# Práctica: Larson - Sección 7.7

## Representación de funciones mediante series de potencias

Dra. Penélope Cordero

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

# ¿Qué ejercicios de práctica debo hacer?

## Sección 7.7 Representación de funciones mediante series de potencias

✓ Ejercicios Propuestos:

- **Pág. 485**: 1 al 24 /// 31 al 34 /// 37 al 40.

✓ En este video:

- Ejercicio 10.
- Ejercicio 14.
- Ejercicio 18.
- Ejercicio 32.
- Ejercicio 40.

Ejercicio 10 para la función dada encuentre una serie de potencias centrada en $c$ y determine el intervalo de convergencia.

$$f(x) = \frac{4}{3x+2};\ c = 2.$$

---

*Solución*: Reescribimos $f(x)$ llevando a la forma $\frac{a}{1-r}$ teniendo en cuenta que $r$ debe contener al factor $x-2$:

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{4}{3x+2} &= \frac{4}{3x-6+6+2} && \text{sumamos y restamos 6 en el denominador} \\
&= \frac{4}{3(x-2)+8} && \text{sacamos factor común 3 para obtener } (x-2) \\
&= \frac{4}{8+3(x-2)} && \text{conmutamos en el denominador} \\
&= \frac{\frac{4}{8}}{1+\frac{3}{8}(x-2)} && \text{dividimos numerador y denominador por 8} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{3}{8}(x-2)\right)} && \text{reescribimos para obtener la forma } \frac{a}{1-r}
\end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{3}{8}(x-2)\right)} \qquad a = \frac{1}{2} \qquad r = -\frac{3}{8}(x-2)$$

Dado que

$$f(x) = \frac{4}{3x+2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{3}{8}(x-2)\right)} \qquad a = \frac{1}{2} \qquad r = -\frac{3}{8}(x-2)$$

la serie de potencias para $f(x)$ es:

$$\frac{4}{3x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{8}(x-2)\right]^n$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{8}(x-2) + \frac{9}{64}(x-2)^2 - \frac{27}{512}(x-2)^3 + \dots\right)$$

Sabemos que la serie converge $\Leftrightarrow |r| < 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{3}{8}(x-2)\right| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < \frac{8}{3}$.
Con lo cual, el radio de convergencia para la serie centrada en 2, es $R = \frac{8}{3}$.
Veamos el intervalo de convergencia:

$$|x-2| < \frac{8}{3}$$
$$-\frac{8}{3} < x - 2 < \frac{8}{3}$$
$$-\frac{2}{3} < x < \frac{14}{3}$$

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$.

Ejercicio 14 para la función dada encuentre una serie de potencias centrada en $c$ y determine el intervalo de convergencia.

$$f(x) = \frac{4}{4+x^2};\; c = 0.$$

---

*Solución*: Reescribimos $f(x)$ llevando a la forma $\frac{a}{1-r}$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{4}{4+x^2} &= \frac{1}{1+\frac{1}{4}x^2} && \text{dividimos numerador y denominador por 4} \\ &= \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}x^2\right)} && \text{reescribimos para obtener la forma } \frac{a}{1-r} \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos $f(x) = \dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}x^2\right)}$ $\quad a = 1 \quad r = -\dfrac{1}{4}x^2$.

Entonces una serie de potencias para $f(x)$ es:

$$\frac{4}{4+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1\left[-\frac{1}{4}x^2\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n x^{2n}$$

La serie converge $\Leftrightarrow |r| < 1 \Leftrightarrow \left|-\dfrac{1}{4}x^2\right| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{4} = 2.$

Con lo cual, el radio de convergencia para la serie es $R = 2$ y el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$.

Ejercicio 18 Use la serie de potencias $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ para determinar una serie de potencias centrada en 0. Encuentre el intervalo de convergencia.

$$f(x) = \frac{2}{(x+1)^3} = \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{1}{1+x}\right].$$

---

*Solución*: Utilizamos el Teorema 7.21 para funciones definidas como series de potencias:

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{2}{(x+1)^3} &= \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{1}{1+x}\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x}\right)\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)\right] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}\right] \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}
\end{aligned}$$

Si comenzamos la serie desde $n = 0$, sumamos 2 a $n$ en la expresión de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2}{(x+1)^3} &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1)x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+2} (n+2)((n-1)+2)x^{(n-2)+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1)x^n \qquad [(-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = (-1)^n] \end{aligned}$$

Para la serie de potencias de $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ el radio de convergencia es $R = 1$, entonces por el Teorema 7.21, $\dfrac{d^2}{dx^2}\left[\dfrac{1}{1+x}\right]$ tiene el mismo radio de convergencia.

Es decir, para $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+2)(n+1)x^n$ el radio de convergencia es $R = 1$.

Sabiendo que la serie converge si $|x| < 1$, analicemos los extremos para el intervalo de convergencia:

- Si $x = 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)1^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)$$

  diverge por el criterio del término $n$-ésimo para la divergencia ($\lim_{n\to\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)$ no existe).

- Si $x = -1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n}(n+2)(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)$$

  también diverge por el criterio del término $n$-ésimo para la divergencia ($\lim_{n\to\infty}(n+2)(n+1) = \infty$)

En consecuencia, la serie diverge en $x = 1$ y $x = -1$. Por lo tanto el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

Ejercicio 32 encuentre un representación mediante series de la función indicada y determine su intervalo de convergencia.

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

---

*Solución*: En primer lugar notar que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Consideraremos la representación como serie de potencias de la función $\dfrac{1}{1-x}$ en el intervalo de convergencia $(-1, 1)$, para obtener una representación para $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{si } |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad \text{si } |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad \text{si } |x| < 1$$

Entonces, sabiendo que para $x \in (-1, 1)$ se tiene que $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$, multiplicamos por $x$ miembro a miembro, de modo que:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \qquad\qquad \text{si } |x| < 1$$

Es inmediato que el radio de convergencia es $R = 1$. Analicemos el intervalo de convergencia:

- Si $x = 1$, entonces la serie obtenida $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge por el criterio del término $n$-ésimo para la divergencia ($\displaystyle\lim_{n\to\infty} n = \infty$).

- Si $x = -1$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$ también diverge por el criterio del término $n$-ésimo para la divergencia.

Por lo tanto, podemos concluir que el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$.

## Ejercicio 40 explique cómo usar la serie geométrica

$$g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

para hallar una serie para la función: $f(x) = \ln(1-x)$.

---

*Solución*: Sabiendo que $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ en el intervalo $(-1,1)$, integramos miembro a miembro:

$$\begin{aligned}
-\ln(1-x) &= \int \frac{1}{1-x}dx + C \\
\ln(1-x) &= -\int \frac{1}{1-x}dx + C \\
&= -\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) dx + C && \text{si } |x|<1 \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C && \text{si } |x|<1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, integrando la función $g(x)$, obtenemos que

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{si } |x|<1.$$