Álgebra Lineal - LCC - LM - PM 2020

Práctica: CAPÍTULO 2 - ESPACIOS VECTORIALES (*cuarta parte*)

1. Sea $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base para un espacio vectorial V.
   a) Demostrar que $\mathcal{B}_2 = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$ también es una base.
   b) Hallar la matriz de cambio de base M de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

2. Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1, 3), (-2, -2)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(-12, 0), (-4, 4)\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$.
   a) Determinar la matriz de cambio de base M_1 de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
   b) Determinar la matriz de cambio de base M_2 de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.
   c) ¿Qué relación existe entre M_1 y M_2?
   d) Dado $x = (2, -1)$ en la base $\mathcal{B}_2$, determinar las coordenadas de x en la base $\mathcal{B}_1$.

3. Sea $V = \left\{ \sum_{i=0}^{2} a_i x^i \;/\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$ y $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ base estándar de V.
   a) Probar que $\mathcal{B}_2 = \{x - 1, 1, (x - 1)^2\}$ es otra base de V.
   b) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
   c) Utilizar lo obtenido en el ítem anterior y determinar la coordenadas de p en la base $\mathcal{B}_2$ siendo $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$. ¿Cuáles son las coordenadas de p en la base $\{1, (x - 1)^2, x - 1\}$?

4. Hallar la matriz de cambio de base de:
   a) la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, a la base $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$.
   Determinar las coordenadas de A en la base $\mathcal{B}'$ para $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz cualquiera.
   b) la base $\{1, x, -1 + 2x^2, -3x + 4x^3\}$ de $\mathbb{R}_3[x]$ a la base $\{1, -\frac{1}{2} + x, -x + x^2, \frac{1}{4} - \frac{3}{2}x^2 + x^3\}$.

5. Sea $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. ¿Existe una base $\mathcal{B}'$ tal que A es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$? De existir, hallar dicha base.

6. Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B}_{1,2}$ dos bases ordenadas de V. Entonces, para todo $v \in V$, $[v]_{\mathcal{B}_1}$ es la solución de un sistema $Ax = b$ donde $b = [v]_{\mathcal{B}_2}$ y A es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

7. Para cada una de las siguientes funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinar si se trata de una transformación lineal y en caso afirmativo: obtener $N(T)$ y $Rec(T)$, calcular su dimensión y determinar si T es inversible.
   a) $T((x, y)) = (y, x)$.
   b) $T((x, y)) = (x^2, y^2)$.
   c) $T((x, y)) = (x, -y)$.
   d) $T((x, y)) = (x, 0)$.

   Observación:
   $N(T) = \{x \in Dom(T) \colon T(x) = 0\}$.
   $rec(T) = \{y \in Codom(T) \colon T(x) = y$ para algún $x \in Dom(T)\}$.

8. Sean V y W espacios vectoriales. Sea T_1 la transformación nula de V en W y T_2 la transformación identidad de V en V. Probar que T_1 y T_2 son transformaciones lineales.

9. Definimos $I : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ tal que $I(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ e $I_a^b : C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $I_a^b(f)(x) = \int_a^b f(x)\, dx$.
   Probar que I y I_a^b son transformaciones lineales.

10. Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $\mathcal{L}(V,W) = \{T : V \to W : T\, transformación\, lineal\}$. Probar que para $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$:

   a) $\{v \in V : T_1(v) = T_2(v)\} \underset{s.e.}{\subset} V$.

   b) Si $V = \langle U \rangle$ y $T_1(u) = T_2(u), \forall u \in U$, entonces $T_1(v) = T_2(v), \forall v \in V$.

11. Consideramos la aplicación T definida por:

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}_3[x] \\ & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \mapsto & T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 2dx^3 + (a+b)x^2 + (a-c)x + 2(c+d). \end{array}$$

   a) Probar que T es lineal.

   b) Hallar una base para $N(T)$ y una para $Rec(T)$.

   c) Determinar si T es un isomorfismo.

12. Sea $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C} / \, T_w(z) = z + w\bar{z}$, donde $w = a + ib$ para $a,\ b \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son los números complejos vistos como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

   a) Considerar $w = 1 + i$ y calcular $T_w(2 + 3i)$.

   b) Comprobar que T_w es una transformación lineal entre espacios vectoriales.

   c) Si $B = \{1, i\}$ es base de $\mathbb{C}$, hallar la matriz de T_w en dicha base.

   d) Probar que T_w es isomorfismo si y solo si $a^2 + b^2 \neq 1$.

13. Sea $V = \mathbb{R}^n$, fijamos la base canónica $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Para cada $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hallar A_i tal que $A_i x = T_i(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, i = 1, \cdots, 4$.

   a) $T_1(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

   b) $T_2(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

   c) $T_3(x) = c \cdot x, c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

   d) Sean p, q enteros distintos entre 1 y n inclusives,

$$T_4(x) = y, \text{ donde } y = (y_k)_{k=1}^n \text{ con } y_k = \begin{cases} x_k & \text{para } k \neq p, \quad k \neq q \\ x_p & \text{para } k = q \\ x_q & \text{para } k = p \end{cases}$$

14. Sea $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ tal que $T(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_n(x+1)^n$. Probar que T es isomorfismo.

15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación lineal tal que

$$T((0,0,1)) = (2,3,5), \qquad T((0,1,1)) = (1,0,0), \qquad T((1,1,1)) = (0,1,-1).$$

   a) Probar que con esta información es posible obtener $T(v), \forall v \in \mathbb{R}^3$.

   b) Determinar, fijada la base canónica en $\mathbb{R}^3$, la matriz de T.

   c) Utilizando el ítem anterior, obtener $\dim(N(T))$ y $rg(T) = \dim(Rec(T))$.

   d) Determinar si T es inversible.

16. Determinar, si existe, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que verifique: $T((1,-1,1)) = (1,0)$ y $T((1,1,1)) = (0,1)$.

17. Sea $\mathbb{C}$ el espacio vectorial de los números complejos sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales. Describir explícitamente un isomorfismo de este espacio con $\mathbb{R}^2$.

18. Mostrar que $\mathbb{K}^{m\times n}$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{mn}$.

19. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Probar que V y W son isomorfos si y solo si $\dim V = \dim W$.

20. Sean V y W espacios vectoriales y, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de V y W respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y A_T la matriz asociada a T respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$. Mostrar que, para todo $v \in V$, $[Tv]_{\mathcal{B}_2} = A_T [v]_{\mathcal{B}_1}$.

21. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

   a) Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}'$ es la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^2$, determinar la matriz asociada a T relativa al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

   b) Si $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(0, 1), (1, 0)\}$ ¿Cuál es la matriz asociada a T relativa a al par $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$?

22. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Probar que, $T \circ S$ es inversible si y solo si S y T son inversibles.

23. *a*) Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal que resulta de la composición de las transformaciones lineales que representan la rotación de un vector en un ángulo de $90°$ y la proyección sobre el eje x (en ese orden).

   b) Hallar la matriz que representa la proyección de un vector sobre el *eje* x seguida de la proyección de un vector sobre el *eje* y.

24. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

produce una transformación llamada *esfuerzo constante*, que deja fijo al *eje* y. Hacer un bosquejo para indicar qué ocurre cuando se aplica dicha transformación a los vectores $(1, 0)$, $(2, 0)$ y $(-1, 0)$. ¿Cómo se transforma el *eje* x?

25. *a*) Encontrar la *matriz de permutación cíclica* A de tamaño 4×4 que transforma el vector (x_1, x_2, x_3, x_4) en (x_2, x_3, x_4, x_1).

   b) ¿Cuál es la transformación asociada a A^2?

   c) Demostrar que $A^3 = A^{-1}$.

26. *a*) Encontrar la matriz A de tamaño 4×3 que representa el *desplazamiento derecho* que transforma (x_1, x_2, x_3) en $(0, x_1, x_2, x_3)$.

   b) Calcular la matriz B de tamaño 3×4 que representa el *desplazamiento izquierdo* que transforma (x_1, x_2, x_3, x_4) en (x_2, x_3, x_4).

   c) ¿Cuáles son los productos AB y BA?

EJERCICIOS ADICIONALES

1. *a*) Sea $x = (-26, 32) \in \mathbb{R}^2$ en la base canónica. Encontrar la representación de $x \in \mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{B}' = \{(-6, 7), (4, -3)\}$.

   b) Sea $x = (0, -20, 7, 15) \in \mathbb{R}^4$ en la canónica. Encontrar la representación de $x \in \mathbb{R}^4$ en la base $\mathcal{B}' = \{(9, -3, 15, 4), (3, 0, 0, 1), (0, -5, 6, 8), (3, -4, 2, -3)\}$.

2. Determinar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B} = \{(1, 3, 2), (2, -1, 2), (5, 6, 1)\}$ a $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$.

3. Consideremos la base canónica de $V = \mathbb{R}^2$ dada por $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que aplica los vectores e_1 y e_2 como sigue:

$$T(e_1) = e_1 + e_2, \qquad T(e_2) = 2 \cdot e_1 - e_2.$$

Obtener:

   a) $T(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$ y $T^2(3 \cdot e_1 - 4 \cdot e_2)$,

   b) las matrices asociadas a T y T^2 en la base $\mathcal{B}$,

   c) $T(v), \forall v \in V$.

4. Sean $T_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_1((x, y, z)) = (x, y, 0)$ y $T_2((x, y, z)) = (x, y, y)$. Hallar $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$. Analizar si son epimorfismos, monomorfismos, isomorfismos o ninguna de ellas.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (x + y, x + z, \alpha(v))$, donde $v = (x, y, z)$ y $\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Determinar, si es posible, α de modo que T resulte lineal.

6. Una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ con entradas en $\mathbb{C}$ tal que $A = \overline{A}^t$, i.e. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, para todos $i, j = 1, \cdots, n$, se dice *Hermitiana*.

   Sea W el conjunto de todas las matrices Hermitianas 2×2.

   a) Verificar que W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

   b) Verificar que la aplicación
   $$(x, y, z, t) \mapsto \begin{bmatrix} t + x & y + iz \\ y - iz & t - x \end{bmatrix}$$
   es un isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en W.