Capítulo 2: Espacios Vectoriales (segunda parte)

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

OUTLINE

Outline

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es aconsejable, antes de empezar a resolver de manera automática (en este caso sería

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es aconsejable, antes de empezar a resolver de manera automática (en este caso sería aplicar eliminación Gaussiana a la matriz A, calcular $N(A) = N(R)$ y una solución particular de $Ax = b$),

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es aconsejable, antes de empezar a resolver de manera automática (en este caso sería aplicar eliminación Gaussiana a la matriz A, calcular $N(A) = N(R)$ y una solución particular de $Ax = b$), detenerse y ver si hay alguna forma de facilitar la resolución.

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es aconsejable, antes de empezar a resolver de manera automática (en este caso sería aplicar eliminación Gaussiana a la matriz A, calcular $N(A) = N(R)$ y una solución particular de $Ax = b$), detenerse y ver si hay alguna forma de facilitar la resolución.

Dado que queremos encontrar la forma escalonada reducida de A,

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es aconsejable, antes de empezar a resolver de manera automática (en este caso sería aplicar eliminación Gaussiana a la matriz A, calcular $N(A) = N(R)$ y una solución particular de $Ax = b$), detenerse y ver si hay alguna forma de facilitar la resolución.

Dado que queremos encontrar la forma escalonada reducida de A, ¿podemos hacerlo sin aplicar directamente eliminación Gaussiana y evitando hacer algunas cuentas?

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es aconsejable, antes de empezar a resolver de manera automática (en este caso sería aplicar eliminación Gaussiana a la matriz A, calcular $N(A) = N(R)$ y una solución particular de $Ax = b$), detenerse y ver si hay alguna forma de facilitar la resolución.

Dado que queremos encontrar la forma escalonada reducida de A, ¿podemos hacerlo sin aplicar directamente eliminación Gaussiana y evitando hacer algunas cuentas?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es aconsejable, antes de empezar a resolver de manera automática (en este caso sería aplicar eliminación Gaussiana a la matriz A, calcular $N(A) = N(R)$ y una solución particular de $Ax = b$), detenerse y ver si hay alguna forma de facilitar la resolución.

Dado que queremos encontrar la forma escalonada reducida de A, ¿podemos hacerlo sin aplicar directamente eliminación Gaussiana y evitando hacer algunas cuentas?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{intercambiando } A^1 \text{ y } A^4}$$

4. Hallar una solución general del sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es aconsejable, antes de empezar a resolver de manera automática (en este caso sería aplicar eliminación Gaussiana a la matriz A, calcular $N(A) = N(R)$ y una solución particular de $Ax = b$), detenerse y ver si hay alguna forma de facilitar la resolución.

Dado que queremos encontrar la forma escalonada reducida de A, ¿podemos hacerlo sin aplicar directamente eliminación Gaussiana y evitando hacer algunas cuentas?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{intercambiando } A^1 \text{ y } A^4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} = A'$$

¿Cuál es la ventaja de tener la nueva matriz $A' = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{array}\right]$ para resolver el problema?

¿Cuál es la ventaja de tener la nueva matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ para resolver el problema?

La matriz ya está escalonada.

¿Cuál es la ventaja de tener la nueva matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ para resolver el problema?

La matriz ya está escalonada.

¿Cómo traducimos el problema que queríamos resolver utilizando la nueva matriz?

¿Cuál es la ventaja de tener la nueva matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ para resolver el problema?

La matriz ya está escalonada.

¿Cómo traducimos el problema que queríamos resolver utilizando la nueva matriz?

- **Antes**:

¿Cuál es la ventaja de tener la nueva matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ para resolver el problema?

La matriz ya está escalonada.

¿Cómo traducimos el problema que queríamos resolver utilizando la nueva matriz?

- **Antes**: Hallar una solución general del sistema

¿Cuál es la ventaja de tener la nueva matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ para resolver el problema?

La matriz ya está escalonada.

¿Cómo traducimos el problema que queríamos resolver utilizando la nueva matriz?

- **Antes**: Hallar una solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- **Ahora**:

- **Ahora**: Hallar una solución general del sistema

- **Ahora**: Hallar una solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- **Ahora**: Hallar una solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con $b = (0,0) \in C(A')$ es fácil encontrar una solución particular del sistema:

- **Ahora**: Hallar una solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con $b = (0,0) \in C(A')$ es fácil encontrar una solución particular del sistema:

$$x_P = (x_4, x_2, x_3, x_1, x_5) =$$

- **Ahora**: Hallar una solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con $b = (0,0) \in C(A')$ es fácil encontrar una solución particular del sistema:

$$x_P = (x_4, x_2, x_3, x_1, x_5) = (0,0,0,0,0).$$

- **Ahora**: Hallar una solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con $b = (0,0) \in C(A')$ es fácil encontrar una solución particular del sistema:

$$x_P = (x_4, x_2, x_3, x_1, x_5) = (0,0,0,0,0).$$

Sólo restan calcular los vectores que generan $N(A') = N(R')$, donde R' es la matriz escalonada reducida de A', y a partir de la solución general obtenida para el sistema $A'x' = b$ obtener una solución general de $Ax = b$.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = R'$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = R'$$

Las variables pivots son

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = R'$$

Las variables pivots son x_4 y x_3

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = R'$$

Las variables pivots son x_4 y x_3 mientras que x_2, x_1 y x_5 son libres.

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = R'$$

Las variables pivots son x_4 y x_3 mientras que x_2, x_1 y x_5 son libres.

Teniendo en cuenta que x_4 y x_1 son la primera y cuarta variable respectivamente del sistema $A'x' = b$,

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = R'$$

Las variables pivots son x_4 y x_3 mientras que x_2, x_1 y x_5 son libres.

Teniendo en cuenta que x_4 y x_1 son la primera y cuarta variable respectivamente del sistema $A'x' = b$, las soluciones del sistema $R'x = 0$ son de la forma:

$$x = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } t, s, w \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que una solución general del sistema $A'x' = b$ es

Teniendo en cuenta que una solución general del sistema $A'x' = b$ es

$$x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ con } t, s, w \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta que una solución general del sistema $A'x' = b$ es

$$x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ con } t, s, w \in \mathbb{R}.$$

¿Podemos obtener a partir de la solución dada una solución general de $Ax = b$?

Teniendo en cuenta que una solución general del sistema $A'x' = b$ es

$$x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } t, s, w \in \mathbb{R}.$$

¿Podemos obtener a partir de la solución dada una solución general de $Ax = b$?

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } t, s, w \in \mathbb{R}.$$

OUTLINE

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, *b*) $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ y *c*) $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$.

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

$$a)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},\quad b)\ B=\begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}\quad \text{y}\quad c)\ C=\begin{bmatrix} A & A\\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

$a)$ Para encontrar la forma reducida de A realizamos los siguientes pasos:

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $b)$ $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ y $c)$ $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$.

$a)$ Para encontrar la forma reducida de A realizamos los siguientes pasos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

$a)$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $b)$ $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ y $c)$ $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$.

$a)$ Para encontrar la forma reducida de A realizamos los siguientes pasos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{13}\times}$$

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad b)\ B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c)\ C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Para encontrar la forma reducida de A realizamos los siguientes pasos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{13}\times} U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad b)\ B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c)\ C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

$a)$ Para encontrar la forma reducida de A realizamos los siguientes pasos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{13}\times} U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2)\times}$$

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad b)\ B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c)\ C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Para encontrar la forma reducida de A realizamos los siguientes pasos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{13}\times} U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2)\times} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

$$a)\ A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&3\\2&4&6\end{bmatrix},\quad b)\ B=\begin{bmatrix}A&A\end{bmatrix}\ \text{ y }\ c)\ C=\begin{bmatrix}A&A\\A&0\end{bmatrix}.$$

$a)$ Para encontrar la forma reducida de A realizamos los siguientes pasos:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&3\\2&4&6\end{bmatrix}\xrightarrow{P_{13}\times}U=\begin{bmatrix}2&4&6\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{12}(-2)\times}\begin{bmatrix}2&4&0\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{D\times}$$

donde $D=D(\frac{1}{2},\frac{1}{3},1)$, matriz diagonal 3×3 con $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y 1 en su diagonal.

8. Encontrar la forma reducida y los vectores que generan los espacios nulos para cada una de las matrices:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad b)\ B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad c)\ C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

$a)$ Para encontrar la forma reducida de A realizamos los siguientes pasos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{13}\times} U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2)\times} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{D\times}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $D = D(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1)$, matriz diagonal 3×3 con $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y 1 en su diagonal.

Sabemos que

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el sistema $Ax = 0$, las variables pivots son x_1 y x_3 mientras que x_2 es la única variable libre.

Sabemos que

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el sistema $Ax = 0$, las variables pivots son x_1 y x_3 mientras que x_2 es la única variable libre.

Los vectores generadores de $N(A) = N(R)$ son las soluciones especiales del sistema $Ax = 0$ ($Rx = 0$), que corresponden a fijar cada una de las variable libres en el valor uno y las otras en el valor cero.

Sabemos que

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el sistema $Ax = 0$, las variables pivots son x_1 y x_3 mientras que x_2 es la única variable libre.

Los vectores generadores de $N(A) = N(R)$ son las soluciones especiales del sistema $Ax = 0$ ($Rx = 0$), que corresponden a fijar cada una de las variable libres en el valor uno y las otras en el valor cero.

En este caso, sólo x_2 es libre, por lo tanto la solución especial es la solución del sistema $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_2 = 1$.

Sabemos que

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el sistema $Ax = 0$, las variables pivots son x_1 y x_3 mientras que x_2 es la única variable libre.

Los vectores generadores de $N(A) = N(R)$ son las soluciones especiales del sistema $Ax = 0$ ($Rx = 0$), que corresponden a fijar cada una de las variable libres en el valor uno y las otras en el valor cero.

En este caso, sólo x_2 es libre, por lo tanto la solución especial es la solución del sistema $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_2 = 1$.

Por lo tanto, el vector generador de $N(A)$ es

Sabemos que

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el sistema $Ax = 0$, las variables pivots son x_1 y x_3 mientras que x_2 es la única variable libre.

Los vectores generadores de $N(A) = N(R)$ son las soluciones especiales del sistema $Ax = 0$ ($Rx = 0$), que corresponden a fijar cada una de las variable libres en el valor uno y las otras en el valor cero.

En este caso, sólo x_2 es libre, por lo tanto la solución especial es la solución del sistema $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_2 = 1$.

Por lo tanto, el vector generador de $N(A)$ es $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

Sabemos que

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el sistema $Ax = 0$, las variables pivots son x_1 y x_3 mientras que x_2 es la única variable libre.

Los vectores generadores de $N(A) = N(R)$ son las soluciones especiales del sistema $Ax = 0$ ($Rx = 0$), que corresponden a fijar cada una de las variable libres en el valor uno y las otras en el valor cero.

En este caso, sólo x_2 es libre, por lo tanto la solución especial es la solución del sistema $x_1 + 2x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y $x_2 = 1$.

Por lo tanto, el vector generador de $N(A)$ es $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $N(A) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$.

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

b) No es difícil ver que si aplicamos a $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ las mismas transformaciones que a A logramos su forma reducida.

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

b) No es difícil ver que si aplicamos a $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ las mismas transformaciones que a A logramos su forma reducida.

En efecto, si $T = D \times E_{12}(-2) \times P_{13}$, sabemos que $TA = R$. Por lo tanto,

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

b) No es difícil ver que si aplicamos a $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ las mismas transformaciones que a A logramos su forma reducida.

En efecto, si $T = D \times E_{12}(-2) \times P_{13}$, sabemos que $TA = R$. Por lo tanto,

$$TB = T[A\,A] =$$

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

b) No es difícil ver que si aplicamos a $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ las mismas transformaciones que a A logramos su forma reducida.

En efecto, si $T = D \times E_{12}(-2) \times P_{13}$, sabemos que $TA = R$. Por lo tanto,

$$TB = T[A\,A] = [TA\;TA] = [R\,R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

b) No es difícil ver que si aplicamos a $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ las mismas transformaciones que a A logramos su forma reducida.

En efecto, si $T = D \times E_{12}(-2) \times P_{13}$, sabemos que $TA = R$. Por lo tanto,

$$TB = T[A\,A] = [TA\;TA] = [R\,R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz obtenida, ¿es la forma escalonada reducida de B?

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

b) No es difícil ver que si aplicamos a $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ las mismas transformaciones que a A logramos su forma reducida.

En efecto, si $T = D \times E_{12}(-2) \times P_{13}$, sabemos que $TA = R$. Por lo tanto,

$$TB = T[A\,A] = [TA\;TA] = [R\,R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz obtenida, ¿es la forma escalonada reducida de B? Sí, luego a partir de la misma, determinamos las variables libre y pivots del sistema $By = 0$.

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

b) No es difícil ver que si aplicamos a $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ las mismas transformaciones que a A logramos su forma reducida.

En efecto, si $T = D \times E_{12}(-2) \times P_{13}$, sabemos que $TA = R$. Por lo tanto,

$$TB = T[A\,A] = [TA\;TA] = [R\,R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz obtenida, ¿es la forma escalonada reducida de B? Sí, luego a partir de la misma, determinamos las variables libre y pivots del sistema $By = 0$.

En este caso, y_1 e y_3 siguen siendo las variables pivots pero ahora tenemos cuatro variables libres: y_2, y_4, y_5 e y_6.

Recordar que podríamos haber encontrado esta solución especial directamente a partir de la columna de R correspondiente a la variable libre, donde encontramos los valores de las variables pivots con signo contrario.

b) No es difícil ver que si aplicamos a $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$ las mismas transformaciones que a A logramos su forma reducida.

En efecto, si $T = D \times E_{12}(-2) \times P_{13}$, sabemos que $TA = R$. Por lo tanto,

$$TB = T[A\,A] = [TA\;TA] = [R\,R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz obtenida, ¿es la forma escalonada reducida de B? Sí, luego a partir de la misma, determinamos las variables libre y pivots del sistema $By = 0$.

En este caso, y_1 e y_3 siguen siendo las variables pivots pero ahora tenemos cuatro variables libres: y_2, y_4, y_5 e y_6.

Por lo tanto tendremos 4 soluciones especiales (cada una de ellas será un generador de $N(B)$) de la forma:

$$\begin{bmatrix} ? \\ 1 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} ? \\ 1 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para determinar las entradas faltantes, miramos las columnas de $[R\ R]$ correspondientes a cada variable libre donde las encontraremos con su signo cambiado.

$$\begin{bmatrix} ? \\ 1 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para determinar las entradas faltantes, miramos las columnas de $[R\ R]$ correspondientes a cada variable libre donde las encontraremos con su signo cambiado. Así, los vectores generadores de $N(B)$ son:

$$\begin{bmatrix} ? \\ 1 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} ? \\ 0 \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para determinar las entradas faltantes, miramos las columnas de $[R\ R]$ correspondientes a cada variable libre donde las encontraremos con su signo cambiado. Así, los vectores generadores de $N(B)$ son:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$c)$ Si aplicamos las operaciones elementales llegamos a que la siguiente matriz es la forma reducida de $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$:

$c)$ Si aplicamos las operaciones elementales llegamos a que la siguiente matriz es la forma reducida de $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$:

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Si aplicamos las operaciones elementales llegamos a que la siguiente matriz es la forma reducida de $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$:

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso, las variables pivots del sistema $Az = 0$ son z_1, z_3, z_4 y z_6. Trabajando en forma similar a las anteriores encontramos que las soluciones especiales que generan a $N(C)$ son:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

¿Cuál es la relación entre $\widetilde{R}$ y R?

$$C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

¿Cuál es la relación entre $\widetilde{R}$ y R?

$$C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} \to \widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

¿Cuál es la relación entre $\widetilde{R}$ y R?

$$C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} \to \widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\textit{salvo permutaciones}}{=} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\textit{salvo permutaciones}}{=} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

¿Por qué matriz habría que premultiplicar a $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ para obtener $\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$?

$$\widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\textit{salvo permutaciones}}{=} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

¿Por qué matriz habría que premultiplicar a $C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}$ para obtener $\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$?

¿Es posible utilizar $TA = R$ para conseguir lo que buscamos?

Buscamos una matriz $\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ tal que

Buscamos una matriz $\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

Buscamos una matriz $\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

O equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} BA & + & CA & = & R \\ BA & & & = & 0 \\ DA & + & EA & = & 0 \\ DA & & & = & R \end{array} \right. \rightarrow$$

Buscamos una matriz $\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

O equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} BA & + & CA & = & R \\ BA & & & = & 0 \\ DA & + & EA & = & 0 \\ DA & & & = & R \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} BA & = & 0 \\ CA & = & R \\ DA & = & R \\ EA & = & -R \end{array} \right. \rightarrow$$

Buscamos una matriz $\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}.$$

O equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} BA & + & CA & = & R \\ BA & & & = & 0 \\ DA & + & EA & = & 0 \\ DA & & & = & R \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} BA & = & 0 \\ CA & = & R \\ DA & = & R \\ EA & = & -R \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} B & = & 0 \\ C & = & T \\ D & = & T \\ E & = & -T \end{array} \right.$$

Entonces,

Entonces,

$$\begin{bmatrix} 0 & T \\ T & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

Entonces,

$$\begin{bmatrix} 0 & T \\ T & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

donde T es la matriz calculada en el ítem $a)$.

Entonces,

$$\begin{bmatrix} 0 & T \\ T & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

donde T es la matriz calculada en el ítem $a)$.

Para obtener la matriz $\widetilde{R}$, matriz escalonada reducida de C,

Entonces,

$$\left[\begin{array}{cc} 0 & T \\ T & -T \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} A & A \\ A & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} R & 0 \\ 0 & R \end{array}\right],$$

donde T es la matriz calculada en el ítem $a)$.

Para obtener la matriz $\widetilde{R}$, matriz escalonada reducida de C, basta con permutar la matriz obtenida:

$$\left[\begin{array}{cc} R & 0 \\ 0 & R \end{array}\right].$$

Outline

12. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

se pide:

a) Reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$ para obtener un sistema triangular $Ux = c$.

b) Encontrar condiciones sobre b_1, b_2 y b_3 para que el sistema tenga solución.

c) Describir el espacio columna de A. ¿Cuál es el plano de $\mathbb{R}^3$ que representa el espacio columna $C(A)$?

d) Describir el espacio nulo de A. ¿Cuál es la matriz de soluciones especiales?

e) Encontrar una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la solución completa $x = x_P + x_N$.

$a)$ Vamos a reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$.

a) Vamos a reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$.

$$[\,A \mid b\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & b_2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & b_3 \end{array}\right]$$

a) Vamos a reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$.

$$[\,A \mid b\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & b_2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & b_3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & b_3 - b_1 \end{array}\right]$$

a) Vamos a reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$.

$$[\,A \mid b\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & b_2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & b_3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & b_3 - b_1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|l} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array}\right] = [\,U \mid c\,].$$

a) Vamos a reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$.

$$[\,A \mid b\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & b_2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & b_3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & b_3 - b_1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array}\right] = [\,U \mid c\,].$$

Así obtenemos el siguiente sistema triangular,

a) Vamos a reducir $[A\ b]$ a $[U\ c]$.

$$[\,A \mid b\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & b_2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & b_3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & b_3 - b_1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 6 & 4 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array}\right] = [\,U \mid c\,].$$

Así obtenemos el siguiente sistema triangular,

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & b_1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & b_2 - b_1 \\ 0 & = & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array}\right. .$$

$b)$ Para que el sistema tenga solución se tiene que satisfacer la condición,

b) Para que el sistema tenga solución se tiene que satisfacer la condición,

$$b_3 + b_2 - 2b_1 = 0.$$

$b)$ Para que el sistema tenga solución se tiene que satisfacer la condición,

$$b_3 + b_2 - 2b_1 = 0.$$

$c)$ El espacio columna de A, $C(A)$, es el espacio generado por las columnas pivots **DE** A, entonces

$b)$ Para que el sistema tenga solución se tiene que satisfacer la condición,

$$b_3 + b_2 - 2b_1 = 0.$$

$c)$ El espacio columna de A, $C(A)$, es el espacio generado por las columnas pivots **DE** A, entonces

$$C(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

$b)$ Para que el sistema tenga solución se tiene que satisfacer la condición,

$$b_3 + b_2 - 2b_1 = 0.$$

$c)$ El espacio columna de A, $C(A)$, es el espacio generado por las columnas pivots **DE** A, entonces

$$C(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Además, el espacio columna contiene a todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $b_3 + b_2 - 2b_1 = 0$. Por lo tanto, la ecuación del plano que representa el espacio columna es:

$b)$ Para que el sistema tenga solución se tiene que satisfacer la condición,

$$b_3 + b_2 - 2b_1 = 0.$$

$c)$ El espacio columna de A, $C(A)$, es el espacio generado por las columnas pivots **DE** A, entonces

$$C(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Además, el espacio columna contiene a todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $b_3 + b_2 - 2b_1 = 0$. Por lo tanto, la ecuación del plano que representa el espacio columna es:

$$-2x + y + z = 0.$$

d) Como el espacio nulo de A coincide con el espacio nulo de R, $N(A) = N(R)$, vamos a llevar a U a la forma escalonada reducida.

d) Como el espacio nulo de A coincide con el espacio nulo de R, $N(A) = N(R)$, vamos a llevar a U a la forma escalonada reducida.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R\,.$$

d) Como el espacio nulo de A coincide con el espacio nulo de R, $N(A) = N(R)$, vamos a llevar a U a la forma escalonada reducida.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R\,.$$

Podemos observar que x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 son variables libres.

d) Como el espacio nulo de A coincide con el espacio nulo de R, $N(A) = N(R)$, vamos a llevar a U a la forma escalonada reducida.

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R\,.$$

Podemos observar que x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 son variables libres.

Para resolver $Rx = 0$, asignamos los valores $x_3 = t$ y $x_4 = s$ entonces tenemos que encontrar las soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+t-2s & = & 0 \\ x_2+t+2s & = & 0 \end{array}\right., \quad t,s\in\mathbb{R},$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + t - 2s & = & 0 \\ x_2 + t + 2s & = & 0 \end{array}\right., \quad t, s \in \mathbb{R},$$

que es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+t-2s & = & 0 \\ x_2+t+2s & = & 0 \end{array}\right., \quad t,s\in\mathbb{R},$$

que es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -t+2s \\ x_2 & = & -t-2s \end{array}\right., \quad t,s\in\mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x_1 + t - 2s &= 0 \\ x_2 + t + 2s &= 0 \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 &= -t + 2s \\ x_2 &= -t - 2s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Entonces, las soluciones del sistema $Rx = 0$ son de la forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1+t-2s & = & 0 \\ x_2+t+2s & = & 0 \end{array}\right., \quad t,s\in\mathbb{R},$$

que es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -t+2s \\ x_2 & = & -t-2s \end{array}\right., \quad t,s\in\mathbb{R}.$$

Entonces, las soluciones del sistema $Rx=0$ son de la forma

$$x=\begin{bmatrix} -t+2s \\ -t-2s \\ t \\ s \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t,s\in\mathbb{R}.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + t - 2s & = & 0 \\ x_2 + t + 2s & = & 0 \end{array}\right., \quad t, s \in \mathbb{R},$$

que es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -t + 2s \\ x_2 & = & -t - 2s \end{array}\right., \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Entonces, las soluciones del sistema $Rx = 0$ son de la forma

$$x = \begin{bmatrix} -t + 2s \\ -t - 2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Así tenenemos que, $\quad N(R) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$

Por lo tanto,

Por lo tanto, $$N(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Por lo tanto, $$N(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Recordemos que, podemos describir directamente el espacio nulo de A a partir de que sabemos que x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 variables libres.

Por lo tanto, $$N(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Recordemos que, podemos describir directamente el espacio nulo de A a partir de que sabemos que x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 variables libres. Pues, tenemos una solución especial por cada variable libre, fijamos esa variable libre en 1 y las restantes en 0 y así, los valores de las variables pivots en las soluciones especiales son los valores opuestos de las entradas de las filas pivots en las columnas de las variables libres.

Por lo tanto, $$N(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Recordemos que, podemos describir directamente el espacio nulo de A a partir de que sabemos que x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 variables libres. Pues, tenemos una solución especial por cada variable libre, fijamos esa variable libre en 1 y las restantes en 0 y así, los valores de las variables pivots en las soluciones especiales son los valores opuestos de las entradas de las filas pivots en las columnas de las variables libres.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $$N(A) = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Recordemos que, podemos describir directamente el espacio nulo de A a partir de que sabemos que x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 variables libres. Pues, tenemos una solución especial por cada variable libre, fijamos esa variable libre en 1 y las restantes en 0 y así, los valores de las variables pivots en las soluciones especiales son los valores opuestos de las entradas de las filas pivots en las columnas de las variables libres.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para terminar de resolver este apartado, falta describir la matriz de soluciones especiales que es:

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) Vamos a encontrar una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la solución completa $x = x_P + x_N$.

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) Vamos a encontrar una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la solución completa $x = x_P + x_N$.

Primero observemos que $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A)$, ya que $5 + 3 - 2 \cdot 4 = 0$.

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) Vamos a encontrar una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la solución completa $x = x_P + x_N$.

Primero observemos que $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A),$ ya que $5+3-2\cdot 4 = 0.$

Recordemos que $Ux = c$ es el sistema

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

e) Vamos a encontrar una solución particular de $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y la solución completa $x = x_P + x_N$.

Primero observemos que $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \in C(A)$, ya que $5 + 3 - 2 \cdot 4 = 0$.

Recordemos que $Ux = c$ es el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & b_1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & b_2 - b_1 \\ 0 & = & b_3 + b_2 - 2b_1 \end{array} \right. .$$

Ya vimos que la última ecuación se satisface para $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, entonces nos queda por resolver:

Ya vimos que la última ecuación se satisface para $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, entonces nos queda por resolver:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & b_1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & b_2 - b_1 \end{array} \right. ,$$

donde x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 variables libres.

Ya vimos que la última ecuación se satisface para $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, entonces nos queda por resolver:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & b_1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & b_2 - b_1 \end{cases},$$

donde x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 variables libres.

Estamos buscando una solución particular para el sistema, entonces le asignamos el valor 0 a las variables libres (para que las cuentas resulten más sencillas) y tenemos,

Ya vimos que la última ecuación se satisface para $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, entonces nos queda por resolver:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & b_1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 & = & b_2 - b_1 \end{cases},$$

donde x_1 y x_2 son variables pivots y x_3 y x_4 variables libres.

Estamos buscando una solución particular para el sistema, entonces le asignamos el valor 0 a las variables libres (para que las cuentas resulten más sencillas) y tenemos,

$$x_3 = x_4 = 0,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 & = & b_1 \\ x_2 & = & b_2 - b_1 \end{cases}.$$

Resolvemos con $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, utilizando sustitución hacia atrás y obtenemos:

Resolvemos con $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, utilizando sustitución hacia atrás y obtenemos:

$$\begin{cases} x_2 & = & -1 \\ x_1 & = & 4 \end{cases}.$$

Resolvemos con $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, utilizando sustitución hacia atrás y obtenemos:

$$\begin{cases} x_2 & = & -1 \\ x_1 & = & 4 \end{cases}.$$

Luego la solución particular del sistema considerando las variables libres

iguales a 0 es

Resolvemos con $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, utilizando sustitución hacia atrás y obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_2 & = & -1 \\ x_1 & = & 4 \end{array} \right. .$$

Luego la solución particular del sistema considerando las variables libres iguales a 0 es $x_P = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolvemos con $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, utilizando sustitución hacia atrás y obtenemos:

$$\begin{cases} x_2 &= -1 \\ x_1 &= 4 \end{cases}.$$

Luego la solución particular del sistema considerando las variables libres iguales a 0 es $x_P = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Por último, debemos calcular las soluciones del sistema $Ax = b$ que son de la forma $x = x_P + x_N$, donde x_P es la solución particular encontrada y x_N cualquier vector en $N(A)$. Por lo tanto,

$$x = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Outline

14. La ecuación $x-3y-z=0$ determina un plano en $\mathbb{R}^3$.

a) ¿Cuál es la matriz A asociada a esta ecuación?

b) ¿Cuáles son las variables libres?

c) ¿Una de las soluciones especiales es $(3,1,0)$, cuál es la otra?

d) El plano $x-3y-z=12$, paralelo al plano dado, contiene al punto particular $(12,0,0)$. Escribir la componente que falta para describir la forma que tienen los puntos en este plano:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

14. La ecuación $x-3y-z=0$ determina un plano en $\mathbb{R}^3$.

a) ¿Cuál es la matriz A asociada a esta ecuación?

b) ¿Cuáles son las variables libres?

c) ¿Una de las soluciones especiales es $(3,1,0)$, cuál es la otra?

d) El plano $x-3y-z=12$, paralelo al plano dado, contiene al punto particular $(12,0,0)$. Escribir la componente que falta para describir la forma que tienen los puntos en este plano:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Observemos que cada punto del plano $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-3y-z=0\}$ es una solución del sistema

14. La ecuación $x-3y-z=0$ determina un plano en $\mathbb{R}^3$.

   a) ¿Cuál es la matriz A asociada a esta ecuación?

   b) ¿Cuáles son las variables libres?

   c) ¿Una de las soluciones especiales es $(3,1,0)$, cuál es la otra?

   d) El plano $x-3y-z=12$, paralelo al plano dado, contiene al punto particular $(12,0,0)$. Escribir la componente que falta para describir la forma que tienen los puntos en este plano:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Observemos que cada punto del plano $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-3y-z=0\}$ es una solución del sistema

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

y recíprocamente, cada solución del sistema es un punto del plano. Luego, la matriz asociada resulta:

y recíprocamente, cada solución del sistema es un punto del plano. Luego, la matriz asociada resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

y recíprocamente, cada solución del sistema es un punto del plano. Luego, la matriz asociada resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$b)$ Dada la forma escalonada de una matriz, las variables libres son las variables correspondientes a las columnas que no son columnas pivots. Como A ya está en su forma escalonada resulta que las variables libres son y y z.

y recíprocamente, cada solución del sistema es un punto del plano. Luego, la matriz asociada resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Dada la forma escalonada de una matriz, las variables libres son las variables correspondientes a las columnas que no son columnas pivots. Como A ya está en su forma escalonada resulta que las variables libres son y y z.

c) Sin hacer cuentas, ¿a qué variable libre corresponde la solución especial $(3,1,0)$?

y recíprocamente, cada solución del sistema es un punto del plano. Luego, la matriz asociada resulta:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$b)$ Dada la forma escalonada de una matriz, las variables libres son las variables correspondientes a las columnas que no son columnas pivots. Como A ya está en su forma escalonada resulta que las variables libres son y y z.

$c)$ Sin hacer cuentas, ¿a qué variable libre corresponde la solución especial $(3, 1, 0)$?
Observando que el vector tiene una única componente en 1 está claro que la solución especial $(3, 1, 0)$ corresponde a la variable libre y.

¿Si hubiese más de una componente en 1 habría que hacer cuentas?

¿Si hubiese más de una componente en 1 habría que hacer cuentas?

Si disponemos de la matriz en su forma reducida la respuesta es no. El motivo es que con la matriz en su forma reducida sabemos cuáles son las variables libres y por lo tanto podemos realizar un proceso de descarte sobre las que se evalúan en 0. Los demás $1's$ que aparecen serán los valores de las variables pivots correspondientes a la variable libre que está en 1 en la solución especial asociada.

¿Si hubiese más de una componente en 1 habría que hacer cuentas?

Si disponemos de la matriz en su forma reducida la respuesta es no. El motivo es que con la matriz en su forma reducida sabemos cuáles son las variables libres y por lo tanto podemos realizar un proceso de descarte sobre las que se evalúan en 0. Los demás $1's$ que aparecen serán los valores de las variables pivots correspondientes a la variable libre que está en 1 en la solución especial asociada.

Retomando la pregunta del enunciado,

¿Si hubiese más de una componente en 1 habría que hacer cuentas?

Si disponemos de la matriz en su forma reducida la respuesta es no. El motivo es que con la matriz en su forma reducida sabemos cuáles son las variables libres y por lo tanto podemos realizar un proceso de descarte sobre las que se evalúan en 0. Los demás $1's$ que aparecen serán los valores de las variables pivots correspondientes a la variable libre que está en 1 en la solución especial asociada.

Retomando la pregunta del enunciado, sabiendo que falta la solución especial asociada a la variable libre z, es fácil ver que esta es

¿Si hubiese más de una componente en 1 habría que hacer cuentas?

Si disponemos de la matriz en su forma reducida la respuesta es no. El motivo es que con la matriz en su forma reducida sabemos cuáles son las variables libres y por lo tanto podemos realizar un proceso de descarte sobre las que se evalúan en 0. Los demás $1's$ que aparecen serán los valores de las variables pivots correspondientes a la variable libre que está en 1 en la solución especial asociada.

Retomando la pregunta del enunciado, sabiendo que falta la solución especial asociada a la variable libre z, es fácil ver que esta es $(1, 0, 1)$.

$d)$ Vamos a resolver este apartado como si tuviésemos que completar:

d) Vamos a resolver este apartado como si tuviésemos que completar:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

d) Vamos a resolver este apartado como si tuviésemos que completar:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

- Para conocer las soluciones de un sistema necesitamos de una solución particular y el espacio nulo de la matriz de coeficientes. En el enunciado tenemos la solución particular $(12, 0, 0)$:

d) Vamos a resolver este apartado como si tuviésemos que completar:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

- Para conocer las soluciones de un sistema necesitamos de una solución particular y el espacio nulo de la matriz de coeficientes. En el enunciado tenemos la solución particular $(12, 0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} + ? \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

- Como tenemos a la matriz de coeficientes en su forma escalonada podemos llenar los ?, más aún, la solución especial tiene valor 1 en su variable libre correspondiente y 0 en las demás:

- Como tenemos a la matriz de coeficientes en su forma escalonada podemos llenar los ?, más aún, la solución especial tiene valor 1 en su variable libre correspondiente y 0 en las demás:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Como tenemos a la matriz de coeficientes en su forma escalonada podemos llenar los ?, más aún, la solución especial tiene valor 1 en su variable libre correspondiente y 0 en las demás:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Si se dispone de la forma escalonada reducida de la matriz de coeficientes, como en nuestro caso, entonces completar lo que falta es tan fácil, ya que

- Como tenemos a la matriz de coeficientes en su forma escalonada podemos llenar los ?, más aún, la solución especial tiene valor 1 en su variable libre correspondiente y 0 en las demás:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Si se dispone de la forma escalonada reducida de la matriz de coeficientes, como en nuestro caso, entonces completar lo que falta es tan fácil, ya que para saber el valor de un pivot en una solución especial basta **tomar el opuesto del valor que se encuentra en la fila de dicho pivot (FILA PIVOT), y en la columna de la variable libre asociada a la solución especial (“COLUMNA LIBRE”)**.

En nuestro caso, el único pivot es la variable x que corresponde a la fila 1, la columna correspondiente a la variable libre y nos dice que completemos su solución especial con un $-(-3)$ y la columna correspondiente a la variable libre z nos dice que completemos su solución especial con un $-(-1)$:

En nuestro caso, el único pivot es la variable x que corresponde a la fila 1, la columna correspondiente a la variable libre y nos dice que completemos su solución especial con un $-(-3)$ y la columna correspondiente a la variable libre z nos dice que completemos su solución especial con un $-(-1)$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$