Anexo a la sección 4.1 con respecto a dependencia/independencia lineal

A partir de la definición de *Wronskiano de n funciones* (Def. 4.1.2 de pág. 123) con al menos n-1 derivadas, será útil el siguiente resultado:

a) **Si n funciones $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ son LD en I $\implies$ W$[y_1, y_2, \cdots, y_n]$(x) = 0 para todo x en I.**

o lo que es lo mismo, también puede expresarse como:

b) **Si W$[y_1, y_2, \cdots, y_n]$(x_0) $\neq$ 0 para algún x_0 en I $\Rightarrow$ las funciones $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ son LI en I**

La condición "*W$[y_1, y_2, \cdots, y_n]$(x) = 0 para todo x en I*" en a), no es condición suficiente para la dependencia lineal ya que pueden existir funciones LI cuyo wronskiano sea la función nula (ver el ejemplo que sigue). Esto significa que **los recíprocos de estas implicaciones, a veces NO SON CIERTAS cuando trabajamos con funciones cualesquiera.**

Ejemplo: Sean $y_1(x)= x^3$ e $y_2(x)=|x^3|$. Veamos primero que el conjunto de funciones es Li en R.

Si c_1 y c_2 son tales que

$$c_1\, y_1(x)+c_2 y_2(x) = 0 \quad \text{para todo x en R,}$$

particularizando en los intervalos [0, ∞) y (-∞, 0) se tiene

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

de donde se deduce que $c_1 = c_2 = 0$. Esto muestra que y_1 e y_2 son linealmente independientes en (-∞, ∞). Si embargo, no existe ningún x en R tal que W(x)≠0, en efecto:

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x^3 & |x^3| \\ 3x^2 & 3x|x| \end{vmatrix} = 3x^4|x| - 3x^2|x^3| = 0 \quad \text{para todo x} \in \text{R.}$$

Demostraremos a continuación, que cuando se trata de n funciones que son soluciones de una ED lineal homogénea de orden n, los recíprocos en las afirmaciones anteriores son verdaderos. Enunciamos estos nuevos bicondiciones a través del siguiente criterio, que es una ampliación del Teorema 4.1.3 del libro. Recuerden que en esta sección siempre estamos suponiendo se cumplen las condiciones pedidas por el Teorema de Existencia y Unicidad (Teorema 4.1.1), a menos que se diga lo contrario.

Criterio para determinar si n soluciones de una EDLH es LI o LD

Sean $\boldsymbol{y_1, y_2, \cdots, y_n}$ n funciones en $\boldsymbol{C^n(I)}$ soluciones de la ED lineal $\boldsymbol{L(y) = 0}$ de orden n, definidas en un intervalo I. Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

1) **El conjunto $\boldsymbol{\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}}$ es LI en I**

2) **W[$\boldsymbol{y_1, y_2, \cdots, y_n}$](x) $\neq$ 0 para todo x en I.**

3) **W[$\boldsymbol{y_1, y_2, \cdots, y_n}$]($x_0$) $\neq$ 0 para algún x_0 en I**

Demostración (para n=2).

1) $\Longrightarrow$ 2) Por el absurdo. Supongamos que W[$y_1, y_2, \cdots, y_n$](x_0) = 0 para algún x_0 en I. Entonces, teniendo en cuenta resultados del álgebra elemental, puede afirmarse que existen constantes c_1 y c_2 no ambas nulas, que son soluciones no triviales del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1{}'(x_0) + c_2 y_2{}'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Así, la función $y(x)$ definida por $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ es una solución de L(y)=0 que satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = 0$ y $y'(x_0) = 0$. Por otra parte la solución nula $z(x) = 0$ satisface estas mismas condiciones iniciales. El Teorema de existencia y unicidad implica que $y(x) = z(x)$ para todo x ∈ I, esto es, $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ para todo x ∈ I.

Como al menos uno de los c_i , i=1,2 es diferente de cero, se concluye que $\{y_1, y_2\}$ son linealmente dependiente en I, lo que contradice la hipótesis 1).

2) $\Longrightarrow$ 3) Es trivial.

3) $\Longrightarrow$ 1) Supongamos que para dos constantes c_1 y c_2 se tiene:

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0, \text{ para todo } x \in I.$$

En ese caso, $c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0,$ para todo $x \in I$.

En particular para $x = x_0$, se sigue que:

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Como $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ es el determinante de la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones se concluye que $c_1 = c_2 = 0$, lo que prueba la independencia lineal de y_1, y_2.

Observaciones:

a) Como consecuencia del criterio:

Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones definidas en I de la ED lineal homogénea $Ly=0$. Entonces existen dos posibilidades:

$$W(y_1, \ldots, y_n) = 0 \ \forall x \in I \quad \text{o bien} \quad W(y_1, \ldots, y_n) \neq 0 \ \forall x \in I.$$

b) La demostración del condicional 3) $\Longrightarrow$ 1) es la demostración para el resultado (b) que fue enunciado al inicio de este anexo.

Ejercitación para hacer en sus casas de la Sección 4.1:

3, 5, 9, 14, 18, 20, 21, 25, 29, 30, 33, 39

Link a la clase (teórica) de esta Semana 4 del 5/09/22

Sección	Tema	Enlace
4.1	**ED de orden superior. Teoría preliminar**	**Teoria** https://youtu.be/HN1s_x2KC2c
		Ejercicio 14 https://www.youtube.com/watch?v=IiwCp1AF7hI **Ejercicio 30** https://www.youtube.com/watch?v=ygRD3XEt3nw&t=5s **Ejercicio 33** https://www.youtube.com/watch?v=SMaGkiFiN1c **Independencia lineal de {x, |x|}** https://www.youtube.com/watch?v=zykOd7J-MnA