Universidad Nacional de Rosario

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Probabilidad y Estadística

Tp final

Alumno:

Demagistris, Santiago Ignacio

Agosto 2020

Indice

1 Ejercicio 1 **3**

2 Ejercicio 2 **5**

3 Ejercicio 3 **6**

4 Ejercicio 4 **9**

5 Ejercicio 5 **10**

6 Ejercicio 6 **13**

7 Ejercicio 7 **14**

8 Ejercicio 8 **16**

9 Simulaciones **18**
9.1 Ejercicio 1 18
9.2 Ejercicio 2 19
9.3 Ejercicio 3 20
9.4 Ejercicio 4 21
9.5 Ejercicio 6 22
9.6 Ejercicio 7 25

10 Exámen final **26**
10.1 Ejercicio 1 26
10.1.1 i) 26
10.1.2 ii) 26
10.2 Ejercicio 2 27
10.2.1 i) 27
10.2.2 ii) 27
10.3 Ejercicio 3 27
10.3.1 i) 27
10.3.2 ii) 27
10.4 Ejercicio 4 28
10.4.1 i) 28
10.5 Ejercicio 5 28
10.6 Ejercicio 6 28
10.6.1 i) 28
10.6.2 ii) 28
10.7 Ejercicio 7 28
10.7.1 i) 28
10.7.2 ii) 29
10.7.3 iii) 29

10.8 Ejercicio 8 29
10.9 Ejercicio 9 29
10.9.1 i) 29
10.9.2 ii) 29

Ejercicio 1

a) El espacio muestral sobre el cual estamos trabajando es S={0,1}, donde cara es 1 y cruz es 0.

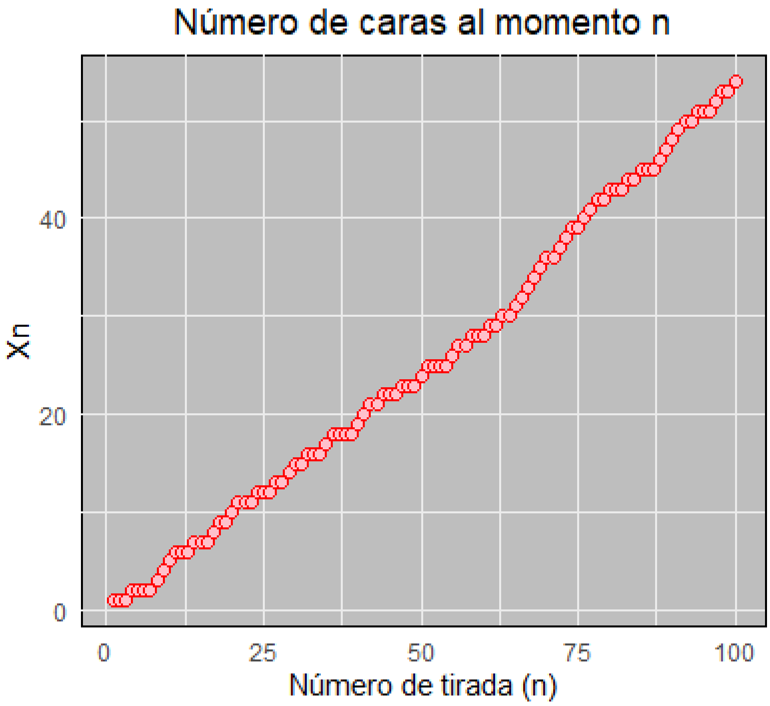


Figure 1.1: Tiradas de moneda

Sea A={"Obtener cara al lanzar la moneda"}. Podemos observar que se obtuvo un total de 54 caras en este proceso, por lo tanto P(A) $\simeq \frac{54}{100} = 0.54 = p$

b)

(P(X=1)). Sabemos que X={"Número de veces que ocurrió el evento A "} y que $X \sim Bi(n, 0.54)$ (siendo p =0.54 observado en la simulación). Por lo tanto $P(X = 1) = \binom{n}{1}(0.54)(0.46)^{n-1}$ y $E(X) = n0.54 = 54$.

c) Sea Y= Número de tiradas hasta que salgan 3 caras. $Y \sim Pascal$, por lo que

$$P(Y=k) = \binom{k-1}{3-1} 0.54^3 \ 0.46^{k-3} = \binom{k-1}{2} 0.54^3 \ 0.46^{k-3}$$

y E(Y) $= \frac{r}{p} = \frac{3}{0.54} \simeq 5.55$. Es decir que se espera que entre la 5ta y la 6ta tirada de la moneda obtengamos 3 caras.

d) Simulación moneda sesgada:

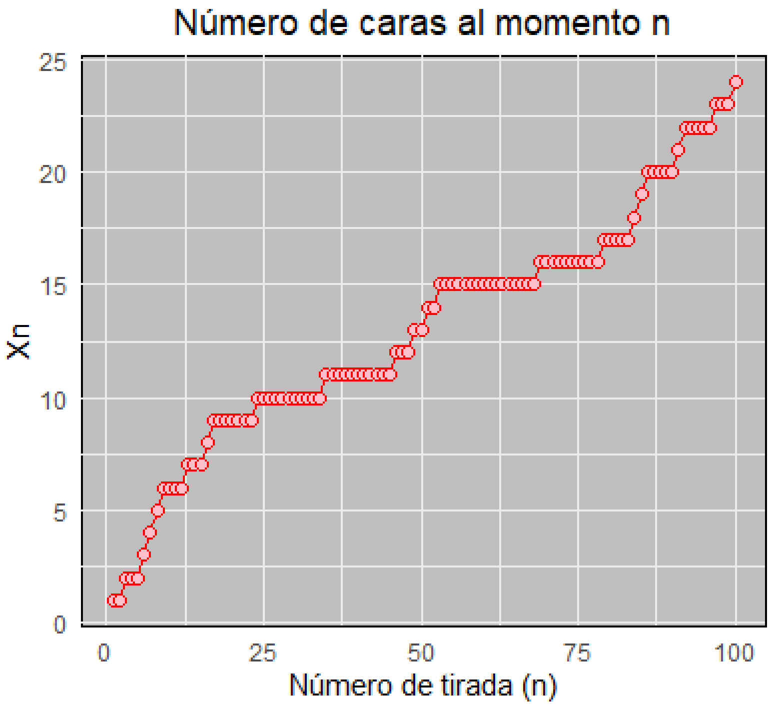


Figure 1.2: Tiradas de moneda sesgada

Al simular el proceso con n=100 obtuve en total 24 caras, por lo tanto podría aproximar $P(A) \simeq 0,24$. Por lo tanto $P(X=1) = \binom{n}{1}(0.24)(0.76)^{n-1}$ y $E(X) = n0.24$

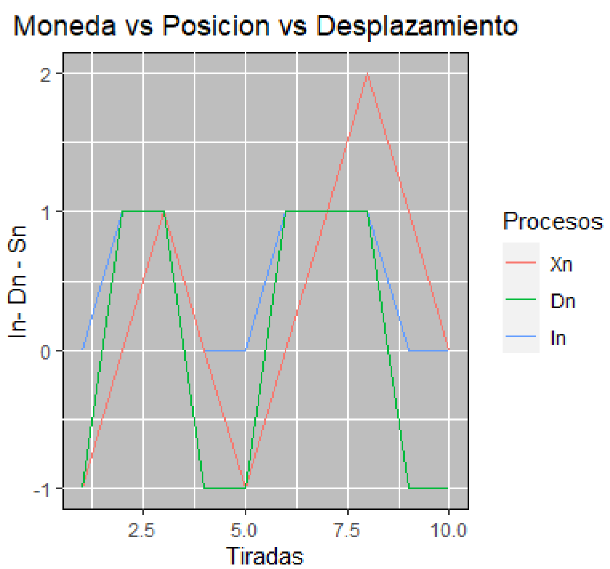
Ejercicio 2

Simulación.

La trayectoria descripta por Xn es causa del lanzamiento de la moneda (10 veces en este caso). Cada vez que salga cara en la moneda el sujeto se desplazará 1 unidad en el espacio y cuando salga cruz un 0. (Cara representado con 1 y cruz representado con 0). La decisión de desplazamiento esta dada por Dn, mientras que Xn solo describe la trayectoria, es decir la frecuencia acumulada de los resultados obtenidos.

Tabla de frencuencias

In	Dn	Sn
0	-1	-1
1	1	0
1	1	1
0	-1	0
0	-1	-1
1	1	0
1	1	1
1	1	2
0	-1	1
0	-1	0



Ejercicio 3

Análisis.

Este proceso se puede modelar como una cadena de Markov con S estados. Su matriz de transición sería de la forma:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ S \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 0 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1-p & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1-p & 0 & p & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1-p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Podemos observar que el grafo transición sería de la forma:

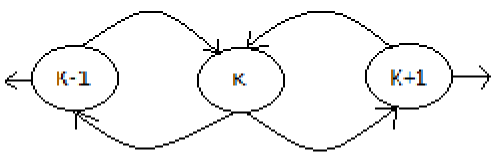


Figure 3.1: Grafo transición reducido

En donde los estados S y 0 son estados de absorción y los demás son de transición. Se puede intuir que todos los estados menos S y 0 van a estar comunicados por lo cual tenemos 3 clases de comunicación. Como la cadena presenta estados de absorción, la misma es una cadena absorbente.

Otra característica a observar es el hecho de que es una matriz no-regular, ya que tiene $P_{ij} = 0$ que se mantienen no importa cual sea el paso en el que se este observando.

Gracias a lo visto en teoría si acomodamos a la matriz P en su forma de descomposición canonica y aplicamos $lim_{n\to\infty} P^n$ obtendremos:

$$
lim_{n\to\infty} P^n = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & \dots & S & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ S \\ 0 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

Con lo cual se puede observar que la cadena eventualmente sera absorbida, ya sea porque el jugador ganó o perdió (esto dependerá de la probabilidad dada por las elecciones de p,k y S).

b) Para realizar la simulación usaré k=50, p=0.55, S=100, perder=0. El resultado obtenido fue el siguiente:

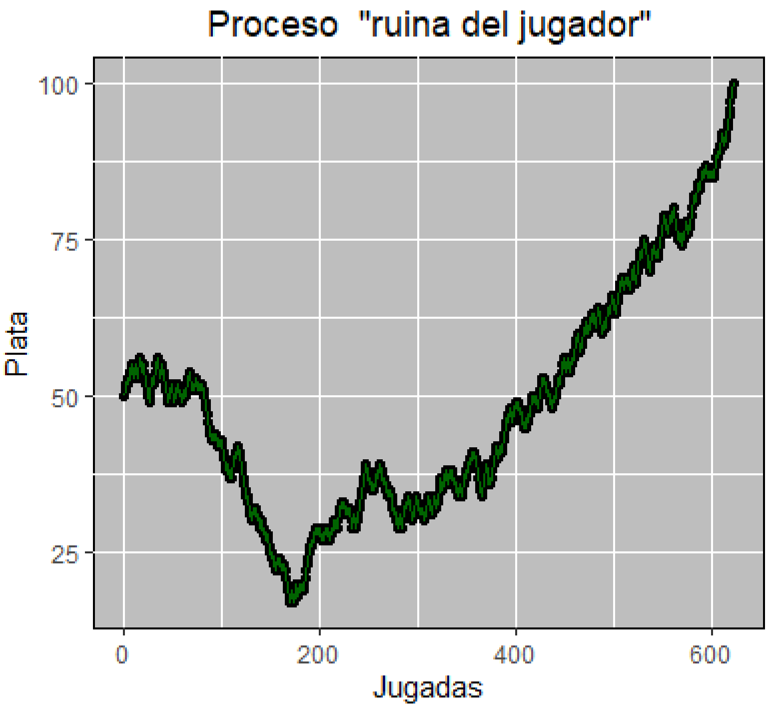


Figure 3.2: Trayectoria. Ruina del jugador

c) Con k=20, S=60, p=0.5001 y 1000 trayectorias obtuve una aproximación a la probabilidad de caer en la ruina de 0.678

Otro punto interesante a analizar es el tiempo esperado de absorción. Sea p=0.5, k = 2 y S = 5 la matriz de transición P es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el tiempo esperado de absorción necesitamos obtener F, la matriz fundamental:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad F = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Sea a_i el tiempo de absorción esperado, El número de transiciones desde i hasta un estado de absorción es simplemente la suma del número de transiciones desde i hacia cada uno de los estados de transición hasta que eventualmente llegue a un estado de absorción. El número esperado de pasos desde i hacia un estado de transición j es F_{ij}. A esto le sigue que,

$$a_i = \sum_{k \in T} F_{ik}$$

donde T son los estados de transicion

Entonces si queremos saber el tiempo de absorción desde el estado k , a_k =a_2= 6 (en las unidades que corresponda). Y se observa que:

Desde el estado 1 el tiempo esperado es de 4

Desde el estado 3 el tiempo esperado es de 6

Desde el estado 4 el tiempo esperado es de 4

Ahora si consideramos el mismo planteo anterior pero con p = 0.6 obtenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}; \quad F = (I - Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{325}{211} & \frac{285}{211} & \frac{225}{211} & \frac{135}{211} \\ \frac{190}{211} & \frac{475}{211} & \frac{375}{211} & \frac{225}{211} \\ \frac{100}{211} & \frac{250}{211} & \frac{475}{211} & \frac{285}{211} \\ \frac{40}{211} & \frac{100}{211} & \frac{190}{211} & \frac{325}{211} \end{pmatrix}$$

Entonces si queremos saber el tiempo de absorción desde el estado k , $a_k = a_2 = 5.99$ (en las unidades que corresponda). Y se observa que

Desde el estado 1 el tiempo esperado es de 4.6

Desde el estado 3 el tiempo esperado es de 5.26

Desde el estado 4 el tiempo esperado es de 3.10

Por lo que podemos observar que para una p =0.5, los tiempos esperados desde los estados tienen un comportamiento simétrico mientras que para p =0.6 no presenta simetría y si bien en el estado 2 los tiempos de esperas son similares vemos la diferencia en los estados 1 y 4 como era de esperarse.

Ejercicio 4

a) Simulación.

Al realizar la simulación observe 50000 repeticiones del experimento y obtuve un promedio de 21.08484 minutos.

b) Sea X={"Tiempo en que tarda el ratón en salir del laberinto"}, donde X va a depender de las decisiones del ratón, estas pueden ser "ii", "id", "d1". Las elecciones se desarrollan en dos etapas, en la primer etapa nos encontramos con que

$$P(\{"d1"\}) = 1/2$$

En el caso de elegir el camino hacia la izquierda (con una probabilidad de 1/2) nos encontramos en la segunda etapa en la cual:

$$P(\{"i2"\}|\{"i1"\}) = 1/3$$

$$P(\{"d2"\}|\{"i1"\}) = 2/3$$

De donde obtenemos que

$$P(\{"ii"\}) = P(\{"i2"\} \cap \{"i1"\}) = P(\{"i2"\}|\{"i1"\})P(\{"i1"\}) = 1/31/2 = 1/6$$

$$P(\{"id"\}) = P(\{"d"\} \cap \{"i1"\}) = P(\{"d"\}|\{"i1"\})P(\{"i1"\}) = 2/31/2 = 2/6 = 1/3$$

Podemos observar que las posibles elecciones del ratón son "ii", "id" y "d". Por lo cual $E(X) = P(\{"ii"\})E(X|"ii") + P(\{"id"\})E(X|"id") + P(\{"d1"\})E(X|"d1")$ dónde

$$\begin{cases} E(X|"ii") &= 2 \\ E(X|"id") &= E(X)+5 \\ E(X|"d1") &= E(X)+3 \end{cases}$$

Por lo tanto

E(X) = 1/6 2 + 2/6 (E(X) + 5) + 1/2 (E(X) + 3)

= 5/6 E(X) + 7/2

⇒ E(X) = 21

Este resultado concuerda con el de la simulación.

Ejercicio 5

a) La matriz de transición P es no-regular. Esta cadena de Markov presenta 4 clases de comunicación (una por cada estado). El estado M es absorbente, por lo cual la cadena de Markov es absorbente, los demás estados son de transición.

b) Para n=10 pasos obtenemos la matriz P^n, dónde P_{ij}^n representa la probabilidad de llegar a j desde i en n pasos.

$$P^{10} \simeq \begin{pmatrix} 0.99004 & 0.00969 & 0.000214 & 0.00005069 \\ 0 & 0.94159 & 0.04078 & 0.0176248 \\ 0 & 0 & 0.425037 & 0.5749629 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Partiendo desde un estado luego de 10 unidades de observación en la evolución de esta persona podemos observar:

"Suceptible". **Suceptible.** Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto siga en su estado de suceptibilidad de 0.99004, luego de 10 unidades de observación.

HIV. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga HIV de 0.00969, luego de 10 unidades de observación.

SIDA. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.000214, luego de 10 unidades de observación.

Muerto. Partiendo desde suceptible hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.00005069, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto es suceptible, en 10 unidades de observación, es altamente probable que se mantenga en esta condicion.

"HIV". **Suceptible.** Partiendo desde HIV no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado "suceptible" , luego de 10 unidades de observación.

HIV. Partiendo desde HIV hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condicion de 0.94159, luego de 10 unidades de observación.

SIDA. Partiendo desde HIV hay una probabilidad de que el sujeto contraiga SIDA de 0.04078, luego de 10 unidades de observación.

Muerto. Partiendo desde HIV hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.0176248, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto esta diagnosticado con HIV, tiene altas probabilidades de mantener su condición y no puede librarse de su enfermedad.

"SIDA". **Suceptible.** Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de "suceptibilidad" , luego de 10 unidades de observación.

Suceptible. Partiendo desde SIDA no hay una probabilidad de que el sujeto vuelva al estado de "HIV" , luego de 10 unidades de observación.

SIDA. Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto se mantenga en su condicion de 0.425037, luego de 10 unidades de observación.

Muerto. Partiendo desde SIDA hay una probabilidad de que el sujeto muera a causa de la enfermedad de 0.5749629, luego de 10 unidades de observación.

Por lo tanto si el sujeto esta diagnosticado con SIDA, tiene un 57% de morir luego de 10 unidades de observación. No puede volver a la condición de HIV, ni a la de suceptible, mientras que se puede mantener con SIDA con una probabilidad de 0.425037% .

Por otro lado... si esta muerto... bueno, digamos que es el estado absorbente por excelencia.

c) Sabemos que

$$Q = \begin{pmatrix} 0.999 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0.994 & 0.006 \\ 0 & 0 & 0.918 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Y por lo tanto,

$$F = (I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & 0 & \frac{500}{41} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Donde F es la matriz fundamental, en la cual F_{ij} es el número esperado de visitas a j dado que la cadena comienza en i. Por lo tanto, si iniciamos en el estado

"Suceptible" el número esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 1178.862

"HIV" el número esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 178.862

"SIDA" el número esperado de pasos para llegar al estado de muerte a causa de la enfermedad es de 12.19

Cada uno de los resultados obtenidos de acuerdo al estado desde el que se comienza a contabilizar, es el promedio de unidades de observación para que la persona llegue al estado de muerte.

d) Para la búsqueda de la distribución estacionaria utilizaré la técnica vista en la teoría. Busco un vector x=(x1,x2,x3,1) tal que

$$xP = x$$

Por lo cual obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

(1) $x_1 0.999 + x_2 0 + x_3 0 + 0 = x_1$

(2) $x_1 0.001 + x_2 0.994 + x_3 0 + 0 = x_2$

(3) $x_1 0 + x_2 0.006 + x_3 0.918 + 0 = x_3$

(4) $x_1 0 + x_2 0 + x_3 0.082 + 1 = 1$

(4) $\Rightarrow X_3 = 0$

(4)(3) $\Rightarrow X_2 = 0$

(4)(3)(2) $\Rightarrow X_1 = 0$

Se puede observar que las componentes en x suman 1 por lo tanto $x = \pi$ es la distribución estacionaria de esta cadena de Markov.

e) Al ser una cadena absorbente tenemos que:

$$\text{R=}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.082 \end{pmatrix} \qquad F = (I-Q)^{-1} = \begin{pmatrix} 1000 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & \frac{500}{3} & \frac{500}{41} \\ 0 & 0 & \frac{500}{41} \end{pmatrix} \qquad FR = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$lim_{n\to\infty} P^n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \text{(I-Q)}^{-1}R \\ \hline 0 & \text{I} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto esta cadena tiene distribución límite.

Ejercicio 6

Análisis.

Gracias al grafico de transición se puede observar que, suponiendo que desde g se puede ir a cualquier estado:

(1) a y f se comunican entre sí.

(2) a y e se comunican entre sí.

(3) e y g se comunican entre sí.

(4) f y e se comunican entre sí. (transitividad (1) (2))

(5) f y g se comunican entre sí. (transitividad (3) y (4))

(6) Como todos los estados van hacia f y f se comunica con g, el cual puede ir a todos los estados, entonces todos los estados están comunicados entre sí. (por transitividad)

(7) Esta cadena de Markov presenta una única clase de comunicación. (6)

(8) Esta cadena de Markov es irreducible. (7)

(9) Tiene una cantidad finita de estados

(10) Todos los estados son recurrentes. (8) (9)

(11) Como $P_{77} > 0$ y (7) entonces la cadena es aperiódica.

(12) Esta cadena de Markov es ergódica. (9) (8) (11)

(13) Tiene una única distribución estacionaria. (8)

(14) Tiene una distribución límite (12)

a) El modelado de este PageRank como cadena de Markov, gracias a la suposición de que los enlaces de hipertextos se eligen de manera aleatoria y que el usuario se mueve de página en página también de manera aleatoria sumado al gráfico de transición, se puede reconstruir la matriz de transición P:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

d,c) Por medio de la simulación obtuve el siguiente vector de frecuencias relativas : [0.25, 0.16, 0.04, 0.06, 0.10, 0.34, 0.05]. Por lo cual con n=100 suponemos que el rango de las páginas a,b,c...,g corresponden con las posiciones desde 1 a 7 del vector obtenido.

Ejercicio 7

Análisis.

Por definicion sabemos que un proceso de conteo $(N_t)t \geq 0$ es una colección de variables aleatorias enteras y no negativas tal que si $0 \leq s \leq t; entonces Ns \leq Nt$. Para que un proceso de conteo sea un proceso de Poisson con parámetro λ debe cumplir con:

(1) $N_0 = 0$

(2) Para todo t> 0, N_t tiene una distribución de Poisson con parámetro λt.

(3) **Incrementos estacionarios.** Para todo s,t> $0, N_{t+s} - N_s$ tiene la misma distribución que N_t. Esto es

$$P(N_{t+s} - N_s = k) = P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!},\ para\ k = 0, 1, 2...$$

(4) **Incrementos independientes.** Para $0 \leq q < r \leq s < t,\ N_t - N_s$ y $N_r - N_q$ son variables aleatorias independientes.

a) Para poder trabajar esta situación como proceso de Poisson, establezco que X_n= cantidad de mensajes en el intervalo (0,n]

1. $N_0 = 0 =$ "10 am". A las 10 am tengo 0 mensajes recibidos,t=1 equivale a las 11 am y asi sucesivamente.

2. Para todo t> 0, N_t tiene una distribución de Poisson con parámetro λt. Es decir, el número de mensajes para toda unidad de tiempo t mayor a las 10 am tiene una distribución de Poisson con parámetro λt.

3. Para todo s,t> $0, N_{t+s} - N_s$ tiene la misma distribución que N_t. Es decir, la distribución del número de mensajes en el intervalo de tiempo (s,t] es la misma que el número de mensajes en el intervalo de tiempo (0,t].

4. Para $0 \leq q < r \leq s < t,\ N_t - N_s$ y $N_r - N_q$ son variables aleatorias independientes. Es decir, dados dos intervalos de tiempo disjuntos (s,t] y (q,r], los mensajes recibidos en cada intervalo son independientes entre sí.

   Sabemos que Juan recibe 10 mensajes por hora, por lo tanto $\lambda = 10$ (tiempo en horas) . Sea N_t el número de mensajes que Juan recibe al tiempo t, como el análisis comienza desde las 10am t=0 equivale a las 10 am. Deseamos hallar la probabilidad $P(N_2 = 18, N_7 = 70) = P(N_2 = 18, N_7 - N_2 = 52)$, ya que a las 12am transcurrieron 2 horas, a las 17hs transcuerrieron 7 y la cantidad de mensajes que deseamos observar en el intervalo (2,5] es de $N_5 - N_2$= 70 - 18 = 52. Como estos intervalos de tiempo son disjuntos ((0,2],(2,5]) entonces $N_2 y N_5$ son variables aleatorias independientes. Por lo tanto, $P(N_2 = 18, N_7 - N_2 = 52) = P(N_2 = 18)P(N_7 - N_2 = 52) = P(N_2 = 18)P(N_5 = 52) = \frac{e^{-20}(20)^{18}}{18!} \frac{e^{-50}(50)^{52}}{52!} = 0.004481022$

b) Con un $\lambda = 10$ (10 mensajes por hora) y T=1000 con clases generadas por 50 subdivisiones obtuve el siguiente histograma, el cual se asemeja mucho en comportamiento a la ley teórica.

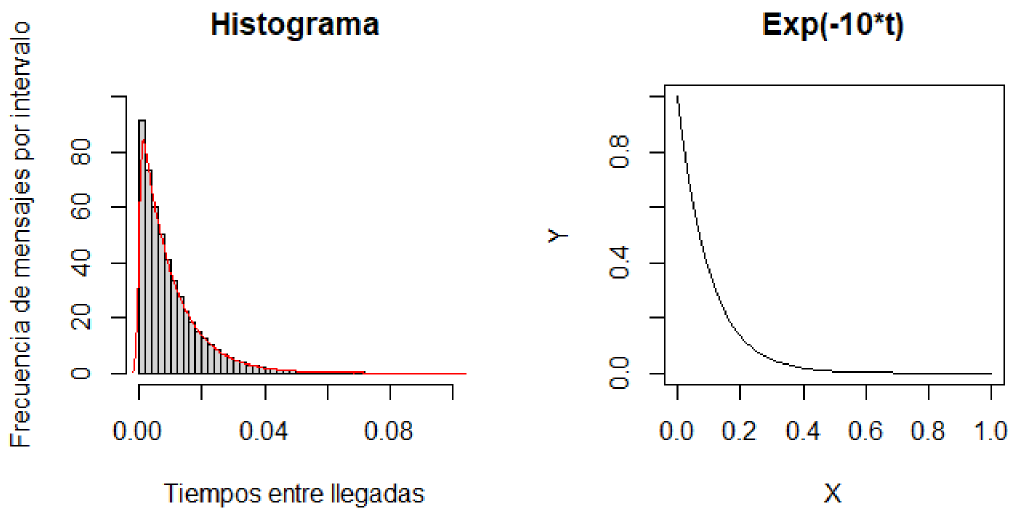


Figure 7.1:

Ejercicio 8

Análisis.

Dada la matriz de transición de esta cadena de Markov y observando su distribución luego de 3 semanas obtenemos que:

$$P^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{32} & \frac{61}{286} & \frac{885}{2288} & \frac{1019}{4576} & \frac{167}{1144} \\ \frac{4387}{237952} & \frac{11964081}{34027136} & \frac{5400719}{17013568} & \frac{3203451}{17013568} & \frac{2113687}{17013568} \\ \frac{3087}{146432} & \frac{5128733}{20939776} & \frac{3700267}{10469888} & \frac{2425947}{10469888} & \frac{1558587}{10469888} \\ \frac{579}{25168} & \frac{1591501}{7198048} & \frac{633335}{1799512} & \frac{1898595}{7198048} & \frac{504509}{3599024} \\ \frac{885}{36608} & \frac{1268269}{5234944} & \frac{911497}{2617472} & \frac{152189}{654368} & \frac{399807}{2617472} \end{pmatrix}$$

Como todas las entradas de esta matriz de transición son positivas, la matriz de transición es regular.

(1) La matriz de transición es regular.

(2) La cadena de Markov tiene una distribución límite, la cual es la única distribución estacionaria. (1)

(3) La cadena de Markov es ergodica. (1)

(4) La cadena de Markov es finita.

(5) La cadena de Markov es irreducible y aperiodica. (3)

(6) La cadena de Markov tiene una unica clase de comunicacion. (5)

(7) Todos los estados son recurrentes. (4) (5)

a) Dada la distribución inicial π_0, y la matriz de transición P, luego de dos semanas nos encontramos con la siguiente probabilidad de ataques a los puertos:

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{8}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\pi_0 P^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Los puertos con menos probabilidad de ser atacados son el 135 y 445, mientras que el que tiene más probabilidad de ser atacado es el 139. Se puede observar que el puerto 80 no tiene posibilidad de ser atacado.

b) Por lo visto en la teoría si una matriz de transición de una cadena de Markov es regular, entonces la cadena tiene una distribución límite, la cual es la única distribución estacionaria de la cadena. Por lo tanto si buscamos c y x de forma tal que $cxP = cx$ y $\sum_{i \in cx} cx_i = 1$, entonces obtendremos $\pi = cx$ (la distribución estacionaria). Gracias a la ayuda de un software puedo concluir que:

$$\pi =$$

$$\pi = (0,02146667, 0,2669333, 0,3434667, 0,2273333, 0,1408)$$

Es la distribución límite de la matriz P.

Simulaciones

9.1 Ejercicio 1

n = 100 Cantidad de tiradas

simulacion = simular(n)

simular < − function(n){

In < − tirarMoneda(n) (n tiradas de una moneda)

Xn < − cumsum(In) (número de caras al momento n - Frecuencia relativa acumulada -)

vectorTiradas < − c(1:n)

return (data.frame(Xn,vectorTiradas))
}

tirarMoneda< −function(n){ (Tirar moneda n veces)
return(sample(0:1,100,replace = TRUE)) (Vector de longitud n donde cada posicion tiene 1 o 0)

}

d)

tirarMonedaSesgada < − function(n){

return (sample(0:2,100, replace =TRUE)%%2) }

De esta manera trabajo sobre un espacio muestral $S_x\{0, 1, 2\}$, donde A={1}={"Obtuve cara"} yA^c={"Obtuve Cruz"}

9.2 Ejercicio 2

simular< −function(n){

In < − tirarMoneda(n) – Tiro n veces la moneda

Tiradas < − c(1:n) – Genero el eje X

Dn = variableAleatoria(In) – Obtengo la variable aleatoria Dn apartir de In

Xn = cumsum(Dn) – Obtengo el desplazamiento como la frecuencia relativa acumulada de Dn

proceso1 < − data.frame(In,Tiradas)

proceso2 < − data.frame(Dn,Tiradas)

$mi_d f < -data.frame($ ”Proceso1” = In, ”Proceso2” = Xn)

$return(mi_d f)$

}

tirarMoneda< −function(n){ – Tirar moneda n veces

return(sample(0:1,n,replace = TRUE))

}

variableAleatoria< − function(In){ – Obtengo Dn

Dn < − c()

for (i in In){

Dn < − c(Dn,(2 * i) - 1)

}

return (Dn)

}

9.3 Ejercicio 3

a) proceso < −function(plataInicial,S,p){

```
limiteInferior = 0

limiteSuperior = S

plataActual = plataInicial

ganar = p

perder = 1-ganar

vectorProbabilidad = c(ganar,perder)

trayectoria = c(plataInicial)

termino = FALSE

while (!termino) {

if(tirada(vectorProbabilidad) == ganar){

plataActual = plataActual + 1 }

else{

plataActual = plataActual - 1 }

trayectoria = c(trayectoria,plataActual)

if(plataActual == limiteSuperior){termino = TRUE}

if(plataActual == limiteInferior){termino = TRUE}

}

return (trayectoria[length(trayectoria)] == S)
}
```

tirada< −function(probabilidades){

probabilidades = sort(probabilidades)

intervaloAleatorio = 1000000 − Probabilidades de hasta 6 digitos despues del .

tirada = sample(1:intervaloAleatorio,1)

posicion = 1

for (i in probabilidades){

if (posicion == length(probabilidades)){

return (i) } if(tirada ¡= i*1000000){

return (i) Devuelvo la probabilidad que ocurrio }

posicion = posicion +1

} }

c)

probabilidadRuina < − function(plataInicial,S,p,n){

frecRuina = 0

for (i in c(1:n)){

if(!proceso(plataInicial,S,p)){

frecRuina = frecRuina+1

} } return (frecRuina/n)

}

9.4 Ejercicio 4

decisión < − function(x){

if (x==izquierda){

return (caminoIzquierdo(salidaRetorno()))

```
} else{

return (3 + decision(elegirCamino())) }

}


caminoIzquierdo < − function(x){

if (x==izquierda){

return (2)

} else{

return (5 + decision(elegirCamino()))
} }


elegirCamino < − function(){ return (sample(0:1,1)) }

salidaRetorno < − function(){

return (sample(0:2,1)) }


esperanza< −function(){

acumulador=0

for(i in (c(1:n))){

acumulador = acumulador + decision(elegirCamino())

} return (acumulador / n)

}
```

9.5 Ejercicio 6

```
P = matrix(nrow=7,ncol=7)

Xa = c(1/2,5,6)

Xb = c(1/3, 1, 3,6)

Xc = c(1/2,4,6)

Xd = c(1,6)

Xe = c(1/4,1,4,6,7)

Xf = c(1/2,1,2)

Xg = c(1/7,1,2,3,4,5,6,7)
```

```
P = cargarMatriz(P)

contadorPaginas = c(1:7)

probabilidad= simular(100)

simular< − function(n){


contadorPaginas= cerarVector(contadorPaginas)

paginaInicial = sample(1:7,1)  Inicio de manera aleatoria

print(”La pagina inicial es”)

print(paginaInicial)

paginaActual = paginaInicial

for (i in (1:n)){

paginaActual = surfear(paginaActual)

contadorPaginas[paginaActual] = contadorPaginas[paginaActual] + 1

print(”La pagina actual es”)

print(paginaActual)

print(”Contador”)

print(contadorPaginas) } return (contadorPaginas/n)

}


surfear < − function (x){


paginaActual = obtenerFila(x)

proximaPagina = paginaActual[elegirProximaPagina(paginaActual)]

return (proximaPagina) }


elegirProximaPagina < −function(x){


unoEntre = length(x)-1

return (sample(1:unoEntre,1)+1) }


cargarMatriz < − function(P){
```

```
P = cerarMatriz(P)
indiceFilas = 0
P = cargarFila(P,Xa,1)
P = cargarFila(P,Xb,2)
P = cargarFila(P,Xc,3)
P = cargarFila(P,Xd,4)
P = cargarFila(P,Xe,5)
P = cargarFila(P,Xf,6)
P = cargarFila(P,Xg,7)
return (P) }

cerarVector < − function(v){

for (i in (1:7)){
v[i] = 0 }
return (v) }

cerarMatriz < − function(P){

for (i in (1:7)){
for (j in (1:7)){
P[i,j] =0 } }
return (P) }

obtenerFila < − function(x){

if (x == 1){
return (Xa) }
if (x == 2){
return (Xb) }
```

```
if (x == 3){
return (Xc) }
if (x == 4){
return (Xd) }
if (x == 5){
return (Xe) }
if (x == 6){
return (Xf) }
if (x == 7){
return (Xg) }
}

cargarFila < − function(P,x,fila){

indiceFila = 0
for (i in x){
indiceFila = indiceFila + 1
if (indiceFila != 1){
P[fila,i] = x[1]
} }
return (P)
}
```

9.6 Ejercicio 7

```
lambda = 10
intervaloTiempo=1000
Tiempo = c(1:intervaloTiempo)
Xn = c()
tActual = 0

while (tActual <= intervaloTiempo)
tiempoLLegada =rexp(1,lambda)/lambda
tActual = tActual + tiempoLLegada
Xn = c(Xn,tiempoLLegada )
```

Exámen final

10.1 Ejercicio 1

10.1.1 i)

La matriz de transicion que se genera con esta suposicion es:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Para obtener el resultado supondria que el estado 3 es absorbente y trabajaria sobre la submatriz de estados {0,1,2,3}. Esta submatriz de transicion daria lugar a una cadena absorbente y buscaria su matriz fundamental F. Una vez obtenida la matriz fundamental F simplemente calcularia a_0, la suma de todas las esperas de los estados de transicion 0,1,2 hasta llegar a 3 desde el estado 0. (la fila 0 de F)

10.1.2 ii)

Este resultado seria mayor, ya que en este caso el contador volveria a 0 cuando salga una cruz. En esta situacion estariamos buscando el tiempo esperado de tiradas de monedas hasta que salgan tres caras consecutivas, mientras que en el tp no nos interesaria que salgan cruces entre las tres caras..

10.2 Ejercicio 2

10.2.1 i)

Sn si podria representarse como un proceso de numero de exitos. Sea Xn: numero de veces que obtenemos una cara en n lanzamientos de monedas una variable aleatoria distribuida binomialmente con parametro p. Siendo Xn=k, entonces Sn = k - (n-k), es decir sumamos k veces 1 y restamos (n-k) veces 1 obteniendo asi la trayectoria Sn. Por lo tanto para cada instancia Sn la distribucion de probabilidades puede ser observada desde la distribucion de probabilidades de Xn, es decir desde la distribucion binomial.

10.2.2 ii)

Sea Yn={Cantidad de caras obtenidas en n lanzamientos con probabilidad p}, podemos observar que Yn esta distribuida binomialmente con parametros n,p. Por lo tanto E(Yn) = np= 10 0.5 = 5. Vemos que Y_n^c es la cantidad de cruces obtenidas en n lanzamientos con probabilidad p, por lo que Y_n^c tambien es una variable aleatoria distribuida binomialmente con parametros np y por lo tanto E(Y_n^c)=5. Desde aqui podemos afirmar que E(Sn) = E(Yn) - E(Y_n^c) = 5 - 5 = 0.

10.3 Ejercicio 3

10.3.1 i)

$R_A : \{n \geq 0 | X_n = 0\}$

10.3.2 ii)

Para estimar la duracion promedio del juego por medio de la simulacion hay que realizar varios ensayos independientes y almacenar la cantidad de jugadas que se realizaron en cada uno. Todos con las mismas caracteristicas, es decir misma p,k y s. Luego de almacenar el resultado de cada ensayo (cantidad de jugadas hasta llegar a ruina o exito), sumar los valores obtenidos y dividir esta suma por la cantidad de ensayos. De esta forma obtendremos el tiempo promedio de duracion y si realizamos este proceso con un numero n de ensayos lo suficientemente grade llegaremos a la esperanza de duracion del juego para las caracteristicas elegidas.

10.4 Ejercicio 4

10.4.1 i)

Planteo que los estados serian {ii,id,d} y su matriz de transicion seria:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

donde en ii el raton salio del laberinto, id volvio a la primer etapa y d volvio a la primer etapa.

Para obtener el tiempo promedio para que el raton consiga la libertad buscaria la matriz fundamental F (estamos en una cadena de Markov absorbente) y luego calcularia a_d por ejemplo.

10.5 Ejercicio 5

En el apartado b del ejercicio calcule lo mismo para todas las combinaciones de estados, la unica diferencia es que ahi se muestra en 10 años, haria lo mismo pero en vez de calcular $P^1 0$ calcularia P^2 y observaria la entrada "Suceptible"-"VIH".

10.6 Ejercicio 6

10.6.1 i)

Para la simulacion esta propiedad simplifico el hecho de la manipulacion de las probabilidades entre puertos de acuerdo a las semanas en observacion. El trabajo de probabilidad hubiese sido mas complejo, ya que simplemente estableci e itere sobre los puertos solo con la probabilidad establecida por la cantidad de conecciones entre puertos (conecciones en el sentido de grafo de transicion).

10.6.2 ii)

En el tp hice un analisis de la cadena de Markov demostrando que tiene distribucion limite. Esta distribucion de acuerdo con mi simulacion esta conformada por los rangos de las paginas obtenidos, por lo cual P^∞ queda determinada como una matriz con sus filas iguales a [0.25, 0.16, 0.04, 0.06,0.10, 0.34, 0.05], suponiendo que P^{100} ya llego a su distribucion limite.

10.7 Ejercicio 7

10.7.1 i)

Estamos en presencia de 6 variables aleatorias exponenciales idependientes e identicamente distribuidas con parametro λ, $X_{t1}, X_{t2}, X_{t3}, X_{t4}, X_{t5}, X_t$. N_t es el numero de mensajes recibidos hasta el tiempo t y X_p es el tiempo que tardo en llegar el mensaje t desde el ultimo mensaje (o el primer mensaje en el caso de t1). El grafico nos informa que para ese proceso, el numero de mensajes que le llegaron hasta el tiempo t3 es de 3 mensajes y que en total le llegaron 5 mensajes en la simulacion. La sumatoria de los valores $X_{t1}, X_{t2}, X_{t3}, X_{t4}, X_{t5}, X_t$, nos daria el tiempo total en el cual se efectuo este proceso de conteo.

10.7.2 ii)

La distribucion que mejor se ajusta al tiempo entre llegadas es la distribucion exponencial.

10.7.3 iii)

Lo he realizado en el tp.

10.8 Ejercicio 8

Para los estados i y j, con n≥1, $P(X_n = j|X_0 = i)$ es la probabilidad de que la cadena que comenzó en i llegue a j en n pasos. Para $n \geq 1$, uno de los resultados centrales del cálculo de cadenas de Markov es que la matriz de transicion en n pasos es precisamente P^n, la enésima potencia de P. En el tp busque la matriz de transicion en 3 pasos.

10.9 Ejercicio 9

10.9.1 i)

Si deseo trabajar un histograma con intervalos de diferente amplitud, entonces en el eje de las Y ya no se representaria la frecuencia relativa o frecuencia absoluta del intervalo sino que seria la densidad del mismo (altura del rectangulo) esto se calcula como la frecuencia relativa sobre el ancho de la clase. Para el intervalo (25,35] sumo las frecuencias relativas de los intervalos (25,30] y (30,35] para lo cual la frecuencia relativa del intervalo (25,35] es de 5.14, por lo tanto el valor en el Eje Y para esta clase es 5.14/5 = 1.028. El area del histograma con eje Y = densidad es igual a 1, ya que este se calcularia como la suma del area de todos los rectangulos y el area de estos se calcula como $base \times altura = densidad \times amplitud\ intervalo = \frac{frec\ relativa}{amplitud\ intervalo} \times amplitud\ intervalo = frec\ relativa$, y la suma de todas las frecuencias relativas es igual a 1

10.9.2 ii)

El boxplot nos brinda informacion de que hay alturas que son outliers, lo cual afectaria al calculo de la media (promedio aritmetico), por lo tanto la media y la mediana diferirian. Este boxplot nos informa que el 50% de las alturas de los arboles observadas se encuentran entre 9 y 18 metros, un 25% entre 18 y 35 metros de los cuales las 3 alturas mayores son outliers en este set de datos y que el 25% restante se encuentra entre 1 y 9 metros.