5. Autovectores y autovalores

Como hemos expresado varias veces nuestro objetivo en esta materia es resolver sistemas lineales. Ya vimos que podíamos verlos como transformaciones lineales. Ahora bien las transformaciones lineales sobre espacios de dimensión finita, fijadas bases ordenadas en los espacios involucrados, tienen asociadas a matrices.

Por la comodidad y practicidad que supone trabajar con matrices, es claro que nos gustaría que tales matrices asociadas a transformaciones lineales sean lo más sencillas posibles. Es dada un operador lineal T sobre un espacio vectorial de dimensión finita, nos gustaría encontrar una base ordenada adecuada de manera tal que la matriz asociada a tal transformación sea por ejemplo una matriz diagonal $D = diag(d_i)$. Esto nos permitiría conocer más sobre tal transformación a través de cálculos más sencillos, por ejemplo el rango de T. Así sería

$$[T]_{\mathcal{B}} = D \Leftrightarrow Tv_k = d_k v_k, \quad k = 1, \cdots, n$$

la imagen de T será el subespacio generado por los v_k tales que $c_k \neq 0$ y el espacio nulo será generado por los restantes v_k.

Nos preguntamos si para todo operador lineal existe una base ordenada tal que su matriz asociada sea una matriz diagonal. Si no es el caso, para cuales operadores lineales si vale. ¿Cómo encontramos dicha base si existe? Si no existe, cual es el tipo más sencillo de matriz a la que podemos aspirar.

Definición 5.1 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T un operador lineal sobre V. Un **autovalor** o **valor propio de T** es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe un vector no nulo $v \in V$ que verifica $Tv = \lambda v$.*
Si λ es un autovalor de T, entonces
*a) cualquier vector v tal que $Tv = \lambda v$ se llama **autovector** o **vector propio de T** asociado al autovalor λ.*
*b) la colección de todos los v tales que $Tv = \lambda v$ se llama se llama **autoespacio** o **espacio propio asociado a λ**.*

Observación 5.1 *Si T es un operador lineal y $\lambda \in \mathbb{K}$ cualquiera, el conjunto de los vectores tales que $Tv = \lambda v$ es un subespacio vectorial de V. Es el espacio nulo de la transformación lineal $(T - \lambda I)$.*
Se tendrá que λ es un autovalor de T si tal subespacio es distinto del subespacio nulo, es decir si $(T - \lambda I)$ es no inyectiva. Si el espacio vectorial V es de dimensión finita, la transformación $(T - \lambda I)$ es no inyectiva cuando el determinante de la matriz asociada es igual a cero. Si $\mathcal{B}$ es cualquier base ordenada de V y $A = [T]_{\mathcal{B}}$, entonces $(T - \lambda I)$ es inversible si y sólo si la matriz $(A - \lambda I)$ es inversible.

Definición 5.2 *Sea A una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, un **autovalor** o **valor propio de A** en $\mathbb{K}$ es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que la matriz $(A - \lambda I)$ es singular (no inversible).*

Nota 5.1 *De manera equivalente puede definirse el autovalor de una matriz A como un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ para el cual existe un vector $x \in \mathbb{K}^n$ no nulo tal que $Ax = \lambda x$. Un tal vector no nulo se llama **autovector** o **vector propio de A***

Nota 5.2 *Por definición un autovector debe ser distinto de cero, pero un valor propio si puede ser cero.*

Ejemplo 5.1 *Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$*

$$Au = A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4u = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Luego u es un autovector de A, correspondiente al autovalor $\lambda = -4$.

$$Av = A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

y esto para ningún λ luego v no es un autovector de A.

Ejemplo 5.2 *Veamos que 7 es un autovalor de A y busquemos los autovectores correspondientes.*
7 será autovalor de A si y sólo si la ecuación $Ax = 7x$ tiene solución no trivial. Esto es equivalente a ver que $(A-7I)x = 0$ es decir que $(A-7I)$ es singular.

$$A - 7I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Las columnas de $A-7I$ son l.d., así que $(A-7I)x = 0$ tiene soluciones no triviales, luego 7 es un autovalor de A. La solución general de este sistema es $x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, para cada valor de x_2 obtenemos un autovector de A correspondiente al autovalor 7.

Definición 5.3 *El conjunto de todas las soluciones del sistema*

$$(A - \lambda I)x = 0$$

es el espacio nula de la matriz $(A - \lambda I)$. Este conjunto es un subespacio de $\mathbb{K}^n$ y se llama el ***autoespacio*** *o* ***espacio propio de A correspondiente a λ****. El autoespacio consiste en todos los autovectores correspondientes al autovalor λ y el vector nulo.*

Ejemplo 5.3 *Sea*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Un valor propio de A es 2. Busquemos una base para el autoespacio correspondiente.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Reduciendo la matriz ampliada obtenemos (A-2I)x=0

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego efectivamente 2 es un autovalor de A, pues $(A - \lambda I)x = 0$ tiene variables libres. La solución general es

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con x_2, x_3 libres.
El espacio propio es el subespacio bidimensional de $\mathbb{R}^3$, cuya base es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Teorema 5.1 *Los autovalores de una matriz triangular son las entradas de su diagonal principal.*

Demos: Por simplicidad consideramos el caso 3×3. Si A es triangular superior, entonces

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}$$

El escalar λ es un autovalor de A si y sólo si $(A-\lambda I)x=0$ tiene solución no trivial, es decir si y sólo si la ecuación tiene una variable libre.
Gracias a las entradas nulas de $(A-\lambda I)$ se observa que $(A-\lambda I)x=0$ tiene una variable libre si y sólo si por lo menos una de las entradas diagonales de $(A-\lambda I)$ es cero. Esto sucede si λ es igual a alguna de las entradas a_{ii} de A. ■

Ejemplo 5.4 *Si* $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & \pi\\ 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ *luego los valores propios de* A *son* $3,0,-2$.
Si $B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}$ *luego los valores propios de* A *son* $4,1$.

Observación 5.2 *Si una matriz* A *tiene al* 0 *como autovalor, implica que* $Ax=0x$ *tiene una solución no trivial. Esto significa que si* 0 *es valor propio de* A*,* A *no es inversible (y viceversa).*

Teorema 5.2 *Si* $v_1,\cdots,v_r$ *son autovectores que corresponden a distintos autovalores* $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ *de una matriz* $n\times n$ A*, entonces* $\{v_1,\cdots,v_r\}$ *son l.i.*

Demos: Supongamos que son *l.d.* . Como $v_i\neq 0$, $1\leqslant i\leqslant r$, uno de los vectores del conjunto es combinación lineal de los precedentes. Sea p el índice mínimo tal que v_{p+1} es una combinación lineal de los precedentes vectores (*l.i.*). Entonces existen escalares $c_1,\cdots,c_p$ tales que

$$c_1v_1+\cdots+c_pv_p=v_{p+1}. \tag{1}$$

Multiplicando a ambos miembros por A y usando el hecho que $Av_k=\lambda_k v_k$ para cada k, se tiene

$$c_1Av_1+\cdots+c_pAv_p=Av_{p+1}\Rightarrow c_1\lambda_1v_1+\cdots+c_p\lambda_pv_p=\lambda_{p+1}v_{p+1}. \tag{2}$$

Por otro lado multiplicando (1 por λ_{p+1} se tiene

$$c_1\lambda_{p+1}v_1+\cdots+c_p\lambda_{p+1}v_p=\lambda_{p+1}v_{p+1}. \tag{3}$$

Restando (3) a(2 surge

$$c_1(\lambda_1-\lambda_{p+1})v_1+\cdots+c_p(\lambda_p-\lambda_{p+1})v_p=0. \tag{4}$$

Como $\{v_1,\cdots,v_p$ son *l.i.* todos los escalares de (4) son cero. Pero $\lambda_i-\lambda_{p+1}\neq 0$ para $1\leqslant i\leqslant p$ pues los autovalores son distintos. Surge que $c_i=0, i=1,\cdots,p$. Luego de $(refteo6{,}2{,}1)$ surge que $v_{p+1}=0$, lo que es una contradicción pues es un autovector. Por lo tanto $\{v_1,\cdots,v_r\}$ es *l.i.*. ■

5.1. Ecuación característica

Ejemplo 5.5 *Hallar los autovalores de* $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{bmatrix}$.
Debemos encontrar todos los escalares λ *tales que* $(A-\lambda I)x=0$ *tenga una solución no trivial. Buscamos todos los* λ *que hacen que* $(A-\lambda I)$ *sea no inversible y esto sucede cuando*

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & -6-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-6-\lambda)-9=-12-2\lambda+6\lambda+\lambda^2-9=\lambda^2+4\lambda-21$$

Luego

$$\det(A-\lambda I)=0\Leftrightarrow\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+421}}{2}=\frac{-4\pm 10}{2}=\frac{-7}{3}.$$

Definición 5.4 *La ecuación* $\det(A - \lambda I) = 0$ *se llama* ***ecuación característica de A*** *. Al polinomio* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *se lo llama* ***polinomio característico de A***

Observación 5.3 *Un escalar λ es un autovalor de una matriz $n \times n$ A si y sólo si λ satisface la ecuación característica de A.*
Hallar los valores propios de A equivale a encontrar las raíces del polinomio característico de A.

Ejemplo 5.6 *Hallar la ecuación característica de*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -6 & 1 \\ 0 & 3\lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda).$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = (5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda)$ *y la ecuación característica* $0 = p(\lambda) = (5-\lambda)^2(3-\lambda)(1-\lambda) = 0$.

Observación 5.4 *Vemos en este ejemplo que 5 tiene multiplicidad 2 como raíz del polinomio, a esto se le llama* ***multiplicidad de un autovector*** *.*

Definición 5.5 *Sean A y B dos matrices cuadradas $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que B es* ***semejante a A sobre $\mathbb{K}$*** *si existe una matriz $n \times n$, P inversible sobre $\mathbb{K}$ tal que $B = P^{-1}AP$.*

Teorema 5.3 *Si las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico, y por lo tanto tienen los mismos autovalores (con las mismas multiplicidades.*

Demos: Si $B = P^{-1}AP$ entonces $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$.
Luego

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I),$$

lo que completa la prueba. ■

Nota 5.3 *Este resultado permite definir el polinomio característico de un operador lineal T como el polinomio característico de cualquier matriz $n \times n$ que represente a T en alguna base ordenada de V. Al igual que para las matrices los autovalores de T serán las raíces del polinomio característico de T. Esto muestra que un operador lineal T no puede tener más de n valores propios distintos. Mencionemos que puede no tener ningún valor propio.*

5.2. DIAGONALIZACIÓN

Ejemplo 5.7

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, D^2 = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}, \cdots D^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix},$$

Ejemplo 5.8 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, *y* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.
Veamos que $A = PDP^{-1}$

$$PD = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Busquemos una fórmula para A^k. $A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$...

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \ldots \begin{bmatrix} 2\cdot 5^k - 3^k & 5^k - 3^k \\ -2\cdot 5^k + 3^k & -5^k + 2\cdot 3^k \end{bmatrix}.$$

Definición 5.6 *Se dice qeu una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es* ***diagonalizable*** *si A es semejante a una matriz diagonal, esto es, si $A = PDP^{-1}$ para alguna matriz inversible P y alguna matriz diagonal D.*

Teorema 5.4 ***de diagonalización*** *Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios l.i. De hecho, $A = PDP^{-1}$ con D matriz diagonal, si y sólo si las columnas de P son n vectores propios de A l.i. En este caso las entradas diagonales de D son los autovalores de A que corresponden respectivamente a los autovectores de P.*

Demos: $\Rightarrow$) Sea P una matriz $n\times n$ cualquiera con columnas $v_1, \cdots, v_n$ y D cualquier matriz diagonal con entradas diagonales $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Entonces

$$AP = A[v_1, v_2, \cdots, v_n] = [Av_1\, Av_2\, \cdots\, Av_n],$$

mientras que

$$PD = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 v_1\, \cdots\, \lambda_n v_n].$$

Si suponemos que A es diagonalizable, $A = P^D P^{-1}$ y esto implica que $AP = PD$ y así

$$[Av_1\, Av_2\, \cdots\, Av_n] = [\lambda_1 v_1\, \cdots\, \lambda_n v_n].$$

Igualando columnas, resulta $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \cdots, n$. Además como P es inversible sus columnas deben *l.i.*. Además como las mismas son diferentes de cero resultan $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ autovalores de A siendo los $v_1, \cdots, v_n$ los autovectores correspondientes.
$\Leftarrow$ Dados cualesquiera n autovectores $v_1, \cdots, v_n$, construimos una matriz P poniendo a los v_i como columnas y usamos los autovalores correspondientes para construir D. De este modo resulta $AP = PD$. Esto es válido sin condición alguna para los autovectores. Si además los mismos son *l.i.*, entonces P es inversible y se obtiene $A = PDP^{-1}$. ■

Ejemplo 5.9 *Si es posible diagonalicemos la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Paso 1 *Hallar los valores propios de A*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1-\lambda)^2(-5-\lambda) - 2\cdot 3^3 - 9(-5-\lambda) + 2\cdot 9(1-\lambda) = \\ &= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(-5-\lambda) - 54 + 45 + 9\lambda + 18 - 18\lambda = \\ &= -5 + 10\lambda - 5\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 + 9 - 9\lambda = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Los autovalores de A son 1 y -2 con multiplicidad 2.

Paso 2 *Encontrar tres vectores propios de A que sean l.i.*
Usemos el método visto en el comienzo y se encuentra que una
Base para el autoespacio de A para $\lambda = 1$ es $\mathcal{B} = \{v_1\}$ con $v_1 = (1, -1, 1)^t$.
Base para el autoespacio de A para $\lambda = -2$ es $\mathcal{B} = \{v_2, v_3\}$ con $v_2 = (-1, 1, 0)^t$ y $v_3 = (-1, 0, 1)^t$.
Es fácil comprobar que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i.

Paso 3 *Estructurar P a partir de los vectores del Paso 2*
El orden elegido no tiene importancia

$$P = [v_1\, v_2\, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4 *Estructurar D a partir de los autovalores correspondientes*

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 5.10 *Diagonalizar, de ser posible, la matriz* $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Se tiene que $\det(B - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2$. *Luego los autovalores de B son* $\lambda = 1$ *y* $\lambda = -2$ *con multiplicidad* 2.
En este caso al buscar los autoespacios correspondientes a cada autovalor, se obtiene que ambos tienen dimensión 1.
Base para $\lambda = 1$ *es* $\{(1,-1,1)^t\}$ *y base para* $\lambda = -2$ *es* $\{(-1,1,0)^t\}$.
No existen otros autovalores para B y cada autovector de B es múltiplo o de v_1 *o de* v_2. *Por lo tanto en este caso es imposible construir una base para* $\mathbb{R}^3$ *usando autovectores de B y así resulta B no diagonalizable.*

Teorema 5.5 *Condición suficiente de diagonalización.*
Una matriz $n \times n$ *con n valores propios distintos es diagonalizable.*

Demos: Sean $v_1, \cdots, v_n$ los autovectores correspondientes a los n autovalores distintos de una matriz A. Entonces $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es *l.i.* (Teorema 2) y por lo tanto A es diagonalizable. ■

Lema 5.1 *Supongamos que* $Av = \lambda v$. *Sea p un polinomio cualquiera, entonces se verifica que* $p(A)v = p(\lambda)v$.

Demos: Sea $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Luego se tiene

$$p(A)v = a_n A^n v + \cdots + a_1 Av + a_0 v = a_n \lambda^n v + \cdots + a_1 \lambda v + a_0 v = p(\lambda)v.$$

como queríamos ver. ■

Lema 5.2 *Sea* $T \in \mathcal{L}(V)$, *y sean* $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ *distintos autovalores de T. Para cada* $i = 1, \cdots, p$ *sea* S_i *un conjunto finito, linealmente independientes contenido en el autoespacio* E_i *asociado al autovalor* λ_i. *Luego* $S = S_1 \cup \cdots \cup S_p$ *es un conjunto linealmente independiente de V.*

Demos: Sea para cada i $S_i = \{v_{i1}, \cdots, x_{in_i}\}$, luego $S_i = \{v_{ij} : 1 \leqslant j \leqslant n_i, 1 \leqslant i \leqslant p\}$. Consideremos una combinación lineal de los elementos de S e igualemos a 0 para escalares a_{ij}

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} vij = 0.$$

Para cada i sea $u_i \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} vij$, luego $u_i \in E_i$ para cada i y $u_1 + \cdots + u_p = 0$, luego por el Teorema 5.2 sabemos que deben ser $u_i = 0$ para cada i. Ahora como para cada i, S_i es *l.i.* resulta que $a_{ij} = 0, \forall j$.
Concluimos que S es linealmente independiente. ■

Teorema 5.6 *Sea A una matriz $n \times n$ cuyos autovalores distintos son $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$.*
a) Para $1 \leqslant k \leqslant p$, la dimensión del autoespacio para λ_k es menor o igual que la multiplicidad del autovalor λ_k.
b) La matriz A es diagonalizable si y sólo si la suma de las dimensiones de los distintos autoespacios es igual a n y, esto sucede si y sólo si la dimensión del autoespacio de cada λ_k es igual a la multiplicidad de autovalor λ_k.
c) Si A es diagonalizable y $\mathcal{B}_k$ es una base para el autoespacio correspondiente a λ_k para cada k, entonces la colección total de vectores de los conjuntos $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ forma una base de autovectores para $\mathbb{K}^n$.

5.3. Matrices triangulares superior

Consideremos un espacio vectorial V, con $\dim V = n$. Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal sobre V y $\{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada para V.
Recordemos que una ***matriz triangular superior*** es una matriz $A =)a_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$.
Tener un operador lineal T cuya matriz asociada sea una matriz triangular superior es muy conveniente, pues:
i) los autovalores son los elementos diagonales de la matriz.
ii) es sencillo resolver sistemas lineales para matrices de coeficientes que sean triangulares superiores.

Proposición 5.1 *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base de V. Resulta equivalente:*
a) la matriz $[T]_B$ es triangular superior.
b) $Tv_k \in < v_1, \cdots, v_k >$ para cada $k = 1, \cdots, n$.
c) $< v_1, \cdots, v_k >$ es invariante bajo T es decir $T(< v_1, \cdots, v_k >) \subset < v_1, \cdots, v_k >$.

Demos: $a) \Leftrightarrow b)$ surge fácilmente utilizando las definiciones, ya que la condición $b)$ implica que los elementos de la matriz debajo de la diagonal son 0.
$c) \Rightarrow b)$ es trivial.
$b) \Rightarrow c)$ Notemos que para cualquier vector $v \in < v_1, \cdots, v_k >$ podemos escribir $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, aplicando T se tiene
$$Tv = \alpha_1 Tv_1 + \cdots + \alpha_k Tv_k \in < v_1, \cdots, v_k >,$$
ya que por $b)$ cada $Tv_j \in < v_1, \cdots, v_j > \subset < v_1, \cdots, v_k >$ para $j = 1, \cdots, k$ y el hecho que $< v_1, \cdots, v_k >$ es un subespacio de V. ■

Teorema 5.7 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ y $T \in \mathcal{L}(V)$. Luego existe una base $\mathcal{B}$ para V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.*

Proposición 5.2 *Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal y $[T]_{\mathcal{B}}$ una matriz triangular superior para alguna base $\mathcal{B}$ de V. Luego:*
a) T es inversible si y sólo si todas las entradas de la diagonal de $[T]_{\mathcal{B}}$ son no nulas.
b) Los autovalores de T son los elementos diagonales de $[T]_{\mathcal{B}}$.

Demos: : $a)$ Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V tal que $A = [T]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior. Sean $\lambda_k, 1 \leqslant k \leqslant n$ los elementos diagonales de A. Veamos que T es no inversible si y sólo si al menos un $\lambda_k = 0$.
$\Rightarrow)$ Supongamos que $\lambda_k = 0$. Si $k = 1$, luego $Tv_1 = 0$ y $v_1 \in nul(T)$, luego T es no inyectiva y por lo tanto no inversible.
Supongamos que $k > 1$, luego como $Tv_j \in < v_1, \cdots, v_{k-1} >$ para $j \leqslant k$, ya que A es triangular superior y $\lambda_k = 0$. Luego Si definimos $S = T|_{<v_1, \cdots, v_k>}$ es una aplicación lineal de $< v_1, \cdots, v_k >$ en $< v_1, \cdots, v_k - 1 >$ y por el teorema de la dimensión resultará $\dim(nulS) = 1$, luego existe $0 \neq v \in < v_1, \cdots, v_k >$ tal que $Sv = Tv = 0$. Esto implica que T no es inversible.

$\Leftarrow$) Supongamos que T es no inversible, luego es no inyectiva, así existe $0 \neq v \in V$ tal que $Tv = 0$ y podemos escribir $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ para algún k tal que $\alpha_k \neq 0$. Resulta

$$0 = Tv = (\alpha_1 T v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) + \alpha_k v_k.$$

Como A es triangular superior, sabemos que $\alpha_1 T v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} \in < v_1, \cdots, v_{k-1} >$. Así la igualdad anterior muestra que $Tv_k \in < v_1, \cdots, v_{k-1} >$ lo que muestra que $\lambda_k = 0$.

b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ la base para la cual $[T]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior. Luego $[T - \lambda i]_{\mathcal{B}}$ tiene la forma

$$[T - \lambda i]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & & * \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}.$$

Así se tiene por *a*) que λ será autovalor de T si y sólo si $T - \lambda I$ es no inversible, si y sólo si $\lambda = \lambda_k$ para algún k. ■

6. Formas canónicas de Jordan

6.1. Invariancia

Definición 6.1 *Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Un subespacio W de V se dice **invariante por T** si T aplica a W en si mismo, i.e., si $v \in W \Rightarrow T(v) \in W$. En este caso T restringido a W define un operador lineal,*

$$\begin{array}{rccl} \hat{T}: & W & \to & W \\ & w & \mapsto & \hat{T}(w) = T(w). \end{array}$$

Ejemplo 6.1 *Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta, z)$. Es el operador lineal que rota cada vector alrededor del eje z un ángulo θ.*
Observemos que cada vector $w = (a, b, 0) \in W$ donde W es el plano xy permanece en W al aplicarle la transformación T, luego W es invariante por T.
También resulta invariante el eje z.

Ejemplo 6.2 *Los vectores propios de un operador lineal $T : V \to V$ pueden caracterizarse como generadores de subespacios invariantes por T de dimensión 1.*
Supongamos que $T(v) = \lambda v$, $v \neq 0$, entonces $W = \{\alpha v : \alpha \in \mathbb{K}\}$ es invariante por T pues

$$T(\alpha v) = \alpha T v = \alpha(\lambda v) = (\lambda\alpha)v \in W.$$

Recíprocamente, supongamos que $\dim U = 1$, $U =< u >$ y U invariante por T. Entonces como $T(u) \in U$ resulta $T(u) = \beta u$ para algún $\beta \in \mathbb{K}$, con lo que resulta u un autovector de T.

Teorema 6.1 *Sean $T : V \to V$ y $p(t)$ un polinomio un polinomio cualquiera. Entonces $nul(p(T))$ es invariante por T.*

Demos: Sea $v \in nul(p(T))$, es decir $p(T)v = 0$. Debemos probar que $Tv \in nul(p(T))$, es decir si $p(T)(Tv) = 0$.
Observemos que como se verifica que $p(t)t = tp(t)$ para cualquier polinomio, se tiene que $p(T)T = Tp(T)$. Luego

$$p(T)(Tv) = (p(T)T)v = (Tp(T))v = T(p(T)v) = T(0) = 0.$$

como queríamos ver. ■

Teorema 6.2 *Sea W un subespacio invariante de $T : V \to V$, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita. Entonces T tiene una representación matricial por bloques*

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

donde A es una representación matricial de la restricción de T a W.

Demos: Sea una base ordenada $\{w_1, \cdots, w_r\}$ de W y la extendemos a una base $\{w_1, \cdots, w_r, v_1, \cdots, v_s\}$ de V. Se tiene

$$\begin{array}{rclcl} \hat{T}(w_1) & = & T(w_1) & = & a_{11}w_1 + \cdots + a_{1r}w_r \\ & \vdots & & & \\ \hat{T}(w_r) & = & T(w_r) & = & a_{r1}w_1 + \cdots + a_{rr}w_r \\ & & T(v_1) & = & b_{11}w_1 + \cdots + b_{1r}w_r + c_{11}v_1 + \cdots + c_{1s}v_s \\ & & & \vdots & \\ & & T(v_s) & = & b_{s1}w_1 + \cdots + b_{sr}w_r + c_{s1}v_1 + \cdots + c_{ss}w_s \end{array}$$

Pero la matriz de T en esta base es la transpuesta de la matriz de los coeficientes en el sistema anterior de ecuaciones. Por lo tanto tiene la forma

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Por el mismo argumento A es la matriz de $\hat{T}$ relativa a la base $\{w_i\}$ de W. ■

6.2. DESCOMPOSICIÓN EN SUMA DIRECTA DE INVARIANTES

Recordemos que

Definición 6.2 *Se dice que un espacio vectorial V es la **suma directa** de sus subespacios $W_1, \cdots, W_r$, si todo vector $v \in V$ puede escribirse de manera única como*

$$v = w_1 + \cdots + w_r, w_i \in W_i,\ i = 1, \cdots, r.$$

tal que $W_i \cap W_j = \{0\}$. Se nota $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Teorema 6.3 *Sean $W_1, \cdots, W_r$ subespacios de V, y supongamos que $B_1 = \{w_1^1, \cdots, w_{n_1}^1\}, \cdots, B_r = \{w_1^r, \cdots, w_{n_r}^r\}$ son bases de $W_1, \cdots, W_r$ respectivamente. Entonces V es la suma directa de los W_i si y sólo si $B = \{w_1^1, \cdots, w_{n_1}^1, \cdots, w_1^r, \cdots, w_{n_r}^r\}$ es una base de V.*

Demos: $\Leftarrow$) Supongamos que B es base de V, luego para todo $v \in V$ existen escalares tales que

$$v = a_{11}w_1^1 + \cdots + a_{1n_1}w_{n_1}^1 + \cdots + a_{r1}w_1^r + \cdots + a_{rn_1}w_{n_1}^r = w_1 + \cdots + w_r,$$

con $w_i = a_{i1}w_1^i + \cdots + a_{in_i}w_{n_1}^i \in W_i$.
Veamos que la suma es única. Supongamos que $v = \tilde{w}_1 + \cdots + \tilde{w}_r$ con $\tilde{w}_i \in W_i$. Usando la base correspondiente a cada W_i se tendrá que existen escalares tales que $\tilde{w}_i = b_{i1}w_1^i + \cdots + b_{in_i}w_{n_i}^i$, luego se tiene que

$$v = b_{11}w_1^1 + \cdots + b_{1n_1}w_{n_1}^1 + \cdots + b_{r1}w_1^r + \cdots + b_{rn_1}w_{n_1}^r.$$

Como B es una base de V, resulta $a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y j, de ese modo los términos de la suma de v son únicos y así resulta V suma directa de $W_i, \cdots, W_r$.
$\Rightarrow$) Supongamos que V suma directa de $W_i, \cdots, W_r$. Luego todo $v \in V$ puede expresarse como $v = v_1 + \cdots + v_r$ con $w_i \in W_i$ únicos. Como B_i es base de W_i, cada v_i es combinación lineal de los vectores $\{w_1^i, \cdots, w_{n_i}^i\}$, resultando así v combinación lineal de los elementos de B por lo tanto $V =< B >$.
Veamos que los vectores en B son *l.i.*. Consideremos

$$0 = a_{11}w_1^1 + \cdots + a_{1n_1}w_{n_1}^1 + \cdots + a_{r1}w_1^r + \cdots + a_{rn_1}w_{n_1}^r.$$

Observemos que $a_{i1}w_1^i + \cdots + a_{in_i}w_{n_1}^i \in W_i$, por ser V suma directa de tales subespacios, el 0 se escribe de manera única y así se tiene que $a_{i1}w_1^i + \cdots + a_{in_i}w_{n_1}^i = 0$, $\forall i = 1, \cdots, r$. Además como $\{w_1^i, \cdots, w_{n_i}^i\}$ es base de W_i subespacio, se tiene que $a_{i1} = \cdots = a_{in_i} = 0$.
Esto completa la prueba de que B es base de V. ■

Definición 6.3 *Sean $T : V \to V$ un operador lineal sobre un espacio vectorial $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, con W_i subespacios invariantes bajo T ($T(W_i) \subset W_i, i = 1, \cdots, r$). Sea T_i la restricción de T a W_i. Se dice que T se **descompone en los operadores** T_i o que T **es suma directa de los** T_i y se escribe*

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_r.$$

También se dice que los subespacios $W_1, \cdots, W_r$ reducen a T, o que forman una descomposición de V en una suma directa invariante por T.

Observación 6.1 *Consideremos los espacios U, W que reducen un operador $T : V \to V$, con $\{u_1, u_2\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$ bases ordenadas de U y W respectivamente. Sean además T_1, T_2 las restricciones de T a U y a W respectivamente. Luego*

$$\begin{array}{rcl} T_1(u_1) & = & a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ T_1(u_2) & = & a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} T_2(w_1) & = & b_{11}w_1 + b_{12}w_2 + b_{13}w_3 \\ T_2(w_2) & = & b_{21}w_1 + b_{22}w_2 + b_{23}w_3 \\ T_2(w_3) & = & b_{31}w_1 + b_{32}w_2 + b_{33}w_3 \end{array}.$$

Quedan determinadas dos matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

que son las matrices asociadas a las transformaciones T_1 y T_2 relativas a las respectivas bases ordenadas dadas para U y W.
Por el teorema anterior sabemos que $\{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ es una base de V. Además como $T(u_i) = T_1(u_i)$ y $T(w_j) = T_2(w_j)$, la matriz de T relativa a esta base es la matriz diagonal por bloques

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Teorema 6.4 *Supongamos que $T : V \to T$ es lineal y V es la suma directa de subespacios invariantes invariantes por T, $W_1, \cdots, W_r$. Si A_i es la representación matricial de la restricción de T a W_i relativa a bases ordenadas dadas de W_i, entonces T tiene asociada la matriz diagonal por bloques*

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix},$$

relativa a la base ordenada que resulta de concatenar en orden las bases de cada uno de los W_i.

Observación 6.2 *La matriz diagonal por bloques M con bloques diagonales $A_1, \cdots, A_r$ se llama a veces la suma directa de las matrices $A_1, \cdots, A_r$ y se representa $M = A_1 \oplus \cdots \oplus A_r$.*

6.3. Descomposición primaria

Teorema 6.5 *Sea $T : V \to V$ lineal, y $f(t) = g(t)h(t)$ polinomios tales que $f(T) = 0$ y $g(t)$ y $h(t)$ son primos relativos. Entonces V es la suma directa de los subespacios U y W invariantes por T, donde $U = nul(g(T))$ y $W = nul(h(T))$.*

Observación 6.3 *Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Observemos que existen polinomios no nulos $f(t)$ tales que $f(A) = 0$, por ejemplo el polinomio característico asociado a A. Entre todos estos polinomios consideramos los de grado mínimo y con coeficiente principal igual a 1. Este polinomio $m(t)$ existe, es único y se llama* ***polinomio minimal de A*** *. Puede probarse que dicho polinomio divide a cualquier polinomio que aplicado a la matriz A de la matriz nula, en particular divide al polinomio característico de A. También puede probarse que el polinomio minimal y el polinomio característico de una matriz A tienen los mismos factores irreducibles.*

Teorema 6.6 *En el teorema 6.5, si $f(t)$ es el polinomio minimal de T y ($g(t)$ y $h(t)$ son mónicos), entonces $g(t)$ y $h(t)$ son los polinomios minimales de las restricciones de T a U y W respectivamente.*

Teorema 6.7 ***Teorema de Descomposición Primaria***
Sea $T : V \to V$ un operador lineal con polinomio minimal

$$m(t) = f_1(t)^{m_1} \cdots f_r(t)^{m_r},$$

donde los $f_i(t)$ son polinomios mónicos irreducibles diferentes. Entonces V es la suma directa de los subespacios invariantes por T, $W_1, \cdots, W_r$, donde W_i es el espacio nula de $f_i(T)^{m_i}$. Además $f_i(t)^{m_i}$ es el polinomio minimal de la restricción de T a W_i.

Teorema 6.8 *Un operador lineal $T : V \to V$ tiene una representación matricial diagonal si y sólo si su polinomio minimal $m(t)$ es un producto de polinomios lineales diferentes.*

Observación 6.4 *Una forma equivalente del Teorema 6.8 es la siguiente:*
Una matriz A es semejante a una matriz diagonal si y solo si su polinomio minimal $m(t)$ es un producto de polinomios lineales diferentes.

6.4. Forma canónica de Jordan

Nota 6.1 *Un operador T puede expresarse en la forma canónica de Jordan si sus polinomios minimales y característico se factorizan en polinomios lineales. Esto siempre es posible si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En cualquier caso podemos extender el cuerpo $\mathbb{K}$ a uno en el cual los polinomios minimales y característicos puedan factorizarse en factores lineales, entonces en un sentido amplio cualquier operador tiene una forma canónica de Jordan. Análogamente, toda matriz es semejante a una matriz en forma canónica de Jordan.*

Teorema 6.9 *Sea $T : V \to V$ un operador lineal cuyos polinomios minimal y característico son respectivamente*

$$p(t) = \det(T - tI) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r}$$
$$m(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r},$$

donde los λ_i son escalares distintos. Entonces T tiene una representación matricial diagonal por bloques J cuyos elementos diagonales son de la forma

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Para cada λ_i los bloques correspondientes J_{ij} tienen las siguientes propiedades:
i) Existe al menos un J_{ij} de orden m_i, los demás J_{ij} son de orden $\leqslant m_i$.
ii) La suma de los órdenes de los J_{ij} es n_i.
iii) La cantidad de J_{ij} es igual a la multiplicidad geométrica de λ_i (es decir la dimensión de su autoespacio).
iv) La cantidad de J_{ij} de cada orden posible está determinado únicamente por T.
A la matriz J se la llama ***forma canónica de Jordan****.*

Observación 6.5 $J_{ij} = \lambda_i I + N_i$

Ejemplo 6.3 *Hallar la forma canónica de Jordan de la siguiente matriz*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primero calculamos el polinomio característico de B y así sus autovalores.

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = (1-\lambda)^3(2-\lambda)^3.$$

Vemos que los autovalores son $\lambda = 2$ y $\lambda = 1$ ambos con multiplicidad algebraica 3. Por lo tanto existirán dos bloques de Jordan

$$J = \begin{bmatrix} J(1) & 0 \\ 0 & J(2) \end{bmatrix}.$$

Calculamos los rangos $rg_j((A-I)^j) = rg_j(1)$ y $rg_i((A-2I)^i) = rg_i(2)$ hasta que $rg_k(\star) = rg_{k+1}(\star)$, así tenemos:

$$\begin{array}{llll} rg(B-I) = 4, \Leftrightarrow & dim(nul(B-I)) = 2, & rg(B-2I) = 5, \Leftrightarrow & dim(nul(B-I)) = 1, \\ rg(B-I)^2 = 3 \Leftrightarrow & dim(nul(B-I)^2) = 3, & rg(B-2I)^2 = 4, \Leftrightarrow & dim(nul(B-I)^2) = 2, \\ rg(B-I)^3 = 3 \Leftrightarrow & dim(nul(B-I)^3) = 3, & rg(B-2I)^3 = 3, \Leftrightarrow & dim(nul(B-I)^3) = 3, \\ & & rg(B-2I)^4 = 3, \Leftrightarrow & dim(nul(B-I)^4) = 3. \end{array}$$

Observamos que como $dim(nul(B-I)) = 2$ la dimensión del autoespacio correspondiente al autovalor $\lambda = 1$ es 2, en consecuencia habrá dos bloques de Jordan para este autovalor: $J_1 1(1)$ y $J_1 2(1)$.
Como $dim(nul(B-I)) = 1$ la dimensión del autoespacio correspondiente al autovalor $\lambda = 2$ es 1, en consecuencia habrá un bloques de Jordan para este autovalor: $J_2 1(2)$.
Además el índice correspondiente al autovalor $\lambda = 1$ es $m_1 = 2$ y para $\lambda = 2$ se tiene $m_2 = 3$. Luego el polinomio minimal de B está dado por $m_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)^3$.
Esto nos dice que el bloque de Jordan más grande de $J(1)$ es 2×2, mientras que el bloque de Jordan de $J(2)$ es 3×3.

Más aun, como $p_B(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)^3$, sabemos que la suma de los órdenes de $J_{1j}(1)$ es 3 y la de $J_{2j}(2)$ también es 3. Así resulta que la forma canónica de Jordan de B es

$$J = \left[\begin{array}{cc|c|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{1-3} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$