Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2020

Práctica: CAPÍTULO 2 - ESPACIOS VECTORIALES (*tercera parte*)

1. Analizar si los siguientes vectores son linealmente independientes:

   a) $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(0,1,0,1)$.

   b) $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(3,2,1)$.

   c) $(1,-3,2)$, $(2,1,-3)$, $(-3,2,1)$.

   d) $(1,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, (x,y,z) para x,y,z cualesquiera.

2. Encontrar el mayor número posible de vectores linealmente independiente entre los siguientes: $v_1=(1,-1,0,0)$, $v_2=(1,0,-1,0)$, $v_3=(1,0,0,-1)$, $v_4=(0,1,-1,0)$, $v_5=(0,1,0,-1)$ y $v_6=(0,0,1,-1)$.

3. Dada la matriz
$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix},$$
demostrar que las columnas de A son linealmente independientes si y solo si $a\cdot d\cdot f\neq 0$.

4. Sea $P=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x-2y+z-t=0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

   a) Hallar 3 vectores linealmente independientes en P.

   b) Demostrar que no existen 4 vectores linealmente independientes en P.

5. Determinar si los siguientes conjuntos son conjuntos de vectores l.i. o l.d. en cada uno de los espacios vectoriales que se indica a continuación:

   a) $\{sen\, x, cos\, x\}\subset C(\mathbb{R})$.

   b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right\}\subset\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   c) $\{1, x, -1+2x^2, -3x+4x^3\}\subset\mathbb{R}_3[x]$.

6. Probar que:

   a) Todo conjunto de vectores que contenga al vector nulo es un conjunto de vectores l.d..

   b) Si S es un conjunto de vectores l.d. entonces T es un conjunto de vectores l.d. $\forall\, T\supset S$.

7. Sea V un espacio vectorial y $\{v_1,v_2,v_3\}\subset V$ un conjunto de vectores l.i.. Probar que:

   a) $\{v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$ es un conjunto de vectores l.i..

   b) $\{v_2-v_3, v_1-v_3, v_1-v_2\}$ es un conjunto de vectores l.d..

8. Sea A una matriz de tamaño $n\times n$. Demostrar que, los vectores fila de A son l.i. si y solo si la matriz es no singular.
   Sugerencia: trabajar con A^T.

9. Sean
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & s \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

   a) Encontrar el conjunto solución de la ecuación $Ax=b$ para cualquier valor de s y t.

   b) ¿Para que valores de s son las columnas de A linealmente dependientes?

   c) Considere b y las tres primeras columnas de A. ¿Para qué valores de t son linealmente dependientes?

10. Sea $(V,\oplus,\odot)$ un espacio vectorial. Sea $U=\{v^1,\dots,v^k\}$ un conjunto de vectores l.i. de V. Probar que:

a) El número máximo de vectores l.i. en $\langle U\rangle$ es k.

b) Para $U' \subset U$, los vectores de U' son l.i..

c) Sean $W = \{w^1, \dots, w^p\}$ un conjunto de vectores l.i. de V, con $p > k$. Entonces, existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $U \cup \{w^j\}$ es un conjunto de vectores l.i..

11. Dado un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$. Probar que:

    a) Todo conjunto generador minimal de V es un conjunto de vectores l.i..

    b) Todo conjunto generador de V cuyos elementos son l.i. es un conjunto generador minimal.

12. Obtener una base del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por:

    a) Los vectores $(1, -1, 1), (2, 1, 0)$ y $(4, -1, 2)$.

    b) Los vectores $(1, 1, -1)$ y $(-1, -1, 1)$.

    c) Los vectores $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 0)$.

    d) Las columnas de una matriz escalonada de tamaño 3×5 con 2 pivots.

13. Sea $\mathcal{B}$ una base del espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre $\mathbb{K}$ y $v \in \mathcal{B}$. Sea w una combinación lineal de vectores de $\mathcal{B}$ en los que el coeficiente asociado a v es no nulo. Entonces $(\mathcal{B} \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ es una base de V.

14. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea U un subconjunto de k elementos de V. Probar que:

    a) Si los vectores de U son l.i. y $k \leq n$ entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $U \subset \mathcal{B}$. (Obs: si $k = n$ entonces $\mathcal{B} = U$).

    b) Si U es un conjunto generador de V y $k \geq n$ entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $\mathcal{B} \subset U$. (Obs: si $k = n$ entonces $\mathcal{B} = U$).

15. Dadas las matrices
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
    determinar una base y calcular las dimensiones de:

    a) El espacio columna de A, $C(A)$ y el espacio columna de U, $C(U)$.

    b) El espacio fila de A, $C(A^T)$ y el espacio fila de U, $C(U^T)$.

    c) El espacio nulo de A, $N(A)$ y el espacio nulo de U, $N(U)$.

16. Encontrar una base para cada uno de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

    a) Todos los vectores cuyas componentes son iguales.

    b) Todos los vectores tales que la suma de sus componentes es igual a cero.

    c) $N(U)$ y $C(U)$ con $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

17. *a*) Sea $\mathbb{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado a lo sumo 3 (incluyendo polinomio nulo). Encontrar una base $\mathcal{B}$ del subespacio S de $\mathbb{R}_3[x]$ definido por $S = \langle\{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0\}\rangle$.

    b) Extender $\mathcal{B}$ a una base de $\mathbb{R}_3[x]$, esto es, encontrar una base $\tilde{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ tal que $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$.

18. Encontrar las dimensiones de:

    a) El espacio de todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas componentes suman cero.

    b) El espacio nulo de la matriz $I \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

    c) El espacio de las matrices simétricas 3 por 3. Hallar una base.

19. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V tal que $\dim(V) = \dim(W)$. Probar que $V = W$.

20. Determinar en cada caso una matriz que cumpla las condiciones dadas o justificar por qué no existe.

a) Su espacio columna está generado por los vectores $(1,0,0)^T, (0,0,1)^T$, y su espacio fila está generado por $(1,1), (1,2)$.

b) Su espacio columna tiene al vector $(1,1,1)^T$ como base y su espacio fila tiene como base al vector $(1,2,1)$.

21. Encontrar una base para cada uno de los cuatro espacios fundamentales asociados a las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

    a) Si los vectores columna de una matriz son linealmente dependientes, también lo son sus vectores fila.

    b) El espacio columna de una matriz $n \times n$ coincide con el espacio fila de dicha matriz.

    c) El espacio columna de una matriz $n \times n$ tiene la misma dimensión que el espacio fila de dicha matriz.

    d) Los vectores columna de una matriz son una base de su espacio columna.

    e) Si los vectores columna de A son linealmente independientes, $Ax = b$ tiene exactamente una solución para todo b.

    f) Una matriz 5×7 nunca tiene columnas linealmente independientes.

23. Sea A una matriz $m \times n$ tal que para todo $b \in \mathbb{R}^m$, el sistema $Ax = b$ siempre tiene al menos una solución.

    a) Probar que el rango de A es m.

    b) Demostrar que la única solución de $A^T y = 0$ es $y = 0$.

24. Sea $A = uv^T + wz^T$ la suma de dos matrices de rango 1.

    a) ¿Qué vectores generan el espacio columna de A?

    b) ¿Qué vectores generan el espacio fila de A?

    c) Dados $u = z = (1,0,0)$ y $v = w = (0,0,1)$, calcular A y su rango.

25. Si A tiene los mismos cuatro subespacios fundamentales que B, ¿es cierto que $A = cB$ para algún número real c?

26. Sea A es una matriz de tamaño $m \times n$ y rango r. Supongamos que existen vectores b para los cuales $Ax = b$ no tiene solución.

    a) ¿Qué relación de orden existe entre los números m, n y r?

    b) ¿Por qué $A^T y = 0$ admite una solución diferente de la solución nula?

27. Sea $A = \{(1,-3,2), (2,4,1), (3,1,3), (1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, obtener:

    a) Una base de $\mathbb{R}^3$ contenida en A.

    b) Las componentes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la base obtenida en el apartado anterior.

28. Si $\mathcal{B} = \{v^1, \ldots, v^n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$ y $w \in \mathbb{R}^n$, probar que la representación de w en $\mathcal{B}$ es la solución del sistema $Bx = w$.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. *a*) Encontrar una base del plano $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$.

   b) Encontrar una base para la intersección de P y el plano xy.

2. Sea V un espacio vectorial tal que $dim(V) = k$. Demostrar:

   a) k vectores l.i. en V forman una base de V.

   b) k vectores que generan V forman una base de V.

3. Probar que un vector $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ no puede ser vector fila de una matriz $m \times n$ y a su vez pertenecer a su espacio nulo.

4. Sea $V = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle$. Encontrar una matriz A cuyo espacio fila es V y una matriz B cuyo espacio nulo es V.

5. *a*) Si el rango de una matriz 7×9 es 5, ¿cuál es la dimensión de cada uno de los cuatro espacios fundamentales?

   b) Si el rango de una matriz 3×4 es 3, ¿cuál es el espacio columna y cuál espacio nulo a izquierda?

6. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

   a) A y A^T tienen el mismo número de pivotes.

   b) A y A^T tienen el mismo espacio nulo a izquierda.

   c) Si el espacio fila es igual al espacio columna entonces $A = A^T$.

   d) Si $A^T = -A$ entonces el espacio fila de A es igual al espacio columna.