

## Métodos Numéricos y Optimización - Primer cuatrimestre de 2024

### Trabajo Práctico 2 - Modelos de dinámica poblacional

Fecha límite de entrega: Lunes 30 Septiembre a las 08:00

Escribir un informe de máximo 15 carillas reportando los resultados de los siguientes experimentos numéricos. Los códigos desarrollados se deben entregar junto al informe.

---

## 1. Calculo de similaridad de series temporales

Consideremos un conjunto de datos  $T_i$  con mediciones de temperatura  $x(t)$  de la region  $i$

$$T_i = \{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$$

Estas mediciones se realizan por año, mes y día en distintas ciudades del planeta y se descargan del portal [kaggle.com/datasets/sudalairajkumar/daily-temperature-of-major-cities](https://kaggle.com/datasets/sudalairajkumar/daily-temperature-of-major-cities).

### 1.1. Objetivo

- Se solicita proponer una medida de similaridad  $S_{i,j}(T_i, T_j)$  entre cada par de series temporales  $(T_i, T_j)$  basandose en la tasa de aumentos y/o decrementos de temperatura considerando todo el rango de tiempo de analisis (año, mes, etc).
- La medida de similaridad debe ser independientemente del valor de temperatura  $x(t_i)$  y solo debe considerar todas las tasas de variacion de la misma  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  a lo largo de un rango de tiempo determinado.
- Por ejemplo, cada vez que un par de series  $T_i, T_j$  asociados a regiones  $i$  y  $j$  presentan una tasa similar de aumento o decremento de temperatura cerca de la misma epoca del año o mes entonces ese escenario contribuye a alta similaridad. Por el contrario, si dos series de tiempo presentan variaciones de temperatura (aumentos o decrementos) opuestas o muy distintas cerca de la misma epoca del año, entonces se esa variacion contribuye a mayor discrepancia.
- considerar los metodos numericos vistos en clase para computar las tasas de variacion de temperatura y comparar su desempeño.
- Una vez que este propuesta la metrica  $S_{i,j}$  comparar la similaridad entre pares de series de temperatura asociadas a ciudades del mismo hemisferio y entre ciudades de paises de distintos hemisferios. Tambien computar la metrica para analizar como se comporta la temperatura de una misma ciudad en distintos años.

## 2. Modelo Logístico de Crecimiento Poblacional

Considerar una población cuyo tamaño  $N$  sera gobernado por una dinámica de crecimiento poblacional a través del tiempo

$$\frac{dN}{dt}$$

El supuesto de este modelo es que la tasa de crecimiento de la población decrecerá a mayor densidad poblacional y se incrementara a menor densidad poblacional causado por la competencia de recursos limitados como el alimento o la tierra por ejemplo.

De todos modos si la población es lo suficientemente pequeña en cantidad, por ejemplo si solo hay uno o muy pocos individuos, no importa cuanta abundancia de alimento o tierra se disponga la población terminara extinguiéndose. Este modelo por ende plantea el principio de que los individuos de una población requieren de una presencia mínima de otros individuos para poder sobrevivir y reproducirse exitosamente. Entonces cuando el tamaño de la población es muy pequeño, no se podrá mantener una tasa de crecimiento positiva. La ecuación que gobierna esta dinámica poblacional se describe a continuación

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \left(\frac{N}{A} - 1\right)$$

donde  $r$  es la tasa de crecimiento poblacional intrínseca,  $K$  es la cantidad máxima de individuos que se pueden sostener con los recursos disponibles en el sistema y  $A$  es el tamaño mínimo de la población necesaria para que pueda sobrevivir, es decir,  $A$  es el umbral de mínima supervivencia. Por razones obvias suponemos que  $A < K$ . Se esperan observar dinámicas distintas dependiendo si la cantidad inicial de población  $N(t = 0)$  es mayor, igual o menor que  $K$  y si es mayor, igual o menor que  $A$ .

### 2.1. Objetivos

El objetivo de este trabajo es estudiar la estabilidad y convergencia de los distintos métodos numéricos y la dinámica de los distintos sistemas físicos. Deberá resolver las ecuaciones de la dinámica poblacional con métodos numéricos y analizar el comportamiento de sus soluciones. Para esto deberá probar distintas condiciones iniciales y distintos pasos temporales para reconstruir numéricamente la trayectoria de cada sistema.

Algunas consideraciones:

- Resuelva utilizando distintas condiciones iniciales.
- Utilice la solución analítica del sistema para comparar con los resultados que obtienen numéricamente.
- Estudie cómo evoluciona la tasa de cambio de población respecto al tamaño de la población.
- El informe deberá incluir un análisis de la **estabilidad de los métodos numéricos** propuestos.
- ¿Qué un método sea incondicionalmente estable nos asegura convergencia? No olvidar mostrar qué sucede con pasos temporales grandes.