ROTACIONES, PROYECCIONES, REFLECCIONES Y TRASLACIONES

En este apunte presentamos las matrices que representan transformaciones geométricas en el plano como transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Recordemos que la matriz $n \times n$ que representa una transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ (en las bases canónicas) tiene en su columna i-ésima la representación de de Te^i.

Ya fueron presentadas en las slides las matrices que representan ciertas transformaciones lineales en el plano, como:

- R_{90° = Rotación de 90° en $\mathbb{R}^2$ (en sentido antihorario)

  Observar que $R(e^1) = R((1,0))) = (0,1)$ y $R(e^2) = R((0,1))) = (-1,0)$. Por lo tanto, la matriz Q que representa a R es:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Proyección sobre el eje x en $\mathbb{R}^2$

  Observar que la proyección de $e^1 = (1,0)$ sobre el eje x es él mismo y la de $e^2 = (0,1)$ es $(0,0)$. Así:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Reflexión a través de la recta $y = x$ en $\mathbb{R}^2$ (recta a 45°)

  Con un análisis similar a los anteriores obtenemos la matriz:

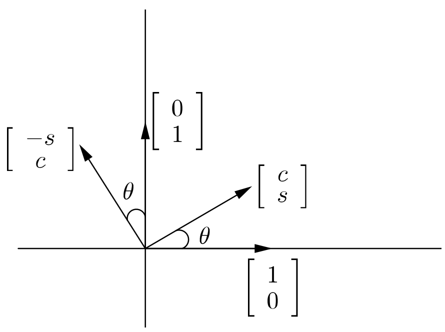
$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las rotaciones en otros ángulos, las proyecciones sobre otras rectas y las reflexiones en otros espejos, también son transformaciones lineales.

Para conocer estas matrices, de acuerdo a lo observado anteriormente, precisamos conocer su efecto sobre la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

ROTACIONES

En la siguiente figura mostramos la rotación de un ángulo θ, en particular, la transformación de los dos elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Si llamamos $c = \cos\ \theta$ y $s = \sin\ \theta$ podemos observar que el vector (c, s) es obtenido luego de rotar en un ángulo θ al primer vector de la base, claramente la longitud de ambos es 1. Cuando el segundo vector de la base rota en un ángulo θ obtenemos el vector $(-s, c)$.



Ahora bien, nuestro objetivo es describir la matriz asociada a la transformación lineal (*rotación*).

Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la base canónica en $\mathbb{R}^2$. Siendo T la transformación lineal correspondiente a la rotación de un ángulo θ, teniendo en cuenta lo que recordamos al comienzo del apunte, sabemos que la j-ésima columna de la matriz Q_θ que representa dicha transformación, se obtiene aplicando la transformación al j-ésimo vector de la base. Luego,

- $T(e_1) = c \cdot e_1 + s \cdot e_2$,
- $T(e_2) = -s \cdot e_1 + c \cdot e_2$.

Así obtenemos:

$$Q_\theta = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$

Observaciones:

- La *inversa* de Q_θ es igual a $Q_{-\theta}$ (rotación en sentido horario del ángulo θ).

$$Q_\theta \cdot Q_{-\theta} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- El *cuadrado* de Q_θ es igual a $Q_{2\theta}$ (rotación del ángulo doble 2θ).

$$Q_\theta \cdot Q_\theta = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 - s^2 & -2cs \\ 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\, 2\theta & -\sin\, 2\theta \\ \sin\, 2\theta & \cos\, 2\theta \end{bmatrix} = Q_{2\theta}.$$

- El *producto* de Q_θ y Q_φ es igual a $Q_{\theta+\varphi}$ (rotación del ángulo θ y luego del ángulo φ).

$$\begin{aligned} Q_\theta \cdot Q_\varphi &= \begin{bmatrix} \cos\, \theta & -\sin\, \theta \\ \sin\, \theta & \cos\, \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\, \varphi & -\sin\, \varphi \\ \sin\, \varphi & \cos\, \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\, \theta \cos\, \varphi - \sin\, \theta \sin\, \varphi & -(\cos\, \theta \sin\, \varphi + \sin\, \theta \cos\, \varphi) \\ \sin\, \theta \cos\, \varphi + \cos\, \theta \sin\, \varphi & \cos\, \theta \cos\, \varphi - \sin\, \theta \sin\, \varphi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\, (\theta + \varphi) & -\sin\, (\theta + \varphi) \\ \sin\, (\theta + \varphi) & \cos\, (\theta + \varphi) \end{bmatrix} = Q_{\theta+\varphi}. \end{aligned}$$

El último caso contiene a los dos primeros. La inversa aparece cuando φ es $-\theta$ y el cuadrado cuando φ es θ.

Es importante destacar que la multiplicación de matrices se define de modo tal que **el producto de las matrices se corresponde con el producto de las transformaciones lineales**.

¿Qué significa producto de transformaciones lineales?

En realidad, no es más que la composición de transformaciones.

Supongamos que T y S son transformaciones lineales de V en W y de U en V respecivamente. Su "producto" TS comienza con un vector $u \in U$, va a $Su \in V$ y termina con $TSu \in W$. Esta *COMPOSICIÓN* TS resulta una transformación lineal de U en W y su matriz es el producto de las matrices que representan a T y S.

PROYECCIONES

En la figura dada a continuación mostramos la proyección de vectores sobre la recta θ, en particular, la transformación de los dos elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Llamamos nuevamente $c = \cos\, \theta$ y $s = \sin\, \theta$. En este caso podemos observar que el primer vector de la base canónica $(1, 0)$ se transforma mediante la proyección sobre la recta θ en (c^2, cs) y el segundo vector de la base canónica, al proyectarlo sobre la misma recta se transforma en el vector (cs, s^2), ya que:

- La proyección del vector $(1, 0)$ sobre la recta θ es el vector (x, y). Ahora bien, mirando los triángulos celestes de la figura tenemos:

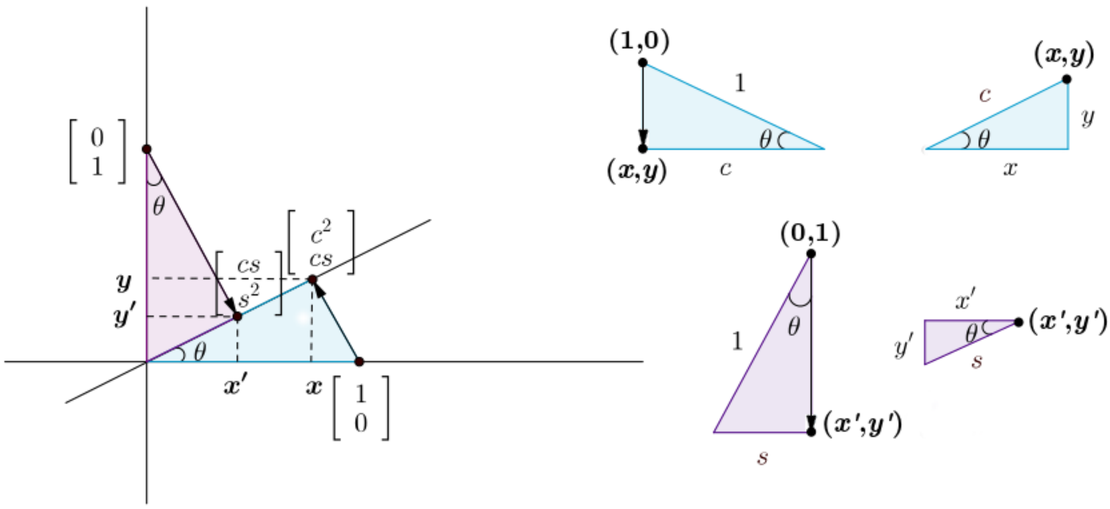
$$x = \cos\, \theta \cdot c \;\Rightarrow\; x = c^2,$$

$$y = \sin\, \theta \cdot c \;\Rightarrow\; y = sc.$$

- La proyección del vector $(0, 1)$ sobre la recta θ es el vector (x', y'). Si miramos ahora los triángulos violetas resulta:

$$x' = \cos\, \theta \cdot s \;\Rightarrow\; x' = cs,$$

$$y' = \sin\, \theta \cdot s \;\Rightarrow\; y' = s^2.$$



Como nuestro objetivo es describir la matriz asociada a la transformación lineal (*proyección*), utilizando una idea similar a lo hecho para la rotación, vamos a considerar el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la base canónica en $\mathbb{R}^2$. Siendo T la transformación lineal correspondiente a la proyección sobre la recta θ, sabemos que la j-ésima columna de la matriz P_θ que representa dicha transformación, se obtiene aplicando la transformación al j-ésimo vector de la base. Luego,

- $T(e_1) = c^2 \cdot e_1 + cs \cdot e_2$,
- $T(e_2) = cs \cdot e_1 + s^2 \cdot e_2$.

Así obtenemos:

$$P_\theta = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}.$$

Observaciones:

- Esta matriz no tiene inversa ya que la transformación no tiene inversa. Los puntos proyectados sobre una recta perpendicular son proyectados sobre el origen y esa recta es el espacio nulo de P.
- Los puntos proyectados sobre la recta θ son proyectados sobre sí mismos. Proyectar dos veces es lo mismo que proyectar una vez, así $P^2 = P$.

$$P_\theta^2 = P_\theta \cdot P_\theta = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2(c^2+s^2) & cs(c^2+s^2) \\ cs(c^2+s^2) & s^2(c^2+s^2) \end{bmatrix} = P.$$

Sabemos que $c^2 + s^2 = \cos^2\ \theta + \sin^2\ \theta = 1$.

Una matriz proyección es igual a su propio cuadrado.

REFLEXIONES

En la siguiente figura mostramos la reflexión de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ en la recta θ. Llamamos nuevamente $c = \cos\ \theta$ y $s = \sin\ \theta$. En el caso de la reflexión en la recta θ podemos observar que el primer vector de la base canónica $(1,0)$ se transforma en $(2c^2-1, 2cs)$ y el segundo vector de la base canónica en el vector $(2cs, 2s^2-1)$, ambos de longitud 1, ya que:

- La reflexión del vector $(1,0)$ sobre la recta θ es el vector (x,y). Ahora bien, mirando el triángulo color naranja tenemos:

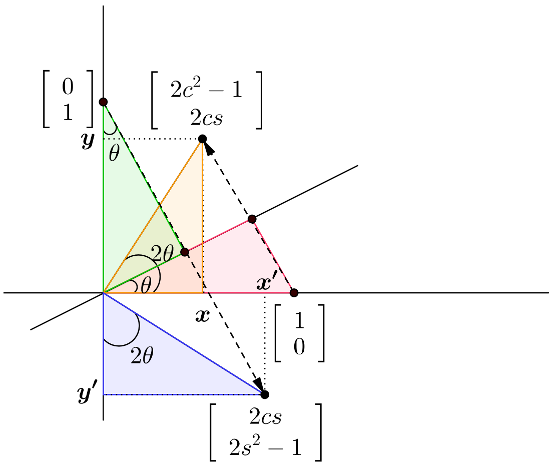
$$x = \cos\ 2\theta \ \Rightarrow\ x = \cos^2\ \theta - \sin^2\ \theta \ \Rightarrow\ x = 2\cos^2 - 1 \ \Rightarrow\ x = 2c^2 - 1,$$

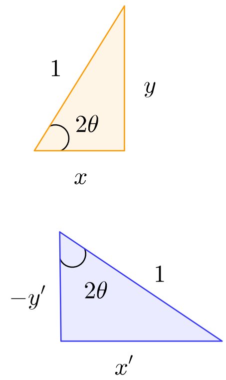
$$y = \sin\ 2\theta \ \Rightarrow\ y = 2\cos\ \theta \sin\ \theta \ \Rightarrow\ y = 2cs.$$

- La reflexión del vector $(0, 1)$ sobre la recta θ es el vector (x', y'). Si miramos ahora el triángulo azul resulta:

$$x' = \sin\ 2\theta\ \Rightarrow\ x' = 2\cos\ \theta \sin\ \theta\ \Rightarrow\ x' = 2cs,$$

$$-y' = \cos\ 2\theta\ \Rightarrow\ y' = \sin^2\ \theta - \cos^2\ \theta\ \Rightarrow\ y' = 2\sin^2 - 1\ \Rightarrow\ y' = 2s^2 - 1.$$





Pensando en que nuestro objetivo es describir la matriz asociada a la transformación lineal (*reflexión*), utilizando una idea similar a lo hecho para la rotación y proyección, vamos a considerar el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y la base canónica en $\mathbb{R}^2$. Siendo T la transformación lineal correspondiente a la reflexión sobre la recta θ, sabemos que la j-ésima columna de la matriz H_θ que representa dicha transformación, se obtiene aplicando la transformación al j-ésimo vector de la base. Luego,

- $T(e_1) = 2c^2 - 1 \cdot e_1 + 2cs \cdot e_2$,
- $T(e_2) = 2cs \cdot e_1 + 2s^2 - 1 \cdot e_2$.

Así obtenemos:

$$H_\theta = \begin{bmatrix} 2c^2 - 1 & 2cs \\ 2cs & 2s^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Observaciones:

- La longitud de los vectores obtenido después de la reflexión es igual a la longitud de los vectores originales, como lo era después de la rotación, sin embargo, en este caso la recta θ permanece fija.
- La recta perpendicular invierte la dirección, todos los puntos pasan directamente a través del espejo.
- Si $H_\theta(x)$ es la imagen de x a través de la reflexión H_θ, entonces $H_\theta(x) + x = 2P_\theta(x)$. Donde $P_\theta(x)$ es la imagen de x luego de aplicar la transformación proyección.
- La matriz H_θ posee la propiedad $H^2 = I$. Si aplicamos dos veces la misma reflaxión a un vector, obtenemos el vector original. Una reflexión, es su propia inversa $H = H^{-1}$. Lo enunciado se puede probar utilizando la relación que existe entre la reflexión y la proyección.

TRANSFORMACIONES DEL ESPACIO EN SÍ MISMO

En forma similar a lo visto para transformaciones del plano, podemos representar transformaciones espaciales como transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo. Veamos algunos ejemplos:

¿Cuáles son las matrices 3×3 que representan las siguientes transformaciones?

$a)$ Proyectan cada vector de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy.

$b)$ Reflejan cada vector de $\mathbb{R}^3$ a través del plano xy.

$c)$ Rotan el plano xy en un ángulo de $90°$ dejando fijo el eje z.

d) Rotan en un ángulo de 90° el plano xy, luego el plano xz y luego el plano yz.

e) Realizan las mismos rotaciones que en el apartado anterior pero cada una de ellas en un ángulo de 180°.

Por simplicidad, consideramos solo bases canónicas y notamos a todas las transformaciones con T.

a) Evaluamos la transformación en la base:

- $T(e_1) \overset{(*)}{=} e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$
- $T(e_2) \overset{(*)}{=} e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$
- $T(e_3) \overset{(**)}{=} \mathbf{0} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$

Luego, la matriz asociada a T es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(*) Pertenecen al conjunto sobre el cual proyectamos.

(**) La proyección de x sobre un subespacio S es, por definición, "aquel punto $y \in S$ tal que la distancia entre x e y es mínima". Usando la desigualdad triangular, es claro que $\mathbf{0}$ es el punto a distancia mínima de e_3 en S.

b) Evaluamos la transformación en la base:

- $T(e_1) \overset{(*)}{=} e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$
- $T(e_2) \overset{(*)}{=} e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$
- $T(e_3) \overset{(**)}{=} -e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + -1 \cdot e_3$

Luego, la matriz asociada a T es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(*) Pertenecen al conjunto sobre el cual proyectamos.

(**) La reflexión de x respecto a un subespacio propio S es, por definición, "aquel punto $y \neq x$ cuya proyección sobre S coincide con la de x y cuya distancia a la proyección es igual a la de x". Usando el apartado anterior, y viendo que $-e_3$ verifica la definición anterior, se deduce la igualdad.

c) Observamos que T es una rotación respecto al eje z.

Evaluamos la transformación en la base:

- $T(e_1) \overset{(1)}{=} e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$
- $T(e_2) \overset{(1)}{=} -e_1 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$
- $T(e_3) \overset{(2)}{=} e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$

Luego, la matriz asociada a T es:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Dado que es difícil generalizar la rotación con los conceptos actuales, la definimos para este ejercicio en particular (usando la geometría euclídea): "y es la rotación de ángulo θ alrededor de una recta r del punto x si y solo si y es la rotación en el plano perpendicular a r que pasa por x, respecto al punto de intersección del plano con r y de ángulo θ".

Con esta definición, rotar 90° a los vectores e_1 y e_2 respecto al eje z es lo mismo que rotarlos en el plano 90° respecto al origen (ver más arriba cómo queda la transformación para el caso $\theta = 90$).

(2) Con nuestra definición de rotación es inmediato que un punto de la recta es su propia imagen, puesto que termina siendo el centro de rotación en el plano que induce.

- Las matrices asociadas a cada transformación de la composición son:

$$xy \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$xz \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$yz \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  Dado que las matrices están construidas sobre las mismas bases, la matriz asociada a T respecto al par de bases canónicas es el producto:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  <u>Nota</u>: este ejercicio se puede resolver como los anteriores, viendo a dónde va a parar cada vector de la base.

- Consideramos T_{xy}, T_{xz}, T_{yz} las transformaciones respectivas del ítem.

  Evaluamos la transformación en la base:

  - $T(e_1) = T_{yz}(T_{xz}(T_{xy}(e_1))) = T_{yz}(T_{xz}(-e_1)) = T_{yz}(e_1) = e_1$
  - $T(e_2) = T_{yz}(T_{xz}(T_{xy}(e_2))) = T_{yz}(T_{xz}(-e_2)) = T_{yz}(-e_2) = e_2$
  - $T(e_3) = T_{yz}(T_{xz}(T_{xy}(e_3))) = T_{yz}(T_{xz}(e_3)) = T_{yz}(-e_3) = e_3$

  Luego, la matriz asociada a T es I.

TRASLACIONES

La translación es también una tranformación del plano (o del espacio) en sí mismo. Sin embargo no puede expresarse como una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ (o de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$). Analizamos la traslación en el plano.

En efecto, dado $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$, *trasladar en* v a los puntos de $\mathbb{R}^2$ puede ser pensado como una transformación T_v de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que, a cada punto p del plano lo lleva a $p + v$. Así, si $v = (2, 0)$, por la acción de T_v, todo punto del plano se mueve dos unidades a la derecha. Sin embargo, T_v no es una transformación lineal. Es sencillo ver, por ejemplo, que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq 1$, $T_v(\alpha p) \neq \alpha T_v(p)$.

Sin embargo, en muchas aplicaciones como en diseño gráfico, necesitamos *trasladar* puntos del plano y muchas veces, componer esta translación con otras transformaciones en el plano. Y para ello sería muy útil poder expresar a la traslación como una transformación lineal y por ende, como el producto entre una matriz y un vector.

Generalmente se usan coordenadas homogéneas para representar la traslación mediante una matriz y poder así expresarla como una transformación lineal sobre un espacio de dimensión superior. Si seguimos con el ejemplo de $\mathbb{R}^2$, un vector 2-dimensional $v = (v_1, v_2)$ puede ser reescrito utilizando 3 coordenadas, fijando una variable, como $v = (v_1, v_2, 1)$. Entonces, dado $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, pensemos en la transformación lineal definida por la siguiente matriz:

$$A_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea ahora $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Queremos obtener $p + v$ a partir de una transformación lineal. Pensamos en la transformación definida por A_v y se la aplicamos a $\tilde{p} = (p_1, p_2, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Observemos que

$$A_v\tilde{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 + v_1 \\ p_2 + v_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Leemos la información de las primeras 2 coordenadas y recuperamos el vector $p + v$, el transladado de p en v.

Observaciones:

- La inversa de una matriz de traslación puede obtenerse cambiando el signo de la dirección del vector desplazamiento, así
$$A_v^{-1} = A_{-v}.$$
- El producto de dos matrices de traslación está dado por:
$$A_u A_v = A_{u+v}.$$
- Debido a que la suma de vectores es conmutativa, la multiplicación de matrices de traslación es también conmutativa, a diferencia de lo que sucede con matrices arbitrarias, que no necesariamente representan traslaciones.

Si queremos representar a través de transformaciones lineales (matrices) la composición de una translación con otra operación (por ejemplo una rotación en $90°$), deberemos también representar a la rotación de un punto del plano como una matriz 3×3. Recordemos que la matriz 2×2 que representa la rotación en $90°$ es:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para ello, utilizamos el mismo recurso de representar cada punto $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ como el punto $\tilde{p} = (p_1, p_2, 1) \in \mathbb{R}^3$. Ahora, si

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

hacer la cuenta con $\tilde{p}$ y mostrar como se recupera recordando que el rotado de p es $(-p_2, p_1)$.
En forma similar podremos respresentar a la traslación en $\mathbb{R}^3$ (o $\mathbb{R}^n$).

Ejercicios

Dada A una matriz de tamaño 2×2, notamos con $\tilde{A}$ a la matriz de tamaño 3×3 que tiene a A en su equina superior derecha y a e^3 como tercer columna y tercer fila:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} & & 0 \\ & A & \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

En forma similar, dado $p \in \mathbb{R}^2$ notamos con $\tilde{p}$ al vector $(p, 1) \in \mathbb{R}^3$, es decir, si $p = (p_1, p_2)$ entonces $\tilde{p} = (p_1, p_2, 1)$.

1. Probar el siguiente Lema.

   Lema: Sea A una matriz de tamaño 2×2 y $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$. Entonces $\tilde{A}\tilde{p}$ es el vector cuyas dos primeras componentes coinciden con Ap y su tercer componente es 1. Es decir, $\widetilde{Ap} = \tilde{A}\tilde{p}$ (la primer tilde está sobre Ap).

Este resultado nos permite trabajar con cualquier transformación lineal del plano como una transformación lineal del espacio. Además es compatible con inversas y composiciones.

2. Demostrar las siguientes igualdades:

   a) $\tilde{A}^{-1} = \widetilde{A^{-1}}$ (la primera tilde está sobre A y la seguda sobre A^{-1}).

   b) $\widetilde{AB} = \tilde{A}\tilde{B}$ (la primera tilde está sobre AB).

Aplicación

Comentamos ya que estas transformaciones del plano o el espacio son muy utilizadas en diseño gráfico. En el archivo *Transformaciones lineales* (Autor: Daniel Severín) en Comunidades, presentamos un código sencillo (en Math Lab) que permite construir *arbolitos fractales* a partir de un segmento inicial. Lo desarrollado allí forma parte de los contenidos a evaluar por la Cátedra. Esperamos que se animen a probar el código y generen distintos *arbolitos* partiendo de distintos segmentos iniciales.

Para los más curiosos, pueden también bajarse la App llamada *Britney Fractales Iterativos*, desarrollada por Ariel Lombardi (actual director del Departamento de Matemática de Escuela de Cs. Exactas y Naturales de nuestra Facultad) la cual usa las mismas herramientas y permite obtener lindísimos diseños en forma muy sencilla.