Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2020

Autoevaluación 2

Apellido, nombre y carrera:

Si no se especifica lo contrario, cuando se considera el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, se lo hace con las operaciones usuales.

1. Sea $(V, \oplus, \odot)$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ donde V es el conjunto de números reales positivos y, para todo $x, y \in V$ y todo $c \in \mathbb{R}$, $x \oplus y = xy$ y $c \odot x = x^c$.

   a) El opuesto del neutro de $\oplus$ es:

   (A) -1.
   (B) 0.
   (C) 1.
   (D) Ninguna de las anteriores.

   b) El producto $\odot$ entre el neutro de la suma en $\mathbb{R}$ y cualquier vector $x \in V$ resulta igual a:

   (A) El neutro de la suma en $\mathbb{R}$.
   (B) El neutro de $\oplus$.
   (C) 0.
   (D) Ninguna de las anteriores.

2. Sean los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$: $W_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z + w = 0\}$ y $W_2 = \langle\{(1, 1, -2, 2), (1, 0, -1, 0)\}\rangle$. Entonces:

   (A) $W_1 \cap W_2$ es un subespacio vectorial no nulo de $\mathbb{R}^4$.
   (B) $W_1 \cap W_2$ es el subespacio vectorial nulo de $\mathbb{R}^4$.
   (C) $W_1 \cap W_2$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.
   (D) $W_1 \cup W_2$ es un subespacio vectorial no nulo de $\mathbb{R}^4$.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

   Entonces:

   (A) La dimensión de $C(A)$ es 1 y la dimensión de $N(A) = 4$.
   (B) La dimensión de $C(A)$ es 1 y la dimensión de $N(A) = 1$.
   (C) La dimensión de $C(A)$ es 1 y la dimensión de $N(A) = 0$.
   (D) La dimensión de $C(A)$ es 4 y la dimensión de $N(A) = 1$.

4. Sean A una matriz $m \times n$ de rango 1, tal que $A_1^1 = 0$ y $A_2^2 \neq 0$. Sean $u \in \mathbb{R}^m$ y $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $A = uv^T$ con $u_1 = u_2 = 1$. Sea U la forma escalonada de A y e^1 el primer vector canónico de $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{R}^n$, según corresponda. Entonces,

   a) (A) La primer fila de U es nula.
   (B) La primer columna de U es nula.
   (C) La primera fila y la primera columna de U son nulas.
   (D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

   b) (A) U es de rango 1 y $U = e^1 v^T$.
   (B) U es de rango 1 y $U = u(e^1)^T$.
   (C) U es de rango 1 y $U = (v_1 e^1)(e^1)^T$.
   (D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es verdadera.

5. La solución general del sistema $Ax = b$ es

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

a) Si A es una matriz de tamaño $m \times n$ y rango r, entonces:

(A) $n = 2$, $r = 4$ y $m \geq 2$.
(B) $n = r = 2$ y $m \geq 2$.
(C) $n = 4$, $r = 2$ y $m \geq 2$.
(D) $m = r = 2$ y $n \geq 2$.

b) Si $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, una posible matriz A es:

(A) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(B) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(C) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(D) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Sea A una matriz $m \times n$, con $m = n + p$, $p \geq 1$. Sea B la submatriz por filas de A correspondiente a las p primeras filas de A y C, la correspondiente a las n filas restantes igual a la matriz identidad. Esto es, $A = \begin{bmatrix} B \\ I \end{bmatrix}$. Entonces:

(A) Si las columnas de B son l.i. entonces las columnas de A son l.i..
(B) Si las filas de B son l.i. entonces las filas de A son l.i..
(C) Si las columnas de A son l.i. entonces las columnas de B son l.i..
(D) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

7. Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 3. Sea $S = \{1 + x^2 - x^3, 1 - 5x^2 + 4x^3, 2 - 4x^2 + 3x^3, 4 - 2x^2 + x^3\}$ y U el espacio vectorial generado por S.

a) Entonces:

(A) $\{1 + x^2 - x^3, 1 - 5x^2 + 4x^3, 2 - 4x^2 + 3x^3, 4 - 2x^2 + x^3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
(B) $\{2 - 4x^2 + 3x^3, 4 - 2x^2 + x^3\}$ es un conjunto de vectores que genera a U.
(C) $\{1 - 5x^2 + 4x^3, 2 - 4x^2 + 3x^3, 4 - 2x^2 + x^3\}$ es un conjunto de vectores l.i..
(D) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

b) Las coordenadas del polinomio $p(x) = 2 + 8x^2 - 7x^3$ en la base $\mathcal{B}_U = \{1 + x^2 - x^3, 1 - 5x^2 + 4x^3\}$ son:

(A) $[p]_{\mathcal{B}_U} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.
(B) $[p]_{\mathcal{B}_U} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.
(C) $[p]_{\mathcal{B}_U} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(D) $[p]_{\mathcal{B}_U} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

8. Sea $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = a\}$

a) F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ si:

(A) $a = 1$.
(B) $a = -1$.
(C) $a = 0$.
(D) $a = 2$.

b) Sea a tal que F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Entonces, una base de F es:

(A) $\mathcal{B}_F = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(B) $\mathcal{B}_F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(C) $\mathcal{B}_F = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(D) $\mathcal{B}_F = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

9. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}:$$

a) El sistema $Ax = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ tiene solución si:

(A) $b_3 - b_2 + b_1 = 0$.

(B) $b_3 + b_2 - b_1 = 0$.

(C) $-b_3 - b_2 + b_1 = 0$.

(D) $-b_3 - b_2 - b_1 = 0$.

b) $N(A)$ es generado por los vectores columna de la siguiente matriz:

(A) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) El conjunto solución del sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ está formado por los vectores:

(A) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$

(B) $x = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$

(C) $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(D) El sistema no tiene solución.