

Este es el documento que se hizo en clase para explicar el problema de Minimize Dot Product

Intuitivamente, agrupamos los elementos más grandes de A con los más pequeños de B (o viceversa, los más grandes de B con los más pequeños de A).

Demostrar que esta forma de agrupar los pares es óptima.

Resolvamos el problema para 2 elementos:

Suposición:

$$A: [x, y], \quad x \leq y$$

$$B: [z, w], \quad z \leq w$$

Según nuestra hipótesis intuitiva, se debería cumplir esto:

$$x \cdot w + y \cdot z \leq x \cdot z + y \cdot w$$

Demostrar por contradicción: Vamos a asumir lo opuesto, y si llegamos a una contradicción, quiere decir que se cumple nuestra hipótesis original.

$$x \cdot w + y \cdot z > x \cdot z + y \cdot w$$

Intercambiando terminos:

$$x \cdot w - x \cdot z > y \cdot w - y \cdot z$$

Factorizando:

$$(w - z) \cdot x > (w - z) \cdot y$$

Caso 1: $(w - z) = 0$, esto implicaría que $0 > 0$, lo cual ya es una contradicción

Caso 2: $(w - z) \neq 0$

Dividir ambos lados por $(w - z)$

$$x > y \rightarrow \text{esto contradice nuestra propiedad original de que } x \leq y$$

Por lo tanto, se cumple esto: $x \cdot w + y \cdot z \leq x \cdot z + y \cdot w$