# Resolviendo Recurrencias

Mauro Jaskelioff

17/03/2017

# Análisis de Algoritmos

- Queremos poder evaluar la performance de **algoritmos**.
- Para esto utilizamos
  - Notación Asintótica
  - Modelo de Costo basado en Lenguaje
  - Analizamos trabajo ($W$) y profundidad ($S$)
- Al plantear el trabajo y profundidad de algoritmos recursivos surgen recurrencias.
- ¿Cómo resolver las recurrencias?
  - Veremos varias técnicas...

# Método de Substitución

- Probamos los siguientes pasos
  1. Adivinamos la forma de la solución.
  2. Probamos que es correcta usando inducción matemática.
- Ejemplo (recordar mergesort)

$$W(0) = c_0$$
$$W(1) = c_1$$
$$W(n) = 2W(\lfloor n/2 \rfloor) + c_2 n$$

- Adivinamos que $W(n) \in O(n \lg n)$
- Probamos que $W(n) \leqslant cn \lg n$.

- Reemplazamos nuestra solución en la recurrencia

$$\begin{aligned} W(n) &\leqslant 2(c\lfloor n/2 \rfloor \lg \lfloor n/2 \rfloor) + c_2 n \\ &\leqslant cn \lg(n/2) + c_2 n \\ &= cn \lg n - cn \lg 2 + c_2 n \\ &= cn \lg n - cn + c_2 n \\ &\leqslant cn \lg n \qquad \text{siempre y cuando } c \geqslant c_2. \end{aligned}$$

- Faltan chequear los casos bases. ¿$W(0) \leqslant c \cdot 0 \cdot \lg 0$? ¿$W(1) \leqslant c \cdot 1 \cdot \lg 1$?
- La notación O sólo requiere $W(n) \leqslant cn \lg n$ para $n \geqslant N$. Tomamos $N = 2$

$$\begin{aligned} W(2) &= 2W(1) + 2c_2 = 2c_1 + 2c_2 \leqslant c \cdot 2 \lg 2 = 2c \\ W(3) &= 2W(1) + 3c_2 = 2c_1 + 3c_2 \leqslant c \cdot 3 \lg 3 \end{aligned}$$

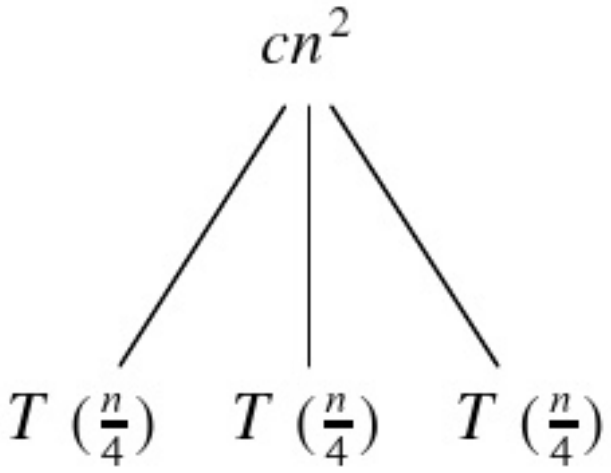
- Elegimos $c$ suficientemente grande.

# Árboles de recurrencia

- Una técnica general para resolver recurrencias son los *árboles de recurrencia*
- Los ilustramos usando la recurrencia

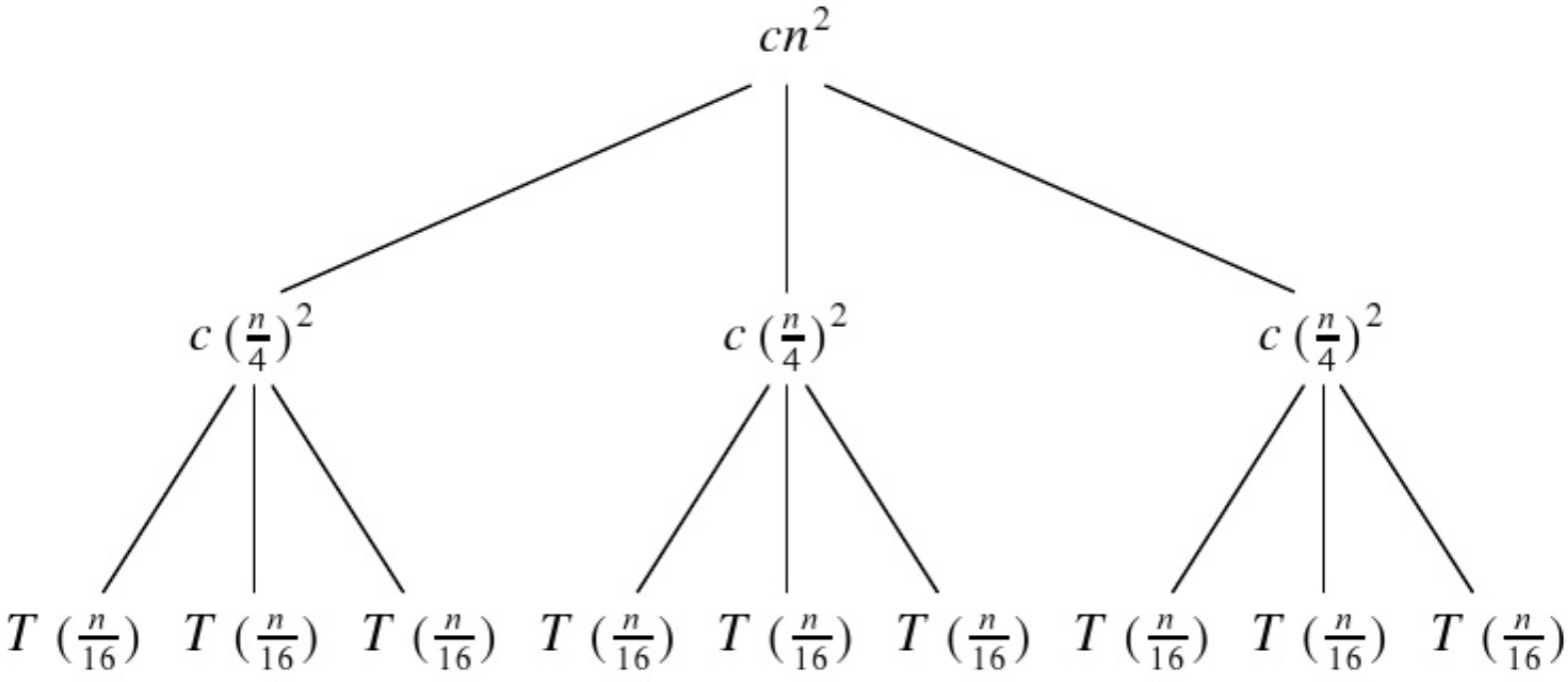
$$T(1) = c_1$$
$$T(n) = 3T(n/4) + cn^2$$

- Hacemos un árbol que en su raíz tiene el costo para el $n$ inicial, con ramas indicando cada una de las llamadas recursivas.



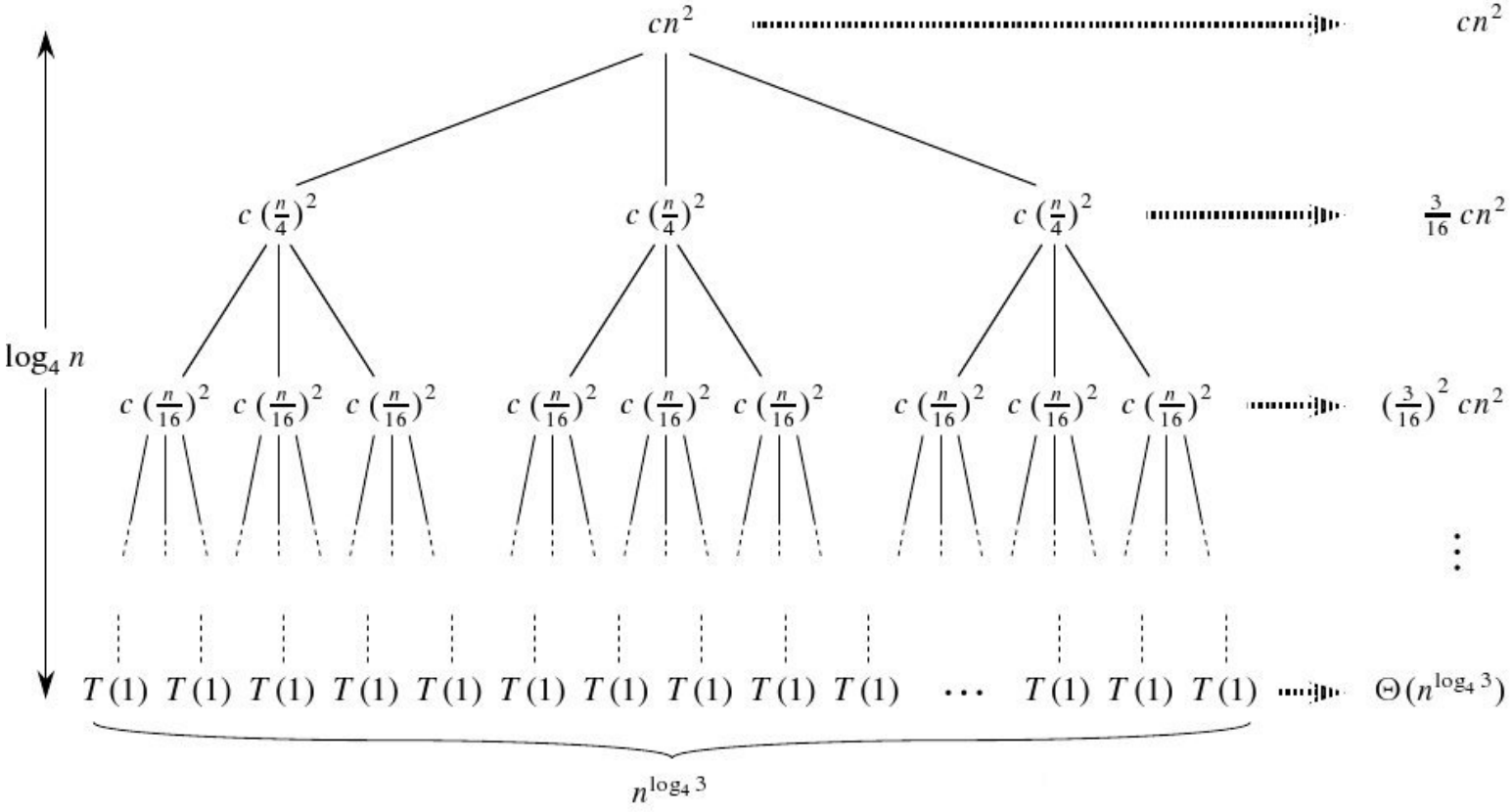
# Árboles de recurrencia (cont.)

- Las ramas correspondientes a las llamadas recursivas se expanden, ahora tienen el costo correspondiente a cada llamada y generan nuevas hojas.



# Árboles de recurrencia (cont.)

- Se sigue expandiendo el árbol hasta llegar a un caso base.
- En cada nivel se suma el total de operaciones por nivel.
  El costo total es la suma de todos los niveles.



# Árboles de recurrencia (cont.)

- La suma obtenida se manipula algebraicamente para llegar al resultado.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \cdots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + kn^{\log_4 3} \\
&= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + kn^{\log_4 3} \\
&= \frac{(3/16)^{\log_4 n} - 1}{(3/16) - 1} cn^2 + kn^{\log_4 3} \\
&\in O(n^2)
\end{aligned}
$$

- Si somos prolijos, el método nos da una solución exacta.
- Si no, al menos nos da un candidato para usar el método de substitución.

# Ejercicio

Verificar usando el método de la substitución que la cota obtenida es ajustada. Es decir, probar que

$$T(n) = 3T(n/4) + cn^2 \quad \in \Theta(n^2)$$

Nota: De aquí en más, si no se menciona caso base, suponerlo(s) constante(s).

# Simplificando Recurrencias

- Para el análisis de mergesort, nos olvidamos de los $\lfloor \cdot \rfloor$ y los $\lceil \cdot \rceil$
- ¿Cuando es válido hacer estas aproximaciones?
- Si $n = b^k$ entonces $n/b = \lfloor n/b \rfloor = \lceil n/b \rceil$.
- Notar que no alcanza que $n$ sea múltiplo de $b$.
- Podría suceder que la solución asintótica para entradas $n = b^k$ sea la solución para cualquier entrada.

# Funciones suaves

- Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ es *eventualmente no decreciente* si

$$\exists\, N \in \mathbb{N}.\ f(n) \leqslant f(n+1) \text{ para todo } n \geqslant N$$

- Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ es *b-suave* (smooth) si
  1. es eventualmente no decreciente y
  2. $f(bn) \in O(f(n))$.
- Una función es *suave* si es $b$-suave para todo $b$.
- Propiedad: si $f$ es $b$-suave para un $b \geqslant 2$, entonces es suave para todo $b$.
- Ejemplos de funciones suaves: $n^2$, $n^r$ (para todo $r$), $n \lg n$.
- Ejemplos de funciones no suaves: $n^{\lg n}$, $2^n$, $n!$.
- Ejercicio: verificar que $n^2$ es suave y que $2^n$ no lo es.

# Regla de suavidad

- *Regla de suavidad:* Sea $f$ suave y sea $g$ eventualmente no decreciente. Para todo $b \geqslant 2$,

$$g(b^k) \in \Theta(f(b^k)) \quad \Rightarrow \quad g(n) \in \Theta(f(n))$$

- Ejemplo de uso: Considere la siguiente recurrencia

$$\begin{aligned} W(1) &= c \\ W(n) &= W(\lceil n/2 \rceil) + W(\lfloor n/2 \rfloor) + kn \end{aligned}$$

- Si sólo consideramos potencias de 2 obtenemos

$$\begin{aligned} W'(1) &= c \\ W'(n) &= 2W'(n/2) + kn \end{aligned}$$

que es $O(n \lg n)$. Como $n \lg n$ es suave, $W(n) \in O(n \lg n)$.

# Resolviendo recurrencias

- Las recurrencias que aparecen en algoritmos "Divide & Conquer" usualmente tienen la forma:

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

- En general, podemos obtener el orden de estas recurrencias directamente usando una resolución general.

"El Teorema Maestro"

# El Teorema Maestro

- Dados $a \geqslant 1$ y $b > 1$ y la recurrencia

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)\ ,$$

entonces

$$T(n) \in \begin{cases} \Theta(n^{\lg_b a}) & \text{si } \exists \epsilon > 0.\ f(n) \in O(n^{\lg_b a - \epsilon}) \\ \Theta(n^{\lg_b a} \lg n) & \text{si } f(n) \in \Theta(n^{\lg_b a}) \\ \Theta(f(n)) & \begin{array}{l} \text{si } \exists \epsilon > 0.\ f(n) = \Omega(n^{\lg_b a + \epsilon}) \\ \text{y } \exists c < 1, N \in \mathbb{N}.\ \forall n > N. \\ af(n/b) \leqslant cf(n) \end{array} \end{cases}$$

- Para $W(n) = 2W(\lfloor n/2 \rfloor) + c_2 n$ estamos en el 2do caso ya que $\lg_2 2 = 1$ y $g(n) \in \Theta(n^1)$, y por lo tanto $W(n) = \Theta(n \lg n)$

# Comentarios acerca del Teorema Maestro

- Los casos se deciden comparando $f(n)$ y $n^{\lg_b a}$.
  - Caso 1: $n^{\lg_b a}$ es mas grande.
  - Caso 2: $f(n)$ y $n^{\lg_b a}$ tienen el mismo orden.
  - Caso 3: $f(n)$ es mas grande.
- En realidad no basta con que una sea mas grande que la otra, sino que debe serlo polinomialmente.
  - $f(n) = n \lg n$ no es polinomialmente mas grande que $g(n) = n$.
- Los tres casos **no** cubren todas las posibilidades

# Resumen

Resolución de recurrencias usando:

- Substitución
- Árbol de recurrencias.
- Regla de suavidad
- Teorema Maestro

# Referencias


- Introduction to Algorithms. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein
- Fundamentals of Algorithmics. Gilles Brassard, Paul Bratley