# Sección 7.1

## SUCESIONES

# Ejercicio 2

Dé los primeros cinco términos de la sucesión:

$$\{a_n\} = \left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$$

**Solución.** Para hallar los primeros cinco términos de la sucesión dada debemos hallar $a_n$ reemplazando para $n = 1,2,3,4,5$. Tengamos en cuenta que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-1) \cdot n$$

Para $n = 1, a_1 = 3$.

Para $n = 2, a_2 = \frac{3^2}{2!} = \frac{9}{2}$.

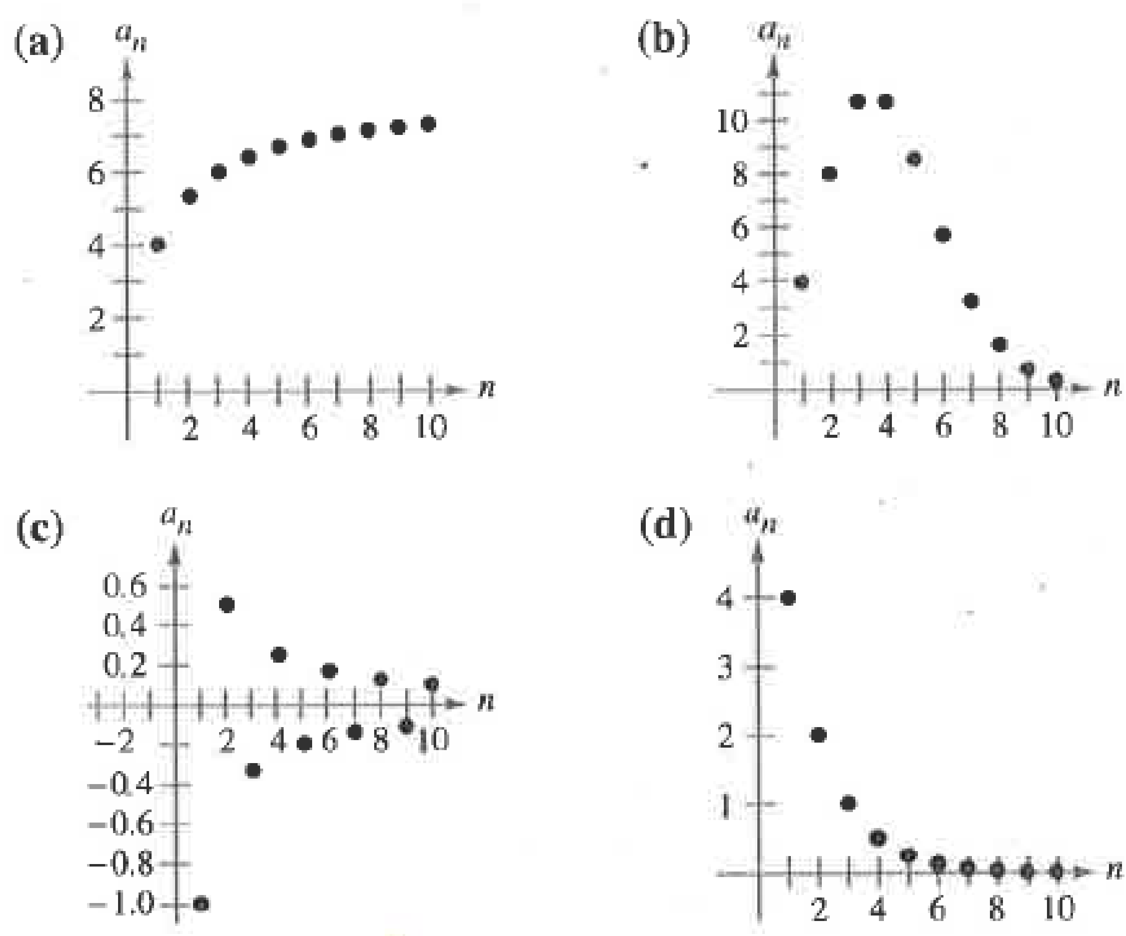
Para $n = 3, a_3 = \frac{3^3}{3!} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

Para $n = 4, a_4 = \frac{3^4}{4!} = \frac{27}{8}$.

Para $n = 5, a_5 = \frac{3^5}{5!} = \frac{81}{40}$

# Ejercicios 11 - 14

Haga coincidir la sucesión con su gráfica.




**11.** $a_n = 4(0.5)^{n-1}$

**12.** $a_n = \dfrac{8n}{n+1}$

**13.** $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$

**14.** $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

# Ejercicio 11-14

11. $a_n = 4(0.5)^{n-1}$

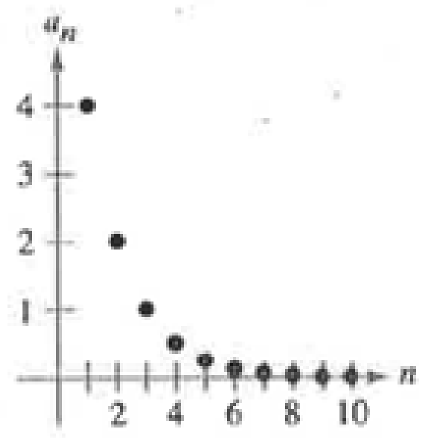
Los primeros cuatro términos de esta sucesión son:

$$a_1 = 4, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 0.5$$

Además, como

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4(0.5)^n}{4(0.5)^{n-1}} = 0.5 < 1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} < a_n$ lo que muestra que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y por tanto le corresponde la gráfica (d).

(d)



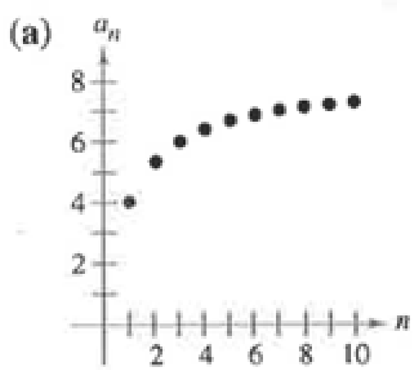
# Ejercicio 11-14

12. $a_n = \frac{8n}{n+1}$

Los primeros cuatro términos de esta sucesión son:

$$a_1 = 4, a_2 = \frac{16}{3}, a_3 = 6, a_4 = \frac{32}{5}$$

Si consideramos la función asociada a dicha sucesión, $f(x) = \frac{8x}{x+1}$, dado que $f'(x) = \frac{8}{(x+1)^2}$ la cual es positiva para toda $x \neq -1$ tenemos que $f(x)$ es creciente lo que implica que $\{a_n\}$ es creciente. Por tanto la gráfica correspondiente es (a).



# Ejercicios 11-14

13. $a_n = \frac{4^n}{n!}$

Los primeros términos de ésta sucesión son:

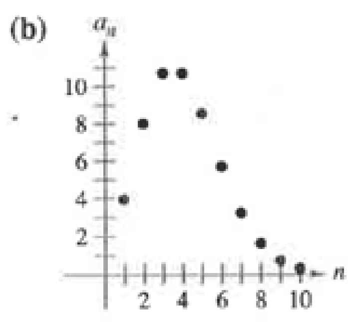
$$a_1 = 4,$$

$$a_2 = 8,$$

$$a_3 = \frac{32}{3} \sim 10.67 = a_4,$$

$$a_5 = \frac{128}{15} \sim 8.53,$$

$$a_6 = \frac{256}{45} \sim 5.69$$

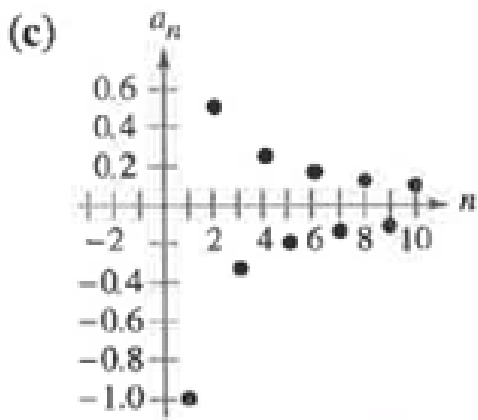



Por lo que podemos observar que al principio crece y luego decrece lo que indica que su gráfica correspondiente es la (b).

# Ejercicios 11-14

14. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

En este caso se trata de una sucesión alternante (la única dentro de las cuatros sucesiones dadas) por tanto la gráfica correspondiente es la (c).



# Ejercicio 27

Encuentre el límite (si es posible) de la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$.

**Solución.** Dividimos numerador y denominador entre $n$ con lo que tenemos,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 2$$

Luego, la sucesión converge a 2.

# Ejercicios 33-52

Determine la convergencia o divergencia de la sucesión cuyo n-ésimo término se da. Si la sucesión converge, encuentre su límite.

34. $\{a_n\} = \{1 + (-1)^n\}$

Solución. Como podemos observar,

$$a_n = \begin{cases} 2, & n\ par \\ 0, & n\ impar \end{cases}$$

Por lo que se trata de una sucesión que alterna entre 0 y 2 entonces $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe y la sucesión diverge.

42. $\{a_n\} = \left\{\frac{\ln\sqrt{n}}{n}\right\}$

Solución. Consideremos la función de una variable real $f(x) = \frac{\ln\sqrt{x}}{x}$. Como podemos observar $f(n) = a_n$ para todo entero positivo $n$.

Aplicamos la regla de L`Hopital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Entonces, por teorema podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\sqrt{n}}{n} = 0.$

Luego, $\{a_n\}$ converge a 0.

# Ejercicios 33-52

48. $\{a_n\} = \left\{n\ sen\ \frac{1}{n}\right\}$

Solución. Consideremos la función de una variable real $f(x) = x\ sen\ \left(\frac{1}{x}\right)$. Como podemos observar $f(n) = a_n$ para todo entero positivo $n$.

Aplicamos la regla de L`Hopital,

$$\lim_{x\to\infty} x\ sen\ \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{sen\ \left(\frac{1}{x}\right)}{(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{cos\left(\frac{1}{x}\right)(-x^{-2})}{-x^{-2}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Entonces, por teorema podemos concluir que $\lim_{n\to\infty} n\ sen\ \left(\frac{1}{n}\right) = 1.$

Luego, $\{a_n\}$ converge a 1.

# Ejercicios 33-52

49. $a_n = \left(1+\frac{k}{n}\right)^n$

Solución. Consideremos la función de una variable real $f(x) = \left(1+\frac{k}{x}\right)^x$. Como podemos observar $f(n) = a_n$ para todo entero positivo $n$. Para hallar $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$ como mediante sustitución directa obtenemos la forma indeterminada $1^\infty$, procederemos como sigue: supongamos que el límite existe y que es igual a y, esto es, $y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$. Tomamos logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación,

$$\ln y = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x\right]$$

# Ejercicios 33-52

Como la función logaritmo natural es continua y aplicando propiedad de logaritmo,

$$\ln y = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)}{1/x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{-kx^{-2}}{\left(1+\frac{k}{x}\right)}}{-x^{-2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{k}{1+\frac{k}{x}}\right) = k$$

Ahora, como $\ln y = k$ se sigue que $y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x} = e^{k}$ entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a $e^{k}$.

# Tips útiles a tener en cuenta a la hora de analizar si una sucesión es acotada

- Utilizar definición de sucesión acotada, esto es, mostrar que todos los términos de la misma están comprendidos entre dos números reales.
- Si la sucesión puede pensarse como función, podemos analizar si su función afín, esto es una $f(x)\ /\ f(n) = a_n$ , está acotada, determinando si la misma tiene extremos absolutos
- Analizar la convergencia de la sucesión ya que por propiedad convergencia implica acotación.
- Si la sucesión es monótona creciente entonces está acotada inferiormente ya que el primer término es cota inferior. Si la sucesión es monótona decreciente entonces está acotada superiormente ya que el primer término es cota superior.
- Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ entonces la sucesión no está acotada superiormente. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ la sucesión no está acotada inferiormente.

# Tips útiles a tener en cuenta a la hora de analizar la monotonía de una sucesión

- Utilizar definición de sucesiones monótonas, esto es, mostrar que cada uno de los términos sucesivos es mayor ó igual que el anterior: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$ (monótona creciente) ó que cada cada uno de los términos sucesivos es menor ó igual que el anterior: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a_{n+1}$ (monótona decreciente). Tener en cuenta que si $\{a_n\}$ es una sucesión de términos positivos, es útil plantear el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ y examinar si es menor que 1 (en cuyo caso la sucesión será decreciente) o si es mayor que 1 (en cuyo caso la sucesión será creciente).
- Si la sucesión puede pensarse como función, podemos analizar si su función afín es monótona.
- Si encontramos tres términos $a_r, a_k, a_t$ con $r < k < t$ para los cuales $a_r < a_k$ y $a_k > a_t$ ó $a_r > a_k$ y $a_k < a_t$ la sucesión no es monótona.

# Ejercicio 66

Determine si la sucesión cuyo n-ésimo término se da es monótona. Analice si la sucesión es acotada. Emplee una aplicación gráfica para confirmar los resultados.

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)$$

Solución.  Como podemos observar,

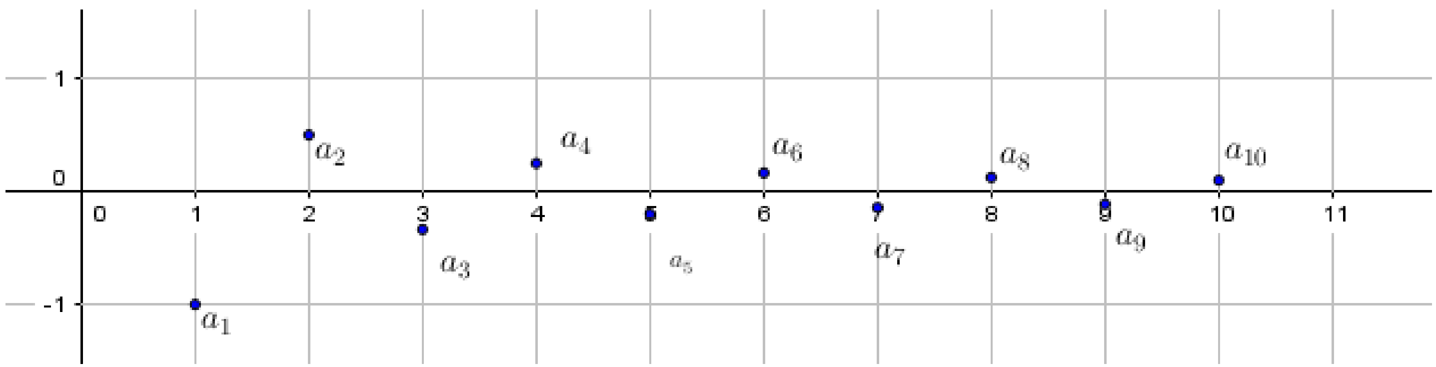
$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, si\ n\ es\ impar \\ \dfrac{1}{n}, si\ n\ es\ par \end{cases}$$

Por lo que la sucesión $\{a_n\}$ no es monótona.

Como $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| = \frac{1}{n} \leq 1$ la sucesión es acotada.

# Ejercicio 66

A continuación se ilustra gráficamente la sucesión $\{a_n\} = \left\{(-1)^n \left(\frac{1}{n}\right)\right\}$:




Si quisiéramos analizar su convergencia o divergencia dado que $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ entonces por el teorema del valor absoluto $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

## Ejercicio 72

Determine si la sucesión cuyo n-ésimo término se da es monótona. Analice si la sucesión es acotada. Emplee una aplicación gráfica para confirmar los resultados.

$$a_n = \frac{sen\sqrt{n}}{n}$$

Solución. En primer lugar analizaremos si la sucesión $\{a_n\}$ es monótona:

Para $n = 1, a_1 = sen\ 1 > 0.$

Para $n \in \mathbb{N}\ /\ \pi < \sqrt{n} < 2\pi$ , esto es $\pi^2 \sim 9.87 < n < 4\pi^2 \sim 39.48$, dado que $\sqrt{n}$ se encuentra en los cuadrantes III o IV, se tiene que $sen\sqrt{n} < 0.$

Luego $a_n < 0$ para $n \in \mathbb{N}\ /\ \pi^2 < n < 4\pi^2$, esto es para $10 \leq n \leq 39$. En particular para $n = 10, a_{10} < 0.$

Para $n \in \mathbb{N}\ /\ 2\pi < \sqrt{n} < 3\pi$, esto es $4\pi^2 \sim 39.48 < n < 9\pi^2 \sim 88.83$, dado que $\sqrt{n}$ se encuentra en los cuadrantes I o II, se tiene que $sen\sqrt{n} > 0.$

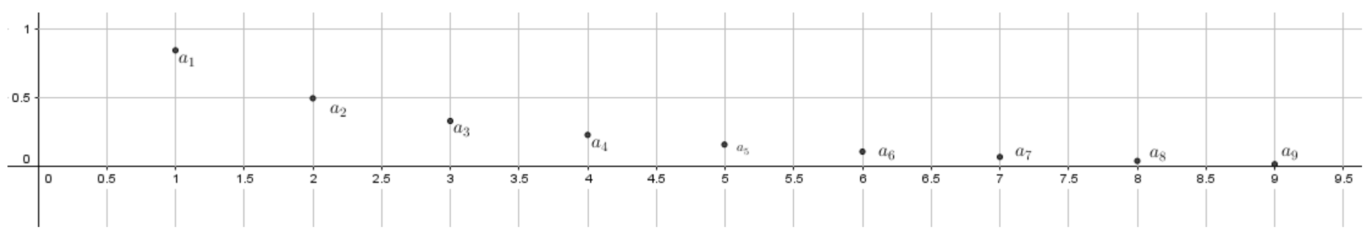
# Ejercicio 72

Luego $a_n > 0$ para $n \in \mathbb{N}$ / $4\pi^2 < n < 9\pi^2$, esto es para $40 \leq n \leq 88$. En particular para $n = 60, a_{60} > 0$.

Luego, $a_1 > 0, a_{10} < 0 \ y \ a_{60} > 0$ lo que muestra que la sucesión $\{a_n\}$ no es monótona.

$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| = \left|\frac{sen\ \sqrt{n}}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq 1$, esto es $-1 \leq a_n \leq 1$, lo que muestra que la sucesión $\{a_n\}$ es acotada.

A continuación se ilustra la gráfica de la sucesión:




Si quisiéramos analizar la convergencia de ésta sucesión, dado que $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n} \leq \frac{sen\ \sqrt{n}}{n} \leq \frac{1}{n}$ donde $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ entonces, por teorema de compresión, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sen\ \sqrt{n}}{n} = 0$.

# Ejercicio 75

(a) Use el teorema 7.5 para demostrar que la sucesión cuyo $n-ésimo$ término se da converge y (b) encuentre su límite.

$$a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

Solución. El teorema 7.5 nos dice que si una sucesión $\{a_n\}$ es acotada y monótona, entonces converge.

- ✓ $\{a_n\}$ es acotada, en efecto:

  Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{1}{3^n} \leq 1$$

  entonces,

$$0 \leq 1 - \frac{1}{3^n} \leq 1$$

  Multiplicando miembro a miembro por $\frac{1}{3}$,

$$0 \leq \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = a_n \leq \frac{1}{3}$$

# Ejercicio 75

✓ $\{a_n\}$ es monótona creciente, en efecto:

Consideramos su función afín $f(x) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^x}\right)$. Dado que $\forall x \in R, f^{'}(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3^x}\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right) > 0$ $f$ es creciente lo que implica que $\{a_n\}$ también lo es.

Luego, la sucesión $\{a_n\}$ es acotada y monótona entonces por teorema converge más aún, por ser creciente, $\{a_n\}$ converge a su supremo (la mínima de sus cotas superiores).

A continuación hallaremos el límite de la sucesión:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3}$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/3$.