Álgebra Lineal - LCC - LM - PM **2020**

Práctica: CAPÍTULO 2 - ESPACIOS VECTORIALES (*primera parte*)

A lo largo de esta práctica $(V,+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre el conjunto de los números reales, salvo que se aclare lo contrario.

1. Analizar si los siguientes conjuntos con las operaciones definidas son espacios vectoriales reales. (Obs: cuando no se explicitan las operaciones suma y producto por escalares es porque se consideran las habituales).

   a) El conjunto de los números reales no negativos $\mathbb{R}_+$.

   b) El conjunto de los números reales positivos, con la suma de dos vectores x, y definida como $x.y$ y el producto por un real c como x^c.

   c) El conjunto de las funciones pares.

   d) El conjunto de las funciones continuas con el producto de una función por un escalar c definido como $(cf)(x) = f(cx)$.

   e) El conjunto de las funciones reales biyectivas con la suma de dos funciones definida como $(f+g)(x) = f(g(x))$.

   f) El conjunto de los polinomios a coeficientes reales de grado a lo sumo 3, incluído el polinomio nulo.

   g) $\mathbb{R}^2$ con la suma de $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ definida como $x + y = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$.

   Decir en cada caso que no resulte e.v., cuál es la propiedad que se está violando.

2. Probar que el conjunto de n-uplas con componentes en $\mathbb{Z}_2$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$ (con la suma y el producto de un escalar realizado componente a componente). ¿Es $\mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_2$?

3. Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial. En particular, sabemos que existe $\mathbf{0} \in V$ tal que $\mathbf{0} + x = x$ para todo $x \in V$; y que para todo $x \in V$ existe un vector $\bar{x}$ tal que $x + \bar{x} = \mathbf{0}$.

   Demostrar los siguientes enunciados.

   a) *Unicidad del neutro*: si $\mathbf{0}' \in V$ es tal que $\mathbf{0}' + x = x$ para todo $x \in V$, entonces $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$.

   b) *Unicidad del opuesto*: dado $x \in V$, si $\bar{x}' \in V$ es tal que $x + \bar{x}' = \mathbf{0}$, entonces $\bar{x}' = \bar{x}$

   c) $\bar{x} = (-1) \cdot x$ (a partir de ahora, $-v$ es el opuesto de $v, \forall v \in V$).

   d) *Propiedad cancelativa*: si $z + x = z + y$ entonces $x = y$.

   e) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

   f) $0 \cdot v = \mathbf{0} \ \ \forall v \in V$.

   g) $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$.

   h) Si $\alpha \cdot v = \mathbf{0}$ entonces $\alpha = 0$ o $v = \mathbf{0}$.

4. Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial y $U \subset V$. Entonces, U es un subespacio (vectorial) de V si y solo si toda combinación lineal de elementos de U pertenece a U; i.e. para todo $u_1, u_2 \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, resulta $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$.

5. Mostrar que las dos propiedades que definen un subespacio vectorial (i.e. que la suma sea cerrada en el conjunto y que el producto por escalar también lo sea) son propiedades independientes una de otra. Para ello buscar un espacio vectorial V y un subconjunto U que sea cerrado bajo la suma pero no bajo el producto por escalar y otro conjunto U' que cumpla lo contrario.

6. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios.

   a) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0\}$.

   b) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 1\}$.

   c) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0\}$.

   d) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - 2x_3 = 4\}$.

   e) $\{\alpha(1, 4, 0) + \beta(2, 2, 2) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   f) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

g) $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$.

7. Determinar cuales de estos subconjuntos definen subespacios vectoriales.

   a) $\mathbb{R}^2_+ \subset \mathbb{R}^2$.

   b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

   c) $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 5\} \subset \mathbb{R}^3$.

   d) $\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A \text{ es triangular}\} \subset \mathbb{K}^{n\times n}$.

   e) $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A \text{ es simétrica}\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.

8. Sea **P** el plano de ecuación $x + 2y + z = 6$ y $\mathbf{P}_0$ el plano paralelo a P que pasa por el origen. ¿Son **P** y $\mathbf{P}_0$ subespacios de $\mathbb{R}^3$?.

9. Para cada uno de los siguientes conjuntos determinar si es un subespacio de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, o explicar por qué no lo es.

   a) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$.

   b) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$.

   c) $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : f(2) = 0\}$.

   d) El conjunto de funciones constantes.

   e) $\{\alpha + \beta \operatorname{sen} x : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

10. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y sean U y W subespacios de V. Probar que

$$U + W = \{u + w \ : \ u \in U, w \in W\}$$

    es un subespacio de V.

11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

    a) Describir un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a A y no a B.

    b) Si un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ contiene a A y a B, ¿debe contener también a I?

12. Sea V un espacio vectorial y W_1 y W_2 dos subespacios de V. Demostrar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y solo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

13. Considerar el espacio vectorial V de todas las funciones con dominio y codominio igual a $\mathbb{R}$ (con la suma y producto por escalar usuales).

    Sean $V_I = \{f \in V : \ f \text{ es una función impar }\}$ y $V_P = \{f \in V : \ f \text{ es una función par }\}$.

    Probar que:

    a) V_I y V_P son subespacios de V.

    b) $V_I + V_P = V$.

    c) $V_I \cap V_P = \{\mathbf{0}\}$.

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $N(A)$ es un subespacio vectorial real de $\mathbb{R}^n$ y $C(A)$ un subespacio vectorial real de $\mathbb{R}^m$.

15. Dada A una matriz $m \times n$, sea A' la matriz que se obtiene de agregar una columna A^{n+1} a A, donde A^{n+1} es una combinación lineal de las columnas de A. Probar que $C(A) = C(A')$.

16. Explicitar el espacio columna y el espacio nulo de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

17. Determinar una matriz A tal que su espacio nulo consista en:

    a) todas las combinaciones lineales de $(2, 2, 1, 0)$ y $(3, 1, 0, 1)$.

    b) todos los múltiplos de $(4, 3, 2, 1)$.

18. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$. Probar que el espacio columna de AB está contenido en el espacio columna de A. Dar un ejemplo donde dicha contención sea estricta.

Definición: Sea V un espacio vectorial y U_1, U_2 subespacios vectoriales de V. Entonces V es suma directa de U_1 y U_2, y se nota $V = U_1 \oplus U_2$, si para todo $v \in V$ existen únicos $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$.

19. *a*) Sean U_1, U_2 subespacios vectoriales de V. Probar que $V = U_1 \oplus U_2$ si y solo si se verifican las siguientes condiciones:
    $i)$ $V = U_1 + U_2$.
    $ii)$ $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

    b) Encontrar un contraejemplo para demostrar que el resultado anterior no puede extenderse a más de dos subespacios, es decir, probar que para $m \geq 3$ NO ES VÁLIDA la siguiente afirmación.
    Sean U_i, $i = 1, \ldots, m$ subespacios vectoriales de V. Entonces, si se verifican las siguientes dos condiciones:
    $i)$ $V = U_1 + U_2 + \ldots + U_m$,
    $ii)$ $U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_m = \{0\}$,
    resulta $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_m$.

20. Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, y sea U el subespacio de $\mathbb{R}[x]$ dado por

$$U = \{ax^2 + bx^5 : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Encontrar un subespacio W de $\mathbb{R}[x]$ tal que $\mathbb{R}[x] = U \oplus W$.

21. En el espacio vectorial de las matrices reales de orden 3, describir el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos:

    a) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

    b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

    c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

22. Recordar que, dado V un espacio vectorial y $S \subset V$, $\langle S \rangle$ denota el subespacio de V generado por S. Demostrar las siguientes proposiciones:

    a) Si $S \subseteq T \subseteq V$, entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$.

    b) $S \subseteq \langle S \rangle$.

    c) Si $S \subseteq T$ y T es un subespacio de V, entonces $\langle S \rangle \subseteq T$. Observar que a partir de esta propiedad sabemos que $\langle S \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a S.

    d) S es un subespacio de V si y sólo si $\langle S \rangle = S$.

    e) Si $\langle S \rangle = U$, entonces $\langle U \rangle = U$.

f) Sea $W \subseteq V$. Entonces:

1) $\langle S \cap W \rangle \subset \langle S \rangle \cap \langle W \rangle$.
2) $\langle S \cup W \rangle \subset \langle S \rangle + \langle W \rangle$.

g) ¿Valen las contenciones inversas en los items a) y f)?

23. Describir el menor subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ que contenga a:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

24. Considerar el espacio vectorial V de los polinomios en $\mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 3 (junto al polinomio nulo). Sean $p_i \in V$, $i = 1, \ldots, 5$ dados por:

$$p_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4, \quad p_2(x) = 2x^3 + 5x^2 + 11x + 8, \quad p_3(x) = x^2 + 5x$$

$$p_4(x) = 3x^3 + 6x^2 + 9x + 12 \quad \text{y} \quad p_5(x) = x^3 + 3x^2 + 8x + 3.$$

Para $j \in \{4, 5\}$, determinar si $p_j \in \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$.

EJERCICIOS ADICIONALES

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de las matrices $n \times n$.

a) El conjunto de las matrices triangulares.

b) El conjunto de las matrices singulares.

c) El conjunto de las matrices simétricas.

2. Dar un ejemplo de subespacio no vacío de $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que U sea cerrado bajo la multiplicación por escalares, pero que no sea un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^\infty$?

a) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : |\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}|$ es finito $\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists\, i_0 \in \mathbb{N} / x_i = 0 \;\forall\, i \geq i_0\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : x_i \geq x_{i+1} \;\forall\, i \in \mathbb{N}\}$ (sucesiones decrecientes).

d) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists \lim\limits_{i\to\infty} x_i\}$ (sucesiones convergentes).

e) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists\, c \in \mathbb{R} \;/\; x_{i+1} = c + x_i \;\forall\, i \in \mathbb{N}\}$ (progresiones aritméticas).

f) $\{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists\, c \in \mathbb{R} \;/\; x_{i+1} = c x_i \;\forall\, i \in \mathbb{N}\}$ (progresiones geométricas).

4. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, dar un contraejemplo si es falsa.

a) Los vectores b que no están en el espacio columna $C(A)$ constituyen un subespacio.

b) Si $C(A)$ contiene sólo al vector cero, entonces A es la matriz cero.

c) El espacio columna de $2A$ es igual al espacio columna de A.

d) El espacio columna de $A - I$ es igual al espacio columna de A.

5. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y sean W_1, W_2, W_3 son subespacios de V. Determinar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

i) Si $W_1 + W_3 = W_2 + W_3$ luego $W_1 = W_2$.

ii) Si $W_1 \oplus W_3 = W_2 \oplus W_3$ luego $W_1 = W_2$.