Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2020

Práctica: CAPÍTULO 5 - AUTOVECTORES Y AUTOVALORES (*tercera parte*)

1. Sea T la transformación en el plano xy que representa la reflexión a través de la recta $y = x$.

   a) Hallar la matriz asociada a T respecto a la base estándar $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, y también respecto a $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,-1)\}$.

   b) Verificar que las matrices halladas en el ítem anterior son semejantes.

2. Sea T una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita V en sí mismo y, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ dos bases ordenadas de V. Sean A y B las matrices asociadas a T considerando las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Demostrar que A y B son semejantes.

   Ayuda: Probar que $B = M^{-1}AM$ donde M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

3. Sea T la proyección en $\mathbb{R}^2$ sobre la recta que pasa por el origen formando un ángulo θ con el eje x. Construir la matriz A asociada a T con la base canónica de $\mathbb{R}^2$ a partir de la matriz B asociada a T con una base que contiene un vector sobre la recta y un vector ortogonal a la recta.

4. Probar que la relación de semejanza entre matrices es una relación de equivalencia.

5. Probar que las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ son semejantes.

6. Sean A y B matrices semejantes. Probar que A y B tienen el mismo polinomio característico.

7. Probar que:

   a) Si A es semejante a B entonces A^2 es semejante a B^2.

   b) Existen matrices A y B no semejantes tales que A^2 y B^2 son semejantes.

8. En cada caso, encontrar una matriz unitaria U y una matriz triangular T tal que $U^{-1}AU = T$.

   a)
   $$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

   b)
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Sea U_k una matriz unitaria de tamaño $k \times k$. Sea U de tamaño $(k+1) \times (k+1)$ tal que

   $$U = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & U_k & \\ 0 & & \end{bmatrix}.$$

   Probar que U es unitaria.

10. Demostrar que el producto de matrices unitarias es una matriz unitaria.

11. Sea N una matriz normal. Demostrar:

    a) Para todo vector $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Nx\| = \left\|N^H x\right\|$.

    b) La i-ésima fila de N tiene la misma norma que la i-ésima columna de N (pensando tanto a las filas como a las columnas como vectores de $\mathbb{C}^n$).

12. Probar que:

    a) Las matrices hermitianas son normales.

b) Las matrices unitarias son normales.

13. Probar que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ es diagonalizable y no es normal.

    Observación: No todas las matrices diagonalizables son normales.

14. Sea T una matriz triangular. Entonces T es normal si y solo si T es diagonal.

15. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ y U una matriz unitaria tal que $U^{-1}AU = \Lambda$. Probar que A es normal.

16. Probar que:

    a) Todo bloque de Jordan tiene un único autovalor con multiplicidad geométrica 1.

    b) Existen matrices no diagonalizables ni semejantes que tienen el mismo polinomio característico.
    Ayuda: Como las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico, la búsqueda se puede simplificar a matrices de Jordan no diagonales.

17. Sean las matrices:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

    a) Justificar por qué $\lambda = 0$ es autovalor de multiplicidad algebraica 4 de ambas matrices.

    b) Sin hacer los cálculos, responder:

    ¿Cuántos autovectores l.i. tiene asociado, en cada caso, el autovalor? Justificar.

    Ayuda: Relacionar la pregunta con la cantidad de bloques de Jordan.

    c) Describir el autoespacio asociado a $\lambda = 0$ en cada caso.

    d) Probar que J no es semejante a K.
    Ayuda: Suponer que existe S tal que $S^{-1}JS = K$ y comparando JS con SK concluir que S no puede ser invertible.