Capítulo 1: Matrices y Sistemas de Ecuaciones Lineales.

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Álgebra Lineal $\longleftrightarrow$ Espacios vectoriales

Diferentes enfoques:

- más teórico/abstracto, más *bonito*, más matemático
- más práctico/aplicaciones y computabilidad, más ciencias de la computación

Trataremos de balancear ambos aspectos, con base en

Álgebra Lineal y sus aplicaciones - Gilbert Strang

Disponible en:

- Aula Virtual (Comunidades- UNR)
- Y también en
  https://ocw.mit.edu/search/ocwsearch.htm?q=18.06
  o
  https://web.mit.edu/18.06

$$\begin{array}{ccc} \text{Álgebra Lineal} & \longleftrightarrow & \text{Espacios Vectoriales} \\ \updownarrow & & \\ \text{Aplicaciones y computabilidad} & \longleftrightarrow & \text{Sistemas de ecuaciones} \end{array}$$

$$\text{Espacios vectoriales} \overset{?}{\longleftrightarrow} \text{Sistemas de ecuaciones}$$

¿Qué palabras/conceptos asocian a:

- espacios vectoriales? $\mathbb{R}^n$, otro?
  Combinación lineal, bases, dimensión, independencia lineal...
- sistemas de ecuaciones? Matrices, determinantes, Cramer, Gauss...inversa, matriz singular, sistema singular...

Todo esto (y poco más) es Álgebra Lineal. Empecemos dando una segunda mirada a lo que sabemos.

A matriz $m \times n$, B matriz $n \times p$, entonces AB es matriz $m \times p$.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cc} & p \\ n & \begin{bmatrix} \quad & B & \quad \\ & & \end{bmatrix} \end{array} \\ \begin{array}{cc} & n \\ m & \begin{bmatrix} \quad & A & \quad \end{bmatrix} \end{array} & & \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \quad & AB & \quad \end{bmatrix} & m \\ p & \end{array} \end{array}$$

Caso $p = 1$
(B vector, A^j: vector columna j de A)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = B$$

$$A = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix} = AB$$

AB es $m \times 1$: AB es un vector. *¿Qué tipo de vector es?*

$$AB = aA^1 + bA^2 + cA^3$$

AB es una combinación lineal de los vectores columna de A

El producto de una matriz por un vector es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz

Caso $m = 1$:
A es un vector $1 \times n$. B_j: vector fila j de B

$$\begin{array}{c} p \\ \\ \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array} \right] = B \end{array}$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \right] \quad \left[\quad ? \quad \right] = AB$$

AB es un vector $1 \times p$.
¿Qué tipo de vector es AB? $\quad AB = aB_1 + bB_2 + cB_3$.
AB es una *combinación lineal* de los vectores fila de B

El producto de un vector por una matriz es una combinación lineal de las filas de la matriz

Caso general:

- Cada columna de AB es el producto de A por cada columna de B:

$$\begin{bmatrix} B^1 & B^2 & B^3 & B^4 \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} AB^1 & AB^2 & AB^3 & AB^4 \end{bmatrix} = AB$$

columna j de AB = $A\times$ columna j de B

Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de A.

- Cada fila de AB es el producto de cada fila de A por B:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \quad & B & \quad \end{bmatrix} \\[2ex] A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \\ A_3B \end{bmatrix} = AB \end{array}$$

fila i de AB = (fila i de A) $\times B$.

Cada fila de AB es una combinación lineal de las filas de B

- Cada entrada de AB es el producto de un vector fila de A y un vector columna de B

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \\ B^1 & B^2 & B^3 & B^4 \\ \\ \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_1B^1 & A_1B^2 & A_1B^3 & A_1B^4 \\ A_2B^1 & A_2B^2 & A_2B^3 & A_2B^4 \\ A_3B^1 & A_3B^2 & A_3B^3 & A_3B^4 \end{bmatrix} = AB \end{array}$$

$$(AB)_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \times (\text{columna } j \text{ de } B) = A_iB^j$$

RECORDAR:

1. **El producto de una matriz por un vector es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz**
2. **El producto de un vector por una matriz es una combinación lineal de las filas de la matriz**
3. **Cada columna de AB es una combinación lineal de las columnas de A**
4. **Cada fila de AB es una combinación lineal de las filas de B**

$(n = 2)$

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & = & 3 & (1) \\ 4x & + & 5y & = & 6 & (2) \end{array}$$

¿Métodos de resolución? ¿Interpretación geométrica?

Método 1: Eliminación de Gauss:

- Paso 1:
  $ec(2) - 4 \times ec(1) \longmapsto -3y = -6 \longrightarrow y = 2$
- Paso 2:
  Sustitución en (1) o en (2): $x = -1$

Método 2: Cramer

...toda la información necesaria está en los coeficientes de las ecuaciones... ¡tiene que haber una fórmula que nos dé la solución en función de esa información!

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & = & 3 & (1) \\ 4x & + & 5y & = & 6 & (2) \end{array}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1 \times 6 - 3 \times 4}{1 \times 5 - 2 \times 4} = 2 \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{3 \times 5 - 2 \times 6}{1 \times 5 - 2 \times 4} = -1$$

¿cuál es más sencillo?

Para $n = 2$ el esfuerzo es más o menos similar

¿y cuando n *es muy grande?*

Obs: $n = 1000$ es un tamaño *moderado* en las aplicaciones.

- Cramer: 1000 determinantes que involucran 1000000 de números cada uno.
- Gauss: después haremos los cálculos, pero es muy bueno, es el que se usa.

Un primer indicio: aún en el ejemplo de $n = 2$, una vez obtenido y por Cramer, claramente hubiera sido más sencillo obtener x por sustitución que calculando los determinantes.

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & = & 3 & (1) \\ 4x & + & 5y & = & 6 & (2) \end{array}$$

Geometría por filas: $x+2y=3$ y $4x+5y=6$

intersección de dos rectas en el plano $\mathbb{R}^2$

Geometría por columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Buscamos una *combinación lineal* de los vectores $u=(1,4)$ y $v=(2,5)$ que nos dé el vector $(3,6)$.

combinación lineal de vectores en $\mathbb{R}^2$

¿En $n = 3$?

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 4 & (1) \\ x & + & y & & & = & 2 & (2) \\ x & - & y & & & = & 0 & (3) \end{array}$$

Geometría por filas:

buscamos la intersección de tres planos en el espacio $\mathbb{R}^3$

$$(\pi_1)\, x+y+z=4 \qquad (\pi_2)\, x+y=2 \qquad (\pi_3)\, x-y=0$$

Geometría por columnas:

entre las combinaciones lineales de los tres vectores en el espacio $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (1,1,1) \qquad v_2 = (1,1,-1) \qquad v_3 = (1,0,0)$$

queremos conocer los coeficientes (si existen) de la combinación lineal que nos da $w = (4,2,0)$.

¿En $n = 10$?

No es tan difícil abstraer y pensar en planos 9-dimesionales en un espacio de dimensión 10 ni en combinaciones lineales de vectores 10-dimensionales que den el vector lado derecho.

En los ejemplos que vimos, siempre existe solución única. *¿Cuándo había solución única*?

sistema no singular, determinante no nulo, existencia de matriz inversa....volveremos sobre esto...

Casos singulares:

$$\begin{array}{ccccccccc} u & + & v & + & w & = & 2 & (1) \\ 2u & + & & + & 3w & = & 5 & (2) \\ 3u & + & v & + & 4w & = & 6 & (3) \end{array}$$

Algebraicamente:

$ec(1)+ec(2) : 3u+v+4w=7 \qquad ec(3) : 3u+v+4w=6$

Sistema Inconsistente (no hay solución).

Geométricamente "por filas": los tres planos no se intersectan.
¿Qué situaciones pueden darse?

- dos de los tres planos que no se intersecten (dos planos paralelos) o
- todos se intersecten dos a dos pero no se intersectan entre los tres.

¿Cuál es nuestro caso?

Geométricamente "por columnas":

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} w = b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Los tres vectores son coplanares y b está fuera del plano.

¿Qué pasaría si b estuviera en el mismo plano que los tres vectores columna?
Por ejemplo, $b' = (2, 5, 7)$.
Habría infinitas soluciones.
Qué estaría pasando en la geometría por filas?

Los tres planos pasan por una misma recta.

Volvemos a los metodos de resolución de sistemas.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2u & + & v & + & w & = & 5 & (1) \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 & (2) \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 & (3) \end{array}$$

Paso 1: Eliminar u de las ecuaciones (2) y (3).
Restar a las ecuaciones (2) y (3), múltiplos de la ecuación (1)

- $ec(2) - 2 \times ec(1) \longrightarrow -8v - 2w = -12$
- $ec(3) - (-1) \times ec(1) \longrightarrow 8v + 3w = 14$

Para obtener el múltiplicador ℓ de la ecuación (1) a restar en cada caso, dividimos el coeficiente de u en la ecuación a modificar por el coeficiente de u en $ec(1)$

coeficiente de u en $ec(1) = 2 \longmapsto$ *primer pivot*.

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 2u & + & v & + & w & = & 5 & (1) \\ & - & 8v & - & 2w & = & -12 & (2) \\ & & 8v & + & 3w & = & 14 & (3) \end{array}$$

Paso 2: Eliminar v de la ecuación (3).

Restar a la ecuación (3) un múltiplo de la ecuación (2)

- $ec(3)-(-1)\times ec(2) \longrightarrow w=2$

Para obtener el multiplicador ℓ de la ecuación (2) a restar, dividimos el coeficiente de v en la ecuación (3) por el coeficiente de v en $ec(2)$

coeficiente de v en $ec(2) = -8 \longmapsto$ *segundo pivot*.

Obtenemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & - & 8v & - & 2w & = & -12 \\ & & & & 1w & = & 2 \end{array} \qquad , \quad Ux = b''$$

con

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad b'' = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

U es matriz triangular superior $\longmapsto Ux = b''$ sistema triangular

fácil de resolver vía *sustitución para atrás*:

$$ec(3): \ w = 2 \longmapsto ec(2): \ v = 1 \ \longmapsto ec(1): u = 1.$$

eliminación para adelante + sustitución para atrás

¿Siempre funciona? Siempre que los pivots no sean nulos. ¿Y si aparece un pivot nulo?

Ejemplo 1:

$$\begin{array}{ccccccc} u & + & v & + & w & = & \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = & \\ 4u & + & 6v & + & 8w & = & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} u & + & v & + & w & = & \\ & & & + & 3w & = & \\ & & 2v & + & 4w & = & \end{array} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccccc} u & + & v & + & w & = & \\ & & 2v & + & 4w & = & \\ & & & & 3w & = & \end{array}$$

Permutando las filas (2) y (3) llegamos al sistema triangular.
Observar que, independientemente del lado derecho, el sistema tendrá solución única. En estos casos se dice que el sistema es *no singular*. En correspondencia con esto decimos que la matriz de coeficientes del sistema es una *matriz no singular*.

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = \\ 4u & + & 4v & + & 8w & = \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & & & 3w & = \\ & & & & 4w & = \end{array}$$

Ejemplo 2.1:

$$\begin{array}{rcrcrcc} u & + & v & + & w & = & \\ & & & & 3w & = & 6 \\ & & & & 4w & = & 7 \end{array}$$

No hay solución factible

Ejemplo 2.2:

$$\begin{array}{rcrcrcc} u & + & v & + & w & = & \\ & & & & 3w & = & 6 \\ & & & & 4w & = & 8 \end{array}$$

hay infinitas soluciones factibles

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = \\ 4u & + & 4v & + & 8w & = \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & & & 3w & = \\ & & & & 4w & = \end{array}$$

Ejercicio: Independientemente del lado derecho, el sistema NO tendrá solución única.

En estos casos se dice que el sistema es *singular*. En correspondencia con esto decimos que la matriz de coeficientes del sistema es una *matriz singular*.

¿Cuál es el *costo computacional* del método de eliminación de Gauss?
¿Cuántas operaciones aritméticas realizamos en un sistema de n ecuaciones y n incógnitas?
(Caso no singular e ignoramos las operaciones en el lado derecho)

Operaciones involucradas:
dividir por el pivot para obtener el multiplicador ℓ, multiplicar cada coeficiente de la ecuación por ℓ, restar los coeficientes.
Convenimos: multiplicar y restar = 1 operación

En el primer paso, por cada una de las $n-1$ ecuaciones a modificar, tenemos:

1. cálculo del multiplicador $\longmapsto$ 1 operación
2. n coeficientes que se multiplicar y restan$\longmapsto n$ operaciones

Primer paso: $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ operaciones
Cuando nos quedan k ecuaciones, $k^2 - 1$ operaciones
En total $\sum_{k=1}^{n} k^2 - 1 = O(n^3)$

- $n = 1 \longrightarrow 0$ operaciones
- $n = 2 \longrightarrow 3$ operaciones
- $n = 100 \longrightarrow \approx 10^6$ operaciones

Costo eliminación: $O(n^3)$

¿qué pasa con la sustitución?
Es más rápida: $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

Costo total: $O(n^3) + O(n^2) = O(n^3)$

¿Se puede resolver un sistema de orden $n \times n$ más rápido?

Hace 30 años se suponía que no. Sin embargo, existe hoy un método que lo resuelve en $Cn^{log_2 7} \approx Cn^{2,8}$.
¿Más rápido? $Cn^{2,376}$

No interés práctico, C es muuuuy grande y el código es tan horrible que sólo tiene un interés teórico. Seguimos con Gauss!

Obs: El nuevo problema es el costo de resolver un sistema de orden $n \times n$ con varios procesadores en paralelo.

$$
(S)\quad \begin{array}{rcrcrcrl}
2u & + & v & + & w & = & 5 & (1)\\
4u & - & 6v & & & = & -2 & (2)\\
-2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 & (3)
\end{array}
$$

$$(S)\, Ax = b$$

- **Paso 1**: eliminar u de las ecuaciones (2) y (3)
  $ec(2) - 2 \times ec(1) \longrightarrow -8v - 2w = -12$
  $ec(3) - (-1) \times ec(1) \longrightarrow 8v + 3w = 14$
- **Paso 2**:eliminar v a la ecuación (3)
  $ec(3) - (-1) \times ec(2) \longrightarrow w = 2$

Obtenemos:

$$(S)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & - & 8v & - & 2w & = & -12 \\ & & & & 1w & = & 2 \end{array}$$

$$(S)\ Ux = b''$$

$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $b'' = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$ U es triangular superior.

¿Cómo podemos obtener U y b'' a partir de A y b?

- **Paso 1**:
  $ec(2) - 2 \times ec(1) \longrightarrow -8v - 2w = -12$

  (nueva fila 2) = (fila 2 de $A) - 2\times$ (fila 1 de $A) \longmapsto$ ¡es el trabajo de las *matrices elementales*!

Definición: Una matriz elemental es una matriz cuadrada $n \times n$ que se obtiene a partir de la matriz identidad, sustituyendo una entrada ij con $1 \leq i \neq j \leq n$ por un valor $\alpha \neq 0$. Notamos con $E_{ij}(\alpha)$ a la matriz elemental tal que su entrada ij es igual a α.

Ejercicio: Sea A una matriz de tamaño $n \times p$ y $B = E_{ij}(\alpha)A$. Entonces,

$$B_k = \begin{cases} A_k & \text{si} \quad k \neq i \\ A_i + \alpha A_j & \text{si} \quad k = i. \end{cases}$$

Resolución: Recordemos que B_k es el producto de la fila k de $E_{ij}(\alpha)$ por A. Recordemos también que el producto de un vector por una matriz resulta un vector combinación lineal de las filas de la matriz, donde los coeficientes de la combinación lineal son las entradas del vector. Para $k \neq i$, la fila k de $E_{ij}(\alpha)$ tiene todos ceros exceptos en su entrada k. Por lo tanto el producto de la fila k de $E_{ij}(\alpha)$ por A nos da A_k y tenemos $B_k = A_k$. Queda como ejercicio analizar la fila i de B.

- **Paso 1**: $ec(2) - 2 \times ec(1) \longrightarrow -8v - 2w = -12$

  (nueva fila 2) = (fila 2 de A) $- 2\times$ (fila 1 de A)

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$ec(3) - (-1) \times ec(1) \longrightarrow 8v + 3w = 14$

$$FA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$FEA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A.$$

(recordemos, las matrices elementales conmutan)

$$FEA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Paso 2**: (en FEA)
  $ec(3) - (-1) \times ec(2) \longrightarrow w = 2$

$$G(FEA) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (FEA) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

$(GFE)A = U$, donde

$$GFE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo reconstruyo A a partir de U? *desarmar cada paso...*

Ejercicio: Probar que $E_{ij}(\alpha)E_{ij}(-\alpha) = I$.

Resolución: Para facilitar las notaciones, llamemos $B = E_{ij}(\alpha)E_{ij}(-\alpha)$ y $A = E_{ij}(-\alpha)$. Además e^k denota el k-ésimo vector canónico.
Por el ejercicio anterior sabemos que,

$$B_k = \begin{cases} A_k & \text{si} \quad k \neq i \\ A_i + \alpha A_j & \text{si} \quad k = i. \end{cases}$$

Como $A = E_{ij}(-\alpha)$, si $k \neq i$ A_k coincide con la k-ésima fila de I y por lo tanto, $B_k = A_k = e^k$. Además, $A_i = -\alpha e^j + e^i$.
Por lo tanto,

$$B_i = A_i + \alpha A_j = (-\alpha e^j + e^i) + \alpha e^j = e^i.$$

Como $B_k = e^k$ para todo k, tenemos que $B = I$.

$E_{ij}(-\alpha)$ *desarma* lo que hizo $E_{ij}(\alpha)$

$$E_{ij}(-\alpha) = (E_{ij}(\alpha))^{-1}$$

Método de eliminación en términos de multiplicación de matrices

$$G(F(E\,A)) = U$$

$$A = E^{-1}(F^{-1}(G^{-1}U)) = (E^{-1}F^{-1}G^{-1})U$$

Recordemos:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E^{-1}F^{-1}G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = L$$

$$A = LU$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

Observación:

- L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación
- U es una matriz triangular superior con los pivotes en la diagonal.

Siempre que no aparezcan pivots nulos, podremos reconstruir A de esta manera.

Propiedad: Dada una matriz cuadradra A, si en el método de Eliminación de Gauss no aparece ningún pivot nulo, A admite una *factorización* LU.
Esto es, $A = LU$ donde:

- L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación,
- U es una matriz triangular superior con los pivotes en la diagonal.

Teorema: La descomposición LU es única.
Sea $A = L_1U_1$ y $A = L_2U_2$ donde, para $i = 1,2$, L_i es triangular inferior con 1's en la diagonal, U_i es triangular superior sin ceros en la diagonal. Entonces $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$.
Prueba: Ejercicio.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$; $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ? & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$; $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ No tiene factorización LU

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $L = I$; $U = A$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & 1 & 0 \\ ? & ? & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \; ; \; L = A \; ; \; U = I$$

$$Ax = b \leftrightarrow L(Ux) = b$$

¿Cómo resuelven los códigos?

1. Sustituyo $Ux = c$.
2. $Lc = b$ sistema triangular $\longrightarrow \frac{n^2}{2}$ operaciones
3. $Ux = c$ sistema triangular $\longrightarrow \frac{n^2}{2}$ operaciones

Costo de la resolución:

1. Factorizar $A \longrightarrow O(n^3)$ operaciones
2. Resolver los sistemas triangulares $\longrightarrow n^2$ operaciones

Observación: Si tengo la factorizacion LU puedo resolver varios sistemas, con diferentes RHS [1]'s, muy fácilmente.

---

[1] RHS= right hand side = lado derecho de una ecuación o inecuación

Ejercicio: Sean D y A matrices $n \times n$, con D una matriz diagonal y sea $B = DA$.
Entonces, la fila k-ésima de B es la igual a la fila k-ésima de A por la entrada k-ésima de la diagonal de D. Esto es, $B_k = D_k^k A_k$, para $k = 1, \ldots, n$.

Observación: si U es una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal y D es la matriz diagonal cuya diagonal coincide con la de U (i.e. $D_i^i = U_i^i$, para todo i) entonces $U = DV$ donde cada entrada ij de V es la entrada ij de U dividida por la entrada de la diagonal de U en la fila i. (i.e. $V_i^j = \frac{U_i^j}{U_i^i}$). En particular, V es una matriz triangular superior con 1's en la diagonal.

$$A = LU \longleftrightarrow A = LDV$$

Propiedad: Dada una matriz cuadradra A, si en el método de eliminación de Gauss no aparece ningún pivot nulo, A admite una *factorización* LDV. Esto es, $A = LDV$ donde:

- L es una matriz triangular inferior con 1's en la diagonal y abajo de la diagonal aparecen los multiplicadores usados en la eliminación
- D es una matriz diagonal con los pivotes en la diagonal.
- V es una matriz triangular superior con 1's en la diagonal.

Teorema: La descomposición LDV es única.
Para $i = 1,2$, sea $A = L_iD_iV_i$ donde L_i es triangular inferior con 1's en la diagonal, U_i es triangular superior con 1's en la diagonal y D_i es matriz diagonal sin ceros en la diagonal. Entonces, $L_1 = L_2$, $V_1 = V_2$ y $D_1 = D_2$.

Prueba. Para $i = 1,2$, sea $U_i = D_iV_i$. Entonces, para $i = 1,2$, $A = L_iU_i$ es una descomposición LU de A (justificar). Como la descomposición LU de una matriz es única, tenemos que $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$. Falta verificar que si $U_1 = U_2$ entonces $V_1 = V_2$ y $D_1 = D_2$ (ejercicio).

¿Qué matrices realizan el intercambio de filas que hace el Método de Gauss cuando aparece algún pivot nulo en el proceso ?

Ejemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Buscamos P tal que

$$P \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definición:
Llamamos *matriz de permutación (de orden* n) a toda matriz que se obtiene permutando las filas de la matriz identidad.
Una *matriz de permutación elemental* es una matriz de permutación donde solo dos fias de la matriz identidad han sido intercambiadas. Notamos con P_{ij} a la matriz de permutación elemental que se obtiene intercambiando las filas i y j de la identidad.

Ejercicio: Para toda A matriz $n \times p$, $P_{ij}A$ es la matriz que se obtiene intercambiando las filas i y j de A.

Resolución: Sea $B = P_{ij}A$. Probar que B_k, la fila k-ésima de B, coindice con A_k si $k \neq i$ y $k \neq j$ y $B_i = A_j$ y $B_j = A_i$.

Ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

- Si $d = 0$ entonces A es singular.
- Si $d \neq 0$:

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A \xrightarrow{P_{13}\times} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix}.$$

- Si $a \neq 0$:

$$A \xrightarrow{P_{13}\times} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & c \\ 0 & a & b \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{23}\times} \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = U.$$

$$P_{23}P_{13}A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = U$$

$$P = P_{23}P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{matriz de permutación.}$$

$$PA = U.$$

Ejemplo 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{E\times} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{23}\times} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E'\times} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

$$E'(P_{23}A) = U \longrightarrow P_{23}A = LU$$

con

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (E')^{-1}$$

Ejercicio: Sean P_{ij} y $E_{k\ell}(\alpha)$ matrices del mismo orden, de permutación elemental y elemental, respectivamente. Entonces,

$$P_{ij}\,E_{k\ell}(\alpha) = \begin{cases} E_{k\ell}(\alpha)\,P_{ij} & \text{si} \quad k \neq i, k \neq j \\ E_{j\ell}(\alpha)\,P_{ij} & \text{si} \quad k = i \\ E_{i\ell}(\alpha)\,P_{ij} & \text{si} \quad k = j. \end{cases}$$

Ejercicio: Si A es no singular, existe una matriz P de permutación y una matriz E producto de matrices elementales tales que $E\,P\,A$ es triangular superior sin ceros en la diagonal.

Propiedad: Sea A una matriz cuadrada no singular (el Método de Elimación de Gauss termina con U matriz triangular superior sin ceros en la diagonal). Entonces, existe una matriz de permutación P tal que PA tiene factorización LU (y factorización LDV). Justificar.

Hasta ahora...

A es no singular si existe una permutación de sus filas que evita los ceros en las posiciones de pivot.

Equivalentemente...

A es no singular si existe matriz de permutación P tal que PA admite descomposición LU (y LDV).

Equivalentemente...

A es no singular si $Ax = b$ tienen solución única para todo b.

¿Qué otras formas de identificar "A no singular" recuerdan?

$det(A) \neq 0$, A tiene inversa, otras...

Vamos a concentrarnos en "A tiene inversa", o sea, A *inversible*.

Definición: B es la inversa de A si $BA = AB = I$. Decimos que A es inversible si existe B inversa de A.

Observación: No toda matriz es inversible. Por ejemplo:

1. la matriz nula ($A = \mathbf{0}$)
2. toda matriz no cuadrada. ¿Por qué?
3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. ¿Por qué?

Lema: Toda matriz tiene a lo sumo una matriz inversa.

Prueba: Sean B y C inversas de A. Entonces, $BA = I$ y $AC = I$. Así, $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$.

Notamos con A^{-1} a la (única) inversa de A.

Lema: Si A y B son matrices inversibles entonces A^{-1} y AB son inversibles con $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Prueba: Ejercicio.

Pregunta: Si A es inversible y B no es inversible, ¿puede ser AB inversible? Ejercicio.

Observaciones:

- Si A es inversible, $Ax = b$ tiene una única solución para todo b, $x = A^{-1}b$.
- Si existe $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$, A no es inversible. ¿Por qué?

Problema: A matriz inversible. Resolver $Ax = b$.
Solución: $x = A^{-1}b$.

¿Esto hace más fácil la resolución de sistemas de ecuaciones?
¿Cómo encontramos A^{-1}?

Recordemos el método de Gauss:

$$Ax = b \longleftrightarrow L^{-1}(Ax) = L^{-1}b \longleftrightarrow Ux = \tilde{b}$$

Podemos pensar que L^{-1} actúa sobre la matriz extendida $[A,b]$:

$$[A,b] \stackrel{L^{-1}\times}{\rightarrow} [L^{-1}A, L^{-1}b] = [U,\tilde{b}]$$

¿Cómo calculamos A^{-1}?Buscamos una matriz X tal que $AX = I$. Equivalentemente, buscamos n vectores columna X^i tales que $AX^i = e^i$, $i = 1,\ldots,n$. ¿Cómo resolvemos estos n sistemas usando el Método de Gauss?

- Eliminación: $[A,e^1,\ldots,e^n] \stackrel{L^{-1}\times}{\rightarrow} [U,L^{-1}e^1,\ldots,L^{-1}e^n] = [U,L^{-1}]$
- Sustitución para atrás: n procesos de sustitución.

Gauss-Jordan lo mejora.

$$[A, e_1, \ldots, e_n] = [A, I] \stackrel{L^{-1}\times}{\rightarrow} [U, L^{-1}] \stackrel{U^{-1}\times}{\rightarrow} [I, U^{-1}L^{-1}] = [I, A^{-1}]$$

Ejemplo:

$$[A, I] = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L^{-1}\times} \left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{8} & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[U, L^{-1}\right] \xrightarrow{\text{0's s/ pivots}} \left[\begin{array}{cccccc} 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{12}{8} & \frac{-5}{8} & \frac{-6}{8} \\ 0 & -8 & \mathbf{0} & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\div\text{por pivots}}$$

$$\xrightarrow{\div\text{por pivots}} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{16} & \frac{-5}{16} & \frac{-6}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{8} & \frac{-3}{8} & \frac{-2}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[I, U^{-1}L^{-1}\right] = \left[I, A^{-1}\right].$$

Gauss-Jordan es muy eficiente, ¡pero sólo lo usamos si, por alguna razón, queremos encontrar a A^{-1}!

Para resolver sistemas, NO calculamos A^{-1}

Observación: Gauss-Jordan en realidad encuentra X tal que $AX = I$. ¿Cómo sabemos que $XA = I$?

¿Cómo encuentra Gauss- Jordan a X?

$$M[A,I] \xrightarrow{M\times} [I,X]$$

donde M es producto de matrices elementales y de permutación.

Entonces, $M\,A = I$ y $M\,I = X$. Esto es, $M = X$ y por lo tanto $XA = I$.

Recordar: A invertible $\Longleftrightarrow$ A no singular $\Longleftrightarrow$ Gauss encuentra n pivots no nulos (tal vez permutando)$\Longleftrightarrow$....

veremos varias otras caracterizaciones....

Definición: Dada una matriz A de tamaño $m \times n$, la *transpuesta de* A, A^T, es la matriz $n \times m$ tal que, para todo $i = 1, \dots, n$ y todo $j = 1, \dots, m$, $A^T_{ij} = A_{ji}$. Equivalentemente, para todo $i = 1, \dots, n$, $(A^T)_i = (A^i)^T$ y para todo $i = 1, \dots, m$, $(A^T)^i = (A_i)^T$.

Propiedades: $(A^T)^T = A$ y $(AB)^T = B^T A^T$

Lema: Si A es inversible, A^T también lo es y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
Prueba:
$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I$ y $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I$.

Definición: A es simétrica si $A = A^T$.

Observación: A simétrica $\Longrightarrow$ A cuadrada.

Lema: A simétrica e inversible, entonces A^{-1} es simétrica.
Prueba: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$.

Propiedad: Para toda matriz R $m \times n$, RR^T y $R^T R$ son simétricas.
Prueba: ejercicio.

Propiedad: Si A es simétrica y no singular admite una descomposición LDL^T, donde L es triangular inferior con 1's en la diagonal y D matriz diagonal sin ceros en la diagonal.
Prueba: $A = LDV \Longrightarrow A^T = V^T D^T L^T = A$. Por unicidad de la descomposición resulta $V = L^T$.

Comentario: Si A es simétrica, el proceso de Eliminación de Gauss se puede hacer en $\frac{n^3}{6}$ (en vez de $\frac{n^3}{3}$).