Contents

Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Probabilidad y Estadística

Unidad 6

Autor del resumen:

DEMAGISTRIS, Santiago Ignacio

Julio 2020

1 Variables aleatorias bidimensionales o de mayor dimension

1.1 Variables aleatorias bidimensionales

En nuestro estudio de las variables aleatorias hemos considerado, hasta aquí, sólo el caso unidimensional. Es decir, el resultado del experimento se podía registrar como un solo número x. En muchos casos, sin embargo, nos interesa observar sinlultáneamente dos o mas características numéricas. Por ejemplo, podríamos observar la cantidad de lluvia total, LL, y el promedio de temperatura, T, en cierta región durante un mes específico, que daría lugar al resultado (ll, t).

Definicion. Sea ϵ un experimento y S un espacio muestral asociado con ϵ. Sean X = X(s) y Y = Y(s) dos funciones que asignan un número real a cada uno de los resultados s $\in$ S. Llamamos a (X, Y) **variable aleatoria bidimensional** (que también se denomina vector aleatorio).

Si $X_1 = X_1(s), X_2 = X_2(s), ..., X_n = X_n(s)$, son n funciones, cada una de las cuales asigna un número real a cada resultado $s \in S$, entonces llamamos a $(X_1, ..., X_n)$ una **variable aleatoria n-dimensional** (o un vector aleatorio n-dimensional).

Definicion.

- (X,Y) es una **variable aleatoria bidimensional discreta** si los valores posibles de (X,Y) son finitos o infinitos numerables. Es decir, los valores posibles de (X, Y) se pueden representar como $(x_i, y_j), i = 1, 2, ..., n, ...; j = l, 2, ..., m, ...$
- (X,Y) es una **variable aleatoria bidimensional continua** si (X,Y) puede tomar todos los valores en un conjunto no numerable del plano euclidiano. [Por ejemplo, si (X,y) toma todos los valores en el rectángulo $\{(x, y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, diríamos que (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua.]

En otras palabras, (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional si representa el resultado de un experimento aleatorio en el cual hemos medido las dos características numéricas X y Y.

Definicion.

a) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Con cada resultado posible (x_i, y_j), asociamos un número $p(x_i, y_j)$ que representa $P(X = x_i, Y = y_j)$ y que satisface las condiciones siguientes:

$$\forall_{x_i,y_j} p(x_i, y_j) \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$$

La función p definida para toda (xi, yj) en el recorrido de (X.Y) se llama **funcin de probabilidad** de (X,Y). El conjunto de ternas $(x_i, y_j, p(x_i, y_j)), i, j = 1, 2, ...$, en algunos casos se denomina **distribución de probabilidades** de (X, Y).

b)) Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua que toma todos los valores en una región R del plano euclidiano. La **función de densidad de probabilidades conjuntas** f es una función que satisface las siguientes condiciones:

$$\forall_{(x,y)\in R} f(x, y) \geq 0$$

$$\int\int_R f(x, y)\ dx\ dy = 1$$

Observaciones

a) La ultima condicion indica que el volumen total bajo la superficie dada por la ecuación $z = f(x, y)$ es igual a 1.

b) Como en el caso unidimensional, $f(x, y)$ no representa la probabilidad de nada. Sin embargo, para Δx y Δy positivos y suficientemente pequeñas, $f(x, y)\Delta x\Delta y \sim P(x \leq X \leq x + \Delta x, y \leq Y \leq y + \Delta y)$.

c) Como en el caso unidimensional, adoptaremos la convención de que $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin R$. Por tanto, podemos considerar f definida para toda (x,y) en el plano y la ultima condición se convierte en $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx\ dy = 1$.

d) Si B está en el recorrido de (X, Y), tenemos

$$P(B) = P\left[(X(s), Y(s)) \in B\right] = P\left[s \in S|(X(s), Y(s)) \in B\right]$$

Esta ultima probabilidad se refiere a un evento en S y, por tanto, determina la probabilidad de B. En nuestra terminologia previa, B y $[s \in S|(X(s), Y(s)) \in B]$ son **eventos equivalentes.**

- Si B esta en el recorrido de (X,Y), siendo esta ultima discreta, tenemos

$$P(B) = \sum_B\sum_B p(x_i, y_j)$$

, la suma se toma con todos los indices (i, j) para los cuales $(x_i, y_j) \in B$

- Si (X,Y) es continua

$$P(B)\int\int_B f(x, y)\ dx\ dy$$

Ejemplos p. 125-128