1$. Por lo tanto, ambos determinantes deben tener el mismo signo y $det(P) = det(P^T)$, quedando probado que $det(A) = det(A^T)$. $\square$

Observación importante: La Propiedad (11) permite extender a las columnas todas las propiedades asociadas a filas: el determinante cambia de signo por intercambio de columnas, si hay dos columnas iguales o una columna nula el determinante es cero, el determinante depende linealmente en cada columna.

Ya hemos visto una forma de calcular el determinate de una matriz a través de la Eliminación Gaussiana y esa será la forma más sencilla de obtener su valor.

Nos concentramos ahora en obtener fórmulas que refieran a la relación entre el valor del determinante y las entradas originales de la matriz.

Para matrices 2×2 y 3×3 conocemos fórmulas sencillas:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad ; \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - fha$$

Estas dos fórmulas pueden ser fácilmente deducidas de las propiedades (1), (2) y (3). Mostramos la idea para el caso $n = 3$.

La idea es pensar a la primer fila como $(a,0,0)+(0,b,0)+(0,0,c)$ y a la segunda, como $(d,0,0)+(0,d,0)+(0,0,f)$ y la tercera como $(g,0,0)+(0,h,0)+(0,0,i)$.

Aplicando la Propiedad 3 en la primer fila, tenemos que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Veamos ahora el desarrollo por la segunda fila de

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Desarrollemos ahora por la tercer fila a

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = 0$$

En cambio, si desarrollamos a $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix}$ tendremos:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}$$

Similarmente, si desarrollamos $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ llegaremos a $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix}$.

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= aei\,det(I) + afh\,det(P_{23}) = aei - afh.$$

Teníamos

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

y obtuvimos

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei - afh.$$

Procediendo en forma similar con los otros dos sumandos, tenemos:

$$\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -bdi + bfg \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = cdh - ceg$$

llegando a la fórmula conocida.

Si miramos un poco más en detalle lo que hicimos, tenemos

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$= (aei - afh) + (-1)(bdi - bfg) + (cdh - ceg) =$$

$$= a\,(ei - fh) + b\,(-1)\,(di - fg) + c\,(dh - eg).$$

Si realizamos el mismo trabajo en una matriz $n \times n$, desarrollando su determinante por la primer fila, éste quedará expresado como suma de n determinantes de matrices que reemplazan la primer fila en A por $A_1^j e^j$, para $j = 1, \ldots, n$.

Cada uno de esos determinantes resultará igual al producto de A_1^j por una expresión que no depende de las entradas de la columna A^j. O sea, el determinante asociado a A_1^j dependerá de la información de una submatriz M_{1j} de A que se obtiene borrando la fila 1 y la columna j.
Más aún, sabemos que la expresión por la cual multiplicamos a A_1^j es lo que llamamos *cofactor* $C_{1j} = (-1)^{1+j} det(M_{1j})$.

El mismo tratamiento podría haber sido hecho comenzando el desarrollo del determinante por cualquiera de sus filas.

Para todo $i, j = 1, \ldots, n$, definiendo M_{ij} como la submatriz de A obtenida por borrado de su fila i su columna j y el cofactor $C_{ij} = (-1)^{i+j} det(M_{ij})$, tenemos la fórmula recursiva del determinante:

Teorema: Para todo $i = 1, \ldots, n, \;\; det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_i^j C_{ij}$.
Prueba: No la vamos a mostrar (muy técnica).

Para quien le interese: Una posible línea de prueba es definir la función f_n de matrices $n \times n$ en $\mathbb{R}$ tal que $f_n(A) = \sum_{j=1}^{n} A_1^j C_{1j}$ y probar que la misma verifica las propiedades (1), (2) y (3).

Dada una matriz A llamamos *matriz adjunta de* A a la matriz C cuyas entradas son los cofactores de A.

Lema: Sea A una matriz inversible. Entonces,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^T.$$

Prueba: Ejercicio. (Ayuda: Probar que $AC^T = det(A)I$).

Como consecuencia de este resultado obtenemos la *Regla de Cramer* para la solución de un sistema no singular:

Regla de Cramer: Sea A es una matriz no singular y $b \in \mathbb{R}^n$. Para $j = 1, \ldots n$, sea B_j la matriz que se obtiene reemplazando la columna j-ésima de A por b. Entonces, la solución $\hat{x}$ del sistema $Ax = b$ verifica, para $j = 1, \ldots, n$,

$$\hat{x}_j = \frac{det(B_j)}{det(A)}.$$

Prueba: Ejercicio. (Ayuda: Probar que $C^j b = det(B_j)$)