UNIVERSIDAD NACIONAL
DE ROSARIO

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Licenciatura en Matemática
Profesorado en Matemática
Licenciatura en Cs. de la Computación

Álgebra Lineal

Docentes:

Dra. Elina M. Mancinelli

Lic. Prof. Yanina P. Lucarini

Qlic. Brian N. Luporini

2do semestre - 2019

Página en blanco intencional

Álgebra Lineal

Docentes: E.M.Mancinelli, Y.P.Lucarini, B.N.Luporini

3 de octubre de 2019

Índice

1. Matrices - Determinantes - Sistemas Lineales **2**

1.1. Introducción . . . 2

1.2. Matrices y eliminación gaussiana . . . 2

Geometría de las ecuaciones lineales . . . 3

Gauss-Jordan . . . 12

2. Espacios vectoriales **13**

2.1. Introducción . . . 13

2.2. Ejemplos de espacios vectoriales . . . 14

2.3. Propiedades elementales de los espacios vectoriales . . . 15

2.4. Subespacios de un espacio vectorial . . . 16

2.5. Suma y suma directa de subespacios . . . 17

2.6. Espacio generado y base . . . 19

2.7. Espacio generado . . . 19

2.8. Independencia lineal . . . 19

2.9. Coordenadas . . . 25

3. Transformaciones lineales **28**

3.1. Definiciones y propiedades elementales . . . 28

3.2. El álgebra de las transformaciones lineales . . . 31

3.3. Representación de transformaciones lineales por matrices . . . 34

3.4. Funcionales lineales . . . 39

4. Espacios con producto interno **44**

4.1. Producto interno, longitud y ortogonalidad . . . 44

5. Autovectores y autovalores **52**

5.1. Ecuación característica . . . 54

5.2. Diagonalización . . . 55

5.3. Matrices triangulares superior . . . 58

6. Formas canónicas de Jordan **60**

6.1. Invariancia . . . 60

6.2. Descomposición en suma directa de invariantes . . . 61

6.3. Descomposición primaria . . . 62

6.4. Forma canónica de Jordan . . . 63

3. Transformaciones lineales

Recordemos que uno de los objetivos del Álgebra Lineal es caracterizar la solución de sistemas lineales, en el caso general de m ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

donde los coeficientes están en $\mathbb{K}$. El estudio de las transformaciones lineales y sus propiedades nos dan buenas herramientas para caracterizar las soluciones de sistemas lineales.

3.1. Definiciones y propiedades elementales

En esta sección V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Estudiaremos funciones de V en W con propiedades particulares.

Definición 3.1 *Una función $T : V \to W$ es llamada **lineal** si verifica*

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V \tag{4}$$

$$T(\alpha v) = \alpha T(u), \forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}. \tag{5}$$

*El conjunto de todas las funciones lineales de V en W se nota como $\mathcal{L}(V,W)$. Muchas veces se escribe Tu en lugar de $T(u)$. Se refiere frecuentemente a estas funciones como **transformaciones lineales**.*
*Si $V = W$, se escribe $\mathcal{L}(V,V) = \mathcal{L}(V)$ y se llama a $T \in \mathcal{L}(V)$ un **operador lineal sobre V**.*

Ejemplo 3.1

1. *La aplicación nula $0 : V \to V$ que asigna a todo elemento $v \in V$ el $0 \in W$ es lineal.*
2. *La identidad $I : V \to V$ definida por $Iv = v$ es lineal.*
3. *Consideremos $V = \mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de polinomios sobre $\mathbb{R}$ y la aplicación $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ derivación, definida por $T(p(x)) = p'(x)$.*
   Luego para dos polinomios $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, se tiene

   $$T(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = T(p(x)) + T(q(x)).$$

   De manera similar para $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene

   $$T(\alpha p(x)) = (\alpha p(x))' = \alpha p'(x) = \alpha T(p(x)),$$

   por lo tanto T es lineal.
4. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por $T(x,y) = (x - 2y, 3x + y)$. Luego para $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ se tiene*

   $$\begin{aligned} T((x,y) + (x',y')) &= T(x+x', y+y') = (x + x' - 2(y+y'), 3(x+x') + y + y') = \\ &= (x - 2y, 3x + y) + (x' - 2y', 3x' + y') = T(x,y) + T(x',y'). \end{aligned}$$

   Además para $\alpha \in \mathbb{R}$

   $$T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x - 2\alpha y, 3\alpha x + \alpha y) = \alpha(x - 2y, 3x + y) = \alpha T(x,y).$$

   por lo tanto T es lineal. Más aun cualquier aplicación $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por

   $$T(x_1, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n),$$

   con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ es lineal. Esto podríamos escribirlo considerando $A = (a_{ij})_{n \times m}$ como $Tx = xA$.

5. *No todas las funciones son lineales. Por ejemplo la exponencial* $f(x) = e^x$ *no es lineal pues* $e^{2x} \neq 2e^x$. *La función* $f(x) = x - 1$ *no es lineal pues* $f(x + y) = x + y - 1 \neq x - 1 + y - 1 = f(x) + f(y)$.

6. *Sea* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y* $V = C(\mathbb{R})$ *el espacio vectorial de todas las funciones continuas de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$. *Definimos* $T : V \to V$ *como*
$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$
Es decir a cada función continua f *le asignamos su función integral. Entonces* T *es una transformación lineal de* V *en* V.

Teorema 3.1 *Sean* V *un espacio vectorial de dimensión finita,* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *una base ordenada de* V. *Sea* W *un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$ *y* $w_1, \cdots, w_n \in W$. *Entonces existe una única transformación lineal* $T : V \to W$ *tal que* $T(v_i) = w_i$ *para* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Demos: Definamos la siguiente aplicación T sobre V. Para un $v \in V$, existe única n-upla $(x_1, \cdots, x_n)$ tal que $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, luego definimos
$$Tv = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n.$$
T está bien definida (a cada vector $v \in V$ le asigna un vector $Tv \in W$).
Veamos que T es lineal, sea $u = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Resulta
$$T(\alpha v+u) = T((\alpha x_1 + y_1)v_1 + \cdots + (\alpha x_1 + y_n)v_n) = (\alpha x_1 + y_1)w_1 + \cdots + (\alpha x_1 + y_n)w_n = \alpha T(v) + T(u).$$
Supongamos que existe otra transformación lineal $S : V \to V$ tal que $Sv_i = w_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Luego para el vector v se tiene
$$Sv = S(\sum_{i=1}^{n} x_iv_i) = \sum_{i=1}^{n} x_iS(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_iw = Tv.$$
demostrando así la unicidad. ∎

Observación 3.1 *a) Si* T *es una transformación lineal de* V *en* W, *entonces la imagen de* T *no sólo es un subconjunto de* W *sino que es es un subespacio de* W.
b) El conjunto de los vectores $v \in V$ *tales que* $Tv = 0$ *es un subespacio de* V.

Definición 3.2 *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal entre espacios vectoriales. Se define el* ***espacio nulo de*** T *o* ***núcleo de*** T *o* ***ker o kernel de*** T *al conjunto de vectores de* V *que son aplicados en el* $0 \in W$
$$null(T) = ker(T) = \{v \in V : Tv = 0\}.$$

Ejemplo 3.2 *Consideremos la transformación lineal derivación definida en el espacio de los polinomios* $V = \mathbb{R}[x]$, $T(p(x)) = p'(x)$. *Luego*
$$nul(T) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : Tp(x) = 0\} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) = cte\}.$$

Proposición 3.1 *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Luego* $nul(T)$ *es un subespacio vectorial de* V.

Demos: : Ejercicio ∎

Observación 3.2 *Recordemos que para una transformación lineal $T : V \to W$ se dice que es:*
i) ***inyectiva*** *si para todos $u, v \in V$, $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$.*
ii) ***sobreyectiva*** *si $img(T) = W$*
*iii)****biyectiva*** *si T es inyectiva y sobreyectiva.*

Proposición 3.2 *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Luego T es inyectiva si y solo si $nul(T) = \{0\}$.*

Demos: $\Rightarrow$) Supongamos T inyectiva. Como $nul(T)$ es un subespacio de V, sabemos que $0 \in V$. Supongamos que existe otro vector $v \in V$ tal que está en el núcleo de T. Luego $T(v) = 0 = T(0)$. Como T es inyectiva resulta $v = 0$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $nul(T) = 0$, sean $u, v \in V$ tal que $Tu = Tv$. Luego $0 = Tu - Tv = T(u - v)$, luego $u - v \in nul(T)$, i.e. $u = v$. ■

Definición 3.3 *Las transformaciones lineales entre espacios vectoriales son también llamadas* ***homomorfismos de espacios vectoriales*** *. El espacio $\mathcal{L}(V, W)$ también se nota como*

$$Hom_{\mathbb{K}}(V, W) = \{T : V \to W : T \, es, lineal\}.$$

Un homomorfismos $T : V \to W$ también es llamado:
i) ***Monomorfismo*** *si T es inyectivo.*
ii) ***Epimorfismo*** *si T es sobreyectivo.*
iii) ***Isomorfismo*** *si T es biyectivo.*
iv) ***Endomorfismo*** *si $V = W$.*
v) ***Automorfismo*** *si $V = W$ y T es biyectivo.*

Definición 3.4 *Si V es de dimensión finita se dice que la dimensión de la $img(T)$ es el* ***rango de T*** *.*

Teorema 3.2 *Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que $\dim(V)$ es finita. Luego*

$$rang(T) + dim(nul(T)) = \dim V.$$

Demos: Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ una base de $nul(T)$. Existen $v_{k+1}, \cdots, v_k$ vectores en V tales que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es base de V. Probaremos que $\{Tv_{k+1}, \cdots, Tv_n\}$ es una base de $img(T)$.
Los vectores $Tv_1, \cdots, Tv_n$ generan $img(T)$ y como $Tv_j = 0$ para $1 \leqslant j \leqslant k$, se tiene que $Tv_{k+1}, \cdots, Tv_n$ generan $img(T)$.
Para ver que son linealmente independientes, supongamos que existen escalares $c_i \in \mathbb{K}$ tales que

$$0 = \sum_{i=k+1}^{n} c_i(Tv_i) = \sum_{i=k+1}^{n} T(c_i v_i) = T(\sum_{i=k+1}^{n} c_i v_i) = 0.$$

Es decir que $u = \sum_{i=k+1}^{n} c_i v_i \in nul(T)$. Como $v_1, \cdots, v_k$ forman una base para $nul(T)$ luego existen escalares $b_i \in \mathbb{K}$ con $1 \leqslant i \leqslant k$ tales que $u = \sum_{i=1}^{k} b_i v_i$. Así

$$\sum_{i=1}^{k} b_i v_i - \sum_{i=k+1}^{n} c_i v_i = 0.$$

Como los $v_1, \cdots, v_n$ son *l.i.* resulta $b_1 = \cdots = b_k = c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$.
El hecho que $Tv_{k+1}, \cdots, Tv_n$ formen una base de $img(T)$ nos dice que $rang(T) = n - k$, como $\dim V = n$ y $\dim(nul(T)) = k$, demostramos el enunciado. ■

Teorema 3.3 *Si A es una matriz $m \times n$ con entradas en el campo $\mathbb{K}$ entonces $rang(A)$ por filas es igual al $rang(A)$ por columnas.*

Demos: Consideremos la transformación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{n+1}$ definida por $T(x) = Ax$. El espacio nulo de T es el espacio solución del sistema $Ax = 0$. La imagen de T es el conjunto de las matrices columnas $m \times 1$ y tales que $Ax = y$ tiene alguna solución x.
Si $A_1, \cdots, A_n$ son las columnas de A entonces

$$Ax = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n.$$

Por lo tanto la imagen de T es el subespacio generado por las columnas de A, vale decir que la imagen de T es el espacio columna de A.

$$rang(T) = rango\, por\, por\, columnas\, de\, A.$$

Así el Teorema 3.2 dice que si S es el espacio solución para $Ax = 0$, entonces

$$dim(S) + rango\ por\ columnas\ (A) = n.$$

Observemos que si R es una matriz escalonada reducida equivalente a A, con r filas no nulas, entonces $Rx = 0$ expresa a r de las incógnitas $x_1, \cdots, x_n$ en función de las restantes $(n-r)$ incógnitas. Esto es decir, si r es la dimensión del espacio fila de A, entonces el espacio solución S tiene una base que consiste en $n - r$ vectores:

$$dim(S) = n - rango\ por\ filas(A).$$

Luego surge lo que queríamos probar. ■

3.2. El álgebra de las transformaciones lineales

Teorema 3.4 *Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$. La función $(T + S)$ definida por*

$$(T + S)(v) = Tv + Sv,$$

es una transformación lineal de V en W.
Si $\alpha \in \mathbb{K}$, la función (αT) definida por

$$(\alpha T)(v) = \alpha(Tv),$$

es una transformación lineal de V en W. El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W junto a la suma y producto por escalares recién definidas, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. $(\mathcal{L}(V, W), \mathbb{K}, +, \cdot)$.

Demos: . $(T + S)(cv + u) = c(T + S)(v) + (T + S)(u)$, luego $T + S$ es una transformación lineal.
$(\alpha T)(cv + u) = c(\alpha T(v) + (\alpha T)(u)$, luego αT es una transformación lineal.
Para ver que $(\mathcal{L}(V, W), \mathbb{K}, +, \cdot)$ deben comprobarse los axiomas que definen un espacio vectorial. (Ejercicio). ■

Observación 3.3 *a) Notaremos a este espacio vectorial como $\mathcal{L}(V, W)$.*
b) $\mathcal{L}(V, W)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las funciones definidas de V en W.

Teorema 3.5 *Sea V un espacio n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ y sea W un espacio m-dimensional sobre $\mathbb{K}$. Luego $\mathcal{L}(V, W)$ es de dimensión finita y es de dimensión nm.*

Demos: Sean $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente. Para cada par de naturales (p, q), con $1 \leqslant p \leqslant n$ y $1 \leqslant q \leqslant m$ definimos la transformación lineal E^{qp} de V en W como sigue

$$E^{qp}(v_j) = \begin{vmatrix} 0 & si\ j \neq p, \\ w_q & si\ j = p \end{vmatrix} = \delta_{jp} w_q.$$

De acuerdo al Teorema **??**, existe una única transformación lineal de V en W que cumple estas condiciones. Veamos que las mn transformaciones E^{pq} forman una base para $\mathcal{L}(V, W)$.
Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Para cada $j, 1 \leqslant j \leqslant n$, sean $A_{1j}, \cdots, A_{mj}$ las coordenadas del Tv_j en la base ordenada B', es decir

$$Tv_j = \sum_{q=1}^{m} A_{qj} w_q.$$

Veamos que

$$T = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{qp} E^{qp}. \tag{6}$$

Sea U la transformación definida por el lado derecho de (6) entonces para cada j se tiene que

$$Uv_j = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{qp} E^{qp}(v_j) = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{qp} \delta_{jp} w_q = \sum_{q=1}^{m} A_{qj} w_q = Tv_j.$$

En consecuencia $U = T$.
Así (6) muestra que $E^{qp}, 1 \leqslant p \leqslant n, 1 \leqslant q \leqslant m$ generan $\mathcal{L}(V, W)$, falta probar que son independientes.
Si la transformación $U = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{qp} E^{qp}$ es la transformación cero, entonces $Uv_j = 0, \forall j$, luego $\sum_{q=1}^{m} A_{qj} w_q = 0$ y la independencia de los w_q implica que $A_{qj} = 0, \forall q, j$, como queríamos probar. ■

Teorema 3.6 *Sean V, W, Z espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, Z)$. Luego la composición $S \circ T$ definida por*

$$(S \circ T)(v) := (ST)(v) := ST(v) := S(T(v))$$

es una transformación lineal de V en Z, i.e. $ST \in \mathcal{L}(V, Z)$.

Demos: $(ST)(\alpha v + u) = (S(T(\alpha v + u)) = S(\alpha T(v) + T(u)) = \alpha S(T(v)) + S(T(u)) = \alpha(ST)(v) + (ST)(u)$. ■

Observación 3.4 *Si en el Teorema 3.6 consideramos $V = W = Z$, T, S son operadores lineales ($T \in \mathcal{L}(V, V)$) y también lo es ST. De este modo $\mathcal{L}(V)$ tiene definida una "multiplicación" dada por la composición. En este caso TS también está definida pero en general $ST \neq TS$.*
Notemos también que si T es un operador lineal sobre V, podemos componer a T con si mismo. Notaremos $T^2 := T \circ T = TT$ y en general $T^n := T \cdots T$ para $n \in \mathbb{N}$. Definimos $T^0 = I$ si $T \neq 0$.

Lema 3.1 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sean $S, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, luego vale:*
i) $IS = SI = S$.
ii) $S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$, $\quad (T_1 + T_2)S = T_1S + T_2S$
iii) $\alpha(ST_1) = (\alpha S)T = S(\alpha T)$.

Demos: Ejercicio ■

Ejemplo 3.3 *Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de un espacio vectorial V. Consideremos los operadores lineales E^{qp} que aparecen en la prueba del Teorema 2.4: $E^{qp}(v_j) = \delta_{jp}v_q$.*
Estos n^2 operadores lineales forman una base del espacio de operadores lineales sobre V, $\mathcal{L}(V)$.
A qué es igual la composición de E^{qp} con E^{sr} aplicado a un v_j

$$E^{sr}E^{qp}(v_j) = E^{sr}(\delta_{jp}v_q) = \delta_{jp}E^{sr}(v_q) = \delta_{jp}\delta_{rq}v_s,$$

es decir

$$E^{sr}E^{qp} = \begin{vmatrix} 0, & si\ r \neq q, \\ E^{sp}, & si\ q = r. \end{vmatrix}$$

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Vimos que si $A_j = [Tv_j]_{B'}$, $A = [A_1, \cdots, A_n]$, entonces $T = \sum_p \sum_q A_{qp}E^{qq}$.
Luego si $S = \sum_r \sum_s B_{sr}E^{sr}$ es otro operador $S \in \mathcal{L}(V)$, por el Lema **??** *se tiene que*

$$\begin{aligned} ST &= (\sum_r \sum_s B_{sr}E^{sr})(\sum_p \sum_q A_{qp}E^{qp}) = \\ &= \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s B_{sr}A_{qp}E^{sr}E^{qp} = \sum_p \sum_s \left(\sum_r B_{sr}A_{rp} \right) E^{sp} = \\ &= \sum_p \sum_s (BA)_{sp}E^{sp}. \end{aligned}$$

Así, el efecto de componer T con S equivale a multiplicar las matrices A y B.

Observación 3.5 *Recordemos que $T : V \to W$ es inversible si y sólo si existe $S : W \to V)$ tal que ST es la identidad en V y TS es la identidad en W.*
Si T es inversible la función S es única y se nota por T^{-1}. Más aun, T es inversible si y sólo si T es biyectiva.

Teorema 3.7 *Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si T es inversible, entonces su inverso T^{-1} es una transformación lineal de W en V.*

Demos: Sabemos que si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es inversible se tiene que $TT^{-1} = I_W$ y $T^{-1}T = I_V$.
Sean $w_1, w_2 \in W$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Sea $v_i = T^{-1}(w_i), i = 1, 2$, es decir que v_i es el único vector de V tal que $Tv_i = w_i$.
Como T es lineal se tiene que

$$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2) = \alpha w_1 + w_2.$$

Así $\alpha v_1 + v_2$ es el único vector de V que T envía a $\alpha w_1 + w_2$. Luego

$$T^{-1}(\alpha w_1 + w_2) = \alpha v_1 + v_2 = \alpha T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2),$$

luego T^{-1} es lineal. ■

Observación 3.6 *Supongamos que $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son inversibles. Entonces ST es inversible y $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$. Esta conclusión no requiere linealidad, sólo hay que chequear que efectivamente $T^{-1}S^{-1}$ es inversa a derecha e izquierda de ST.*

Observación 3.7 *Si T es lineal, entonces $T(v - w) = Tv - Tw$, luego $Tv = Tw$ si y sólo si $T(v - w) = 0$, esto simplifica la verificación de T inyectiva.*
Una transformación lineal T es no singular si $Tv = 0 \Rightarrow v = 0$, o sea si el espacio nulo de T es $\{0\}$.

Teorema 3.8 *Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Luego T es no singular si y sólo si T lleva a cada subconjunto l.i. de V en un subconjunto l.i. de W.*

Demos: $\Rightarrow$) Sea T no singular. Sea $S \subset V$, *l.i.*. Si $v_1, \cdots, v_k \in S$, entonces $Tv_1, \cdots, Tv_k$ son *l.i.* pues

$$0 = \alpha_1(Tv_1) + \cdots + \alpha_k(Tv_k) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k),$$

y como T es no singular

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

de donde surge que $\alpha_i = 0, \forall i$ pues S es *l.i.*.
$\Leftarrow$) Supongamos T lleva conjuntos *l.i.* en conjuntos *l.i.*. Sea $0 \neq v \in V$. Luego el conjunto $S = \{v\}$ es independiente y $\{Tv\}$ es independiente, por lo tanto $Tv \neq 0$. Esto muestra que $nul(T) = \{0\}$ y por lo tanto T no singular. ■

Definición 3.5 *Si existe un isomorfismo de V en W, diremos que V y W son* ***isomorfos***

Observación 3.8 *i) V es trivialmente isomorfo a V.*
ii) Si V es isomorfo a W vía un isomorfismo T, entonces W es isomorfo a V pues T^{-1} es un isomorfismo de W en V.
iii) Si V es isomorfo a W y W es isomorfo a Z, entonces V es isomorfo a Z.

Por estas tres observaciones concluimos que la relación .es isomorfo a" define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios vectoriales.

Teorema 3.9 *Todo espacio vectorial n-dimensional sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{K}^n$.*

Demos: Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V.
Definimos la función $T : V \to \mathbb{K}^n$ como sigue, para $v \in V$, sea $Tv = (x_1, \cdots, x_n)$ la n-upla de coordenadas de v relativas a la base ordenada B, i.e. $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.
Esta aplicación así definida resulta lineal, inyectiva y sobreyectiva. ■

3.3. REPRESENTACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES POR MATRICES

Teorema 3.10 *Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y W un espacio vectorial m-dimensional sobre $\mathbb{K}$. Sea B una base ordenada de V y B' una base ordenada de W. Para cada transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V,W)$ existe una matriz $m \times n$ A con entradas en $\mathbb{K}$ tal que para cada vector $v \in V$*

$$[Tv]_{B'} = A[v]_B.$$

Más aun la asignación $T \to A$ es una correspondencia uno a uno entre el conjunto $\mathcal{L}(V,W)$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demos: Si $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V$, entonces

$$Tv = T(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j (Tv_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j) w_i.$$

Si X es la matriz de coordenadas de v en la base ordenada B, entonces esto muestra que AX es la matriz de coordenadas del vector Tv en la base ordenada B'. Observemos además que si A es cualquier matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, entonces

$$T(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j) w_i$$

define una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, W)$, cuya matriz asociada relativa a las bases ordenadas B y B' es A.
Así esta matriz A asociada a T se llama ***matriz de T relativa a las bases B y B'*** .

Observación 3.9 *A es la matriz cuyas columnas $A_1, \cdots, A_n$ son $A_j = [Tv_j]_{B'}$, $j = 1, \cdots, n$. Si $S \in \mathcal{L}(V, W)$ es otra transformación lineal y $C = [C_1, \cdots, C_n]$ es la matriz de S relativa a las bases ordenadas B y B' entonces $\alpha A + C$ es la matriz asociada a la transformación $\alpha T + S$ relativa a las bases B y B'.*

$$\alpha A_j + C_j = \alpha[Tv_j]_{B'} + [Sv_j]_{B'} = [\alpha Tv_j + Sv_j]_{B'} = [(\alpha T + S)v_j]_{B'}.$$

En vista del teorema precedente y la observación podemos enunciar el siguiente

Teorema 3.11 *Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ y sea W un espacio m-dimensional sobre $\mathbb{K}$. Para cada par de bases ordenadas B y B' para V y W respectivamente, la aplicación que a cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$ le asigna $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, su matriz asociada relativa a B y B', es un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathcal{L}(V, W)$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

Demos: La función en cuestión es lineal, visto en la observación, y es biyectiva, visto en el teorema anterior.

.

Observación 3.10 *Veamos que sucede con la representación de operadores lineales (transformaciones lineales de un espacio V en si mismo). Conviene usar la misma base ordenada B. Así llamaremos a la matriz de T como la matriz de T relativa a la base ordenada B.*

Nota 3.1 *Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V y $B = v_1, \cdots, v_n$ es una base ordenada de V, la matriz de T relativa a B es la matriz $n \times n$, A cuyas entradas A_{ij} están definidas por*

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}v_i, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

Debemos recordar que esta matriz que representa a T depende de la base ordenada B, para cada base ordenada obtendremos una matriz diferente que representa al mismo operador lineal T. Para hacer más explícita esta dependencia puede notarse como $[T]_B$ a la matriz del operador lineal T en la base ordenada B. La forma en la que esta matriz y la base ordenada describen al operador T es tal que para cada $v \in V$ se tiene

$$[Tv]_B = [T]_B[v]_B.$$

Ejemplo 3.4 *Sea $V = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Sea $W = \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ fija. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ definida por $T(X) = AX$.*
Sea B la base ordenada para V análoga a la base estándar en $\mathbb{K}^n$ (el vector e_i es la matriz $n \times 1$ con un 1 en la fila i y 0 en las otras). Sea B' la base ordenada para W análoga a la base estándar en $\mathbb{K}^m$. Entonces la matriz de T relativa al par B, B' es la matriz A.

Ejemplo 3.5 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y T un operador sobre $\mathbb{K}^2$ definido por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$.*
Es fácil ver que es un operador lineal sobre $\mathbb{K}^2$. Sea $B = e_1, e_2$ la base ordenada estándar para $\mathbb{K}^2$. Se tiene que

$$Te_1 = T(1, 0) = (1, 0), \qquad Te_2 = T(0, 1) = (0, 0).$$

La matriz de T en la base ordenada B es $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 3.6 *Sea V el espacio de todos los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 3, i.e.*

$$V = \{p(x) : p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, \cdots, 3\}.$$

El operador derivada D va de V en V. Sea $B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ base ordenada de V con $f_j(x) = x^{j-1}$. Luego

$$\begin{array}{ll}
(Df_1)(x) = 0, & Df_1 = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4, \\
(Df_2)(x) = 1, & Df_2 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4, \\
(Df_3)(x) = 2x, & Df_3 = 0f_1 + 2f_2 + 0f_3 + 0f_4, \\
(Df_4)(x) = 3x^2, & Df_4 = 0f_1 + 0f_2 + 3f_3 + 0f_4.
\end{array}$$

La matriz de D en la base ordenada B es

$$[D]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.12 *Sea V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, Z)$. Si B, B' y B'' son bases ordenadas para V, W y Z respectivamente y si A es la matriz de T relativa a B y B' y C es la matriz de S relativa a B' y B'', entonces la matriz de la composición ST relativa a B y B'' es la matriz $D = CA$.*

Demos: Sean $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ y $B'' = \{z_1, \cdots, z_p\}$. Para $v \in V$ cualquiera se tiene

$$[Tv]_{B'} = A[v]_B, \qquad [S(Tv)]_{B''} = B[Tv]_{B'}, \qquad [(ST)v]_{B''} = CA[v]_B,$$

y por lo tanto por definición y unicidad de la matriz asociada, se tiene que $D = CA$.
También puede demostrarse esto a través del cálculo

$$(ST)v_j = S(Tv_j) = S(\sum_{k=1}^{m} A_{kj}w_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{kj}(Sw_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{kj} \sum_{i=1}^{p} C_{ik}z_i = \sum_{i=1}^{p}(\sum_{k=1}^{m} C_{ik}A_{jk})z_i.$$

$$\therefore D_{ij} = \sum_{k=1}^{m} C_{ik}A_{kj},$$

como queríamos probar. ■

Observación 3.11 *Si T y S son operadores lineales sobre V y los representamos mediante una única base ordenada B, entonces*

$$[ST]_B = [S]_B[T]_B.$$

Así la correspondencia que determina B entre operadores y matrices no sólo es un isomorfismo de espacios vectoriales sino que preserva productos. Una consecuencia de esto es que el operador lineal T será inversible si y solo si $[T]_B$ es una matriz inversible. Es decir que $ST = TS = I$ equivale a $[S]_B[T]_B = [T]_B[S]_B = I$. Además cuando T es inversible resulta $[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$.

Teorema 3.13 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sean $B = v\{v_1, \cdots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ bases ordenadas de V. Supongamos que T es un operador lineal sobre V. Si $P = [P_1, \cdots, P_n]$ es la matriz $n \times n$ con columnas $P_j = [v'_j]_B$, entonces*

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_BP.$$

Demos: Por lo visto anteriormente, existe una única matriz $n \times n$ inversible P tal que para cada $v \in V$

$$[v]_B = P[v]_{B'}, \tag{7}$$

donde $P = [P_1, \cdots, P_n]$ con $P_j = [v'_j]_B$.
Por definición

$$[Tv]_B = [T]_B[v]_B. \tag{8}$$

Aplicando (7) a Tv se obtiene

$$[Tv]_B = P[Tv]_{B'}. \tag{9}$$

Combinando (7), (8) y (9) se obtiene

$$[T]_B P[v]_{B'} = P[Tv]_{B'} \qquad o \qquad P^{-1}[T]_B P[v]_{B'} = [Tv]_{B'},$$

de donde $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$.
Observemos además que existe un único operador lineal S que lleva B en B' definido por

$$Sv_j = v'_j, \; j = 1, \cdots, n.$$

Este operador es inversible ya que lleva una base de V en una base de V. Precisamente la matriz P es la matriz del operador S en la base ordenada B. Pues, P está definida por $v'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} v_i$ y como $Sv_j = v'_j$, podemos escribir

$$Sv_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} v_i.$$

Así $P = [S]_B$ por definición, como queríamos ver. ■

Ejemplo 3.7 *Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Vimos que*

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supongamos que $B' = \{(e'_1, e'_2\}$ con $e'_1 = (1,1)$ y $e'_2 = (2,1)$ es otra base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcrcl} e'_1 & = & e_1 & + & e_2 \\ e'_2 & = & 2e_1 & + & e_2 \end{array}$$

Luego P es la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Así $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$ y surge que

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Es sencillo de comprobarlo pues

$$\begin{array}{rcccl} Te'_1 & = & (1,0) & = & -e'_1 + e'_2, \\ Te'_2 & = & (2,0) & = & -2e'_1 + 2e'_2. \end{array}$$

Ejemplo 3.8 *Sea V el espacio vectorial del ejemplo 3.6. Sea $t \in \mathbb{R}$ y definamos $g_j(x) = (x+t)^{j-1}$, o sea*

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1, \\ g_2 &= tf_1 + f_2, \\ g_3 &= t^2 f_1 + 2tf_2 + f_3, \\ g_4 &= t^3 f_1 + 3t^2 f_2 + 3tf_3 + f_4. \end{aligned}$$

Como la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es inversible siendo

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sigue que $B' = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ es una base ordenada de V.
Vimos en el ejemplo 3.6 que

$$[D]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces la matriz del operador D en la base ordenada B' es

$$P^{-1}[D]_B P = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir que D es representado por la misma matriz en las bases ordenadas B y B'.

Definición 3.6 *Sean A y B matrices $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que* ***B es similar a A sobre $\mathbb{K}$*** *si existe una matriz $n \times n$ inversible P sobre $\mathbb{K}$ tal que $B = P^{-1}AP$.*

3.4. Funcionales lineales

Definición 3.7 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, una transformación lineal de V en $\mathbb{K}$ se dice un **funcional lineal sobre V**.*

Observación 3.12 *f es un funcional lineal sobre V si f es una función de V en $\mathbb{K}$ tal que $f(\alpha v + u) = \alpha f(v) + f(u), \forall v, u \in V, \alpha \in \mathbb{K}$.*

Ejemplo 3.9 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, y $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$. Definimos una función sobre $\mathbb{K}^n$ por*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

f es un funcional lineal sobre $\mathbb{K}^n$. Es el funcional lineal que se representa por la matriz $[a_1, \cdots, a_n]$ relativa a la base ordenada estándar de $\mathbb{K}^n$ y la base $\{1\}$ de $\mathbb{K}$

$$a_j = f(e_j), \qquad j = 1, \cdots, n.$$

Todo funcional lineal sobre $\mathbb{K}^n$ es de esta forma para algunos escalares $a_1, \cdots, a_n$, pues

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j a_j.$$

Ejemplo 3.10 *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, luego la traza define un funcional lineal sobre $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Recordemos que si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ luego $trA = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$.*

Ejemplo 3.11 *Sea $V = \mathbb{K}[x]$ el espacio de todos los polinomios de $\mathbb{K}$ en si mismo. Sea $t \in \mathbb{K}$, definimos*

$$L_t(p) = p(t),$$

luego L_t es un funcional lineal sobre V. L_t se dice la evaluación en t.

Ejemplo 3.12 *Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y sea $C([a, b])$ el espacio vectorial de las funciones continuas a valores reales sobre $[a, b]$, Luego*

$$L(g) = \int_a^b g(t)dt,$$

define un funcional lineal L sobre $C([a, b])$.

Definición 3.8 *Si V es un espacio vectorial, el conjunto de todos los funcionales lineales sobre V forma un espacio vectorial. Es el espacio $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, al que se nota V^* y se llama **espacio dual de V**.*

$$V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K}).$$

Observación 3.13 *Si V es de dimensión finita, sabemos por el Teorema 3.5 que $\dim V^* = \dim V$.*
Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V. Por el Teorema 3.1 para cada i existe un único funcional lineal f_i sobre V tal que $f_i(v_i) = \delta_{ij}$.
Así obtenemos de B un conjunto de n funcionales lineales distintos $f_1, \cdots, f_n$ sobre V. Veamos que son l.i..
Sea $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$, luego

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_j(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta ij = c_j.$$

En particular, si f es el funcional cero, $f(v_j) = 0, \forall j$ y por lo tanto todos los c_j son cero.
*Entonces $\{f_1, \cdots, f_n\}$ son l.i. y ya sabemos que $\dim V^* = n$, surge que $B^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ es una base para V^*, es la llamada **base dual de B**.*

Teorema 3.14 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V. Entonces existe una única base dual $B^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Para cada funcional lineal f sobre V se tiene que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i,$$

y para cada vector $v \in V$ se tiene que $v = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) v_i$.

Demos: Ya vimos que existe una única base que es la base dual de B.
Si $f \in V^*$, luego f es combinación lineal de los elementos f_i, $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ y los escalares c_i deben ser $c_i = f(v_i)$. De manera similar, si $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$, luego

$$f_j(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_j(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} = x_j.$$

Luego la única expresión para v como combinación lineal de los v_i es $v = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) v_i$, como queríamos probar. ■

Observación 3.14 *Si $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base ordenada de V y $B^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ es la base dual, entonces f_i es precisamente la función que le asigna a cada vector $v \in V$ la coordenada i-ésima de v relativa a la base ordenada B. Así podemos llamar a f_i las funciones coordenadas para B.*
Si $f \in V^*$ y $f(v_i) = a_i$, entonces cuando

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \qquad \to \qquad f(v) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Es decir, si elegimos una base ordenada B para V y representamos a cada vector de V por la n-upla de sus coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ relativas a B, luego cada funcional lineal sobre V tiene la forma $f(v) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$. Esto es la generalización natural del Ejemplo 3.9.

Ejemplo 3.13 *Sea V el espacio vectorial de todos los polinomios de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con grado menor o igual a 2. Sean t_1, t_2, t_3 tres números reales cualesquiera y sea $L_i(p) = p(t_i)$. Resultan funcionales lineales sobre V, y son l.i. pues si $L = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3$ y $L = 0$ ($L(p) = 0$ para cada polinomio p en V) entonces aplicando L a los polinomios $1, x, x^2$ se obtiene*

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ t_1c_1 + t_2c_2 + t_3c_3 &= 0, \\ t_1^2c_1 + t_2^2c_2 + t_3^2c_3 &= 0, \end{aligned}$$

y de aquí surge que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ pues la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3, \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}$$

es inversible cuando t_1, t_2, t_3 distintos.
Entonces los L_i son independientes y como la $\dim V = 3$, estos funcionales forman una base para V^*.
Nos preguntamos cual es la base ordenada de V para la cual ésta es su base dual. Tal base $\{p_1, p_2, p_3\}$ para V

debe satisfacer que $L_i(p_j) = \delta_{ij}$ *es decir que* $p_j(t_i) = \delta_{ij}$. *Se obtiene fácilmente que dichos polinomios están dados por*

$$p_1(x) = \frac{(x-t_2)(x-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)},;\ p_2(x) = \frac{(x-t_3)(x-t_1)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)},;\ p_3(x) = \frac{(x-t_1)(x-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}.$$

La base $\{p_1, p_2, p_3\}$ *para* V *es interesante pues se tiene que para cada* $p \in V$ $p = p(t_1)p_1 + p(t_2)p_2 + p(t_3)p_3$. *Así dados* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ *cualesquiera, existe exactamente un polinomio* p *sobre* $\mathbb{R}$ *que tiene al menos grado 2 y satisface* $p(t_j) = c_j$, $j = 1, 2, 3$. *Dicho polinomio es* $p = c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3$.

Observación 3.15 *Relación entre funcional lineal y subespacio*
Si f *es un funcional lineal no nulo, entonces el rango de* f *es* 1 *pues la imagen de* f *es un subespacio no nulo del campo escalar y por lo tanto debe ser el campo escalar mismo.*
Si el espacio V *es de dimensión finita* n, *por el teorema de la dimensión sabemos que*

$$\dim(nulf) = \dim V - 1 = n - 1.$$

Definición 3.9 *En un espacio vectorial de dimensión finita* n, *un subespacio de dimensión* $n-1$ *se llama* ***hiperespacio*** *o* ***hiperplano*** *o* ***subespacio de codimensión 1***.

Definición 3.10 *Si* V *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y* S *es un subconjunto de* V, *el* ***anulador de S*** *es el conjunto* S° *de funcionales lineales sobre* V *tales que* $f(v) = 0, \forall v \in S$.

Observación 3.16 *i)* S° *es un subespacio vectorial aunque* S *no lo sea.*
ii) Si $S = \{0\}$, $S^\circ = V^*$.
iii) Si $S = V$, S° *es el subespacio* $\{0\}$ *de* V.

Teorema 3.15 *Sea* V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$, *y sea* W *un subespacio de* V *entonces*

$$\dim W + \dim W^\circ = \dim V.$$

Demos: Sea $\dim W = k$ y $\{v_1, \cdots, v_k\}$ una base de W. Elijamos $v_{k+1}, \cdots, v_n \in V$ tales que $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ sea una base de V.
Sea $\{f_1, \cdots, f_n\}$ la base de V^* dual de la base B de V. Veamos que $\{f_{k+1}, \cdots, f_n\}$ es base de W°. Ciertamente $f_i \in W^\circ$ para $i = k+1, \cdots, n$ pues $f_i(v_j) = \delta ij$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \geqslant k+1$ y $j \leqslant k$.
De aquí sigue que para $i \geqslant k+1$, $f_i(v) = 0$ cuando v es una combinación lineal de $v_1, \cdots, v_n$. Los funcionales $f_{k+1}, \cdots, f_n$ son independientes, así que sólo falta ver que generan w°.
Sea $f \in V^*$. Ahora $f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)f_i$, luego si $f \in W^\circ$ se tiene que $f(v_i) = 0, i \leqslant k$ y $f = \sum_{i=k+1}^{n} f(v_i)f_i$.
Así se tiene que $\dim W^\circ = n - k$. ■

Corolario 3.1 *Si* W *es un subespacio k-dimensional de un espacio vectorial* V *n-dimensional, entonces* W *es la intersección de* $(n-k)$ *hiperplanos de* V.

Demos:

■

Corolario 3.2 *Si* W_1 *y* W_2 *son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces* $W_1 = W_2$ *si y solo si* $W_1^\circ = W_2^\circ$.

Demos:

■

Ejemplo 3.14 *Consideremos tres funcionales sobre* $\mathbb{R}^4$.

$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$

$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_2 + x_4$

$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1 - 4x_3 + 3x_4$.

El subespacio que ellos anulan puede hallarse explícitamente al hallar la matriz escalonada reducida de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix},$$

que es

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego los funcionales

$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3$

$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2$

$g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$.

generan al mismo subespacio de $(\mathbb{R}^4)^*$ *y anulan al mismo subespacio de* $\mathbb{R}^4$ *que* f_1, f_2, f_3. *El subespacio anulado consiste en los vectores con*

$$x_1 = -2x_3, \qquad x_2 = x_4 = 0.$$

Ejemplo 3.15 *Sea W el subespacio de* $\mathbb{R}^5$ *generado por*

$v_1 = (2, -2, 3, 4, -1)$

$v_2 = (-1, 1, 2, 5, 2)$

$v_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$.

$v_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$.

¿Cómo describimos a W° *el anulador de W?*

Formemos la matriz A 4×5 *con los vectores filas* $v_1, \cdots, v_4$ *y hallemos la forma escalonada reducida*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si f es el funcional lineal sobre $\mathbb{R}^5$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{j=1}^{5} c_j x_j,$$

entonces $f \in W^\circ$ *si y solo si* $f(v_i) = 0, i = 1, \cdots, 4$, *por lo tanto, si y solo si*

$$\sum_{j=1}^{5} A_{ij} c_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4.$$

Esto es equivalente a

$$\sum_{j=1}^{5} R_{ij} c_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

o bien

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 - c_4 &= 0 \\ c_3 + 2c_4 &= 0 \\ c_5 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos todos esos funcionales lineales f asignándoles valores arbitrarios a los escalares c_2 y c_4, digamos $c_2 = a$ y $c_4 = b$, entonces hallar los correspondientes $c_1 = a + b$, $c_3 = -2b$ y $c_5 = 0$. Luego W° consiste de todos los funcionales lineales f de la forma

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a+b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4.$$

La dimensión de W° es 2 y una base $\{f_1, f_2\}$ puede ser hallada tomando primero $a = 1, b = 0$ y luego $a = 0, b = 1$.

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4.$$

Un funcional genérico de W° tiene la forma $f = \alpha f_1 + \beta f_2$.

Referencias

[1] Apostol T., *Calculus*, Tomo 2 (2da edición, Reverté S.A., Barcelona. 1979.

[2] Axler S., *Linear Algebra done right*, (3era edición), Springer, 2015.

[3] Escalante M.S., *Notas de clases*, 2013.

[4] Friedberg S.H., Insel A.J., Spence L.E., *Linear Algebra*, Prentice Hall, New York,1989.

[5] Hoffman K., Kunze R., *Linear algebra*, Prentice Hall, México 1971.

[6] Lankham I., Nachtergaele B., Schilling A., *Linear algebra as an introduction to abstract mathematics*, World Scientific, 2016.

[7] Lay D.C., *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Pearson Educación, México 2007.

[8] Santillán Marcus E.A., *Notas de clases*, 2012.

[9] Strang G., *Linear algebra and its applications, 3rd ed*, Harcourt College Publishers. 1988.

[10] Strang G., *Introduction to linear algebra, 4th ed.*, Wellesley. Cambridge Press, 2009.

Índice alfabético

anulador, 41
autoespacio de una matriz, 53
automorfismo, 30
autovalor de una matriz, 52
autovalor transformación, 52
autovector, 52
autovector de una matriz, 52

base, 23
  ordenada, 25
base dual, 39
biyectiva, 30

combinación lineal, 19
complemento ortogonal, 46
conjunto ortogonal, 46

dependencia lineal, 19
descomposición, 61
desigualdad
  de Cauchy-Schwarz, 45
  triangular, 45
Desigualdad de Bessel, 51
dimensión, 23
  finita, 19
  infinita, 19
distancia, 46

ecuación característica de una matriz, 55
eliminación gaussiana, 5
endomorfismo, 30
envolvente lineal, 19
epimorfismo, 30
espacio
  euclidiano, 45
  producto interno, 45
  unitario, 45
espacio columna, 21
espacio dual, 39
espacio generado, 19
espacio nulo, 29
espacio vectorial, 13

forma canónica de Jordan, 63
funcional lineal, 39

hiperplano, 3, 41
homomorfismos, 30

idempotente, 51
independencia lineal, 19
invariante, 60
inyectiva, 30
isomorfismo, 30

kernel, 29

matriz
  adjunta, 44
  diagonalizable, 56
  elemental, 6
  eliminación, 6
  no singular, 10
  permutación, 9
  permutación orden n, 9
  semejante, 55
  simétrica, 9
  similar, 38
  singular, 10
  triangular superior, 58
matriz asociada a una transformación lineal, 35
mejor aproximación, 49
monomorfismo, 30
multiplicidad de un autovector, 55

núcleo, 29
norma, 45

operador lineal, 28
ortogonal, 46

pivote, 5
polinomio
  minimal, 62
polinomio característico de una matriz, 55
Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, 47
producto interno, 44
  canónico, 44
proyección ortogonal, 49

rango de T, 30

sistema ortonormal, 47
sobreyectiva, 30
subespacio suma, 17
subespacio vectorial, 16
suma directa, 18, 61

teorema
  descomposición ortogonal, 49
  Descomposición primaria, 63
  diagonalización, 56
transformación lineal, 28