Primer Parcial - Mecánica Computacional

7 de octubre de 2024

Ejercicio 1

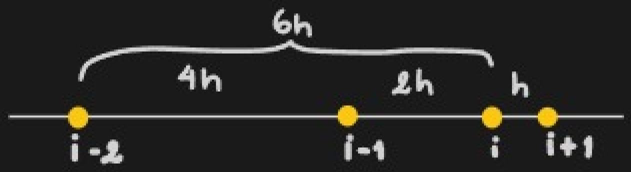
Dada la siguiente aproximación basada en series de Taylor:

$$\frac{d\theta}{dx} \simeq a\theta_{i-2} + b\theta_{i} + c\theta_{i+1}$$

a) Determinar los valores de los coeficientes a, b y c, **de tal manera que la aproximación sea lo más precisa posible**, considerando un espaciamiento donde la malla se va refinando a la mitad de izquierda a derecha, es decir: si $x_i - x_{i-1} = h$, entonces $x_{i+1} - x_i = h/2$.

b) Determinar el orden del error de dicha aproximación.

a) Para determinar los valores de los coeficientes, se debe realizar el desarrollo por series de Taylor. Tengo tres incógnitas, por lo que voy a llegar hasta la derivada segunda



$$f(x_{i+1}) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \mathcal{E}(h^3)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x) - 6hf'(x) + \frac{(6h)^2}{2}f''(x) + \mathcal{E}(h^3)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = a\left[\theta_i - 6h\theta'_i + \frac{(6h)^2}{2}\theta''_i\right] + b\theta_i + c\left[\theta_i + h\theta'_i) + \frac{h^2}{2}\theta''_i\right]$$

Agrupo por derivadas

$$\left.\begin{aligned} \theta_i &\rightarrow a+b+c=0 \quad (1) \\ \theta'_i &\rightarrow -6a+c=\frac{1}{h} \quad (2) \\ \theta''_i &\rightarrow \frac{6^2}{2}a+\frac{1}{2}c=0 \quad (3) \end{aligned}\right\}$$

de (3) $c = -36a$

reemplazo en (2): $-6a - 36a = \frac{1}{h} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{42h}}$

reemplazo en (1): $-\frac{1}{42h} + b + \frac{6}{7h} = 0$

$\boxed{b = \frac{-5}{6}}$ $\boxed{c = \frac{6}{7h}}$

b) Dado que los coeficientes dividen las funciones por h, el orden del error es h^2