UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°6

BASES ORTONORMALES Y PROYECCIONES EN R^n

1. Identifica si el conjunto {(2, -1), (1, 2), (-1, 1)} es ortogonal, ortonormal o ninguna de las opciones anteriores:

2. Encuentra condiciones sobre a y b para que

a) {(5, 0), (a, b)} sea ortogonal

b) {(a, b), (-3/5, 4/5)} sea ortonormal

3. Encuentra una base ortogonal y otra ortonormal a partir del conjunto linealmente independiente:

a) B= {(1, 0, 0), (4, -2, 0), (1, 1, 5)}.

b) B= {(1, -1), (1, 1)}

4. Construye en cada ítem una base ortogonal y otra ortonormal para los siguientes subespacios:

a) H= {(x, y, z) / 2x-y-z = 0}

b) H= {(x, y, z, w) / x - y +z +w = 0}

5. ¿La matriz A= $\begin{pmatrix} sen\, t & \cos t \\ \cos t & -sen\, t \end{pmatrix}$ con $t \in R$ es ortogonal? ¿Por qué?

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS

1. El conjunto no es ortogonal pues, por ejemplo, (2,-1).(-1,1)=-3 $\neq$ 0. Por lo tanto, el conjunto tampoco es ortonormal.

2. a) Para que {(5, 0), (a, b)} sea ortogonal debe satisfacerse que

$$(5, 0).(a, b)=0 \Rightarrow 5a + 0.\ b=0 \Rightarrow 5\ a=0 \Rightarrow a=0$$

Por lo tanto, para que el conjunto sea ortogonal si a=0 y b$\in$R.

b) Para que {(a, b), (-3/5, 4/5)} sea ortonormal debe satisfacerse que

$(a,b).\ (-3/5,\ 4/5)=0$ (1)

$\sqrt{a^2+b^2}=1$ (2)

De la ecuación (1) se obtiene la ecuación $\frac{-3}{5}a+\frac{4}{5}b=0$. Despejando $\frac{4}{5}b=\frac{3}{5}a \Rightarrow b=\frac{3}{5}\ a.\frac{5}{4}=\frac{3}{4}a$.

Reemplazando la expresión de b en (2) resulta $\sqrt{a^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2}$=1.

Elevando miembro a miembro al cuadrado la última ecuación se obtiene

$$a^2+\frac{9}{16}\ a^2=1$$

$$\frac{25}{16}\ a^2=1$$

$$a^2=\frac{16}{25}$$

$$a=\ \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$a=\pm\ \frac{4}{5}$$

Entonces hay dos pares de reales que hacen que el conjunto sea ortonormal.

Si $a=\frac{4}{5}$ entonces b=$\frac{3}{4}\ .\frac{4}{5}=\ \frac{3}{5}$.

Si $a=\frac{-4}{5}$ entonces b=$\frac{3}{4}\frac{-4}{5}=\ \frac{-3}{5}$.

4.

a) H= {(x, y, z) $\in \Re^3$ / 2x - y –z = 0}

Primeros busquemos una base de H. Despejando y de la ecuación definida en H resulta: 2x-z=y.

Entonces $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in H \leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x-z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-z\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

De modo que B={$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$} genera a H. Como además B es un conjunto linealmente independiente porque contiene dos vectores que no son múltiplos, B es una base de H.

Apliquemos ahora a B el procedimiento de Gram-Schmidt a B. Para ello denotemos: $u_1=(1,2,0)$; $u_2=(0,-1,1)$.

Comencemos construyendo vectores ortogonales v_1 y v_2:

$$v_1=u_1=(1,2,0)$$

$$v_2 = u_2 - proy_{v_1}\ u_2 = u_2 - \frac{u_2.v_1}{|v_1|^2}\ v_1 = (0,-1,1) - \frac{-2}{5}\ (1,2,0)$$
$$= (0,-1,1) - \left(\frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, 1\right)$$

Verifica que efectivamente v_1 y v_2 son vectores ortogonales pues $v_1.v_2 = 0$.

Procedamos ahora a hacer obtener de v_1 y v_2 vectores unitarios dividiendo cada uno de ellos por su norma:

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$
$$w_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{30}}{5}}\left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, 1\right) = \frac{5}{\sqrt{30}}\ \left(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}, 1\right)$$

Rpta: B_2= $\{w_1, w_2\}$ es una base ortonormal del subespacio H.

---

5. Dada la matriz A resulta que A^t= A.

Resolviendo A. A^t se obtiene A A^t= $\begin{pmatrix} sen^2\, t + cos^2 t & sen\, t\ \cos t - \cos\, t.\, sen\, t \\ \cos t\ sent - sent \cos t & cos^2 t + sen^2\, t \end{pmatrix}$

Por la identidad Pitagórica resulta entonces que A A^t = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Entonces A^t = A^{-1} y A es una matriz ortogonal.

Otro modo: demostrar que los vectores columnas de A son una base ortonormal de R^2.