Capítulo 2: Espacios Vectoriales (tercera parte)

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Outline

OUTLINE

7. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:
   a) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
   b) $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

7. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:
   a) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
   b) $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

a) Consideramos la siguiente ecuación:

7. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:
   a) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
   b) $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

a) Consideramos la siguiente ecuación:

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) = 0.$$

7. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:
   a) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
   b) $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

a) Consideramos la siguiente ecuación:

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) = 0.$$

¿$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$?

7. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:
   a) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
   b) $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

a) Consideramos la siguiente ecuación:

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) = 0.$$

¿$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$?

$0 = \alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) =$

7. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:
   a) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
   b) $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

a) Consideramos la siguiente ecuación:

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) = 0.$$

¿$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$?

$0 = \alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) =$
$(\alpha_1 + \alpha_2)v_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3.$

7. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:
   a) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
   b) $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

a) Consideramos la siguiente ecuación:

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) = 0.$$

¿$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$?

$0 = \alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) =$
$(\alpha_1 + \alpha_2)v_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3.$

Como $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i. resulta:

7. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:
   a) $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
   b) $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

a) Consideramos la siguiente ecuación:

$$\alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) = 0.$$

¿$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$?

$0 = \alpha_1(v_1 + v_2) + \alpha_2(v_1 + v_3) + \alpha_3(v_2 + v_3) =$
$(\alpha_1 + \alpha_2)v_1 + (\alpha_1 + \alpha_3)v_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)v_3.$

Como $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ un conjunto de vectores l.i. resulta:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 0 \\ \alpha_1 & + & & + & \alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \alpha = \mathbf{0}] \ \Leftrightarrow$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \alpha = \mathbf{0}] \ \Leftrightarrow \ A \text{ es no sigular } \Leftrightarrow$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \alpha = \mathbf{0}] \ \Leftrightarrow \ A \text{ es no sigular} \ \Leftrightarrow \ N(A) = \{\mathbf{0}\} \ \Leftrightarrow$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \alpha = \mathbf{0}] \ \Leftrightarrow \ A \text{ es no sigular} \ \Leftrightarrow \ N(A) = \{\mathbf{0}\} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ A \text{ no tiene variables libres} \ \Leftrightarrow$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \mathbf{0}] \;\Leftrightarrow\; A \text{ es no sigular} \;\Leftrightarrow\; N(A) = \{\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; A \text{ no tiene variables libres} \;\Leftrightarrow\; A \text{ tiene 3 columnas pivots.}$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \mathbf{0}] \;\Leftrightarrow\; A \text{ es no sigular} \;\Leftrightarrow\; N(A) = \{\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; A \text{ no tiene variables libres} \;\Leftrightarrow\; A \text{ tiene 3 columnas pivots.}$$

¿Como probamos cualquiera de estas equivalencias?

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \alpha = \mathbf{0}] \ \Leftrightarrow \ A \text{ es no sigular} \ \Leftrightarrow \ N(A) = \{\mathbf{0}\} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ A \text{ no tiene variables libres} \ \Leftrightarrow \ A \text{ tiene 3 columnas pivots.}$$

¿Como probamos cualquiera de estas equivalencias?

Calculamos la forma escalonada de A.

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \alpha = \mathbf{0}] \ \Leftrightarrow \ A \text{ es no sigular} \ \Leftrightarrow \ N(A) = \{\mathbf{0}\} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ A \text{ no tiene variables libres} \ \Leftrightarrow \ A \text{ tiene 3 columnas pivots.}$$

¿Como probamos cualquiera de estas equivalencias?

Calculamos la forma escalonada de A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow \ \alpha = \mathbf{0}] \ \Leftrightarrow \ A \text{ es no sigular} \ \Leftrightarrow \ N(A) = \{\mathbf{0}\} \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ A \text{ no tiene variables libres} \ \Leftrightarrow \ A \text{ tiene 3 columnas pivots.}$$

¿Como probamos cualquiera de estas equivalencias?

Calculamos la forma escalonada de A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \mathbf{0}] \;\Leftrightarrow\; A \text{ es no sigular} \;\Leftrightarrow\; N(A) = \{\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; A \text{ no tiene variables libres} \;\Leftrightarrow\; A \text{ tiene 3 columnas pivots.}$$

¿Como probamos cualquiera de estas equivalencias?

Calculamos la forma escalonada de A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver el sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\alpha = \mathbf{0}.$$

Entonces, lo que queremos probar es:

$$[A\alpha = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \mathbf{0}] \;\Leftrightarrow\; A \text{ es no sigular} \;\Leftrightarrow\; N(A) = \{\mathbf{0}\} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; A \text{ no tiene variables libres} \;\Leftrightarrow\; A \text{ tiene 3 columnas pivots.}$$

¿Como probamos cualquiera de estas equivalencias?

Calculamos la forma escalonada de A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..

Otra forma de resolver

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Sean $U = \{v_j : j = 1, ..., k\} \subset \mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W = (U \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$.

Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Sean $U = \{v_j : j = 1, ..., k\} \subset \mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W = (U \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$.

Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Aplicamos reiteradamente la construcción sugerida por el lema (representamos al vector *nuevo* con w y marcamos en rosa la componente no nula del vector *viejo*):

$$\{v_1, v_2, v_3\} \leftrightarrow$$

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Sean $U = \{v_j : j = 1, ..., k\} \subset \mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W = (U \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$.

Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Aplicamos reiteradamente la construcción sugerida por el lema (representamos al vector *nuevo* con w y marcamos en rosa la componente no nula del vector *viejo*):

$$\{v_1, v_2, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, \underbrace{v_2 + v_1}_{w}, v_3\} \leftrightarrow$$

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Sean $U = \{v_j : j = 1, ..., k\} \subset \mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W = (U \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$.

Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Aplicamos reiteradamente la construcción sugerida por el lema (representamos al vector *nuevo* con w y marcamos en rosa la componente no nula del vector *viejo*):

$$\{v_1, v_2, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, \underbrace{v_2 + v_1}_{w}, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, v_2 + v_1, \underbrace{v_3 + v_1}_{w}\} \leftrightarrow$$

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Sean $U = \{v_j : j = 1, ..., k\} \subset \mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W = (U \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$. Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Aplicamos reiteradamente la construcción sugerida por el lema (representamos al vector *nuevo* con w y marcamos en rosa la componente no nula del vector *viejo*):

$$\{v_1, v_2, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, \underbrace{v_2 + v_1}_{w}, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, v_2 + v_1, \underbrace{v_3 + v_1}_{w}\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \{\underbrace{-2v_1 + (v_2 + v_1) + (v_3 + v_1)}_{w}, v_2 + v_1, v_3 + v_1\} =$$

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Sean $U = \{v_j : j = 1, ..., k\} \subset \mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W = (U \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$. Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Aplicamos reiteradamente la construcción sugerida por el lema (representamos al vector *nuevo* con w y marcamos en rosa la componente no nula del vector *viejo*):

$$\{v_1, v_2, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, \underbrace{v_2 + v_1}_{w}, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, v_2 + v_1, \underbrace{v_3 + v_1}_{w}\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \{\underbrace{-2v_1 + (v_2 + v_1) + (v_3 + v_1)}_{w}, v_2 + v_1, v_3 + v_1\} = \{v_2 + v_3, v_2 + v_1, v_3 + v_1\} =$$

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Sean $U = \{v_j : j = 1, ..., k\} \subset \mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W = (U \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$. Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Aplicamos reiteradamente la construcción sugerida por el lema (representamos al vector *nuevo* con w y marcamos en rosa la componente no nula del vector *viejo*):

$$\{v_1, v_2, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, \underbrace{v_2 + v_1}_{w}, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, v_2 + v_1, \underbrace{v_3 + v_1}_{w}\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \{\underbrace{-2v_1 + (v_2 + v_1) + (v_3 + v_1)}_{w}, v_2 + v_1, v_3 + v_1\} = \{v_2 + v_3, v_2 + v_1, v_3 + v_1\} =$$

$$= \{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}.$$

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Sean $U = \{v_j : j = 1, ..., k\} \subset \mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W = (U \setminus \{v_1\}) \cup \{w\}$.

Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Aplicamos reiteradamente la construcción sugerida por el lema (representamos al vector *nuevo* con w y marcamos en rosa la componente no nula del vector *viejo*):

$$\{v_1, v_2, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, \underbrace{v_2 + v_1}_{w}, v_3\} \leftrightarrow \{v_1, v_2 + v_1, \underbrace{v_3 + v_1}_{w}\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \{\underbrace{-2v_1 + (v_2 + v_1) + (v_3 + v_1)}_{w}, v_2 + v_1, v_3 + v_1\} = \{v_2 + v_3, v_2 + v_1, v_3 + v_1\} =$$

$$= \{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}.$$

Dado que, por hipótesis, el primer conjunto es l.i.

Otra forma de resolver

Recordemos que:

Sean $U=\{v_j : j=1,\ldots,k\}\subset\mathbb{R}^n$, w una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v_1 no nulo y $W=(U\setminus\{v_1\})\cup\{w\}$. Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Aplicamos reiteradamente la construcción sugerida por el lema (representamos al vector *nuevo* con w y marcamos en rosa la componente no nula del vector *viejo*):

$$\{v_1,v_2,v_3\} \leftrightarrow \{v_1,\underbrace{v_2+v_1}_{w},v_3\} \leftrightarrow \{v_1,v_2+v_1,\underbrace{v_3+v_1}_{w}\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \{\underbrace{-2v_1+(v_2+v_1)+(v_3+v_1)}_{w},v_2+v_1,v_3+v_1\}=\{v_2+v_3,v_2+v_1,v_3+v_1\}=$$

$$=\{v_1+v_2,v_1+v_3,v_2+v_3\}.$$

Dado que, por hipótesis, el primer conjunto es l.i. aplicando el lema resulta que todos esos conjuntos son l.i., en particular, el último que es el conjunto dado en $a)$.

b) ¿Cómo probamos que $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d.?

b) ¿Cómo probamos que $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d.?

Podemos observar que, uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los restantes, por ejemplo:

b) ¿Cómo probamos que $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d.?

Podemos observar que, uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los restantes, por ejemplo:

$$v_2 - v_3 = 1 \cdot (v_1 - v_3) - 1 \cdot (v_1 - v_2).$$

b) ¿Cómo probamos que $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d.?

Podemos observar que, uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los restantes, por ejemplo:

$$v_2 - v_3 = 1 \cdot (v_1 - v_3) - 1 \cdot (v_1 - v_2).$$

O equivalentemente,

b) ¿Cómo probamos que $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d.?

Podemos observar que, uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los restantes, por ejemplo:

$$v_2 - v_3 = 1 \cdot (v_1 - v_3) - 1 \cdot (v_1 - v_2).$$

O equivalentemente, proponemos una combinación linel no nula de los vectores que dé el vector nulo:

b) ¿Cómo probamos que $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d.?

Podemos observar que, uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los restantes, por ejemplo:

$$v_2 - v_3 = 1 \cdot (v_1 - v_3) - 1 \cdot (v_1 - v_2).$$

O equivalentemente, proponemos una combinación linel no nula de los vectores que dé el vector nulo:

$$1(v_2 - v_3) + (-1)(v_1 - v_3) + 1(v_1 - v_2) = 0.$$

b) ¿Cómo probamos que $\{v_2 - v_3, v_1 - v_3, v_1 - v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d.?

Podemos observar que, uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los restantes, por ejemplo:

$$v_2 - v_3 = 1 \cdot (v_1 - v_3) - 1 \cdot (v_1 - v_2).$$

O equivalentemente, proponemos una combinación linel no nula de los vectores que dé el vector nulo:

$$1(v_2 - v_3) + (-1)(v_1 - v_3) + 1(v_1 - v_2) = 0.$$

¿Qué pasa si no nos damos cuenta fácil de cuál es la combinación lineal no nula que da el vector nulo o como escribir uno en función de los restantes?

Utilizando herramientas similares a las utilizadas en el apartado $a)$ llegaríamos a

Utilizando herramientas similares a las utilizadas en el apartado $a)$ llegaríamos a

$$\alpha_1(v_2 - v_3) + \alpha_2(v_1 - v_3) + \alpha_3(v_1 - v_2) = 0 \Leftrightarrow$$

Utilizando herramientas similares a las utilizadas en el apartado $a)$ llegaríamos a

$$\alpha_1(v_2 - v_3) + \alpha_2(v_1 - v_3) + \alpha_3(v_1 - v_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\alpha = \mathbf{0}.$$

Utilizando herramientas similares a las utilizadas en el apartado $a)$ llegaríamos a

$$\alpha_1(v_2 - v_3) + \alpha_2(v_1 - v_3) + \alpha_3(v_1 - v_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\alpha = \mathbf{0}.$$

Y lo que tendríamos que encontrar es una solución no nula de $B\alpha = \mathbf{0}$.

Utilizando herramientas similares a las utilizadas en el apartado $a)$ llegaríamos a

$$\alpha_1(v_2 - v_3) + \alpha_2(v_1 - v_3) + \alpha_3(v_1 - v_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B\alpha = \mathbf{0}.$$

Y lo que tendríamos que encontrar es una solución no nula de $B\alpha = \mathbf{0}$. Para ello aplicamos eliminación Gaussiana a B.

Outline

9. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & s \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar el conjunto solución de la ecuación $Ax = b$ para cualquier valor de s y t.

b) ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

c) Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de t son linealmente dependientes?

9. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & s \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar el conjunto solución de la ecuación $Ax = b$ para cualquier valor de s y t.

b) ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

c) Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de t son linealmente dependientes?

a) Consideramos la matriz aumentada $[A|b]$ y aplicamos eliminación Gaussiana:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \xrightarrow{E_{i1}(-1),\ i=2,3,4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \xrightarrow{E_{i1}(-1),\ i=2,3,4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \overset{E_{i1}(-1),\ i=2,3,4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \overset{P_{23}}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \xrightarrow{E_{i1}(-1),\ i=2,3,4} \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{P_{23}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \xrightarrow{E_{i1}(-1),\ i=2,3,4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{P_{23}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{42}(-2)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \xrightarrow{E_{i1}(-1),\ i=2,3,4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{P_{23}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{42}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+8 & t+2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \overset{E_{i1}(-1),\ i=2,3,4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \overset{P_{23}}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \overset{E_{42}(-2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+8 & t+2 \end{array}\right]$$

- Caso $s=-8$, $(s+8=0)$
  - Si $t\neq -2$, $t+2\neq 0$,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \xrightarrow{E_{i1}(-1),\ i=2,3,4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{P_{23}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{42}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+8 & t+2 \end{array}\right]$$

- Caso $s=-8$, $(s+8=0)$
  - Si $t \neq -2$, $t+2 \neq 0$, el sistema **no existe solución**.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & s & t \end{array}\right] \xrightarrow{E_{i1}(-1),\ i=2,3,4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{P_{23}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & s-2 & t-1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{42}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+8 & t+2 \end{array}\right]$$

- Caso $s = -8$, $(s+8=0)$
  - Si $t \neq -2$, $t+2 \neq 0$, el sistema **no existe solución**.
  - Si $t = -2$ tenemos la siguiente matriz

$$[\,U\,|c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$$[\, U \,|c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dado que U es la forma escalonada reducida de A, entonces tenemos que

$$[\,U\,|c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dado que U es la forma escalonada reducida de A, entonces tenemos que x_1, x_2 y x_3 son las variables pivots del sistema $Ax = b$,

$$[\,U\,|c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dado que U es la forma escalonada reducida de A, entonces tenemos que x_1, x_2 y x_3 son las variables pivots del sistema $Ax = b$, mientras que x_4 es la variable libre.

$$[\,U\,|c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dado que U es la forma escalonada reducida de A, entonces tenemos que x_1, x_2 y x_3 son las variables pivots del sistema $Ax = b$, mientras que x_4 es la variable libre.

Para describir una solución general del sistema necesitamos una solución particular del sistema y las soluciones especiales.

$$[\,U\,|c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dado que U es la forma escalonada reducida de A, entonces tenemos que x_1, x_2 y x_3 son las variables pivots del sistema $Ax = b$, mientras que x_4 es la variable libre.

Para describir una solución general del sistema necesitamos una solución particular del sistema y las soluciones especiales.

1. **Solución particular**:

$$[\,U\,|c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dado que U es la forma escalonada reducida de A, entonces tenemos que x_1, x_2 y x_3 son las variables pivots del sistema $Ax = b$, mientras que x_4 es la variable libre.

Para describir una solución general del sistema necesitamos una solución particular del sistema y las soluciones especiales.

1. **Solución particular**: ponemos la variable libre en cero y nos queda,

$$[\, U \,|c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dado que U es la forma escalonada reducida de A, entonces tenemos que x_1, x_2 y x_3 son las variables pivots del sistema $Ax = b$, mientras que x_4 es la variable libre.

Para describir una solución general del sistema necesitamos una solución particular del sistema y las soluciones especiales.

1 **Solución particular**: ponemos la variable libre en cero y nos queda,

$$x_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2 **Soluciones especiales**:

2 **Soluciones especiales**: tenemos una sola asociada a x_4, que es

2 **Soluciones especiales**: tenemos una sola asociada a x_4, que es

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. **Soluciones especiales**: tenemos una sola asociada a x_4, que es
$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces las soluciones del sistema se decriben:

2 **Soluciones especiales**: tenemos una sola asociada a x_4, que es
$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces las soluciones del sistema se decriben:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =$$

2 **Soluciones especiales**: tenemos una sola asociada a x_4, que es
$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces las soluciones del sistema se decriben:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

- Caso $s \neq -8$, $(s+8 \neq 0)$.

- Caso $s \neq -8$, $(s+8 \neq 0)$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+8 & t+2 \end{array}\right].$$

- Caso $s \neq -8$, $(s+8 \neq 0)$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+8 & t+2 \end{array}\right].$$

El sistema **tiene solución única**.

- Caso $s \neq -8$, $(s+8 \neq 0)$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s+8 & t+2 \end{array}\right].$$

El sistema **tiene solución única**.

Suponemos al vector de incógnitas (x_1, x_2, x_3, x_4) y despejamos haciendo sustitución hacia atrás.

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies$

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \qquad (1)$

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \qquad (1)$

  Para simplificar la notación definimos

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \qquad (1)$

  Para simplificar la notación definimos $\alpha := \frac{t+2}{s+8}$.

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8}$ $\quad (1)$
  Para simplificar la notación definimos $\alpha := \frac{t+2}{s+8}$.
- $x_3 - 2x_4 = -1 \overset{(1)}{\implies}$

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \qquad (1)$
  Para simplificar la notación definimos $\alpha := \frac{t+2}{s+8}$.
- $x_3 - 2x_4 = -1 \overset{(1)}{\implies} x_3 = -1 + 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = -1 + 2\cdot\alpha$

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \qquad (1)$
  Para simplificar la notación definimos $\alpha := \frac{t+2}{s+8}$.
- $x_3 - 2x_4 = -1 \overset{(1)}{\implies} x_3 = -1 + 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = -1 + 2\cdot\alpha$
- $x_2 - 2x_4 = 0 \overset{(1)}{\implies}$

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \qquad (1)$
  Para simplificar la notación definimos $\alpha := \frac{t+2}{s+8}$.
- $x_3 - 2x_4 = -1 \overset{(1)}{\implies} x_3 = -1 + 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = -1 + 2\cdot\alpha$
- $x_2 - 2x_4 = 0 \overset{(1)}{\implies} x_2 = 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = 2\cdot\alpha$

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8}$ $\quad (1)$
  Para simplificar la notación definimos $\alpha := \frac{t+2}{s+8}$.
- $x_3 - 2x_4 = -1 \overset{(1)}{\implies} x_3 = -1 + 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = -1 + 2\cdot\alpha$
- $x_2 - 2x_4 = 0 \overset{(1)}{\implies} x_2 = 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = 2\cdot\alpha$
- $x_1 + 2x_4 = 1 \overset{(1)}{\implies}$

- $(s+8) \cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \qquad (1)$
  Para simplificar la notación definimos $\alpha := \frac{t+2}{s+8}$.
- $x_3 - 2x_4 = -1 \overset{(1)}{\implies} x_3 = -1 + 2 \cdot \frac{t+2}{s+8} = -1 + 2 \cdot \alpha$
- $x_2 - 2x_4 = 0 \overset{(1)}{\implies} x_2 = 2 \cdot \frac{t+2}{s+8} = 2 \cdot \alpha$
- $x_1 + 2x_4 = 1 \overset{(1)}{\implies} x_1 = 1 - 2 \cdot \frac{t+2}{s+8} = 1 - 2 \cdot \alpha$

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \qquad (1)$
  Para simplificar la notación definimos $\alpha := \frac{t+2}{s+8}$.
- $x_3 - 2x_4 = -1 \stackrel{(1)}{\implies} x_3 = -1 + 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = -1 + 2\cdot\alpha$
- $x_2 - 2x_4 = 0 \stackrel{(1)}{\implies} x_2 = 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = 2\cdot\alpha$
- $x_1 + 2x_4 = 1 \stackrel{(1)}{\implies} x_1 = 1 - 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = 1 - 2\cdot\alpha$

Por lo tanto, la solución en este caso es:

- $(s+8)\cdot x_4 = t+2 \implies x_4 = \frac{t+2}{s+8} \qquad (1)$
  Para simplificar la notación definimos $\alpha := \frac{t+2}{s+8}$.
- $x_3 - 2x_4 = -1 \overset{(1)}{\implies} x_3 = -1 + 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = -1 + 2\cdot\alpha$
- $x_2 - 2x_4 = 0 \overset{(1)}{\implies} x_2 = 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = 2\cdot\alpha$
- $x_1 + 2x_4 = 1 \overset{(1)}{\implies} x_1 = 1 - 2\cdot\frac{t+2}{s+8} = 1 - 2\cdot\alpha$

Por lo tanto, la solución en este caso es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\alpha \\ 2\alpha \\ -1+2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

b) ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

Por lo hecho en el apartado anterior, es claro que las columnas de A son linealmente dependientes si y solo si $s = -8$.

b) ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

Por lo hecho en el apartado anterior, es claro que las columnas de A son linealmente dependientes si y solo si $s = -8$.

c) Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de t son linealmente dependientes?

$b)$ ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

Por lo hecho en el apartado anterior, es claro que las columnas de A son linealmente dependientes si y solo si $s = -8$.

$c)$ Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de t son linealmente dependientes?

La pregunta del apartado se puede reformular como:

b) ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

Por lo hecho en el apartado anterior, es claro que las columnas de A son linealmente dependientes si y solo si $s = -8$.

c) Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de t son linealmente dependientes?

La pregunta del apartado se puede reformular como:

¿Cuándo el subespacio generado por las tres primeras columnas de A contiene a b?

b) ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

Por lo hecho en el apartado anterior, es claro que las columnas de A son linealmente dependientes si y solo si $s = -8$.

c) Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de t son linealmente dependientes?

La pregunta del apartado se puede reformular como:

¿Cuándo el subespacio generado por las tres primeras columnas de A contiene a b?

Si M es la matriz cuyas columnas son las tres primeras columnas de A, esto último se puede reformular como:

$b)$ ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

Por lo hecho en el apartado anterior, es claro que las columnas de A son linealmente dependientes si y solo si $s = -8$.

$c)$ Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de t son linealmente dependientes?

La pregunta del apartado se puede reformular como:

¿Cuándo el subespacio generado por las tres primeras columnas de A contiene a b?

Si M es la matriz cuyas columnas son las tres primeras columnas de A, esto último se puede reformular como:

¿Cuándo el espacio columna de M contiene a b?

O equivalentemente

O equivalentemente

¿Cuándo el sistema de $Mx = b$ tiene solución?

O equivalentemente

¿Cuándo el sistema de $Mx = b$ tiene solución?

Hecha esta última pregunta, es claro que necesitamos el resultado de aplicar Gauss a la matriz $[M|b]$,

O equivalentemente

¿Cuándo el sistema de $Mx = b$ tiene solución?

Hecha esta última pregunta, es claro que necesitamos el resultado de aplicar Gauss a la matriz $[M|b]$, pero esto ya lo tenemos! En efecto, el resultado se obtiene descartando la última columna de la matriz triangular superior asociada a A:

O equivalentemente

¿Cuándo el sistema de $Mx = b$ tiene solución?

Hecha esta última pregunta, es claro que necesitamos el resultado de aplicar Gauss a la matriz $[M|b]$, pero esto ya lo tenemos! En efecto, el resultado se obtiene descartando la última columna de la matriz triangular superior asociada a A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}\right].$$

O equivalentemente

¿Cuándo el sistema de $Mx = b$ tiene solución?

Hecha esta última pregunta, es claro que necesitamos el resultado de aplicar Gauss a la matriz $[M|b]$, pero esto ya lo tenemos! En efecto, el resultado se obtiene descartando la última columna de la matriz triangular superior asociada a A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}\right].$$

Y resulta evidente que el sistema original $Mx = b$, es compatible (admite solución) si y solo si $t = -2$.

Outline

17. *a*) Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo sumo 3 (incluyendo polinomio nulo). Encontrar una base $\mathscr{B}$ del subespacio S de $\mathbb{R}_3[x]$ definido por $S = \langle \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\} \rangle$.

b) Extender $\mathscr{B}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$, esto es, encontrar una base $\tilde{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathscr{B} \subset \tilde{\mathscr{B}}$.

17. *a)* Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo sumo 3 (incluyendo polinomio nulo). Encontrar una base $\mathscr{B}$ del subespacio S de $\mathbb{R}_3[x]$ definido por $S = \langle \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\} \rangle$.

    b) Extender $\mathscr{B}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$, esto es, encontrar una base $\tilde{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathscr{B} \subset \tilde{\mathscr{B}}$.

a) Primero vamos a reesbribir el subsespacio vectorial S para que sea más sencillo encontrar una base $\mathscr{B}$.

17. *a*) Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo sumo 3 (incluyendo polinomio nulo). Encontrar una base $\mathscr{B}$ del subespacio S de $\mathbb{R}_3[x]$ definido por $S = \langle \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\} \rangle$.

b) Extender $\mathscr{B}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$, esto es, encontrar una base $\tilde{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathscr{B} \subset \tilde{\mathscr{B}}$.

a) Primero vamos a reesbribir el subsespacio vectorial S para que sea más sencillo encontrar una base $\mathscr{B}$.

Si $p \in S$ entonces

17. *a)* Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo sumo 3 (incluyendo polinomio nulo). Encontrar una base $\mathscr{B}$ del subespacio S de $\mathbb{R}_3[x]$ definido por $S = \langle \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\} \rangle$.

b) Extender $\mathscr{B}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$, esto es, encontrar una base $\tilde{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathscr{B} \subset \tilde{\mathscr{B}}$.

a) Primero vamos a reesbribir el subsespacio vectorial S para que sea más sencillo encontrar una base $\mathscr{B}$.

Si $p \in S$ entonces

- $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ y

17. *a)* Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo sumo 3 (incluyendo polinomio nulo). Encontrar una base $\mathscr{B}$ del subespacio S de $\mathbb{R}_3[x]$ definido por $S = \langle\{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\}\rangle$.

b) Extender $\mathscr{B}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$, esto es, encontrar una base $\tilde{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathscr{B} \subset \tilde{\mathscr{B}}$.

a) Primero vamos a reesbribir el subsespacio vectorial S para que sea más sencillo encontrar una base $\mathscr{B}$.

Si $p \in S$ entonces

- $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y
- $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0.$

17. *a)* Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo sumo 3 (incluyendo polinomio nulo). Encontrar una base $\mathscr{B}$ del subespacio S de $\mathbb{R}_3[x]$ definido por $S = \langle\{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\}\rangle$.

b) Extender $\mathscr{B}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$, esto es, encontrar una base $\tilde{\mathscr{B}}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathscr{B} \subset \tilde{\mathscr{B}}$.

a) Primero vamos a reesbribir el subsespacio vectorial S para que sea más sencillo encontrar una base $\mathscr{B}$.

Si $p \in S$ entonces

- $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y
- $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0.$

Luego de la última igualdad obtenemos $a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$.

Entonces,

Entonces,

$$p \in S \;\Leftrightarrow$$

Entonces,

$$p \in S \;\Leftrightarrow\; p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$

Entonces,

$$p \in S \;\Leftrightarrow\; p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$p \in S \ \Leftrightarrow \ p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

Entonces,

$$p \in S \Leftrightarrow p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$S =$$

Entonces,

$$p \in S \Leftrightarrow p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$S = \left\langle \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Entonces,

$$p \in S \Leftrightarrow p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$S = \left\langle \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Consideramos el conjunto U.

Entonces,

$$p \in S \;\Leftrightarrow\; p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$S = \left\langle \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Consideramos el conjunto U. Sabemos que es un conjunto generador de S.

Entonces,

$$p \in S \Leftrightarrow p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$S = \left\langle \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Consideramos el conjunto U. Sabemos que es un conjunto generador de S. Si los vectores de U son l.i., U es una base. Si no,

Entonces,

$$p \in S \Leftrightarrow p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$S = \left\langle \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Consideramos el conjunto U. Sabemos que es un conjunto generador de S. Si los vectores de U son l.i., U es una base. Si no, debemos encontrar la maxima cantdiad de vectores l.i. en U.

Entonces,

$$p \in S \Leftrightarrow p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1 + x) + a_2(-1 + x^2) + a_3(-1 + x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$S = \left\langle \{-1 + x, -1 + x^2, -1 + x^3\} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Consideramos el conjunto U. Sabemos que es un conjunto generador de S. Si los vectores de U son l.i., U es una base. Si no, debemos encontrar la maxima cantdiad de vectores l.i. en U.

Dada la combinación lineal:

Entonces,

$$p \in S \Leftrightarrow p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$S = \left\langle \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Consideramos el conjunto U. Sabemos que es un conjunto generador de S. Si los vectores de U son l.i., U es una base. Si no, debemos encontrar la maxima cantdiad de vectores l.i. en U.

Dada la combinación lineal:

$$\alpha_1(-1+x) + \alpha_2(-1+x^2) + \alpha_3(-1+x^3) = 0 \text{ con } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

Entonces,

$$p \in S \;\Leftrightarrow\; p(x) = (-a_1 - a_2 - a_3) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$$
$$= a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2) + a_3(-1+x^3) \text{ con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$S = \left\langle \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\} \right\rangle = \langle U \rangle .$$

Consideramos el conjunto U. Sabemos que es un conjunto generador de S. Si los vectores de U son l.i., U es una base. Si no, debemos encontrar la maxima cantdiad de vectores l.i. en U.

Dada la combinación lineal:

$$\alpha_1(-1+x) + \alpha_2(-1+x^2) + \alpha_3(-1+x^3) = 0 \;\text{ con }\; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

tenemos,

$$0 = \alpha_1(-1+x) + \alpha_2(-1+x^2) + \alpha_3(-1+x^3) =$$

$0 = \alpha_1(-1+x) + \alpha_2(-1+x^2) + \alpha_3(-1+x^3) =$
$(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3.$

$0=\alpha_1(-1+x)+\alpha_2(-1+x^2)+\alpha_3(-1+x^3)=$
$(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)\cdot 1+\alpha_1\cdot x+\alpha_2\cdot x^2+\alpha_3\cdot x^3$.

Como $\{1,x,x^2,x^3\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ resulta $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.

$0 = \alpha_1(-1+x) + \alpha_2(-1+x^2) + \alpha_3(-1+x^3) =$
$(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3$.

Como $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ resulta $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Por lo tanto $\{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente. Luego,

$0 = \alpha_1(-1+x) + \alpha_2(-1+x^2) + \alpha_3(-1+x^3) =$
$(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3$.

Como $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ resulta $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Por lo tanto $\{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente. Luego,

$$\mathscr{B} = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$$

es una base de S.

$0 = \alpha_1(-1+x) + \alpha_2(-1+x^2) + \alpha_3(-1+x^3) =$
$(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)\cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3$.

Como $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ resulta $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Por lo tanto $\{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente. Luego,

$$\mathscr{B} = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$$

es una base de S.

b) Una vez que identificamos una base de S, como lo hicimos en el apartado anterior, creo que este apartado resulta más sencillo.

$0 = \alpha_1(-1+x) + \alpha_2(-1+x^2) + \alpha_3(-1+x^3) =$
$(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_3 \cdot x^3$.

Como $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ resulta $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Por lo tanto $\{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente. Luego,

$$\mathscr{B} = \{-1+x, -1+x^2, -1+x^3\}$$

es una base de S.

b) Una vez que identificamos una base de S, como lo hicimos en el apartado anterior, creo que este apartado resulta más sencillo.

Basta con hallar un único vector (por qué?) en $\mathbb{R}_3[x]$ que sea linealmente independiente con los vectores del conjunto $\mathscr{B}$.

Outline

18. Encontrar las dimensiones de:

  a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.

  b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

  c) El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

18. Encontrar las dimensiones de:

    $a)$ El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.

    $b)$ El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

    $c)$ El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

$a)$ Llamamos S al espacio descripto en $a)$. Luego,

18. Encontrar las dimensiones de:
    - *a*) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.
    - *b*) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times4}$.
    - *c*) El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

a) Llamamos S al espacio descripto en *a*). Luego,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} =$$

18. Encontrar las dimensiones de:

   a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.
   b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times4}$.
   c) El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

a) Llamamos S al espacio descripto en a). Luego,

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\} =$$

$$\left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \right\} =$$

18. Encontrar las dimensiones de:
    a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.
    b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
    c) El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

a) Llamamos S al espacio descripto en *a*). Luego,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} =$$

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0 \right\}$$

18. Encontrar las dimensiones de:

 a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.
 b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
 c) El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

a) Llamamos S al espacio descripto en *a*). Luego,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} =$$

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$$

Por lo tanto, buscamos la dimensión de $N(A)$,

18. Encontrar las dimensiones de:

   a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.
   b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
   c) El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

a) Llamamos S al espacio descripto en *a*). Luego,

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\} =$$

$$\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\right\}$$

Por lo tanto, buscamos la dimensión de $N(A)$, siendo A una matriz escalonada reducida, de rango 1.

18. Encontrar las dimensiones de:

a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.
b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
c) El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

a) Llamamos S al espacio descripto en *a*). Luego,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} =$$

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$$

Por lo tanto, buscamos la dimensión de $N(A)$, siendo A una matriz escalonada reducida, de rango 1.
Entonces,

18. Encontrar las dimensiones de:

   a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.
   b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.
   c) El espacio de las matrices simétricas 3×3. Hallar una base.

a) Llamamos S al espacio descripto en *a*). Luego,

$$S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} =$$

$$\left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \right\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$$

Por lo tanto, buscamos la dimensión de $N(A)$, siendo A una matriz escalonada reducida, de rango 1.
Entonces, $dim(S) = dim(N(A)) = dim(\mathbb{R}^4) - rg(A) = 4 - 1 = 3$.

b) Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

b) Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$b)$ Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$$dim(N(I)) =$$

b) Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$$dim(N(I)) = dim(\mathbb{R}^4) - rg(I) =$$

b) Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$$dim(N(I)) = dim(\mathbb{R}^4) - rg(I) = 4 - 4 = 0.$$

b) Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$$dim(N(I)) = dim(\mathbb{R}^4) - rg(I) = 4 - 4 = 0.$$

c) Consideramos S el espacio de las matrices simétricas 3×3. Así,

b) Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$$dim(N(I)) = dim(\mathbb{R}^4) - rg(I) = 4 - 4 = 0.$$

c) Consideramos S el espacio de las matrices simétricas 3×3. Así,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

$b)$ Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$$dim(N(I)) = dim(\mathbb{R}^4) - rg(I) = 4 - 4 = 0.$$

$c)$ Consideramos S el espacio de las matrices simétricas 3×3. Así,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sabemos que un conjunto de vectores l.i. que generan S, son una base de S y además,

$b)$ Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$$dim(N(I)) = dim(\mathbb{R}^4) - rg(I) = 4 - 4 = 0.$$

$c)$ Consideramos S el espacio de las matrices simétricas 3×3. Así,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sabemos que un conjunto de vectores l.i. que generan S, son una base de S y además, el cardinal de una base de S coincide con $dim(S)$ que es lo que queremos calcular.

b) Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$$dim(N(I)) = dim(\mathbb{R}^4) - rg(I) = 4 - 4 = 0.$$

c) Consideramos S el espacio de las matrices simétricas 3×3. Así,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sabemos que un conjunto de vectores l.i. que generan S, son una base de S y además, el cardinal de una base de S coincide con $dim(S)$ que es lo que queremos calcular.

¿Cómo escribimos a S como el espacio generado por un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

b) Denotamos por $N(I)$ al espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Luego, como la matriz I está es su forma escalonada reducida y su rango es 4, resulta

$$dim(N(I)) = dim(\mathbb{R}^4) - rg(I) = 4 - 4 = 0.$$

c) Consideramos S el espacio de las matrices simétricas 3×3. Así,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sabemos que un conjunto de vectores l.i. que generan S, son una base de S y además, el cardinal de una base de S coincide con $dim(S)$ que es lo que queremos calcular.

¿Cómo escribimos a S como el espacio generado por un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^{3\times 3}$?

$$S = \{aA + bB + cC + dD + eE + fF : a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}\}$$

Donde,

Donde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Donde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

Donde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$S = \langle \{A, B, C, D, E, F\} \rangle .$$

Donde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$S = \langle \{A, B, C, D, E, F\} \rangle .$$

Para terminar la prueba falta determinar el conjunto de vectores l.i. maximal en $\{A, B, C, D, E, F\}$.

Donde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$S = \langle \{A, B, C, D, E, F\} \rangle .$$

Para terminar la prueba falta determinar el conjunto de vectores l.i. maximal en $\{A, B, C, D, E, F\}$.
Probar que el conjunto dado es un conjunto de vectores l.i..

Donde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$S = \langle \{A, B, C, D, E, F\} \rangle .$$

Para terminar la prueba falta determinar el conjunto de vectores l.i. maximal en $\{A, B, C, D, E, F\}$.

Probar que el conjunto dado es un conjunto de vectores l.i.. Así resulta $\mathscr{B} = \{A, B, C, D, E, F\}$ una base de S y,

Donde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$S = \langle\{A,B,C,D,E,F\}\rangle\,.$$

Para terminar la prueba falta determinar el conjunto de vectores l.i. maximal en $\{A,B,C,D,E,F\}$.
Probar que el conjunto dado es un conjunto de vectores l.i.. Así resulta $\mathscr{B} = \{A,B,C,D,E,F\}$ una base de S y,

$$dim(S) = |\mathscr{B}| = 6.$$

Outline

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq)$

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq)$ Esta contención vale por definición ya que que W es un subespacio vectorial de V.

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq)$ Esta contención vale por definición ya que que W es un subespacio vectorial de V.

$\subseteq)$

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq)$ Esta contención vale por definición ya que que W es un subespacio vectorial de V.

$\subseteq)$ Sabemos que W es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n.

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq$) Esta contención vale por definición ya que que W es un subespacio vectorial de V.

$\subseteq$) Sabemos que W es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n. Entonces existe $\mathscr{B}_W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de W ($\mathscr{B}_W$ conjuntos de vectores linealmente independientes que generan W).

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq$) Esta contención vale por definición ya que que W es un subespacio vectorial de V.

$\subseteq$) Sabemos que W es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n. Entonces existe $\mathscr{B}_W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de W ($\mathscr{B}_W$ conjuntos de vectores linealmente independientes que generan W).

Supongamos que $V \not\subseteq W$,

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq$) Esta contención vale por definición ya que que W es un subespacio vectorial de V.

$\subseteq$) Sabemos que W es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n. Entonces existe $\mathscr{B}_W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de W ($\mathscr{B}_W$ conjuntos de vectores linealmente independientes que generan W).

Supongamos que $V \not\subseteq W$, luego existe $v \in V \setminus W$.

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq$) Esta contención vale por definición ya que que W es un subespacio vectorial de V.

$\subseteq$) Sabemos que W es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n. Entonces existe $\mathscr{B}_W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de W ($\mathscr{B}_W$ conjuntos de vectores linealmente independientes que generan W).

Supongamos que $V \not\subseteq W$, luego existe $v \in V \setminus W$. Como $W = \langle \mathscr{B}_W \rangle$ y $W \subseteq V$ entonces resulta $\overline{\mathscr{B}} = \{v, w_1, \ldots, w_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en V ya que,

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

Para probar que $V = W$ vamos a probar la doble contención.

$\supseteq$) Esta contención vale por definición ya que que W es un subespacio vectorial de V.

$\subseteq$) Sabemos que W es un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n. Entonces existe $\mathscr{B}_W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de W ($\mathscr{B}_W$ conjuntos de vectores linealmente independientes que generan W).

Supongamos que $V \nsubseteq W$, luego existe $v \in V \setminus W$. Como $W = \langle \mathscr{B}_W \rangle$ y $W \subseteq V$ entonces resulta $\overline{\mathscr{B}} = \{v, w_1, \ldots, w_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en V ya que, si consideramos la combinación lineal

$$\alpha v + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

$$\alpha v + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

$$\alpha v + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

podemos observar que $\alpha = 0$,

$$\alpha v+\gamma_1 w_1+\ldots+\gamma_n w_n=0,$$

podemos observar que $\alpha=0$, pues si $\alpha\neq 0$ entonces $v=-\frac{\gamma_1}{\alpha}w_1\ldots-\frac{\gamma_n}{\alpha}w_n$ y resulta $v\in\langle\mathscr{B}_W\rangle=W$. Entonces,

$$\alpha v + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

podemos observar que $\alpha = 0$, pues si $\alpha \neq 0$ entonces $v = -\frac{\gamma_1}{\alpha} w_1 \ldots - \frac{\gamma_n}{\alpha} w_n$ y resulta $v \in \langle \mathscr{B}_W \rangle = W$. Entonces,

$$\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

$$\alpha v + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

podemos observar que $\alpha = 0$, pues si $\alpha \neq 0$ entonces $v = -\frac{\gamma_1}{\alpha} w_1 \ldots - \frac{\gamma_n}{\alpha} w_n$ y resulta $v \in \langle \mathscr{B}_W \rangle = W$. Entonces,

$$\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

y como $\mathscr{B}_W$ es una base de W, en particular es un conjunto de vectores linealmente independientes obtenemos

$$\alpha v + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

podemos observar que $\alpha = 0$, pues si $\alpha \neq 0$ entonces $v = -\frac{\gamma_1}{\alpha} w_1 \ldots - \frac{\gamma_n}{\alpha} w_n$ y resulta $v \in \langle \mathscr{B}_W \rangle = W$. Entonces,

$$\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

y como $\mathscr{B}_W$ es una base de W, en particular es un conjunto de vectores linealmente independientes obtenemos

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0.$$

$$\alpha v + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

podemos observar que $\alpha = 0$, pues si $\alpha \neq 0$ entonces $v = -\frac{\gamma_1}{\alpha} w_1 \ldots - \frac{\gamma_n}{\alpha} w_n$ y resulta $v \in \langle \mathscr{B}_W \rangle = W$. Entonces,

$$\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

y como $\mathscr{B}_W$ es una base de W, en particular es un conjunto de vectores linealmente independientes obtenemos

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0.$$

Luego, $\overline{\mathscr{B}}$ es un conjunto de $n+1$ vectores linealmente independientes de V.

$$\alpha v + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

podemos observar que $\alpha = 0$, pues si $\alpha \neq 0$ entonces $v = -\frac{\gamma_1}{\alpha} w_1 \ldots - \frac{\gamma_n}{\alpha} w_n$ y resulta $v \in \langle \mathscr{B}_W \rangle = W$. Entonces,

$$\gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_n w_n = 0,$$

y como $\mathscr{B}_W$ es una base de W, en particular es un conjunto de vectores linealmente independientes obtenemos

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 0.$$

Luego, $\overline{\mathscr{B}}$ es un conjunto de $n+1$ vectores linealmente independientes de V.

Por lo tanto, la dimensión de V es mayor o igual a $n+1$, lo que contradice el hecho de que $\dim(V) = \dim(W)$.

$$\alpha v+\gamma_1 w_1+\ldots+\gamma_n w_n=0,$$

podemos observar que $\alpha=0$, pues si $\alpha\neq 0$ entonces $v=-\frac{\gamma_1}{\alpha}w_1\ldots-\frac{\gamma_n}{\alpha}w_n$ y resulta $v\in\langle\mathscr{B}_W\rangle=W$. Entonces,

$$\gamma_1 w_1+\ldots+\gamma_n w_n=0,$$

y como $\mathscr{B}_W$ es una base de W, en particular es un conjunto de vectores linealmente independientes obtenemos

$$\gamma_1=\ldots=\gamma_n=0.$$

Luego, $\overline{\mathscr{B}}$ es un conjunto de $n+1$ vectores linealmente independientes de V.

Por lo tanto, la dimensión de V es mayor o igual a $n+1$, lo que contradice el hecho de que $\dim(V)=\dim(W)$.

Así resulta $V\subseteq W$.

Outline

21. Encontrar una base para cada uno de los cuatro espacios fundamentales asociados a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Recordemos que dada una matriz M y U su matriz escalonada, podemos hacer uso de U para obtener ciertos datos que nos piden los ejercicios.

Recordemos que dada una matriz M y U su matriz escalonada, podemos hacer uso de U para obtener ciertos datos que nos piden los ejercicios.

A partir de la matriz U, podemos identificar las columnas y filas pivots de M.

Recordemos que dada una matriz M y U su matriz escalonada, podemos hacer uso de U para obtener ciertos datos que nos piden los ejercicios.

A partir de la matriz U, podemos identificar las columnas y filas pivots de M. Una vez identificadas las columnas pivots en U, si volvemos a la matriz M, las columnas pivots de M son linealmente independientes y generan el espacio columna $C(M)$.

Recordemos que dada una matriz M y U su matriz escalonada, podemos hacer uso de U para obtener ciertos datos que nos piden los ejercicios.

A partir de la matriz U, podemos identificar las columnas y filas pivots de M. Una vez identificadas las columnas pivots en U, si volvemos a la matriz M, las columnas pivots de M son linealmente independientes y generan el espacio columna $C(M)$.

De manera similar podemos pensar que una vez identificadas las filas pivots de U, si volvemos a M encontramos filas linealmente independientes que generan el espacio fila de M denotado por $C(M^T)$.

Recordemos que dada una matriz M y U su matriz escalonada, podemos hacer uso de U para obtener ciertos datos que nos piden los ejercicios.

A partir de la matriz U, podemos identificar las columnas y filas pivots de M. Una vez identificadas las columnas pivots en U, si volvemos a la matriz M, las columnas pivots de M son linealmente independientes y generan el espacio columna $C(M)$.

De manera similar podemos pensar que una vez identificadas las filas pivots de U, si volvemos a M encontramos filas linealmente independientes que generan el espacio fila de M denotado por $C(M^T)$. Es importante observar que, para obtener los vectores l.i. que generan el espacio fila $C(M^T)$ trabajamos con la matriz M y no con M^T,

Recordemos que dada una matriz M y U su matriz escalonada, podemos hacer uso de U para obtener ciertos datos que nos piden los ejercicios.

A partir de la matriz U, podemos identificar las columnas y filas pivots de M. Una vez identificadas las columnas pivots en U, si volvemos a la matriz M, las columnas pivots de M son linealmente independientes y generan el espacio columna $C(M)$.

De manera similar podemos pensar que una vez identificadas las filas pivots de U, si volvemos a M encontramos filas linealmente independientes que generan el espacio fila de M denotado por $C(M^T)$. Es importante observar que, para obtener los vectores l.i. que generan el espacio fila $C(M^T)$ trabajamos con la matriz M y no con M^T, entonces en este caso no es necesario volver a la matriz M para describir el espacio buscado,

Recordemos que dada una matriz M y U su matriz escalonada, podemos hacer uso de U para obtener ciertos datos que nos piden los ejercicios.

A partir de la matriz U, podemos identificar las columnas y filas pivots de M. Una vez identificadas las columnas pivots en U, si volvemos a la matriz M, las columnas pivots de M son linealmente independientes y generan el espacio columna $C(M)$.

De manera similar podemos pensar que una vez identificadas las filas pivots de U, si volvemos a M encontramos filas linealmente independientes que generan el espacio fila de M denotado por $C(M^T)$. Es importante observar que, para obtener los vectores l.i. que generan el espacio fila $C(M^T)$ trabajamos con la matriz M y no con M^T, entonces en este caso no es necesario volver a la matriz M para describir el espacio buscado, basta con escribir a $C(M^T)$ como el espacio generado por las filas pivots de U, ya que las operaciones elementales hacen que las filas de la matriz escalonada U obtenida a partir de la matriz M, sean combinaciones lineales de las filas de M.

Con respecto al espacio nulo, recordemos que $N(M) = N(U) = N(R)$, donde R es la matriz escalonada reducida de M, y como resulta más sencillo obtener los vectores que generan este espacio a partir de la matriz R, son las soluciones especiales de $Rx = 0$ que pueden leerse a partir de la matriz R, trabajamos con R.

Con respecto al espacio nulo, recordemos que $N(M) = N(U) = N(R)$, donde R es la matriz escalonada reducida de M, y como resulta más sencillo obtener los vectores que generan este espacio a partir de la matriz R, son las soluciones especiales de $Rx = 0$ que pueden leerse a partir de la matriz R, trabajamos con R.

Por último, para calcular $N(M^T)$ debemos resolver el sistema $M^T y = 0$, o bien $y^T M = 0$.

Con respecto al espacio nulo, recordemos que $N(M)=N(U)=N(R)$, donde R es la matriz escalonada reducida de M, y como resulta más sencillo obtener los vectores que generan este espacio a partir de la matriz R, son las soluciones especiales de $Rx=0$ que pueden leerse a partir de la matriz R, trabajamos con R.

Por último, para calcular $N(M^T)$ debemos resolver el sistema $M^Ty=0$, o bien $y^TM=0$.

Vamos a calcular una base para cada uno de los cuatro espacios fundamentales asociados a las matrices

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } D=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comenzamos escalonando la matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to$$

Comenzamos escalonando la matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Comenzamos escalonando la matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Luego,

Comenzamos escalonando la matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Luego,

$$C(B) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad C(B^T) =$$

Comenzamos escalonando la matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Luego,

$$C(B) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ y } C(B^T) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Comenzamos escalonando la matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Luego,

$$C(B) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad C(B^T) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Por lo tanto,

Comenzamos escalonando la matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Luego,

$$C(B) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad C(B^T) = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{B}_{C(B)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathscr{B}_{C(B^T)} = \{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \}.$$

Además, observemos que

Además, observemos que

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Además, observemos que

$$U = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = R$$

Entonces, como tenemos una única columna pivot, la columna 2, las variables libres están asociadas a las columnas 1, 3 y 4. Luego,

Además, observemos que

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Entonces, como tenemos una única columna pivot, la columna 2, las variables libres están asociadas a las columnas 1, 3 y 4. Luego,

Soluciones especiales:

- $x_1 = 1, x_3 = x_4 = 0$

Además, observemos que

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Entonces, como tenemos una única columna pivot, la columna 2, las variables libres están asociadas a las columnas 1, 3 y 4. Luego,

Soluciones especiales:

- $x_1 = 1, x_3 = x_4 = 0$

$$\overline{X}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Además, observemos que

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Entonces, como tenemos una única columna pivot, la columna 2, las variables libres están asociadas a las columnas 1, 3 y 4. Luego,

Soluciones especiales:

- $x_1 = 1, x_3 = x_4 = 0$

  $$\overline{X}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

- $x_3 = 1, x_1 = x_4 = 0$

Además, observemos que

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Entonces, como tenemos una única columna pivot, la columna 2, las variables libres están asociadas a las columnas 1, 3 y 4. Luego,

Soluciones especiales:

- $x_1 = 1, x_3 = x_4 = 0$
  $$\overline{X}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
- $x_3 = 1, x_1 = x_4 = 0$
  $$\overline{X}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Además, observemos que

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Entonces, como tenemos una única columna pivot, la columna 2, las variables libres están asociadas a las columnas 1, 3 y 4. Luego,

Soluciones especiales:

- $x_1 = 1, x_3 = x_4 = 0$
  $$\overline{X}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
- $x_3 = 1, x_1 = x_4 = 0$
  $$\overline{X}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
- $x_4 = 1, x_1 = x_3 = 0$

Además, observemos que

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Entonces, como tenemos una única columna pivot, la columna 2, las variables libres están asociadas a las columnas 1, 3 y 4. Luego,

Soluciones especiales:

- $x_1 = 1, x_3 = x_4 = 0$
  $$\overline{X}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
- $x_3 = 1, x_1 = x_4 = 0$
  $$\overline{X}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
- $x_4 = 1, x_1 = x_3 = 0$
  $$\overline{X}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$N(B) =$$

Por lo tanto,

$$N(B) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle .$$

Por lo tanto,

$$N(B) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Como los vectores que generan $N(B)$ son l.i. resulta

Por lo tanto,

$$N(B) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Como los vectores que generan $N(B)$ son l.i. resulta

$$\mathscr{B}_{N(B)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por último, vamos a calcular el espacio nulo a izquierda de B, $N(B^T)$que es el espacio generado por las soluciones del sistema $B^T y = 0$ o bien, $y^T B = 0$ con $y \in \mathbb{R}^2$.

Por último, vamos a calcular el espacio nulo a izquierda de B, $N(B^T)$que es el espacio generado por las soluciones del sistema $B^T y = 0$ o bien, $y^T B = 0$ con $y \in \mathbb{R}^2$.

Así,

Por último, vamos a calcular el espacio nulo a izquierda de B, $N(B^T)$que es el espacio generado por las soluciones del sistema $B^T y = 0$ o bien, $y^T B = 0$ con $y \in \mathbb{R}^2$.

Así,

$$N(B^T) =$$

Por último, vamos a calcular el espacio nulo a izquierda de B, $N(B^T)$que es el espacio generado por las soluciones del sistema $B^T y = 0$ o bien, $y^T B = 0$ con $y \in \mathbb{R}^2$.

Así,

$$N(B^T) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Por último, vamos a calcular el espacio nulo a izquierda de B, $N(B^T)$que es el espacio generado por las soluciones del sistema $B^T y = 0$ o bien, $y^T B = 0$ con $y \in \mathbb{R}^2$.

Así,

$$N(B^T) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Y resulta,

Por último, vamos a calcular el espacio nulo a izquierda de B, $N(B^T)$que es el espacio generado por las soluciones del sistema $B^T y = 0$ o bien, $y^T B = 0$ con $y \in \mathbb{R}^2$.

Así,

$$N(B^T) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Y resulta,

$$\mathscr{B}_{N(B^T)} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Luego, de acuerdo a las observaciones realizadas en este ejercicio podemos concluir que:

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Luego, de acuerdo a las observaciones realizadas en este ejercicio podemos concluir que:

- $C(D) =$

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Luego, de acuerdo a las observaciones realizadas en este ejercicio podemos concluir que:

- $C(D) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle,$

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Luego, de acuerdo a las observaciones realizadas en este ejercicio podemos concluir que:

- $C(D) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$,
- $C(D^T) =$

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Luego, de acuerdo a las observaciones realizadas en este ejercicio podemos concluir que:

- $C(D) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$,
- $C(D^T) = \langle \{(1,2),(0,-1)\} \rangle$,

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Luego, de acuerdo a las observaciones realizadas en este ejercicio podemos concluir que:

- $C(D) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$,
- $C(D^T) = \langle \{(1,2),(0,-1)\} \rangle$,
- $N(D) =$

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Luego, de acuerdo a las observaciones realizadas en este ejercicio podemos concluir que:

- $C(D) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$,
- $C(D^T) = \langle \{(1,2),(0,-1)\} \rangle$,
- $N(D) = N(D^T) =$

Consideramos ahora la matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Siguiendo con el proceso sugerido para obtener los datos pedidos, escalonamos D.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Luego, de acuerdo a las observaciones realizadas en este ejercicio podemos concluir que:

- $C(D) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$,
- $C(D^T) = \langle \{(1,2),(0,-1)\} \rangle$,
- $N(D) = N(D^T) = \{\mathbf{0}\}$.

Observemos que si trabajamos con $D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, cuando escalonamos obtenemos:

Observemos que si trabajamos con $D^T = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$, cuando escalonamos obtenemos:

$$D^T = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right] \to$$

Observemos que si trabajamos con $D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, cuando escalonamos obtenemos:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U'.$$

Observemos que si trabajamos con $D^T = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right]$, cuando escalonamos obtenemos:

$$D^T = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right] = U'.$$

Luego resulta,

Observemos que si trabajamos con $D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, cuando escalonamos obtenemos:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U'.$$

Luego resulta,

- $C(D^T) =$

Observemos que si trabajamos con $D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, cuando escalonamos obtenemos:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U'.$$

Luego resulta,

- $C(D^T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle =$

Observemos que si trabajamos con $D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, cuando escalonamos obtenemos:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U'.$$

Luego resulta,

- $C(D^T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle,$

Observemos que si trabajamos con $D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, cuando escalonamos obtenemos:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U'.$$

Luego resulta,

- $C(D^T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$,
- $N(D^T) =$

Observemos que si trabajamos con $D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, cuando escalonamos obtenemos:

$$D^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = U'.$$

Luego resulta,

- $C(D^T) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle,$
- $N(D^T) = \{\mathbf{0}\}$.

Outline

27. Sea $A = \{(1,-3,2),(2,4,1),(3,1,3),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

   a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

   b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

27. Sea $A = \{(1,-3,2),(2,4,1),(3,1,3),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

   a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

   b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

a) Sabemos que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que si buscamos una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A, basta con encontrar

27. Sea $A = \{(1,-3,2),(2,4,1),(3,1,3),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

   $a)$ Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

   $b)$ Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

$a)$ Sabemos que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que si buscamos una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A, basta con encontrar 3 vectores linealmente independientes en A.

27. Sea $A = \{(1,-3,2),(2,4,1),(3,1,3),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

   $a)$ Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

   $b)$ Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

$a)$ Sabemos que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que si buscamos una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A, basta con encontrar 3 vectores linealmente independientes en A. Para ello, escalonamos la matriz cuya columnas son los vectores del conjunto A:

27. Sea $A = \{(1,-3,2),(2,4,1),(3,1,3),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

  a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

  b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

a) Sabemos que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que si buscamos una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A, basta con encontrar 3 vectores linealmente independientes en A. Para ello, escalonamos la matriz cuya columnas son los vectores del conjunto A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

27. Sea $A=\{(1,-3,2),(2,4,1),(3,1,3),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

a) Sabemos que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que si buscamos una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A, basta con encontrar 3 vectores linealmente independientes en A. Para ello, escalonamos la matriz cuya columnas son los vectores del conjunto A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

27. Sea $A=\{(1,-3,2),(2,4,1),(3,1,3),(1,1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$, obtener:

   a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

   b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

a) Sabemos que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que si buscamos una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A, basta con encontrar 3 vectores linealmente independientes en A. Para ello, escalonamos la matriz cuya columnas son los vectores del conjunto A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to$$

27. Sea $A=\{(1,-3,2),(2,4,1),(3,1,3),(1,1,1)\}\subset\mathbb{R}^3$, obtener:

   $a)$ Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

   $b)$ Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

$a)$ Sabemos que la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3, así que si buscamos una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A, basta con encontrar 3 vectores linealmente independientes en A. Para ello, escalonamos la matriz cuya columnas son los vectores del conjunto A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto las columnas 1, 2 y 4 son vectores linealmente independientes.

Por lo tanto las columnas 1, 2 y 4 son vectores linealmente independientes.

Entonces, si denotamos por $v_1 = (1,-3,2)$, $v_2 = (2,4,1)$ y $v_3 = (1,1,1)$,

Por lo tanto las columnas 1, 2 y 4 son vectores linealmente independientes.

Entonces, si denotamos por $v_1 = (1,-3,2)$, $v_2 = (2,4,1)$ y $v_3 = (1,1,1)$, el conjunto $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de cardinal 3,

Por lo tanto las columnas 1, 2 y 4 son vectores linealmente independientes.

Entonces, si denotamos por $v_1 = (1, -3, 2)$, $v_2 = (2, 4, 1)$ y $v_3 = (1, 1, 1)$, el conjunto $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de cardinal 3, resulta una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

Por lo tanto las columnas 1, 2 y 4 son vectores linealmente independientes.

Entonces, si denotamos por $v_1 = (1, -3, 2)$, $v_2 = (2, 4, 1)$ y $v_3 = (1, 1, 1)$, el conjunto $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de cardinal 3, resulta una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

$b)$ La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $=\{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ y $e_3 = (0, 0, 1)$.

Por lo tanto las columnas 1, 2 y 4 son vectores linealmente independientes.

Entonces, si denotamos por $v_1 = (1,-3,2)$, $v_2 = (2,4,1)$ y $v_3 = (1,1,1)$, el conjunto $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de cardinal 3, resulta una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

b) La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $=\{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$.

Debemos escribir las componentes de dichos vectores en la base $\mathscr{B}' = \{(1,-3,2),(2,4,1),(1,1,1)\}$ obtenida en el apartado anterior.

Por lo tanto las columnas 1, 2 y 4 son vectores linealmente independientes.

Entonces, si denotamos por $v_1 = (1,-3,2)$, $v_2 = (2,4,1)$ y $v_3 = (1,1,1)$, el conjunto $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de cardinal 3, resulta una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

b) La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $=\{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$.

Debemos escribir las componentes de dichos vectores en la base $\mathscr{B}' = \{(1,-3,2),(2,4,1),(1,1,1)\}$ obtenida en el apartado anterior.

Esto es, encontrar los escalares α_i^j tales que

Por lo tanto las columnas 1, 2 y 4 son vectores linealmente independientes.

Entonces, si denotamos por $v_1 = (1,-3,2)$, $v_2 = (2,4,1)$ y $v_3 = (1,1,1)$, el conjunto $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de cardinal 3, resulta una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

$b)$ La base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $=\{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$.

Debemos escribir las componentes de dichos vectores en la base $\mathscr{B}' = \{(1,-3,2),(2,4,1),(1,1,1)\}$ obtenida en el apartado anterior.

Esto es, encontrar los escalares α_i^j tales que

$$e_j = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^j v_i \text{ para cada } j \in \{1,2,3\}.$$

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$.

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Para hallar la solución, aplicamos las mismas operaciones elementales aplicadas a la matriz en el apartado $a)$, al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

  Para hallar la solución, aplicamos las mismas operaciones elementales aplicadas a la matriz en el apartado $a)$, al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así resulta,

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para hallar la solución, aplicamos las mismas operaciones elementales aplicadas a la matriz en el apartado $a)$, al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así resulta,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para hallar la solución, aplicamos las mismas operaciones elementales aplicadas a la matriz en el apartado $a)$, al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así resulta,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \to$$

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para hallar la solución, aplicamos las mismas operaciones elementales aplicadas a la matriz en el apartado $a)$, al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así resulta,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \to$$

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para hallar la solución, aplicamos las mismas operaciones elementales aplicadas a la matriz en el apartado $a)$, al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así resulta,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{11}{10} \end{bmatrix}.$$

- Buscamos α_1^1, α_2^1 y α_3^1 tales que $e_1 = \alpha_1^1 v_1 + \alpha_2^1 v_2 + \alpha_3^1 v_3$. Esto es equivalente a resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para hallar la solución, aplicamos las mismas operaciones elementales aplicadas a la matriz en el apartado $a)$, al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así resulta,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -\frac{11}{10} \end{bmatrix}.$$

Luego, debemos resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_1^1 & + & 2\alpha_2^1 & + & \alpha_3^1 & = & 1 \\ & & 10\alpha_2^1 & + & 4\alpha_3^1 & = & 3 \\ & & & & \dfrac{1}{5}\alpha_3^1 & = & -\dfrac{11}{10} \end{array}\right. .$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_1^1 & + & 2\alpha_2^1 & + & \alpha_3^1 & = & 1 \\ & & 10\alpha_2^1 & + & 4\alpha_3^1 & = & 3 \\ & & & & \frac{1}{5}\alpha_3^1 & = & -\frac{11}{10} \end{array}\right. .$$

Utilizando el método de sustitución hacia atrás obtenemos

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_1^1 & + & 2\alpha_2^1 & + & \alpha_3^1 & = & 1 \\ & & 10\alpha_2^1 & + & 4\alpha_3^1 & = & 3 \\ & & & & \dfrac{1}{5}\alpha_3^1 & = & -\dfrac{11}{10} \end{array}\right. .$$

Utilizando el método de sustitución hacia atrás obtenemos $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha_1^1 & + & 2\alpha_2^1 & + & \alpha_3^1 & = & 1 \\ & & 10\alpha_2^1 & + & 4\alpha_3^1 & = & 3 \\ & & & & \frac{1}{5}\alpha_3^1 & = & -\frac{11}{10} \end{array}\right. .$$

Utilizando el método de sustitución hacia atrás obtenemos $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{11}{2}\right)$.

Podemos denotar, $[e_1]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \\ \frac{5}{2} \\ \\ -\frac{11}{10} \end{bmatrix}$.

- Ahora buscamos α_1^2, α_2^2 y α_3^2 tales que

- Ahora buscamos α_1^2, α_2^2 y α_3^2 tales que $e_2 = \alpha_1^2 v_1 + \alpha_2^2 v_2 + \alpha_3^2 v_3$.

- Ahora buscamos α_1^2, α_2^2 y α_3^2 tales que $e_2 = \alpha_1^2 v_1 + \alpha_2^2 v_2 + \alpha_3^2 v_3$.

$$[e_2]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}.$$

- Ahora buscamos α_1^2, α_2^2 y α_3^2 tales que $e_2 = \alpha_1^2 v_1 + \alpha_2^2 v_2 + \alpha_3^2 v_3$.

$$[e_2]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}.$$

- Por último, buscamos α_1^3, α_2^3 y α_3^3 tales que $e_3 = \alpha_1^3 v_1 + \alpha_2^3 v_2 + \alpha_3^3 v_3$.

- Ahora buscamos α_1^2, α_2^2 y α_3^2 tales que $e_2 = \alpha_1^2 v_1 + \alpha_2^2 v_2 + \alpha_3^2 v_3$.

$$[e_2]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}.$$

- Por último, buscamos α_1^3, α_2^3 y α_3^3 tales que $e_3 = \alpha_1^3 v_1 + \alpha_2^3 v_2 + \alpha_3^3 v_3$.

$$[e_3]_{\mathscr{B}'} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}.$$