Autoevaluación 3

Recordar que sólo una de las opciones es correcta.

Los espacios vectoriales con los que se trabaja son siempre espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y las operaciones suma entre vectores, producto por escalares y producto interno son las estándares, salvo en los casos que se mencione lo contrario.

1. Sea $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ una base del espacio vectorial V.

   a) Si definimos $u' = 2u - v + w$, $v' = u + w$, $w' = 3u - v + 3w$ y $\mathcal{B}' = \{u', v', w'\}$, nueva base de V, entonces la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es:

   (A) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. (C) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (B) $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$. (D) $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   b) El vector representación de $z = -2u' + 3v' + w'$ respecto de la base $\mathcal{B}$ es:

   (A) $[z]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. (C) $[z]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   (B) $[z]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. (D) $[z]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. Sean S y D los espacios vectoriales de las matrices 2×2 simétricas y diagonales, respectivamente.

   Sean $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ base ordenada de S y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ base ordenada de D.

   Consideramos la transformación lineal $T : S \to D$ tal que para cada $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in S$, $T(A) = \begin{bmatrix} a+b-c & 0 \\ 0 & 3a-b \end{bmatrix}$. Entonces:

   a) (A) $nul(T) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\rangle$.

   (B) $nul(T) = \left\langle \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

   (C) $nul(T) = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right\rangle$.

   (D) $nul(T) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle$.

   b) Si A es la matriz asociada a la transformación T respecto a las bases ordenadas $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, entonces:

   (A) $A = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\rangle$.

   (B) $A = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\rangle$.

   (C) $A = \left\langle \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

(D) $A = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

3. Sea $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(2-x) = (-3,1)$ y $T(1+x) = (-1,5)$. Entonces:

   (A) T es un epimorfismo y no es un monomorfismo.
   (B) T es un monomorfismo y no es un epimorfismo.
   (C) T es un isomorfismo.
   (D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

4. *a*) Determinar cuáles de las siguientes operaciones define un producto interno en $\mathbb{R}^2$, aplicadas a todo $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ en $\mathbb{R}^2$:
   (A) $\langle u, v\rangle = -2u_1v_1 + 3u_2v_2$.
   (B) $\langle u, v\rangle = -u_1v_1 + u_2$.
   (C) $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2$.
   (D) Ninguno de los anteriores.

   b) Considere el siguiente producto interno de $\mathbb{R}^2$, $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$.
   Sean los vectores $x^1 = (1,0)$ y $x^2 = (2,-1)$, se tiene que:
   (A) $\|x^1\| = \sqrt{11}$ y $\|x^2\| = \sqrt{2}$.
   (B) $\|x^1\| = \sqrt{3}$ y $\|x^2\| = \sqrt{6}$.
   (C) $\|x^1\| = \sqrt{6}$ y $\|x^2\| = \sqrt{3}$.
   (D) $\|x^1\| = \sqrt{2}$ y $\|x^2\| = \sqrt{11}$.

   c) Considerando las hipótesis de *b*)
   (A) x^1 y x^2 son ortogonales.
   (B) x^1 y $x^3 = (-1,0)$ son ortogonales.
   (C) x^1 y x^2 forman un ángulo agudo.
   (D) x^1 y x^2 forman un ángulo obtuso.

5. Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con el siguiente producto interno:

$$\langle A, B\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}.$$

   Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

   a) (A) A y B son ortogonales.
   (B) A y C son ortogonales.
   (C) B y C son ortogonales.
   (D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

   b) (A) $proy_{s/\langle A\rangle}\, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   (B) $proy_{s/\langle A\rangle}\, C = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.
   (C) $proy_{s/\langle A\rangle}\, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   (D) $proy_{s/\langle A\rangle}\, C = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

6. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   y $\{U_1, U_2, U_3\}$ los vectores obtenidos al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a las filas de A, ordenadas según $\{A_1, A_2, A_3\}$, y luego normalizarlas. Entonces:

a) (A) $U_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, 2, 0, 1)$.

(B) $U_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 0, 1)$.

(C) $U_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, 0, 1)$.

(D) $U_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, -2, 0, 1)$.

b) Sea U la matriz cuyas filas son $\{U_1, U_2, U_3\}$, en ese orden. Entonces:

(A) $U^T U = I$.

(B) $UU^T = I$.

(C) $AU^T = I$.

(D) $A^T U = I$.

7. Se aplica una factorización QR a una matriz A y se obtiene:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sean a^1, a^2 y a^3 las columnas de A. Entonces:

(A) a^1 y a^2 son ortogonales.

(B) a^2 y a^3 son ortogonales.

(C) a^1 y a^3 son ortogonales.

(D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

8. Dada A una matriz $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$, llamamos $\hat{x}$ al vector en $\mathbb{R}^n$ tal que $\|A\hat{x} - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$.

a) Si $\hat{x} = 0$,

(A) $b \in N(A)$.

(B) $b \in N(A^T)$.

(C) $b \in C(A)$.

(D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

b) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ entonces:

(A) $\|A\hat{x} - b\| = 1$.

(B) $\|A\hat{x} - b\| = \sqrt{3}$.

(C) $\|A\hat{x} - b\| = \sqrt{6}$.

(D) $\|A\hat{x} - b\| = \sqrt{2}$.