UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°9

ISOMORFISMOS

1. Encuentre dos espacios isomorfos al espacio de las matrices simétricas de 2x2.
2. Sean $S=((x_1, x_2, x_3, x_4)/\ x_1+x_2+x_3=0)$ y $L=((x_1,x_2, x_3, x_4) / 2x_1+x_4=0,\ x_2 - x_3=0)$.

¿Existe algún isomorfismo entre S y L? ¿Por qué?

3. Encuentre una T.L. isomorfa para tal que:

a) Refleje a cada vector respecto de la recta y = x. Justifique.

b) Reduzca a cada vector a la mitad. Justifique

4. Determine cuáles de las siguientes transformaciones lineales son un isomorfismo. Justifique.

a) $T : R^2 \to R^3$, $T (x, y) = (x + y, y, x)$.

b) $T : R^3 \to R^2$, $T (x, y, z) = (x + 2y, y + 3z)$.

c) $T : R^3 \to P_2$, $T (a, b, c) = ax_2 + bx + c$.

d) $T : P_n \to P_{n+1}$, $T (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = a_0x + a_1x^2 + ... + a_nx^{n+1}$

e) Sea $T : R^3 \to R^3$ tal que $T (1,0,0)=(1, 1, 1)$, $T(0,1,0)= (1,1,0)$, $T(0,0,1)=(1,0,0)$.

5. Sea la transformación lineal definida como $T(x; y; z; t) = (x - z ;\ y + t)$

a) Investigue si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

b) ¿Es T un isomorfismo? ¿Por qué?.

6. Demuestre que $T: R^n \to R^n$ es un isomorfismo si y sólo si la matriz asociada a T, A_T, es invertible.

RESOLUCION DE ALGUNOS EJERCICIOS

1) Para encontrar dos espacios isomorfos a las matrices simétricas de 2x2 analicemos su dimensión:

$S_{2x2}= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \; con\; a,b,c \,\epsilon\, R\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; con\; a,b,c \,\epsilon\, R\right\} =$

$= gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim S_{2x2}= 3$

Dos espacios isomorfos a S_{2x2} son R_3 y P_2 ya que a $\dim S_{2x2} = \dim R_3 = \dim P_2$

4)

a) T no es un isomorfismo ya que como $\dim R^2 < \dim R^3$ (es decir, la dimensión del espacio de llegada es mayor que la dimensión del espacio de salida) T no es una transformación lineal sobreyectiva.

b) T no es un isomorfismo ya que como $\dim R^2 < \dim R^3$, T no es una transformación lineal inyectiva. /

c) Calculamos el núcleo de T:
nu $T=\{(a,b,c)\epsilon\ R^3 \;\; / \; T(a,b,c) = 0x^2 + 0x + 0\} = \; \{(a,b,c)\epsilon\ R^3 \;\; / \;\; ax^2 + bx + c = 0x^2 + 0x + 0\,\}$
Entonces igualando los coeficientes de las mismas potencias de la variable independiente resulta que $a = 0, b = 0, c = 0$.
De modo que nu T={(0,0,0)} y por teorema T es inyectiva ya que un $T=\{0_{R^3}\}$.
Como la dimensión del espacio de salida es igual a la dimensión del espacio der llegada y se demostró que T es inyectiva, por teorema resulta que T es además sobreyectiva. Por definición entonces T es un isomorfismo.

e) Armemos la matriz A_T asociada a T colocando los vectores imágenes como columnas:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det A_T= 1$, esta matriz es invertible.
Usando el resultado $T: R^n \to R^n$ es un isomorfismo $\Leftrightarrow A_T$ es invertible (ejercicio 2, pág. 518), resulta que esta transformación lineal es un isomorfismo.

5) Analicemos si T es inyectiva

$$nu\,T = \{(x,y,z,t) \in R^4 \;/\; T(x,y,z,w) = (0,0)\}$$
$$= \{(x,y,z,t) \in R^4 \;/\; (x-z, \quad y+t) = (0,0)\}$$

Igualando las componentes de los vectores de la última igualdad resulta:

$$x = z, \; t = -y$$

Entonces:

$$nu\,T = \{(x,y,x,-y) \quad con\; x,y \in R\} = gen\,\{(1,0,1,0),(0,1,0,-1)\}$$

Como

$$nu\,T \neq \{(0,0,0,0)\}$$

T no es inyectiva.

Como $\nu(T)=2$ (por los cálculos anteriores) y $\nu(T)+\rho(T)=4$ resulta que $\rho(T)=2$. De modo que dim(Imagen T)= dim R^2. Entonces Imagen T= R^2. Por lo tanto T es sobreyectiva.

b) T no es un isomorfismo porque no es inyectiva.

6)

⇒) Supongamos que T es un isomorfismo. Como A_T es una matriz cuadrada pues la cantidad de filas es igual a la cantidad de columnas ya que los espacios de salida y de llegada de T tienen la misma dimensión, A_T puede ser invertible o no. Supongamos que A_T es no invertible. Entoncespor el Teorema de Resumen $\nu(A_T)>0$ y por el Teorema que afirma "Si T:V→W es lineal. T es 1 a 1 si y sólo si 0_V es el único elemento de nu T" se puede asegurar que T no es inyectiva. Pero esto es absurdo pues T es un isomorfismo. Como el absurdo provino de suponer que A_T es no invertible,sedemostró que A_T tiene inversa.

⇐) Sea A_T una matriz invertible. Entonces por el Teorema de Resumen $\nu(A_T)=0$. Pero por Teoremas referidos a la representación matricial de una transformación lineal $\nu(T)= \nu(A_T)$. De modo que$\nu(T)=0$ y nu T=$\{0_{R^n}\}$. Por el Teorema que afirma "Si T: V→W es lineal. T es 1 a 1 si y sólo si 0_V es el único elemento de nu T" resulta que T es 1 a 1. Como los espacios de salida y de llegada de T son iguales y, por lo tanto, tienen la misma dimensión, por el Teorema "Si T: V→W es lineal y dim V=dimW entonces si T es inyectiva entonces T es sobreyectiva" se puede asegurar que T es sobreyectiva y, por definición de isomorfismo, T es un isomorfismo.