Álgebra Lineal - LCC - LM - PM **2020**

Autoevaluación 4

Apellido, nombre y carrera:

*****Recordar que sólo una de las opciones es correcta.*****

1. La siguiente matriz es normal:

   (A) $\begin{bmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ -i & 2i & 1-i \\ 0 & -1-i & 1-i \end{bmatrix}$.

   (B) $\begin{bmatrix} 2i & i & 0 \\ 1-i & 2i & 1-i \\ 0 & 1-i & 3i \end{bmatrix}$.

   (C) $\begin{bmatrix} 2i & i & 0 \\ i & 2i & 1-i \\ 0 & -1-i & 3i \end{bmatrix}$.

   (D) $\begin{bmatrix} 2i & i & 0 \\ i & 2i & 1-i \\ 0 & -i & 3i \end{bmatrix}$.

2. Sea A una matriz y $S = \begin{bmatrix} 4 & 1-i & 0 \\ 1+i & i & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliza a A. Entonces:

   (A) $x = (4, 1-i, 0)$ es autovector de A.

   (B) $S^{-1}AS$ tiene todas entradas distintas en la diagonal.

   (C) $x = (4, 1+i, 7)$ es autovector de A.

   (D) Ninguna de las anteriores es una condición necesaria.

3. Consideramos la secuencia
$$g_0 = 0;\ g_1 = 1;\ g_{k+2} = \frac{g_{k+1} + g_k}{2}, k \geq 0.$$
   Definimos $x_k = \begin{bmatrix} g_{k+1} \\ g_k \end{bmatrix}$.

   a) Sea A tal que, para todo $k \geq 0$, $x_{k+1} = Ax_k$. Entonces,

   (A) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (B) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   (C) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (D) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   b) Sea A tal que, para todo $k \geq 0$, $x_{k+1} = Ax_k$. Para $i = 1, 2$, sea λ_i autovalor de A, V_i su autoespacio asociado y $\lambda_1 > \lambda_2$. Entonces:

   (A) $V_1 = \langle(1,1)\rangle$ y $V_2 = \left\langle(\frac{1}{2}, 1)\right\rangle$.

   (B) $V_1 = \langle(1,1)\rangle$ y $V_2 = \left\langle(1, -\frac{1}{2})\right\rangle$.

   (C) $V_1 = \langle(1,1)\rangle$ y $V_2 = \langle(1,-2)\rangle$.

   (D) $V_1 = \langle(1,1)\rangle$ y $V_2 = \langle(-2,1)\rangle$.

   c) (A) $g_k = -\dfrac{2}{3}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k\right]$.

(B) $g_k = \frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]$.

(C) $g_k = -\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]$.

(D) $g_k = \frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]$.

4. *a*) Para toda matriz A, podemos afirmar que:

   (A) Existe una matriz unitaria U tal que $U^{-1}AU$ es una matriz diagonal.

   (B) Existe una matriz normal N tal que $N^{-1}AN$ es una matriz diagonal.

   (C) Existe una matriz normal N tal que $N^{-1}AN$ es una matriz triangular.

   (D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

   b) Consideramos la matriz $A = \begin{bmatrix} -5+i & -15 \\ 2 & 6+i \end{bmatrix}$.

   La siguiente matriz U es unitaria y triangulariza a A (Lema de Schur):

   (A) $U = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   (B) $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (C) $U = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (D) $U = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Sea $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces:

   a) (A) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que los dos autovalores de $A(t)$ son números complejos conjugados, no reales.

   (B) Para todo $t \in \mathbb{C}$, $A(t)$ tiene dos autovalores de multiplicidad 1.

   (C) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = 1$ es un autovalor de $A(t)$ de multiplicidad 2.

   (D) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda = 2$ es un autovalor de $A(t)$ de multiplicidad 2.

   b) (A) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $(-3, 1)$ es un autovector de $A(t)$.

   (B) No existe $v \in \mathbb{C}^2$ tal que v es autovector de $A(t)$ para todo $t \in \mathbb{C}$.

   (C) Existe $t \in \mathbb{C}$ tal que $A(t)$ tiene un autovalor de multiplicidad 1 y la dimensión del autoespacio asociado es 2.

   (D) Existen $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ linealmente independientes autovectores de $A(t)$ para todo $t \in \mathbb{C}$.

   c) (A) $A(t)$ es diagonalizable para todo t.

   (B) No existe valor de t tal que $A(t)$ resulta diagonalizable.

   (C) Existe un único valor de t tal que $A(t)$ resulta diagonalizable.

   (D) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.