Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Algebra Lineal

Unidad 1

Autor del resumen:

Charles Chaplin

Septiembre 2020

Contents

1 Matrices

Ejemplos e ideas p. 33

Sean u, v y w tres vectores, en donde:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Sus combinaciones lineales en un espacio tridimensional son $x_1 u + x_2 v + x_3 w$. Las combinaciones de los vectores serian:

$$x_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 u_1 + x_2 v_1 + x_3 w_1 \\ x_1 u_2 + x_2 v_2 + x_3 w_2 \\ x_1 u_3 + x_2 v_3 + x_3 w_3 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo la combinación usando una matriz obtenemos una matriz multiplicada por un vector columna:

$$Ax = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 u_1 + x_2 v_1 + x_3 w_1 \\ x_1 u_2 + x_2 v_2 + x_3 w_2 \\ x_1 u_3 + x_2 v_3 + x_3 w_3 \end{bmatrix}$$

Esto es mas que solo una definicion de Ax, ya que reescribir nos trae un cambio en el punto de vista. Al principio, x_1, x_2, x_3 multiplicaban los vectores. Ahora la matriz está multiplicando esos números. **La matriz A actúa sobre el vector x**. El resultado de Ax es **una combinación lineal b de las columnas de A.**

Ejemplo matriz diferencia p.34 [1]

[1]Con números podemos resolver esta ecuacion con producto punto (por filas), con letras lo correcto es trabajarlo por columnas.

1.1 Ecuaciones lineales

Un cambio mas del punto de vista es crucial. Hasta ahora, los números x_1, x_2, x_3 eran datos. La parte derecha era desconocida. **Ahora pensamos b como dato y x como incógnita**

Ejemplos matriz diferencia y matriz cíclica p.33-37

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}$$

Donde u,v y w son vectores columnas, deducimos que A es invertible (no-singular) si estos vectores columnas son **mutuamente independientes**, es decir:

$$0u + 0v + 0w = 0$$

es la unica combinación lineal tal que Ax=0 (x es vector nulo).

En cambio A es singular si sus vectores columnas son dependientes, es decir que existen x_1, x_2, x_3 tal que:

$$x_1 u + x_2 v + x_3 w = 0$$

además del vector nulo.

Por lo tanto

a) Si Ax=0 tiene unica solución $\Rightarrow$ A es invertible

b) Si Ax=0 tiene multiples soluciones $\Rightarrow$ A es singular

Ideas importantes:

1) La mutliplicación de una matriz por un vector: Ax = combinación lineal de las columnas de A.

2) La solución a $Ax = b$ es $x = A^{-1}b$, cuando A es invertible.

Ejemplos y Ejercicios p. 38-42

1.2 Resolviendo ecuaciones lineales

A tener en cuenta:

a) El punto de vista de columnas de Ax=b: una combinación de n columnas de A produce el vector b.

b) $Ax = x_1a_1 + ... + x_na_n = b$ es una ecuación vectorial: Las columnas de A son $a_1, ..., a_n$

c) Cuando b=0, una combinación Ax de columnas es el vector nulo. Una posibilidad es x=(0,...,0)

d) El punto de vista de filas de Ax=b: m ecuaciones con m filas nos plantea m planos que se intersectan en un punto $x = (x_1, ..., x_2)$. (A es la matriz de coeficientes.)

e) Con el producto punto obtenemos la ecuación de cada plano: $(fila_1) \cdot x = b_1, ..., (fila_m) \cdot x = b_m$

f) Cuando b=0, todos los planos $(fila_i) \cdot x = 0$ pasan por el punto central x=(0,...,0)

Ejemplo p. 42-45

El problema central del álgebra lineal es resolver un sistema de ecuaciones. Estas ecuaciones son lineales, lo que significa que las incógnitas se encontrarán multiplicadas solo por números.

Desde el punto de vista de las columnas, la parte izquierda de la ecuacion vectorial es una combinacion lineal de las columnas. El problema se encuentra en hallar los coeficientes correctos. Es muy comun en el algebra lineal observar a la matriz desde las filas y desde las columnas. Combinamos estas ecuaciones en un problema matricial Ax=b

Cuatro pasos para entender eliminacion usando matrices:

1) La eliminacion va desde una matriz A hacia una matriz triangular U gracias a una secuencia de pasos matriciales E_{ij}.

2) El sistema triangular se resuelve con sustitucion hacia atras, trabajando desde abajo hacia arriba.

3) En lenguaje matricial A es factorizada a LU= (triangular inferior) (triangular superior).

4) La eliminacion es un exito si A es invertible.

Ejemplo p. 45-48 (ecuacion 3x3 ejemplo enfoque grafico tanto filas como columnas)

Para una matriz de coeficientes A de 3x3, a la ecuacion matricial Ax=b la podemos estudiar como:

a) **Multiplicacion por filas:**

$$Ax = \begin{bmatrix} (fila_1) \cdot x \\ (fila_2) \cdot x \\ (fila_3) \cdot x \end{bmatrix}$$

b) **Multiplicacion por columnas:**

$$Ax = x_1(columna_1) + x_2(columna_2) + x_3(columna_3)$$

En ambos casos Ax=b debe ser una correcta declaracion de las tres ecuaciones. Nosotros le daremos el enfoque por columnas.

Matriz identidad. Es aquella matriz I tal que Ix=x para todo x. Por ejemplo I de 3x3:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ideas principales.

a) Las operaciones basicas entre vectores son la multiplicacion por un escalar cv y la suma de vectores v+w. Juntando estas operaciones obtenemos combinaciones lineales cv + dw.

b) La multiplicacion Matriz-Vector puede ser computada como productos internos, una fila a la vez, pero Ax debe ser interpretada como una combinacion lineal de las columnas de A.

c) Grafico por columna: Ax=b nos pregunta por una combinacion de columnas para producir b.

a) Grafico por fila: Cada ecuacion en Ax=b nos presenta una linea (n=2) o un plano (x=3) o un "hiperplano" (n¿3). Estas ecuaciones intersectan en una solucion, si es que existe.

Ejemplos y ejercicios p. 51-57

1.3 Eliminacion

Proceso eliminacion:

a) Para m=n=3, hay 3 ecuaciones Ax=b y 3 incognitas x_1, x_2, x_3

b) Las primeras dos ecuaciones son: $a_{11}x_1 + ... + a_{13}x_3 = b_1$ y $a_{21}x_1 + ... + a_{23}x_3 = b_2$.

c) Multiplicar la primer ecuacion por $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ y restarsela a la segunda: **luego x_1 quedo eliminada de la segunda ecuacion.**

d) La entrada a_{11} es el primer **pivot** y la proporcion $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ es el primer **multiplicador**. (la entrada a eliminar sobre el pivot)

e) Eliminar x_1 de las restantes i ecuaciones restandole a la ecuacion i la primer ecuacion multiplicada por $\frac{a_{i1}}{a_{11}}$

f) Ahora las restantes n-1 ecuaciones contienen n-1 incognitas $x_2, ..., x_n$. Repetir proceso para eliminar x_2

g) El proceso se rompe si algun pivot es 0, intercambiar ecuaciones de lugar puede ser la solucion.

La eliminacion (de ser exitosa), produce una matriz triangular superior. El sistema se resuelve desde abajo hacia arriba y a este proceso se lo conoce como **sustitucion hacia atras**. El objetivo es llegar a un sistema equivalente reducido que nos facilite encontrar la solucion (en caso de existir). Los pivots se encuentran en la diagonal de la matriz triangular superior luego de la eliminacion.

Ejemplo p. 57-58

1.3.1 Ruptura del proceso de eliminacion

Normalmente, la eliminacion produce pivots que nos llevan a la solucion pero fallar es posible. En algun punto, el metodo nos pide dividir por 0 y al no poder hacerlo el proceso debe parar. Puede llegar a haber una forma de solucionar el problema aunque puede ser que sea irreparable.

Ejemplos, irreparable sin solucion, irreparable con muchas soluciones y reparable. Ejemplo proceso en una situacion 3x3. p. 57-62

1.3.2 Eliminacion, de A a U

Para cualquier problema n x n, la eliminacion procede de la misma manera. El siguiente es el procedimiento desde A hasta U columna por columna, si la eliminacion Gaussiana es exitosa:

Columna 1 Use la primer ecuacion para cerar todas las entradas debajo del primer pivot

Columna 2 Use la nueva segunda ecuacion para cerar todas las entradas debajo del segundo pivot

Columna 3 to n Siga iterando este proceso hasta encontrar los n pivots y la matriz triangular superior U.

En un 4x4 seria:

Luego de la columna 2 tenemos $\begin{bmatrix} \mathbf{x} & x & x & x \\ 0 & \mathbf{x} & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$ y nosotros queremos $\begin{bmatrix} \mathbf{x} & x & x & x \\ & \mathbf{x} & x & x \\ & & \mathbf{x} & x \\ & & & \mathbf{x} \end{bmatrix}$

El resultado de la eliminacion hacia adelante es un sistema triangular superior. Este es no-singular si existe un conjunto completo de n pivots (nunca 0!)

Ejemplo p. 62

Ideas principales:

a) Un sistema lineal (Ax=b) se conviernte en **sistema triangular superior** (Ux=c) luego del proceso de eliminacion.

b) Restamos l_{ij} veces la ecuacion j a la ecuacion i para cerar la entrada a_{ij}.

c) El multiplicador es $l_{ij} = \frac{entrada\ a\ eliminar\ en\ fila\ i}{pivot\ en\ fila\ j}$. Los pivots no pueden ser 0

d) Cuando un 0 se encuentra en una posicion de pivot, intercambiar filas si hay un no 0 debajo de ella.

e) El sistema triangular superior Ux=c se soluciona con substitucion hacia atras.

d) Cuando la ruptura del proceso de eliminacion es permanente, Ax=b no tiene solucion o tiene infinitas.

Ejemplos y ejercicios p.63-69

1.3.3 Eliminacion utilizando matrices

Proceso eliminacion:

a) El primer paso multiplica las ecuaciones Ax=b por una matriz E_{21} para producir $E_{21}Ax = E_{21}b$

b) La matriz $E_{21}A$ tiene un cero en la fila 2, columna 1 porque x_1 es eliminado de la ecuacion 2.

c) E_{21} es la matriz identidad (diagonal de 1s) menos el multiplicador a_{21}/a_{11} en fila 2, columna 1

d) La multiplicacion matriz-matriz son n multiplicaciones matriz-vector: $EA = [Ea_1 \dots Ea_n]$.

e) Tambien debemos multiplicar Eb. Por lo tanto E esta multiplicando a la **matriz aumentada** [Ab]=[$a_1 \dots a_n b$].

f) La eliminacion multiplica Ax=b por $E_{21}, E_{31}, ..., E_{n1}$ luego por $E_{32}, E_{42}, ..., E_{n2}$ y asi sucesivamente.

g) La matriz intercambio de fila se la denota como P_{ij}. Intercambia filas i y j de I.

Las matrices E_{ij} pueden combinarse en una matriz E que realiza todos los pasos de una vez. La forma mas ordenada de realizarlo es combinando todas las inversas $(E_{ij})^{-1}$ en una matriz $L = E^{-1}$. Proseguiremos estudiando de la siguiente forma:

1) Observar como cada paso es una multiplicacion de matrices

2) Como ensamblar todos los pasos E_{ij} en una matriz de eliminacion E

3) Observar como cada E_{ij} es invertida por su matriz inversa E^{-1}

4) Como ensamblar todas esas inversas E^{-1} (en el orden correcto) en L (matriz triangular inferior).

La propiedad especial de L es que todos los multiplicadores l_{ij} se encuentran en su lugar. Estos numeros estan mezclados en E. Estan en orden perfecto en L (volver de U hacia A). Invertir coloca los pasos en el orden opuesto lo que previene que se mezclen los multiplicadores.

Multiplicacion de matrices por vectores y Ax=b p. 70

Forma matricial de un paso de eliminacion. La matriz identidad tiene la diagonal con 1s y las demas entradas en 0. Luego Ib=b para toda b. La **matriz elemental o matriz de eliminacion** E_{ij} tiene la entrada extra distinta de 0 -l_{ij} en la posicion i,j. Luego E_{ij} realiza la resta entre la fila i el multiplo de la fila j

Ejemplo p.71

Observacion. El objetivo de E_{ij} es producir 0 en la entrada $a_{(ij)}$ y ademas el vector x no resulta modificado, solo se modifica la matriz coeficiente y el vector b.

1.3.4 Multiplicacion matricial

Cuando la primer matriz es E, ya sabemos que esperar de EA. Este E particular, resta 2 veces la fila 1 de la fila 2. El multiplicador $l = 2$:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Este paso no modifica las filas 1 ni 3 de A, solo la fila 2 es diferente. Esta multiplicacion matricial coincide con la eliminacion de una entrada y el nuevo sistema es EAx=Eb.

La primera era E multiplicado por Ax, la segunda es EA multiplicado por x. Son lo mismo

Ley asociativa. Cierta, ACB = (AC)B = A(CB)

Ley conmutativa. Falsa, no siempre AB $\neq$ BA

Multiplicacion de matrices. $AB = A[b_1, b_2, ..., b_n] = [Ab_1, Ab_2, ..., Ab_n]$

Este ultimo acercamiento a la multiplicacion de matrices, trabaja con las columnas, mientras que las eliminaciones se aplican a las filas. La belleza de la multiplicacion matricial radica en que los tres acercamientos (fila,columna, matrices enteras) llegan al mismo resultado.

1.3.5 La matriz P_{ij} para intercambio de filas

Para intercambiar o permutar filas utilizamos P_{ij}. Un cambio de filas es necesario cuando nos encontramos con un 0 en una posicion pivot. Al realizar el intercambio existe la posibilidad que evitemos el 0 en la posicion pivot y se pueda continuar con el proceso de eliminacion.

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz cambio de fila. P_{ij} es la identidad con las filas i y j intercambiadas. Cuando esta matriz multiplica a otra, le intercambia las filas i y j a la ultima.

1.3.6 La matriz P_{ij} para intercambio de filas

La eliminacion actua tanto sobre A como sobre b. Por lo tanto podemos incluir b como una nueva columna e ir llevandola durante el proceso de eliminacion. La matriz A se alarga o aumenta por la columna extra b:

$$\textbf{Matriz aumentada. } [A\ b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & \mathbf{2} \\ 4 & 9 & -3 & \mathbf{8} \\ -2 & -3 & 7 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

$$E[A\ b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & \mathbf{2} \\ 4 & 9 & -3 & \mathbf{8} \\ -2 & -3 & 7 & \mathbf{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & \mathbf{2} \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{4} \\ -2 & -3 & 7 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

Filas Cada fila de E actua sobre [A b] para dar una fila de [EA Eb]

Columnas Cada columna de E actua sobre [A b] para dar una columna de [EA Eb]

Ideas importantes:

a) $Ax = x_1 columna_1 + ... + x_n columna_n$. $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

b) Matriz identidad = I, Matriz eliminacion = E_{ij} usando l_{ij}, Matriz intercambio = P_{ij}

c) Multiplicar Ax=b por E_{21} resta l_{ij} veces la ecuacion 1 de la ecuacion 2. El numero l_{ij} es la (2,1) entrada de la matriz E_{21}

d) Para la matriz aumentada [A b], el paso de eliminacion da como resultado $[E_{21}A\ E_{21}b]$.

e) Cuando A multiplica cualquier matriz B, A multiplica cada columna de B de manera separada.

Ejemplos y ejercicios p.75-80

1.4 Reglas para la multiplicacion de matrices

Info resumen:

a) Matrices A con n columnas multiplican matrices B con n filas: $A_{m\times n}A_{n\times p} = C_{m\times p}$

b) Cada entrada de AB=C es un producto interno: C_{ij} = (fila i de A) $\cdot$ (columna j de B)

c) Esta regla es elegida para que (AB)C sea igual que A(BC) y (AB)x igual que A(Bx)

d) Mas formas de computar AB: (A multiplicada por columnas de B) (filas de A multiplicado por B) (columnas multiplicadas por filas)

e) Usualmente no es cierto que AB=BA

f) Matrices pueden ser multiplicadas por bloques: $A = [A_1 A_2]$ multiplicada por $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$ es $A_1B_1 + A_2 + B_2$

Si dado $A_{m\times n}$ y AB, entonces B tiene que ser $B_{n\times p}$, es decir si A tiene n columnas entonces B debera tener n filas.

Primera forma. Tomar el producto interno entre cada fila de A y cada columna de B. $(AB)_{ij}$ es (fila i de A) $\cdot$ (columna j de B)

Ejemplos p. 81-83

Segunda forma. Cada columna de AB es una combinacion lineal de las columnas de A. Este es el punto de vista desde columnas de la multiplicacion.

Matriz A multiplicando cada columna de B. $A[b_1, ..., b_p] = [Ab_1, ..., Ab_p]$.

Tercera forma. Cada fila de A multiplica a B. El resultado es una fila de AB. Cada fila de AB es una combinacion lineal de las filas de B.

Toda fila de A multiplicada por B. [fila i de A] $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ = [fila i de AB]

Cuarta forma. Multiplicar columnas 1 a n de A con filas 1 a n de B. Sumar estas matrices.

Ejemplo con 2 por 2:

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aE + bG & aF + bH \\ cE + dG & cF + dH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G & H \end{bmatrix}$$

1.4.1 Las leyes para operaciones matriciales

A+B = B + A (ley conmutativa)

c(A+B) = cA + cB (ley distributiva)

A + (B + C) = (A + B) + C (ley asociativa)

A (B+C) = AB + AC (ley distributiva por izquierda)

(B+C) A = AB + AC (ley distributiva por derecha)

A(BC) = (AB)C (ley asociativa para ABC) **no se necesitan parentesis**

$A^p = AAA...A$ (p factores). $A^pA^q = A^{p+q}$. $(A^q)^p = A^{pq}$

1.4.2 Matrices en bloques y multiplicacion por bloques

Las matrices pueden ser recortadas en bloques (los cuales son matrices). Por ejemplo aqui tenemos una matriz 4x6 tomadas de a bloques de 2x2

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} 1,0 & 1,0 & 1,0 \\ 1,0 & 1,0 & 1,0 \\ \hline 1,0 & 1,0 & 1,0 \\ 1,0 & 1,0 & 1,0 \end{array} \right[= \begin{bmatrix} I & I & I \\ I & I & I \end{bmatrix}$$

En la matriz aumentada, el vector b se coloca en la matriz A luego [A b] tiene dos bloques de diferentes tamaños. Si multiplicamos por una matriz de eliminacion, obtenemos [EA Eb]. Tampoco hay problema en multiplicar bloques por bloques, siempre y cuando tengan el mismo tamaño.

Multiplicacion por bloques. Si una matriz en bloque A puede multiplicar a otra B, la multiplicacion AB esta permitida. Los cortes entre las columnas de A y los cortes por filas de B coinciden

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

Esta ecuacion is lo mismo que si los bloques fueran numeros (los cuales son matrices en bloques de tamaño 1x1). El punto principal esta en que al separar matrices en bloques es mucho mas sencillo ver como actuan. En el ejemplo anterior es mucho mas sencillo observar una matriz 3x2 de matrices identidad que la original.

Eliminacion por bloques. Utilizando matrices en bloques la eliminacion la podemos trabajar como sigue. Supongamos que la matriz tiene cuatro bloques A,B,C,D y utilizamos la matriz E para eliminar C por bloques:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

Esta es la eliminacion vista anteriormente (una columna a la vez) pero trabajada desde matrices en bloques. El pivot es el bloque A. El bloque final $D - CA^{-1}B$ es llamado complemento de Schur.

1.4.3 Ideas importantes

a) La entrada i,j de AB es el resultado del producto interno entre la i-esima fila de A con la j-esima columna de B

b) A multiplicado por BC es lo mismo que AB multiplicado por C

c) AB es tambien la suma de las n matrices: (columna j de A) · (filas j de B)

d) La multiplicacion por bloques se permite cuando las formas de las matrices en bloques coinciden

Ejemplos y ejercicios p. 87-94

1.5 Matrices inversas

1) Si una matriz cuadrada A tiene inversa entonces $AA^{-1} = I = A^{-1}A$
2) El algoritmo para determinar la inversibilidad de una matriz es la eliminacion: A debe tener n pivots distintos de 0.
3) El testeo por parte del algebra es el determinante[2], si el determinante de A es distinto a 0 entonces la matriz es inversible.
4) La ecuacion para el testeo de inversibilidad es Ax=0: x=0 debe ser la unica solucion.
5) Si A y B (del mismo tamaño) son inversibles tambien lo es AB y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Supongamos que una matriz A es cuadrada. Buscamos una matriz del mismo tamaño A^{-1} tal que AA^{-1}=I. Lo que A haga, A^{-1} lo deshace.
Por lo general, una matriz multiplica un vector x. Multiplicar Ax=b por A^{-1} nos da como resultado $A^{-1}x = Ab$. Esto es **x es** A^{-1}b

Definicion. La matriz A es inversible si existe una matriz A^{-1} que "invierta" A:

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

[2]El determinante de una matriz nos dice cuanto es deformado el area/volumen que conforman los vectores columnas de la misma, por esto si el determinante es 0 esos vectores conforman el plano/hiperplano con una dimension menor a la cantidad de vectores columnas. https://www.youtube.com/watch?v=dHP2uRBE8bM

No todas las matrices tienen inversa. Notas sobre la inversa de una matriz:

a) La inversa de una matriz existe si y solo si la eliminacion produce n pivots distintos a 0 (intercambio de filas esta permitido). La eliminacion resuelve Ax=b sin usar explicitamente A^{-1}

b) Si una matriz A tiene inversa, esta es unica. Supongamos que BA=I y que AC=I

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

c) Si A es inversible, la unica solucion a Ax=b es x=A^{-1}b.

d) Suponga que existe un vector x distinto al vector nulo tal que Ax=0. Entonces A no tiene inversa (no es posible retornar a x desde 0 con ninguna matriz A).

e) **Si A es inversible, luego Ax=0 tiene una unica solucion: x es el vector nulo.**

f) Una matriz cuadrada es inversible si su determinante es distinto de 0.

g) Una matriz diagonal sin 0 en su diagonal tiene inversa:

$$Si\ A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix} \ entonces\ A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$$

Ejemplo p.95

1.5.1 La inversa del producto de AB

Para 2 numeros a y b, la suma a+b puede tener o no inversa. Por ejemplo para a=3 y b =-3, a+b = 0 no tiene inversa. Pero el producto ab si la tiene y es 1/3 multiplicado por -1/3.
Para dos matrices A y B, la situacion es similar. Es dificil decir mucho acerca de la inversa de la suma A+B. Pero el producto AB tiene una inversa, en el caso en que tanto A como B tengan inversas (y sean del mismo tamaño).

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$**:**

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Orden inverso.[3] $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

[3] Si te pones las medias y despues las zapatillas, lo primero que te sacan son las zapatillas

Inversa de una matriz de eliminacion. Si E sustrae 5 veces la fila 1 a la fila 2, entonces E^{-1} le suma 5 veces la fila 1 a la fila 2:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicar EE^{-1} para obtener I, tambien obtenemos I multiplicando $E^{-1}E$. Estamos sumando y restando 5 veces la fila 1. Si AC=I, entonces automaticamente CA=I

Para matrices cuadradas, la inversa de un lado es automaticamente la inversa del otro.

Supongase que F sustrae 4 veces la fila 2 a la fila 3:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora al multiplicar FE obtenemos:

$$FE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 20 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad E^{-1}F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

El resultado es hermoso y correcto. El producto FE contiene 20 pero su inversa no. En este orden FE, la fila 3 sufre un efecto por la fila 1 mientras que en el orden $E^{-1}F^{-1}$ la fila 3 no sufre efecto por la fila 1. Esta es la razon por la cual en una seccion siguiente desde A=LU, buscamos ir hacia U desde A ya que los multiplicadores se encuentran en su posicion correcta en la matriz triangular inferior L.

En el orden de eliminacion, F le sigue a E. En el orden reverso E^{-1} le sigue a F^{-1}. $E^{-1}F^{-1}$ es rapido, los multiplicadores 5 y 4 se encuentran en su posicion correspondiente debajo de la diagonal de 1's

1.5.2 Calculando A^{-1} por la eliminacion Gauss-Jordan