Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Métodos Numéricos

Sucesiones y Series Numéricas

Alumno:

Demagistris, Santiago Ignacio

Septiembre 2020

1 Ejercicio 1

En cada caso determinar si la sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su límite.

a) $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

$a_n = \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n}\ \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\ \frac{1}{n^{\alpha-1}}) =^{(1)}$

$lim_{n\to\infty} a_n =^{(1)} lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})\ lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^{\alpha-1}}) = 0\ lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^{\alpha-1}}) = 0$

$lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(1): Regla del producto del límite.

Como $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a_n converge a 0.

b) $a_n = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n-1}$

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n}\frac{n}{n-1}) =^{(1)}$

$lim_{n\to\infty} a_n =^{(1)} lim_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})\ lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) =$

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})\ lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) =^{(2)}$

$lim_{n\to\infty} a_n =^{(2)} lim_{n\to\infty}(1) - lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})\ lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) =$

$lim_{n\to\infty} a_n = (1-0)\ lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) = 1 - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1}) =^{(3)}$

$lim_{n\to\infty} a_n =^{(3)} 1 - lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1}) = 1 - 1 = 0$

$lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(1) Regla del producto del límite.

(2) Regla de la diferencia del límite.

(3) L'hopital caso $\frac{\infty}{\infty}$.

Como $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a_n converge a 0.

c) $a_n = \frac{3n^2-n+4}{2n^2+1}$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2-n+4}{2n^2+1}) =^{(1)}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n =^{(1)} lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2}{2n^2+1}) - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{2n^2+1}) + lim_{n\to\infty}(\frac{4}{2n^2+1}) =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2}{2n^2+1}) - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{2n^2+1}) + 0 =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{3n^2}{2n^2+1}) - lim_{n\to\infty}(\frac{n}{2n^2+1}) =^{(2)}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n =^{(2)} lim_{n\to\infty}(\frac{6n}{4n}) - lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4n}) =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{6n}{4n}) - 0 =^{(2)} lim_{n\to\infty}(\frac{6}{4}) = \frac{3}{2}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$$

(1) Regla de la suma y diferencia del límite.

(2) L'hopital caso $\frac{\infty}{\infty}$.

Como $lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$, a_n converge a $\frac{3}{2}$.

d) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} \cos\frac{n\pi}{2}$$

Como $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} \cos\frac{n\pi}{2}$, cuando n tiende a infinito a_n está acotado entre 1 y -1 pero no presenta un límite. Por lo tanto la sucesión diverge.

e) $a_n = \frac{n!}{n}$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(n!\ \frac{1}{n})$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})\ lim_{n\to\infty}(n!) =^{(1)}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n =^{(1)} 0\ lim_{n\to\infty}(n!) = 0$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Como $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a_n converge a 0.

$f)\ a_n = \frac{n^p}{e^n},\quad p > 0$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{n^p}{e^n}) =^{(1)}$$

$$lim_{n\to\infty} a_n =^{(1)} lim_{n\to\infty}(\frac{pn^{p-1}}{e^n}) = \ldots =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{p^p}{e^n}) =^{(2)}= 0$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(1) L'hopital caso $\frac{\infty}{\infty}$.

(2) $\epsilon > 1$, por lo cual $\epsilon^n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Como $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a_n converge a 0.

$g)\ a_n = \sqrt[n]{n}$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}) = lim_{n\to\infty}(n^{\frac{1}{n}}) =^{(1)} 1$$

(1) cuando $n \to \infty$, $\sqrt[n]{n} \to 0$ y por lo tanto $\infty^0 = 0$.

Como $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, a_n converge a 0.

2 Ejercicio 2

En cada caso determinar si la serie converge o diverge y en caso de ser convergente hallar su suma.

a) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Podemos observar que $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n(n+1)}) = 0 \Rightarrow s_n$ puede converger.

$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow b_n = \frac{1}{n}$ (1)

(1) $\Rightarrow$ $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - b_{n-1} =^{(1)} b_1 - b_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (2)

(2) $\Rightarrow$ $lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} =^{(2)}= lim_{n\to\infty} 1 - lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + 0 = 1$

(1) Propiedad telescópica.

(2) Regla de la diferencia del límite.

La serie s_n converge a 1.

b) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$

Podemos observar que $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$

$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n(n+2)}) = 0 \Rightarrow s_n$ puede converger.

$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} =$

$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} =$

$s_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (1)

Sea $b_n = \frac{1}{n}$, por (1) y propiedad telescópica, $s_n = 1 + (b_1 - b_{n+1} - (1 - \frac{1}{2})) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$ (2)

(2) $\Rightarrow$ $lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty}(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}) = \frac{3}{2}$. **Por lo tanto s_n converge a 1.5**

c) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Podemos observar que $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}) = lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}\sqrt{(1+\frac{1}{n^2})}} = lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{(1+\frac{1}{n^2})}} =$$

$$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(1+\frac{1}{n^2})}} = 1$$

En vista de que a_n converge en 1 y por el teorema 7, entonces la serie s_n diverge.

d) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$

Podemos observar que s_n es una serie geométrica y que r < 0, por lo que nos encontramos frente a una serie alternada. Sabemos que:

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$lim_{n\to\infty} s_n = lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto s_n converge a $\frac{2}{3}$.

e) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3(\frac{3}{2})^n$

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} 3(\frac{3}{2})^n = 3\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n \Rightarrow \frac{s_n}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n$$

Se puede observar que $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n$ es una serie geométrica y como $r = \frac{3}{2}$ sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n = lim_{n\to\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{-1/2} = -2 \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \qquad lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{3} = lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{2})^n = -2 \Rightarrow lim_{n\to\infty} s_n = -6$$

Por lo tanto s_n converge a -6.

f) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

Podemos observar que $a_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$

Criterio de la raíz

Sea $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n+1}{2^{n+1}}}$:

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+1)^{\frac{1}{n}}}{(2^{n+1})^{\frac{1}{n}}} = lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+1)^{\frac{1}{n}}}{(2^n 2)^{\frac{1}{n}}} = lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+1)^{\frac{1}{n}}}{(2^n)^{\frac{1}{n}} 2^{\frac{1}{n}}}$$

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+1)^{\frac{1}{n}}}{2(2)^{\frac{1}{n}}} = \frac{lim_{n\to\infty}(2^n+1)^{\frac{1}{n}}}{lim_{n\to\infty} 2(2)^{\frac{1}{n}}} = \frac{lim_{n\to\infty}(2^n+1)^{\frac{1}{n}}}{2} =^{(1)}$$

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =^{(1)} \frac{lim_{n\to\infty} e^{ln(2^n+1)^{\frac{1}{n}}}}{2} = \frac{lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n} ln(2^n+1)}}{2} = \frac{e^{lim_{n\to\infty} \frac{ln(2^n+1)}{n}}}{2} =^{(2)}$$

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} =^{(2)} \frac{e^{lim_{n\to\infty} \frac{n2^{n-1}}{2^n+1}}}{2} =^{(2)} \frac{e^{lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)2^{n-2}+2^{n-1}}{2^{n-1}}}}{2} = \frac{e^{lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)2^{n-2}}{2^{n-1}} + \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}}}{2}$$

$$lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e^{lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)2^{n-2}}{2^{n-2}2}+1}}{2} = \frac{e^{lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2}+1}}{2} = \infty = L$$

Como $L > 1$, por criterio de la raíz s_n diverge.

(1) L'hopital caso ∞^0.

(2) L'hopital caso $\frac{\infty}{\infty}$.

g) $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$

Podemos observar que $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{4n^2+8n+3} \geq \frac{1}{15n^2} = b_n$

Criterio del límite

$$lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4n^2+8n+3}}{\frac{1}{15n^2}} = lim_{n\to\infty} \frac{15n^2}{4n^2+8n+3} =^{(1)} lim_{n\to\infty} \frac{60}{16} = \frac{15}{4} = \lambda$$

Como $\lambda \neq 0$, es finito y sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica) diverge entonces por criterio del límite s_n diverge.

$$lim_{n\to\infty} b_n = lim_{n\to\infty} \frac{1}{15n^2} = 0 \quad (1)$$

(1) $\Rightarrow$ Como b_n diverge y $b_n \leq a_n$ entonces por criterio de comparación a_n diverge (2)

(2) $\Rightarrow$ Como a_n diverge entonces la serie s_n diverge.