Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Probabilidad y Estadística

Tp final

Autor:

Demagistris, Santiago Ignacio

Agosto 2020

0.1 Ejercicio 1

a) El espacio muestral sobre el cual estamos trabajando es S={0,1}, donde cara es 1 y cruz es 0

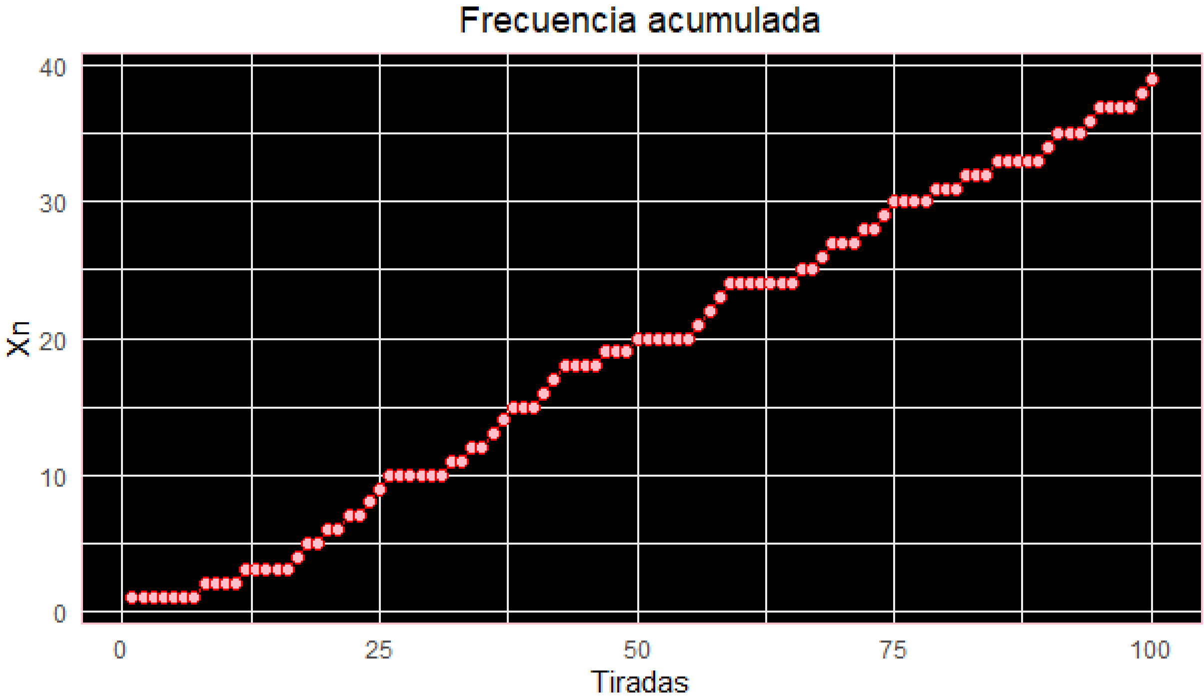


Figure 1: Tiradas de moneda

Podemos observar que se obtuvo un total de 39 caras en este proceso.

b)

(**P(X=1)**). Por lo observado en la simulacion anterior, de 100 tiradas obtuvimos 39 caras. Por lo tanto podriamos aproximar la probabilidad de que obtengamos una cara al tirar la moneda de P(X=1) $= \frac{39}{100} = 0,39$

(**E(X)**). Sabemos que $E(X) = \sum_{x \in S} xP(X = x) = 0 * 0,61 + 1 * 0,39 = 0,39$

c) Sea Y= numero de veces hasta que salgan 3 caras. $Y \sim Pascal$, por lo que

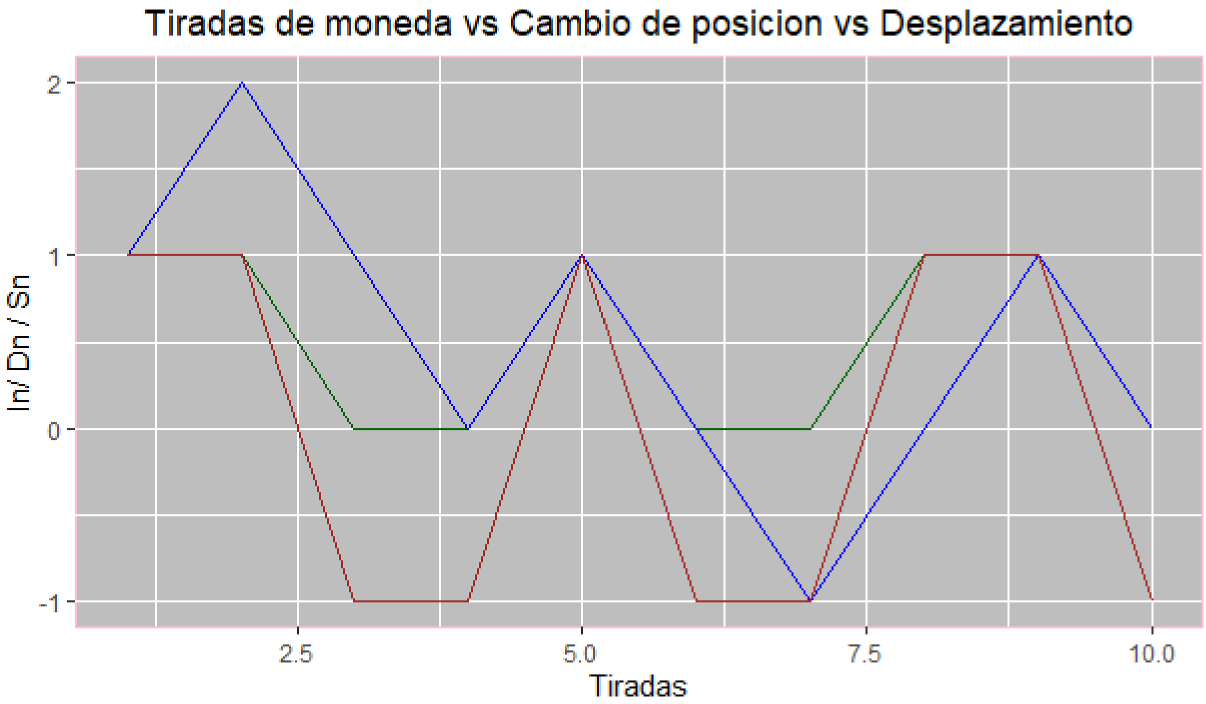
$$P(Y = k) = \binom{k-1}{3-1} 0.39^3 \ 0.61^{k-3} = \binom{k-1}{2} 0.39^3 \ 0.61^{k-3}$$

Observemos que P(Y=50) $= 5,9 \times 10^{-9}$, $y \geq 3$. Por lo tanto si consideramos un espacio reducido para Y, $S_y = \{3, 4, ..., 50\}$. Si buscamos E(Y), obtenemos el valor esperado para obtener la tercer cara, es decir la cantidad de tiradas promedio que debemos realizar.

Por medio de R obtuve las probabilidades y calcule E(y), obtuve que el numero esperado de tiradas es de 7,69.

d) Para sesgar la moneda, realice un experimento con espacio muestral $S_x = \{0, 1, 2\}$. Con una distribucion de probabilidad equitativa entre estos elementos. Luego defini una variable aleatoria Y=mod(X,2). Asi es como obtuve un espacio muestral $S_y = \{0, 1\}$, donde 0 significa que el resultado fue cruz y 1 que el resultado fue cara. Al simular el proceso con n=100 obtuve que salieron en total 33 caras, por lo tanto podria aproximar $P(Y = 1) \sim 0,33$. Al realizar un analisis similar que el planteado en el item b), obtengo que E(Y) = 0,39.

0.2 Ejercicio 2



In	Dn	Sn
1	1	1
1	1	2
1	1	3
0	-1	2
0	-1	1
1	1	2
0	-1	1
0	-1	0
1	1	1
0	-1	0

Figure 2: Tiradas de moneda

(Azul) Sn || (Marron) Dn || (Verde) In

Al simular las 10 tiradas de la moneda obtuve la variable aleatoria Dn, apartir de la cual obtuve Sn. Sn fue calculada como la frecuencia acumulada de Dn considerando como $S_0 = 0$

0.3 Ejercicio 3

a) Para realizar usare k=50, p=0.55, S=100, perder=0. El resultado obtenido es el siguiente:

b)

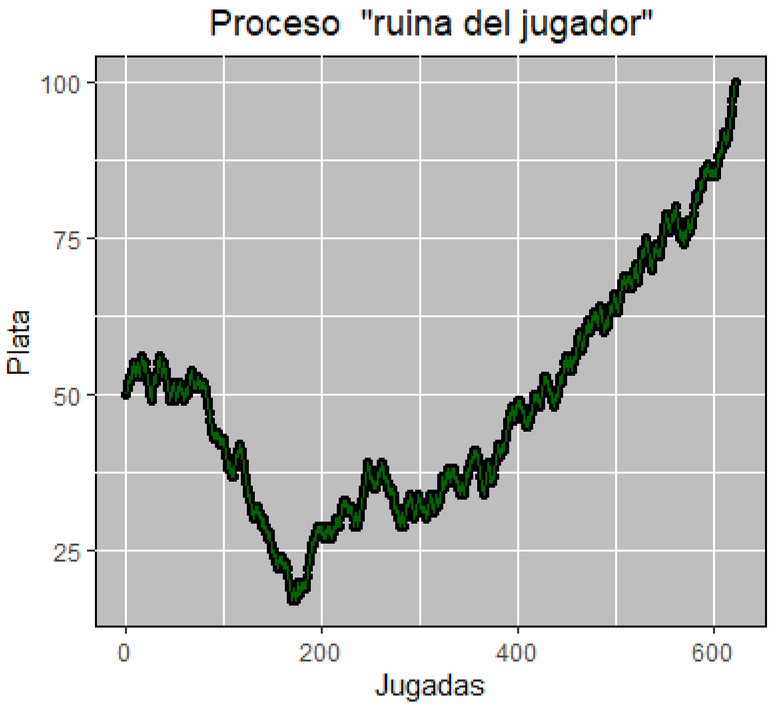


Figure 3: Trayectoria. Ruina del jugador

c) Con k=20, S=60, p=0.5001 y 1000 trayectorias obtuve una aproximacion a la probabilidad de caer en la ruina de 0.678

0.4 Ejercicio 4

a) Al realizar la simulacion observe 50000 repeticiones del experimento y obtuve un promedio de 21.08484 minutos.

b) Sea S={ii,id,d} el espacio muestral de un experimento ϵ que consiste en observar las decisiones del raton. Estas corresponden corresponden a elegir izquierda-izquierda, elegir izquierda-derecha y elegir derecha respectivamente. Si definimos una variable aleatoria X tal que:

$$X(s) = \begin{cases} 2 \quad si \quad x \ = \ "ii" \\ \\ 5 \quad si \quad x \ = \ "id" \\ \\ 3 \quad si \quad x \ = \ "d" \end{cases}$$

Ahora definimos una variable aleatoria Y = {numero de repeticiones hasta que el evento {2} ocurra} y observamos que Y se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que $P(\{2\}) = P(ii \cap i) = P(ii|i)P(i) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, por lo que E(Y) = $\frac{2}{\frac{1}{6}} = 12$. Luego definimos una variable aleatoria Z = {numero de repeticiones hasta que el evento {3} ocurra} y observamos que Z se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que $P(\{3\}) = \frac{1}{2}$, por lo que E(Y) = $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$. Luego definimos una variable aleatoria W = {numero de repeticiones hasta que el evento {5} ocurra} y observamos que W se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que $P(\{5\}) = P(id \cap i) = P(id|i)P(i) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{6}$, por lo que E(Y) = $\frac{5}{\frac{1}{3}} = 15$. Por lo tanto p({Salga}) tiene un peso en minutos de E(Y) = 12, mientras que 1-p tiene un peso en minutos de E(Z+W) = E(Z) + E(W) = 21. Por lo que el tiempo esperado para que la rata salga del laberinto es de $121/31/2 + 215/6 = 19,5$ minutos.

0.5 Ejercicio 5

a) La matriz de transicion P es no-regular. Esta cadena de Markov presenta 4 clases de comunicacion (una por cada estado). El estado M es absorbente, por lo cual la cadena de Markov es absorbente, los demas estados son de transicion.

b) Para n=10 pasos obtenemos la matriz P^n, donde P^n_{ij} representa la probabilidad de llegar a j desde i en n pasos.

$$P^{10} \simeq \begin{pmatrix} 0.99004 & 0.00969 & 0.000214 & 0.00005069 \\ 0 & 0.94159 & 0.04078 & 0.0176248 \\ 0 & 0 & 0.425037 & 0.5749629 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Partiendo desde un estado luego de 10 unidades de observacion en la evolucion de esta persona podemos observar:

”Suceptible”. **Suceptible.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto siga en su estado de suceptibilidad de 0.99004, luego de 10 unidades de observacion.

VIH. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga VIH de 0.00969, luego de 10 unidades de observacion.

SIDA. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.000214, luego de 10 unidades de observacion.

Muerto. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.00005069, luego de 10 unidades de observacion.

Por lo tanto si el sujeto es suceptible, en 10 unidades de observacion, es altamente probable que se mantenga en esta condicion.

”VIH”. **Suceptible.** Partiendo desde VIH no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado ”suceptible” , luego de 10 unidades de observacion.

VIH. Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condicion de 0.94159, luego de 10 unidades de observacion.

SIDA. Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.04078, luego de 10 unidades de observacion.

Muerto. Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.0176248, luego de 10 unidades de observacion.

Por lo tanto si el sujeto esta diagnosticado con VIH, tiene altas probabilidades de mantener su condicion y no puede librarse de su enfermedad.

”SIDA”. **Suceptible.** Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de ”suceptibilidad” , luego de 10 unidades de observacion.

Suceptible. Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de ”VIH” , luego de 10 unidades de observacion.

SIDA. Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condicion de 0.425037, luego de 10 unidades de observacion.

Muerto. Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.5749629, luego de 10 unidades de observacion.

Por lo tanto si el sujeto esta diagnosticado con SIDA, tiene un 57% de morir luego de 10 unidades de observacion. No puede volver a la condicion de VIH, ni a la de suceptible, mientras que se puede mantener con SIDA con una probabilidad de 0.425037% .

Por otro lado si esta muerto... bueno, digamos que es el estado absorbente por excelencia.

c) Sabemos que

$$Q = \begin{pmatrix} 0.999 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0.994 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0.918 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Y por lo tanto,

$$F = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & 0 & \frac{500}{41} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Donde F es la matriz fundamental, en la cual $F_i j$ es el numero esperado de visitas a j dado que la cadena comienza en i. Por lo tanto, si iniciamos en el estado

"Suceptible" el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 1178.862

"VIH" el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 178.862

"SIDA" el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 12.19

Cada uno de los resultados obtenidos de acuerdo al estado desde el que se comienza a contabilizar, es el promedio de unidades de observacion para que la persona llegue al estado de muerte.

d) COMPLETAR LO TENGO EN CUADERNILLO

0.6 Ejercicio 6

a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \tag{4}$$

b) Simulacion

c) Obtuve el siguiente vector de frecuencias relativas : [0.25, 0.16, 0.04, 0.06, 0.10, 0.34, 0.05]. Por lo cual con n=100 suponemos que el rango de las paginas a,b,c...,g corresponden con las posiciones desde 1 a 7 del vector obtenido por medio de la simulacion.

0.7 Ejercicio 7

a) Sea X_t el numero de llamads que recibe Juan durante un intervalo de tiempo t. Sabemos que X_t tiene una distribucion de Poisson con parametro $= 10 textos/hora$. Por lo tanto, $P()$

0.8 Ejercicio 8

a) Dada la distribucion inicial π_0, y la matriz de transicion P, luego de dos semanas nos encontramos con la siguiente probabilidad de ataques a los puertos:

$$\pi_0 P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{8}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Los puertos con menos probabilidad de ser atacados son el 135 y 445, mientras que el que tiene mas probabilidad de ser atacado es el 139. Se puede observar que el puerto 80 no tiene posibilidad de ser atacado.