CAPÍTULO 3: ORTOGONALIDAD (1ERA. PARTE).

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

OUTLINE

En cualquier espacio vectorial de dimensión n, una base nos permite pensar sus elementos como una n-upla de escalares, a partir de su representación en la base dada.

En los primero cursos de matemática, aprendimos a expresar entes geométricos (curvas, superficies, volúmenes) en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ en términos algebraicos. Esto fue posible a partir de la relación $1-1$ entre un punto del plano (o del espacio) y un elemento de $\mathbb{R}^2$ (o de $\mathbb{R}^3$) ordenado, correspondientes a la descomposición de su **vector posición** en términos de los los **versores canónicos** $\vec{i},\vec{j}$ (y $\vec{k}$).

En la terminología de espacios vectoriales, los **versores canónicos** $\vec{i}=(1,0,0), \vec{j}=(0,1,0)$ y $\vec{k}=(0,0,1)$ son una base de $\mathbb{R}^3$ y cualquier punto P tiene asociado su representación (x,y,z) en esta base.

Pero sabemos que $\mathbb{R}^3$ tiene infinitas bases. Por ejemplo, $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ y $(1,0,0)$ también forman una base de $\mathbb{R}^3$. Nos preguntamos por qué trabajamos siempre con la base de versores canónicos y no con cualquier otra.

La base de los versores canónicos en $\mathbb{R}^n$ tiene dos virtudes: sus vectores son perpendiculares y su longitud es 1. Esto es lo que se denomina una *base ortonormal* (*vectores ortogonales y de norma 1*).

Las ideas de ortogonalidad y ortonormalidad de las bases son parte de los conceptos fundacionales del Álgebra Lineal: necesitamos poder hacer los cálculos más sencillos (sic Strang).

Queremos extender esta idea de *perpendicularidad entre vectores* y *longitud de un vector* a cualquier espacio vectorial.

¿Cómo determinamos que dos vectores son perpendiculares en $\mathbb{R}^3$?.¿Cómo calculamos la longitud de un vector en $\mathbb{R}^3$? (Idem $\mathbb{R}^2$).

Ambas respuestas pueden ser dadas en función del producto escalar entre vectores.

Recordemos:

Dados $\vec{u}, \vec{v}$ son dos vectores ("geométricos") en el espacio, su producto escalar es

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}^{\wedge}\vec{v}).$$

Así, si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos, son perpendiculares si y solo si su producto escalar es cero.

Sabemos además que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ son las representaciones de $\vec{u}, \vec{v}$ en la base canónica, entonces

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u^T v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

lo cual es mucho más sencillo de calcular.

Por otro lado, gracias a Pitágoras, sabemos que $|\vec{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ o, equivalentemente, $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u^T u$.

Para poder extender entonces las ideas de *ortogonalidad* y *norma* a cualquier espacio vectorial, deberemos definir un producto escalar o *producto interno*.

(recordar: $\bar{z} =$ conjugado de z)

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un producto interno sobre V es una función $\langle .,. \rangle$ que a cada par de vectores $u, v \in V$ le asigna un escalar $\langle u, v \rangle \in \mathbb{K}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $u, v, w \in V$ se verifica:

(1) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,

(2) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$,

(3) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$,

(4) $\langle u, u \rangle \geq 0$,

(5) $\langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

Ejercicio: Probar que todo producto interno satisface:

1. $\langle u, 0 \rangle = \langle 0, v \rangle = 0$
2. $\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle$.
3. $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

Ejemplos:

1. Recordemos que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Definiendo $\langle z,w\rangle = z\bar{w}$ para todo $z,w\in\mathbb{C}$ ($\bar{w} =$ conjugado de w), es fácil probar que $\langle .,.\rangle$ es un producto interno en $\mathbb{C}$.

   Más aún, si pensamos en el espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ y con $\bar{z}$ indicamos la n-upla de números complejos correspondientes a los conjugados de las componentes de $z\in\mathbb{C}^n$, se puede verificar que $\langle z,w\rangle = z\bar{w}$ es un producto interno en $\mathbb{C}^n$. Se conoce como *producto interno canónico*.
2. Ya conocemos el producto interno *canónico* en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, podemos definir otros.
   Definimos $\langle u,v\rangle = u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 4u_2v_2$, con $u=(u_1,u_2)$ y $v=(v_1,v_2)$. Probemos que $\langle .\,,.\rangle$ es realmente un producto interno:
   - Las condiciones (1), (2), (3) Son sencillas de verificar (ejercicio).

   (4) $\langle u,u\rangle = u_1^2 - 2u_2u_1 + 4u_2^2 = (u_1-u_2)^2 + 3u_2^2 \geq 0.$

   (5) $\langle u,u\rangle = 0 \Longleftrightarrow (u_1-u_2)^2 + 3u_2^2 = 0 \Longleftrightarrow$
   $\Longleftrightarrow (u_1-u_2)^2 = 0 \wedge u_2^2 = 0 \Longleftrightarrow u_2 = 0 \wedge u_1^2 = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$

Ejemplos:(continuación)

3. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, de grado a lo sumo n y $t_0, t_1, \ldots, t_n$ escalares distintos. Para $p; q \in V$ definimos
$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=0}^{n} p(t_i)\,\bar{q}(t_i).$$
Ejercicio: Probar que es un producto interno. (Ayuda: recordar que si un polinomio de grado a lo sumo n tiene $n+1$ raíces distintas, ese polinomio es el polinomio nulo.)
4. Sea V el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[0,1]$. Para $f; g \in V$ sea
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$
Ejercicio: Probar que es un producto interno. (Ayuda: recordar que si una función continua es positiva en un punto x_0, por el teorema de conservación de signo será positiva en un todo un entorno de x_0.)

En un espacio vectorial con producto interno podemos definir el concepto de vectores *perpendiculares u ortogonales* y también el concepto de *norma* de un vector:

Definición: Sea V un espacio vectorial con un producto interno $\langle .,. \rangle$. Para todo $u, v \in V$:

1. decimos que u es *perpendicular u ortogonal a* v, y lo notamos $u \perp v$, si $\langle u, v \rangle = 0$.
2. La *norma de* u (inducida por $\langle .,. \rangle$) se denota $\|u\|$ y su valor es $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Equivalentemente, $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ y $\|u\| \geq 0$.

Observemos que el producto escalar de dos vectores x, y en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, (definido en asignaturas anteriores) puede ser expresado como $x^T y$.
Es fácil ver que el producto escalar es un producto interno en estos espacios vectoriales. Con este producto interno la norma de un vector (en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$) es *su longitud* según la geometría euclídea y el Teorema de Pitágoras.

En efecto, si $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Es sabido que la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, verifica las siguientes propiedades:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Otra propiedad muy importante que satisface esta norma es

5. $| \langle x, y \rangle | \leq \|x\| \, \|y\|$ (desigualdad de Cauchy-Swartz).

Si recordamos que en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ el producto escalar verificaba $\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos(x^\wedge y)$, la desigualdad de Cauchy-Swartz es claramente válida.

Lo interesante es que *toda norma proveniente de un producto escalar en cualquier espacio vectorial* cumple con estas cuatro propiedades.

Lema: En todo espacio vectorial con un producto interno la norma por él definida satisface las 5 propiedades presentadas anteriormente.

Prueba: Las propiedades (1), (2) y (3) son inmediatas. Para las dos restantes, precisamos probar primero la (5) y después la (4).

5. Debemos probar $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$. Claramente, la desigualdad vale si $x=0$.
   Sea $x \neq 0$. Construimos $z = y - \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|^2}x$. Es fácil verificar (ejercicio) que

$$\|z\|^2 = \|y\|^2 - \frac{\langle x,y\rangle^2}{\|x\|^2}.$$

   Como $\|z\|^2 \geq 0$, resulta $\|y\|^2\,\|x\|^2 \geq \langle x,y\rangle^2$. Por lo tanto,

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|y\|\,\|x\|\,.$$

Prueba (continuación)

4. Debemos probar $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Tenemos

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Por lo tanto, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

En espacios vectoriales de funciones o matrices, y tampoco en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 4$, no tenemos el concepto de *ángulo* entre dos vectores no nulos. Sin embargo, la desigualdad de Cauchy-Swartz nos permite definir este concepto en cualquier espacio vectorial con producto interno (sobre $\mathbb{R}$).

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $x, y \in V$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Por Cauchy-Swartz sabemos que $-1 \leq \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$. Por lo tanto, podemos definir el ángulo entre x e y como

$$\hat{xy} = arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Observar que, con esta definición, tenemos que en cualquier espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno se verifica $\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \, cos(\hat{xy})$.

Observación: El *ángulo* (en particular, la ortogonalidad) entre dos vectores no depende de su norma. En efecto, si $x, y \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces, $|\cos(\hat{xy})| = |\cos((\alpha x)\hat{}(\beta y))|$. (Ejercicio).

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno y $W \subset V$ un conjunto vectores no nulos mutuamente ortogonales. Entonces, los vectores de W son vectores l.i..

Prueba: Consideremos una combinación lineal nula de los vectores $v^1, \ldots, v^k$ de W: $\sum_{i=1}^k \alpha_i v^i = 0$. Para $j \in \{1, \ldots, k\}$, realizamos el producto escalar

$$\left\langle v^j, \sum_{i=1}^k \alpha_i v^i \right\rangle = \sum_{i=1}^k \overline{\alpha_i} \left\langle v^j, v^i \right\rangle = 0.$$

Como $v^j \perp v^i$ para todo $i \neq j$, resulta

$$\left\langle v^j, \sum_{i=1}^k \alpha_i v^i \right\rangle = \overline{\alpha_j} \left\langle v^j, v^j \right\rangle = 0.$$

Considerando que $v^j \neq 0$, tenemos que $\alpha_j = 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$.
Por lo tanto, los vectores W son l.i..

Ejercicio: La recíproca del lema anterior no es válida.

Observación: En el lema anterior, V puede ser un espacio de dimensión infinita y W un conjunto infinito de vectores ortogonales.

Ejemplo:
Sea V el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[0,1]$ con el producto interno $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos las funciones

$$f_n(x) = \sqrt{2}\, cos(2\pi nx) \ \ , \ g_n(x) = \sqrt{2}\, sen(2\pi nx).$$

Puede probarse que el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito de vectores ortogonales de V.

Más aún, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\| = \|g_n\| = 1$.

Este tipo de espacios serán motivo de estudio en las asignaturas de análisis matemático.

Sea V es un espacio vectorial con producto interno $\langle .,. \rangle$ y $\mathscr{B} = \{u^1, \ldots, u^k\}$ una base de vectores mutuamente ortogonales (l.i.). Veremos que en este caso, es muy sencillo calcular la representación de cualquier vector en $\mathscr{B}$.

Sea $v \in V$. Buscamos $\alpha_i, i = 1, \ldots, k$ tales que $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u^i$. Para todo $u^j \in \mathscr{B}$, tenemos:

$$\left\langle v, u^j \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left\langle u^j, u^i \right\rangle = \alpha_j \left\langle u^j, u^j \right\rangle = \alpha_j \left\| u^j \right\|^2.$$

Por lo tanto, para $j = 1, \ldots, k$,

$$\alpha_j = \frac{\left\langle v, u^j \right\rangle}{\left\| u^j \right\|^2}.$$

Observemos que si $\left\| u^j \right\| = 1$ para todo $j = 1, \ldots, k$, tenemos

$$v = \sum_{i=1}^{k} \left\langle v, u^i \right\rangle u^i.$$

Como la ortogonalidad no se afecta *escalando* los vectores, si los vectores no tienen norma 1, podemos definir $\mathscr{B}' = \{w^j : w^j = \frac{u^j}{\|u^j\|}; j = 1, \dots, k\}$, la cual resulta también base de V. (Justificar)
Claramente, los cálculos se simplifican cuando trabajamos con bases cuyos vectores, además de ser mutuamente ortogonales tienen todos norma 1.

Definición: Dado un espacio vectorial V con producto interno, una base de V es *ortogonal* si sus vectores son mutuamente ortogonales y es *ortonormal* si es base ortogonal y sus vectores tienen norma 1.

Los versores canónicos $e^i, i = 1, \dots, n$ son la base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ más utilizada. Sin embargo, cualquier rotación de estos vectores configura una nueva base ortonormal. Así, dado cualquier ángulo θ, los vectores $v^1 = (cos\,\theta, sen\,\theta)$ y $v^2 = (-sen\,\theta, cos\,\theta)$ definen una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

Convenio: Salvo mención en contrario, el producto interno en $\mathbb{R}^n$ es $\langle u, v \rangle = u^T v$.

La noción de ortogonalidad entre vectores puede ser extendido a ortogonalidad entre subespacios vectoriales.

Definición: Sean un espacio vectorial V con producto interno y dos subespacios W_1 y W_2 de V. Decimos que W_1 y W_2 son ortogonales si, para todo $u \in W_1$ y todo $v \in W_2$, se verifica $u \perp v$.

Observaciones:

- El subespacio nulo es ortogonal a cualquier otro subespacio.
- En $\mathbb{R}^2$, la recta de ecuación $y = x$ y la recta de ecuación $y = -x$ son subespacios ortogonales.
- En $\mathbb{R}^3$: el eje x y el eje z son subespacios ortogonales. El plano coordenado xy y el eje z son subespacios ortogonales. Los planos coordenados xy e yz, ¿son subespacios ortogonales?. No. Los vectores $u = (1,1,0)$ (en el plano xy) y $v = (0,1,1)$ (en el plano yz) no son ortogonales. Tampoco lo son $u = (0,1,0)$ (en el plano xy) y $u = (0,1,0)$ (en el plano yz).

Tenemos la siguiente condición necesaria para la ortogonalidad de subespacios:

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales de V. Entonces $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Prueba: Sea $u \in W_1 \cap W_2$. Como W_1 y W_2 son ortogonales, $v \perp w$ para todo $v \in W_1$ y $w \in W_2$. En particular, tomando $v = u \in W_1$ y $w = u \in W_2$, resulta $u \perp u$ o, equivalentemente, $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 = 0$. Por lo tanto, $u = 0$. □

Ejercicio: La condición del lema anterior no es suficiente.

Para decidir sobre la ortogonalidad de dos subespacios, sólo debemos chequear la ortogonalidad de sus vectores generadores.

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno, $W_1 = \langle U_1 \rangle$ y $W_2 = \langle U_2 \rangle$ dos subespacios de V. Entonces, W_1 y W_2 son subespacios ortogonales si y solo si $u \perp w$ para todo $u \in U_1$ y todo $w \in U_2$.

Prueba: Ejercicio.

El resultado anterior nos ayuda a descubrir que ya conocemos importantes pares de subespacios ortogonales.

Teorema:
Sea A una matriz de tamaño $m \times n$. Entonces:

1. El espacio fila y el espacio nulo de A son subespacios ortogonales de $\mathbb{R}^n$.
2. El espacio columna y el espacio nulo a izquierda de A son subespacios ortogonales de $\mathbb{R}^m$.

Prueba:

1. Sea $v \in N(A)$. Como $Av = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$, $A_i v = 0$. Por lo tanto, para todo $i = 1, \ldots, m$, $A_i \perp v$. Como las filas de A generan al espacio fila, los espacios son ortogonales.
2. Ejercicio.

Nos enfocamos ahora en las dimensiones de subespacios ortogonales. Esto es, si V es un espacio de dimensión n y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales de V, ¿qué podemos decir respecto a las dimensiones de W_1 y W_2?

Ejemplo: Sean $v^1 = (1,0,0,0)$, $v^2 = (1,1,0,0)$, $w = (0,0,4,5)$, $V = \langle\{v^1, v^2\}\rangle$ y $W = \langle w\rangle$. Es fácil ver que V y W son subespacios ortogonales de $\mathbb{R}^4$.

Observemos que $dim(V) + dim(W) = 3$. O sea, *queda espacio* en $\mathbb{R}^4$, por fuera del espacio generado por v^1, v^2 y w.

En efecto, tenemos *lugar* para un espacio de dimensión 1, por ejemplo, el espacio L generado por $z = (0,0,5,-4)$. Es fácil probar que L es ortogonal a V y a W. (Ejercicio)

Pregunta: ¿Existe algún subespacio de $\mathbb{R}^4$ que sea ortogonal con V, W y L?

Veamos primero el siguiente resultado técnico:

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales. Sean U_1 y U_2 conjuntos de vectores l.i de W_1 y W_2, respectivamente. Entonces, $U = U_1 \cup U_2$ es un conjunto de vectores l.i. de V.

Prueba:
Sean $U_1 = \{u_1^i : i = 1, \ldots, k\}$ y $U_2 = \{u_2^j : j = 1, \ldots, t\}$ y consideremos una combinación lineal nula de vectores de $U = U_1 \cup U_2$:
$\sum_{i=1}^k \alpha_i u_1^i + \sum_{j=1}^t \beta_j u_2^j = 0.$

Sea $w = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_1^i = \sum_{j=1}^t (-\beta_j) u_2^j$. Observemos que $w \in \langle U_1 \rangle \cap \langle U_2 \rangle$
Por lo tanto (justificar)

$$w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_1^i = \sum_{j=1}^{t} (-\beta_j) u_2^j = 0.$$

Como los vectores de U_1 y de U_2 son l.i., resulta $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$ y $\beta_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, t$. $\square$

Podemos ahora probar:

Teorema: Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean W_1, W_2 subespacios ortogonales de V. Entonces,

$$dim(W_1) + dim(W_2) \leq dim(V).$$

Prueba: Para $i = 1, 2$, sea $\mathscr{B}_i$ una base de W_i. Como son espacios ortogonales, $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \emptyset$ (justificar). Por el lema anterior, $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ es un conjunto de vectores l.i. Por lo tanto,
$dim(V) \geq |\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2| = |\mathscr{B}_1| + |\mathscr{B}_2| = dim(W_1) + dim(W_2)$ $\square$

¿En qué casos $dim(W_1) + dim(W_2) = dim(V)$?
Cuando son *complemetarios (respecto a la ortogonalidad).*

Lema: Sea V un espacio vectorial de dimensión n, con producto interno, y W_1, W_2 subespacios ortogonales de V tales que $dim(W_1) + dim(W_2) = n$. Entonces,

$$W_2 = \{u \in V : u \perp v \text{ para todo } v \in W_1\}.$$

Prueba: Sea $U = \{u \in V : u \perp v \text{ para todo } v \in W_1\}$. Como $W_2 \perp W_1$, claramente, $W_2 \subset U$. Debemos sólo probar $U \subset W_2$.
Supongamos lo contrario, esto es, existe $u \in U \setminus W_2$. Entonces, $u \neq 0$. (justificar). Sean $\mathscr{B}^1$ y $\mathscr{B}^2$ bases de W_1 y W_2, respectivamente. Entonces, $\mathscr{B}^1 \cup \mathscr{B}^2 \cup \{u\}$ es un conjunto de $n+1$ vectores l.i. de V, una contradicción. $\square$

Definición: Dado un espacio vectorial V con producto interno y W un subespacio de V, llamamos *complemento ortogonal de* W, y lo notamos $W^{\perp}$, al subespacio de V determinado por todos los vectores que son ortogonales a todos los vectores de W. Esto es,

$$W^{\perp} = \{u \in V : u \perp v \text{ para todo } v \in W\}$$

Ejercicio: Probar:

1. $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V y $W \perp W^{\perp}$.
2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$

Con esta nueva definición y notación el lema anterior puede ser reescrito así:

Lema: Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión n y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales de V tales que $dim(W_1) + dim(W_2) = n$. Entonces, $W_2 = W_1^{\perp}$.

Como un corolario de este resultado obtenemos:

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal (Parte II): Sea A una matriz $m \times n$. Entonces,

1. El espacio fila y el espacio nulo de A son complementos ortogonales en $\mathbb{R}^n$
2. El espacio columna y el espacio nulo a izquierda de A son complementos ortogonales en $\mathbb{R}^m$.

Observación: Veremos más adelante que la recíproca del lema anterior es cierta. Esto es, el siguiente resultado es válido:

Teorema: Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión n y W_1, W_2 dos subespacios ortogonales de V. Entonces,

$$dim(W_1) + dim(W_2) = n \Longleftrightarrow W_2 = W_1^{\perp}.$$

Como consecuencia del teorema anterior tenemos que un par de los subespacios complementos ortogonales *descomponen el espacio vectorial* en el siguiente sentido:

Teorema: Sea V un espacio vectorial con producto interno, de dimensión finita, y W un subespacio de V. Entonces, para todo $v \in V$ existen únicos $w \in W$ y $w^{\perp} \in W^{\perp}$ tales que $v = w + w^{\perp}$.

Prueba:
Sea $\{v^1, \ldots, v^k\}$ una base de W y $\{w^1, \ldots, w^{n-k}\}$ una base de $W^\perp$. Por lo tanto, $\{v^1, \ldots, v^k\} \cup \{w^1, \ldots, w^{n-k}\}$ es una base de V (justificar).

Sea $v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i + \sum_{j=1}^{n-k} \beta_j w^j$. Si $w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i$ y $w^\perp = \sum_{j=1}^{n-k} \beta_j w^j$ tenemos $w \in W$, $w^\perp \in W^\perp$ y $v = w + w^\perp$.
Para probar que w y $w^\perp$ son únicos, sean $z \in W$ y $z^\perp \in W^\perp$ tales que $v = z + z^\perp = w + w^\perp$. Entonces, $w - z = z^\perp - w^\perp$.
Como $w - z \in W$ y $z^\perp - w^\perp \in W^\perp$, resulta $w - z = z^\perp - w^\perp = 0$ y por lo tanto, $z = w$ y $z^\perp = w^\perp$. $\square$

Corolario: Sea A una matriz $m \times n$. Entonces:

1. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ existen únicos $x_F \in C(A^T)$ y $x_N \in N(A)$ tales que $x = x_F + x_N$.
2. Para todo $y \in \mathbb{R}^m$ existen únicos $y_C \in C(A)$ y $y_I \in N(A^T)$ tales que $y = y_C + y_I$.