**Universidad Nacional de Rosario**

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

# Probabilidad y Estadística

*Tp final*

Autor:

Demagistris, Santiago Ignacio

Agosto 2020

## 0.1 Ejercicio 1

a) El espacio muestral sobre el cual estamos trabajando es S={0,1}, donde cara es 1 y cruz es 0. $I_n$ y $S_n$

n = 100  Cantidad de tiradas

simulacion = simular(n)

simular < − function(n){

In < − tirarMoneda(n) (n tiradas de una moneda)
Xn < − cumsum(In) (numero de caras al momento n - Frecuencia relativa acumulada -)
vectorTiradas < − c(1:n)
return (data.frame(Xn,vectorTiradas)) }

tirarMoneda< −function(n){ (Tirar moneda n veces)

return(sample(0:1,100,replace = TRUE)) (Vector de longitud n donde cada posicion tiene 1 o 0) }

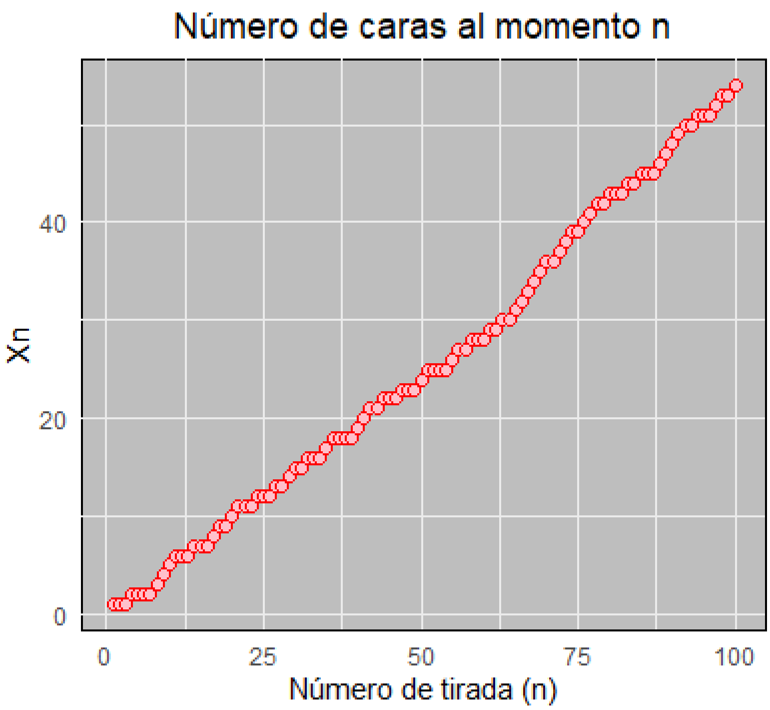



Figure 1: Tiradas de moneda

Sea A={"Obtener cara al lanzar la moneda"}. Podemos observar que se obtuvo un total de 54 caras en este proceso, por lo tanto P(A) $\simeq \frac{54}{100} = 0.54 = p$

b)

(**P(X=1)**). Sabemos que X={"Número de veces que ocurrió el evento A "} y que $X \sim Bi(n, 0.54)$ (siendo p =0.54 observado en la simulacion). Por lo tanto $P(X = 1) = \binom{n}{1}(0.54)(0.46)^{n-1}$ y $E(X) = n0.54$.

c) Sea Y= Número de tiradas hasta que salgan 3 caras. $Y \sim Pascal$, por lo que

$$P(Y = k) = \binom{k-1}{3-1}0.54^3\ 0.46^{k-3} = \binom{k-1}{2}0.54^3\ 0.46^{k-3}$$

y E(Y) $= \frac{r}{p} = \frac{3}{0.54} \simeq 5.55$. Es decir que se espera que entre la 5ta y la 6ta tirada de la moneda obtengamos 3 caras.

d) La implementacion que utilice para sesgar la moneda es la siguiente:

tirarMonedaSesgada $< -$ function(n){

return (sample(0:2,100, replace =TRUE)%%2) }

De esta manera trabajo sobre un espacio muestral $S_x\{0, 1, 2\}$, donde A={1}={"Obtuve cara"} y$A^c$={"Obtuve Cruz"}

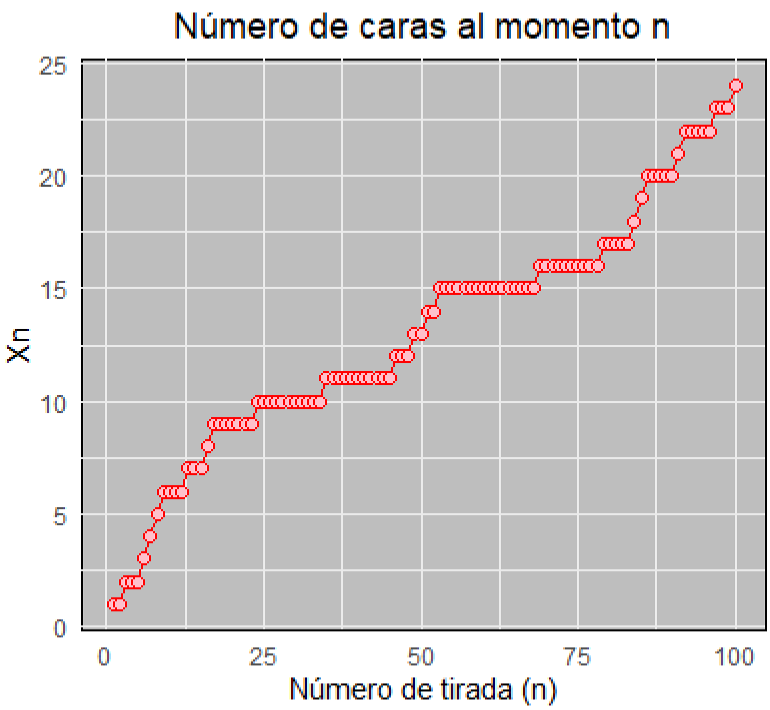
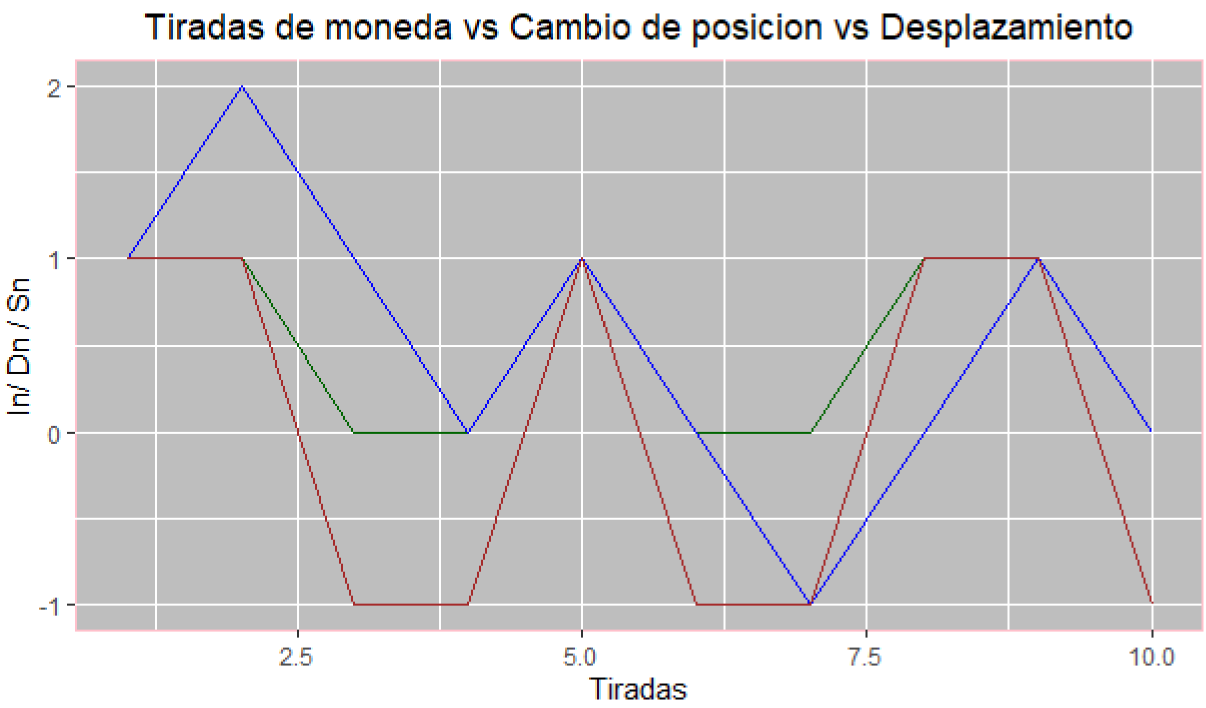



Figure 2: Tiradas de moneda sesgada

Al simular el proceso con n=100 obtuve que salieron en total 24 caras, por lo tanto podria aproximar $P(A) \sim 0,24$. Por lo tanto $P(X = 1) = \binom{n}{1}(0.24)(0.76)^{n-1}$ y $E(X) = n0.24$

## 0.2 Ejercicio 2




| In | Dn | Sn |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 3 |
| 0 | -1 | 2 |
| 0 | -1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 |
| 0 | -1 | 1 |
| 0 | -1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0 | -1 | 0 |

Figure 3: Tiradas de moneda

(Azul) Sn || (Marron) Dn || (Verde) In

Al simular las 10 tiradas de la moneda obtuve la variable aleatoria Dn, apartir de la cual obtuve Sn. Sn fue calculada como la frecuencia acumulada de Dn considerando como $S_0 = 0$

## 0.3 Ejercicio 3

a) Para realizar usare k=50, p=0.55, S=100, perder=0. El resultado obtenido es el siguiente:

b)

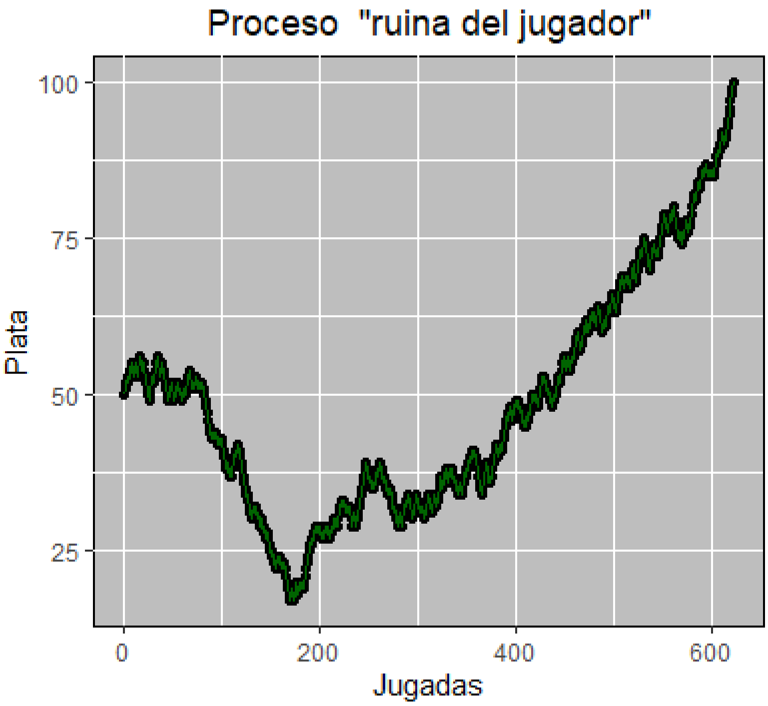



Figure 4: Trayectoria. Ruina del jugador

c) Con k=20, S=60, p=0.5001 y 1000 trayectorias obtuve una aproximacion a la probabilidad de caer en la ruina de 0.678

## 0.4 Ejercicio 4

a) Al realizar la simulacion observe 50000 repeticiones del experimento y obtuve un promedio de 21.08484 minutos.

b) Sea S={ii,id,d} el espacio muestral de un experimento $\epsilon$ que consiste en observar las decisiones del raton. Estas corresponden corresponden a elegir izquierda-izquierda, elegir izquierda-derecha y elegir derecha respectivamente. Si definimos una variable aleatoria X tal que:

$$X(s) = \begin{cases} 2 \quad si \quad x \; = \; "ii" \\ \\ 5 \quad si \quad x \; = \; "id" \\ \\ 3 \quad si \quad x \; = \; "d" \end{cases}$$

Ahora definimos una variable aleatoria Y = {numero de repeticiones hasta que el evento {2} ocurra} y observamos que Y se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que $P(\{2\}) = P(ii \cap i) = P(ii|i)P(i) = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, por lo que E(Y) = $\frac{2}{\frac{1}{6}} = 12$. Luego definimos una variable aleatoria Z = {numero de repeticiones hasta que el evento {3} ocurra} y observamos que Z se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que $P(\{3\}) = \frac{1}{2}$, por lo que E(Y) = $\frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$. Luego definimos una variable aleatoria W = {numero de repeticiones hasta que el evento {5} ocurra} y observamos que W se puede aproximar con la distribucion geometrica. Sabemos que $P(\{5\}) = P(id \cap i) = P(id|i)P(i) = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{2}{6}$, por lo que E(Y) = $\frac{5}{\frac{1}{3}} = 15$. Por lo tanto p({Salga}) tiene un peso en minutos de E(Y) = 12, mientras que 1-p tiene un peso en minutos de E(Z+W) = E(Z) + E(W) = 21. Por lo que el tiempo esperado para que la rata salga del laberinto es de $121/31/2 + 215/6 = 19,5$ minutos.

## 0.5 Ejercicio 5

a) La matriz de transicion P es no-regular. Esta cadena de Markov presenta 4 clases de comunicacion (una por cada estado). El estado M es absorbente, por lo cual la cadena de Markov es absorbente, los demas estados son de transicion.

b) Para n=10 pasos obtenemos la matriz $P^n$, donde $P^n_{ij}$ representa la probabilidad de llegar a j desde i en n pasos.

$$P^{10} \simeq \begin{pmatrix} 0.99004 & 0.00969 & 0.000214 & 0.00005069 \\ 0 & 0.94159 & 0.04078 & 0.0176248 \\ 0 & 0 & 0.425037 & 0.5749629 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Partiendo desde un estado luego de 10 unidades de observacion en la evolucion de esta persona podemos observar:

"Suceptible". **Suceptible.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto siga en su estado de suceptibilidad de 0.99004, luego de 10 unidades de observacion.

**VIH.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga VIH de 0.00969, luego de 10 unidades de observacion.

**SIDA.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.000214, luego de 10 unidades de observacion.

**Muerto.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.00005069, luego de 10 unidades de observacion.

Por lo tanto si el sujeto es suceptible, en 10 unidades de observacion, es altamente probable que se mantenga en esta condicion.

"VIH". **Suceptible.** Partiendo desde VIH no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado "suceptible" , luego de 10 unidades de observacion.

**VIH.** Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condicion de 0.94159, luego de 10 unidades de observacion.

**SIDA.** Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.04078, luego de 10 unidades de observacion.

**Muerto.** Partiendo desde VIH hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.0176248, luego de 10 unidades de observacion.

Por lo tanto si el sujeto esta diagnosticado con VIH, tiene altas probabilidades de mantener su condicion y no puede librarse de su enfermedad.

"SIDA". **Suceptible.** Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de "suceptibilidad" , luego de 10 unidades de observacion.

**Suceptible.** Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de "VIH" , luego de 10 unidades de observacion.

**SIDA.** Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condicion de 0.425037, luego de 10 unidades de observacion.

**Muerto.** Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.5749629, luego de 10 unidades de observacion.

Por lo tanto si el sujeto esta diagnosticado con SIDA, tiene un 57% de morir luego de 10 unidades de observacion. No puede volver a la condicion de VIH, ni a la de suceptible, mientras que se puede mantener con SIDA con una probabilidad de 0.425037% .

Por otro lado si esta muerto... bueno, digamos que es el estado absorbente por excelencia.

c) Sabemos que

$$Q = \begin{pmatrix} 0.999 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0.994 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0.918 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Y por lo tanto,

$$F = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & 0 & \frac{500}{41} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Donde F es la matriz fundamental, en la cual $F_ij$ es el numero esperado de visitas a j dado que la cadena comienza en i. Por lo tanto, si iniciamos en el estado

"Suceptible" el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 1178.862

"VIH" el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 178.862

"SIDA" el numero esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 12.19

Cada uno de los resultados obtenidos de acuerdo al estado desde el que se comienza a contabilizar, es el promedio de unidades de observacion para que la persona llegue al estado de muerte.

d) COMPLETAR LO TENGO EN CUADERNILLO

## 0.6 Ejercicio 6

a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad (4)$$

b) Simulacion

c) Obtuve el siguiente vector de frecuencias relativas : [0.25, 0.16, 0.04, 0.06, 0.10, 0.34, 0.05]. Por lo cual con n=100 suponemos que el rango de las paginas a,b,c...,g corresponden con las posiciones desde 1 a 7 del vector obtenido por medio de la simulacion.

## 0.7 Ejercicio 7

a) Sea $X_t$ el numero de llamads que recibe Juan durante un intervalo de tiempo t. Sabemos que $X_t$ tiene una distribucion de Poisson con parametro $= 10 textos/hora$. Por lo tanto, $P()$

## 0.8 Ejercicio 8

a) Dada la distribucion inicial $\pi_0$, y la matriz de transicion P, luego de dos semanas nos encontramos con la siguiente probabilidad de ataques a los puertos:

$$\pi_0 P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{8}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Los puertos con menos probabilidad de ser atacados son el 135 y 445, mientras que el que tiene mas probabilidad de ser atacado es el 139. Se puede observar que el puerto 80 no tiene posibilidad de ser atacado.