Problema 3

a) Debido a que el momento de inercia de un disco está dado por $I_z = \frac{1}{2} m r^2$. Debido al teorema de ejes perpendiculares será la suma del momento en los otros ejes, es decir, $I_z = I_x + I_y$. Por simetría, $I_x = I_y = I_\phi$ por lo cual $I_z = 2 I_\phi \Rightarrow I_\phi = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right) \Rightarrow I_1 = \frac{1}{4} m r^2$

Ahora por teorema de ejes paralelos se debe sumar $md^2$ debido a la distancia del trompo al eje x

$$I_0 = \frac{1}{4} m r^2 + m d^2$$

b) El momento de inercia $I_z = \int r^2 dm$ donde $dm = \sigma dA = \sigma r dr d\theta$

Por la simetría del problema $A = \pi r^2$ y $\sigma = \frac{m}{\pi r^2}$

$$I_z = \iint r^2 \sigma r dr d\theta \qquad \sigma \pi r^2 = m$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} \sigma d\theta \int_0^r r^3 dr$$

$$I_z = 2\pi\sigma \frac{r^4}{4} = \frac{\pi \sigma r^4}{2} = \frac{1}{2} m r^2 \Rightarrow I_z = \frac{1}{2} m r^2$$

c) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot\phi}\left[\frac{1}{2} I_0(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgd\cos\theta\right]\right) = \frac{\partial L}{\partial \phi}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(I_0 \dot\phi \sin^2\theta + I_z \dot\phi \cos^2\theta + I_z \dot\psi \cos\theta\right) = P_\phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = \frac{\partial}{\partial \dot\psi}\left[\frac{1}{2} I_0(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgd\cos\theta\right] = \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

$$= I_z(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = P_\psi$$

GARAMOND

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}\left[\frac{1}{2} I_0 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_z \left(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - mgd\cos\theta \right]\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(I_0 \dot{\theta}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}\left(\frac{1}{2} I_0 \left(\dot{\theta} + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} I_z \left(\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 + mgd\cos\theta\right)$$

$$I_0 \ddot{\theta} = I_0 \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 - I_z \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 - \dot{\phi}\dot{\psi} \sin\theta I_z + mgd \sin\theta$$