

Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Tp final

Autor:

Demagistris, Santiago Ignacio

Agosto 2020

0.1 Ejercicio 1

a) El espacio muestral sobre el cual estamos trabajando es $S=\{0,1\}$, donde cara es 1 y cruz es 0

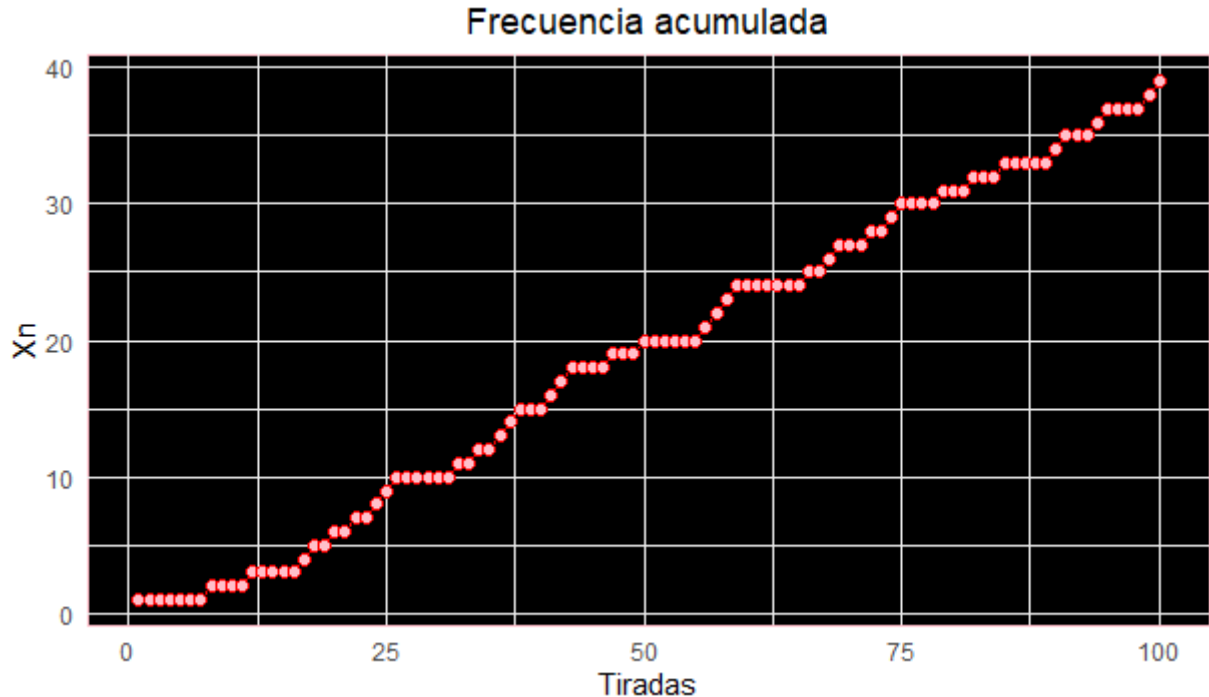


Figure 1: Tiradas de moneda

Podemos observar que se obtuvo un total de 39 caras en este proceso.

b)

($\mathbf{P(X=1)}$). Por lo observado en la simulación anterior, de 100 tiradas obtuvimos 39 caras. Por lo tanto podríamos aproximar la probabilidad de que obtengamos una cara al tirar la moneda de $P(X=1) = \frac{39}{100} = 0,39$

($\mathbf{E(X)}$). Sabemos que $E(X) = \sum_{x \in S} xP(X=x) = 0 * 0,61 + 1 * 0,39 = 0,39$

c) Sea Y = numero de veces hasta que salgan 3 caras. $Y \sim Pascal$, por lo que

$$P(Y=k) = \binom{k-1}{3-1} 0.39^3 0.61^{k-3} = \binom{k-1}{2} 0.39^3 0.61^{k-3}$$

Observemos que $P(Y=50) = 5,9 \times 10^{-9}$, $y \geq 3$. Por lo tanto si consideramos un espacio reducido para Y , $S_y = \{3, 4, \dots, 50\}$. Si buscamos $E(Y)$, obtenemos el valor esperado para obtener la tercer cara, es decir la cantidad de tiradas promedio que debemos realizar.

Por medio de R obtuve las probabilidades y calcule $E(y)$, obtuve que el numero esperado de tiradas es de 7,69.

- d) Para sesgar la moneda, realice un experimento con espacio muestral $S_x = \{0, 1, 2\}$. Con una distribución de probabilidad equitativa entre estos elementos. Luego defini una variable aleatoria $Y = \text{mod}(X, 2)$. Así es como obtuve un espacio muestral $S_y = \{0, 1\}$, donde 0 significa que el resultado fue cruz y 1 que el resultado fue cara. Al simular el proceso con $n=100$ obtuve que salieron en total 33 caras, por lo tanto podría aproximar $P(Y = 1) \sim 0,33$. Al realizar un análisis similar que el planteado en el ítem b), obtengo que $E(Y) = 0,39$.

0.2 Ejercicio 2

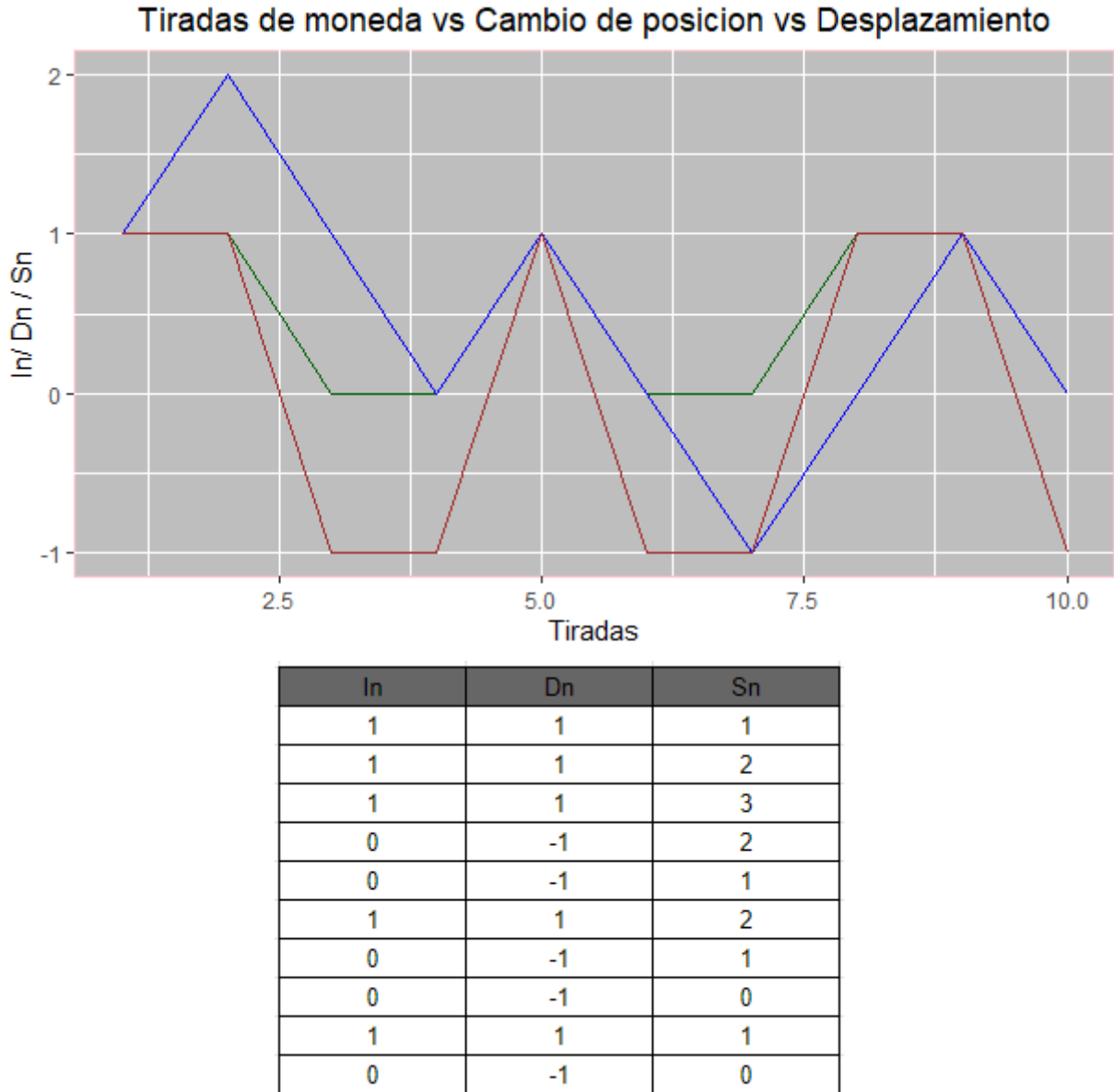


Figure 2: Tiradas de moneda

(Azul) Sn || (Marron) Dn || (Verde) In

Al simular las 10 tiradas de la moneda obtuve la variable aleatoria D_n , a partir de la cual obtuve S_n . S_n fue calculada como la frecuencia acumulada de D_n considerando como $S_0 = 0$

0.3 Ejercicio 3

a) Para realizar usare $k=50$, $p=0.55$, $S=100$, perder=0. El resultado obtenido es el siguiente:

b)

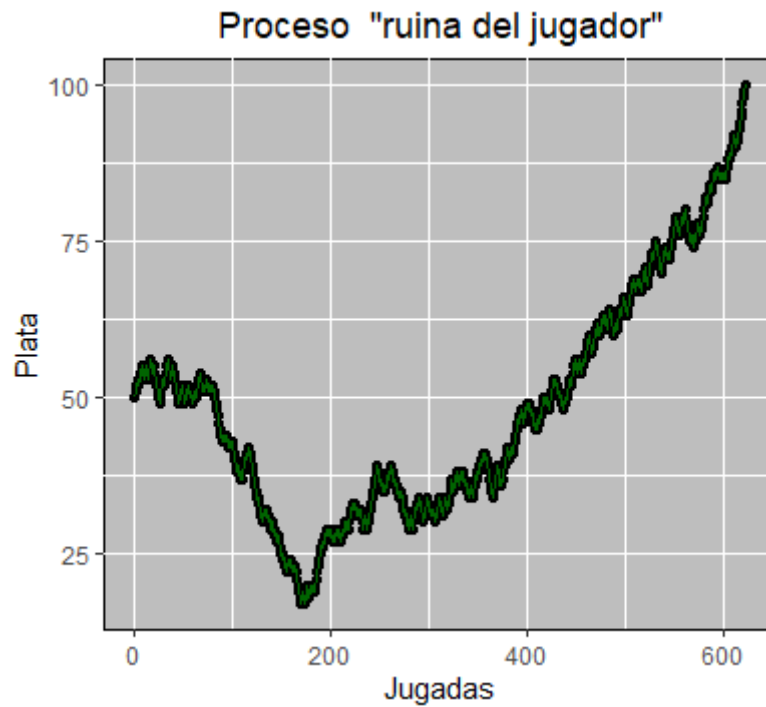


Figure 3: Trayectoria. Ruina del jugador

c) Con $k=20$, $S=60$, $p=0.5001$ y 1000 trayectorias obtuve una aproximacion a la probabilidad de caer en la ruina de 0.678

0.4 Ejercicio 4

- a) Al realizar la simulacion observe 50000 repeticiones del experimento y obtuve un promedio de 21.08484 minutos.
- b) Sea $S=\{ii, id, d\}$ el espacio muestral de un experimento ϵ que consiste en observar las decisiones del raton. Estas corresponden a elegir izquierda-izquierda, elegir izquierda-derecha y elegir derecha respectivamente. Si definimos una variable aleatoria X tal que:

$$X(s) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = "ii" \\ 5 & \text{si } x = "id" \\ 3 & \text{si } x = "d" \end{cases}$$

Ahora definimos una variable aleatoria $Y = \{\text{numero de repeticiones hasta que el evento } \{2\} \text{ ocurra}\}$ y observamos que Y se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que $P(\{2\}) = P(ii \cap i) = P(ii|i)P(i) = \frac{1}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, por lo que $E(Y) = \frac{2}{\frac{1}{6}} = 12$. Luego definimos una variable aleatoria $Z = \{\text{numero de repeticiones hasta que el evento } \{3\} \text{ ocurra}\}$ y observamos que Z se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que $P(\{3\}) = \frac{1}{2}$, por lo que $E(Y) = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$. Luego definimos una variable aleatoria $W = \{\text{numero de repeticiones hasta que el evento } \{5\} \text{ ocurra}\}$ y observamos que W se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que $P(\{5\}) = P(id \cap i) = P(id|i)P(i) = \frac{2}{3} \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$, por lo que $E(Y) = \frac{5}{\frac{2}{6}} = 15$. Por lo tanto $p(\{\text{Salga}\})$ tiene un peso en minutos de $E(Y) = 12$, mientras que $1-p$ tiene un peso en minutos de $E(Z+W) = E(Z) + E(W) = 21$. Por lo que el tiempo esperado para que la rata salga del laberinto es de $121/31/2 + 215/6 = 19,5$ minutos.

0.5 Ejercicio 5

- a) La matriz de transición P es no-regular. Esta cadena de Markov presenta 4 clases de comunicación (una por cada estado). El estado M es absorbente, por lo cual la cadena de Markov es absorbente, los demás estados son de transición.
- b) Para $n=10$ pasos obtenemos la matriz P^n , donde P_{ij}^n representa la probabilidad de llegar a j desde i en n pasos.

$$P^{10} \simeq \begin{pmatrix} 0.99004 & 0.00969 & 0.000214 & 0.00005069 \\ 0 & 0.94159 & 0.04078 & 0.0176248 \\ 0 & 0 & 0.425037 & 0.5749629 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Partiendo desde un estado luego de 10 unidades de observación en la evolución de esta persona podemos observar:

”Suceptible”. **Suceptible.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto siga en su estado de suceptibilidad de 0.99004, luego de 10 unidades de observación.

VIH. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga VIH de 0.00969, luego de 10 unidades de observación.

SIDA. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.000214, luego de 10 unidades de observación.

Muerto. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.00005069, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto es suceptible, en 10 unidades de observación, es altamente probable que se mantenga en esta condición.

”VIH”. **Suceptible.** Partiendo desde VIH no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado ”suceptible”, luego de 10 unidades de observación.

VIH. Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condición de 0.94159, luego de 10 unidades de observación.

SIDA. Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.04078, luego de 10 unidades de observación.

Muerto. Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.0176248, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto está diagnosticado con VIH, tiene altas probabilidades de mantener su condición y no puede librarse de su enfermedad.

”SIDA”. **Suceptible.** Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de ”suceptibilidad”, luego de 10 unidades de observación.

Suceptible. Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de ”VIH”, luego de 10 unidades de observación.

SIDA. Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condición de 0.425037, luego de 10 unidades de observación.

Muerto. Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.5749629, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto está diagnosticado con SIDA, tiene un 57% de morir luego de 10 unidades de observación. No puede volver a la condición de VIH, ni a la de suceptible, mientras que se puede mantener con SIDA con una probabilidad de 0.425037% .

Por otro lado si está muerto... bueno, digamos que es el estado absorbente por excelencia.

c) Sabemos que

$$Q = \begin{pmatrix} 0.999 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0.994 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0.918 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Y por lo tanto,

$$F = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & 0 & \frac{500}{41} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Donde F es la matriz fundamental, en la cual F_{ij} es el numero esperado de visitas a j dado que la cadena comienza en i. Por lo tanto, si iniciamos en el estado

”Suceptible” el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 1178.862

”VIH” el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 178.862

”SIDA” el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 12.19

Cada uno de los resultados obtenidos de acuerdo al estado desde el que se comienza a contabilizar, es el promedio de unidades de observacion para que la persona llegue al estado de muerte.

d) COMPLETAR LO TENGO EN CUADERNILLO

0.6 Ejercicio 6

a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad (4)$$

b) Simulacion

c) Obtuve el siguiente vector de frecuencias relativas : $[0.25, 0.16, 0.04, 0.06, 0.10, 0.34, 0.05]$. Por lo cual con $n=100$ suponemos que el rango de las paginas a,b,c,...,g corresponden con las posiciones desde 1 a 7 del vector obtenido por medio de la simulacion.