1. Mostrar que los operadores diferenciales son consistentes

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \frac{-(x+2h)^2+4(x+h)^2-3x^2}{2h}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{-x^2}-4xh-\cancel{4h^2}+\cancel{4x^2}+8xh+\cancel{4h^2}-\cancel{3x^2}}{2h}$$

$$f'(x) = \frac{4x\cancel{h}}{2\cancel{h}} \Rightarrow f'(x) = 2x$$ correcto

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

$$f(x) = x^2$$

$$f''(x) = \frac{(x+h)^2-2x^2+(x-h)^2}{h^2}$$

$$f''(x) = \frac{\cancel{x^2}+\cancel{2xh}+h^2-\cancel{2x^2}+\cancel{x^2}-\cancel{2xh}+h^2}{h^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\cancel{h^2}}{\cancel{h^2}} \Rightarrow f''(x) = 2$$ correcto

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \frac{-\sin(x+2h)+4\sin(x+h)-3\sin(x)}{2h}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\left[-\sin(x)\cos(2h)-\cos(x)\sin(2h)+4\sin(x)\cos(h)+4\sin(h)\cos(x)-3\sin x\right]$$ Aplico regla de L'Hôpital

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\sin(x)\cdot 2\sin(2h)-2\cos(x)\cos(2h)-4\sin(x)\sin(h)+4\cos(x)\cos(h)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[2\cos(x)\left[2\cos(h)-\cos(2h)\right]+2\sin(x)\left[\sin(2h)-2\sin(h)\right]\right]$$

$$f'(x) = \cos(x)\left[2\cos(h)-\cos(2h)\right]+\sin(x)\left[\sin(2h)-2\sin(h)\right]$$ Tomando el límite cuando $h \to 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left\{\cos(x)\left[2\cos(h)-\cos(2h)\right]+\sin(x)\left[\sin(2h)-2\sin(h)\right]\right\}$$

$$f'(x) = \cos(x)\left[2\cos(0)-\cos(2(0))\right]+\cancel{\sin(x)\left[\sin(2(0))-2\sin(0)\right]}$$

$$f'(x) = \cos(x)\left[2-1\right] \Rightarrow f'(x) = \cos x$$ correcto

$f(x)$ $\sin(x)$

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f''(x) = \frac{\sin(x+h)-2\sin(x)+\sin(x-h)}{h^2}$$

$$f''(x) = \frac{\sin(x)\cos(h) - \cancel{\cos(x)\sin(h)} - 2\sin(x) + \sin(x)\cos(h) + \cancel{\cos(x)\sin(h)}}{h^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\sin(x)\cos(h) - 2\sin(x)}{h^2}$$

$$f''(x) = \frac{2\sin(x)\left[\cos(h) - 1\right]}{h^2}$$ Aplicando L'Hôpital 2 veces.

$$f''(x) = \frac{\cancel{2}\sin(x)\left[-\sin(h)\right]}{\cancel{2}h}$$

$$f''(x) = -\sin(x)\cos(h)$$ Evaluando límite cuando $h \to 0$

$$f''(x) = \lim_{h \to 0}\left[-\sin(x)\cos(h)\right] = -\sin(x)\cos(0) \Rightarrow f''(x) = -\sin(x)$$ correcto

Se mostró que ambos operadores son consistentes.

3. Velocidad luz en unidades au/año

$$3\times10^{8}\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s}} \times \frac{86400\,\cancel{s}}{1\,\cancel{día}} \times \frac{360\,\cancel{día}}{1\,año} \times \frac{6{,}68\times10^{-12}\,au}{1\,\cancel{m}} \Rightarrow c = 62375\,\frac{au}{año}$$

5. Empezamos con el caso base

$$\int_0^{u_1} du = \alpha u_0\, dt$$

$$u_1 - u_0 = \alpha u_0 \Delta t$$

$$u_1 = u_0 + \alpha u_0 \Delta t$$

$$u_1 = (1 + \alpha\Delta t)\, u_0$$

Ahora bien, esto se puede generalizar mediante la expansión de serie de Taylor y tomando el paso $x_k = x_0 + k\Delta t$

$u(x_{k+1}) = u(x_k) + \Delta t\, u'(x_k)$ despejando u' y restando αu

$$\frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{\Delta t} - \alpha u(x_k) = u'(x_k) - \alpha u(x_k)$$

$$u(x_{k+1}) - u(x_k) = \alpha u(x_k) \Delta t$$

$$u(x_{k+1}) = (1 + \alpha \Delta t)\, u(x_k)$$

Como se observa el $(k+1)$ requiere de los k anteriores que son como el caso base y con $k=2$

$$u(x_2) = (1+\alpha \Delta t)\, u(x_1)$$

$$u(x_2) = (1+\alpha \Delta t)^2\, u_0$$ Por inducción en k se tiene que

$$\boxed{u_k = (1 + \alpha \Delta t)^k u_0}$$

Tarea 1 punto 2 Parte teórica

Nombre: Santiago José Mongua Niño. **Código:** 202012703

Usando el código de la clase, genere 10 esferas localizadas aleatoriamente en la mesa A = 40 × 40 con velocidad aleatorias entre −5 m/s y 5 m/s. Simule 10 s con un paso de integraci´on de h = 0.001 s y reduzca la simulación en un factor de 200; quitando la interacción con la pared. Conteste las siguientes preguntas exponiendo los conceptos físicos involucrados.

(a) Grafique el momento lineal total en x (px) en función del tiempo. ¿Se debería conservar?

Sí, se debería conservar debido a que las fuerzas del sistema son conservativas.

(b) Grafique el momento lineal total en y (py) en función del tiempo. ¿Se debería conservar?

Sí, se conserva puesto que no cambia en el tiempo como se observa en la gráfica generada.

(c) Teóricamente muestre que la fuerza de contacto es conservativa. Encuentre la energía potencial. Grafique la energía cinética total en función del tiempo. ¿Se debería conservar?

No necesariamente, debido a que cuando las partículas son muy cercanas dicha energía cinética se convierte en energía potencial. La cantidad física que se debe conservar es la energía mecánica, la cual es la suma de la energía cinética y la energía potencial.

(e) Grafique la energía potencial total en función del tiempo. ¿Qué significa que el potencial sea positivo?

Que la energía cinética de las partículas se convierte en potencial debido a los choques o conversión de esta energía.

(f) Grafique la energía mecánica total en función del tiempo. ¿Se conserva? Explique a nivel físico y a nivel del método de Euler.

Se conserva en ambos según lo observado, lo cual hace que la simulación concuerde con la parte teórica de la física

(g) ¿Se cumple el teorema del trabajo y la energía en su simulación? Argumente.

Sí se cumple, puesto que la energía mecánica del sistema se mantiene constante, según lo observado en la gráfica. Adicionalmente, el trabajo que realizan las partículas modifica la energía de las partículas pero la energía mecánica se conserva.

(h) Calcule y grafique el momento angular en el eje z (L_z). ¿Se conserva?

(i) Si este sistema que se mueve en 2D se extendiera a 3D, ¿las partículas se mantendrían en el mismo plano de movimiento o se moverían en todo el volumen?

Las partículas se moverían en todo el plano, si el movimiento se aleatoriza en las tres dimensiones.