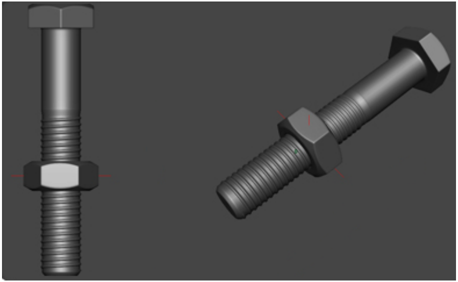
Transformaciones lineales

Daniel Severín

Concurso 1539

Una aplicación de transformaciones lineales

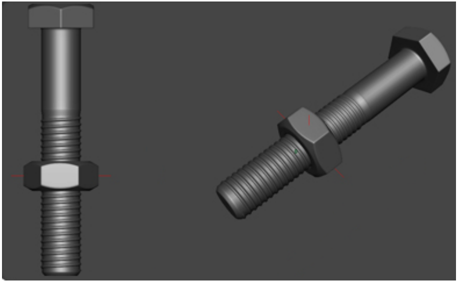
Un modelo 3D consiste en un conjunto de segmentos o polígonos en el espacio definidos a través de sus vértices. En Ing. Mecánica es habitual representar con estos modelos, objetos que se desean diseñar.



Consideremos el problema de tener un modelo con un gran conjunto de vértices (puntos en el espacio), a los cuales queremos aplicarle una traslación y rotación para luego visualizarlos.

Una aplicación de transformaciones lineales

Un modelo 3D consiste en un conjunto de segmentos o polígonos en el espacio definidos a través de sus vértices. En Ing. Mecánica es habitual representar con estos modelos, objetos que se desean diseñar.



Consideremos el problema de tener un modelo con un gran conjunto de vértices (puntos en el espacio), a los cuales queremos aplicarle una traslación y rotación para luego visualizarlos.

Una aplicación de transformaciones lineales

Un enfoque posible sería aplicarle a todos los puntos las siguientes operaciones secuencialmente:

- Rotarlos α grados en el eje X
- Rotarlos β grados en el eje Y
- Rotarlos γ grados en el eje Z
- Trasladarlos una cantidad t_x, t_y, t_z en cada eje, resp.

Veremos que cada una de estas operaciones es una transformación lineal.

Por este motivo, podemos aprovechar el resultado sobre *composición* de transformaciones para:

1. combinarlas en una única transformación lineal,
2. aplicar esta a todos los puntos.

Una aplicación de transformaciones lineales

Un enfoque posible sería aplicarle a todos los puntos las siguientes operaciones secuencialmente:

- Rotarlos α grados en el eje X
- Rotarlos β grados en el eje Y
- Rotarlos γ grados en el eje Z
- Trasladarlos una cantidad t_x, t_y, t_z en cada eje, resp.

Veremos que cada una de estas operaciones es una transformación lineal.

Por este motivo, podemos aprovechar el resultado sobre *composición* de transformaciones para:

1. combinarlas en una única transformación lineal,
2. aplicar esta a todos los puntos.

Una aplicación de transformaciones lineales

Un enfoque posible sería aplicarle a todos los puntos las siguientes operaciones secuencialmente:

- Rotarlos α grados en el eje X
- Rotarlos β grados en el eje Y
- Rotarlos γ grados en el eje Z
- Trasladarlos una cantidad t_x, t_y, t_z en cada eje, resp.

Veremos que cada una de estas operaciones es una transformación lineal.

Por este motivo, podemos aprovechar el resultado sobre *composición* de transformaciones para:

1. combinarlas en una única transformación lineal,
2. aplicar esta a todos los puntos.

Una aplicación de transformaciones lineales

Representamos los puntos como un vector columna
$p = (x, y, z, 1)$.

Aplicar una traslación de una cantidad t_x, t_y, t_z a un punto situado en x, y, z significa obtener un nuevo punto de coordenadas $x + t_x, y + t_y, z + t_z$, lo que se puede lograr haciendo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Llamemos $M_{t_x;t_y;t_z}$ a la matríz anterior.

Ejercicio: Demuestre que $x' = x + t_x$, $y' = y + t_y$ y $z' = x + t_z$.

Una aplicación de transformaciones lineales

Representamos los puntos como un vector columna $p = (x, y, z, 1)$.

Aplicar una traslación de una cantidad t_x, t_y, t_z a un punto situado en x, y, z significa obtener un nuevo punto de coordenadas $x + t_x, y + t_y, z + t_z$, lo que se puede lograr haciendo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Llamemos $M_{t_x;t_y;t_z}$ a la matríz anterior.

Ejercicio: Demuestre que $x' = x + t_x$, $y' = y + t_y$ y $z' = x + t_z$.

Una aplicación de transformaciones lineales

Representamos los puntos como un vector columna $p = (x, y, z, 1)$.

Aplicar una traslación de una cantidad t_x, t_y, t_z a un punto situado en x, y, z significa obtener un nuevo punto de coordenadas $x + t_x, y + t_y, z + t_z$, lo que se puede lograr haciendo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Llamemos $M_{t_x;t_y;t_z}$ a la matríz anterior.

Ejercicio: Demuestre que $x' = x + t_x$, $y' = y + t_y$ y $z' = x + t_z$.

Una aplicación de transformaciones lineales

Para aplicar una rotación en los distintos ejes, se pueden utilizar las sig. transformaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sen\theta & 0 \\ 0 & sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & -sen\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sen\theta & 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Llamemos R^x_α a la primer matríz con $\theta = \alpha$, R^y_β a la segunda y R^z_γ a la tercera.

Una aplicación de transformaciones lineales

El enfoque consiste en obtener la matríz de transformación:

$$A = M_{t_x;t_y;t_z}\ R^x_\alpha\ R^y_\beta\ R^z_\gamma$$

y luego calcular $A.p$ sobre todos los puntos $p = (x, y, z, 1)$ que queramos transformar.

¿ Y si hacemos un modelo sencillo 3D ?

Una aplicación de transformaciones lineales

El enfoque consiste en obtener la matríz de transformación:

$$A = M_{t_x;t_y;t_z}\ R_\alpha^x\ R_\beta^y\ R_\gamma^z$$

y luego calcular $A.p$ sobre todos los puntos $p = (x, y, z, 1)$ que queramos transformar.

¿ Y si hacemos un modelo sencillo 3D ?

Modelo 3D de un árbol

- *Tronco.* Hagamos un segmento que va del origen a $(0, 0, p)$
- *Ramas.* Añadimos tres segmentos más:
  - Un segmento de 1/3 de tamaño del original (es decir, del origen a (0,0,p/3)), rotado 45° en el eje X y trasladado $t_z = p$ (es decir, a la punta del tronco)

$$A_1 = M_{0;0;p} \; R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 120° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_2 = M_{0;0;p} \; R^z_{120^\circ} \; R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 240° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_3 = M_{0;0;p} \; R^z_{240^\circ} \; R^x_{45^\circ}$$

- Para cada uno de estos segmentos, vamos a volver a generar otros 3 segmentos, y así sucesivamente.

Modelo 3D de un árbol

- *Tronco.* Hagamos un segmento que va del origen a $(0, 0, p)$
- *Ramas.* Añadimos tres segmentos más:
  - Un segmento de 1/3 de tamaño del original (es decir, del origen a (0,0,p/3)), rotado 45° en el eje X y trasladado $t_z = p$ (es decir, a la punta del tronco)

$$A_1 = M_{0;0;p}\ R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 120° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_2 = M_{0;0;p}\ R^z_{120^\circ}\ R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 240° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_3 = M_{0;0;p}\ R^z_{240^\circ}\ R^x_{45^\circ}$$

- Para cada uno de estos segmentos, vamos a volver a generar otros 3 segmentos, y así sucesivamente.

Modelo 3D de un árbol

- *Tronco.* Hagamos un segmento que va del origen a $(0, 0, p)$
- *Ramas.* Añadimos tres segmentos más:
  - Un segmento de 1/3 de tamaño del original (es decir, del origen a (0,0,p/3)), rotado 45° en el eje X y trasladado $t_z = p$ (es decir, a la punta del tronco)

$$A_1 = M_{0;0;p}\ R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 120° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_2 = M_{0;0;p}\ R^z_{120^\circ}\ R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 240° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_3 = M_{0;0;p}\ R^z_{240^\circ}\ R^x_{45^\circ}$$

- Para cada uno de estos segmentos, vamos a volver a generar otros 3 segmentos, y así sucesivamente.

Modelo 3D de un árbol

- *Tronco.* Hagamos un segmento que va del origen a $(0, 0, p)$
- *Ramas.* Añadimos tres segmentos más:
  - Un segmento de 1/3 de tamaño del original (es decir, del origen a (0,0,p/3)), rotado 45° en el eje X y trasladado $t_z = p$ (es decir, a la punta del tronco)

$$A_1 = M_{0;0;p}\ R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 120° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_2 = M_{0;0;p}\ R^z_{120^\circ}\ R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 240° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_3 = M_{0;0;p}\ R^z_{240^\circ}\ R^x_{45^\circ}$$

- Para cada uno de estos segmentos, vamos a volver a generar otros 3 segmentos, y así sucesivamente.

Modelo 3D de un árbol

- *Tronco.* Hagamos un segmento que va del origen a $(0, 0, p)$
- *Ramas.* Añadimos tres segmentos más:
  - Un segmento de 1/3 de tamaño del original (es decir, del origen a (0,0,p/3)), rotado 45° en el eje X y trasladado $t_z = p$ (es decir, a la punta del tronco)

$$A_1 = M_{0;0;p}\ R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 120° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_2 = M_{0;0;p}\ R^z_{120^\circ}\ R^x_{45^\circ}$$

  - Otro segmento así, rotado 45° en X y 240° en Z, y trasladado $t_z = p$

$$A_3 = M_{0;0;p}\ R^z_{240^\circ}\ R^x_{45^\circ}$$

- Para cada uno de estos segmentos, vamos a volver a generar otros 3 segmentos, y así sucesivamente.

Modelo 3D de un árbol

Sea $v_0 = (0, 0, 0, 1)$.

- *Tronco.* Sea $v_1 = (0, 0, p, 1) \rightarrow$ Segmento $\overline{v_0 \ v_1}$
- *Ramas nivel 2.* Sea $v_2 = (0, 0, p/3, 1)$
  - Segmento $\overline{(A_1 v_0) \ (A_1 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_2 v_0) \ (A_2 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_3 v_0) \ (A_3 v_2)}$
- *Ramas nivel 3.* Sea $v_3 = (0, 0, p/9, 1)$

$\overline{(A_1 A_1 v_0) \ (A_1 A_1 v_3)}$, $\overline{(A_1 A_2 v_0) \ (A_1 A_2 v_3)}$, $\overline{(A_1 A_3 v_0) \ (A_1 A_3 v_3)}$
$\overline{(A_2 A_1 v_0) \ (A_2 A_1 v_3)}$, $\overline{(A_2 A_2 v_0) \ (A_2 A_2 v_3)}$, $\overline{(A_2 A_3 v_0) \ (A_2 A_3 v_3)}$
$\overline{(A_3 A_1 v_0) \ (A_3 A_1 v_3)}$, $\overline{(A_3 A_2 v_0) \ (A_3 A_2 v_3)}$, $\overline{(A_3 A_3 v_0) \ (A_3 A_3 v_3)}$

Ejercicio: para $p = 1$, calcule los extremos de las ramas de nivel 2 y una de nivel 3.

Modelo 3D de un árbol

Sea $v_0 = (0, 0, 0, 1)$.

- *Tronco.* Sea $v_1 = (0, 0, p, 1) \rightarrow$ Segmento $\overline{v_0 \ v_1}$
- *Ramas nivel 2.* Sea $v_2 = (0, 0, p/3, 1)$
  - Segmento $\overline{(A_1 v_0) \ (A_1 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_2 v_0) \ (A_2 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_3 v_0) \ (A_3 v_2)}$
- *Ramas nivel 3.* Sea $v_3 = (0, 0, p/9, 1)$

$\overline{(A_1 A_1 v_0) \ (A_1 A_1 v_3)}$, $\overline{(A_1 A_2 v_0) \ (A_1 A_2 v_3)}$, $\overline{(A_1 A_3 v_0) \ (A_1 A_3 v_3)}$
$\overline{(A_2 A_1 v_0) \ (A_2 A_1 v_3)}$, $\overline{(A_2 A_2 v_0) \ (A_2 A_2 v_3)}$, $\overline{(A_2 A_3 v_0) \ (A_2 A_3 v_3)}$
$\overline{(A_3 A_1 v_0) \ (A_3 A_1 v_3)}$, $\overline{(A_3 A_2 v_0) \ (A_3 A_2 v_3)}$, $\overline{(A_3 A_3 v_0) \ (A_3 A_3 v_3)}$

Ejercicio: para $p = 1$, calcule los extremos de las ramas de nivel 2 y una de nivel 3.

Modelo 3D de un árbol

Sea $v_0 = (0, 0, 0, 1)$.

- *Tronco.* Sea $v_1 = (0, 0, p, 1) \to$ Segmento $\overline{v_0\ v_1}$
- *Ramas nivel 2.* Sea $v_2 = (0, 0, p/3, 1)$
  - Segmento $\overline{(A_1 v_0)\ (A_1 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_2 v_0)\ (A_2 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_3 v_0)\ (A_3 v_2)}$
- *Ramas nivel 3.* Sea $v_3 = (0, 0, p/9, 1)$

$\overline{(A_1 A_1 v_0)\ (A_1 A_1 v_3)}$, $\overline{(A_1 A_2 v_0)\ (A_1 A_2 v_3)}$, $\overline{(A_1 A_3 v_0)\ (A_1 A_3 v_3)}$
$\overline{(A_2 A_1 v_0)\ (A_2 A_1 v_3)}$, $\overline{(A_2 A_2 v_0)\ (A_2 A_2 v_3)}$, $\overline{(A_2 A_3 v_0)\ (A_2 A_3 v_3)}$
$\overline{(A_3 A_1 v_0)\ (A_3 A_1 v_3)}$, $\overline{(A_3 A_2 v_0)\ (A_3 A_2 v_3)}$, $\overline{(A_3 A_3 v_0)\ (A_3 A_3 v_3)}$

Ejercicio: para $p = 1$, calcule los extremos de las ramas de nivel 2 y una de nivel 3.

Modelo 3D de un árbol

Sea $v_0 = (0, 0, 0, 1)$.

- *Tronco.* Sea $v_1 = (0, 0, p, 1) \rightarrow$ Segmento $\overline{v_0\ v_1}$
- *Ramas nivel 2.* Sea $v_2 = (0, 0, p/3, 1)$
  - Segmento $\overline{(A_1 v_0)\ (A_1 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_2 v_0)\ (A_2 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_3 v_0)\ (A_3 v_2)}$
- *Ramas nivel 3.* Sea $v_3 = (0, 0, p/9, 1)$

$\overline{(A_1A_1v_0)\ (A_1A_1v_3)}$, $\overline{(A_1A_2v_0)\ (A_1A_2v_3)}$, $\overline{(A_1A_3v_0)\ (A_1A_3v_3)}$
$\overline{(A_2A_1v_0)\ (A_2A_1v_3)}$, $\overline{(A_2A_2v_0)\ (A_2A_2v_3)}$, $\overline{(A_2A_3v_0)\ (A_2A_3v_3)}$
$\overline{(A_3A_1v_0)\ (A_3A_1v_3)}$, $\overline{(A_3A_2v_0)\ (A_3A_2v_3)}$, $\overline{(A_3A_3v_0)\ (A_3A_3v_3)}$

Ejercicio: para $p = 1$, calcule los extremos de las ramas de nivel 2 y una de nivel 3.

Modelo 3D de un árbol

Sea $v_0 = (0, 0, 0, 1)$.

- *Tronco.* Sea $v_1 = (0, 0, p, 1) \rightarrow$ Segmento $\overline{v_0 \; v_1}$
- *Ramas nivel 2.* Sea $v_2 = (0, 0, p/3, 1)$
  - Segmento $\overline{(A_1 v_0) \; (A_1 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_2 v_0) \; (A_2 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_3 v_0) \; (A_3 v_2)}$
- *Ramas nivel 3.* Sea $v_3 = (0, 0, p/9, 1)$

$$\overline{(A_1A_1v_0) \; (A_1A_1v_3)}, \; \overline{(A_1A_2v_0) \; (A_1A_2v_3)}, \; \overline{(A_1A_3v_0) \; (A_1A_3v_3)}$$
$$\overline{(A_2A_1v_0) \; (A_2A_1v_3)}, \; \overline{(A_2A_2v_0) \; (A_2A_2v_3)}, \; \overline{(A_2A_3v_0) \; (A_2A_3v_3)}$$
$$\overline{(A_3A_1v_0) \; (A_3A_1v_3)}, \; \overline{(A_3A_2v_0) \; (A_3A_2v_3)}, \; \overline{(A_3A_3v_0) \; (A_3A_3v_3)}$$

Ejercicio: para $p = 1$, calcule los extremos de las ramas de nivel 2 y una de nivel 3.

Modelo 3D de un árbol

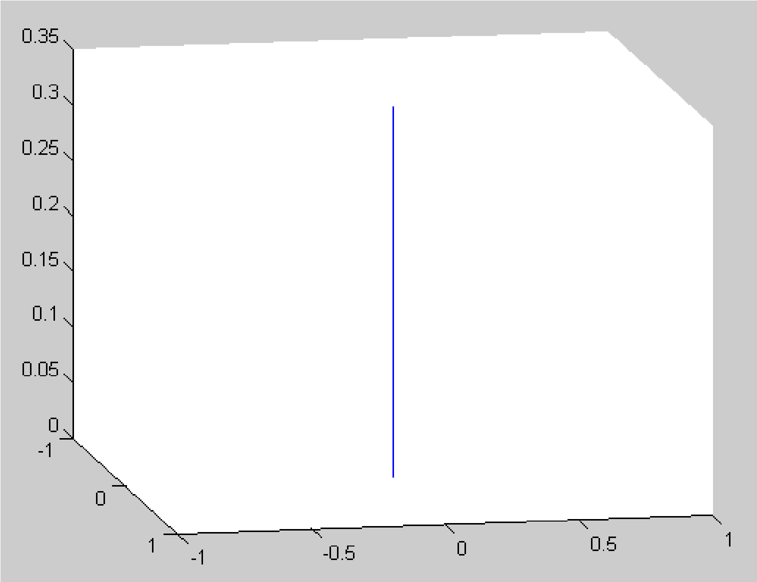
Sea $v_0 = (0, 0, 0, 1)$.

- *Tronco.* Sea $v_1 = (0, 0, p, 1) \rightarrow$ Segmento $\overline{v_0\ v_1}$
- *Ramas nivel 2.* Sea $v_2 = (0, 0, p/3, 1)$
  - Segmento $\overline{(A_1 v_0)\ (A_1 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_2 v_0)\ (A_2 v_2)}$
  - Segmento $\overline{(A_3 v_0)\ (A_3 v_2)}$
- *Ramas nivel 3.* Sea $v_3 = (0, 0, p/9, 1)$

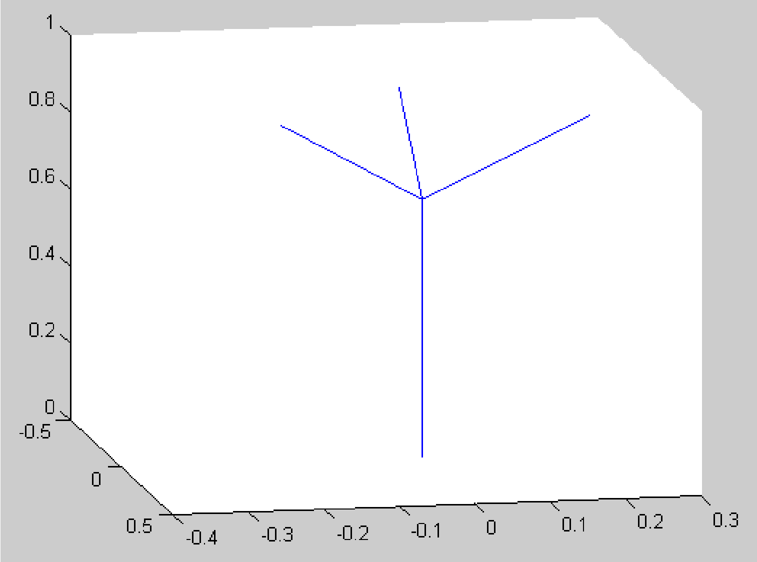
$$\overline{(A_1A_1v_0)\ (A_1A_1v_3)},\ \overline{(A_1A_2v_0)\ (A_1A_2v_3)},\ \overline{(A_1A_3v_0)\ (A_1A_3v_3)}$$
$$\overline{(A_2A_1v_0)\ (A_2A_1v_3)},\ \overline{(A_2A_2v_0)\ (A_2A_2v_3)},\ \overline{(A_2A_3v_0)\ (A_2A_3v_3)}$$
$$\overline{(A_3A_1v_0)\ (A_3A_1v_3)},\ \overline{(A_3A_2v_0)\ (A_3A_2v_3)},\ \overline{(A_3A_3v_0)\ (A_3A_3v_3)}$$

Ejercicio: para $p = 1$, calcule los extremos de las ramas de nivel 2 y una de nivel 3.

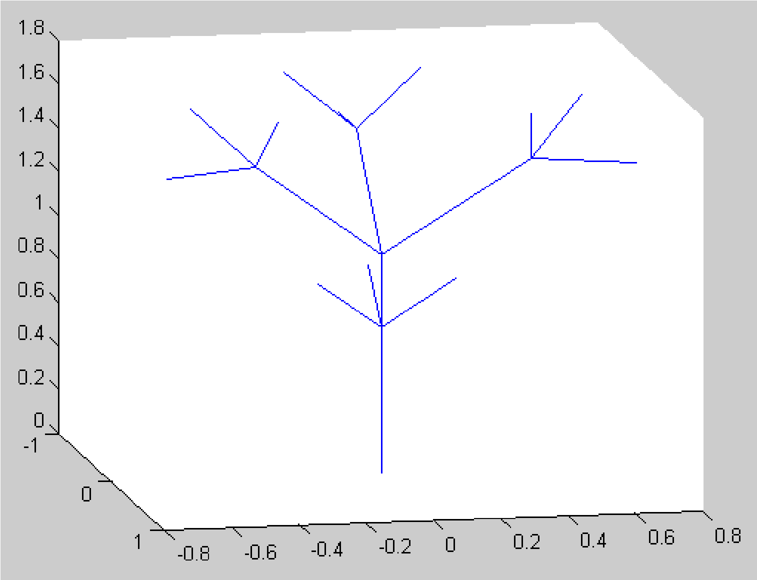
1 nivel



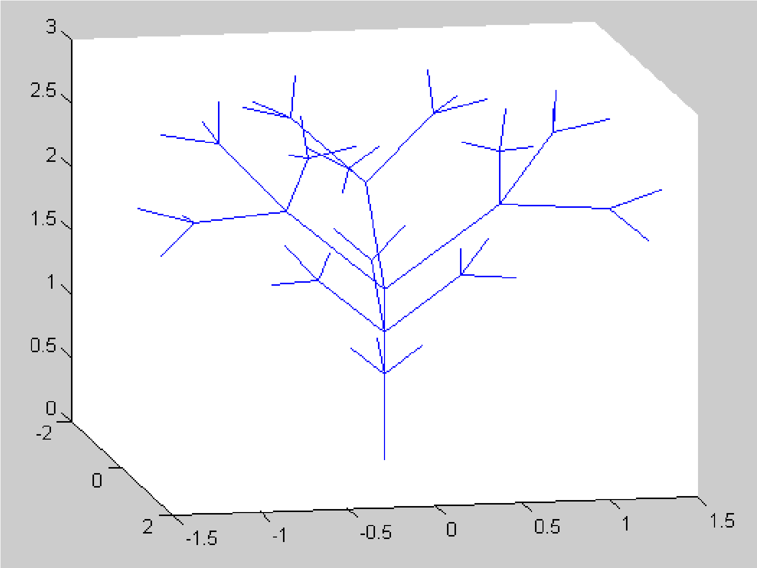
2 niveles



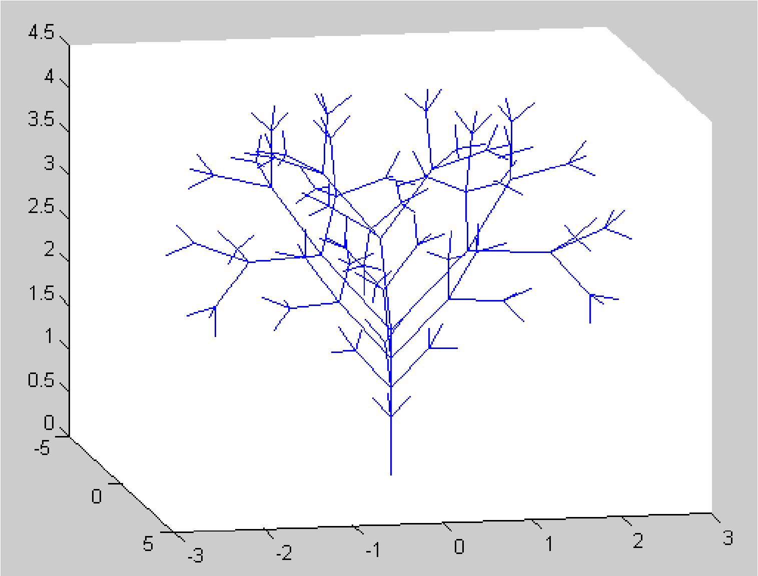
3 niveles



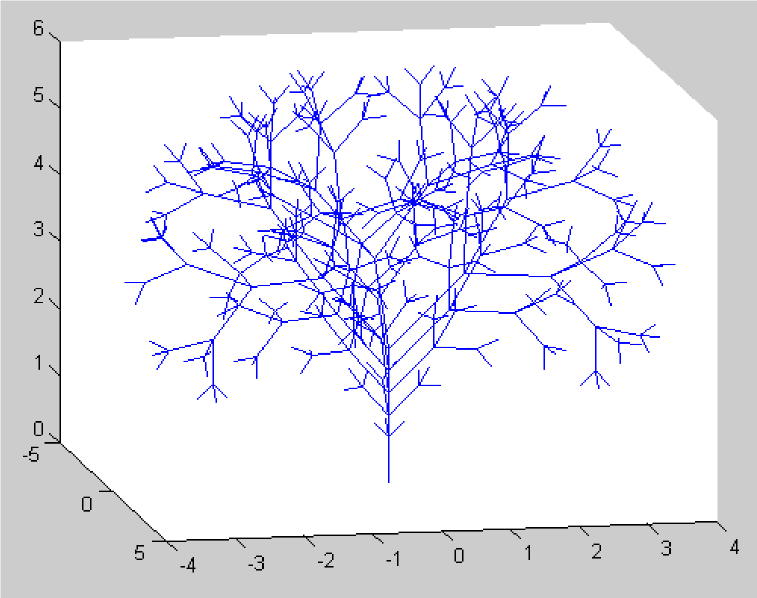
4 niveles



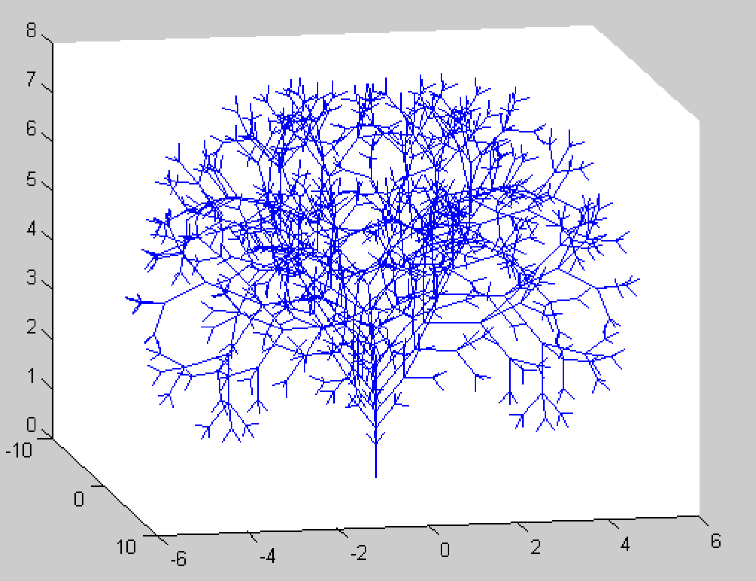
5 niveles



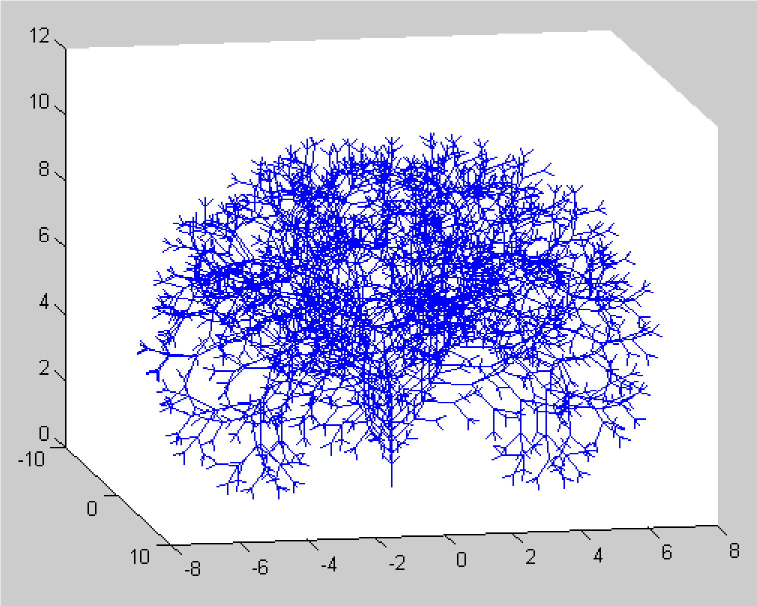
6 niveles



7 niveles



8 niveles



Sencillo de implementar (MATLAB)

```
function arbol(rec,tx,ty,tz,alfa,gamma,Aprev)
paso = rec/3;
if (rec == 0)
    return
end

% Calculamos las transformaciones
M = [1 0 0 tx ; 0 1 0 ty ; 0 0 1 tz ; 0 0 0 1];
alfa = alfa*pi/180; ca = cos(alfa) ; sa = sin(alfa);
RX = [1 0 0 0 ; 0 ca -sa 0 ; 0 sa ca 0 ; 0 0 0 1];
gamma = gamma*pi/180 ; cc = cos(gamma) ; sc = sin(gamma);
RZ = [cc -sc 0 0 ; sc cc 0 0 ; 0 0 1 0 ; 0 0 0 1];

% Hacemos la composicion
A = Aprev*M*RZ*RX;

% Calculamos la posicion de los puntos y graficamos el segmento
p1 = A*[0 0 0 1]';
p2 = A*[0 0 paso 1]';
plot3([p1(1) p2(1)], [p1(2) p2(2)], [p1(3) p2(3)])

% Llamamos recursivamente
arbol(rec-1, 0, 0, paso, 45, 0, A);
arbol(rec-1, 0, 0, paso, 45, 120, A);
arbol(rec-1, 0, 0, paso, 45, 240, A);
```