Probabilidad y Distribución Uniforme

Universidad Externado de Colombia

2019

Definición de independencia en un espacio de probabilidad.

Dos eventos son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ Es decir dos eventos A y B son independientes si el producto de sus probabilidades es igual a la intersección de la probabilidad.

Ejemplo:

Se lanza una moneda dos veces, los posibles resultados son:

$$\Omega = (\{C, C\}, \{C, S\}, \{S, C\}, \{S, S\})$$

Si $P(A) = (\{C, C\}, \{C, S\})$ y $P(B) = (\{C, S\}, \{S, S\})$

Entonces probar que $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

$P(A) = p^2 + p * q$ y $P(B) = q * p + q^2$

$P(A \cap B) = (p^2 + p * q) * (q * p + q^2)$

Si $q = (1 - p)$

$P(A \cap B) = (p^2 + p * (1 - p)) * ((1 - p) * p + (1 - p)^2)$

$P(A \cap B) = (p^2 + p - p^2) * (p - p^2 + 1 - 2p + p^2)$

$P(A \cap B) = p * (1 - p)$

$P(A \cap B) = p - p^2$ No es igual a $P(A \cap B) = p * q = \{C, S\}$ y por lo tanto A y B no son independientes.

Cuando dos eventos no son independientes se dice que pueden tener una probabilidad condicional donde

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Que es la definición de probabilidad condicional.

Distribución Uniforme

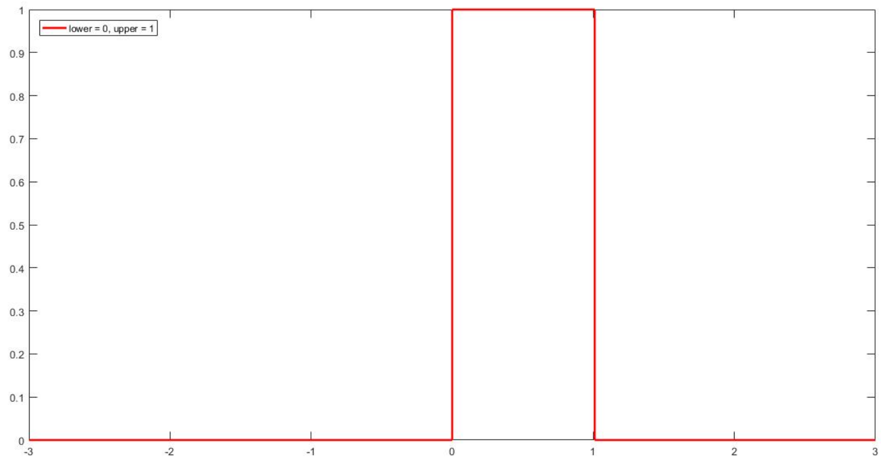
Esta aclaración sirve para los ejercicios 4, 7 y 15

La distribución uniforme se denota $U \sim (a, b)$ donde a y b son el valor mínimo y máximo de un intervalo sobre un conjunto de números reales.

Su función de densidad nos dice que la probabilidad de esta función se encuentra entre a y b, por lo tanto si el valor buscado no se encuentra en este intervalo su valor es cero.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq y \leq b \\ 0 & \end{cases}$$

Figura 1: PDF Distribución Uniforme



Como se puede ver en la figura 1, en este caso el valor mínimo o a es cero y el valor máximo o b es 1. cualquier valor dentro de ese intervalor puede tener una probabilidad, mientras que todos los valores por fuera de ese intervalo son iguales a cero.

En cada uno de los ejercicios se debe definir cuál es el valor a y cuál es el valor b. En el caso del punto 15 usar la definición de valor esperado que se puede encontrar en la presentación

$f(y) = \frac{1}{b-a}$.

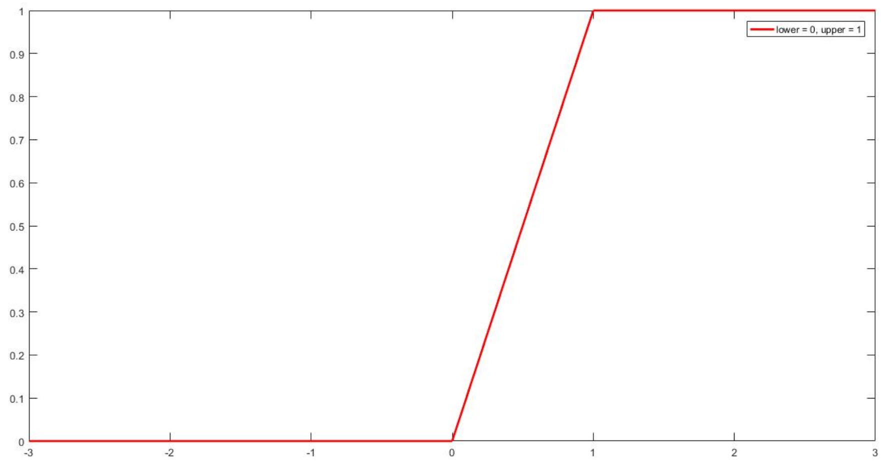
Valor esperado $E[y] = \int_a^b y \frac{1}{b-a} dy$.

Varianza $Var[y] = E[y^2] - E[y]^2$

$Var[y] = \int_a^b y^2 \frac{1}{b-a} dy - (\int_a^b y \frac{1}{b-a} dy)^2$

Por otra parte, todas las funciones de distribución tienen una función acumulada como se ve en la figura 2 que muestra como se van sumando cada una de las probabilidades hasta llegar a su valor máximo que es 1.

Figura 2: PDF Distribución Uniforme



$F(y) = \int_a^b \frac{1}{b-a} dy = 1.$

Punto sobre el dador de tres lados Con respecto al punto del dado, se debe pensar en el método de conteo de los sigma álgebras. Recordemos que siempre se usa el 2 como valor inicial, ya que $\mathcal{F}_0$ siempre va a tener dos escenarios iniciales $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ donde la probabilidad es 1 o 0.

Después de tener esto claro se revisa las posibilidades que hay en el experimento. En este caso son tres y las vamos a llamar A, B y C. Por lo tanto, si se lanza el dado 0 veces, el resultado del sigma álgebra sera de 2

$2^{3^0} = 2$. Si lanzamos el dado una vez, el resultado del sigma álgebra será 8 $2^{3^1} = 8$, y así sucesivamente.

Si para un dado de tres lados $\mathcal{F}_1 = 8$, entonces se debe pensar cuales son los elementos que pertenecen a este sigma álgebra, ya que en este experimento se tienen tres probabilidades $A = p$, $B = q$ y $C = r$ y la suma de $p + q + r = 1$, por lo tanto hay que tener todas las posibilidades dentro de $\mathcal{F}_1$.

EL objetivo es determinar cuales son los 8 elementos que componen $\mathcal{F}_1$.

Recuerden que un espacio Borel es más pequeño o igual de grande que un espacio muestral Ω y Ω es más pequeño que un sigma.

Árbol Binomial Bien, por ejemplo n siempre equivale al número de pasos en el árbol por ejemplo si estamos en el segundo paso (Segundo día), x tiene tres posibilidades(0,1,2) entonces mientras que n siempre está constante porque está en el segundo día, x va variando de acuerdo a las posibilidades que hay en ese día.

$\binom{2}{0}p^0q^{2-0}$

$\binom{2}{1}p^1q^{2-1}$

$\binom{2}{2}p^2q^{2-2}$

Ahora si ya no son dos días o pasos, si no que son tres, entonces:

$\binom{3}{0}p^0q^{3-0}$

$\binom{3}{1}p^1q^{3-1}$

$\binom{3}{2}p^2q^{3-2}$

$\binom{3}{3}p^3q^{3-3}$