

Respuestas Práctica N°6

Conjuntos Ortogonales y Proyecciones

Ejercicio 1

- a) C no es ni ortogonal ni ortonormal
b) C es ortonormal

Ejercicio 2

$$(a, b) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$(a, b) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Ejercicio 3

$$\text{Base Ortogonal} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Base Ortonormal} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 4

$$\text{a) Base Ortogonal} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Base Ortonormal} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} \\ 3/\sqrt{29} \\ 4/\sqrt{29} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{b) Base Ortogonal} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Base Ortonormal} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 5

a) A es ortogonal ya q' se cumple que: $A^t = A^{-1}$

b) B es ortogonal (verifica q' $B^t = B^{-1}$)

Además las columnas conforman vectores ortogonales entre si (prod. escalar entre columnas = 0) y cada vector columna tiene módulo o norma = 1.

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{10}/4 \\ 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

a) Demo:

Dato: $P^t = P^{-1}$ y $Q^t = Q^{-1}$ por ser ortogonales

Demo: parte de $(PQ)^t =$ y llega a $(PQ)^{-1}$.

b) Demo:

Dato: $Q = Q^t$ por ser simétrica y $Q = Q^{-1}$ por ser ortogonal

Demo: parte de $Q^2 = Q \cdot Q = \dots$

c) Demo:

Dato: $(u+v) \perp (u-v) \Rightarrow (u+v) \cdot (u-v) = 0$

Demo: parte de $(u+v)(u-v) = \dots$ y recordar $u^c = |u|^2$ y $v^c = |v|^2$

d) Demo

Dato: $u \perp v \Rightarrow u \cdot v = 0$

Demo: Parte de $|u+v|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = \dots$

e) Demo

Dato: $A = A^{-1}$ (Ortogonal) Demo: parte de $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Ejercicio 7 a) Se cumple $q^t S^t = S^{-1} \therefore S$ es base ortonormal

$$b) \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} S = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Cuando las bases son ortonormales por ej $B = \{u_1, u_2\}$ con $u_1 \perp u_2$ ($u_1 \cdot u_2 = 0$) y $|u_1| = |u_2| = 1$; y se tiene un vector $v \in \text{gen}\{u_1, u_2\}$ tal que $v = \alpha u_1 + \beta u_2 \Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ y $\alpha = v \cdot u_1$ y $\beta = v \cdot u_2$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3\sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 9

a) Una base ~~ortogonal~~ ortonormal de H : $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 0 \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{proy}_H v = \text{proy}_{\substack{\text{(base ortonormal)} \\ \text{de } H}} (-1, 2, 3, 1) = \begin{pmatrix} 4/11 \\ 4/11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Base ortonormal de H (partiendo de $\psi = \frac{3}{2}y + 3z$) = $\left\{ \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} \\ 3/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{18\sqrt{3}}{91} \\ \frac{12\sqrt{3}}{91} \\ \frac{\sqrt{3}}{7} \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{proy}_H (3, 1, 4) = \begin{pmatrix} \frac{186}{49} \\ \frac{75}{49} \\ \frac{118}{49} \end{pmatrix}$$

Exercício 11

Base ortonormal: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

$$\text{dist } \vec{x} \text{ a } H : \left| \vec{x} - \text{proj}_{\left(\begin{smallmatrix} \text{Base ortonormal} \\ \text{de } H \end{smallmatrix} \right)} \vec{x} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} - \text{proj}_{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right| =$$

$$\boxed{\text{dist. de } x \text{ a } H : \sqrt{32}} \quad = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+16+16} = \sqrt{32}$$