Probabilidad

Mgs. Nora Arnesi

Experimentos aleatorios

- *Es posible repetir cada experimento indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones*

- *Aunque en general no podemos indicar cuál será un resultado particular, podemos describir el conjunto de todos los resultados posibles del experimento*

- *Cuando el experimento se repite un gran número de veces, aparece un modelo definido de regularidad. Esta regularidad hace posible la construcción de un modelo con el cual analizar el experimento.*

Recordar!!

Al describir los diversos experimentos, se debe especificar no sólo el procedimiento que se realiza sino también lo que estamos interesados en observar.

Espacio muestral

Dado un experimento ε , definimos el espacio muestral como el conjunto de todos los resultados posibles e imaginables de ε .

Según el número de resultados posibles :

- Finito
- Infinito numerable
- Infinito no numerable

Sucesos

Un suceso A -respecto a un espacio muestral S asociado con un experimento ε- es simplemente un conjunto de resultados posibles. En terminología de conjuntos, un suceso es un subconjunto del espacio muestral S.

S y Ø también son sucesos

Combinación de sucesos

- *Si A y B son sucesos,* $A \cup B$ *es el suceso que ocurre si A o B (o ambos) ocurren*
- *Si A y B son sucesos,* $A \cap B$ *es el suceso que ocurre sí y solo sí A y B ocurren.*
- *Si A es un suceso,* $\overline{A}$ *es el suceso que ocurre si y sólo sí A no ocurre.*
- *Si* $A_1, \ldots A_n$ *es cualquier colección finita de sucesos, entonces* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *es el suceso que ocurre sí y sólo sí al menos uno de los sucesos ocurre.*
- *Si* $A_1, \ldots A_n$ *es cualquier colección finita de sucesos, entonces* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ *es el suceso que ocurre sí y sólo sí todos los sucesos* A_i *ocurren.*
- *Idem sucesión infinita numerable*

Mutuamente excluyentes

Se dice que dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir juntos.

$$A \cap B = \emptyset$$

Ejemplo: *se prueba un artefacto electrónico y se anota el tiempo total de uso t, supongamos que* $\{t / t \geq 0\}$

$A=\{t/t<100\}$ $B=\{t/50 \leq t \leq 200\}$ $C=\{t/t>150\}$

Encontrar:

$A \cup B$

$A \cup C$

$B \cup C$

$A \cap B$

$A \cap C$

$B \cap C$

Asignando probabilidades

Una de las características básicas del concepto de “experimento” es que no se sabe qué resultado particular se obtendrá al realizarlo. Es decir, si A es un suceso asociado al experimento no se puede indicar con certeza si ocurrirá o no. Por lo tanto resulta de interés tratar de asociar un número con el suceso A que mida de alguna manera la posibilidad de que A ocurra.

Frecuencia relativa

Para motivar el enfoque adoptado como solución al problema anterior supóngase que se repite el experimento ε n veces y sean A y B dos sucesos asociados con ε. Sean n_A y n_B el número respectivo de veces que el suceso A y el suceso B ocurrieron en las n repeticiones

Definición

La frecuencia relativa del suceso A en las n repeticiones del experimento ε se define como : $f_A = n_A / n$ y cumple las siguientes propiedades:

- ✓ $0 \leq f_A \leq 1$
- ✓ $f_A = 1$ sí y sólo sí A ocurre cada vez en las n repeticiones
- ✓ $f_A = 0$ sí y sólo sí A nunca ocurre en las n repeticiones
- ✓ Si A y B son dos sucesos que se excluyen mutuamente

  $f_{AUB} = f_A + f_B$
- ✓ f_A basada en las n repeticiones del experimento se estabiliza en torno al valor P(A) cuando n tiende a infinito (realidad empírica)

Enfoque frecuencial

Repetir el experimento un gran número de veces, calcular la frecuencia relativa y usar ese número para asignar la P(A).

- ¿cuán grande deberá ser el número de repeticiones?
- Lo que se busca es un medio de obtener un número sin recurrir a la experimentación
- ¿Cómo debe ser ese número para considerarse satisfactorio? Naturalmente, si se realizaran un gran número de repeticiones la frecuencia relativa debería dar cercana a dicho valor.

Definición

Sea ε un experimento y S un espacio muestral asociado a dicho experimento. Con cada suceso A asociamos un número real, designado P(A) (probabilidad de A) que satisfaga las siguientes condiciones:

- ✓ $0 \leq P(A) \leq 1$
- ✓ $P(S) = 1$
- ✓ Si A y B son dos sucesos que se excluyen mutuamente

  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Si $A_1, \ldots A_\infty$ son sucesos que se excluyen mutuamente de par en par, entonces:
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_\infty)$ (a partir de esta se deduce para cualquier n finito)

Teoremas

- Si Ø es el conjunto vacío, entonces P(Ø)=0
- Si $\overline{A}$ es el suceso complementario de A, entonces P(A) = 1- P($\overline{A}$)
- Si A y B son dos sucesos cualesquiera entonces $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
- Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera

$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$

- Si A C B entonces $P(A) \leq P(B)$

¿Cómo calcular P(A)?

- Se establece para cada suceso A, asociado con el espacio muestral de un experimento, un número P(A) que satisface los axiomas.

  Sin embargo es necesario hacer ciertas suposiciones adicionales que conduzcan a un método para evaluar dichas probabilidades. Si las suposiciones no están garantizadas se debe recurrir a la experimentación para aproximar la P(A) de los datos reales.

- Recordar que f(A) no es lo mismo que P(A)

Espacio muestral finito

- Se considera el caso en que el espacio muestral consta de un número finito de elementos $S=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$
- A fin de caracterizar P(A) en este modelo se considera el suceso que está constituido por un solo resultado, $A=\{a_i\}$
- A cada uno de los sucesos elementales $\{a_i\}$

  se le asigna un número p_i que satisface:

- (a) $p_i \geq 0$, $i=1,2,\ldots k$
- (b) $p_1+p_2+\ldots+p_k=1$

Es evidente que como $\{a_i\}$ es un suceso, estas condiciones deben de estar de acuerdo con las postuladas para las probabilidades de sucesos en general.

- Si el suceso A está formado por r resultados, con $1 \leq r \leq k$, es decir
- $A=\{a_{j1},a_{j2},....,a_{jr}\}$ donde $j1,j2,...jr$ representan cualquier subíndice r de 1,..,k se deduce que $P(A)= p_{j1}+...+p_{jr}$ [*]

Resumen: la asignación de probabilidades p_i a cada uno de los sucesos elementales $\{a_i\}$, sujeto a las condiciones (a) y (b), determina de un modo único la $P(A)$ para cada suceso $A \subset S$, en donde $P(A)$ está dado por [*]

Resultados igualmente probables

- Si los k resultados son igualmente probables, se deduce que cada $p_i=1/k$, porque $p_1+\ldots+p_k=1 \Rightarrow kp_i=1$ para todo i
- Si el suceso A consta de r resultados

$$P(A)= r/k$$

El modo de evaluar P(A) se indica:

P(A)= (#casos favorables a A) / (# posibles)

Pensemos!

Supongamos que tenemos N objetos

$$a_1, a_2, \ldots . a_N$$

- ✓ Escoger al azar un objeto entre N, significa que cada uno de los objetos tienen la misma probabilidad de ser escogido:

$$P(a_i)=1/N \quad i=1,2,\ldots,N$$

Recordar : debemos estar seguros de que todos los resultados son igualmente probables!!!!

- Escoger al azar dos objetos entre N significa que cada uno de los pares (sin considerar el orden) tiene la misma probabilidad de ser escogido que cualquier otro par
- Escoger al azar n objetos entre N ($n \leq N$) significa que cada n-upla tiene la misma probabilidad de ser escogida que cualquier otra n-upla

Probabilidad condicional

- Pensemos en un lote que está compuesto por:

  80 artículos sin defectos

  20 artículos defectuosos

Supongamos que elegimos dos artículos :

(a) Con sustitución

(b) Sin sustitución

Calculando probabilidades…

- Se definen los siguientes sucesos:

A={el primer artículo es defectuoso}

B={el segundo artículo es defectuoso}

- Si escogemos con sustitución P(A)=P(B)=1/5
- Si escogemos sin sustitución?

…deberíamos conocer si A ocurrió o no

….entonces?

Sean A y B dos sucesos asociados con un experimento ε. Se indica con P(B/A) a la probabilidad condicional del suceso B dado que A ha ocurrido.

En el ejemplo : P(B/A)=19/99

Cada vez que calculemos P(B/A) vamos a calcular la P(B) en el espacio muestral reducido de A

Definición

Probabilidades condicionales:

$$P(A/B)= P(A \cap B)/P(B)$$

$P(B)>0$

$$P(B/A)= P(A \cap B)/P(A)$$

$P(A)>0$

Ayuda: pensemos en la frecuencias relativas!

$n_{A \cap B} / n_A$ *representa la frecuencia relativa de b entre esos resultados en que A ocurrió*

Recordar!!

Hay dos maneras de calcular la probabilidad condicional P(B/A)

- ✓ Directamente considerando la probabilidad de B en el espacio muestral restringido A
- ✓ Usando la definición, donde $P(A \cap B)$ y P(B) se calculan con respecto al espacio muestral original.

Otra forma de escribir la probabilidad condicional...

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A)$$

o bien:

$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$$

Conocido como....

teorema de la multiplicación de probabilidades

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1,A_2)\ldots P(A_n/A_1,A_2,\ldots A_{n-1})$

Ver casos especiales pág:38 Meyer

Recordar….

Se consideró que dos sucesos A y B que no pueden ocurrir simultáneamente se los denomina mutuamente excluyentes (m.e) ($A \cap B = \emptyset$) y

se indicó que si A y B son m.e. $P(A/B)=0$, porque B impide la ocurrencia de A.

✓ Además si A C B , $P(B/A)=1$

En estos casos sabiendo que B ocurrió, hay una información precisa referente a la probabilidad de la ocurrencia de A.

Sucesos independientes

Sin embargo hay muchos casos en los cuales se sabe que si un suceso B ocurre, no tiene influencia alguna en la ocurrencia o no ocurrencia de A, en esos casos se dice que A y B son sucesos independientes.

¿Qué sucede si son independientes?

$$P(A/B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A)$$
$$P(B/A) = P(A \cap B)/P(A) = P(B)$$

Sin embargo utilizar esta forma de comprobación requiere que P(A) y P(B) sean mayores que cero. Para subsanar este inconveniente se puede considerar :

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B)$$

...suponiendo que las probabilidades condicionales sean iguales a sus probabilidades no condicionales correspondientes resulta:

$$P(A \cap B) = P(B/A)P(A) = P(B)P(A)$$
$$P(A \cap B) = P(A/B)P(B) = P(A)P(B)$$

Sucesos independientes

Por definición, dos sucesos A y B son independientes

sí y solo si:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A)$$

Se dice que tres sucesos A, B y C son mutuamente independientes sí y sólo si todas las condiciones siguientes se mantienen:

$P(A \cap B) = P(B)P(A)$ $\quad$ $P(B \cap C) = P(B)P(C)$

$P(A \cap C) = P(A)P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Sucesos mutuamente independientes

Los n sucesos A_1, A_2,…,A_n son mutuamente independientes sí y sólo si tenemos para k=2,3,…,n

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{i1})\mathrm{P}(\mathrm{A}_{i2}) \ldots.\mathrm{P}(\mathrm{A}_{ik})$$

Hay 2^n-n-1 condiciones anotadas

Partición del espacio muestral

Se dice que los sucesos B_1, B_2,..., B_k representan una partición del espacio muestral S si:

- ✓ $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$
- ✓ ${}_{i=1}^{k} B_i = S$
- ✓ P(Bi)> 0 para todo i
- ✓ Es decir cuando se realiza el experimento ocurre uno y sólo uno de los sucesos B_i

Partición del espacio muestral y un suceso de interés....

Sea A un suceso con respecto a S y sea

$B_1, B_2, \ldots, B_k$ una partición de S.

A puede descomponerse como la unión de sucesos mutuamente excluyentes

$$A = A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup \ldots \cup A \cap B_k$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k)$$

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + \ldots + P(A/B_k)P(B_k)$$

Teorema de Bayes

Sean B_1, B_2,..., B_k una partición del espacio muestral S. Sea A un suceso asociado a S, aplicando la def. de probabilidad condicional se puede escribir:

$$P\left(B_i / A\right) = \frac{P\left(A/B_i\right) P\left(B_i\right)}{\sum_{j=1}^{K} P\left(A/B_j\right) P\left(B_j\right)} \quad j = 1, \ldots, K$$