

Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Tp final

Autor:

Demagistris, Santiago Ignacio

Agosto 2020

Indice

1	Ejercicio 1	2
2	Ejercicio 2	4
3	Ejercicio 3	5
4	Ejercicio 4	6
5	Ejercicio 5	7
6	Ejercicio 6	10
7	Ejercicio 7	11
8	Ejercicio 8	12
9	Simulaciones	13
9.1	Ejercicio 1	13
9.2	Ejercicio 2	14
9.3	Ejercicio 3	15
9.4	Ejercicio 4	16
9.5	Ejercicio 6	17
9.6	Ejercicio 7	20

Ejercicio 1

a) El espacio muestral sobre el cual estamos trabajando es $S=\{0,1\}$, donde cara es 1 y cruz es 0.

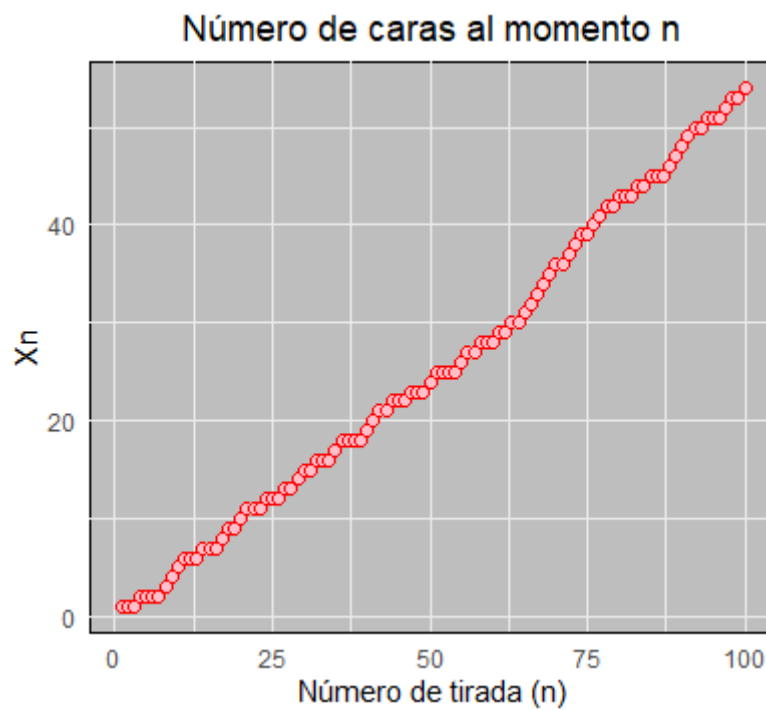


Figure 1.1: Tiradas de moneda

Sea $A=\{\text{"Obtener cara al lanzar la moneda"}\}$. Podemos observar que se obtuvo un total de 54 caras en este proceso, por lo tanto $P(A) \simeq \frac{54}{100} = 0.54 = p$

b)

($\mathbf{P(X=1)}$). Sabemos que $X=\{\text{"Número de veces que ocurrió el evento A"}\}$ y que $X \sim Bi(n, 0.54)$ (siendo $p=0.54$ observado en la simulación). Por lo tanto $P(X = 1) = \binom{n}{1}(0.54)(0.46)^{n-1}$ y $E(X) = n0.54 = 54$.

c) Sea Y = Número de tiradas hasta que salgan 3 caras. $Y \sim \text{Pascal}$, por lo que

$$P(Y = k) = \binom{k-1}{3-1} 0.54^3 0.46^{k-3} = \binom{k-1}{2} 0.54^3 0.46^{k-3}$$

y $E(Y) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0.54} \simeq 5.55$. Es decir que se espera que entre la 5ta y la 6ta tirada de la moneda obtengamos 3 caras.

d) Simulación moneda sesgada:

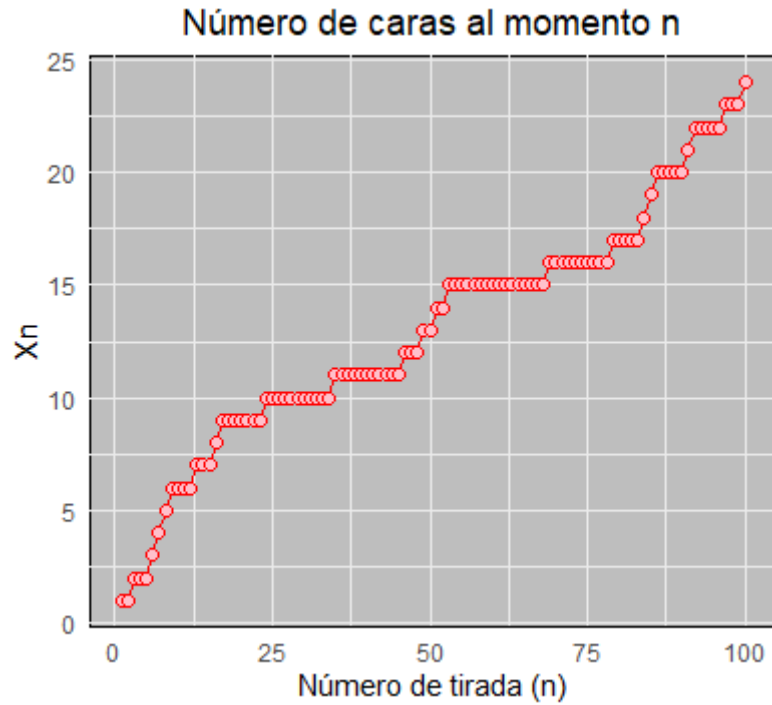


Figure 1.2: Tiradas de moneda sesgada

Al simular el proceso con $n=100$ obtuve en total 24 caras, por lo tanto podría aproximar $P(A) \simeq 0,24$. Por lo tanto $P(X = 1) = \binom{n}{1} (0.24)(0.76)^{n-1}$ y $E(X) = n0.24$

Ejercicio 2

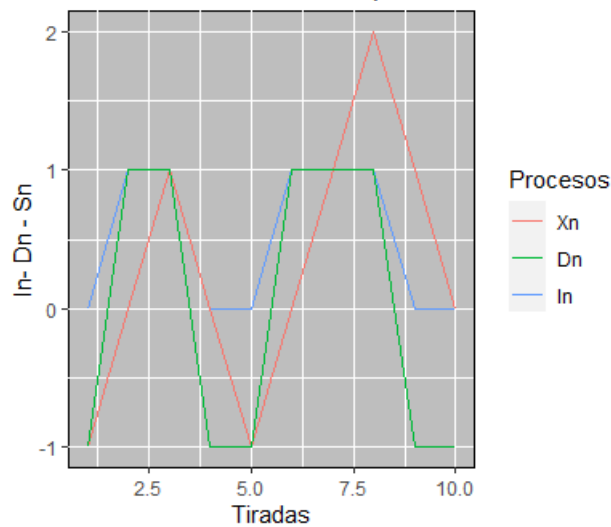
Simulación.

La trayectoria descrita por X_n es causa del lanzamiento de la moneda (10 veces en este caso). Cada vez que salga cara en la moneda el sujeto se desplazará 1 unidad en el espacio y cuando salga cruz un 0. (Cara representado con 1 y cruz representado con 0). La decisión de desplazamiento esta dada por D_n , mientras que X_n solo describe la trayectoria, es decir la frecuencia acumulada de los resultados obtenidos.

Tabla de frecuencias

I_n	D_n	S_n
0	-1	-1
1	1	0
1	1	1
0	-1	0
0	-1	-1
1	1	0
1	1	1
1	1	2
0	-1	1
0	-1	0

Moneda vs Posicion vs Desplazamiento



Ejercicio 3

b) Para realizar la simulación usaré $k=50$, $p=0.55$, $S=100$, perder=0. El resultado obtenido fue el siguiente:

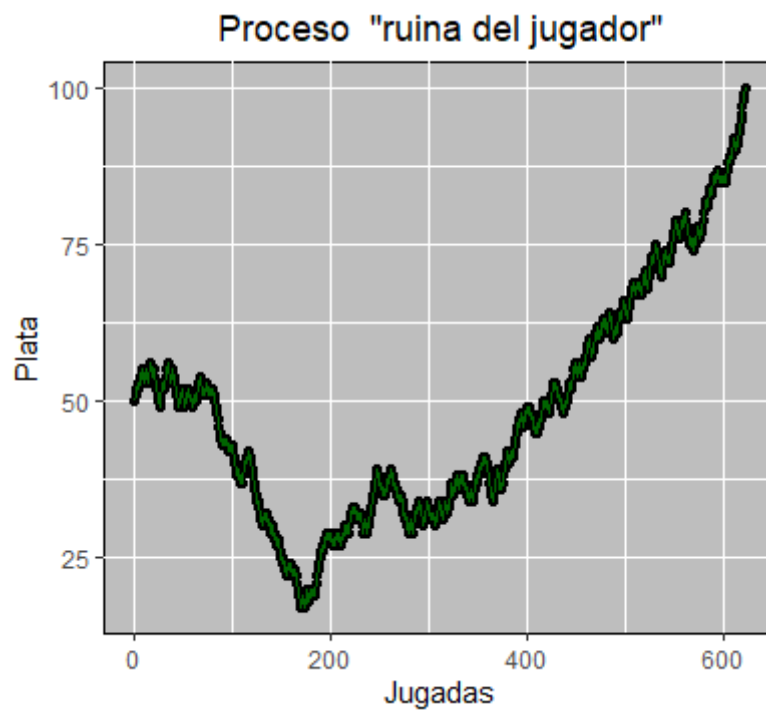


Figure 3.1: Trayectoria. Ruina del jugador

- Con $k=20$, $S=60$, $p=0.5001$ y 1000 trayectorias obtuve una aproximación a la probabilidad de caer en la ruina de 0.678

Ejercicio 4

a) simulación.

Al realizar la simulación observe 50000 repeticiones del experimento y obtuve un promedio de 21.08484 minutos.

b) Sea $X = \{\text{"Tiempo en que tarda el ratón en salir del laberinto"}\}$, donde X va a depender de las decisiones del ratón, estas pueden ser "ii", "id", "d1". Las elecciones se desarrollan en dos etapas, en la primer etapa nos encontramos con que

$$P(\{d1\}) = 1/2$$

En el caso de elegir el camino hacia la izquierda (con una probabilidad de $1/2$) nos encontramos en la segunda etapa en la cual:

$$P(\{i2\}|\{i1\}) = 1/3$$

$$P(\{d2\}|\{i1\}) = 2/3$$

De donde obtenemos que

$$P(\{ii\}) = P(\{i2\} \cap \{i1\}) = P(\{i2\}|\{i1\})P(\{i1\}) = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6$$

$$P(\{id\}) = P(\{d2\} \cap \{i1\}) = P(\{d2\}|\{i1\})P(\{i1\}) = 2/3 \cdot 1/2 = 2/6 = 1/3$$

Podemos observar que las posibles elecciones del ratón son "ii", "id" y "d". Por lo cual $E(X) = P(\{ii\})E(X|ii) + P(\{id\})E(X|id) + P(\{d1\})E(X|d1)$ donde

$$\begin{cases} E(X|ii) &= 2 \\ E(X|id) &= E(X) + 5 \\ E(X|d1) &= E(X) + 3 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$E(X) = 1/6 \cdot 2 + 2/6 \cdot (E(X) + 5) + 1/2 \cdot (E(X) + 3)$$

$$= 5/6 E(X) + 7/2$$

$$\Rightarrow E(X) = 21$$

Este resultado concuerda con el de la simulación.

Ejercicio 5

- a) La matriz de transición P es no-regular. Esta cadena de Markov presenta 4 clases de comunicación (una por cada estado). El estado M es absorbente, por lo cual la cadena de Markov es absorbente, los demás estados son de transición.
- b) Para $n=10$ pasos obtenemos la matriz P^n , donde P_{ij}^n representa la probabilidad de llegar a j desde i en n pasos.

$$P^{10} \simeq \begin{pmatrix} 0.99004 & 0.00969 & 0.000214 & 0.00005069 \\ 0 & 0.94159 & 0.04078 & 0.0176248 \\ 0 & 0 & 0.425037 & 0.5749629 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Partiendo desde un estado luego de 10 unidades de observación en la evolución de esta persona podemos observar:

”Suceptible”. **Suceptible.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto siga en su estado de suceptibilidad de 0.99004, luego de 10 unidades de observación.

VIH. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga VIH de 0.00969, luego de 10 unidades de observación.

SIDA. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.000214, luego de 10 unidades de observación.

Muerto. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.00005069, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto es suceptible, en 10 unidades de observación, es altamente probable que se mantenga en esta condicion.

”VIH”. **Suceptible.** Partiendo desde VIH no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado ”suceptible” , luego de 10 unidades de observación.

VIH. Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condicion de 0.94159, luego de 10 unidades de observación.

SIDA. Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.04078, luego de 10 unidades de observación.

Muerto. Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.0176248, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto esta diagnosticado con VIH, tiene altas probabilidades de mantener su condición y no puede librarse de su enfermedad.

”SIDA”. **Suceptible.** Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de ”suceptibilidad” , luego de 10 unidades de observación.

Suceptible. Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de "VIH" , luego de 10 unidades de observación.

SIDA. Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condicion de 0.425037, luego de 10 unidades de observación.

Muerto. Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.5749629, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto esta diagnosticado con SIDA, tiene un 57% de morir luego de 10 unidades de observación. No puede volver a la condición de VIH, ni a la de suceptible, mientras que se puede mantener con SIDA con una probabilidad de 0.425037% .

Por otro lado... si esta muerto... bueno, digamos que es el estado absorbente por excelencia.

c) Sabemos que

$$Q = \begin{pmatrix} 0.999 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0.994 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0.918 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Y por lo tanto,

$$F = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & 0 & \frac{500}{41} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Donde F es la matriz fundamental, en la cual F_{ij} es el número esperado de visitas a j dado que la cadena comienza en i. Por lo tanto, si iniciamos en el estado

"Suceptible" el número esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 1178.862

"VIH" el número esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 178.862

"SIDA" el número esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 12.19

Cada uno de los resultados obtenidos de acuerdo al estado desde el que se comienza a contabilizar, es el promedio de unidades de observación para que la persona llegue al estado de muerte.

d) Para la búsqueda de la distribución estacionaria utilizaré la técnica vista en clase. Busco un vector $x=(x_1,x_2,x_3,1)$ tal que

$$xP = x$$

Por lo cual obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$(1) \quad x_1 0.999 + x_2 0 + x_3 0 + 0 = x_1$$

$$(2) \quad x_1 0.001 + x_2 0.994 + x_3 0 + 0 = x_2$$

$$(3) \quad x_1 0 + x_2 0.006 + x_3 0.918 + 0 = x_3$$

$$(4) \quad x_1 0 + x_2 0 + x_3 0.082 + 1 = 1$$

$$(4) \Rightarrow X_3 = 0$$

$$(4)(3) \Rightarrow X_2 = 0$$

$$(4)(3)(2) \Rightarrow X_1 = 0$$

Se puede observar que las componentes en x suman 1 por lo tanto $x = \pi$ es la distribución estacionaria de esta cadena de Markov.

e) Al ser una cadena absorbente tenemos que:

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.082 \end{pmatrix} \quad F = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & 0 & \frac{500}{41} \end{pmatrix} \quad FR = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & (I-Q)^{-1}R \\ \hline 0 & I \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto esta cadena tiene distribución límite.

Ejercicio 6

a) El modelado de este PageRank como cadena de Markov produce la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

b) simulación.

c) Obtuve el siguiente vector de frecuencias relativas : $[0.25, 0.16, 0.04, 0.06, 0.10, 0.34, 0.05]$. Por lo cual con $n=100$ suponemos que el rango de las páginas a,b,c...,g corresponden con las posiciones desde 1 a 7 del vector obtenido por medio de la simulación.

Ejercicio 7

a) Sabemos que Juan recibe 10 mensajes por hora, por lo tanto $\lambda = 10$ y que nos situamos dentro del modelo de proceso de Poisson. Sea N_t el número de mensajes que Juan recibe al tiempo t , como el análisis comienza desde las 10am $t=0$ equivale a las 10 am. Deseamos hallar la probabilidad $P(N_2 = 18, N_7 = 70) = P(N_2 = 18, N_7 - N_2 = 52)$, ya que $12 - 10 = 2$, $17 - 10 = 7$ y $70 - 18 = 52$. Como estos intervalos de tiempo son disjuntos $((0,2], (2,5])$ entonces N_2 y N_5 son variables aleatorias independientes. Por lo tanto, $P(N_2 = 18, N_7 - N_2 = 52) = P(N_2 = 18)P(N_7 - N_2 = 52) = P(N_2 = 18)P(N_5 = 52) = \frac{e^{-20}(20)^{18}}{18!} \frac{e^{-50}(50)^{52}}{52!} = 0.004481022$

b)

Ejercicio 8

- a) Dada la distribución inicial π_0 , y la matriz de transición P, luego de dos semanas nos encontramos con la siguiente probabilidad de ataques a los puertos:

$$\pi_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{8}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{8}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\pi_0 P^2 = (0 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4})$$

Los puertos con menos probabilidad de ser atacados son el 135 y 445, mientras que el que tiene más probabilidad de ser atacado es el 139. Se puede observar que el puerto 80 no tiene posibilidad de ser atacado.

- b) Esta cadena presenta una matriz de transición regular ya que:

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4387} & \frac{61}{11964081} & \frac{885}{5400719} & \frac{1019}{3203451} & \frac{167}{2113687} \\ \frac{237952}{3087} & \frac{34027136}{5128733} & \frac{17013568}{3700267} & \frac{17013568}{2425947} & \frac{17013568}{1558587} \\ \frac{146432}{579} & \frac{20939776}{1591501} & \frac{10469888}{633335} & \frac{10469888}{1898595} & \frac{10469888}{504509} \\ \frac{25168}{885} & \frac{7198048}{1268269} & \frac{1799512}{911497} & \frac{7198048}{152189} & \frac{3599024}{399807} \\ \frac{36608}{5234944} & & \frac{2617472}{654368} & & \frac{2617472}{167} \end{pmatrix}$$

presenta todas sus entradas mayores a 0. Por lo visto en la teoría si una matriz de transición de una cadena de Markov es regular, entonces la cadena tiene una distribución límite, la cual es la única distribución estacionaria de la cadena. Por lo tanto si buscamos c y x de forma tal que $cxP = cx$ y $\sum_{i \in cx} cx_i = 1$, entonces obtendremos $\pi = cx$ (la distribución estacionaria). Gracias a la ayuda de un software puedo concluir que:

$$\pi =$$

$$\pi = (0, 02146667, 0, 2669333, 0, 3434667, 0, 2273333, 0, 1408)$$

Es la distribución límite de la matriz P.

Simulaciones

9.1 Ejercicio 1

n = 100 Cantidad de tiradas

```
simulacion = simular(n)
```

```
simular <- function(n){
```

```
  In <- tirarMoneda(n) (n tiradas de una moneda)
```

```
  Xn <- cumsum(In) (número de caras al momento n - Frecuencia relativa acumulada -)
```

```
  vectorTiradas <- c(1:n)
```

```
  return (data.frame(Xn,vectorTiradas))
}
```

```
tirarMoneda<-function(n){ (Tirar moneda n veces)
```

```
  return(sample(0:1,100,replace = TRUE)) (Vector de longitud n donde cada posicion tiene 1 o 0)
```

```
}
```

d)

```
tirarMonedaSesgada <- function(n){
```

```
  return (sample(0:2,100, replace =TRUE)%%2) }
```

De esta manera trabajo sobre un espacio muestral $S_x\{0, 1, 2\}$, donde $A=\{1\}=\{\text{"Obtuve cara"}\}$ y $A^c=\{\text{"Obtuve Cruz"}\}$

9.2 Ejercicio 2

```
simular <- function(n){  
  
  In <- tirarMoneda(n) - Tiro n veces la moneda  
  
  Tiradas <- c(1:n) - Genero el eje X  
  
  Dn = variableAleatoria(In) - Obtengo la variable aleatoria Dn apartir de In  
  
  Xn = cumsum(Dn) - Obtengo el desplazamiento como la frecuencia relativa acumulada de Dn  
  
  proceso1 <- data.frame(In,Tiradas)  
  
  proceso2 <- data.frame(Dn,Tiradas)  
  
  mi_df <- data.frame( "Proceso1" = In, "Proceso2" = Xn )  
  
  return(mi_df)  
  
}  
  
tirarMoneda <- function(n){ - Tirar moneda n veces  
  
  return(sample(0:1,n,replace = TRUE))  
  
}  
  
variableAleatoria <- function(In){ - Obtengo Dn  
  
  Dn <- c()  
  
  for (i in In){  
  
    Dn <- c(Dn,(2 * i) - 1)  
  
  }  
  
  return (Dn)  
  
}
```

9.3 Ejercicio 3

```
a) proceso <- function(plataInicial,S,p){

  limiteInferior = 0

  limiteSuperior = S

  plataActual = plataInicial

  ganar = p

  perder = 1-ganar

  vectorProbabilidad = c(ganar,perder)

  trayectoria = c(plataInicial)

  termino = FALSE

  while (!termino) {

    if(tirada(vectorProbabilidad) == ganar){

      plataActual = plataActual + 1 }

    else{

      plataActual = plataActual - 1 }

    trayectoria = c(trayectoria,plataActual)

    if(plataActual == limiteSuperior){termino = TRUE}

    if(plataActual == limiteInferior){termino = TRUE}

  }

  return (trayectoria[length(trayectoria)] == S)

}
```



```

tirada<-function(probabilidades){

probabilidades = sort(probabilidades)

intervaloAleatorio = 1000000 - Probabilidades de hasta 6 digitos despues del .

tirada = sample(1:intervaloAleatorio,1)

posicion = 1

for (i in probabilidades){

if (posicion == length(probabilidades)){

return (i) } if(tirada >= i*1000000){

return (i) Devuelvo la probabilidad que ocurrio }

posicion = posicion +1

} }

```

c)

```

probabilidadRuina <- function(plataInicial,S,p,n){

frecRuina = 0

for (i in c(1:n)){

if(!proceso(plataInicial,S,p)){

frecRuina = frecRuina+1

} } return (frecRuina/n)

}

```

9.4 Ejercicio 4

```

decisión <- function(x){

if (x==izquierda){

return (caminoIzquierdo(salidaRetorno()))

```

```

} else{
return (3 + decision(elegirCamino())) }
}

caminoIzquierdo <- function(x){
if (x==izquierda){
return (2)
} else{
return (5 + decision(elegirCamino()))
} }

elegirCamino <- function(){ return (sample(0:1,1)) }

salidaRetorno <- function(){
return (sample(0:2,1)) }

esperanza<-function(){
acumulador=0
for(i in (c(1:n))) {
acumulador = acumulador + decision(elegirCamino())
} return (acumulador / n)
}

```

9.5 Ejercicio 6

```

P = matrix(nrow=7,ncol=7)
Xa = c(1/2,5,6)
Xb = c(1/3, 1, 3,6)
Xc = c(1/2,4,6)
Xd = c(1,6)
Xe = c(1/4,1,4,6,7)
Xf = c(1/2,1,2)
Xg = c(1/7,1,2,3,4,5,6,7)

```

```

P = cargarMatriz(P)
contadorPaginas = c(1:7)
probabilidad= simular(100)
simular<- function(n){

contadorPaginas= crearVector(contadorPaginas)
paginaInicial = sample(1:7,1) Inicio de manera aleatoria
print("La pagina inicial es")
print(paginaInicial)
paginaActual = paginaInicial
for (i in (1:n)){
paginaActual = surfear(paginaActual)
contadorPaginas[paginaActual] = contadorPaginas[paginaActual] + 1
print("La pagina actual es")
print(paginaActual)
print("Contador")
print(contadorPaginas) } return (contadorPaginas/n)

}

surfear <- function (x){

paginaActual = obtenerFila(x)
proximaPagina = paginaActual[elegirProximaPagina(paginaActual)]
return (proximaPagina) }

elegirProximaPagina <-function(x){

unoEntre = length(x)-1
return (sample(1:unoEntre,1)+1) }

cargarMatriz <- function(P){

```

```

P = cerarMatriz(P)
indiceFilas = 0
P = cargarFila(P,Xa,1)
P = cargarFila(P,Xb,2)
P = cargarFila(P,Xc,3)
P = cargarFila(P,Xd,4)
P = cargarFila(P,Xe,5)
P = cargarFila(P,Xf,6)
P = cargarFila(P,Xg,7)
return (P) }

```

```

cerarVector <- function(v){

for (i in (1:7)){
v[i] = 0 }

return (v) }

```

```

cerarMatriz <- function(P){

for (i in (1:7)){
for (j in (1:7)){
P[i,j] =0 } }

return (P) }

```

```

obtenerFila <- function(x){

if (x == 1){
return (Xa) }

if (x == 2){
return (Xb) }

```

```

if (x == 3){
return (Xc) }
if (x == 4){
return (Xd) }
if (x == 5){
return (Xe) }
if (x == 6){
return (Xf) }
if (x == 7){
return (Xg) }
}

```

```

cargarFila <- function(P,x,fila){

```

```

  indiceFila = 0
  for (i in x){
    indiceFila = indiceFila + 1
    if (indiceFila != 1){
      P[fila,i] = x[1]
    } }
  return (P)
}

```

9.6 Ejercicio 7