3. Verificar que $\langle f, g\rangle = \int_1^e \log(x)f(x)g(x)dx$ es un producto interno en $\mathcal{C}([1,e])$, espacio de las funciones continuas a valores reales en el intervalo $[1,e]$.

   Vamos a probar que se satisfacen las 5 propiedades de la definición de producto interno.

   1) Sean $f, g \in \mathcal{C}([1,e])$, ¿$\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$?
   $\langle f,g\rangle = \int_1^e \log(x)f(x)g(x)dx = \int_1^e \log(x)g(x)f(x)dx = \langle g,f\rangle$.

   2) Sean $f, g, h \in \mathcal{C}([1,e])$, ¿$\langle f+g,h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$?
   $\langle f+g,h\rangle = \int_1^e \log(x)(f(x)+g(x))h(x)dx = \int_1^e \log(x)[f(x)h(x)+g(x)h(x)]dx =$
   $= \int_1^e [\log(x)f(x)h(x) + \log(x)g(x)h(x)]dx = \int_1^e \log(x)f(x)h(x)dx + \int_1^e \log(x)g(x)h(x)dx =$
   $= \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$.

   3) Sean $f, g \in \mathcal{C}([1,e])$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, ¿$\langle \alpha f,g\rangle = \alpha\langle f,g\rangle$?
   $\langle \alpha f,g\rangle = \int_1^e \log(x)(\alpha f)(x)g(x)dx = \int_1^e \log(x)\alpha f(x)g(x)dx = \alpha\int_1^e \log(x)f(x)g(x)dx = \alpha\langle f,g\rangle$.

   4), 5) Sea $f \in \mathcal{C}([1,e])$, ¿$\langle f,f\rangle \geq 0$ y $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$?

   - Si $f \neq 0$ (f no es la función nula), entonces existe $a \in [1,e]$ tal que $f^2(a) = 2\varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$. Dado que f es continua, por conservación local del signo existe $\delta > 0$ tal que $f^2(x) > \varepsilon$ para $x \in (a-\delta, a+\delta) \subset [1,e]$:
     $\langle f,f\rangle = \int_1^e \log(x)f(x)f(x)dx = \int_1^e \log(x)f^2(x)dx =$
     $= \int_1^{a-\delta} \underbrace{\log(x)}_{\geq 0}\,\underbrace{f^2(x)}_{\geq 0}\,dx + \int_{a-\delta}^{a+\delta} \log(x)f^2(x)dx + \int_{a+\delta}^{e} \underbrace{\log(x)}_{>0}\,\underbrace{f^2(x)}_{\geq 0}\,dx \geq$
     $\geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} \underbrace{\log(x)}_{>0}\,\underbrace{f^2(x)}_{>2\delta\varepsilon>0}\,dx > 0.$
   - Si $f = 0$, (f es la función nula):
     $\langle f,f\rangle = \int_1^e \log(x)f(x)f(x)dx = \int_1^e 0dx = 0.$
   - Si $\langle f,f\rangle = 0$, entonces por el contrarrecíproco del primer ítem se tiene que $f = 0$.

7. *a*) Verificar que los vectores $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales.

   b) Determinar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ donde dos de sus vectores son paralelos a los dados en el apartado anterior.

   Vamos a probar el apartado b).

   Primero observemos que para obtener un vector paralelo a un vector dado $u \in \mathbb{R}^3$, simplemente multiplicamos u por un escalar real, digamos $\alpha \in \mathbb{R}$, luego $\alpha u \in \mathbb{R}^3$ es un vector paralelo a u.

   Además, no es difícil probar que cualquier vector paralelo a u^1 es ortogonal a cualquier vector paralelo a u^2.

   Como queremos determinar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ donde dos de sus vectores son paralelos a $u^1 = (1,1,1)^T$ y $u^2 = (1,-1,0)^T$, si normalizamos los vectoren u^1 y u^2, es decir, dividimos cada uno de estos vectores por su norma, obtenemos dos vectores $v^1, v^2 \in \mathbb{R}^3$, cada uno de ellos de norma 1 y paralelo a u^1 y u^2 respectivamente.

   Calculamos v^1 y v^2:

   - $v^1 = \dfrac{u^1}{\|u^1\|} = \dfrac{u^1}{\sqrt{(u^1)^T u^1}} = \dfrac{(1,1,1)^T}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^T.$

- $v^2 = \dfrac{u^2}{\|u^2\|} = \dfrac{u^2}{\sqrt{(u^2)^T u^2}} = \dfrac{(1,-1,0)^T}{\sqrt{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T.$

Una vez hallados $v^1, v^2 \in \mathbb{R}^3$ vectores ortonormales paralelos a $u^1, u^2 \in \mathbb{R}^3$ respectivamente, lo único que falta para encontrar una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ con las características pedidas, es encontrar un vector $v^3 \in \mathbb{R}^3$ de norma 1 que verifique $(v^1)^T v^3 = (v^2)^T v^3 = 0$.

¿Se animan a calcular v^3?

11. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Si $dim(V) = n$ y $\{v^1, \dots, v^n\}$ es un conjunto ortogonal de V, probar que:

    a) $\{v^1, \dots, v^n\}$ es una base de V.

    b) Si $\|v^i\| = 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, v^i\rangle|^2 \quad \forall x \in V$.

    Vamos a probar el apartado $b)$.

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle \overset{(1)}{=} \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v^i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^j \rangle \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v^i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^j \rangle \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v^i, v^j \rangle \right] \overset{(3)}{=}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \alpha_i \langle v^i, v^i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \|v^i\|^2 \overset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \overset{(5)}{=} \sum_{i=1}^{n} |\langle x, v^i \rangle|^2.$$

    (1) Por $a)$ sabemos que $\{v^1, \dots, v^n\}$ es una base de V.

    (2) Propiedades 2) y 3) de la definición de producto interno.

    (3) Como $\{v^1, \dots, v^n\}$ es un conjunto ortogonal de V, $\langle v^i, v^j\rangle = 0$ si $i \neq j$.

    (4) Por hipótesis $\|v^i\| = 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$ y como $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i^2 = |\alpha_i|^2$.

    (5) Página 13 slides Capítulo 3 (primera parte) - Bases Ortonormales.

22. Si la ecuación $Ax = b$ tiene solución, entonces existe un único p en $C(A^T)$ solución del sistema.

    Si x es una solución del sistema $Ax = b$ entonces $x = x_N + x_C$ con $x_N \in N(A)$ y $x_C \in C(A^T)$. Como

$$b = Ax = A(x_N + x_C) = Ax_N + Ax_C = Ax_C$$

    resulta que x_C es solución del sistema y tenemos probada la existencia.

    Supongamos ahora que existen $p_1, p_2 \in C(A^T)$ soluciones del sistema $Ax = b$. Por un lado, $p_1 - p_2 \in C(A^T)$ y además, $Ap_1 = b$ y $Ap_2 = b$. De estas últimas igualdades resulta,

$$Ap_1 = Ap_2 \Leftrightarrow A(p_1 - p_2) = 0.$$

    Luego, $p_1 - p_2 \in N(A) = (C(A^T))^{\perp}$.
    Por lo tanto, $p_1 - p_2 \in C(A^T) \cap (C(A^T))^{\perp} = \{0\}$. Entonces $p_1 = p_2$.