Álgebra Lineal - LM - PM - LCC **2020**

Autoevaluación Capítulo 1

Apellido, nombre y carrera:

1. Considere la eliminación Gaussiana sobre el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 5y & + & z & = & 0 \\ 4x & + & dy & + & z & = & 2 \\ & & y & - & z & = & 3 \end{array}$$

   a) ¿Qué valor de d fuerza a realizar un cambio de filas durante la eliminación?
      (A) $d = 0$.
      (B) $d = 10$.
      (C) $d = -10$.
      (D) $d = 5$.

   b) ¿Cuál es la solución del sistema para el valor de d encontrado en el ítem anterior?
      (A) El sistema no tiene solución.
      (B) $(x, y, z) = (-\frac{3}{2}, 1, -2)$.
      (C) $(x, y, z) = (\frac{3}{2}, -2, 1)$.
      (D) $(x, y, z) = (\frac{7}{2}, 1, -2)$.

   c) ¿Qué valor de d haría singular al sistema?
      (A) No existe tal valor de d.
      (B) $d = 10$.
      (C) $d = 1$.
      (D) $d = 11$.

2. Sean y y z, con $y \neq z$, soluciones del sistema $Ax = b$. ¿Cuál de las siguiente afirmaciones es verdadera?

   (A) Toda combinación lineal de y y z es solución del sistema.
   (B) No podemos asegurar que haya otras soluciones distintas de y y z.
   (C) El sistema tiene infinitas soluciones.
   (D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

3. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Sea X la matriz 3×3, solución de la ecuación matricial $AX = B$. La tercer fila de X es:

   (A) $(2, -2, 2)$.
   (B) $(1/2, -1/2, 1/2)$.
   (C) $(1/3, -1/3, 1/3)$.
   (D) $(1, -1, 1)$.

4. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   notamos con A^i la columna i de A, para $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Definimos $\tilde{A}$ la matriz 5×5 descripta por columnas de esta manera: $\tilde{A} = [A^5 A^4 A^3 A^2 A^1]$.

a) Dado $b \in \mathbb{R}^5$, sean $x = A^{-1}b$ y $z = \tilde{A}^{-1}b$. ¿Cuál de las siguientes relaciones es válida entre x y z?

(A) $x^T = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$.
(B) $x^T = (-z_1, -z_2, -z_3, -z_4, -z_5)$.
(C) $x^T = (z_5, z_4, z_3, z_2, z_1)$.
(D) $x^T = (-z_5, -z_4, -z_3, -z_2, -z_1)$.

b) Dado $b \in \mathbb{R}^5$, ¿qué método requiere menos operaciones para calcular $x = A^{-1}b$?

(A) Gauss-Jordan para calcular A^{-1} y luego multiplicar por b.
(B) Método de Eliminación de Gauss para resolver $Ax = b$.
(C) Gauss-Jordan para calcular $\tilde{A}^{-1}$, multiplicar por b y usar apartado a).
(D) Método de Eliminación de Gauss para resolver $\tilde{A}z = b$ y usar apartado a).

c) Dado $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, el vector $x = A^{-1}b$ es:

(A) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(B) $x = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(C) $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(D) $x = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

5. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 14 & 6 \end{bmatrix}$$

Recordar que con $E_{ij}(t)$, $i \neq j$, $t \neq 0$, indicamos la matriz elemental que se obtiene a partir de la identidad reemplazando su entrada nula ij por el valor t.

a) Determinar cuál de estas operaciones elementales cambia la fila $(1, 4, 1)$ por $(1, 0, 0)$:

(A) $E_{13}(-1)E_{12}(-4)A$.
(B) $E_{13}(-1)E_{12}(-\frac{1}{4})A$.
(C) $AE_{12}(-4)E_{13}(-1)$.
(D) $AE_{12}(-\frac{1}{4})E_{12}(-1)$.

b) Si realizamos una secuencia de operaciones elementales que transforma A en la matriz identidad I (3×3), y después aplicamos la misma secuencia de operaciones a I, ¿cuál es la matriz resultante?

(A) A.
(B) A^{-1}.

(C) A^2.

(D) Ninguna de las anteriores.

6. Dada la siguiente matriz simétrica A,

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

a) La eliminación Gaussiana nos lleva a la siguiente matriz triangular superior U:

(A) $U = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b & b & b \\ 0 & 0 & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$

(B) $U = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-a & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-a \end{bmatrix}.$

(C) $U = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b & b \\ 0 & 0 & c-b & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}.$

(D) $U = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{bmatrix}.$

b) ¿Qué condiciones deben verificar a, b, c, d para que A sea no singular?.

(A) $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ y $d \neq 0$.

(B) $a \neq 0, b \neq a, c \neq a$ y $d \neq a$.

(C) $a \neq 0, b \neq a, c \neq b$ y $d \neq c$.

(D) Ningunas de las tres anteriores.

c) Para valores de a, b, c y d para los cuales A es no singular, determinar L matriz triangular inferior en la descomposición LDV de A.

(A) $L = U^T$.

(B) $L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(C) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

(D) $L = I$.

7. Considere

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Cuando se aplica la eliminación de Gauss a L, ¿qué matriz se obtiene?

(A) L^T.

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-b}{1-a} \end{bmatrix}$.

(C) L.

(D) I.

b) Si las mismas operaciones aplicadas a L se aplican a I, ¿qué matriz se obtiene?

(A) L^{-1}.

(B) L.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b+ac & -c & 0 \end{bmatrix}$.

(D) L^T.

c) Si las mismas operaciones aplicadas a L se aplican a LB para una matriz $3 \times n$ matrix B, ¿qué matriz se obtiene?

(A) B.

(B) $L^{-1}B$.

(C) LB.

(D) $L^T B$.

8. *a*) Sea A una matriz $n \times n$, invertible. Entonces, la segunda columna de A^{-1} es la solución del siguiente sistema (recordar que $e_k \in \mathbb{R}^n$ indica el vector canónico con un 1 en la entrada k y 0 en las restantes):

(A) $Ax = e_2$.

(B) $Ax = 2e_1$.

(C) $A^{-1}x = e_2$.

(D) Ninguna de las anteriores.

b) Sean L y U las matrices de la descomposión LU de $A = LU$. ¿Cuál de los siguientes procedimientos me brinda en x la segunda columna de A^{-1}?

(A) Paso 1: Resuelvo $Uz = e_2$, Paso 2: Resuelvo $Lx = z$.

(B) Paso 1: Resuelvo $Uz = e_2$, Paso 2: Resuelvo $x = Lz$.

(C) Paso 1: Resuelvo $Lz = e_2$, Paso 2: Resuelvo $Ux = z$.

(D) Ninguna de las anteriores.

c) Considere las siguientes matrices: $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sea $A = UB^{-1}L$. Calcule w, la segunda columna de A^{-1} (si lo piensan, puede hacerse sin invertir ninguna matriz).

(A) $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(B) $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(C) $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(D) $w = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $e_i \in \mathbb{R}^n$ el i-ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$, el vector con todas sus componentes iguales a 1. Para toda A matriz $m \times n$, $i = 1, \ldots, n$ y $j = 1, \ldots, m$, A^i denota el i-ésimo vector columna y A_j, el j-ésimo vector fila de A.

a) Sea A una matriz $m \times n$ y z tal que $Az = A^i$ ¿Quién es z?

(A) $z = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$.
(B) $z = e_i \in \mathbb{R}^m$.
(C) $z = e_i \in \mathbb{R}^n$.
(D) $z = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$.

b) Sea A una matriz $m \times n$, $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ y $z = A\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$. ¿Quién es z_1?

(A) z_1 es la suma de las entradas de A_1.
(B) z_1 es la suma de las entradas de A^1.
(C) z_1 es la primer entrada de A^1.
(D) z_1 es la primer entrada de A^1.

c) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Para $n \geq 2$, la segunda columna de A^n es:

(A) La segunda columna de A.
(B) La primer columna de A.
(C) La segunda columna de A^{n-1}.
(D) La primer columna de A^{n-1}.

d) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Para $n \geq 2$, la primer columna de A^n es:

(A) La suma de las columnas de A^{n-1}.
(B) La suma de las filas de A^{n-1}.
(C) La segunda columna de A^{n-1}.
(D) La primer columna de A^{n-1}.

e) Sea $z = A^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Entonces:

(A) $z = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.
(B) $z = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.
(C) $z = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.
(D) $z = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

f) La secuencia de números de Fibonacci $(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$ es la secuencia de enteros tales que $f_1 = f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, for $n \geq 3$. Piense cómo está relacionada la respuesta al item anterior con los números de Fibonacci y obtenga $z = A^5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(A) $z = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.
(B) $z = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.
(C) $z = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$.
(D) $z = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

10. *a*) Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix}$, con $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de a, b, c, d y e la matriz A es no singular?

(A) $a \neq 0$, $e \neq 0$, $b \neq 0$ y $a = e$.
(B) $a \neq 0$, $e \neq 0$, $b \neq 0$ y $a \neq e$.

(C) Depende del lado derecho del sistema.

(D) No existen tales valores de a, b, c, d y e.

b) ¿Y para esta matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & 0 \end{bmatrix}$?

(A) $d \neq ae$.

(B) $aec \neq 0$.

(C) $d \neq ae$ y $c \neq 0$.

(D) Ninguna de las respuestas anteriores.