**Universidad Nacional de Rosario**

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

# Probabilidad y Estadística

## *Unidad 7*

Autor del resumen:

Charles Chaplin

Julio 2020

# Chapter 1

# Cadenas de Markov : Primeros pasos

## 1.1 Introduccion

Consideren un juego con un tablero que se base en 10 casillas cuadradas (numeradas 1-10) dispuestas en circulo. (Un Monopoly en miniatura.) Un jugador empieza en la casilla 1. A cada turno, el jugador tira un dado y se mueve alrededor del tablero las cantidad casillas que aparezca en la cara del dado. El jugador se sigue moviendo alrededor de las casillas de acuerdo a la tirada de dado (Esta garantizado que este no es un juego muy exitante...)

Ahora bien, sea $X_k$ el numero de la casilla en el cual el jugador se encuentra luego de k movimientos, con $X_0 = 1$. Supongamos que el jugador obtiene las siguientes tiradas 2,1 y 4. Las primeras cuatro posiciones son:

$$(X_0, X_1, X_2, X_3) = (1, 3, 4, 8).$$

Dada esta informacion, que podemos decir acerca de el proximo casillero ($X_4$) que ocupara el jugador? A pesar de que sabemos el historial completo de tiradas del jugador, la unica informacion relevante para predecir su posicion en el futuro es la ubicacion mas reciente (en este caso $X_3$). Ya que $X_3 = 8$ entonces necesariamente $X_4 \in A = \{9, 10, 1, 2, 3, 4\}$ y cada resultable posible tiene la misma probabilidad. Formalmente

$$\forall_{j \in A}\ P(X_4 = j | X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 8) = P(X_4 = j | X_3 = 8) = \frac{1}{6}.$$

Dada la posicion mas actual del jugador $X_3$, su futura posicion $X_4$ es independiente del pasado de la historia $X_0, X_1, X_2$.

La secuencia de posiciones del jugador $X_0, X_1, X_2, ...$ es un proceso estocastico llamado **Cadena de Markov**. Este juego ilustra una muy importante propiedad de la cadena de Markov: **El futuro, dado el presente, es independiente del pasado**

**Cadena de Markov.** Sea S un conjunto discreto. Una cadena de Markov es una secuencia de variables aleatorias $X_0, X_1, ...$, cuyos espacios muestrales son S con la siguiente propiedad: Dado $n \geq 0$

$$\forall_{i,j \in S}\ P(X_{n+1} = j | X_0 = x_0, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

El conjunto S es el **Espacio de Estados** de la cadena de Markov. Generalmente nos referimos a $X_n = i$ como que la cadena visito la posicion i en n tiempos.

Una cadena de Markov es **homogenea en el tiempo** si las probabilidades mencionadas anteriormente no dependen de n. Esto es

$$\forall_{n\geq 0}\ P(X_{n+1}=j|X_n=i) - P(X_1=j|X_0=i)$$

Dado que las probabilidades anteriores dependen solamente de i y j, pueden ser almacenadas en una matriz **P** cuya ij-esima entrada corresponde a $P_{ij} = P(X_1 = j|X_0 = i)$. A esta matriz se la llama **matriz de transicion** o **matriz de Markov**, que contiene las probabilidades de moverse de un estado actual a cualquier otro (lo que se conoce como "probabilidad de un paso"). Si el espacio de estados tiene k elementos, entonces la matriz de transicion tiene $kxk$. Si el espacio de estados es infinito contable, la matriz de transicion es infinita.

Las entradas de todas las matrices de transicion de Markov son no-negativas y cada fila suma 1,

$$\forall_{fila\ i}\ \sum_j P_{ij} = \sum_j P(X_1=j|X_0=i) = \sum_j \frac{P(X_1=j,X_0=i)}{P(X_0=i)} = \frac{P(X_0=i)}{P(X_0=i)} = 1$$

**Ejemplo p.42 Dobrow**

**Matriz Estocastica** Una matriz estocastica es una matriz cuadrada, que satisface:

1. $\forall_{ij}\ P_{ij} \geq 0$
2. Para cada fila i, $\sum_j Pij = 1$.

**Ejemplos p.42-52**

## 1.2 Calculos basicos