Sección 3.2

Teorema de Rolle y el Teorema del valor medio

Ejercicio 8

Encuentre las dos intersecciones x de la función f y demuestre que $f'(x) = 0$ para algún punto entre las dos intersecciones x.

$$f(x) = -3x\sqrt{x+1}$$

Solución.

Dominio de f: $[-1, +\infty)$

Para hallar las intersecciones con el eje x, planteamos la ecuación

$$f(x) = 0$$

$$-3x\sqrt{x+1} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = -1$$

Por lo tanto, $f(-1) = f(0) = 0$, donde f es continua en $[-1,0]$ y derivable en $(-1,0)$ entonces por el Teorema de Rolle existe por lo menos un número c en $(-1,0)$ tal que $f'(c) = 0$. Para encontrar tal c, resolvemos la ecuación

$$f'(c) = -3\sqrt{c+1} - \frac{3}{2}c(c+1)^{-1/2} = 0$$

$$\frac{-3(c+1) - \frac{3}{2}c}{\sqrt{c+1}} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{c = -\frac{2}{3}}$$

Ejercicio 14

Determine si se puede aplicar el teorema de Rolle a f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si puede aplicarse, encuentre todos los valores c en el intervalo abierto (a, b) tales que $f^{'}(c) = 0$.

$$f(x) = 3 - |x - 3|, \quad [0,6]$$

Solución. f se puede definir como una función por tramo:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 6, & si\ x \geq 3. \\ x, & si\ x < 3 \end{cases}$$

f es continua en $[0,6]$ pero no es derivable en (0,6) ya que en $x = 3$ no es derivable por ser un punto anguloso (en x=3 las derivadas laterales existen pero no coinciden, $f^{'}{}_{-}(3) = 1\ y\ f^{'}{}_{+}(3) = -1$), por tanto no se puede aplicar el teorema de Rolle en $[0,6]$.

Ejercicio 30

Teorema del valor medio. Considere la gráfica de la función $f(x) = -x^2 - x + 6$.

(a) Encuentre la ecuación de la recta secante que une los puntos $(-2,4) y\ (2,0)$.

Solución. La pendiente de la recta secante que une los puntos $(-2,4) y\ (2,0)$ es

$$\frac{4-0}{-2-2} = -1$$

Utilizando la forma punto pendiente de una recta y tomando cualesquiera de los dos puntos, la ecuación de la recta secante viene dada por

$y - 4 = -1(x + 2) \Rightarrow \boldsymbol{y = -x + 2}$

(b) Emplee el teorema del valor medio para determinar un punto c en el intervalo $(-2,2)$ tal que la recta tangente en c sea paralela a la recta secante.

Solución. Como f es continua en $[-2,2]$ y derivable en $(-2,2)$, por el teorema del valor medio, existe por lo menos un número c en $(-2,2)$ tal que $f'(c) = -1$. Resolviendo la ecuación $f'(c) = -1$ se obtiene

$$-2c - 1 = -1 \Rightarrow \boldsymbol{c = 0}$$

(c) Encuentre la ecuación de la recta tangente en c.

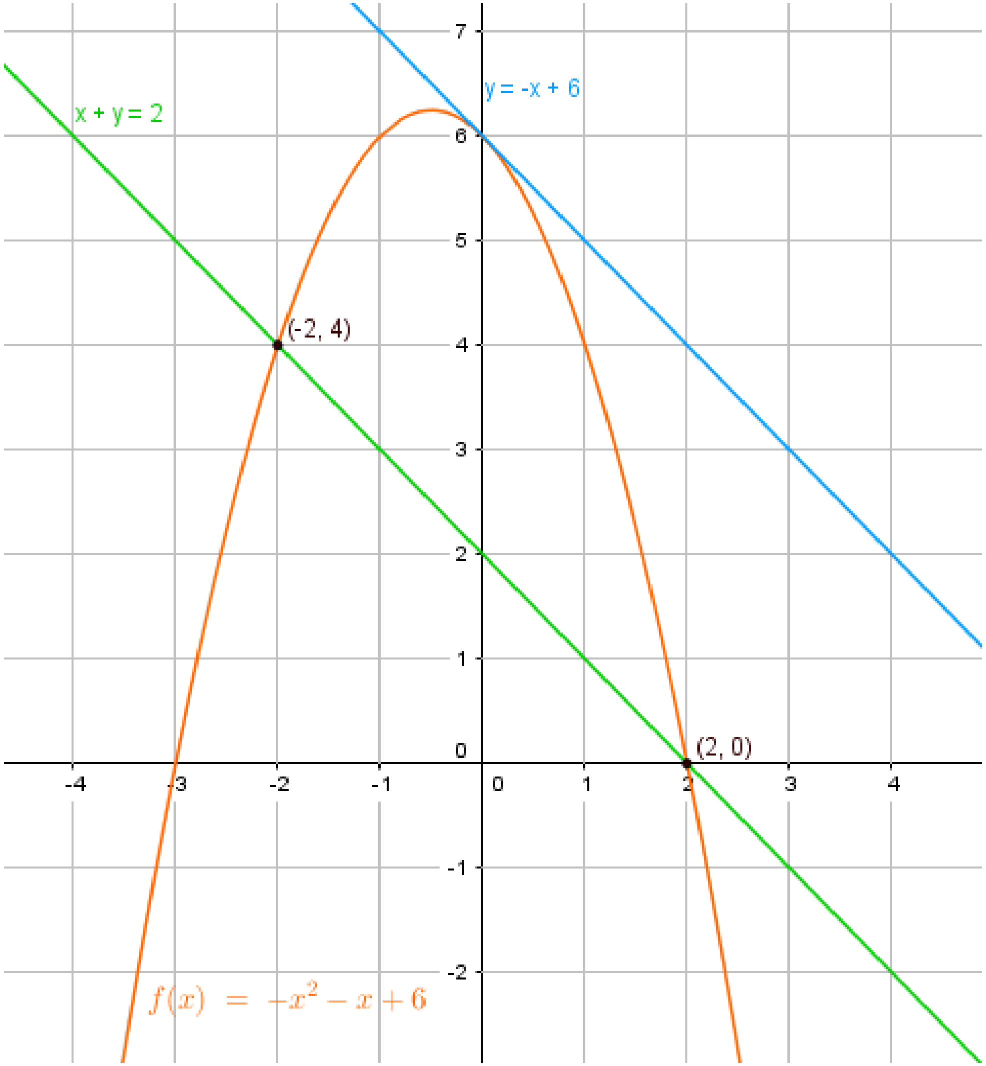
Solución. La ecuación de la recta tangente a f en c=0 viene dada por

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$\boldsymbol{y = -x + 6}$$

Ejercicio 30

(d) Emplee una aplicación gráfica para graficar f, la recta secante y la recta tangente.



Ejercicio 36

Determine si el Teorema del valor medio puede aplicarse a f en el intervalo cerrado $[a, b]$. Si puede aplicarse, encuentre todos los valores de c en el intervalo abierto (a, b) tales que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$$f(x) = \arctan(1-x)\,, [0,1]$$

Solución. Como f es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$, por el Teorema de Lagrange, existe por lo menos un número c en (0,1) tal que

$$f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

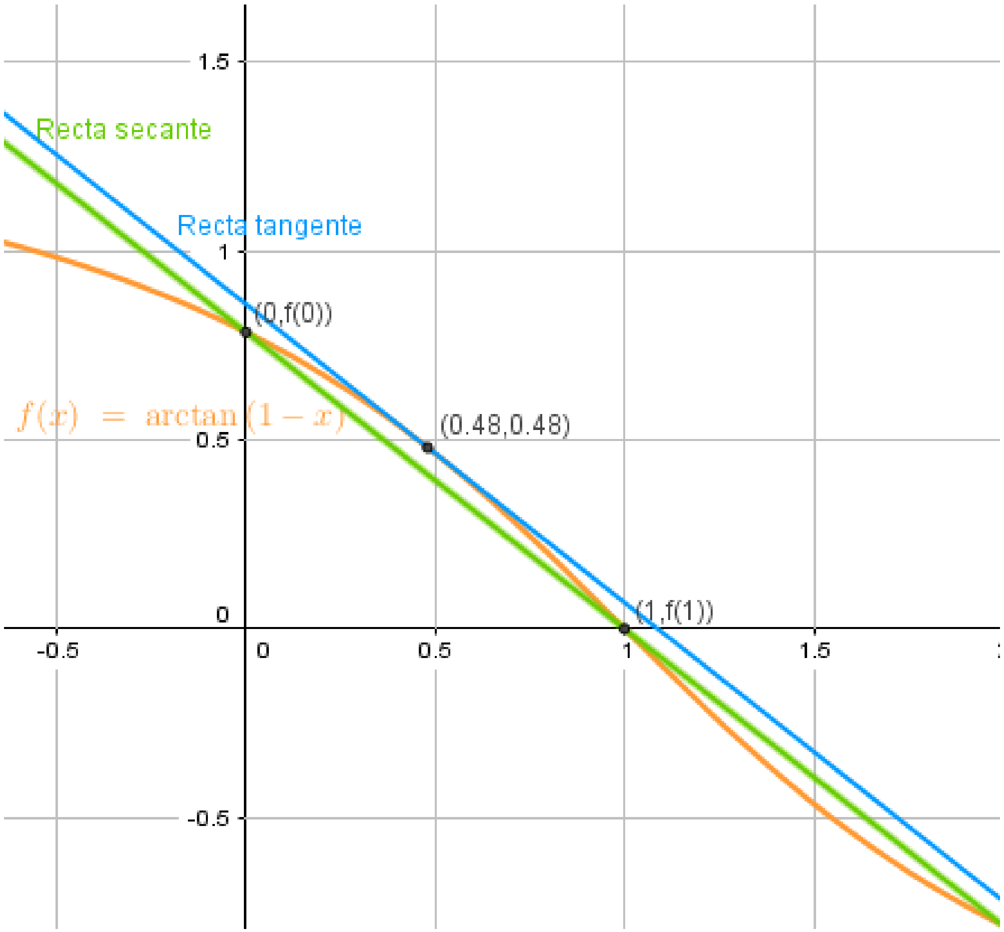
$$\frac{-1}{1+(1-x)^2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1+(1-x)^2$$

$\sqrt{\frac{4}{\pi}-1} = |1-x| \Rightarrow 1-x = \sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$ ó $1-x = -\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$. Por consiguiente, $x \cong 0.48$ ó $x \cong 1.52$ (a éste último valor lo descartamos ya que no se encuentra en el intervalo (0,1)).

Luego, $\boldsymbol{c \cong 0.48}$.

Ejercicio 36



Ejercicio 50

Emplee el Teorema del valor intermedio (Bolzano) y el Teorema de Rolle para probar que la siguiente ecuación tiene exactamente una solución real.

$$2x - 2 - \cos x = 0 \; \mathbf{(1)}$$

Solución. Llamemos $f(x) = 2x - 2 - \cos x$. Dado que f es continua en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(0) y\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ son de distinto signo, entonces por teorema de Bolzano, existe por lo menos un número c entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ para el cual $f(c) = 0$ lo que muestra que la ecuación **(1)** tiene al menos una solución. A continuación probaremos que tiene una única solución: Supongamos que no es única, entonces existen dos números c_1 y c_2 , con $c_1 < c_2$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tales que $f(c_1) = f(c_2) = 0$ y dado que f es continua en $[c_1, c_2]$ y derivable en (c_1, c_2) se tiene, por teorema de Rolle que existe al menos un número c en (c_1, c_2) tal que $f'(c) = 0$ entonces $2 + \sin c = 0 \;\Rightarrow \sin c = -2$ para algún c, lo cual es un absurdo. Dicho absurdo provino de suponer que la ecuación no tenía única solución.

Luego, la ecuación$2x - 2 - \cos x = 0$ tiene única solución.

Ejercicio 57

Sea $p(x) = Ax^2 + Bx + C$. Pruebe que para todo intervalo $[a, b]$ el valor de c garantizado por el teorema del valor medio es el punto medio del intervalo.

Solución.

Por ser p un polinomio, es continuo en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces, por teorema de Lagrange existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$p'(c) = \frac{p(b) - p(a)}{b - a}$$

$$2Ac + B = \frac{(Ab^2 + Bb + C) - (Aa^2 + Ba + C)}{b - a}$$

$$2Ac + B = \frac{A(b^2 - a^2) + B(b - a)}{b - a}$$

$$2Ac + B = \frac{A(b - a)(b + a) + B(b - a)}{b - a}$$

$$2Ac + B = A(b + a) + B$$

$$\boldsymbol{c = \frac{b + a}{2}}$$

Ejercicio 64

Determine los valores de a, b y c tales que la función f satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,3]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ ax + b, & 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x + c, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

Solución. Para que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio:

1. f debe ser continua en $[0,3]$.
2. f debe ser derivable en $(0,3)$.

Analicemos cada una de ellas:

1. f sea continua en $[0,3]$

Para todos los valores de a, b y c, f es continua en $(0,1) \cup (1,3]$. Necesitamos analizar cuidadosamente en $x = 0$ y $x = 1$ (donde están los cambios de definición de f).

Para que f sea continua (por la derecha) en $x = 0$,

$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow$ **$1 = b$ (I)**

Para que f sea continua en $x = 1$,

$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow a + b = 5 +$ c. Pero como por (I) b=1 entonces **$a = 4 + c$ (II)**

Ejercicio 64

2. f sea derivable en $(0,3)$.

Para todos los valores de $a, b\ y\ c$, f es derivable en $(0,1) \cup (1,3)$. Debemos analizar cuidadosamente en x=1, ya que hay un cambio de definición a distinto lado de dicho valor.

Para que f sea derivable en x=1, $f'_{-}(1) = f'_{+}(1) \Rightarrow \boldsymbol{a = 6}$ y por tanto como de (II) $a = 4 + c \Rightarrow \boldsymbol{c = 2.}$

Luego, $\boldsymbol{a = 6, b = 1\ y\ c = 2.}$