

# Contents

<b>1</b>	<b>Variables aleatorias bidimensionales o de mayor dimension</b>	<b>1</b>
1.1	Variables aleatorias bidimensionales . . . . .	1
1.2	Distribucion de probabilidades marginales y condicionales . . . . .	3
1.2.1	Probabilidad Condicional . . . . .	4
1.3	Variables aleatorias independientes . . . . .	5
1.4	Funciones de una variable aleatoria . . . . .	6

**Universidad Nacional de Rosario**

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

# PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

## *Unidad 6*

Autor del resumen:

DEMAGISTRIS, Santiago Ignacio

Julio 2020

# 1 Variables aleatorias bidimensionales o de mayor dimension

## 1.1 Variables aleatorias bidimensionales

En nuestro estudio de las variables aleatorias hemos considerado, hasta aquí, sólo el caso unidimensional. Es decir, el resultado del experimento se podía registrar como un solo número  $x$ . En muchos casos, sin embargo, nos interesa observar simultáneamente dos o mas características numéricas. Por ejemplo, podríamos observar la cantidad de lluvia total,  $LL$ , y el promedio de temperatura,  $T$ , en cierta región durante un mes específico, que daría lugar al resultado  $(ll, t)$ .

**Definición.** Sea  $\epsilon$  un experimento y  $S$  un espacio muestral asociado con  $\epsilon$ . Sean  $X = X(s)$  y  $Y = Y(s)$  dos funciones que asignan un número real a cada uno de los resultados  $s \in S$ . Llamamos a  $(X, Y)$  **variable aleatoria bidimensional** (que también se denomina vector aleatorio).

Si  $X_1 = X_1(s), X_2 = X_2(s), \dots, X_n = X_n(s)$ , son  $n$  funciones, cada una de las cuales asigna un número real a cada resultado  $s \in S$ , entonces llamamos a  $(X_1, \dots, X_n)$  una **variable aleatoria n-dimensional** (o un vector aleatorio n-dimensional).

**Definición.**

- $(X, Y)$  es una **variable aleatoria bidimensional discreta** si los valores posibles de  $(X, Y)$  son finitos o infinitos numerables. Es decir, los valores posibles de  $(X, Y)$  se pueden representar como  $(x_i, y_j), i = 1, 2, \dots, n, \dots; j = l, 2, \dots, m, \dots$
- $(X, Y)$  es una **variable aleatoria bidimensional continua** si  $(X, Y)$  puede tomar todos los valores en un conjunto no numerable del plano euclidiano. [Por ejemplo, si  $(X, Y)$  toma todos los valores en el rectángulo  $\{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , diríamos que  $(X, Y)$  es una variable aleatoria bidimensional continua.]

En otras palabras,  $(X, Y)$  es una variable aleatoria bidimensional si representa el resultado de un experimento aleatorio en el cual hemos medido las dos características numéricas  $X$  y  $Y$ .

### Definición.

- a) Sea  $(X,Y)$  una variable aleatoria bidimensional discreta. Con cada resultado posible  $(x_i, y_j)$ , asociamos un número  $p(x_i, y_j)$  que representa  $P(X = x_i, Y = y_j)$  y que satisface las condiciones siguientes:

$$\forall_{x_i, y_j} p(x_i, y_j) \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$$

La función  $p$  definida para toda  $(x_i, y_j)$  en el recorrido de  $(X,Y)$  se llama **función de probabilidad** de  $(X,Y)$ . El conjunto de ternas  $(x_i, y_j, p(x_i, y_j))$ ,  $i, j = 1, 2, \dots$ , en algunos casos se denomina **distribución de probabilidades** de  $(X, Y)$ .

- b) Sea  $(X,Y)$  una variable aleatoria bidimensional continua que toma todos los valores en una región  $R$  del plano euclidiano. La **función de densidad de probabilidades conjuntas**  $f$  es una función que satisface las siguientes condiciones:

$$\forall_{(x,y) \in R} f(x, y) \geq 0$$

$$\int \int_R f(x, y) \, dx \, dy = 1$$

### Observaciones

- a) La ultima condicion indica que el volumen total bajo la superficie dada por la ecuación  $z = f(x, y)$  es igual a 1.
- b) Como en el caso unidimensional,  $f(x, y)$  no representa la probabilidad de nada. Sin embargo, para  $\Delta x$  y  $\Delta y$  positivos y suficientemente pequeñas,  $f(x, y)\Delta x\Delta y \sim P(x \leq X \leq x + \Delta x, y \leq Y \leq y + \Delta y)$ .
- c) Como en el caso unidimensional, adoptaremos la convención de que  $f(x, y) = 0$  si  $(x, y) \notin R$ . Por tanto, podemos considerar  $f$  definida para toda  $(x, y)$  en el plano y la ultima condición se convierte en  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \, dx \, dy = 1$ .
- d) Si  $B$  está en el recorrido de  $(X, Y)$ , tenemos

$$P(B) = P[(X(s), Y(s)) \in B] = P[s \in S | (X(s), Y(s)) \in B]$$

Esta ultima probabilidad se refiere a un evento en  $S$  y, por tanto, determina la probabilidad de  $B$ . En nuestra terminología previa,  $B$  y  $[s \in S | (X(s), Y(s)) \in B]$  son **eventos equivalentes**.

- Si  $B$  esta en el recorrido de  $(X,Y)$ , siendo esta ultima discreta, tenemos

$$P(B) = \sum_B \sum_B p(x_i, y_j)$$

, la suma se toma con todos los indices  $(i, j)$  para los cuales  $(x_i, y_j) \in B$

- Si  $(X,Y)$  es continua

$$P(B) = \int \int_B f(x, y) \, dx \, dy$$

### Ejemplos p. 125-128

**Definición.** Sea  $(X,Y)$  una variable aleatoria bidimensional. Su función de distribución acumulada (fda)  $F$  está definida como

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

**Observación.** Si  $F$  es fda de una variable aleatoria bidimensional con fdp conjunta  $f$ , entonces

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

dondequiera que  $F$  sea diferenciable.

## 1.2 Distribución de probabilidades marginales y condicionales

Con cada variable aleatoria bidimensional  $(X,Y)$  asociamos dos variables aleatorias unidimensionales llamadas  $X$  y  $Y$ , respectivamente. Es decir, podemos interesarnos por la distribución de probabilidades de  $X$  o por la distribución de probabilidades de  $Y$ . Dada una variable aleatoria bidimensional  $(X,Y)$  obtenemos las respectivas **distribuciones marginales** (de  $X$  y de  $Y$ ) de la siguiente manera:

- a) **Caso Discreto.** Puesto que  $X = x_i$  debe ocurrir con  $Y = y_j$ , para alguna  $j$ , y puede ocurrir solo con una  $j$  tenemos:

$$p_x(x_i) = P_x(X = x_i) = P_{(x,y)}(X = x_i, Y = y_1 \circ X = x_i, Y = y_2 \circ \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{(x,y)}(x_i, y_j).$$

La función  $p_x$  definida para  $x_1, x_2, \dots$ , representa la **distribución marginal de probabilidades de  $X$** . Análogamente definimos  $q_y(y_j) = P_y(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{(x,y)}(x_i, y_j)$ . como la **distribución marginal de probabilidades de  $Y$** .

- b) **Caso Continuo.** Sea  $f$  la fdp conjunta de la variable aleatoria bidimensional continua  $(X,Y)$ . Definimos  $f_x$  y  $f_y$ , las funciones de densidad de probabilidades marginales de  $X$  y  $Y$ , respectivamente, como sigue

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Estas fdp corresponden a las fdp básicas de las variables aleatorias unidimensionales  $X$  y  $Y$ , respectivamente. Por ejemplo,

$$P_x(c \leq X \leq d) = P_{(x,y)}[c \leq X \leq d, -\infty \leq Y \leq \infty] = \int_c^d \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_c^d f_x(x) dx$$

**Ejemplos p. 129-130**

**Definición.** Decimos que una variable aleatoria bidimensional continua está **distribuida uniformemente** en una región  $R$  en un plano euclidiano si

$$f(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } (x, y) \in R \\ 0 & \text{si } \text{otherwise} \end{cases}$$

Debido a la condición  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ , lo anterior implica que la constante es igual a  $\frac{1}{\text{area}(R)}$ . Suponemos que  $R$  es una región con Área finita distinta de cero.

## Ejemplos p. 131-132

### 1.2.1 Probabilidad Condicional

Distribución de probabilidades condicionales.

**Caso discreto.** Sea  $(X, Y)$  una variable aleatoria bidimensional.

$$P_x(x_i|y_i) = P_x(X = x_i|Y = y_i) = \frac{p(x_i, y_i)}{p_y(y_i)}, \text{ si } p_y(y_i) > 0$$

$$P_y(y_i|x_i) = P_y(Y = y_i|X = x_i) = \frac{p(x_i, y_i)}{p_x(x_i)}, \text{ si } p_x(x_i) > 0$$

**Observación.** Para una  $j$  dada,  $p(x_i|y_j)$  satisface todas las condiciones de una distribución de probabilidades. Tenemos  $p(x_i|y_j) \geq 0$  y también

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i|y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p(x_i, y_j)}{p_y(y_j)} = \frac{p_y(y_j)}{p_y(y_j)} = 1$$

**Caso continuo. Definición.** Sea  $(X, Y)$  una variable aleatoria bidimensional continua con fdp conjunta  $f$ . Sean  $f_x$  y  $f_y$  las fdp marginales de  $X$  y  $Y$ , respectivamente

La fdp **condicional** de  $X$  para  $Y = y$  dada, está definida por

$$f_x(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_y(y)}, \quad h(y) > 0$$

$$f_y(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_x(x)}, \quad g(x) > 0$$

### Observaciones.

- a) Las fdp condicionales anteriores satisfacen todas las exigencias de una fdp unidimensional. Así, para  $y$  fija, tenemos  $f_x(x|y) \geq 0$  y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x|y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f_y(y)}dx = \frac{1}{f_y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{f_y(y)}{f_y(y)} = 1$$

- b) Supongamos que  $(X, Y)$  representan la altura y el peso de una persona, respectivamente. Sea  $f$  la fdp conjunta de  $(X,Y)$  y sea  $f_x$  la fdp marginal de  $X$  (sin tomar en cuenta  $Y$ ). Por tanto,  $\int_{5.8}^6 f_x(x)dx$  representaría la probabilidad del evento  $(5.8 \leq X \leq 6)$  sin tomar en cuenta el peso  $Y$ . Por su parte  $\int_{5.8}^6 f_x(x|150)dx$  se interpretaría como  $P(5.8 \leq X \leq 6|Y = 150)$ . Estrictamente hablando, esta probabilidad condicional no está definida en los términos de nuestra convención previa con la probabilidad condicional, puesto que  $P(Y = 150) = 0$ . Sin embargo, sólo usamos la integral anterior para definir esta probabilidad. Sobre una base intuitiva, ciertamente, éste debe ser el significado de dicho número.

### Ejemplo p. 134

## 1.3 Variables aleatorias independientes

Tal como definimos el concepto de independencia entre dos eventos  $A$  y  $B$ , ahora definiremos las variables aleatorias independientes. Lo que queremos decir intuitivamente es que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes si el resultado de  $X$ , digamos, de ninguna manera influye en el resultado de  $Y$ . Ésta es una noción extremadamente importante y hay muchas situaciones en que dicha suposición se justifica.

### Definicion.

- a) Sea  $(X,Y)$  una variable aleatoria bidimensional discreta. Decimos que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes si y sólo si  $p(x_i, y_j) = p_x(x_i)p_y(y_j)$  para toda  $i$  y  $j$ . Esto es,  $P_{(x,y)}(X = x_i, Y = y_j) = P_x(X = x_i)P_y(Y = y_j)$ , para toda  $i$  y  $j$ .
- b) Sea  $(X, Y)$  una variable aleatoria bidimensional continua. Decimos que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes si y sólo si  $f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$  para toda  $(x, y)$ , donde  $f$  es la fdp conjunta, y  $f_x$  y  $f_y$  son las fdp marginales de  $X$  y  $Y$ , respectivamente.

### Teorema

- a) Sea  $(X, Y)$  una variable aleatoria bidimensional discreta. Entonces  $X$  y  $Y$  son independientes si y sólo si  $p_x(x_i|y_j) = p_x(x_i)$  para toda  $i$  y  $j$  (o lo que es equivalente, si y solo si  $p_y(y_j|x_i) = p_y(y_j)$  para toda  $i$  y  $j$ ).
- b) Sea  $(X, Y)$  una variable aleatoria bidimensional continua. Entonces  $X$  y  $Y$  son independientes si y solo si  $f_x(x|y) = f_x(x)$ , o lo que es equivalente, si y sólo si  $f_y(y|x) = f_y(y)$  para toda  $(x,y)$

### Ejemplos p. 135-136

**Observacion.** De la definición de la distribución marginal de probabilidades (en cualesquiera de los casos, discreto o continuo) es claro que la distribución conjunta de probabilidades determina, en forma única, la distribución marginal de probabilidades. Es decir, que conociendo la fdp  $f$  conjunta podemos obtener las fdp marginales  $f_x$  y  $f_y$ . Sin embargo, lo inverso no es verdadero. Es decir, en general, el conocimiento de las fdp marginales  $f_x$  y  $f_y$  no determina la fdp conjunta  $f$ . Esto sólo es verdadero cuando  $X$  y  $Y$  son independientes, porque en este caso tenemos  $f(x, y) = f_x(x)f_y(y)$ .

**Teorema.** Sea  $(X, Y)$  una variable aleatoria bidimensional. Sean  $A$  y  $B$  eventos cuya ocurrencia (o no ocurrencia) depende sólo de  $X$  y  $Y$  respectivamente. (Esto es,  $A$  es un subconjunto de  $R_x$ , el recorrido de  $X$ , mientras que  $B$  es un subconjunto de  $R_y$ , el recorrido de  $Y$ .) Entonces, si  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes, tenemos  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Dem. p. 137**

## 1.4 Funciones de una variable aleatoria

Al definir una variable aleatoria  $X$  señalamos enfáticamente que  $X$  es una función definida del espacio muestral  $S$  a los números reales. Al definir una variable aleatoria bidimensional  $(X, Y)$ , tratamos un par de funciones,  $X = X(s)$ ,  $Y = Y(s)$ , cada una de las cuales está definida en el espacio muestral de algún experimento y cada una de las cuales asigna un número real a cada  $s \in S$ , produciendo así el vector bidimensional  $[X(s), Y(s)]$ .

Consideremos ahora  $Z = H_1(X, Y)$ , una función de las dos variables aleatorias  $X$  y  $Y$ . Debe ser claro que  $Z = Z(s)$  es otra vez una variable aleatoria. Consideremos la siguiente sucesión de pasos.

- a) Se realiza el experimento  $\epsilon$  y se obtiene el resultado  $s$
- b) Se evalúan los números  $X(s)$  y  $Y(s)$ .
- c) Se evalúa el número  $Z = H_1[X(s), Y(s)]$

El valor de  $Z$  depende claramente de  $s$ , el resultado original del experimento. Esto es,  $Z = Z(s)$  es una función que asigna a cada resultado  $s \in S$  un número real,  $Z(s)$ . Por lo tanto,  $Z$  es una variable aleatoria. Algunas variables aleatorias importantes que nos van a interesar son  $X + Y$ ,  $XY$ ,  $X/Y$ ,  $\min(X, Y)$ ,  $\max(X, Y)$ , etcetera.

De aquí surge el planteo: dada la distribución de probabilidades conjunta de  $(X, Y)$ , ¿cuál es la distribución de probabilidades de  $Z = H_1(X, Y)$ ?

**Ejemplo ilustrador p. 138**



Si  $(X, Y)$  es una variable aleatoria bidimensional continua y si  $Z = H_1(X, Y)$  es una función continua de  $(X, Y)$ , entonces  $Z$  será una variable aleatoria continua (unidimensional) y el problema de encontrar su fdp es algo más complicado. Para encontrar la fdp de  $Z = H_1(X, Y)$  a menudo es más simple introducir una segunda variable aleatoria, digamos  $W = H_2(X, Y)$ , y obtener primero la fdp conjunta de  $Z$  y  $W$ , digamos  $k(z, w)$ . Conociendo  $k(z, w)$ , entonces podemos obtener la fdp de  $z$ , digamos  $k_z(z)$ , al integrar simplemente  $k(z, w)$  respecto a  $w$ . Esto es,

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} k(z, w)dw$$

Los problemas que quedan son

- 1) Cómo encontrar la fdp conjunta de  $Z$  y  $W$
- 2) Cómo elegir la variable aleatoria apropiada  $W = H_2(X, Y)$ .

Para resolver el último problema, simplemente digamos que en general hacemos la elección más sencilla posible de  $W$ . En el contexto presente,  $W$  desempeña sólo un papel intermediario, y en realidad no nos interesa en sí misma. Con el fin de encontrar la fdp conjunta de  $Z$  y  $Y$  necesitamos el teorema 6.3.