- Ejercicio 3.
- Ejercicio 10.
- Ejercicio 11.
- Ejercicio 14.
- Ejercicio 15.
- Ejercicio 19.
- Ejercicio 21.

3) Sea $V = \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i x^i \; / \; a_i \in \mathbb{R} \right\}$ y $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ base estándar de V.

a) Probar que $\mathcal{B}_2 = \{x-1, 1, (x-1)^2\}$ es otra base de V.

b) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

c) Utilizar lo obtenido en el ítem anterior y determinar la coordenadas de p en la base $\mathcal{B}_2$ siendo
$p(x) = 2x^2 - 5x + 6$.
¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$?

$a)$ Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.

$a)$ Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.
Planteamos una combinación lineal igualada a 0:

$a)$ Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.
Planteamos una combinación lineal igualada a 0:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot 1 + c \cdot (x-1)^2 = 0$$

a) Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.
Planteamos una combinación lineal igualada a 0:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot 1 + c \cdot (x-1)^2 = 0$$

Trabajando el lado izquierdo llegamos a:

$$(b+c-a) \cdot 1 + (a-2c) \cdot x + c \cdot x^2 = 0$$

a) Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.
Planteamos una combinación lineal igualada a 0:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot 1 + c \cdot (x-1)^2 = 0$$

Trabajando el lado izquierdo llegamos a:

$$(b+c-a) \cdot 1 + (a-2c) \cdot x + c \cdot x^2 = 0$$

Como $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ es una base de V, los coeficientes tienen que ser 0:

Ejercicios
Ejercicio 3
Ejercicio 10
Ejercicio 11
Ejercicio 14
Ejercicio 15
Ejercicio 19
Ejercicio 21

a) Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.
Planteamos una combinación lineal igualada a 0:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot 1 + c \cdot (x-1)^2 = 0$$

Trabajando el lado izquierdo llegamos a:

$$(b + c - a) \cdot 1 + (a - 2c) \cdot x + c \cdot x^2 = 0$$

Como $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ es una base de V, los coeficientes tienen que ser 0:

$$\begin{array}{rcrcrcl} - & a & + & b & + & c & = & 0 \\ & a & & & - & 2c & = & 0 \\ & & & & & c & = & 0 \end{array}$$

$a)$ Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.
Planteamos una combinación lineal igualada a 0:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot 1 + c \cdot (x-1)^2 = 0$$

Trabajando el lado izquierdo llegamos a:

$$(b+c-a) \cdot 1 + (a-2c) \cdot x + c \cdot x^2 = 0$$

Como $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ es una base de V, los coeficientes tienen que ser 0:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & & & - & 2c & = & 0 \\ & & & & c & = & 0 \end{array}$$

Como $a = b = c = 0$ es la única solución posible, resulta que los vectores $\mathcal{B}_2 = \{x-1, 1, (x-1)^2\}$ son linealmente independientes.

$a)$ Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.

Planteamos una combinación lineal igualada a 0:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot 1 + c \cdot (x-1)^2 = 0$$

Trabajando el lado izquierdo llegamos a:

$$(b+c-a) \cdot 1 + (a-2c) \cdot x + c \cdot x^2 = 0$$

Como $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ es una base de V, los coeficientes tienen que ser 0:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & & & - & 2c & = & 0 \\ & & & & c & = & 0 \end{array}$$

Como $a = b = c = 0$ es la única solución posible, resulta que los vectores $\mathcal{B}_2 = \{x-1, 1, (x-1)^2\}$ son linealmente independientes. ¿Es base?

a) Veamos que los vectores de $\mathcal{B}_2$ son linealmente independientes.
Planteamos una combinación lineal igualada a 0:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot 1 + c \cdot (x-1)^2 = 0$$

Trabajando el lado izquierdo llegamos a:

$$(b+c-a) \cdot 1 + (a-2c) \cdot x + c \cdot x^2 = 0$$

Como $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ es una base de V, los coeficientes tienen que ser 0:

$$\begin{array}{rcrcrcr} - & a & + & b & + & c & = 0 \\ & a & & & - & 2c & = 0 \\ & & & & & c & = 0 \end{array}$$

Como $a = b = c = 0$ es la única solución posible, resulta que los vectores $\mathcal{B}_2 = \{x-1, 1, (x-1)^2\}$ son linealmente independientes. ¿Es base? (2a. adicional práctica anterior)

b) Sea $p \in V$, planteamos la igualdad:

$$M[p]_{\mathcal{B}_1} = [p]_{\mathcal{B}_2}$$

donde M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

$\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{x-1, 1, (x-1)^2\}$

b) Sea $p \in V$, planteamos la igualdad:

$$M[p]_{\mathcal{B}_1} = [p]_{\mathcal{B}_2}$$

donde M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Observación: la igualdad es de vectores en $\mathbb{R}^3$.

b) Sea $p \in V$, planteamos la igualdad:

$$M[p]_{\mathcal{B}_1} = [p]_{\mathcal{B}_2}$$

donde M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Observación: la igualdad es de vectores en $\mathbb{R}^3$.

Tomando $p = x - 1$:

$$M \; [x-1]_{\mathcal{B}_1} = [x-1]_{\mathcal{B}_2}$$

b) Sea $p \in V$, planteamos la igualdad:

$$M[p]_{\mathcal{B}_1} = [p]_{\mathcal{B}_2}$$

donde M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Observación: la igualdad es de vectores en $\mathbb{R}^3$.

Tomando $p = x - 1$:

$$M\ [x-1]_{\mathcal{B}_1} = [x-1]_{\mathcal{B}_2}$$

$$M\ [-1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2]_{\mathcal{B}_1} = [x-1]_{\mathcal{B}_2}$$

b) Sea $p \in V$, planteamos la igualdad:

$$M[p]_{\mathcal{B}_1} = [p]_{\mathcal{B}_2}$$

donde M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Observación: la igualdad es de vectores en $\mathbb{R}^3$.

Tomando $p = x - 1$:

$$\begin{aligned} M\ [x-1]_{\mathcal{B}_1} &= [x-1]_{\mathcal{B}_2} \\ M\ [-1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2]_{\mathcal{B}_1} &= [x-1]_{\mathcal{B}_2} \\ M\ (-1,1,0)^T &= \end{aligned}$$

b) Sea $p \in V$, planteamos la igualdad:

$$M[p]_{\mathcal{B}_1} = [p]_{\mathcal{B}_2}$$

donde M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
Observación: la igualdad es de vectores en $\mathbb{R}^3$.

Tomando $p = x - 1$:

$$\begin{aligned} M\ [x-1]_{\mathcal{B}_1} &= [x-1]_{\mathcal{B}_2} \\ M\ [-1\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2]_{\mathcal{B}_1} &= [x-1]_{\mathcal{B}_2} \\ M\ (-1,1,0)^T &= (1,0,0)^T \end{aligned}$$

b) Sea $p \in V$, planteamos la igualdad:

$$M[p]_{\mathcal{B}_1} = [p]_{\mathcal{B}_2}$$

donde M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
Observación: la igualdad es de vectores en $\mathbb{R}^3$.

Tomando $p = x - 1$:

$$\begin{aligned} M\ [x-1]_{\mathcal{B}_1} &= [x-1]_{\mathcal{B}_2} \\ M\ [-1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2]_{\mathcal{B}_1} &= [x-1]_{\mathcal{B}_2} \\ M\ (-1, 1, 0)^T &= (1, 0, 0)^T \end{aligned}$$

Similarmente, tomando $p = 1$ y $p = (x-1)^2$ llegamos a

$$\begin{aligned} M\ (1, \ 0, \ 0)^T &= (0, \ 1, \ 0)^T \\ M\ (1, -2, \ 1)^T &= (0, \ 0, \ 1)^T \end{aligned}$$

b) Estas igualdades

$$
\begin{aligned}
M\ (-1,\ \ 1,\ \ 0)^T &= (1,\ \ 0,\ \ 0)^T \\
M\ (\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0)^T &= (0,\ \ 1,\ \ 0)^T \\
M\ (\ \ 1,-2,\ \ 1)^T &= (0,\ \ 0,\ \ 1)^T
\end{aligned}
$$

se pueden ver matricialmente:

b) Estas igualdades

$$M\ (-1,\ \ 1,\ \ 0)^T = (1,\ \ 0,\ \ 0)^T$$
$$M\ (\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0)^T = (0,\ \ 1,\ \ 0)^T$$
$$M\ (\ \ 1, -2,\ \ 1)^T = (0,\ \ 0,\ \ 1)^T$$

se pueden ver matricialmente:

$$M \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b)$ Estas igualdades

$$\begin{aligned} M\,(-1,\ \ 1,\ \ 0)^T &= (1,\ \ 0,\ \ 0)^T \\ M\,(\ \ 1,\ \ 0,\ \ 0)^T &= (0,\ \ 1,\ \ 0)^T \\ M\,(\ \ 1,-2,\ \ 1)^T &= (0,\ \ 0,\ \ 1)^T \end{aligned}$$

se pueden ver matricialmente:

$$M\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

b) Aplicando Gauss-Jordan a la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

llegamos a que

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Otra forma de llegar a lo mismo es usando el siguiente resultado de teoría:

> La columna i-ésima de la matriz M es la representación del elemento i-ésimo de la base $\mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$.

Busquemos como ejemplo M^3, que corresponde a la representación de $x^2 \in \mathcal{B}_1$ en la base $\mathcal{B}_2$.
Para encontrar $[x^2]_{\mathcal{B}_2}$ planteamos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} x^2 &= \alpha \cdot (x-1) + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (x-1)^2 \\ &= (\gamma + \beta - \alpha) \cdot 1 + (\alpha - 2\gamma) \cdot x + \gamma \cdot x^2 \end{aligned}$$

de donde resulta que $\gamma + \beta - \alpha = 0$, $\alpha - 2\gamma = 0$, $\gamma = 1$.
Resolviendo el sistema llegamos a que

$$M^3 = (\alpha, \beta, \gamma)^T = (2, 1, 1)^T.$$

$c)$ Observamos que

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = (6, -5, 2)^T.$$

$c)$ Observamos que

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = (6, -5, 2)^T.$$

Luego,

$$[p]_{\mathcal{B}_2} = M[p]_{\mathcal{B}_1}$$

$c)$ Observamos que

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = (6, -5, 2)^T.$$

Luego,

$$[p]_{\mathcal{B}_2} = M[p]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 3, 2)^T.$$

$c)$ Observamos que

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = (6, -5, 2)^T.$$

Luego,

$$[p]_{\mathcal{B}_2} = M[p]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 3, 2)^T.$$

Para corroborar que no cometimos errores, podemos constatar observando la siguiente igualdad de polinomios:

$$6 \cdot 1 - 5 \cdot x + 2 \cdot x^2 = -1 \cdot (x-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (x-1)^2$$

$p(x) = 2x^2 - 5x + 6$

$c)$ Observamos que

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = (6, -5, 2)^T.$$

Luego,

$$[p]_{\mathcal{B}_2} = M[p]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 3, 2)^T.$$

Para corroborar que no cometimos errores, podemos constatar observando la siguiente igualdad de polinomios:

$$6 \cdot 1 - 5 \cdot x + 2 \cdot x^2 = -1 \cdot (x-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (x-1)^2$$

¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$?

$c)$ Observamos que

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = (6, -5, 2)^T.$$

Luego,

$$[p]_{\mathcal{B}_2} = M[p]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 3, 2)^T.$$

Para corroborar que no cometimos errores, podemos constatar observando la siguiente igualdad de polinomios:

$$6 \cdot 1 - 5 \cdot x + 2 \cdot x^2 = -1 \cdot (x-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (x-1)^2$$

¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$?
Conmutando la expresión de la derecha, vemos claramente que las coordenadas de p en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$ son 3, 2 y -1 respectivamente.

$c)$ Observamos que

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = (6, -5, 2)^T.$$

Luego,

$$[p]_{\mathcal{B}_2} = M[p]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 3, 2)^T.$$

Para corroborar que no cometimos errores, podemos constatar observando la siguiente igualdad de polinomios:

$$6 \cdot 1 - 5 \cdot x + 2 \cdot x^2 = -1 \cdot (x-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (x-1)^2$$

¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$?
Conmutando la expresión de la derecha, vemos claramente que las coordenadas de p en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$ son 3, 2 y -1 respectivamente.

¿Cuál es la nueva matriz de cambio de base?

$c)$ Observamos que

$$[p]_{\mathcal{B}_1} = (6, -5, 2)^T.$$

Luego,

$$[p]_{\mathcal{B}_2} = M[p]_{\mathcal{B}_1} = (-1, 3, 2)^T.$$

Para corroborar que no cometimos errores, podemos constatar observando la siguiente igualdad de polinomios:

$$6 \cdot 1 - 5 \cdot x + 2 \cdot x^2 = -1 \cdot (x-1) + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (x-1)^2$$

¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$?

Conmutando la expresión de la derecha, vemos claramente que las coordenadas de p en la base $\{1, (x-1)^2, x-1\}$ son 3, 2 y -1 respectivamente.

¿Cuál es la nueva matriz de cambio de base? $MP_{12}P_{23}$

10) Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y

$$\mathcal{L}(V,W) := \{T\colon V \to W : T \text{ transformación lineal}\}.$$

Probar que para $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$:

a) $\{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\} \underset{s.e.}{\subset} V$.

b) Si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u)$ $\forall u \in U$, entonces $T_1(v) = T_2(v)$ $\forall v \in V$.

$a)$ Llamamos $A = \{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\}$.
Vamos a probar que $A \underset{s.e.}{\subset} V$.

- Es claro que $A \subseteq V$ (por definición de A).
- $A \neq \emptyset$ pues $0 \in A$ ya que $0 \in V$ y $T_1(0) = 0 = T_2(0)$ (T_1, T_2 transformaciones lineales).
- Sean $u, v \in A$, ¿$u + v \in A$?
  Primero observemos que $u + v \in V$ ya que V es un espacio vectorial. Además,
  $T_1(u+v) \overset{(1)}{=} T_1(u) + T_1(v) \overset{(2)}{=} T_2(u) + T_2(v) \overset{(1)}{=} T_2(u+v)$.
  Por lo tanto, $u + v \in A$.
- Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $v \in A$, ¿$\alpha v \in A$?
  Por un lado, es claro que $\alpha v \in V$ ya que V es un espacio vectorial. Además,
  $T_1(\alpha v) \overset{(1)}{=} \alpha T_1(v) \overset{(2)}{=} \alpha T_2(u) \overset{(1)}{=} T_2(\alpha v)$.

(1) T_1 y T_2 son transformaciones lineales.
(2) $u, v \in A$ entonces $T_1(u) = T_2(u)$ y $T_1(u) = T_2(v)$.

b) Ahora veamos que, si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u)\ \forall u \in U$, entonces $T_1(v) = T_2(v)\ \forall v \in V$.
Consideramos $v \in V$.
Como $V = \langle U \rangle$ entonces $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i$ con $\alpha_i \in \mathbb{K}$ y $u^i \in U$. Luego,

$$\begin{aligned} T_1(v) = T_1\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i\right) &\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_1(u^i) \\ &\overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_2(u^i) \\ &\overset{(1)}{=} T_2\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^i\right) = T_2(v) \end{aligned}$$

(1) T_1 y T_2 son transformaciones lineales.
(2) $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$.

11) Consideramos la aplicación T definida por:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2dx^3+(a+b)x^2+(a-c)x+2(c+d). \end{array}$$

$a)$ Probar que T es lineal.

$b)$ Hallar una base para $nul(T)$ y una para $rec(T)$.

$c)$ Determinar si T es un isomorfismo.

a) Vamos a probar que T es lineal.

Sean $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

¿$T(\alpha A_1 + A_2) = \alpha T(A_1) + T(A_2)$?

$$T(\alpha A_1 + A_2) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha a_1 + a_2 & \alpha b_1 + b_2 \\ \alpha c_1 + c_2 & \alpha d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 2(\alpha d_1 + d_2)x^3 + (\alpha a_1 + a_2 + \alpha b_1 + b_2)x^2 + (\alpha a_1 + a_2 - \alpha c_1 + c_2)x + 2(\alpha c_1 + c_2 + \alpha d_1 + d_2)$$

$$= \alpha[2d_1x^3 + (a_1 + b_1)x^2 + (a_1 - c_1)x + 2(c_1 + d_1)] + [2d_2x^3 + (a_2 + b_2)x^2 + (a_2 - c_2)x + 2(c_2 + d_2)]$$

$$= \alpha T(A_1) + T(A_2)$$

Por lo tanto T es una transformación lineal.

$b), c)$ Primero hallamos una base para $nul(T)$ y una para $rec(T)$.

Comenzamos describiendo el espacio nulo asociado a la transformación lineal T:

$nul(T) = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : T(A) = 0\} =$
$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : {\scriptstyle 2dx^3+(a+b)x^2+(a-c)x+2(c+d)=0x^3+0x^2+0x+0} \right\}$.

Resolviendo el sistema $2d = 0$, $a + b = 0$, $a - c = 0$ y $c + d = 0$ resulta que $a = b = c = d = 0$. Luego,

$$nul(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto, la base de $nul(T)$ es el conjunto $\emptyset$.

$b), c)$ Ahora bien, como $nul(T) = \{0\}$ y T es una transformación lineal, T es un monomorfismo.

Además, $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbb{R}_3[x]$ son espacios vectoriales isomorfos a $\mathbb{R}^4$, entonces la matriz A asociada a la transformación lineal T es de tamaño 4×4.

Como $dim\{nul(A)\} = dim\{nul(T)\} = 0$ resulta que A es de rango completo.

Luego, $C(A) = \mathbb{R}^4$ y resulta que T es un epimorfismo, es decir, $rec(T) = \mathbb{R}_3[x]$.

Por lo tanto, podemos concluir que T es un isomorfismo y una base para $rec(T)$ es $\{1, x, x^2, x^3\}$.

14) Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ tal que

$$T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_n(x+1)^n.$$

Probar que T es isomorfismo.

14) Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ tal que

$$T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_n(x+1)^n.$$

Probar que T es isomorfismo.

Sean V y W espacios vectoriales tales que $dim\ V = dim\ W = n$ y T una transformación lineal de V a W. Entonces,

- Si T es un monomorfismo entonces T es un isomorfismo.
- Si T es un epimorfismo entonces T es un isomorfismo.

Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces

$$(T(p))(x) = p(x+1).$$

Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces

$$(T(p))(x) = p(x+1).$$

Usando esta expresión, veamos que T es una transformación lineal.

Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ entonces

$$(T(p))(x) = p(x+1).$$

Usando esta expresión, veamos que T es una transformación lineal.

Sean $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces

$$(T(p))(x) = p(x+1).$$

Usando esta expresión, veamos que T es una transformación lineal.

Sean $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, queremos ver que

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha T(p) + \beta T(q)$$

Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces

$$(T(p))(x) = p(x+1).$$

Usando esta expresión, veamos que T es una transformación lineal.

Sean $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, queremos ver que

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha T(p) + \beta T(q)$$

Evaluando el polinomio $T(\alpha p + \beta q)$ en x:

$$(T(\alpha p + \beta q))(x) =$$

Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces

$$(T(p))(x) = p(x+1).$$

Usando esta expresión, veamos que T es una transformación lineal.

Sean $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, queremos ver que

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha T(p) + \beta T(q)$$

Evaluando el polinomio $T(\alpha p + \beta q)$ en x:

$$(T(\alpha p + \beta q))(x) = (\alpha p + \beta q)(x+1)$$

Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces

$$(T(p))(x) = p(x+1).$$

Usando esta expresión, veamos que T es una transformación lineal.

Sean $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, queremos ver que

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha T(p) + \beta T(q)$$

Evaluando el polinomio $T(\alpha p + \beta q)$ en x:

$$\begin{aligned}(T(\alpha p + \beta q))(x) &= (\alpha p + \beta q)(x+1)\\ &= \alpha p(x+1) + \beta q(x+1)\end{aligned}$$

Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces

$$(T(p))(x) = p(x+1).$$

Usando esta expresión, veamos que T es una transformación lineal.

Sean $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, queremos ver que

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha T(p) + \beta T(q)$$

Evaluando el polinomio $T(\alpha p + \beta q)$ en x:

$$\begin{aligned}(T(\alpha p + \beta q))(x) &= (\alpha p + \beta q)(x+1)\\ &= \alpha p(x+1) + \beta q(x+1)\\ &= \alpha (T(p))(x) + \beta (T(q))(x)\end{aligned}$$

Si consideramos $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ entonces

$$(T(p))(x) = p(x+1).$$

Usando esta expresión, veamos que T es una transformación lineal.

Sean $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, queremos ver que

$$T(\alpha p + \beta q) = \alpha T(p) + \beta T(q)$$

Evaluando el polinomio $T(\alpha p + \beta q)$ en x:

$$\begin{aligned}(T(\alpha p + \beta q))(x) &= (\alpha p + \beta q)(x+1)\\ &= \alpha p(x+1) + \beta q(x+1)\\ &= \alpha (T(p))(x) + \beta (T(q))(x)\end{aligned}$$

Concluimos que T es una transformación lineal entre dos espacios de igual dimensión.

Veamos que T es epimorfismo.

Veamos que T es epimorfismo.

Sea $p \in \mathbb{R}_n[x]$ (codominio), construyamos $q \in \mathbb{R}_n[x]$ (dominio) tal que $T(q) = p$.

Veamos que T es epimorfismo.

Sea $p \in \mathbb{R}_n[x]$ (codominio), construyamos $q \in \mathbb{R}_n[x]$ (dominio) tal que $T(q) = p$.

Si

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots.. + c_n x^n$$

Veamos que T es epimorfismo.

Sea $p \in \mathbb{R}_n[x]$ (codominio), construyamos $q \in \mathbb{R}_n[x]$ (dominio) tal que $T(q) = p$.

Si

$$p(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$$

entonces definimos

$$q(x) := c_0 + c_1(x-1) + ... + c_n(x-1)^n = p(x-1).$$

Veamos que T es epimorfismo.

Sea $p \in \mathbb{R}_n[x]$ (codominio), construyamos $q \in \mathbb{R}_n[x]$ (dominio) tal que $T(q) = p$.

Si

$$p(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$$

entonces definimos

$$q(x) := c_0 + c_1(x-1) + ... + c_n(x-1)^n = p(x-1).$$

Dado que

$$(T(q))(x) = q(x+1) = p((x-1)+1) = p(x)$$

Veamos que T es epimorfismo.

Sea $p \in \mathbb{R}_n[x]$ (codominio), construyamos $q \in \mathbb{R}_n[x]$ (dominio) tal que $T(q) = p$.

Si

$$p(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$$

entonces definimos

$$q(x) := c_0 + c_1(x-1) + ... + c_n(x-1)^n = p(x-1).$$

Dado que

$$(T(q))(x) = q(x+1) = p((x-1)+1) = p(x)$$

resulta que T es un epimorfismo.

Veamos que T es epimorfismo.

Sea $p \in \mathbb{R}_n[x]$ (codominio), construyamos $q \in \mathbb{R}_n[x]$ (dominio) tal que $T(q) = p$.

Si

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots.. + c_n x^n$$

entonces definimos

$$q(x) := c_0 + c_1(x-1) + \ldots.. + c_n(x-1)^n = p(x-1).$$

Dado que

$$(T(q))(x) = q(x+1) = p((x-1)+1) = p(x)$$

resulta que T es un epimorfismo.

Por corolario, T resulta un isomorfismo.

15) Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que

$$\begin{aligned} T((0,0,1)^T) &= (2, \quad 3, \quad 5)^T \\ T((0,1,1)^T) &= (1, \quad 0, \quad 0)^T \\ T((1,1,1)^T) &= (0, \quad 1, -1)^T \end{aligned}$$

$a)$ Probar que con esta información es posible obtener $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$.

$b)$ Determinar, fijada la base canónica en $\mathbb{R}^3$, la matriz de T.

$c)$ Utilizando el item anterior, obtener $\dim(nul(T))$ y $rg(T) = \dim(rec(T))$.

$d)$ Determinar si T es inversible.

a) De una manera similar al 3a) se demuestra que $\mathcal{B}_1 := \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

a) De una manera similar al 3a) se demuestra que $\mathcal{B}_1 := \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Sea $v \in \mathbb{R}^3$, resulta que existen únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1) = v.$$

a) De una manera similar al 3a) se demuestra que $\mathcal{B}_1 := \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Sea $v \in \mathbb{R}^3$, resulta que existen únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1) = v.$$

Valor de $T(v)$

Además de la linealidad, la existencia de a, b, c es clave para explicitar un valor posible de $T(v)$:

$$T(v) = T(a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1))$$

$a)$ De una manera similar al 3a) se demuestra que $\mathcal{B}_1 := \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Sea $v \in \mathbb{R}^3$, resulta que existen únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1) = v.$$

Valor de $T(v)$

Además de la linealidad, la existencia de a, b, c es clave para explicitar un valor posible de $T(v)$:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1)) \\ &= a \cdot T((0,0,1)) + b \cdot T((0,1,1)) + c \cdot T((1,1,1)) \end{aligned}$$

$a)$ De una manera similar al 3a) se demuestra que $\mathcal{B}_1 := \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Sea $v \in \mathbb{R}^3$, resulta que existen únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1) = v.$$

VALOR DE $T(v)$

Además de la linealidad, la existencia de a, b, c es clave para explicitar un valor posible de $T(v)$:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1)) \\ &= a \cdot T((0,0,1)) + b \cdot T((0,1,1)) + c \cdot T((1,1,1)) \\ &= a \cdot (2,3,5) + b \cdot (1,0,0) + c \cdot (0,1,-1) \end{aligned}$$

a) De una manera similar al 3a) se demuestra que $\mathcal{B}_1 := \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$.

Sea $v \in \mathbb{R}^3$, resulta que existen únicos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1) = v.$$

Valor de $T(v)$

Además de la linealidad, la existencia de a, b, c es clave para explicitar un valor posible de $T(v)$:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a \cdot (0,0,1) + b \cdot (0,1,1) + c \cdot (1,1,1)) \\ &= a \cdot T((0,0,1)) + b \cdot T((0,1,1)) + c \cdot T((1,1,1)) \\ &= a \cdot (2,3,5) + b \cdot (1,0,0) + c \cdot (0,1,-1) \\ &= (2a+b, 3a+c, 5a-c) \end{aligned}$$

$a)$ **BUENA DEFINICIÓN DE $T(v)$**

La unicidad de los coeficientes a, b, c me garantiza que T esté bien definida *a*) BUENA DEFINICIÓN DE $T(v)$

La unicidad de los coeficientes a, b, c me garantiza que T esté bien definida, es decir, que sea función. (acá termina el apartado a!)

$a)$ BUENA DEFINICIÓN DE $T(v)$

La unicidad de los coeficientes a, b, c me garantiza que T esté bien definida, es decir, que sea función. (acá termina el apartado a!)

Para ilustrar el problema de no tener una representación única, supongamos que agregamos al enunciado la hipótesis

$$T((1,2,3)) = (1,0,0)$$

$a)$ BUENA DEFINICIÓN DE $T(v)$

La unicidad de los coeficientes a, b, c me garantiza que T esté bien definida, es decir, que sea función. (acá termina el apartado a!)

Para ilustrar el problema de no tener una representación única, supongamos que agregamos al enunciado la hipótesis

$$T((1,2,3)) = (1,0,0)$$

El razonamiento de la parte roja sigue siendo válido pero nos dice que $T((1,2,3)) = (3,4,4)$, *a)* **Buena definición de $T(v)$**

La unicidad de los coeficientes a, b, c me garantiza que T esté bien definida, es decir, que sea función. (acá termina el apartado a!)

Para ilustrar el problema de no tener una representación única, supongamos que agregamos al enunciado la hipótesis

$$T((1,2,3)) = (1,0,0)$$

El razonamiento de la parte roja sigue siendo válido pero nos dice que $T((1,2,3)) = (3,4,4)$, contradiciendo la nueva información.

a) Buena definición de $T(v)$

La unicidad de los coeficientes a, b, c me garantiza que T esté bien definida, es decir, que sea función. (acá termina el apartado a!)

Para ilustrar el problema de no tener una representación única, supongamos que agregamos al enunciado la hipótesis

$$T((1,2,3)) = (1,0,0)$$

El razonamiento de la parte roja sigue siendo válido pero nos dice que $T((1,2,3)) = (3,4,4)$, contradiciendo la nueva información.

Saber los valores sobre una base del dominio es la información justa y necesaria:

a) Buena definición de $T(v)$

La unicidad de los coeficientes a, b, c me garantiza que T esté bien definida, es decir, que sea función. (acá termina el apartado a!)

Para ilustrar el problema de no tener una representación única, supongamos que agregamos al enunciado la hipótesis

$$T((1,2,3)) = (1,0,0)$$

El razonamiento de la parte roja sigue siendo válido pero nos dice que $T((1,2,3)) = (3,4,4)$, contradiciendo la nueva información.

Saber los valores sobre una base del dominio es la información justa y necesaria:

- Con menos elementos tenemos problemas de existencia.

$a)$ BUENA DEFINICIÓN DE $T(v)$

La unicidad de los coeficientes a, b, c me garantiza que T esté bien definida, es decir, que sea función. (acá termina el apartado a!)

Para ilustrar el problema de no tener una representación única, supongamos que agregamos al enunciado la hipótesis

$$T((1,2,3)) = (1,0,0)$$

El razonamiento de la parte roja sigue siendo válido pero nos dice que $T((1,2,3)) = (3,4,4)$, contradiciendo la nueva información.

Saber los valores sobre una base del dominio es la información justa y necesaria:

- Con menos elementos tenemos problemas de existencia.
- Con más información podemos tener problemas de inconsistencia.

$b)$ IDEA

$b)$ IDEA

Vamos a usar este resultado:

Sea $T: U \to V$ transformación lineal.
Si fijamos las bases $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de U y B de V, entonces la matriz asociada A de T es única y está determinada por $A^i = [T(u_i)]_B$, para $i = 1, 2, \dots, n.$, donde $[T(u_i)]_B$ es la representación de la imagen por T de u_i en la base B.

b) IDEA

Vamos a usar este resultado:

> Sea $T\colon U \to V$ transformación lineal.
> Si fijamos las bases $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de U y B de V, entonces la matriz asociada A de T es única y está determinada por $A^i = [T(u_i)]_B$, para $i = 1, 2, \ldots, n.$, donde $[T(u_i)]_B$ es la representación de la imagen por T de u_i en la base B.

En este caso particular, dominio y codominio coinciden ($\mathbb{R}^3$). Además, usamos para ambos espacios la base canónica.

b) IDEA

Vamos a usar este resultado:

> Sea $T\colon U \to V$ transformación lineal.
> Si fijamos las bases $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de U y B de V, entonces la matriz asociada A de T es única y está determinada por $A^i = [T(u_i)]_B$, para $i = 1, 2, \ldots, n.$, donde $[T(u_i)]_B$ es la representación de la imagen por T de u_i en la base B.

En este caso particular, dominio y codominio coinciden ($\mathbb{R}^3$). Además, usamos para ambos espacios la base canónica.
Con el objetivo de aplicar el resultado, debemos evaluar T en la base canónica y buscar las representaciones de dichas imágenes en la base canónica.

b) <u>Solución</u>

Sea $\mathcal{B} := \{(0,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,1)^T\}$.

b) SOLUCIÓN

Sea $\mathcal{B} := \left\{(0,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,1)^T\right\}$.

Si notamos con (a_i, b_i, c_i) a los coeficientes del vector canónico e_i en la base $\mathcal{B}$, con i de 1 a 3

b) SOLUCIÓN

Sea $\mathcal{B} := \{(0,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,1)^T\}$.

Si notamos con (a_i, b_i, c_i) a los coeficientes del vector canónico e_i en la base $\mathcal{B}$, con i de 1 a 3, tenemos que:

$$T(e_i) = a_i \cdot (2,3,5)^T + b_i \cdot (1,0,0)^T + c_i \cdot (0,1,-1)^T$$

b) SOLUCIÓN

Sea $\mathcal{B} := \left\{(0,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,1)^T\right\}$.

Si notamos con (a_i, b_i, c_i) a los coeficientes del vector canónico e_i en la base $\mathcal{B}$, con i de 1 a 3, tenemos que:

$$T(e_i) = a_i \cdot (2,3,5)^T + b_i \cdot (1,0,0)^T + c_i \cdot (0,1,-1)^T$$

Luego, si M es la matriz asociada a T respecto de la base canónica del dominio y codominio, entonces:

$$M = \left[\begin{array}{ccc} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{array}\right]$$

b) SOLUCIÓN

Sea $\mathcal{B} := \left\{(0,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,1)^T\right\}$.

Si notamos con (a_i, b_i, c_i) a los coeficientes del vector canónico e_i en la base $\mathcal{B}$, con i de 1 a 3, tenemos que:

$$T(e_i) = a_i \cdot (2,3,5)^T + b_i \cdot (1,0,0)^T + c_i \cdot (0,1,-1)^T$$

Luego, si M es la matriz asociada a T respecto de la base canónica del dominio y codominio, entonces:

$$\begin{aligned} M &= \left[\begin{array}{ccc} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{array}\right] \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) SOLUCIÓN

Sea $\mathcal{B} := \{(0,0,1)^T, (0,1,1)^T, (1,1,1)^T\}$.

Si notamos con (a_i, b_i, c_i) a los coeficientes del vector canónico e_i en la base $\mathcal{B}$, con i de 1 a 3, tenemos que:

$$T(e_i) = a_i \cdot (2,3,5)^T + b_i \cdot (1,0,0)^T + c_i \cdot (0,1,-1)^T$$

Luego, si M es la matriz asociada a T respecto de la base canónica del dominio y codominio, entonces:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para conocer M solo nos falta conocer a los (a_i, b_i, c_i).

$b)$ Como los (a_i, b_i, c_i) son los coeficientes de e_i en la base $\mathcal{B}$ son solución del siguiente sistema:

$b)$ Como los (a_i, b_i, c_i) son los coeficientes de e_i en la base $\mathcal{B}$ son solución del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = e_i$$

b) Como los (a_i, b_i, c_i) son los coeficientes de e_i en la base $\mathcal{B}$ son solución del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = e_i$$

Resolviendo cada uno de los tres sistemas por sustitución (despejar c_i, luego b_i y por último a_i) llegamos a que:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Como los (a_i, b_i, c_i) son los coeficientes de e_i en la base $\mathcal{B}$ son solución del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = e_i$$

Resolviendo cada uno de los tres sistemas por sustitución (despejar c_i, luego b_i y por último a_i) llegamos a que:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la igualdad de la slide anterior:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Como los (a_i, b_i, c_i) son los coeficientes de e_i en la base $\mathcal{B}$ son solución del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = e_i$$

Resolviendo cada uno de los tres sistemas por sustitución (despejar c_i, luego b_i y por último a_i) llegamos a que:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la igualdad de la slide anterior:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$c)$ Teniendo M este ejercicio es fácil.

$c)$ Teniendo M este ejercicio es fácil.
Como la matriz M en su forma escalonada es

$$U := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$c)$ Teniendo M este ejercicio es fácil.
Como la matriz M en su forma escalonada es

$$U := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

resulta que:

- $dim(nul(T))$

$c)$ Teniendo M este ejercicio es fácil.
Como la matriz M en su forma escalonada es

$$U := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

resulta que:

- $dim(nul(T)) = dim(nul(M))$

$c)$ Teniendo M este ejercicio es fácil.
Como la matriz M en su forma escalonada es

$$U := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

resulta que:

- $dim(nul(T)) = dim(nul(M)) = dim(nul(U))$

$c)$ Teniendo M este ejercicio es fácil.
Como la matriz M en su forma escalonada es

$$U := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

resulta que:

- $dim(nul(T)) = dim(nul(M)) = dim(nul(U)) = 0$

$c)$ Teniendo M este ejercicio es fácil.
Como la matriz M en su forma escalonada es

$$U := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

resulta que:

- $dim(nul(T)) = dim(nul(M)) = dim(nul(U)) = 0$
- $rg(T) = dim(rec(T)) = dim(C(M)) = dim(C(U)) = 3$

d) Veamos que T es inversible.

d) Veamos que T es inversible.

Como $dim(nul(T)) = 0$ resulta que T es un monomorfismo.

$d)$ Veamos que T es inversible.

Como $dim(nul(T)) = 0$ resulta que T es un monomorfismo.

Como $dim(rec(T)) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ resulta que T es un epimorfismo.

d) Veamos que T es inversible.

Como $dim(nul(T)) = 0$ resulta que T es un monomorfismo.

Como $dim(rec(T)) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ resulta que T es un epimorfismo.

Como T es un monomorfismo y epimorfismo resulta que T es un isomorfismo.

d) Veamos que T es inversible.

Como $dim(nul(T)) = 0$ resulta que T es un monomorfismo.

Como $dim(rec(T)) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ resulta que T es un epimorfismo.

Como T es un monomorfismo y epimorfismo resulta que T es un isomorfismo. En particular, T es biyectiva.

d) Veamos que T es inversible.

Como $dim(nul(T)) = 0$ resulta que T es un monomorfismo.

Como $dim(rec(T)) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ resulta que T es un epimorfismo.

Como T es un monomorfismo y epimorfismo resulta que T es un isomorfismo. En particular, T es biyectiva.

Como T es biyectiva resulta que T es inversible.

19) Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Probar que V y W son isomorfos si y solo si $\dim V = \dim W$.

Es uno de los lemas de las slides del capítulo 2 cuarta parte. Faltaba demostrar la vuelta.

Sean dos bases del mismo cardinal $\{v_1, \ldots, v_k\}$ y $\{w_1, \ldots, w_k\}$ de V y W, respectivamente.

Definimos a T como la transformación lineal $T \colon V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, ..., k$. Luego, para $v \in V$, si $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ entonces

$$T(v) = T\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i T(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i$$

Veamos que T es un isomorfismo.

Sea $T(v) = 0$ para algún $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in V$. Tenemos que

$$0 = T(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i.$$

Como los w_i son linealmente independientes (por ser base), tenemos que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Por lo tanto, $v = 0$ y resulta que T es un **monomorfismo**.

Sea $w \in W$ tal que $w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$. Si definimos $v := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, entonces $T(v) = w$, por lo que T es un **epimorfismo**. Concluimos que T es un **isomorfismo**.

21) Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

a) Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

b) Si $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 0)\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

21) Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

a) Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

b) Si $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 0)\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

- Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$

21) Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

a) Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

b) Si $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 0)\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

- Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$
- Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$

21) Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

a) Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada estándar para $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

b) Si $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 0)\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

- Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$
- Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$
- Armar A_T poniendo como columnas las representaciones encontradas en el ítem anterior.

Prestar atención a los colores!

Los vectores rojos tienen 3 componentes y los azules tienen 2 componentes

$a)$

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

$a)$

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

- $T(e_1) = T((1,0,0)) = (1,-1)$
- $T(e_2) = T((0,1,0)) = (1,0)$
- $T(e_3) = T((0,0,1)) = (0,2)$

Prestar atención a los colores!

Los vectores rojos tienen 3 componentes y los azules tienen 2 componentes

$a)$

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

- $T(e_1) = T((1,0,0)) = (1,-1)$
- $T(e_2) = T((0,1,0)) = (1,0)$
- $T(e_3) = T((0,0,1)) = (0,2)$

Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:

Prestar atención a los colores!

Los vectores rojos tienen 3 componentes y los azules tienen 2 componentes

$a)$

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

- $T(e_1) = T((1,0,0)) = (1,-1)$
- $T(e_2) = T((0,1,0)) = (1,0)$
- $T(e_3) = T((0,0,1)) = (0,2)$

Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:

- $(1,-1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2.$
- $(1,0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$
- $(0,2) = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2.$

$a)$ Armar A_T poniendo como columnas las representaciones encontradas en el ítem anterior:

$a)$ Armar A_T poniendo como columnas las representaciones encontradas en el ítem anterior:

- $(1,-1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2.$
- $(1,0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2.$
- $(0,2) = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2.$

$a)$ Armar A_T poniendo como columnas las representaciones encontradas en el ítem anterior:

- $(1,-1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2$.
- $(1,0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$.
- $(0,2) = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$.

$$A_T = [[T(e_1)]_{\mathcal{B}'} \; [T(e_2)]_{\mathcal{B}'} \; [T(e_3)]_{\mathcal{B}'}] =$$

$a)$ Armar A_T poniendo como columnas las representaciones encontradas en el ítem anterior:

- $(1,-1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2$.
- $(1,0) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$.
- $(0,2) = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$.

$$A_T = [[T(e_1)]_{\mathcal{B}'} \; [T(e_2)]_{\mathcal{B}'} \; [T(e_3)]_{\mathcal{B}'}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$b)$ (verificar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases)

$b)$ (verificar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases)

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

b) (verificar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases)

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

- $T((1,0,-1)) = (1,-3)$
- $T((1,1,1)) = (2,1)$
- $T((1,0,0)) = (1,-1)$

$b)$ (verificar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases)

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

- $T((1,0,-1)) = (1,-3)$
- $T((1,1,1)) = (2,1)$
- $T((1,0,0)) = (1,-1)$

Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:

$b)$ (verificar que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases)

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

- $T((1,0,-1)) = (1,-3)$
- $T((1,1,1)) = (2,1)$
- $T((1,0,0)) = (1,-1)$

Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:

- $(1,-3) = (-3)\cdot e_2 + 1\cdot e_1$.
- $(2,1) = 1\cdot e_2 + 2\cdot e_1$.
- $(1,-1) = (-1)\cdot e_2 + 1\cdot e_1$.

Ejercicio 21 de la práctica 3, parte 4

b) Armar A_T poniendo como columnas las representaciones encontradas en el ítem anterior:

$b)$ Armar A_T poniendo como columnas las representaciones encontradas en el ítem anterior:

- $(1, -3) = -3 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1$.
- $(2, 1) = 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_1$.
- $(1, -1) = -1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1$.

Ejercicio 21 de la práctica 3, parte 4

$b)$ Armar A_T poniendo como columnas las representaciones encontradas en el ítem anterior:

- $(1,-3) = -3 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1.$
- $(2,1) = 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_1.$
- $(1,-1) = -1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1.$

$$A_T =$$

$b)$ Armar A_T poniendo como columnas las representaciones encontradas en el ítem anterior:

- $(1,-3) = -3 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1$.
- $(2,1) = 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_1$.
- $(1,-1) = -1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_1$.

$$A_T = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

c) Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

$c)$

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

c) Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

$c)$

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

- $T(e_1) = T((1,0,0)) = (1,-1)$
- $T(e_2) = T((0,1,0)) = (1,0)$
- $T(e_3) = T((0,0,1)) = (0,2)$

$c)$ Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ ¿Cuál es la matriz de T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

$c)$

Aplicar T a los elementos de $\mathcal{B}$:

- $T(e_1) = T((1,0,0)) = (1,-1)$
- $T(e_2) = T((0,1,0)) = (1,0)$
- $T(e_3) = T((0,0,1)) = (0,2)$

La primer parte es igual que en a), porque no cambiamos la base del dominio.

$c)$

Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:

$c)$

Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:

Como no es tan fácil ver cuáles son los coeficientes, colocamos incógnitas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

$c)$

Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:

Como no es tan fácil ver cuáles son los coeficientes, colocamos incógnitas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

- $(1, -1) = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2$.
- $(1, 0) = a_3 \cdot v_1 + a_4 \cdot v_2$.
- $(0, 2) = a_5 \cdot v_1 + a_6 \cdot v_2$.

$c)$

Encontrar la representación de las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$:

Como no es tan fácil ver cuáles son los coeficientes, colocamos incógnitas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$

- $(1, -1) = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2.$
- $(1, 0) = a_3 \cdot v_1 + a_4 \cdot v_2.$
- $(0, 2) = a_5 \cdot v_1 + a_6 \cdot v_2.$

Si pensamos matricialmente...

$c)$

Si definimos $M := [v_1 \ v_2]$ entonces puedo reescribir lo de antes como:

$c)$

Si definimos $M := [v_1 \ \ v_2]$ entonces puedo reescribir lo de antes como:

- $(1,-1)^T = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = M(a_1, a_2)^T$.

$c)$

Si definimos $M := [v_1 \ v_2]$ entonces puedo reescribir lo de antes como:

- $(1,-1)^T = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = M(a_1, a_2)^T$.
- $(1,0)^T = a_3 \cdot v_1 + a_4 \cdot v_2 = M(a_3, a_4)^T$.

Ejercicios
Ejercicio 3
Ejercicio 10
Ejercicio 11
Ejercicio 14
Ejercicio 15
Ejercicio 19
Ejercicio 21

$c)$

Si definimos $M := [v_1 \;\; v_2]$ entonces puedo reescribir lo de antes como:

- $(1,-1)^T = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = M(a_1, a_2)^T$.
- $(1,0)^T = a_3 \cdot v_1 + a_4 \cdot v_2 = M(a_3, a_4)^T$.
- $(0,2)^T = a_5 \cdot v_1 + a_6 \cdot v_2 = M(a_5, a_6)^T$.

$c)$

Si definimos $M := [v_1 \ v_2]$ entonces puedo reescribir lo de antes como:

- $(1,-1)^T = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = M(a_1, a_2)^T$.
- $(1,0)^T = a_3 \cdot v_1 + a_4 \cdot v_2 = M(a_3, a_4)^T$.
- $(0,2)^T = a_5 \cdot v_1 + a_6 \cdot v_2 = M(a_5, a_6)^T$.

Pensándolo matricialmente:

$c)$

Si definimos $M := [v_1 \;\; v_2]$ entonces puedo reescribir lo de antes como:

- $(1,-1)^T = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = M(a_1, a_2)^T$.
- $(1,0)^T = a_3 \cdot v_1 + a_4 \cdot v_2 = M(a_3, a_4)^T$.
- $(0,2)^T = a_5 \cdot v_1 + a_6 \cdot v_2 = M(a_5, a_6)^T$.

Pensándolo matricialmente:

$$M \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$c)$

Si definimos $M := [v_1 \ \ v_2]$ entonces puedo reescribir lo de antes como:

- $(1,-1)^T = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = M(a_1, a_2)^T$.
- $(1,0)^T = a_3 \cdot v_1 + a_4 \cdot v_2 = M(a_3, a_4)^T$.
- $(0,2)^T = a_5 \cdot v_1 + a_6 \cdot v_2 = M(a_5, a_6)^T$.

Pensándolo matricialmente:

$$M \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M A_T = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix}$$

$c)$

Si definimos $M := [v_1 \;\; v_2]$ entonces puedo reescribir lo de antes como:

- $(1,-1)^T = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = M(a_1,a_2)^T$.
- $(1,0)^T = a_3 \cdot v_1 + a_4 \cdot v_2 = M(a_3,a_4)^T$.
- $(0,2)^T = a_5 \cdot v_1 + a_6 \cdot v_2 = M(a_5,a_6)^T$.

Pensándolo matricialmente:

$$M \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$MA_T = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix}$$

Para obtener A_T basta escalonar M y resolver el sistema para tres lados derechos.

$c)$

Si definimos $M := [v_1 \ v_2]$ entonces puedo reescribir lo de antes como:

- $(1,-1)^T = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 = M(a_1, a_2)^T$.
- $(1,0)^T = a_3 \cdot v_1 + a_4 \cdot v_2 = M(a_3, a_4)^T$.
- $(0,2)^T = a_5 \cdot v_1 + a_6 \cdot v_2 = M(a_5, a_6)^T$.

Pensándolo matricialmente:

$$M \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$MA_T = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix}$$

Para obtener A_T basta escalonar M y resolver el sistema para tres lados derechos. Este apartado está para ilustrar cómo intervienen las dos bases involucradas.