CAPÍTULO 5 - AUTOVALORES Y AUTOVECTORES (2DA. PARTE) [1]

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

[1] Siguiendo *Linear Algebra and its applications*, G. Strang.

OUTLINE

Ecuación matricial protagónica:

$$Ax = \lambda x \quad (A \text{ matriz } n \times n,\ \lambda \text{ y } x, \text{ variables}).$$

Buscamos el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ cuya dirección no varía por efecto de A.

- **Autovalores de una transformación lineal T de V en V**:
  $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor de T* si existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$.
- Dado λ autovalor de T:
  - $v \in V$ *autovector de T asociado a λ* si $v \neq 0$ y $Tv = \lambda v$.
  - $\{$autovectores asociados a $\lambda\} \cup \{0\}$ es un subespacio vectorial de V denominado *autoespacio de T asociado a λ*
- **Caracterización de los autovalores**:
  $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de $T \iff$ existe $v \neq 0$ tal que $Tv - \lambda v = 0 \iff$ existe $v \neq 0$ tal que $(T - \lambda I)v = 0 \iff T - \lambda I$ no es un isomorfismo.
- Transformaciones lineales definidas por matrices $\longrightarrow$ autovectores, autovalores y autoespacios *de la matriz*.

- λ es un autovalor de A si y solo si

$$det(A-\lambda I)=0 \quad \text{(Ecuación característica de } A\text{)}.$$

  El autoespacio asociado a un autovalor λ es $N(A-\lambda I)$.
- desarrollo de $det(A-\lambda I) \longrightarrow$ polinomio en λ de grado $n \longrightarrow$ Polinomio característico de A.

  λ autovalor de $A \Longleftrightarrow \lambda$ raíz del polinomio característico de A.
- **Nuevo convenio**: trabajamos con $\mathbb{R}^n$ como subconjunto de vectores del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C} \longrightarrow$ Toda matriz $n \times n$ tiene n autovalores (en $\mathbb{C}$).

  La *multiplicidad (algebraica) de un autovalor* es la multiplicidad como raíz del polinomio característico.

  Observación Si A es una matriz real y z es un autovalor de A entonces $\bar{z}$ también lo es.
- Los autovalores de una matriz triangular son sus entradas en la diagonal.

  Calcular los autovalores de matrices triangulares y diagonales es fácil.

Queremos *diagonalizar* las matrices sin modificar sus autovalores.

- A con autovalores $\lambda_i, i = 1, \ldots, n \longrightarrow \Lambda$: matriz diagonal con λ_i su entrada sobre la diagonal en la fila i, $i = 1, \ldots, n$.
- A es *diagonalizable* si existe una matriz inversible S y una matriz diagonal D tal que $S^{-1}AS = D$. Decimos que S *diagonaliza a* A.
- S diagonaliza a A si y solo si las columnas de S son autovectores de A y $D = \Lambda$.
- A matriz $n \times n$, A es diagonalizable si y solo si A tiene n autovectores l.i..
- No todas las matrices son diagonalizables: Ej: $n = 2$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$ no todas las matrices tienen n autovectores l.i..
- Si A tiene n autovalores diferentes, A tiene n autovectores l.i..
  La recíproca no es cierta. Ejemplo: la matriz identidad.

A es diagonalizable si y solo si A tiene n autovectores l.i..

¿Cuándo A posee n autovectores l.i.?

Sabemos que si todos los autovalores de A tienen multiplicidad (algebraica) igual a 1 (n autovalores diferentes), los autovectores correspondientes son l.i..

¿Qué sucede cuándo A tiene autovalores con multiplicidad mayor que 1?.

Una condición necesaria: Si A es digonalizable y λ es un autovalor de A de multiplicidad p entonces A tiene (al menos) p autovectores l.i. asociados a λ. (Justificar). O sea,

Lema: Si A es diagonalizable, el autoespacio de todo autovalor de A debe tener dimensión al menos la multiplicidad (algebraica) del autovalor.

¿Es condición suficiente?

El siguiente resultado, válido para autovectores y autovalores *de cualquier transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo*, nos asegura que si.

Lema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y T una transformación lineal de V en sí mismo. Sean λ_i, $i=1,\dots,p$, autovalores diferentes T ($p \leq n$). Para cada $i=1,\dots,p$, sea $\mathscr{V}_i$ un conjunto de vectores l.i. en el autoespacio correspondiente a λ_i. Entonces, $\mathscr{V}=\cup_{i=1}^{p}\mathscr{V}_i$ es un conjunto de vectores l.i. de V.

Prueba: Consideremos una combinación lineal nula de vectores de $\mathscr{V}$

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{t(i)}\alpha_{ij}v_j^i=0 \tag{1}$$

donde $v_j^i \in \mathscr{V}_i$ para cada $i=1,\dots,p$ y todo $j=1,\dots t(i)$. Para cada $i=1,\dots,p$, definimos $u^i=\sum_{j=1}^{t(i)}\alpha_{ij}v_j^i$. Así, (1) es la combinación lineal nula $\sum_{i=1}^{p}u^i=0$ de los vectores $\{u^1,\dots,u^p\}$.

Prueba: (continuación)
Para todo $i = 1,\ldots,p$, u^i es un elemento del autoespacio asociado a λ_i. Entonces, si $u^i \neq 0$, u^i es un autovector asociado a λ_i. Como autovectores correspondientes a autovalores diferentes son l.i., y $\sum_{i=1}^{p} u^i = 0$, tenemos que, para todo $i = 1,\ldots,p$,

$$u^i = 0 = \sum_{j=1}^{t(i)} \alpha_{ij} v_j^i.$$

Como los vectores $v_j^i, j = 1,\ldots,t(i)$ son l.i., $\alpha_{ij} = 0$ para todo $j = 1,\ldots,t(i)$. Por lo tanto, los vectores de $\mathscr{V}$ son l.i.. $\square$

Volvamos a las matrices y agreguemos las siguientes definiciones:

Definición: Dada una matriz A y λ un autovalor de A, llamamos *multiplicidad algebraica (o multiplicidad) de* λ y lo notamos $ma(\lambda)$ a la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico de A. Llamamos *multiplicidad geométrica de* λ y lo notamos $mg(\lambda)$ a la dimensión del autoespacio asociado a λ.

Como consecuencia de los resultados anteriores tenemos el siguiente corolario:
Corolario: Una matriz A es diagonalizable si y solo si $mg(\lambda) \geq ma(\lambda)$, , para todo autovalor λ de A.

Prueba: Ya habíamos probado que era condición necesaria para que sea diagonalizable. Recíprocamente, si $mg(\lambda) \geq ma(\lambda)$, el el autoespacio asociado a λ tiene al menos $ma(\lambda)$ autovectores l.i.. Si cada autovalor tomamos tantos autovectores l.i. como su multiplicidad algebraica, este conjunto de vectores es un conjunto de autovectores l.i. de A y su cardinal es la suma de las multiplicidades de los autovalores de A, o sea, n. Así, A tiene n autovectores l.i. y por lo tanto es diagonalizable. $\square$

La multiplicidad geométrica, ¿podría ser mayor a la algebraica? NO

Teorema La multiplicidad geométrica de un autovalor es siempre a lo sumo su multiplicidad algebraica.

Prueba: no la vemos.

Por lo tanto tenemos:

Corolario: Una matriz A es diagonalizable si y solo si $mg(\lambda) \geq ma(\lambda)$, , para todo autovalor λ de A.

El siguiente teorema nos da distintas maneras de *descubrir* cuando una matriz es diagonalizable:

Teorema: Sean $\lambda_i, i = 1, \ldots, p$, los autovalores distintos de una matriz A y, para cada $i = 1, \ldots, p$, sea $\mathscr{B}_i$ una base de su autoespacio. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. A es diagonalizable.
2. $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$, para todo $i = 1, \ldots, p$.
3. $\sum_{i=1}^{p} mg(i) = n$.
4. $\cup_{i=1}^{p} \mathscr{B}_i$ es una base de $\mathbb{K}^n$.

Prueba:

$(1) \Rightarrow (2)$: consecuencia del corolario anterior

$(2) \Rightarrow (3)$: Es trivial.

Prueba: (continuación)

$(3) \Rightarrow (4)$:

Ya hemos probado que $\cup_{i=1}^{p}\mathscr{B}_i$ es un conjunto de vectores l.i. de $\mathbb{K}^n$. Además, como $\mathscr{B}_i \cap \mathscr{B}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (justificar), resulta:

$$\left|\cup_{i=1}^{p}\mathscr{B}_i\right| = \sum_{i=1}^{p}|\mathscr{B}_i| = \sum_{i=1}^{p} mg(\lambda_i) = n.$$

Por lo tanto, $\cup_{i=1}^{p}\mathscr{B}_i$ es una base de $\mathbb{K}^n$.

$(4) \Rightarrow (1)$: Si $\cup_{i=1}^{p}\mathscr{B}_i$ es una base de $\mathbb{K}^n$ entonces $\sum_{i=1}^{p}|\mathscr{B}_i| = n$ (justificar). Por lo tanto, tenemos:

$$n = \sum_{i=1}^{p}|\mathscr{B}_i| = \sum_{i=1}^{p} mg(\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{p} ma(\lambda_i i) = n.$$

Por lo tanto, $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$ para todo $i = 1, \ldots, p$ (Justificar). Por el corolario anterior, A es diagonalizable. $\square$

Dada una matriz A de tamaño $n \times n$, ¿qué herramientas tenemos hoy para saber si es diagonalizable?

Podemos seguir el siguiente método:

1. Calcular los autovalores diferentes de A: λ_i, $i = 1, \ldots, p$.
2. Para todo $i = 1, \ldots, p$, calcular $d_i = dim\, N(A - \lambda_i I)$.
3. Si $\sum_{i=1}^{p} d_i < n$, A no es diagonalizable. PARAR.
4. A es diagonalizable. La matriz S que tiene por columnas los vectores en $\cup_{i=1}^{p} \mathscr{B}_i$, donde $\mathscr{B}_i$ es una base de $N(A - \lambda_i I)$, $i = 1, \ldots, p$, es matriz diagonalizante de A.

El paso complicado en este método es el paso 1, el cálculo de los autovalores de A. Hasta ahora, sólo sabemos hacerlo calculando su polinomio característico y luego buscando sus raíces. Ambas cosas son muy pesadas computacionalmente.

El polinomio característico requiere del desarrollo de un determinante (que en matrices grandes es complejo).

Para la búsqueda de las raíces del polinomio no existen fórmulas explícitas a partir de polinomios de grado 5 y debemos hacer uso de métodos numéricos.

En la práctica, los autovalores se calculan por una secuencia de *transformaciones de similitud simples* (veremos más adelante de qué se trata), llevándola a su forma triangular (Lema de Schur, también lo veremos más adelante) donde los autovalores aparecen en la diagonal.

Veamos antes algunas propiedades que nos permiten calcular más fácilmente los autovalores en ciertos casos especiales.

Teorema: Sean $\{\lambda_i : i = 1, \ldots, n\}$ los autovalores de una matriz A y x^i, $i = 1, \ldots, n$, los autovectores asociados. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_i^k, i = 1, \ldots, n\}$ es el conjunto de autovalores de A^k. Además, x^i un autovector correspondiente a λ_i^k, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Prueba: La prueba es por inducción en k. La tesis obviamente vale para $k = 1$. Asumimos que $A^t x^i = \lambda_i^t x^i$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y queremos probar que $A^{t+1} x^i = \lambda_i^{t+1} x^i$.
Para cada $i = 1, \ldots, n$, tenemos

$$A^{t+1} x^i = A(A^t x^i) = A(\lambda_i^t x^i) = \lambda_i^t (A x^i) = \lambda_i^t (\lambda_i x^i) = \lambda_i^{t+1} x^i. \quad \square$$

Corolario: Si S diagonaliza a A entonces S diagonaliza a A^k, para todo $k \in \mathbb{N}$.
Prueba: Ejercicio.

La recíproca no es cierta.

Ejemplo: K rotación 90°.

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$$

K^2: rotación $180^\circ \longrightarrow K^2 = -I$, $\lambda_{1,2}^2 = -1$.
Los autovectores de K (complejos) son autovectores de K^2. Pero en este caso, e^1, e^2 también son autovectores de K^2 y no de K.En realidad, todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ son autovectores. Por lo tanto cualquier matriz inversible 2×2 diagonaliza a K^2 y no necesariamente a K.

Si A es inversible, la regla de *autovalor de la potencia es potencia del autovalor* también vale para $k=-1$. Recordar que si A es inversible, no tiene autovalor nulo.

Teorema: Sean $\{\lambda_i : i=1,\ldots,n\}$ los autovalores de una matriz A inversible y, para todo $i=1,\ldots,n$, sea x^i un autovector correspondiente a λ_i. Entonces, $\{\lambda_i^{-1} : i=1,\ldots,n\}$ es el conjunto de los autovalores de A^{-1} y, para todo $i=1,\ldots,n$, x^i es un autovector correspondiente a λ_i^{-1}.

Prueba: solo basta observar que, si $Ax=\lambda x$, entonces $\lambda \neq 0$ y $x=A^{-1}\lambda x=\lambda(A^{-1}x)$. Así, $A^{-1}x=\lambda^{-1}x$. □

Nuevamente tenemos el corolario respecto a la diagonalización de A^{-1}.

Corolario: Si S diagonaliza a A y A es inversible, entonces S diagonaliza a A^{-1}.

Ejemplo: K rotación $90^\circ \to \lambda_{1,2}=\pm i$.
K^{-1} rotación $-90^\circ \to \lambda_{1,2}^{-1}=\pm\frac{1}{i}=\mp i$.

Muchos problemas de aplicación se resuelven a través de la soluciones de un sistema *de ecuaciones en diferencias* de la forma

$$u_{k+1} = A\,u_k,\;\; k \in \mathbb{N},\;\; u_0 \in \mathbb{R}^n$$

donde A es una matriz $n \times n$. La solución es una sucesión infinita $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$. Sin embargo, muchas veces estamos interesados solo en conocer uno de los términos de la sucesión. Por ejemplo, el correspondiente a $k = 10^{30}$. ¡No queremos aplicar la recursión 10^{30} veces!
Es fácil ver que $u_k = A^k u_0$. ¡Pero tampoco vamos a calcular $A^{10^{30}}$!.
Si A es diagonalizable los cálculos se simplifican. Sea S matriz diagonalizante de A y $x^i, i = 1, \ldots n$ los autovectores columnas de S. Entonces:

$$u_k = A^k u_0 = (S\Lambda^k S^{-1})u_0 = (S\Lambda^k)\underbrace{(S^{-1}u_0)}_{c}.$$

Resolvemos $Sc = u_0$ (Gauss, ¡fácil!). Entonces,

$$u_k = (S\Lambda^k)c = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k x^i.$$

Resumiendo, dado un sistema en diferencias

$$u_{k+1} = Au_k, \;\; k \in \mathbb{N}, \;\; u_0 \in \mathbb{R}^n,$$

con A diagonalizable por S y autovalores $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, resolvemos el sistema $Sc = u_0$ y obtenemos

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k x^i$$

con x^i la columna i-ésima de S.

Ejemplos:

- **Números de Fibonacci**:
  Conocemos la sucesión de Fibonacci $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, que se construye con la ecuación

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 2, \;\; F_0 = 0, \;\; F_1 = 1.$$

- **Números de Fibonacci** (continuación):

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k, k \geq 2, \;\; F_0 = 0, \;\; F_1 = 1.$$

Para $k \geq 2$, la ley $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$, es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{array}{c} F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \\ F_{k+1} = F_{k+1} \end{array}.$$

Si llamamos $u_k = (F_{k+1}, F_k)$ y el sistema anterior puede ser reescrito como

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_k = Au_k.$$

Ejercicio: Probar que, para todo $k \geq 2$,

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right].$$

(¡Y son números enteros!)

Otro Ejemplo:

Matrices de Markov: Ver STRANG.

¿Vale en general *los autovalores de un producto de matrices son producto de sus autovalores*? En general NO.

Sean A, B dos matrices y (λ_B, x) autovalor de B y autovector correspondiente. Tenemos:

$$(AB)x = A(Bx) = A(\lambda_B x) = \lambda_B(Ax).$$

Si x **es también un autovector de** A con autovalor λ_A, entonces

$$(AB)x = \lambda_B(Ax) = \lambda_B(\lambda_A x) = (\lambda_B \lambda_A)x,$$

resultando $\lambda_B \lambda_A$ autovalor de AB y x autovalor asociado.

¿Cuando dos matrices comparten sus autovectores?

Teorema: Sean A, B matrices y S, matriz diagonalizante de A.

1. Si S diagonaliza a B entonces $AB = BA$.
2. Si $AB = BA$ y A tiene n autovalores diferentes entonces S diagonaliza a B.

Prueba:

1. Si S diagonaliza a A y a B tenemos $A = S\Lambda_1 S^{-1}$ y $B = S\Lambda_2 S^{-1}$. Entonces,

$$AB = (S\Lambda_1 S^{-1})(S\Lambda_2 S^{-1}) = S(\Lambda_1\Lambda_2)S^{-1}.$$

Como Λ_1 y Λ_2 son matrices diagonales, $\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1$. Por lo tanto:

$$AB = S(\Lambda_1\Lambda_2)S^{-1} = S(\Lambda_2\Lambda_1)S^{-1} = (S\Lambda_2 S^{-1})(S\Lambda_1 S^{-1}) = BA.$$

2. Basta probar que toda columna de S es autovector de B. (Justificar)

Como A tiene todos sus autovalores diferentes, el autoespacio de todo autovalor de A tiene dimensión 1. (Justificar)

Prueba:

2. (continuación) Sea x columna de S, autovector de A correspondiente a λ. Tenemos:

$$A(Bx) = (AB)x = (BA)x = B(\lambda x) = \lambda(Bx).$$

Por lo tanto Bx es también autovector de A asociado a λ. Como el autoespacio correspondiente λ tiene dimensión 1, Bx es un múltiplo de x. Esto es, existe λ_B tal que $Bx = \lambda_B x$ y x es un autovector de B. $\square$

Observación: La conmutatividad de las matrices en el producto es condición necesaria y suficiente para que compartan sus autovectores(que una de ellas tenga todos sus autovalores diferentes NO ES NECESARIA). La prueba es un poco más compleja y no la vemos, pero aceptamos la validez del siguiente teorema:

Teorema: Sean A, B dos matrices y S, matriz diagonalizante de A. Entonces, S diagonaliza a B si y solo si $AB = BA$.

Tenemos también el siguiente resultado:
Lema: Sean A y B matrices tales que $AB = BA$ y A diagonalizable. Entonces, λ es un autovalor de AB si y solo si $\lambda = \lambda_A \lambda_B$ con λ_A, λ_B autovalores de A y B, respectivamente, correspondientes a un mismo autovector.

Prueba: Sea S matriz diagonalizante de A y B. Entonces,

$$AB = (S^{-1}\Lambda_A S)(S^{-1}\Lambda_B S) = S^{-1}(\Lambda_A \Lambda_B)S$$

o, equivalentemente $S(AB)S^{-1} = \Lambda_A \Lambda_B$. Observar que $\Lambda_A \Lambda_B$ es diagonal y por lo tanto, S diagonaliza a AB y las entradas en la diagonal de $\Lambda_A \Lambda_B$ son los autovalores de AB. Sólo resta observar que la entrada i-ésima en la diagonal de $\Lambda_A \Lambda_B$ es el producto de los autovalores i-ésimos de Ay B, correspondiente al autovector S^i de AB. $\square$

Vimos que cuando se trata de autovalores, necesitamos trabajar en el campo de los complejos y ver a $\mathbb{R}^n$ como subconjunto de vectores del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$.

Si en $\mathbb{C}^n$ consideramos el producto interno $\langle z, w\rangle = \bar{z}^T w = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$, la norma que obtenemos es $\|z\|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2$, donde $|z_i|$ es el módulo de $z_i \in \mathbb{C}$.

De esta manera, cuando miramos a $\mathbb{R}^n$ como subespacio de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$, el producto interno y la norma coinciden con las habituales en $\mathbb{R}^n$.

Nos interesa saber cómo se extienden las ideas que hemos trabajado con matrices reales al caso de matrices complejas. Empecemos *extendiendo* el concepto de transpuesta.

Dada una matriz A compleja $m \times n$, definimos la matriz A^H *hermitiana de* A como $A^H = \bar{A}^T$. Así,

$$\begin{bmatrix} 2+i & 3i \\ 4-i & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 2-i & 4+i & 0 \\ -3i & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observaciones:

- Si A es una matriz real, $A^H = A^T$.
- Si $z, w \in \mathbb{C}^n$, $\langle z, w \rangle = \bar{z}^T w = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i = z^H w$.
- $(A^H)^H = A$ y $(AB)^H = B^H A^H$. (Ejercicio).

La extensión de matrices simétricas al campo de las matrices complejas resulta entonces:

Definición: Una matriz A es *hermitiana* si $A^H = A$.

Observación:

- Si A es matriz real, A es hermitiana si y solo si A es simétrica.
- Claramente, las matrices hermitianas son cuadradas.
- La diagonal de una matriz hermitiana tiene entradas reales. (Justificar)

Las matrices hermitianas (y por ende las reales simétricas) poseen importantes propiedades: sus *autovalores son reales* y sus *autovectores pueden elegirse ortonormales*.

Veamos antes el siguiente lema:

Lema: Si A es una matriz hermitiana entonces, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $x^H A x \in \mathbb{R}$.

Prueba: Sea $z = x^H A x \in \mathbb{C}$. Como z es una matriz compleja 1×1, $z^H = \bar{z}$. Además,

$$z^H = (x^H A x)^H = x^H A^H (x^H)^H = x^H A^H x = x^H A x = z.$$

Por lo tanto, $z = \bar{z}$ y $z \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorema: Si A es una matriz compleja hermitiana, sus autovalores son reales.

Prueba: Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de A y $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. Entonces,

$$x^H Ax = x^H \lambda x = \lambda \left\| x \right\|^2.$$

Como $x^H Ax$ y $\left\| x \right\|^2$ son valores reales, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Teorema: Si A es una matriz hermitiana y $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de A, entonces el autoespacio de λ_1 es ortogonal al autoespacio de λ_2.

Prueba: Para $i = 1, 2$, sea z^i un autovector asociado a λ_i. Debemos probar que $z^1 \perp z^2$ o, equivalentemente, que $(z^1)^H z^2 = 0$.

Tenemos:

$$(\lambda_1 z^1)^H z^2 = (Az^1)^H z^2 = (z^1)^H A^H z^2 = (z^1)^H A z^2 = (z^1)^H \lambda_2 z^2$$

Como $\lambda_{1,2}$ son reales, tenemos $\lambda_1 (z^1)^H z^2 = \lambda_2 (z^1)^H z^2$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta $(z^1)^H z^2 = 0$. $\square$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{bmatrix}.$$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3-3i \\ 3+3i & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - (3+3i)(3-3i) =$$

$$= (2-\lambda)(5-\lambda) - 18 = \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda - 8)(\lambda + 1).$$

Ejemplo:(continuación)
Los autovalores son distintos, los autovectores son ortogonales.

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (x^1)^H x^2 = (1, 1-i) \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Corolario:

1. Si A es hermitiana y S diagonaliza a A, S puede ser elegida con sus columnas ortonormales.
2. Si A es real, simétrica y diagonalizable, $A = Q\Lambda Q^T$ con Q matriz ortogonal.

Prueba:

1. Ejercicio.
2. Como A es simétrica, sus autovalores son reales y sus autovectores son solución del sistema (real) lineal de ecuaciones $(A-\lambda I)x = 0$. El método de Eliminación de Gauss nos asegura que los vectores solución son reales. □

Observaciones:

- Si A es simétrica (real) diagonalizable

$$A = Q\Lambda Q^T = [Q^1, \ldots, Q^n]\ \Lambda \begin{bmatrix} (Q^1)^T \\ \cdots \\ \cdots \\ (Q^n)^T \end{bmatrix} = \lambda_1 Q^1 (Q^1)^T + \ldots + \lambda_n Q^n (Q^n)^T$$

  A es una combinación lineal de matrices simétricas de rango 1 $\longrightarrow$ A es una combinación lineal de matrices proyección unidimensionales.

- Veremos que toda matriz simétrica tiene n autovectores l.i. y por lo tanto, toda matriz simétrica se *descompone* en n matrices de rango 1 $\longrightarrow$ *Teorema Espectral*.

Extendiendo a matrices complejas el concepto de matrices ortogonales reales, tenemos la siguiente definición:
Definición: Una matriz compleja con columnas ortonormales se denomina matriz unitaria.

Observación: La ortogonalidad y la norma a considerar en las matrices unitarias son las definidas por el producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo: Sea $A = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & -1 \end{bmatrix}$. ¿Es A unitaria? Sean $u = A^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}$ y $v = A^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 2-i \\ -1 \end{bmatrix}$. Debemos verificar que $u \perp v$ y $\|u\| = \|v\| = 1$.
$\langle u, v\rangle = u^H v = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix}^T v = \frac{1}{6}[1(2-i)+(2-i)(-1)] = 0.$ Por lo tanto $u \perp v$. Además, $\|u\|^2 = \frac{1}{6}(|1|^2 + |2+i|^2) = \frac{1}{6}(1+5) = 1$. Y similarmente obtenemos $\|v\|^2 = 1$.

Propiedades (*ya vistas para ortogonales*) Sea U una matriz $n \times n$ unitaria. Entonces,

1. $U^H U = UU^H = I$. Pro lo tanto, $U^{-1} = U^H$.
2. Para todo $x \in \mathbb{C}^n$, $\|Ux\| = \|x\|$.

Prueba: Ejercicio.

Propiedades (*nuevas*):
Sea U una matriz $n \times n$ unitaria. Entonces todos sus autovalores tienen módulo 1. Además, a autovalores diferentes le corresponden autovectores ortogonales.

Prueba: Sean λ y x, autovalor de U y autovector correspondiente. Entonces, $\|x\| = \|Ux\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \Longrightarrow |\lambda| = 1$.

Veamos ahora que a autovalores diferentes le corresponden autovectores ortogonales.

Prueba (continuación).
Sean $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dos autovalores de U y, para $i = 1, 2$, x^i un autovector correspondiente a λ_i. Entonces:

$$\langle x^1, x^2 \rangle = (x^1)^H x^2 = (x^1)^H (U^H U) x^2 = (Ux^1)^H (Ux^2) = (\lambda_1 x^1)^H (\lambda_2 x^2) =$$

$$= \overline{\lambda_1}\, \lambda_2 (x^1)^H x^2 = \overline{\lambda_1} \lambda_2 \, \langle x^1 x^2 \rangle.$$

Supongamos que $\langle x^1 x^2 \rangle \neq 0$. Entonces, $\overline{\lambda_1}\, \lambda_2 = 1$. Como $|\lambda_1|^2 = \overline{\lambda_1}\, \lambda_1 = 1$, tenemos $\overline{\lambda_1}\, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Por lo tanto, $\lambda_1 = \lambda_2$, una contradicción. Entonces, $\langle x^1 x^2 \rangle = 0$ y $x^1 \perp x^2$. $\square$

Finalmente, extendemos el concepto de *simétrica sesgada*.

Definición: Una matriz K es *hermitiana sesgada* si $K^H = -K$.

Lema Sea K una matriz sesgada hermitiana. Entonces:

1. $K = iA$ con A matriz hermitiana.
2. Los autovalores de K son imaginarios.
3. Los autovectores de K y A coinciden.

Prueba: Ejercicio.