Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Probabilidad y Estadística

Unidad 4

Autor del resumen:

DEMAGISTRIS, Santiago Ignacio

Julio 2020

1 Variables aleatorias unidimensionales

1.1 Noción general de una variable aleatoria

En muchas situaciones experimentales deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos S del espacio muestra1 S. Esto es:

$$X(s) : S \to \Re$$

Definición. Sea ϵ un experimento y S el espacio muestral asociado con él. Una función X que asgina a cada uno de los elementos $s \in S$, un numero real X(s), se llama **variable aleatoria.**

El espacio R_x, es decir, el conjunto de todos los valores posibles de X, algunas veces se le llama recorrido. En cierto sentido podemos considerar a R, como otro espacio muestral. El espacio muestral (original) S corresponde a los resultados no numéricos (posiblemente) del experimento, mientras que R_x, es el espacio muestral asociado con la variable aleatoria X, que representa la característica numérica que puede ser de interés. Si X(s) = S, tenemos S = R_x.

Una variable aleatoria X puede ser concebida de dos formas:

- Realizamos el experimento ϵ que tiene como resultado $s \in S$. Luego evaluamos el número X(s).
- Efectuamos ϵ, obteniendo el resultado s, e (inmediatamente) calculamos X(s). El número X(s) se considera entonces como el resultado obtenido en el experimento y R_x se convierte en el espacio muestral del experimento.

En el primer caso, el experimento termina, de hecho, con la observación de s. La evaluación de X(s) se estima como algo que se hace posteriormente y que no se afecta por la aleatoriedad de ϵ. En el segundo caso, se considiera que el experimento no está terminado hasta que el número X(s) se ha calculado y se tiene así el espacio muestral R_x, como resultado. Al estudiar variables aleatorias estamos más interesados respecto a los valores que toma X que a su forma funcional. Por lo tanto, en muchos casos ignoraremos por completo el espacio muestral sobre el cual se puede definir X.

Ejemplos págs 71-72

En general nos referiremos a las variables aleatorias con letras mayúsculas (X,Y,Z) y a sus valores con letras minúsculas (x,y,z).

Definición. Sea ϵ un experimento y S su espacio muestral. Sea X una variable aleatoria definida en S y sea R_x su recorrido. Sea B un evento respecto a R_x; esto es, $B \subset R_x$ y sea A un evento respecto a S definido como:

$$A = \{s \in S | X(s) \in B\}$$

En palabras, A consta de todos los resultados en S para los cuales X(s) $\in B$. En este caso decimos que A y B son **eventos equivalentes.**

De manera más informal, A y B son eventos equivalentes siempre que ocurran juntos. Es importante destacar que en nuestra definición de eventos equivalentes, A y B están asociados con espacios muestrales diferentes.

Ejemplo pág. 74

Definición. Sea B un evento en el recorrido R_x, entonces definimos P(B) como:

$$P(B) = P(A), \text{ donde } A = \{s \in S | X(s) \in B\}$$

En palabras, definimos P(B) igual a la probabilidad del evento $A \subset S$. Por tanto, la definición anterior hace posible asignar probabilidades a eventos asociados con R_x en términos de las probabilidades definidas en S.

Ejemplo pág. 75

Tips para entender mejor

Puesto que en la formulación de la ecuación los eventos A y B se refieren a espacios muestrales diferentes, en realidad deberíamos usar una notación diferente cuando nos referimos a las probabilidades definidas en S y para las definidas en R_x, por ejemplo, algo como P(A) y P_x(B). Sin embargo, no haremos esto sino que continuaremos escribiendo simplemente P(A) y P(B). El contexto dentro del cual aparezcan estas expresiones hará evidente la interpretación

Las probabilidades asociadas con eventos en el espacio muestra1 S (original) están en un sentido, determinadas por "fuerzas que escapan a nuestro control" o, como se dice algunas veces "por naturaleza". Cuando introducimos una variable aleatoria X y su recorrido asociado R_x, **inducimos** probabilidades sobre los eventos asociados con Rx que se determinan estrictamente si las posibilidades asociadas con los eventos en S están especificadas.

1.2 Variables aleatorias discretas

Ojo... hay que entender los conceptos, los nombres no son intuitivos.

Definición. Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de X (esto es, R_x, el recorrido) es finito o infinito numerable, llamamos a X una variable aleatoria discreta.

Ejemplo pág. 76

Definición Sea X una variable aleatoria discreta. Con cada resultado posible x_i asociamos un número p(x_i) = P(X = x_i), llamado probabilidad de x_i. Los números p(x_i), i = 1,2,. . . deben satisfacer las condiciones siguientes:

- $p(x_i) > 0 \ \forall_i$
- $\sum_i^\infty p(x_i) = 1.$

La función p que antes se definió, se llama **función de probabilidad** (o función de probabilidad puntual) de la variable aleatoria X. La colección de pares (x_i,p(x_i)), i = 1,2,. . . , se la llama **distribución de probabilidad de X**.

Sea B un evento asociado con la variable aleatoria X. Esto es, B $\subset R_x$. Específicamente, supongamos que B = $\{x_{i_1}, x_{i_2}, ...\}$. Por lo tanto,

$$P(B) = P[s \in S|X(s) \in B] = P[s \in S|X(s) = x_{i_j}, j = 1, 2, ...] = \sum_j^\infty p(x_{i_j})$$

En palabras, la probabilidad de un evento B es igual a la suma de las probabilidades de los resultados individuales asociados con B.

Observaciones.

Si X toma un número infinito numerable de valores, entonces es imposible tener todos los resultados igualmente probables, porque quizá no podamos satisfacer la condición si hemos de tener p(x_i) = c para toda i.

En cada intervalo finito habrá cuando mucho un número finito de valores posibles de X. Si uno de esos intervalos no contiene ninguno de los valores posibles, le asignamos probabilidad cero. Esto es, si $R_x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ y si ningún $x_i \in [a, b]$ entonces P[a ≤ X ≤ b] = 0.

Ejemplo pág. 78-79

1.3 Características de las variables aleatorias

1.3.1 El valor esperado de una variable aleatoria

En los modelos matemáticos no deterministas o aleatorios que hemos considerado, los parámetros pueden usarse para señalar la distribuci6n de probabilidades. Con cada distribución de probabilidades podemos asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca de la distribución (tal como la pendiente de una recta proporciona una información útil acerca de la relación lineal que representa).

Ejemplo 7.3 pág. 155

Definición. Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ y sea $p(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, ..., n, ...$ Entonces el **valor esperado** de X (o esperanza matemática de X), que se denota con E(X), se define como

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i),$$

si la serie converge absolutamente, es decir, si $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < \infty$. Este número se designa como **valor promedio** de X.

Cabe destacar que E(x) es un número (parámetro) asociado con una distribución de probabilidades teórica (recomendado leer observaciones pág 156).

Ejemplo 7.4 pág. 157

1.3.2 Propiedades del valor esperado

Propiedades

- Si X = C, donde C es una constante, entonces E(X) = C.
- Supongamos que C es una constante y X es una variable aleatoria. Entonces, E(CX) = CE(X).
- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con una distribución de probabilidades conjunta. Sean Z = Hl(X, Y) y T.V = Hz(X, Y). Entonces, E(Z + W) == E(2) + E(W). PARA UNIDAD 6.
- Sean X y Y dos variables aleatorias cualesquiera. Entonces, E(X + Y) = E(X) + E(Y).
- Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ n variables aleatorias.

  Entonces, $E(X1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$
- Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional y supongamos que X e Y son independientes. Entonces, E(XY) = E(X)E(Y). PARA UNIDAD 6.

Todas las demostraciones se encuentran entre las págs 169 y 171.

Supongamos que para una variable aleatoria X encontramos que E(X) es igual a 2. Es preciso que no se atribuya más importancia a esta información que la justificada. Significa sencillamente, que si consideramos un gran número de valores de X, digamos $x_1, x_2, ..., x_n$, y los promediamos, este resultado estará cercano a 2 si n es grande

1.3.3 La varianza de una variable aleatoria

Supóngase que X representa la duración de una bombilla que se recibe de un fabricante, y que E(X) = 1000 horas. Esto podría significar una de varias posibilidades. Podría significar que se espera que la mayor parte de las bombillas dure entre 900 y 1100 horas. También podría significar que las bombillas que se entregan son de dos tipos diferentes: alrededor de la mitad son de muy alta calidad y con duración de casi 1300 horas, mientras que la otra mitad son de muy mala calidad y tienen una duración de cerca de 700 horas.

Hay una necesidad obvia de presentar una medida cuantitativa que distinga entre estas situaciones.

Definición Sea X una variable aleatoria. Definamos la **varianza** de X, que se denota con V(X) o σ_X^2 como sigue:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2$$

La raíz cuadrada positiva de V(X) se llama **desviación estándar** de X y se designa con σ_X.

El cálculo de V(X) se simplifica con la ayuda del resultado siguiente:

Teorema. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Demostración.

$$V(X) = E[X - E(X)]^2$$

$\iff$

$$E\{X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\}$$

$\iff$

$$E(X^2) - E(2XE(X)) + E(E(X)^2)$$

$\iff$

$$E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2$$

$\iff$

$$E(X^2) - E(X)^2$$

Ejemplos págs 177-179

1.3.4 Propiedades de la varianza de una variable aleatoria

Propiedades

- Si C es una constante, $V(X + C) = V(X)$
- Si C es una constante, $V(XC) = C^2V(X)$
- Sea (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, y si X y Y son independientes.

  Entonces V(X + Y) = V(X) + V(Y). PARA UNIDAD 6
- Sean $X_1, X_2, ..., X_n$, n variables aleatorias independientes.

  Entonces, $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + ... + V(X_n)$

Demostracioens y ejemplos págs 179-182

Tal como en los modelos deterministas, en los cuales ciertas relaciones funcionales desempeñan un papel importante (tales como lineales, cuadráticas, exponenciales, trigonométricas, etc..), al elaborar modelos no deterministas para fenómenos observables, también encontramos que ciertas distribuciones de probabilidades aparecen más a menudo que otras. Una razón de esto es que, como en el caso determinista, algunos modelos matemáticos relativamente simples parecen ser capaces de describir un gran número de fenómenos.

Es por esto que estudiaremos alguna de ellas en los siguientes apartados ...

1.4 La distribución binomial

Ejemplo ilustrador pág 80

Definición. Consideremos un experimento ϵ y sea A un evento asociado con ϵ. Supongamos que P(A) = p y, por lo tanto, P(A^C) = 1 - p. Consideremos n repeticiones independientes de ϵ. Por lo tanto, el espacio muestral consiste en todas las sucesiones posibles $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, donde cada a_i es A o A^C, según A o A^C ocurra en la i-ésima repetición de ϵ. (Hay 2^n de tales sucesiones). Aún más, supongamos que P(A) = p es el mismo para todas las repeticiones. Definamos la variable aleatoria X como sigue: X = número de veces que ocurrió el evento A. Llamamos a X una variable aleatoria binomial con los parámetros n y p. Sus valores posibles obviamente son 0,1,2,. . . , n. (Decimos en forma equivalente que X tiene una distribución bminomial-$X \sim Bi(n, p)$-.) Las repeticiones individuales de ϵ se llamaran ensayos de Bernoulli.

Teorema. Sea X una variable binomial con base en n repeticiones. Entonces

$$\text{P(X = k)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^(n-k), \text{ k = 0,1,...,n.}$$

Demostración pág 82 -recomendable de leer-

Teorema. Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con parámetro p, con base en n repeticilones de un experimento. Entonces

$$E(x) = np$$

Demostración pág. 157

Análisis de varianza pág. 181

Varianza: V(X) = np (1-p)

1.5 La distribución de Poisson

Definición. Sea X una variable aleatoria que toma los valores posibles: $0, 1, ..., n, ...$, Si

$$P(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}, \quad \text{k} = 0, 1, ..., n, ...,$$

decimos que X tiene una **distribución** de Poisson con parámetro $\alpha > 0$

Teorema Si X tiene una distribución de Posson con parámetro α, entonces $E(X) = \alpha \; y \; V(X) = \alpha$ **Demostración pág. 210**

1.5.1 La distribución de Poisson como aproximación de la distribución Binomial.

Análisis detallado págs 211-213

Teorema. Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con parámetro p (con base en n repeticiones del experimento). Esto es,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Supóngase que cuando $n- > \infty, np = \alpha$, o equivalentemente, cuando $n- > \infty, p- > 0/np- > \alpha$. En estas condiciones tenemos

$$\lim_{n->\infty} P(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!}$$

la distribución de Poisson con parámetro α

Observaciones.

- El teorema anterior esencialmente dice que podemos aproximar la probabilidades binomiales con las probabilidades de la distribución de Poisson siempre que n sea grande y p pequeña.
- La distribución binomial se caracteriza por dos parfimetros, n y p, mientras que la distribución de Poisson se caracteriza por un solo parámetro, α = np, que **representa al número esperado de éxitos por unidad de tiempo (o por unidad (le espacio en algún otro caso)**. Este parámetro también se designa como **intensidad de la distribución**. Es importante distinguir entre el número esperado de ocurrencias por unidad de tiempo y el número esperado de ocurrencias en el tiempo especificado.

Ejemplos págs 214-217