EJERCICIOS 1 Y 3 CAP. 5 (3RA. PARTE)

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

UNR Universidad Nacional de Rosario

OUTLINE

Outline

1. Sea T la transformación en el plano xy que representa la reflexión a través de la recta $y=x$.
   a) Hallar la matriz asociada a T respecto a la base estándar $\mathscr{B}=\{(1,0),(0,1)\}$, y también respecto a $\mathscr{B}'=\{(1,1),(1,-1)\}$.
   b) Verificar que las matrices halladas en el ítem anterior son semejantes.

Resolución: $T(x,y)=(y,x)$

(1)

$$[T]_{\mathscr{B}}=\big[[Te^1]_{\mathscr{B}}\ \ [Te^2]_{\mathscr{B}}\big]=\big[[e^2]_{\mathscr{B}}\ \ [e^1]_{\mathscr{B}}\big]=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Similarmente,

$$[T]_{\mathscr{B}'}=[[T(1,1)]_{\mathscr{B}'}\ \ [T(1,-1,)]_{\mathscr{B}'}]=[[(1,1)]_{\mathscr{B}'}\ \ [(-1,1)]_{\mathscr{B}'}]=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

(2) Son semejantes? Podemos plantearnos que condiciones tienen las entradas de una matriz S de tamaño 2×2 que verifique $[T]_{\mathscr{B}}S=S[T]_{\mathscr{B}'}$ y tratar de construirla. O,

Ejercicio 1: (continuación)
Son semejantes?

Ejercicio 2:
Sea T una transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita V en sí mismo y, $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ dos bases ordenadas de V. Sean A y B las matrices asociadas a T considerando las bases $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$ respectivamente. Demostrar que A y B son semejantes.

La S que buscábamos puede ser la matriz de cambio de base. Construirla y verificar que funciona.

OUTLINE

3. Sea T la proyección en $\mathbb{R}^2$ sobre la recta que pasa por el origen formando un ángulo θ con el eje x. Construir la matriz A asociada a T con la base canónica de $\mathbb{R}^2$ a partir de la matriz B asociada a T con una base que contiene un vector sobre la recta y un vector ortogonal a la recta.

Resolución:
En el apunte *Transformaciones del Plano y del Espacio*, se presenta la matriz A asociada a T con la base canónica de $\mathbb{R}^2$ (Sección "Proyecciones") construída *desde cero*. Pero acá nos piden que la construyamos a partir de otra matriz asociada a T, elegiendo una base adecuada.

En la slide 11 de Cap. 5 3ra. parte, vimos cómo elegir una base *adecuada* para obtener una representación de T más sencilla. En este caso, la representación más sencilla sería (también) utilizar una base que tenga un vector paralelo a la recta y uno perpendicular. Acá serían $(cos\theta, sen\theta)$ y $(-sen\theta, cos\theta)$.

Ejercicio 3: (continuación)
Una vez obtenida esa matriz, la que estamos buscando es semejante a ella, y la matriz que transforma una en otra es la de cambio de base desde la elegida a la canónica (ver continuación del ejemplo en slide 12).

Para obtener esa matriz de cambio de base, ver también el apunte de transformaciones del plano y del espacio.