Sección 6.4

Integración por separación en suma de fracciones simples

Ejercicio 9

Use fracciones parciales para hallar la integral

$$\int \frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x}\, dx$$

Solución. Para hallar la integral de una expresión racional propia (grado del numerador menor al grado del denominador) mediante la descomposición en fracciones parciales en primer lugar procedemos a factorizar el denominador: recordemos que todo polinomio con coeficientes reales puede ser descompuesto en factores lineales y cuadráticos irreducibles. En este caso, para factorizar al denominador primero **extraemos** factor común x obteniendo de esta manera, en uno de los factores, una diferencia de cuadrados la que puede expresarse como el producto de la suma por la diferencia de sus bases, esto es:

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

Como podemos observar, estamos frente al caso de ***factores lineales distintos*** (***el polinomio en el denominador tiene raíces reales distintas***) por lo que para cada factor debe haber una fracción parcial, esto es

$$\frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x} = \frac{x^2 + 12x + 12}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

Ejercicio 9

A continuación hallaremos A, B y C. Multiplicamos la ecuación anterior por el mínimo común denominador $x(x-2)(x+2)$ obtenemos la ecuación básica:

$$x^2+12x+12 = A(x^2-4)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

Como esta ecuación debe ser verdadera para toda x, puede sustituirse x por cualquier valor que resulte adecuado para hallar los valores de $A, B\ y\ C$.

Para hallar A, reemplazamos $x=0$:

$$12=-4A \Rightarrow A=-3$$

Para hallar B, reemplazamos $x=2$:

$$40=8B \Rightarrow B=5$$

Para hallar C, hacemos $x=-2$:

$$-8=8C \Rightarrow C=-1$$

Por tanto, la descomposición es

$$\frac{x^2+12x+12}{x^3-4x} = -\frac{3}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{1}{x-2}$$

Ejercicio 9

Entonces,

$$\int \frac{x^2 + 12x + 12}{x^3 - 4x}\ dx$$

$$= \int \left(-\frac{3}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= -3\ln|x| + 5\ln|\mathrm{x} - 2| - \ln|\mathrm{x} + 2| + \mathrm{C}$$

Ejercicio 10

Use fracciones parciales para hallar la integral

$$\int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}\, dx$$

Solución. Para hallar la integral de una expresión racional impropia (grado del numerador mayor ó igual al grado del denominador) mediante la descomposición en fracciones parciales en primer lugar dividimos el numerador entre el denominador, con lo que se obtiene

$$\frac{N(x)}{D(x)} = (polinomio\ cociente) + \frac{N_1(x)}{D(x)}$$

donde $N_1(x)$ es el polinomio resto, cuyo grado es menor que el grado del polinomio en el denominado, $D(x)$ por lo que $\frac{N_1(x)}{D(x)}$ es una expresión racional propia y a la misma la descomponemos en sus fracciones parciales empleando los métodos usuales.

En este caso, al efectuar la división obtenemos

$$\frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$$

A continuación descomponemos la expresión racional propia $\frac{2x+1}{x^2+x-2}$ en sus fracciones parciales.

Ejercicio 10

Como $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, para cada factor debe haber una fracción parcial, de manera que

$$\frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

donde debemos hallar A y B. Multiplicamos esta ecuación por el mínimo común denominador $(x-1)(x+2)$ y obtenemos la ecuación básica

$$2x + 1 = A(x+2) + B(x-1)$$

Para hallar A, hacemos $x = 1$ y obtenemos

$$3 = 3A \Rightarrow A = 1$$

Para hallar B, reemplazamos $x = -2$ y obtenemos

$$-3 = -3B \Rightarrow B = 1$$

Por lo tanto, la descomposición es

$$\frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

Ejercicio 10

Por consiguiente,

$$\int \frac{x^3 - x + 3}{x^2 + x - 2}\, dx$$
$$= \int \left(x - 1 + \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}\right) dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 2}\right) dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x - 1| + \ln|x + 2| + C$$

Ejercicio 13

Use fracciones parciales para hallar la integral

$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$$

Solución. Para hallar la integral de una expresión racional propia (grado del numerador menor al grado del denominador) mediante la descomposición en fracciones parciales en primer lugar procedemos a factorizar el denominador: primero extraemos factor común x obteniendo de esta manera, en uno de los factores, un trinomio cuadrado perfecto el que puede expresarse como el cuadrado de un binomio

$$x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4) = x(x-2)^2$$

Como podemos observar, estamos frente al caso de ***factores lineales repetidos*** (***el polinomio en el denominador tiene raíces reales repetidas***) por lo que para cada potencia de x y de $(x-2)$ debe haber una fracción

$$\frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{x^2+3x-4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

donde debemos hallar $A, B\ y\ C$. Multiplicamos por el mínimo común denominador $x(x-2)^2$ y obtenemos la ecuación básica

$$x^2+3x-4 = A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$$

Ejercicio 13

Para hallar A, reemplazamos $x = 0$. De esta manera se eliminan los términos en B y en C y obtenemos:

$$-4 = 4A \Rightarrow A = -1.$$

Para hallar C hacemos $x = 2$. De esta manera se eliminan los términos en A y en B y obtenemos:

$$6 = 2C \Rightarrow C = 3$$

Usamos los valores más útiles de x, por lo tanto para encontrar el valor de B podemos usar cualquier otro valor de x junto con los valores encontrados para A y C. En la ecuación básica reemplazamos $x = 1$,

$$0 = A - B + C$$

Como $A = -1$ y $C = 3$ tenemos,

$$0 = -1 - B + 3 \Rightarrow B = 2$$

Ejercicio 13

Por tanto, se concluye que

$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+4x}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{(x-2)^2}\right)\,dx$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-2| + 3\,\frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$$

Ejercicio 16

Use fracciones parciales para hallar la integral

$$\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} dx$$

Solución. Como podemos observar, estamos frente al caso de factores cuadráticos repetidos, por tanto por cada potencia de $(x^2 + 9)$ incluimos una fracción parcial y escribimos

$$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2}$$

Multiplicamos por el mínimo común denominador $(x^2 + 9)^2$ y obtenemos la ecuación básica

$$x^2 - x + 9 = (Ax + B)(x^2 + 9) + Cx + D$$

Desarrollamos la ecuación básica y reunimos términos semejantes

$$x^2 - x + 9 = Ax^3 + 9Ax + Bx^2 + 9B + Cx + D$$

Ejercicio 16

$$x^2 - x + 9 = Ax^3 + Bx^2 + (9A + C)x + (9B + D)$$

Igualamos los coeficientes de términos semejantes en ambos lados de la ecuación y obtenemos,

$$A = 0$$

$$B = 1$$

$$9A + C = -1$$

$$9B + D = 9$$

Como $A = 0$, la tercera ecuación nos da $C = -1$ y dado que $B = 1$ la cuarta ecuación nos da $D = 0$.

Por último, concluimos que

$$\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{x^2 + 9} - \frac{x}{(x^2 + 9)^2}\right) dx = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{2(x^2 + 9)} + C$$

Ejercicio 17

Use fracciones parciales para hallar la integral

$$\int \frac{x}{16x^4 - 1}\,dx$$

Solución. Como el denominador es una diferencia de cuadrados se puede expresar como el producto de la suma por la diferencia de sus bases. Luego en uno de los factores volvemos a obtener una diferencia de cuadrados y la factorizamos,

$$16x^4 - 1 = (4x^2 - 1)(4x^2 + 1) = (2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$$

Como podemos observar, estamos frente al caso de ***factores lineales y cuadráticos distintos*** (***el polinomio en el denominador tiene raíces reales distintas y raíces complejas distintas***) así por cada factor deberá haber una fracción parcial,

$$\frac{x}{16x^4 - 1} = \frac{x}{(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{2x + 1} + \frac{Cx + D}{4x^2 + 1}$$

donde debemos hallar A, B , C y D. Multiplicamos por el mínimo común denominador $(2x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 1)$y obtenemos la ecuación básica

$$x = A(2x + 1)(4x^2 + 1) + B(2x - 1)(4x^2 + 1) + (Cx + D)(4x^2 - 1)$$

Ejercicio 17

Para hallar A, reemplazamos $x = \frac{1}{2}$ y obtenemos

$$\frac{1}{2} = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{8}$$

Para hallar B, hecemos $x = -\frac{1}{2}$ y obtenemos

$$-\frac{1}{2} = -4B \Rightarrow B = \frac{1}{8}$$

Ahora, hay que determinar C y D. Estas constantes pueden hallarse eligiendo otros dos valores para x y resolviendo el sistema de ecuaciones lineales resultante. Si $x = 0$, usando $A = B = \frac{1}{8}$, tenemos

$$0 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - D \Rightarrow D = 0$$

Ahora tenemos en cuenta que $D = 0$, por tanto si $x = 1$,

$$1 = \frac{1}{8}(3)(5) + \frac{1}{8}(1)(5) + 3C \Rightarrow \frac{5}{2} + 3\mathrm{C} = 1 \Rightarrow \mathrm{C} = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio 17

Por último, concluimos que

$$\int \frac{x}{16x^4-1}dx$$
$$= \int \left(\frac{1/8}{2x-1} + \frac{1/8}{2x+1} - \frac{1/2x}{4x^2+1}\right)dx$$
$$= \frac{1}{16}\ln|2x-1| + \frac{1}{16}\ln|2x+1|$$
$$-\frac{1}{16}\ln|4x^2+1| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right| + C$$

Observación: a las integrales obtenidas las resolvemos por el método de sustitución. En la primera, tomamos $u = 2x - 1 \Rightarrow u = 2dx$, en la segunda $u = 2x + 1 \Rightarrow u = 2dx$ y en la tercera $u = 4x^2 + 1 \Rightarrow du = 8xdx$. Luego para obtener la expresión final aplicamos propiedades de logaritmo.