Métodos Numéricos y Optimización - Primer cuatrimestre de 2024

Trabajo Práctico 2 - Modelos de dinámica poblacional y Diferenciacion Numerica

Fecha límite de entrega: Jueves 10 Octubre a las 08:00

Escribir un informe de máximo 15 carillas reportando los resultados de los siguientes experimentos numéricos. Los códigos desarrollados se deben entregar junto al informe.

---

1. Calculo de similaridad de series temporales

Consideremos un conjunto de datos T_i con mediciones de temperatura $x(t)$ de la region i

$$T_i = \{x(t_1), x(t_2), \ldots, x(t_n)\}$$

Estas mediciones se realizan por año, mes y dia en distintas ciudades del planeta y se descargan del portal `kaggle.com/datasets/sudalairajkumar/daily-temperature-of-major-cities`.

1.1. Objetivo

- Se solicita proponer una medida de similaridad $S_{i,j}(T_i, T_j)$ entre cada par de series temporales (T_i, T_j) basandose en la tasa de aumentos y/o decrementos de temperatura considerando todo el rango de tiempo de analisis (año, mes, etc).
- La medida de similaridad debe ser independientemente del valor de temperatura $x(t_i)$ y solo debe considerar todas las tasas de variacion de la misma $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ a lo largo de un rango de tiempo determinado.
- Por ejemplo, cada vez que un par de series T_i, T_j asociados a regiones i y j presentan una tasa similar de aumento o decremento de temperatura cerca de la misma epoca del año o mes entonces ese escenario contribuye a alta similaridad. Por el contrario, si dos series de tiempo presentan variaciones de temperatura (aumentos o decrementos) opuestas o muy distintas cerca de la misma epoca del año, entonces se esa variacion contribuye a mayor discrepancia.
- considerar los metodos numericos vistos en clase para computar las tasas de variacion de temperatura y comparar su desempeño.
- Una vez que este propuesta la metrica S_{ij} comparar la similaridad entre pares de series de temperatura asociadas a ciudades del mismo hemisferio y entre ciudades de paises de distintos hemisferios. Tambien computar la metrica para analizar como se comporta la temperatura de una misma ciudad en distintos años.

2. Modelos de dinámica poblacional

En matemática biológica es posible modelar la dinámica poblacional a través de diferentes ecuaciones diferenciales. Uno de los modelos más famosos es el modelo logístico, en donde denotamos el tamaño poblacional en el tiempo t como $N(t)$ y su dinámica está regida por la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{rN^2}{K} = rN\frac{K-N}{K} \tag{1}$$

donde r es la tasa de crecimiento poblacional intrínseca, y K es la capacidad poblacional, es decir, la máxima cantidad de individuos que se pueden sostener con los recursos disponibles en el sistema.

Una posible variante del modelo logístico consiste en agregar el efecto Alleen, que considera la posibilidad de extinción si la cantidad de individuos está por debajo de un umbral, debido a que los individuos no se reproducen al no poder encontrarse con más individuos de la misma especie. Este modelo por ende plantea el principio de que los individuos de una población requieren de una presencia mínima de otros individuos para poder sobrevivir y reproducirse exitosamente.

La ecuación que gobierna esta dinámica poblacional se describe a continuación

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\left(\frac{N}{A} - 1\right) \tag{2}$$

donde r es la tasa de crecimiento poblacional intrínseca, K es la cantidad máxima de individuos que se pueden sostener con los recursos disponibles en el sistema y A es el tamaño mínimo de la población necesaria para que pueda sobrevivir, es decir, A es el umbral de mínima supervivencia. Por razones obvias suponemos que $A < K$. Se esperan observar dinámicas distintas dependiendo si la cantidad inicial de población $N(t=0)$ es mayor, igual o menor que K y si es mayor, igual o menor que A.

2.1. Objetivos

El objetivo de este trabajo es estudiar la estabilidad y convergencia de los distintos métodos numéricos y la dinámica de los distintos sistemas físicos. Deberá resolver las ecuaciones de la dinámica poblacional con métodos numéricos y analizar el comportamiento de sus soluciones. Para esto deberá probar distintas condiciones iniciales y distintos pasos temporales para reconstruir numéricamente la trayectoria de cada sistema.

Algunas consideraciones:

- Resuelva utilizando distintas condiciones iniciales y distintos parametros que gobiernan la ecuacion.
- Obtenga la solución analítica en el caso logístico y compare con los resultados que obtienen numéricamente.
- Estudie cómo evoluciona la tasa de cambio de población respecto al tamaño de la población.