Capítulo 2: Espacios Vectoriales (3ra. Parte).

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

OUTLINE

Anterioremente trabajamos con la matriz 4×5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

y $N(A)$ resultó ser el espacio generado por los siguientes 3 vectores:

$$x^1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; x^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; x^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: verificar que $C(A)$ es el espacio generado por los vectores

$$b^1 = (1,2,-5,0) \; ; \; b^2 = (0,0,2,1).$$

Observemos que para esta matriz 4×5, necesitamos 2 vectores para describir el espacio generado por sus 5 columnas y 3 vectores para describir su espacio nulo.
Queda claro que para una matriz $m \times n$, los números m y n no aportan información relevante respecto a la *dimensión* de sus espacios nulo y columna.
Llevando a A a su forma escalonada obtenemos

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto el rango de A (número de columnas y filas pivots) es $r = 2$.
Dijimos que r sí tiene un rol importante en la descripción de $C(A)$ y $N(A)$.
Veamos más detalladamente este rol de r.

Observación: El rango r de una matriz A es el número de filas no nulas en U (o en R, su forma reducida).
Nos preguntamos:

¿Cuándo aparece una fila nula en U (o en R)?

Recordemos que las operaciones elementales reemplazan una fila por una combinación lineal entre esa fila y la fila pivot. Por lo tanto, en todo paso del método de eliminación, las filas de las matrices que vamos obteniendo son combinaciones lineales de las filas de A.

Entonces, si U tiene una fila nula, es porque el vector $0 \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal (no nula) de las filas de A. O equivalentemente, la fila de A que por operaciones elementales pasó a ser nula es una combinación lineal de las restantes filas de A.

Observación: El rango r (número de filas no nulas en U) *cuenta* el número de filas de A que son *linealmente independientes*.

Formalicemos...

Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y U un conjunto finito de vectores de V, $U = \{v^i : i = 1, \ldots, k\} \subseteq V$.

Si un vector v^j de U puede expresarse como combinación lineal de los restantes, es natural decir que v^j *depende linealmente* de los vectores de $U \setminus \{v^j\}$.
En ese caso, decimos que *los vectores de U son linealmente dependientes*.

¿Cómo definimos entonces la lineal *independencia* de un conjunto U de vectores?

Definir conceptos por la negativa ("son independientes si no son dependientes") suele ser engorroso para trabajarlos matemáticamente.

Nos proponemos caracterizar los conjuntos de vectores que NO SON linealmente dependientes.

La siguiente definición nos ayudará en lo que sigue:
Definición: Llamamos *combinación lineal nula* de un conjunto de vectores de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ a la combinación lineal de los mismos donde todos los escalares son $0 \in \mathbb{K}$.
Observación: Existe $0 \neq v \in U$ tal que v puede expresarse como combinación lineal de los otros vectores de U si y solo si el vector nulo $0 \in V$ puede expresarse como combinación lineal no nula de los vectores de U.

En efecto, sea $U = \{v^j : j = 1, \ldots, n\}$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que es v^1 quien puede expresarse como combinación lineal de v^j con $j = 2, \ldots, k$. Esto es, $v_1 = \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j$, para ciertos $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 2, \ldots, k$. Por lo tanto $0 = v_1 - \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j$.
Recíprocamente, si $0 \in V$ puede expresarse como una combinación lineal no nula de los vectores en U, tenemos que $0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j$, para ciertos $\alpha_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \ldots, k$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha_1 \neq 0$. Entonces, $v_1 = \sum_{j=2}^{k} \frac{-\alpha_j}{\alpha_1} v^j$.

Por la observación anterior, los vectores de U son *linealmente dependientes* si y solo si el vector nulo $0 \in V$ puede expresarse como combinación lineal no nula de los vectores de U.

Entonces, los vectores de U son *linealmente independientes (l.i.)* si la única combinación lineal de vectores de U que da $0 \in V$ es la combinación lineal nula.

Definición: Sea $(V, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $U = \{v^i : i = 1, \dots, k\} \subseteq V$. Los vectores de U son *linealmente independientes (l.i.)* si

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v^i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0,\ i = 1, \dots, k.$$

Observación: Para todo $U \subset V$, si $0 \in U$ los vectores de U son linealmente dependientes. Justificar.

Ejemplos:

1. Las columnas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes.

   Debemos probar que la única combinación lineal de los vectores columnas que da el vector nulo es la que tiene todos los escalares iguales a cero. Planteamos:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Es fácil ver que la única solución es $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Otra forma: Vimos que todas las posibles combinaciones lineales de los vectores columna de A una matriz $m \times n$ pueden expresarse como Ax, con $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, las columnas de A son l.i. si y solo si $N(A) = \{0\}$. Si A es $n \times n$, las columnas de A son l.i. si y solo si A es no singular.

Ejemplos:(continuación)

2. Sea V el espacio vectorial de funciones reales definidas en todo $\mathbb{R}$ (con la suma y producto por escalares habituales) y sea $U = \{f_0, f_1, \ldots, f_k\}$ donde, para $j = 0, \ldots, k$, $f_j(x) = x^j$ para todo $x \in \mathbb{R}$. ¿Son l.i. los *vectores* de U?

   En este caso, debemos probar que la única combinación lineal de las funciones en U que da la función constante cero Z es la que tiene todos los escalares iguales a cero. Planteamos:

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j f_j = Z \Rightarrow \sum_{j=0}^{k} \alpha_j f_j(x) = Z(x)\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j = 0\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

   La expresión de la izquierda es un polinomio y todo polinomio tiene un número finito de raíces salvo que se trate del *polinomio nulo*. Por lo tanto $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$.

Ejemplos:(continuación)

3. Probar que $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. En ese espacio, ¿son l.i. $z_1 = -1+i$ y $z_2 = 3-6i$?.
   Planteamos una combinación lineal (con escalares en $\mathbb{R}$) de z_1 y z_2 que nos de $0 \in \mathbb{C}$:

$$\alpha(-1+2i)+\beta(3-6i) = 0 \Leftrightarrow -\alpha+3\beta = 0 \wedge 2\alpha-6\beta = 0$$

   O, equivalentemente,

$$\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} = 0.$$

   Observar que la independencia lineal de z_1 y z_2 es equivalente a la de $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$. ¿Son l.i.?

   Pregunta: en el espacio vectorial de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, ¿puede haber dos vectores l.i.?.

Vimos que los vectores columna de una matriz A son l.i. si y solo si $N(A) = \{0\}$. Por lo tanto, analizar la lineal dependencia de un conjunto finito U de k vectores de $\mathbb{R}^n$, es equivalente a analizar el espacio nulo de $M(U)$, la matriz $n \times k$ cuyas columnas son los vectores de U.

Así, si A es una matriz $n \times n$, sus vectores columna son l.i. si y solo si A es no singular.

No es díficil probar que en una matriz $n \times n$, también sus vectores fila son l.i. si y solo si la matriz es no singular. Justificar. (Ayuda: trabajar con A^T.)

Tenemos como corolario:
Corolario: Los vectores columna y los vectores fila de toda matriz triangular $n \times n$ sin ceros en la diagonal son l.i..

También podemos probar:

Corolario: En todo conjunto de más de n vectores de $\mathbb{R}^n$ sus elementos son l.d..

Prueba: Recordemos que si A es una matriz $m \times n$, con $n > m$, $N(A)$ tiene un elemento distinto del vector nulo. Por lo tanto, si U es un conjunto de k vectores de $\mathbb{R}^n$ con $k > n$, $N(M(U)) \neq \{0\}$ y por lo tanto los vectores de U son l.d.. $\square$

Nueva pregunta: si tenemos un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de vectores l.d., ¿cuál sería un subconjunto maximal/máximo de U cuyos elementos sean l.i.?

Vemos antes algunos resultados

Lema: Para $j = 1, \ldots, k$, sea $z^j = \begin{bmatrix} v^j \\ w^j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+p}$ con $v^j \in \mathbb{R}^n$ y $w^j \in \mathbb{R}^p$

1. Si $v^1, \ldots, v^k$ son vectores l.i. entonces $z^1, \ldots, z^k$ son vectores l.i..
2. Si $w^j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$, entonces $z^1, \ldots, z^k$ son vectores l.i. si y solo si $v^1, \ldots, v^k$ son vectores l.i..

Prueba: solo es necesario observar que

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j z^j = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j \\ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w^j \end{bmatrix}.$$

Entonces:

1. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j z^j = 0 \in \mathbb{R}^{n+p}$. Entonces $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = 0 \in \mathbb{R}^n$. Como $v^1, \ldots, v^k$ son vectores l.i., tenemos que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, $z^1, \ldots, z^k$ son vectores l.i..

Prueba: (continuación)

(2) En función de lo probado anteriormente, solo falta probar que si $w^j = 0$ para $j = 1, \ldots, k$ y $z^1, \ldots, z^k$ son vectores l.i., entonces $v^1, \ldots, v^k$ son vectores l.i.

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = 0 \in \mathbb{R}^n$. Debemos probar que $\alpha_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, k$.

Sea $0 \in \mathbb{R}^p$. Entonces,

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \in \mathbb{R}^{n+p}.$$

Por lo tanto,

$$0 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \begin{bmatrix} v^j \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j z^j.$$

Como $z^1, \ldots, z^k$ son vectores l.i., tenemos $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Entonces $v^1, \ldots, v^k$ son vectores l.i. .

Pensemos ahora en conjunto de vectores fila y vectores columna de una matriz escalonada.

$$U = \begin{bmatrix} \odot & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \odot & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \odot & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \odot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Recordemos que con $\odot$ indicamos las entradas pivots y, por ende, identifican las columnas y filas pivots. Recordemos también que el número de pivots es el rango de la matriz.

Veremos que el rango de una matriz escalonada es el número máximo de vectores columna l.i. y coincide con el número máximo de vectores fila l.i..

Lema: Sea U una matriz escalonada y $\tilde{U}$ la submatriz de U que se obtiene borrando sus filas nulas. Entonces, U y $\tilde{U}$ tienen el mismo número de vectores fila l.i. y el mismo número de vectores columna l.i..

Prueba: Ningún conjunto de vectores fila l.i. de U contiene a una fila nula.(Justificar) Por lo tanto, todo conjunto de vectores fila l.i. de U es también un conjunto de vectores fila l.i. de $\tilde{U}$. Claramente, la recíproca también es cierta.
Por otro lado, los vectores columna de una matriz escalonada, son de la forma

$$U^j = \begin{bmatrix} \tilde{U}^j \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por el Lema anteriormente probado, un conjunto de vectores columna de U será l.i. si y solo si los correspondiente vectores columnas de $\tilde{U}$ lo son. $\square$

Observación: El número de columnas l.i.. de una matriz no cambia si reordenamos las columnas. El reordenamiento de columnas tampoco cambia el número de filas l.i..

Conclusión: para determinar el número máximo de vectores columna y fila l.i. de matrices escalonadas podemos restringirnos a matrices escalonadas sin filas nulas (r filas pivots) y tales que las r columnas pivots se ubican en las primeras columnas.

Esto es, podemos restringirnos a trabajar con matrices $r \times n$ escalonadas que respondan al siguiente esquema:

$$U = \begin{bmatrix} \odot & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \odot & * & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \odot & * & * & * & * \end{bmatrix}.$$

Sabemos que U no puede tener más de r columnas l.i. (justificar). Veremos que las r columnas pivots de U son l.i. y por lo tanto, el número máximo de columnas l.i. de U es r.

$$U = \begin{bmatrix} \odot & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \odot & * & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \odot & * & * & * & * \end{bmatrix} = [B, N]$$

Sea B la submatriz $r \times r$ de U correspondiente a las r primeras columnas pivots. Observar que B es una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal. Por lo tanto, los vectores columna de B son l.i.(justificar).
Hemos probado que las columnas pivots de U son l.i..

Queremos probar ahora que los r vectores fila de U son l.i.. Utilizando el lema anterior, si los vectores filas de B son l.i. también lo serán los vectores filas de U (justificar). Nuevamente, como B es triangular, sabemos que sus vectores fila son l.i.(justificar). Por lo tanto, el número máximo de filas l.i. de U es r.
Recordar: lo demostrado para U sin filas nulas y siendo las columnas pivots las r primeras vale para toda matriz escalonada.

Hemos probado:
Lema: Si U es una matriz escalonada, el número máximo de filas l.i. coincide con el número máximo de columnas l.i. y ese número es r, el rango de U. Más aún, sus r vectores columna pivots son l.i. y sus r vectores fila pivots son l.i..

Veremos que este resultado se extiende a cualquier matriz A.

Lema: Sean $U = \{v^j : j = 1, \ldots, k\} \subset \mathbb{R}^n$, w^1 una combinación lineal de los vectores de U con el coeficiente correspondiente a v^1 no nulo y $W = (U \setminus \{v^1\}) \cup \{w^1\}$.
Entonces, los vectores de U son l.i. si y solo si los vectores de W son l.i..

Prueba:
Sea $w^1 = \sum_{j=1}^{k} \beta_j v^j$, con $\beta_1 \neq 0$.
Supongamos que los vectores de U son l.i. y consideremos una combinación lineal de los elementos de W que nos dé el vector nulo.
Tenemos

$$0 = \alpha_1 w^1 + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j = \alpha_1 \sum_{j=1}^{k} \beta_j v^j + \sum_{j=2}^{k} \alpha_j v^j = \alpha_1 \beta_1 v^1 + \sum_{j=2}^{k} (\alpha_1 \beta_j + \alpha_j) v^j.$$

Como los vectores de U son l.i. entonces $\alpha_1 \beta_1 = 0$ y $\alpha_1 \beta_j + \alpha_j = 0$ para todo $j = 2, \ldots, k$. Como $\beta_1 \neq 0$, tenemos $\alpha_1 = 0$ y por lo tanto $\alpha_j = 0$ para todo $j = 2, \ldots, k$.

Prueba:(continuación)

Recíprocamente, supongamos que los vectores de W son l.i. y consideremos una combinación lineal de los vectores de U que dé el vector nulo, esto es, $\sum_{j=1}^{k}\alpha_j v^j = 0$. Como $w^1 = \sum_{j=1}^{k}\beta_j v^j$, con $\beta_1 \neq 0$, resulta

$$v_1 = \frac{1}{\beta_1}(w^1 - \sum_{j=2}^{k}\beta_j v^j).$$

Entonces:

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j v^j = \alpha_1 v^1 + \sum_{j=2}^{k}\alpha_j v^j = \frac{\alpha_1}{\beta_1}(w^1 - \sum_{j=2}^{k}\beta_j v^j) + \sum_{j=2}^{k}\alpha_j v^j =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\beta_1}w^1 + \sum_{j=2}^{k}(\alpha_j - \frac{\alpha_1\beta_j}{\beta_1})v^j = 0.$$

Como los vectores en W son l.i., $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = 0$ y $\alpha_j - \frac{\alpha_1\beta_j}{\beta_1} = 0$ para todo $j = 2, \dots, k$. Entonces, $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, k$, resultando los vectores de U l.i.. $\square$

El lema anterior nos dice que si en un conjunto de vectores cambiamos uno de sus elementos por una combinación lineal de ellos, donde el vector a sustituir participe con coeficiente no nulo, el *tipo de dependencia* entre los elementos del conjunto no se modifica.

Podemos probar entonces:

Teorema:
En toda matriz, el número máximo de vectores columna l.i. coincide con el número máximo de filas l.i.. Más aún, ese número es el rango de la matriz.

Prueba:
Basta probar que un conjunto de vectores fila (resp. columna) de una matriz son l.i. si y solo si el conjunto de sus correspondientes vectores fila (resp. columna) de su forma escalonada también lo lo son. Analizamos primero los vectores fila.

Prueba: (continuación)
Para llevar a una matriz A a su forma escalonada U, en cada paso del método de eliminación de Gauss se realiza una permutación o una operación elemental entre dos filas. Claramente, las permutaciones de filas no cambian la relación de dependencia entre los vectores. Por otro lado, la operación elemental reemplaza un vector fila (A_i) por otro que es combinación lineal de él y la fila pivot ($A_i + \alpha A_j$). Como en esta combinación lineal el coeficiente de la fila a reemplazar (A_i) es no nulo (es 1), por el lema anterior, no cambia la dependencia lineal de los vectores fila. Por lo tanto, si un conjunto de vectores fila de A son l.i. también lo son los correspondientes vectores filas de U. Recíprocamente, para obtener a A desde U también realizamos permutaciones y operaciones elementales. Por lo tanto, todo conjunto de vectores filas de A es l.i. si y solo si sus correspondientes vectores fila en U son l.i..

Prueba: (continuación)
Por lo visto para matrices escalonadas, hemos probado que el número máximo de filas l.i. de cualquier matriz A es su rango. Más aún, las r filas pivots de A son l.i..

Analicemos ahora la lineal independencia de vectores columnas de una matriz A.
Sea T una submatriz de k columnas de A. Sabemos que los vectores columnas de T son l.i. si y solo si $N(T) = \{0\}$.

Sea E la matriz inversible producto de permutaciones y matrices elementales que lleva a A a su forma escalonada U, o sea, $EA = U$.

Sea $T' = ET$ y T'' la submatriz $s \times k$ de T' correspondiente a sus filas no nulas. Claramente, $s \leq r$ (justificar). Además, $N(T) = N(T') = N(T'')$ (justificar). Analicemos $N(T'')$.

Si $k > r$, entonces $k > s$ y $N(T'') \neq \{0\}$ (justificar). Por lo tanto, si $k > r$, los vectores columna de T son l.d..

Prueba: (continuación)
Hemos probado que A puede tener a lo sumo r columnas l.i.. Veremos que los r vectores columna pivots son l.i. y por lo tanto, el número máximo de vectores columnas l.i. de A es r.

Sea ahora T la submatriz correspondiente a las r columnas pivots de A. Queremos probar que los vectores columna de T son l.i. o, equivalentemente, $N(T) = \{0\}$.

Sabemos que si $T' = ET$ y T'' se obtiene borrando a T' sus filas nulas, T'' es una matriz triangular sin ceros en la diagonal y por lo tanto sus columnas son l.i.. Esto es $N(T'') = \{0\}$. Como $N(T) = N(T'')$, las r columnas pivots de A son l.i..(justificar). $\square$

Observación: Dado un conjunto U de k vectores de $\mathbb{R}^n$, determinar el número máximo de vectores l.i. en U es equivalente a calcular el rango de una matriz cuyos vectores fila o vectores columnas sean los elemento de U.

Veamos algunas propiedades más de la lineal independencia en cualquier espacio vectorial que serán de utilidad en lo que sigue.

Lema: Sea $(V,\oplus,\odot)$ un espacio vectorial. Sea $U=\{v^1,\dots,v^k\}$ un conjunto de vectores l.i. de V. Entonces:

1. El número máximo de vectores l.i. en $\langle U\rangle$ es k.
2. Para todo $U'\subset U$, los vectores de U' son l.i..
3. Sea $W=\{w^1,\dots,w^p\}$ un conjunto de vectores l.i. de V, con $p>k$. Entonces, existe $j\in\{1,\dots,p\}$ tal que $U\cup\{w^j\}$ es un conjunto de vectores l.i..

Ejercicio: Probar los dos primeros ítems del lema anterior.

Prueba del ítem 3: Como $|W|=p>k$ y el número máximo de vectores l.i. que puede haber en $\langle U\rangle$ es k, existe $w^j\in W$ tal que $w^j\notin\langle U\rangle$.

Entonces, los vectores de $U\cup\{w^j\}$ son l.i. (justificar). Ayuda: probar que si los vectores de $U\cup\{w^j\}$ son l.d. entonces $w^j\in\langle U\rangle$.

$\square$

Definición: Dado un espacio vectorial $(V,\oplus,\odot)$ sobre $\mathbb{K}$ y un subconjunto U de V, decimos que U es un *conjunto generador de* V si $\langle U\rangle = V$.

Nos preguntamos ahora qué condiciones deben darse para que un conjunto generador U de V sea un *generador minimal*, esto es, para que no exista un subconjunto propio U' de U tal que $\langle U'\rangle = V$. La independencia lineal juega un rol importante en esta pregunta.

Lema: Dado un espacio vectorial $(V,\oplus,\odot)$ sobre $\mathbb{K}$, todo conjunto generador minimal de V es un conjunto de vectores l.i..

Prueba: Ejercicio. (Ayuda: basta probar que si U un subconjunto de vectores l.d. de V, entonces, existe $u\in U$ tal que $\langle U\setminus\{u\}\rangle = \langle U\rangle$).

Además tenemos que vale la recíproca:

Ejercicio: Dado un espacio vectorial $(V,\oplus,\odot)$ sobre $\mathbb{K}$, todo conjunto generador de V cuyos elementos son l.i. es un conjunto generador minimal.

Tenemos la siguiente definición:

Definición: Dado un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$, una *base de* V es un conjunto generador de V cuyos vectores son l.i..

Tenemos entonces que todas las bases de un espacio vectorial son conjuntos generadores minimales.

Ejemplos:

1. $\mathbb{R}^n$ los vectores canónicos e_k, con $k = 1, \ldots, n$ son una base de $\mathbb{R}^n$. Pero no es la única...

2. Dada cualquier matriz no singular $n \times n$, sus vectores columna constituyen una base de $\mathbb{R}^n$. Justificar.

Ejemplos: (continuación)

3. Sea $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por definición, los vectores columna de U son un espacio generador de su espacio columna, $C(U)$. Sin embargo, no son base ya que no son l.i. (justificar). ¿Conocemos una base de $C(U)$?

4. Es fácil ver que las funciones $f^{(k)}(x) = x^k$ con $k = 0, \ldots, n$ definen una base del espacio vectorial $V = \{polinomios\ de\ grado\ a\ lo\ sumo\ n\} \cup \{\text{polinomio nulo}\}$.

¿Las bases son siempre conjuntos finitos?

5. Si V es el espacio vectorial de todos los polinomios a coeficientes reales (sin acotar el grado de los mismos) necesitaremos todas las potencias no negativas para generarlo. En efecto, $\{f^k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ es una base de V.

Hemos visto que un espacio vectorial puede tener más de una base. Más aún, si $\mathbb{K}$ es infinito, a partir de una base de V podemos construir infinitas bases de V.

Lema: Sea B una base del espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$ y $v \in B$. Sea w una combinación lineal de vectores de B en los que el coeficiente asociado a v es no nulo. Entonces $(B \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ es una base de V.
Prueba: Ejercicio.

Observemos que todas las bases construidas usando el lema anterior tienen el mismo cardinal. Nos preguntamos:

¿Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo cardinal?

Veremos que si un espacio vectorial tiene una base finita, todas sus bases tienen el mismo cardinal, como lo establece el próximo resultado:

Lema: Si $U = \{v^i : i = 1, \ldots, n\}$ y $W = \{w^j : j = 1, \ldots, m\}$ son bases de un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{R}$ entonces $m = n$.

Prueba: Sin pérdida de generalidad supongamos que $m \leq n$. Como W es un conjunto generador de V, para todo $i = 1, \ldots, n$ existen $a^i_j \in \mathbb{R}$ con $j = 1, \ldots, m$, tales que

$$v^i = \sum_{j=1}^{m} a^i_j w^j.$$

Como los vectores de U son l.i. tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \; \forall i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a^i_j w^j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a^i_j \right) w^j. \tag{2}$$

Prueba: (continuación)
Como los vectores de W son l.i., usando (2), resulta

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_j^i = 0 \; \forall j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Juntando las condiciones (1) y (3) tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_j^i = 0 \; \forall j = 1, \ldots, m \Leftrightarrow \alpha_i = 0 \; \forall i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Sea A la matriz $m \times n$ tal que, para todo $i = 1, \ldots, n$, su vector columna A^i es $(a_1^i, \ldots, a_m^i)^T$. La condición (4) es equivalente a afirmar $N(A) = \{0\}$. Por lo tanto, $n \leq m$ (justificar). Por lo tanto, $n = m$. $\square$

Todas las bases tienen el mismo cardinal.

Definición: Llamamos *dimensión* de un espacio vectorial al cardinal de sus bases.

Tenemos los siguientes resultados.

Lema: Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea U un subconjunto de k elementos de V. Entonces:

1. Si los vectores de U son l.i. y $k \leq n$ entonces existe una base $\mathscr{B}$ de V tal que $U \subset \mathscr{B}$. (Obs: si $k = n$ entonces $\mathscr{B} = U$.)
2. Si U es un conjunto generador de V y $k \geq n$ entonces existe una base $\mathscr{B}$ de V tal que $\mathscr{B} \subset U$. (Obs: si $k = n$ entonces $\mathscr{B} = U$.)

Prueba: Ejercicio.

De los resultados anteriores podemos concluir que las bases de un espacio vectorial son *conjuntos l.i. maximales* y a su vez, *conjuntos generadores minimales*.

Dada una matriz A a coeficientes reales $m \times n$ definimos los espacios vectoriales $C(A) \subset \mathbb{R}^m$ y $N(A) \subset \mathbb{R}^n$. Así como el espacio $C(A)$ es el generado por los vectores columna de A, resulta natural definir el *espacio fila* de A como el generado por sus vectores filas.
Observación: el *espacio fila* de A no es más que $C(A^T) \subset \mathbb{R}^n$, el espacio columna de A^T.

Para completar los *cuatro espacios fundamentales* asociados a una matriz A, definimos el *espacio nulo a izquierda* de A como $N(A^T) \subset \mathbb{R}^m$.

Observación
$y \in N(A^T) \Longleftrightarrow A^T y = 0 \Longleftrightarrow y^T A = 0$

Ya hemos conversado *informalmente* acerca de la *dimensión* de $C(A)$ y $N(A)$. Ahora estamos en condiciones de hacer el análisis formal de la dimensión de estos dos espacios y también de los asociados a su traspuesta.

Recordar que, si A es una matriz $m \times n$ entonces $C(A) \subset \mathbb{R}^m$ y $N(A) \subset \mathbb{R}^n$. Ahora también tenemos $C(A^T) \subset \mathbb{R}^n$ y $N(A^T) \subset \mathbb{R}^m$.

Otro Teorema importante Sea A una matriz $m \times n$ de rango r. Entonces:

1. $dim\ C(A) = dim\ C(A^T) = r$,
2. $dim\ N(A) = n - r$,
3. $dim\ N(A^T) = m - r$.
4. $dim\ C(A) + dim\ N(A^T) = m$,
5. $dim\ C(A^T) + dim\ N(A) = n$.

Prueba:
Sabemos que $C(A)$ y $C(A^T)$ son generados, respectivamente, por los vectores columna y los vectores fila de A. Además, ya hemos probado que el número máximo de vectores columna y de vectores fila l.i. de A es su rango r. Por lo tanto, los r vectores columnas l.i. y los r vectores fila l.i. son bases de estos espacios y la dimensión de $C(A)$ y de $C(A^T)$ es r.

Prueba (continuación):
Si analizamos ahora a $N(A)$, vimos que las soluciones especiales del sistema $Ax = 0$ son l.i. y generan a $N(A)$. Por lo tanto, $N(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $n - r$, el número de soluciones especiales (una por cada variable libre).
Observar que hemos probado también que, para toda matriz, $dim\, C(A) + dim\, N(A) = n$, con n el número de columnas de la matriz.
Si aplicamos lo anterior a A^T, tenemos que $dim\, C(A^T) + dim\, N(A^T) = m$.
Como $dim\, C(A^T) = r$, obtenemos $dim\, N(A^T) = m - r$.

□

Observación importante: Si bien $C(A)$ y $C(A^T)$ son dos espacios vectoriales de la misma dimensión, ambos *viven* en espacios diferentes. Recordar que su A es $m \times n$.

Ejemplo: Si A es una matriz 3×5 de rango 2, $C(A^T)$ es un espacio de 2-dimensional en $\mathbb{R}^5$ mientras que $C(A)$ es un plano en $\mathbb{R}^3$.

En esta clase hemos probado (entre otras cosas):

Teorema fundamental del Álgebra Lineal (Parte I)

En toda matriz, el número de vectores fila linealmente independientes coincide con el número de vectores columna linealmente independientes.
Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, el número de filas (o columnas) l.i. de A es su rango r y la dimensión del espacio de soluciones del sistema $Ax = 0$ es $n - r$.

Definición: Dada A una matriz $m \times n$, decimos que B es *una inversa a izquierda de* A si $B\,A = I_n$[1]. Decimos que C es *una inversa a derecha de* A si $A\,C = I_m$.

Vimos que si A tiene inversa a derecha B e inversa a izquierda C, entonces A es cuadrada, inversible y $B = C = A^{-1}$. Por lo tanto, todas las matrices singulares o no cuadradas tendrán a lo sumo una inversa lateral. Nos preguntamos: ¿cuándo una matriz $A,\ m \times n$ tiene inversa a izquierda o inversa a derecha?
Una *respuesta rápida* a esta pregunta es: "cuando el rango de A sea lo más grande posible".

¿cuál es el máximo valor que puede tener el rango de una matriz $m \times n$?

Claramente, $rg(A) \leq m$ y $rg(A) \leq n$. Por lo tanto, $rg(A) \leq min(m,n)$[2].

[1] Para todo n, I_n denota la matriz identidad $n \times n$

[2] $rg(A)$ denota el rango de A

Definición: Decimos que una matriz $A,\ m \times n$ es *de rango completo* si $rg(A) = \text{mín}(m,n)$.

Ejercicio: Probar que, para todo $m,n \in \mathbb{Z}_+$, existen matrices $m \times n$ de rango completo.

Nos encaminamos a probar que las matrices que tienen inversa a derecha o a izquierda son matrices de rango completo.

Observación: Una matriz cuadrada de rango completo es una matriz no singular y tiene inversa a derecha **y también** inversa a iquierda.

Analicemos primero las matrices A de rango completo tales que $rg(A) = m \leq n$. Veremos que estas matrices tienen inversa a derecha, o sea, existe C, matriz $n \times m$, tal que $AC = I$.

Ejercicio: Sea A matriz $m \times n$ tal que $rg(A) = m$. Entonces, $C(A) = \mathbb{R}^m$.

Con el resultado del ejercicio anterior podemos probar:

Lema: Sea A matriz $m \times n$ tal que $rg(A) = m$. Entonces, A tiene inversa a derecha.

Prueba: Sabemos que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene solución para todo $b \in \mathbb{R}^m$. En particular, si C^i es una solución del sistema $Ax = e^i$ (con e^i el i-esimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$), la matriz C que tiene por i-esimo vector columna a C^i es inversa a derecha de A.

Observación: Si $m < n$, la inversa a derecha no es única. Justificar.

Veamos qué pasa con la inversa a derecha si $rg(A) = n < m$. ¿Puede existir? Siguiendo el mismo razonamiento que antes, la columna i-ésima de C debería ser solución del sistema $Ax = e^i$, para $i = 1, \ldots, m$. ¿Es posible que todos esos sistemas tengan solución?

Ejercicio: Si A es una matriz $m \times n$ con $rg(A) = n$ y $n < m$, entonces A no tiene inversa a derecha.

¿Tendrán inversa a izquierda?

Sea A es una matriz $m \times n$ con $rg(A) = n$ y $n < m$. Entonces A^T es $n \times m$ y tiene inversa a derecha C, o sea, $A^T C = I_n$. Entonces,

$$C^T A = (A^T C)^T = I_n^T = I_n$$

y resulta $B = C^T$ es una inversa a izquierda de A.

Veamos algunas consecuencias que se derivan de las inversas a derecha e izquierda referidas a los conjuntos solución de sistemas que involucran matrices de rango completo.
Recordemos primero que si $n < m$, $C(A)$ no coincide con $\mathbb{R}^m$ y por lo tanto existen vectores $b \in \mathbb{R}^m$ tales que el sistema $Ax = b$ no tiene solución. En el caso en que $rg(A) = m$, $C(A) = \mathbb{R}^m$ y el sistema siempre tiene al menos una solución.

Lema: Sean A matriz $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

1. Si $rg(A) = n$ y el sistema $Ax = b$ tiene solución, entonces esa solución es única.
2. Si $rg(A) = m$ entonces el sistema $Ax = b$ tiene una o infinitas soluciones.

Observemos entonces que las matrices de rango completo siempre nos aseguran existencia o unicidad de los sistemas que las tienen como matriz de coeficientes. El único caso en que ambas cosas pueden darse a la vez es en el caso en que la matriz sea cuadrada y, por ende no singular.

¿Cómo obtenemos las inversas laterales?

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$. Tenemos que A es 2×3 y $rg(A) = 2$. Por lo tanto A tiene inversa a derecha.

Es fácil chequear que, para cualquier valor de c_{31} y de c_{32}, $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$ es inversa a derecha de A.

La transpuesta de A nos da un ejemplo de una matriz con infinitas inversas a izquierda. Justificar.

La *mejor inversa* (a derecha o a izquierda) es aquella donde los valores arbitrarios están en cero, y la llamamos *pseudo-inversa* (a derecha o izquierda) de A.

¿Podemos expresar las pseudo-inversas de A (en caso de existir) en términos de A?

Dada una matriz A $m \times n$, AA^T y A^TA son matrices cuadradas $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente. Más adelante veremos que si $rg(A) = n$, entonces A^TA es inversible. Similarmente, AA^T es inversible si $rg(A) = m$. Es fácil verificar que, si las inversas mencionadas existen, entonces

$$B = (A^TA)^{-1}A^T \quad \text{y} \quad C = A^T(AA^T)^{-1}$$

son, respectivamente, inversas a izquierda y derecha de A. Ejercicio. También es posible probar que ambas son las pseudo-inversas de A, pero lo dejaremos para más adelante.

Ejercicios:

1. Encontrar una inversa a izquierda y/o una inversa a derecha (cuando existan) para las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

2. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ y supongamos que las columnas de A son linealmente independietes.
    1. ¿Cuál es el rango de A?
    2. ¿Cuál es el espacio nulo de A?
    3. ¿Se puede asegurar la existencia de inversa a izquierda o derecha de A? Justificar.

(3) Encuentre el error en la demostración del siguiente enunciado: si B es una inversa a derecha de A, matriz $n \times n$, entonces B es inversa a izquierda de A.

Demostración: Como B es inversa a derecha de A entonces $AB = I_n$. Así:

$$AB = I_n \Longrightarrow A^T(AB) = A^T \Longrightarrow (A^T A)B = A^T.$$

Entonces, premultiplicando por $(A^T A)^{-1}$ tenemos:

$$B = (A^T A)^{-1} A^T \Longrightarrow BA = (A^T A)^{-1} A^T A$$

O sea,

$$BA = (A^{-1}(A^T)^{-1})A^T A = A^{-1}((A^T)^{-1} A^T)A = I_n.$$

Como $BA = I$, entonces B es una inversa a izquierda de A. □

(4) Determine la si las siguiente proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique.

1. Toda matriz cuadrada tiene al menos una inversa lateral.
2. Existen matrices cuadradas no inversibles, que tienen inversa a izquierda.
3. Si A es $n \times n$ y existe C tal que $AC = I_n$, entonces A es inversible.

(5) En cada caso, determinar si las matrices tienen o no alguna inversa lateral. En caso de tenerla, encontrar las pseudo-inversas laterales correspondientes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$