Capítulo 5 - Autovalores y Autovectores (1ra. parte) [1]

Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

[1] Siguiendo *Linear Algebra and its applications*, G. Strang.

Outline

1. Introducción
2. Diagonalización

En este capítulo, el protagonismo lo tiene la ecuación matricial

$$Ax = \lambda x.$$

donde A es una matriz cuadrada $n \times n$. Observemos que la ecuación no es lineal, ya que $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in \mathbb{R}^n$ son variables.

Esta ecuación aparece en un sin número de problemas y su resolución no es sencilla en general. Más aún, veremos que con 5 variables el problema ya se torna complejo de resolver. Intentemos interpretar las soluciones de esta ecuación matricial.

Pensemos a A como tranformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, Ax es el vector imagen de x a través de A. Si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Ax = \lambda x$ estamos diciendo que A *no cambió la dirección de* x.

Esto es, resolver la ecuación $Ax = \lambda x$ es buscar el conjunto de vectores cuya dirección no varía por efecto de A.

- En $\mathbb{R}^3$, si A es la matriz correspondiente a la trasformación *rotación de* 45° *alrededor del eje* z, ¿qué vectores serían solución de la ecuación $Ax = \lambda x$? ¿Con qué valores de λ?.
- Si A es la transformación que nos da el simétrico de cada punto respecto al origen, ¿cómo son las soluciones de $Ax = \lambda x$? Ejercicio: ¿quién es A?
- En $\mathbb{R}^2$, mismas preguntas que en el primer ítem, con $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$Ax = \lambda x \Longleftrightarrow A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (2x_1 = \lambda x_1) \wedge (x_2 = \lambda x_2) \Longleftrightarrow (\lambda = 2 \wedge x_2 = 0) \vee (\lambda = 1 \wedge x_1 = 0).$$

Los vectores que participan de las soluciones son los de los ejes x e y. ¿Podríamos haberlo deducido geométricamente?

Propiedad: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $Ax = \lambda x$. Entonces, para todo $\alpha \in \mathbb{R}, A(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$.

Podemos restringirnos a buscar vectores solución $x \in \mathbb{R}^2$ con módulo (norma) 1, esto es, los puntos de la circunferencia centrada en el origen, de radio 1.

- (continuación) $A = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$ y trabajamos con

$$\theta \in [0, 2\pi]: \; x = \left[\begin{array}{c} cos\,\theta \\ sen\,\theta \end{array}\right] \longrightarrow Ax = \left[\begin{array}{c} 2\,cos\,\theta \\ sen\,\theta \end{array}\right]$$

¿Qué curva definen las imágenes a través de A de los puntos de módulo 1? Una elipse con semiejes de longitud 2 (en x) y 1 (en y). Así, A lleva un punto de la circunferencia en un punto de la elipse con la misma ordenada. Podemos *ver* que los puntos de la circunferencia que *no cambian su dirección por efecto de A* están sobre los ejes coordenados.

Veamos un ejemplo donde esta ecuación surge, en el contexto de las ecuaciones diferenciales.

Una de las ecuaciones diferenciales más sencillas es $v'(x) = a\,v(x)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Es fácil probar que todas las posibles funciones soluciones a esta ecuación diferencial son de la forma

$$v(x) = c\,e^{ax},\ c \in \mathbb{R}.$$

Si queremos una solución en particular, basta fijar su valor en $x = 0$ ya que $v(0) = c\,e^{a0} = c$.

Un *sistema lineal de ecuaciones diferenciales* de dos funciones incógnitas u, v tiene la forma

$$\begin{aligned} u'(x) &= a\ u(x) + b\ v(x) \\ v'(x) &= c\ u(x) + d\ v(x) \end{aligned}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, utilizando notación de *vectores de funciones*

$$w(x) = \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix}, \ w'(x) = \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix},$$

el sistema de ecuaciones diferenciales lineales toma la forma

$$\begin{array}{l} u'(x) = a\ u(x) + b\ v(x) \\ v'(x) = c\ u(x) + d\ v(x) \end{array} \to \begin{bmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} \to w'(x) = A\, w(x).$$

La similitud con la ecuación de una incógnita $v'(x) = a\, v(x)$, cuyas soluciones eran de la forma $c\, e^{ax}$, nos lleva a proponer *soluciones exponenciales*:

$$\begin{array}{c} u(x) = \alpha\ e^{\lambda x} \\ v(x) = \beta\ e^{\lambda x}. \end{array}$$

Queremos determinar $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ para que u y v así construidas sean solución del sistema.

Sustituyendo en el sistema tenemos:

$$\begin{array}{c} u'(x) = a\ u(x) + b\ v(x) \\ v'(x) = c\ u(x) + d\ v(x) \end{array} \rightarrow \begin{array}{rcl} \alpha\,\lambda\,e^{\lambda x} & = & a\,\alpha\,e^{\lambda x} + b\,\beta\,e^{\lambda x} \\ \beta\,\lambda\,e^{\lambda x} & = & c\,\alpha\,e^{\lambda x} + d\,\beta\,e^{\lambda x} \end{array}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{array}{rcl} \alpha\,\lambda & = & a\,\alpha + b\,\beta \\ \beta\,\lambda & = & c\,\alpha + d\,\beta \end{array} \longrightarrow A \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Esto es, conocida A matriz de coeficientes del sistema lineal de ecuaciones diferenciales con dos incógnitas, para conocer sus funciones soluciones debemos resolver el sistema algebraico $Ax = \lambda x$.

Este tratamiento se generaliza para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con n funciones incógnitas y las soluciones exponenciales de este sistema se construirán resolviendo un sistema del tipo $Ax = \lambda x$.

Más adelante veremos otras aplicaciones donde la ecuación $Ax = \lambda x$ juega un rol protagónico.

La ecuación $Ax = \lambda x$, con A una matriz $n \times n$, puede ser pensada como un caso particular de la ecuación $Tv = \lambda v$ para T un operador lineal de un espacio vectorial cualquiera en si mismo. Tenemos así la siguiente definición general.

Definición:
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y T una transformación lineal de V en si mismo. Entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* (o *valor propio*) *de* T si existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T, todo vector $v \neq 0 \in V$ tal que $Tv = \lambda v$ se denomina *autovector* (o *vector propio*) *de* T *asociado a* λ. El conjunto de todos los autovectores asociados a λ, conjuntamente con el vector nulo, se denomina *autoespacio de* T *asociado a* λ.

Cuando trabajamos con transformaciones lineales definidas por una matriz cuadrada A, hablamos de autovectores, autovalores y autoespacios *de la matriz*.

Lema: Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, T una transformación lineal de V en si mismo y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de T. Entonces, el autoespacio $V(T,\lambda)$ de T asociado a λ es un subespacio vectorial de V.

Prueba 1:
Verificar $v,w \in V(T,\lambda) \Longrightarrow \alpha v+\beta w \in V(T,\lambda)\ \forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{K}$. Ejercicio. $\square$

Prueba 2:
Observar que $V(T,\lambda) = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$ (en el autoespacio incluimos al vector nulo).
Además, si I es la tranformación identidad de V en V tenemos que, para todo $v \in V(T,\lambda)$, $Tv = \lambda Iv$. Equivalentemente, $(T-\lambda I)v = 0$.

Por lo tanto, $V(T,\lambda) = N(T-\lambda I)$, con $N(T-\lambda I)$ el espacio nulo de la transformación lineal $T-\lambda I$. Como el espacio nulo de una transformación lineal es un subespacio vectorial del dominio, $V(T,\lambda)$ es un subespacio vectorial de V. $\square$

Utilizando lo realizado en la prueba anterior, surge una caracterización de los autovalores de una transformación lineal.

Lema:
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y T una transformación lineal de V en si mismo. Entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de T si y solo si la transformación lineal $T - \lambda I$ no es un isomorfismo.

Prueba: Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ una autovalor de T. Entonces, existe $0 \neq v \in V(T,\lambda) = N(T - \lambda I)$. Por lo tanto $N(T - \lambda I) \neq \{0\}$ y $T - \lambda I$ no es inyectiva. Por lo tanto $T - \lambda I$ no es isomorfismo.
Sea ahora $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T - \lambda I$ no es isomorfismo. Entonces, $T - \lambda I$ no es monomorfismo (justificar). Por lo tanto, existe $0 \neq v \in N(T - \lambda I)$ o, equivalentemente, tal que $Tv = \lambda v$. Por lo tanto λ es un autovalor de T. $\square$

Corolario: Sea A una matriz $n \times n$. Entonces, λ es un autovalor de A si y solo si

$$det(A - \lambda I) = 0 \qquad (\textit{Ecuación característica de } A).$$

Veamos a qué tipo de problema nos lleva esta nueva caracterización de los autovalores de una matriz, a través de su ecuación característica.

Si $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, entonces $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$ y la ecuación característica es

$$det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(-3-\lambda) + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Los autovalores son las raíces del $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. En este caso tenemos una fórmula fácil para obtener las raíces $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$.

En general, los autovalores de una matriz A resultan ser las raíces del *polinomio característico* que se obtienen con el desarrollo del $det(A - \lambda I)$. Además, el autoespacio asociado a un autovalor λ está formado por los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $(A - \lambda I)v = 0$. Por lo tanto, el autoespacio no es otra cosa que $N(A - \lambda I)$.

En el ejemplo, con $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, para $\lambda_1 = -1$, buscamos

$$N(A+I) = N\left(\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right).$$

Este espacio resulta ser el generado por (el autovector) $x^1 = (1,1)^T$.

Trabajando similarmente con el autovalor $\lambda_2 = 2$, resulta que $N(A-2I)$ es el espacio generado por (el autovector) $x^2 = (5,2)^T$.

Como el polinomio característico de una matriz $n \times n$ tendrá grado n y, por lo tanto, para $n \geq 5$, ya no tenemos fórmulas cerradas que nos permitan encontrar sus raíces (Galois).

Veremos algunos casos particulares de matrices donde el cálculo de sus autovalores no es tan complejo.

Ejemplos:

- Matriz diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}, \quad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}-\lambda \end{bmatrix},$$

$$det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(\frac{2}{5} - \lambda).$$

En general, A es una matriz diagonal $n \times n$, $A - \lambda I$ también lo es, con entradas en su diagonal $A_i^i - \lambda, i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, el polinomio característico de A *ya viene factorizado*:

$$det(A - \lambda I) = \prod_{i=1}^{n} (A_i^i - \lambda).$$

Los autovalores de una matriz diagonal A coinciden con los elementos de la diagonal de A, esto es, $\lambda_i = A_i^i$, $i = 1, \ldots, n$.

¿Quiénes son los autovectores?

Ejemplos:

- Matriz diagonal (continuación):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = \frac{2}{5}.$$

Buscamos

$$x^1 \in N(A - 3I) = N(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{13}{5} \end{bmatrix})$$

y

$$x^2 \in N(A - \frac{2}{5}I) = N(\begin{bmatrix} \frac{13}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

Podemos elegir $x^1 = (1,0)$ y $x^2 = (0,1)$.

Ejercicio: Probar que, si A es matriz diagonal $n \times n$, para todo $i = 1, \dots, n$, $x^i = e_i$ es un autovector asociado a $\lambda_i = A_i^i$.

Ejemplos:

- Matriz proyección sobre una recta:
  Recordemos que si $a \in \mathbb{R}^n$, $P = \frac{1}{a^T a}\, aa^T$ es la matriz proyección sobre *la recta* $< a >$.
  Veamos el caso $a = (1,-1)^T$. Tenemos que $< a >$ es la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen con pendiente -1. ¿Quiénes serían los vectores que no cambian su dirección al proyectarse sobre $< a >$? Veamos:

  $$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda_1 = 0, x^1 = (1,1)^T \text{ y } \lambda_2 = 1, x^2 = (1,-1)^T.$$

  Así, el autovalor nulo se corresponde con el vector que se proyecta sobre el origen de coordenadas y el autovalor 1, con el vector que se proyecta en sí mismo.

  Observación: ¿Qué significa que $\lambda = 0$ sea autovalor de una matriz A? A tiene un autovalor nulo si y solo si A es no inversible. En el ejemplo, P es una matriz 2×2 de rango 1, no inversible.

Ejemplos:

- Matriz proyección sobre una recta (continuación):
  Supongamos $a \in \mathbb{R}^n$, $P = \frac{1}{a^T a}\, aa^T$, la matriz proyección sobre *la recta* $< a >$.
  También en este caso, los autovalores serán $\lambda = 1$ (con autovector a que se proyecta sobre si mismo) y $\lambda = 0$ (con autovector en $N(P)$ que se proyecta sobre el vector nulo).

  Los autovalores son las raíces del polinomio característico de grado n y las raíces pueden tener multiplicidad mayor a 1. En este caso, $\lambda = 0$ tiene multiplicidad $n-1$ y coincide con la dimensión del espacio nulo de la matriz. Por lo tanto tenemos $n-1$ autovectores l.i. del autovalor $\lambda = 0$, que se proyectan sobre el vector nulo.

  Ejercicio: Encontrar el polinomio característico y 4 autovectores l.i. de la matriz proyección de $\mathbb{R}^4$ sobre $a = (1,1,0,-1)^T$.

Ejemplos:

- Matriz rotación en 90° en $\mathbb{R}^2$

  $$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K(x_1, x_2)^T = (-x_2, x_1)^T, \quad det(K - \lambda I) = \lambda^2 + 1.$$

  No hay autovalor en $\mathbb{R} \longrightarrow$ *Todo vector no nulo de $\mathbb{R}^2$ cambia de dirección bajo el efecto de una rotación*. Sin embargo, en las aplicaciones vamos a necesitar los autovalores $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ y los autovectores complejos. Tenemos:

  $$(K - \lambda I)x^1 = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-i)u - v \\ u - iv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

  Similarmente, $x^2 = (1, i)^T$.

  Aclaración: Cuando decimos que una matriz $n \times n$ tiene n autovalores, estamos pensando a $\mathbb{R}^n$ como un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$.

Ejemplos:(continuación)

- Matrices Triangulares.

  Ejercicio: Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.

Las matrices diagonales y triangulares son aquellas para las cuales es fácil encontrar sus autovalores. Lo mismo sucede cuando resolvemos un sistema lineal. Sin embargo, encontrar los autovalores de una matriz es un problema mucho más difícil que resolver un sistema lineal asociado a esa matriz.
Sería importante tener una forma de *transformar* una matriz a matriz diagonal *sin modificar sus autovalores*.
¡El método de eliminación de Gauss no sirve en este caso!.
Veremos más adelante qué matrices podemos *diagonalizar* y cuáles no.
Antes, presentamos algunas propiedades *bonitas* de los autovalores.

Recordemos: La *traza* de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal.

Teorema: Sea A una matriz $n \times n$ y $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ sus n autovalores. Entonces,

- $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} A_i^i = tr(A)$.
- $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$.

Prueba: Más adelante.

A partir de ahora todas las matrices son matrices cuadradas $n \times n$, con entradas reales o complejas.

Dada una matriz A, con autovalores $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, notamos con Λ a la matriz diagonal con λ_i el elemento de la diagonal de la fila i, $i = 1, \ldots, n$.

$$n = 3, \;\; \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Lema: Sean $x^i, i = 1, \ldots, n$, n autovectores l.i. de una matriz A y S, la matriz cuya columna i-ésima es x^i, $i = 1, \ldots, n$. Entonces, $S^{-1} A\, S = \Lambda$.

Prueba: La lineal independencia de los autovectores me aseguran que existe S^{-1}. Por lo tanto, solo basta probar que $AS = S\Lambda$. Probaremos la igualdad de las columnas de estas matrices. Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$.
La columna i-ésima de $S\Lambda$ es $\lambda_i x^i$. Por otro lado, la columna i-ésima de AS es $Ax^i = \lambda_i x^i$. $\square$

Los autovectores *diagonalizan* la matriz. A veces...

Definición: Decimos que A, matriz $n \times n$, es *diagonalizable* si existe una matriz inversible S tal que $S^{-1}AS$ es una matriz diagonal.

Llamamos *matriz diagonalizante de* A a toda matriz inversible S tal que $S^{-1}AS$ resulte matriz diagonal. Decimos que S *diagonaliza a* A.

Observación: La matriz *diagonalizante* S no es única.

Tenemos el siguiente resultado:

Teorema: A es diagonalizable si y solo si A tiene n autovectores l.i.. Más aún, $S^{-1}AS = D$ con D matriz diagonal si y solo si las columnas de S son n autovectores l.i. de A y $D = \Lambda$.

Prueba: Sea A diagonalizable y sean S y D tal que $S^{-1}AS = D$. Entonces, $AS = SD$.
Para $i = 1, \ldots, n$, si x^i es la columna i-ésima de S entonces Ax^i es la columna i-ésima de AS. Por otro lado, como D es diagonal, la columna i-ésima de SD es $D_i^i x^i$.

Prueba(continuación)
Como $AS = DS$, para todo $i = 1, \ldots, n$, $Ax^i = D^i_i x^i$. Por lo tanto D^i_i es un autovalor de A y correspondiente al autovector x^i de A.
Como S es inversible, sus columnas son n autovectores l.i. de A.

La recíproca ya fue probada anteriormente. $\square$

Tenemos entonces:

Corolario: Si S diagonaliza a las matrices A y B entonces A y B tienen los mismos autovectores.

Ejercicio: Si S diagonaliza a dos matrices A y B y $A \neq B$ entonces A y B no necesariamente tienen los mismos n autovalores.

Si una matriz $n \times n$ tiene n autovectores l.i. es diagonalizable. ¿Cuándo una matriz $n \times n$ tiene n autovectores l.i.?

Lema: (*a autovalores distintos le corresponden autovectores l.i.*)
Sean $\lambda_i, i = 1, \ldots, r$ autovalores distintos de una matriz A y x^i un autovector asociado a λ_i. Entonces $\{x^1, \ldots, x^r\}$ son vectores l.i..

Prueba: Sabemos que $x^i \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$, porque son autovectores. Probamos la lineal independencia por inducción en r. El caso $r = 1$ es trivial. Suponemos que la tesis es válida para $r = k$ autovectores y debemos probar su validez para $r = k+1$.

Sean $x^i, i = 1, \ldots, k+1$, autovectores de A correspondientes a $k+1$ autovalores diferentes, λ_i, $i = 1, \ldots, k+1$. Por hipótesis de inducción sabemos que $x^i, i = 1, \ldots, k$, son vectores l.i.. Supongamos que x^{k+1} es l.d. con x^i, $i = 1, \ldots, k$. Entonces, existen $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, no todos nulos, tales que

$$x^{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i. \tag{1}$$

Prueba: (continuación)
Premultiplicando (1) por A obtenemos

$$A\,x^{k+1} = \lambda_{k+1}\,x^{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A\,x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i\,x^i. \tag{2}$$

Por otro lado, premultiplicando (1) por λ_{k+1} obtenemos

$$\lambda_{k+1}\,x^{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\,\lambda_{k+1} x^i. \tag{3}$$

Igualando (2) y (3), resulta

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i\,x^i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{k+1}\,x^i. \tag{4}$$

Prueba: (continuación)
Equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1})x^i = 0. \tag{5}$$

Como los vectores $\{x^i : i = 1, \ldots, k\}$ son l.i. tenemos que, para todo $i = 1, \ldots, k$

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0.$$

Como $x^{k+1} \neq 0$, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $\alpha_j \neq 0$ (ver 1). Entonces, $\lambda_j - \lambda_{k+1} = 0$ y $\lambda_j = \lambda_{k+1}$, una contradicción.
Por lo tanto, los vectores $x^i, i = 1, \ldots, k+1$, son l.i.. $\square$

Por lo tanto, hemos probado:

Corolario: Si los n autovalores de A son diferentes, A es diagonalizable.

Observaciones:

- No todas las matrices son diagonalizables.

  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tiene como autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Por lo tanto, una matriz diagonalizante S de A debería ser una matriz inversible tal que $AS = S\Lambda = S0 = 0$. En caso de existir, $A = 0S^{-1} = 0$, una contradicción.

- No todas las matrices con autovalores con multiplicidad son no diagonalizables (o defectuosas).

  El ejemplo más claro es I_n, la matriz identidad $n \times n$ que es claramente diagonalizable (es matriz diagonal). En este caso, $\lambda = 1$ es el único autovalor, de multiplicidad n. Es fácil ver que cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ es un autovector de I_n. Por lo tanto I_n tiene n autovectores l.i. a pesar de no tener n autovalores diferentes.

Más observaciones (continuación):

- En el ejemplo de la matriz rotación en $\mathbb{R}^2$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad x^1 = (1,-i)^T, \quad x^2 = (1,i)^T.$$

Los autovalores son diferentes, ¿los autovectores son l.i.?

Ejercicio: Verificar que los autovectores (como vectores del espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$) son l.i..

Entonces,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}, \; \Lambda = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Ejercicio: Verificar que $S^{-1} K S = \Lambda$.