

Notas de clase

Este material está sujeto a correcciones, comentarios y demostraciones adicionales durante el dictado de las clases, no se recomienda su uso a aquellos alumnos que no concurren a las mismas

Prof. Nora Arnesi

Variables aleatorias unidimensionales

En muchas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos s del espacio muestral S . Esto es $x=X(s)$ es el valor de una función X del espacio muestral S a los números reales.

Definición: Sea ε un experimento y S el espacio muestral asociado con el experimento. Una función X que asigna a cada uno de los elementos $s \in S$, un número real $X(s)$, se llama variable aleatoria

Recordar!!

Se arroja la moneda dos veces y se observa el lado visible

$$S=\{CC, CX, XC, XX\}$$

Se define la variable aleatoria

X : número de caras obtenidas en los dos lanzamientos

$$X(CC)=2, X(CX)=X(XC)=1 \text{ y } X(XX)=0$$

Importante!!

La exigencia básica de una función univariada es que a cada elemento $s \in S$ le corresponde exactamente un valor $X(s)$.

Valores diferentes de s pueden dar el mismo valor de $X(s)$.

Por ejemplo $X(CX)=X(XC)=1$

Variable aleatoria (impresión mayúscula)

Más definiciones....

El espacio R_x es el conjunto de todos los valores posibles de X y se lo suele denominar *recorrido*.

Si $R(s)=s$ se tiene que $S=R_x$

Definición:

Sea ε un experimento y S el espacio muestral asociado con el experimento.

Sea X una variable aleatoria definida en S y sea R_x su recorrido.

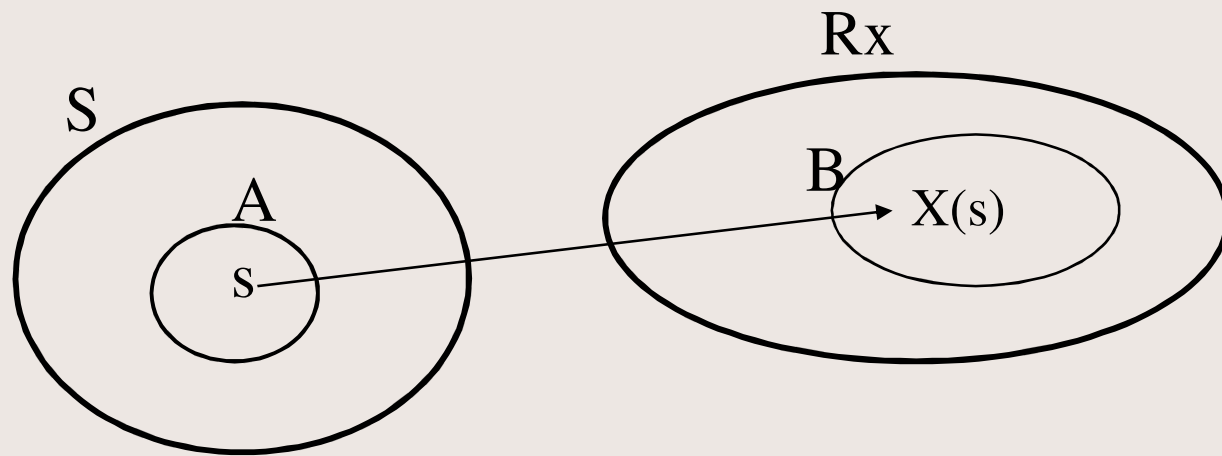
Sea B un suceso respecto a R_x , esto es $B \subset R_x$.

Supongamos que A se define como:

$A = \{s \in S / X(s) \in B\}$ A consta de todos los resultados S para los

cuales $X(s) \in B$. En este caso se dice que A y B son sucesos equivalentes

Sucesos equivalentes



Siempre que A ocurre, B ocurre y viceversa

Cuál es la Probabilidad de B?

Sea B un suceso en el Rx. Se define $P(B)$ como:

$$P(B)=P(A), \text{ en donde } A=\{s \in S / X(s) \in B\}$$

Es decir se define la $P(B)$ igual a la probabilidad del suceso $A \subset S$, que es equivalente a B

Variable aleatoria discreta

Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de X (esto es R_X) es finito o infinito numerable, llamamos a X una *variable aleatoria discreta*.

El R_X consta de un número de valores x_1, x_2, \dots , en el caso finito termina con x_n y en el caso infinito numerable la lista continúa indefinidamente.

Sea X una variable aleatoria discreta, R_X consta a lo sumo de un número de valores infinito numerable, x_1, x_2, \dots . Con cada resultado posible x_i asociamos

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

Los números $p(x_i)$ $i=1, 2, \dots$ deben satisfacer las condiciones

Condiciones....

(a) $p(x_i) \geq 0 \quad \forall \quad i$

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

La función p definida se denomina

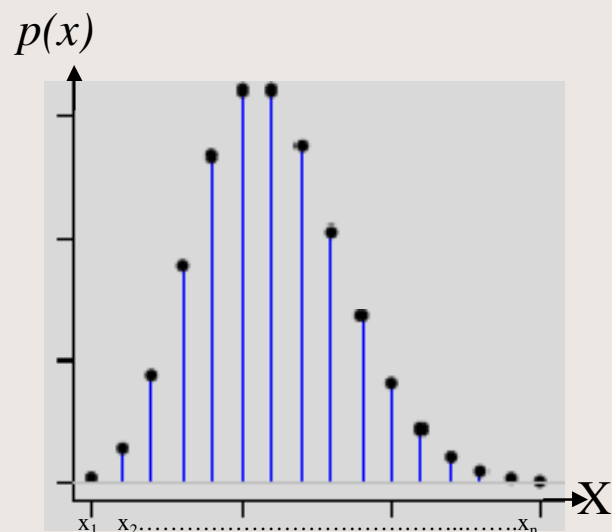
función de probabilidad puntual de la variable aleatoria X .

La colección de pares $(x_i, p(x_i))$, $i=1,2,\dots$, generalmente se denomina

distribución de probabilidad de X .

Observaciones

- $p(x_i) = P(s/X(s) = x_i) \dots$ Sin embargo en general sólo vamos a estar interesados en los valores de X , es decir R_X , y en sus probabilidades asociadas.
- Si X sólo toma un número finito de valores, x_1, x_2, \dots, x_N entonces $p(x_i) = 0 \quad \forall i > N$
- La interpretación geométrica resulta útil:



Sea B un suceso asociado con la variable aleatoria X . Esto es $B \subset \mathbb{R}^x$. Específicamente, supongamos que $B = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots\}$

$$P(B) = P[s/X(s) \in B] = P[s/X(s) = x_{ij}, j=1,2,\dots] = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{ij})$$

En palabras.....

La probabilidad de un suceso B es igual a la suma de las probabilidades

Ejemplo:

Considere el experimento de arrojar dos dados y defina la variable aleatoria

X : la suma de los valores de las dos caras visibles

A trabajar!!!

- a. Detalle el espacio muestral correspondiente al experimento de arrojar dos dados y anotar los números que salen.
- b. Escriba la distribución de frecuencias de X , es decir la lista de valores posibles de X y sus respectivas probabilidades.
- c. Represente dicha distribución a través de un gráfico de bastones
- d. Cuál es la probabilidad de obtener 7 u 11 en la próxima tirada?
- e. Cuál es la probabilidad de obtener una suma de al menos 3 en la próxima tirada?
- f. Cuál es la probabilidad de obtener una suma de a lo sumo 5 en la próxima tirada?

Observaciones

- ✓ Supongamos que la variable aleatoria discreta X toma sólo un número finito de valores, por ejemplo x_1, x_2, \dots, x_N

Si cada resultado es igualmente probable, se tiene:

$$p(x_1) = p(x_2) = \dots = p(x_N) = 1/N$$

- ✓ Si X toma un número infinito numerable de valores, entonces es imposible tener todos los resultados igualmente probables
- ✓ En todo intervalo finito habrá a lo sumo un número finito de valores posibles de X . si uno de tales intervalos no contiene ninguno de los valores posibles se le asigna probabilidad cero.

Valores característicos

Con cada distribución de probabilidades se puede asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca de la distribución.

Definición:

- Si X es una variable aleatoria discreta con posibles valores $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$
- Sea $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$

Esperanza matemática

- El valor esperado de X (esperanza matemática de X), denotada por $E(X)$ se define como :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Si X toma un número finito de valores, la expresión $E(X)$, se puede considerar como un promedio ponderado de los valores de X . Si todos los valores son igualmente probables, $E(X)$ representa el promedio ordinario o media aritmética de los n valores posibles.

Propiedades

- Si $X=C$ donde C es una constante, entonces

$$E(X)=C$$

- Si C es una constante y X es una variable aleatoria, entonces

- $$E(CX)=CE(X)$$

- Sean X e Y dos variables aleatorias cualesquiera, entonces

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

A pensar!!

- Si se lanza un dado regular y la variable aleatoria X designa el número que sale, ¿cuál es la esperanza matemática de la dicha variable?
-
- !! $E(X)$ no es el resultado que esperamos obtener!!!, ni siquiera es un valor posible!!!
- ...y la Esperanza matemática de la variable X : suma de los valores de dos dados?

Variancia de una variable aleatoria

- Sea X una variable aleatoria. Definimos la variancia de X , denotada con $V(X)$ o σ_x^2 , como sigue:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2$$

La raíz cuadrada positiva de $V(X)$ se llama desviación estándar de X y se simboliza σ_x

Más simple: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

A pensar!!

¿Cuál es la variancia de la variable aleatoria
 X : suma de los valores de dos dados?

Propiedades

- Si C es una constante,

$$V(X+C)=V(X)$$

$$V(CX)=C^2 V(X)$$

- Sean X_1, X_2, \dots, X_n n variables aleatorias independientes. Entonces

$$V(X_1+X_2+\dots+X_n)= V(X_1)+V(X_2)+\dots+V(X_n)$$

Distribución Binomial

Sea ε un experimento y A un suceso asociado con ε .
Supongamos que

$$P(A)=p \quad \therefore \quad P(\bar{A})=1-p=q$$

Consideremos n repeticiones independientes de ε

El espacio muestral consiste en todas las
sucesiones posibles $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

donde cada a_i es A o \bar{A} según que A o \bar{A}
ocurra en la i -ésima repetición de ε

Distribución binomial

Supongamos que $P(A)=p$ es la misma para todas las repeticiones.

Se define la variable aleatoria X como:

X : *número de veces que ocurrió el suceso A en la n repeticiones del experimento \mathcal{E}*

X una variable aleatoria Binomial con parámetro n y p

$$X \sim B(n,p)$$

Las repeticiones individuales de \mathcal{E} se llamarán ensayos Bernoulli

Distribución binomial

- Si X es una variable binomial basada en n repeticiones

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Ejemplo:

Supongamos que el próximo examen de Prob y Est consiste de 4 preguntas de elección múltiple. Cada pregunta tiene tres posibles respuestas.

Supongamos que un estudiante va a adivinar cada una de las preguntas independientemente.

Estudio o adivino???

La probabilidad de contestar correctamente la primer pregunta es $1/3$. La probabilidad de contestar correctamente la segunda pregunta también es $1/3$ y.... la tercera y la cuarta!

X: número de respuestas correctas entre 4

$X \sim Bi (n=4, p=1/3)$

$$P(X=0)=(2/3)^4$$

$$P(X=4)= (1/3)^4$$

$$P(X=1)= .?$$

$$P(X=2)= .?$$

$$P(X=3)= .?$$

Valores característicos de una variable aleatoria con distribución Binomial

- Sea X una v.a. distribuida binomialmente con parámetro p , basada en n repeticiones de un experimento.

Entonces

$$E(X)=np$$

$$Var(X)=np(1-p)$$

Propuesta: verifique el resultado anterior

La distribución de Poisson

- Sea X una v.a. que toma los valores posibles $0, 1, \dots, n, \dots$. Si

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots, n, \dots$$

Decimos que X tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$.

Propuesta: verifique que si X es una v.a. con distribución de Poisson $E(X)=\lambda$ y $Var(X)=\lambda$

La distribución de Poisson como aproximación de la distribución binomial

- Sea X una v.a. distribuida binomialmente con parámetro p , basada en n repeticiones del experimento. Suponga que $n \rightarrow \infty$, $np \rightarrow \lambda$ (constante), o equivalentemente $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ tal que $np \rightarrow \lambda$. Bajo estas condiciones se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

La distribución de Poisson con parámetro λ

En palabras....

Podemos aproximar las probabilidades binominales con probabilidades de la distribución de Poisson siempre que el n sea grande y p pequeño.

- **Ejercicio:** en una intersección de dos calles la probabilidad que un automóvil tenga un accidente es muy escasa, $p=0.0001$. Sin embargo, en cierta parte del día (entre las 10 y 12 de la mañana) un gran número de autos pasan por esa intersección, se calcula que aproximadamente circulan 1000 autos. Cuál es la probabilidad de que dos o más accidentes ocurran durante ese período? Rta:0.0045

La distribución Geométrica

X : el número de repeticiones necesarias hasta incluir la primera ocurrencia de A
 X toma valores $1, 2, \dots$

$$P(X = k) = q^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Propuesta: verificar que si X tiene una distribución geométrica

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad y \quad V(X) = \frac{q}{p^2}$$

A pensar!!!.....

- Si la probabilidad de que cierto examen dé una reacción “positiva” es igual a 0.4, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran menos de 5 reacciones “negativas” antes de la primera positiva?

$$P(X = k) = (0.6)^{k-1} (0.4) \quad k = 1, 2, \dots$$

$$P(X < 5) = \sum_{k=1}^5 (0.6)^{k-1} (0.4)$$

Distribución de Pascal

Supongamos que un experimento se continúa hasta que un suceso particular A ocurre por *r -ésima* vez.

Si $P(A) = p$ y $P(\bar{A}) = 1 - p = q$

Se define Y : número de repeticiones necesarias a fin de que A ocurra exactamente r veces

$$P(Y = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} \quad k = r, r+1, \dots \quad \langle\langle * \rangle\rangle$$

A pensar!!.....

- A qué se reduce la expresión «*» si $r=1$?
- Compruebe que «*» verifica las condiciones necesarias para ser considerada una distribución de probabilidad

- Sean

Z_1 : número de repeticiones necesarias hasta incluir la primera ocurrencia de A

Z_2 : número de repeticiones necesarias entre la primera ocurrencia de A hasta incluir la segunda ocurrencia de A

Z_r : número de repeticiones necesarias entre la $r-1$ ocurrencia hasta incluir la r -ésima primera ocurrencia de A

Z_i son variables aleatorias independientes, cada una con una distribución geométrica. Además $Y=Z_1+Z_2+\dots+Z_r$

Verifique que

$$E(Y) = \frac{r}{p} \quad V(Y) = \frac{rq}{p^2}$$

A pensar!!

- La probabilidad de un lanzamiento exitoso es igual a 0.8. Supongamos que se hacen ensayos de lanzamientos hasta que han ocurrido tres exitosos. Cuál es la probabilidad que sean necesarios 6 intentos?. Cuál es la probabilidad que sean necesarios menos de 6 lanzamientos?

Relación entre las distribuciones binomial y de Pascal

- Sea X una distribución binomial con parámetros n y p . (X : número de éxitos en n ensayos Bernoulli, con $P(\text{éxito})=p$).
- Sea Y una distribución de Pascal con parámetros r y p . (Y : número de ensayos Bernoulli necesarios para obtener r éxitos con $P(\text{éxito})=p$)

$$a) \quad P(Y \leq n) = P(X \geq r)$$

$$b) \quad P(Y > n) = P(X < r)$$

Ejemplo!

Deseamos calcular la probabilidad de que más de 10 repeticiones sean necesarias para obtener el tercer éxito cuando $p=0.2$

$$P(Y > 10) = P(X < 3) = \sum_{k=0}^2 \binom{10}{k} 0.2^k 0.8^{10-k} = 0.678$$

La distribución Hipergeométrica

- Tenemos un lote de N artículos, de los cuales r son defectuosos y $(N-r)$ no son defectuosos. Se escogen al azar n artículos del lote ($n \leq N$), sin sustitución.
- Sea X el número de artículos defectuosos encontrados.

$X=k$ sí y sólo sí se obtienen exactamente k defectuosos de los r defectuosos del lote y exactamente $(n-k)$ no defectuosos de los $(N-r)$ no defectuosos del lote

Entonces???

Se dice que una v.a. discreta X tiene una *distribución hipergeométrica* si :

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Ejemplo

Se embarcan motores eléctricos pequeños en lotes de 50. Antes de que tal cargamento sea aceptado, un inspector elige 5 motores y los inspecciona. Si ninguno de los motores probados es defectuoso, el lote es aceptado. Si se encuentra que uno o más son defectuosos, se inspecciona el cargamento completo. Supongamos que hay 3 motores defectuosos en el lote. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesaria una inspección del 100% del cargamento?

solución

- X : número de motores defectuosos encontrados
- Se necesitará una inspección completa si y sólo si $X \geq 1$. Luego:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{3}{0} \binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0.28$$

Valores característicos de la *distribución hipergeométrica*

- X v.a. con distribución hipergeométrica,
- $p=r/N$, $q=1-p$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$$

$$P(X = k) \simeq \binom{n}{K} p^k (1-p)^{n-k}, \text{ para } N \text{ grande}$$

La distribución multinomial

Consideremos un experimento \mathcal{E} , su espacio muestra S , y una partición de S en k sucesos mutuamente excluyentes A_1, A_2, \dots, A_k . Considérese n repeticiones independientes de \mathcal{E} . Sea $p_i = P(A_i)$ y supóngase que p_i permanece constante durante todas las repeticiones.

Evidentemente
$$\sum_{i=1}^k p_i = 1$$

La distribución multinomial

X_i : número de veces que A_i ocurre en las n repeticiones de \mathbf{E} , $i=1,2,\dots,k$

Las X_i no son variables aleatorias independientes ya que $\sum_{i=1}^k X_i = n$

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$$

donde $\sum_{i=1}^k n_i = n$

$$E(X_i) = np_i \quad V(X_i) = np_i(1 - p_i) \quad i = 1, \dots, k$$

A pensar!!

- Los artículos que produce una máquina se pueden clasificar en cuatro grados: A, B, C y D. Se sabe que estos artículos se producen en las siguientes proporciones:

Grado A: 0.3 Grado B: 0.4

Grado C: 0.2 Grado D: 0.1

¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un artículo de cada grado en una muestra de 4 artículos seleccionados al azar de un lote de producido de la máquina?

El proceso de Poisson

Ejemplo:

Considerar una fuente radioactiva que emite partículas α .

X_t : número de partículas emitidas durante un período especificado de tiempo $[0,t)$.

Nos interesa elaborar un modelo probabilístico para la emisión de partículas α de una fuente radioactiva

$X_t: 0, 1, 2, \dots$ Sea $p_n(t) = P[X_t = n]$ $n = 0, 1, 2, \dots$

Cinco hipótesis fundamentales

- A_1 : el número de partículas emitidas durante intervalos de tiempo no sobrepuestos son variables aleatorias *independientes*
- A_2 : si X_t se define como antes y si Y_t es el número de partículas emitidas $[t_1, t_1+t]$ para cualquier $t_1 > 0$, las variables aleatorias X_t y Y_t tienen la misma distribución de probabilidades. Es decir, la distribución del número de partículas emitidas durante cualquier intervalo depende sólo de la longitud del intervalo y no de los puntos extremos

...continuamos con las hipótesis

- **A_3 :** $p_1(\Delta t)$ es aproximadamente igual a $\lambda \Delta t$, si Δt es suficientemente pequeño, donde λ es una constante positiva. Esto se escribe:

$$p_1(\Delta t) \sim \lambda \Delta t.$$

Esta hipótesis expresa que si el intervalo es suficientemente pequeño, la probabilidad de obtener exactamente una emisión durante ese intervalo es directamente proporcional a la longitud del intervalo.

...continuamos con las hipótesis

- A_4 : $\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) \sim 0$ esto implica que $p_k(\Delta t) \rightarrow 0$, $k \geq 2$

Esto significa que la probabilidad de obtener dos o más emisiones en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable.

- A_5 :
 $X_0=0$, o equivalentemente, $p_0(0)=1$.

Esto equivale a una condición inicial para el modelo

Conclusiones de las hipótesis

- Las hipótesis A_1 y A_2 juntas implican que la variable aleatoria $X_{\Delta t}$ y $[X_{t+\Delta t} - X_t]$ son variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidades.
- De las hipótesis A_3 y A_4 se puede concluir que:

$$p_0(\Delta t) = 1 - p_1(\Delta t) - \sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) \sim 1 - \lambda \Delta t \quad [1]$$

Conclusiones (cont.)

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= P[X_{t+\Delta t} = 0] \\ &= P[X_t = 0 \text{ y } (X_{t+\Delta t} - X_t) = 0] \\ &= p_0(t) p_0(\Delta t) \\ &\sim p_0(t)[1 - \lambda \Delta t] \text{ por } [1] \end{aligned}$$

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} \sim -\lambda p_0(t)$$

haciendo $\Delta t \longrightarrow 0$, se observa que el lado izquierdo es el cociente incremental de la función p_0 , por lo tanto tiende a derivada por derecha (p'_0) porque $\Delta t > 0$

Proceso Poisson

$$p_0' = -\lambda p_0(t) \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{p_0'}{p_0(t)} = -\lambda$$

Integrando en ambos miembros con respecto a t ,

$$\ln p_0(t) = -\lambda t + C, \quad C : \text{constante de integración}$$

De A_5 al hacer $t=0$, que $C=0$. Luego:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Así queda la expresión para $P[X_t = 0]$

Proceso Poisson

Ahora determinar $p_n(t)$ $n \geq 1$

$$p_n(t + \Delta t) = P[X_{t+\Delta t} = n]$$

Ahora $X_{t+\Delta t} = n$ **sí y solo sí** $X_t = x$ y $[X_{t+\Delta t} - X_t] = n - x$, $x = 0, 1, 2, \dots, n$

✓ Utilizando hipótesis A_1 y A_2

$$\begin{aligned} p_n(t + \Delta t) &= \sum_{x=0}^n p_x(t) p_{n-x}(\Delta t) \\ &= \sum_{x=0}^{n-2} p_x(t) p_{n-x}(\Delta t) + p_{n-1}(t) p_1(\Delta t) + p_n(t) p_0(\Delta t) \end{aligned}$$

Proceso Poisson

✓ Utilizando A_3 y A_4

$$p_n(t + \Delta t) \sim p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_n(t)[1 - \lambda\Delta t]$$

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} \sim \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t)$$

Haciendo $\Delta t \rightarrow 0$

Cociente diferencial de la función p_n

$$p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots [*]$$

Proceso Poisson

- Se define $q_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$

Entonces [*] se transforma en

$$q'_n(t) = \lambda q_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Dado que $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, encontramos $q_0(t) = 1$

$[q_n(0) = 0, \text{ para } n > 0]$ recursivamente

$$q'_1(t) = \lambda, \quad \therefore q_1(t) = \lambda t;$$

$$q'_2(t) = \lambda q_1(t) = \lambda^2 t \quad \therefore q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2}$$

Proceso Poisson

- En general:

$$q'_n(t) = \lambda q_{n-1}(t) \quad \therefore \quad q_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Finalmente:

$$p_n(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$