Ejercicio 6

Sean A y B matrices semejantes. Probar que A y B tienen el mismo polinomio característico.

Sea S tal que $A = S^{-1}BS$.

Desarrollando el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det(S^{-1}BS - \lambda I) \\
&= \det(S^{-1}BS - S^{-1}\lambda I S) \\
&= \det(S^{-1}(B - \lambda I)S) \\
&= \det(S^{-1}) \det(B - \lambda I) \det(S) \\
&= \det(S^{-1}) \det(S) \det(B - \lambda I) \\
&= \det(B - \lambda I)
\end{aligned}$$

Ejercicio 7

Probar que:

a) Si A es semejante a B entonces A^2 es semejante a B^2.
b) Puede ocurrir que A^2 y B^2 sean semejantes aún cuando A y B no lo sean.

a) Si S es tal que $A = S^{-1}BS$, entonces

$$A^2 = AA = (S^{-1}BS)(S^{-1}BS) = S^{-1}BBS = S^{-1}B^2S.$$

b) Ir a lo sencillo y pensar un ejemplo donde $A = 0, B \neq 0$ y $A^2 = B^2 = 0$ (la única dificultad es encontrar B no nula tal que $B^2 = 0$).

Ejercicio 14

Sea T una matriz triangular. Entonces T es normal si y solo si T es diagonal.

$\Rightarrow$) Supongamos que T es triangular inferior (caso contrario considerar T^H).
Por el ejercicio 4)b) resulta que

$$\|T_1\|^2 = \|T^1\|^2,$$

es decir,

$$\begin{aligned} |T_{11}|^2 &= |T_{11}|^2 + |T_{21}|^2 + \ldots + |T_{n1}|^2 \\ 0 &= |T_{21}|^2 + \ldots + |T_{n1}|^2 \end{aligned}$$

Luego, $T_{i1} = 0$ para $i \neq 1$.
Con un razonamiento inductivo se puede probar que $T_{ij} = 0$ para $i \neq j$, resultando que T es diagonal.

$\Leftarrow$) D^H es diagonal y las diagonales conmutan entre si.