Sección 7.6

Series de potencias

Ejercicio 6

Encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!x^{2n}}{n!}$.

Solución. Para $x = 0$, se tiene

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!0^{2n}}{n!} = 1 + 0 + 0 \dots = 1.$$

Observación: Para simplificar la notación de las series de potencias, se acuerda que $(x - c)^0 = 1$, aun cuando $x = c$.

Para todo valor fijo de x tal que $|x| > 0$, esto es $x \neq 0$, sea $u_n = \frac{(2n)!x^{2n}}{n!}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\big(2(n+1)\big)!\, x^{2(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{(2n)!\, x^{2n}}\right| =$$

Ejercicio 6

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)x^{2n}x^2}{(n+1)} \frac{1}{(2n)!\,x^{2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2(2n+1)x^2 = x^2 \lim_{n\to\infty} 2(2n+1) = \infty.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el criterio de la razón, esta serie diverge para $|x| > 0$ y únicamente converge en su centro 0. . Luego, el radio de convergencia es R=0.

Ejercicio 26

Encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(2n)!}$.

Solución. Para $x \neq 0$, sea $u_n = \frac{n!x^n}{(2n)!}$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{\big(2(n+1)\big)!} \frac{(2n)!}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)x}{(2n+1)(2n+2)}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{2(2n+1)}\right| = 0$$

Luego, para todo valor de x con $x \neq 0$, este límite es 0. Por tanto, por el criterio de la razón, esta serie converge para toda x (notar que en $x = 0$ la serie converge por ser su centro) de modo que el radio de convergencia es $R = \infty$ lo que implica que el intervalo de convergencia de la serie es $(-\infty, \infty)$.

Ejercicio 28

Encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x+1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2\mathrm{n}-1)}$$

Solución. Haciendo $u_n = \frac{n!(x+1)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2\mathrm{n}-1)}$ obtenemos,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x+1)^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2\mathrm{n}-1)\cdot(2(\mathrm{n}+1)-1)}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2\mathrm{n}-1)}{n!\,(x+1)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x+1)}{2n+1}\right| = |x+1|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right) = \frac{|x+1|}{2}$$

Por tanto, por el criterio de la razón, esta serie converge si

$\frac{|x+1|}{2} < 1\ o\ |x+1| < 2$ lo que implica que el radio de convergencia es $R = 2$.

Ejercicio 28

Dado que la serie está centrada en -1, converge en $(-3,1)$. Este intervalo, sin embargo, no necesariamente es el intervalo de convergencia. Para determinar esto, es necesario analizar la convergencia en cada uno de los puntos extremos.

Para $x = -3$, tenemos la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\mathrm{n}-1)}$$

Para $x = 1$, tenemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\mathrm{n}-1)}$$

Mostraremos que ambas series divergen utilizando el contrarrecíproco de la condición necesaria de convergencia para series numéricas, esto es si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces $\sum a_n$ diverge.

Ejercicio 28

Para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ probaremos que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| > 1$ ya que esto último implica que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < -1$ ó $a_n > 1$ de donde se sigue que $\lim_{n\to\infty} a_n \leq -1$ ó $\lim_{n\to\infty} a_n \geq 1$.

En los dos puntos frontera tenemos,

$$|a_n| = \frac{2^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$

Se puede probar (por inducción) que $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$. De todas maneras a esto lo podemos comprender si observamos,

$$\begin{aligned} 2^n n! &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) = (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot n) \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$|a_n| = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1} > 1$$

Luego, $\forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ de donde se sigue que la serie de potencias diverge en las fronteras $x = -3$ y $x = 1$ con lo que su intervalo de convergencia es $(-3,1)$.

Ejercicio 30

Encuentre el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k x^n}{(kn)!}$, donde k es un entero positivo.

Solución. Para $x \neq 0$, sea $u_n = \frac{(n!)^k x^n}{(kn)!}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{((n+1)!)^k x^{n+1}}{(k(n+1))!} \frac{(kn)!}{(n!)^k x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{(n!)^k (n+1)^k (kn)!}{(kn+k)!\,(n!)^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{(n+1)^k (kn)!}{(kn)! \cdot (kn+1) \cdot (kn+2) \cdot \ldots \cdot (kn+k)} \\
&= \lim_{n\to\infty} |x| \frac{(n+1)^k}{(kn+1) \cdot (kn+2) \cdot \ldots \cdot (kn+k)}
\end{aligned}$$

Para determinar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(kn+1)\cdot(kn+2)\cdot\ldots\cdot(kn+k)}$ dividimos numerador y denominador entre n^k,

Ejercicio 30

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(kn+1)\cdot(kn+2)\cdot\ldots\cdot(kn+k)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k/n^k}{[(kn+1)\cdot(kn+2)\cdot\ldots\cdot(kn+k)]/n^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^k}{\frac{(kn+1)}{n}\cdot\frac{(kn+2)}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{(kn+k)}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^k}{\left(k+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(k+\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(k+\frac{k}{n}\right)} = \frac{1}{k^k}$$

Luego, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{k^k}$ de donde se sigue, por el criterio de la razón que esta serie converge si $\frac{|x|}{k^k} < 1$ o $|x| < k^k$. Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = k^k$.

Ejercicio 42

Encuentre los intervalos de convergencia de (a) $f(x)$, (b) $f^{'}(x)$ (c) $f^{''}(x)$ (d) $\int f(x)dx$. Analice la convergencia en los puntos extremos del intervalo.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n}$$

Solución. En primer lugar, hallaremos el intervalo de convergencia de la serie de potencias original:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n}$$

Para $x \neq 2$, sea $u_n = \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{n}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{(n+1)+1}(x-2)^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{(-1)^{n+1}(x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)n}{n+1}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = |x-2|$$

De acuerdo con el criterio de la razón, esta serie converge si $|x-2| < 1$. Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = 1$.

Ejercicio 42

Como la serie está centrada en $x = 2$, converge en el intervalo $(1,3)$. Este intervalo, sin embargo, no necesariamente es el intervalo de convergencia. Para determinar esto, es necesario analizar la convergencia en cada uno de los puntos extremos.

Para $x = 1$, se obtiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

la cual diverge por ser la serie armónica multiplicada por -1.

Para $x = 3$, se obtiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

la cual converge por ser la serie armónica alternante.

Luego el intervalo de convergencia de la serie de potencias original es $(1, 3]$.

Ejercicio 42

Por teorema 7.21, la primera derivada, segunda derivada y la antiderivada de f son las siguientes:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n\,(x-2)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,(x-2)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1}\,(n-1)(x-2)^{n-2}$$

$$\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,(x-2)^{n+1}}{n(n+1)}$$

Además el radio de convergencia de la serie obtenida por derivación o por integración de una serie de potencias es el mismo que el de la serie de potencias original dada por f. Cabe destacar que, en el caso de f'', la serie de potencias original es la dada por f'. Por lo tanto el radio de convergencia de todas estas series es $R = 1$ y como están centradas en $x = 2$, todas convergen en el intervalo $(1,3)$. Sin embargo, el intervalo de convergencia de cada una puede ser diferente debido al comportamiento en los puntos extremos.

Ejercicio 42

Si la serie de $f^{'}(x)$ converge en los puntos extremos entonces la serie de $f(x)$ también converge en esos puntos, esto es, el intervalo de convergencia de la serie derivada está contenido en el intervalo de convergencia de la serie original, el cual es $(1, 3]$. Por tanto, para determinar el intervalo de convergencia de la serie $f^{'}(x)$ bastará con solo analizar la convergencia de la misma en $x = 3$.

Para $x = 3$, la serie de $f^{'}(x)$ es $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ la cual diverge.

Luego, el intervalo de convergencia para la serie de $f^{'}(x)$ es $(1,3)$ el cual será el intervalo de convergencia de la serie dada por $f^{''}(x)$ (esto último se debe a que el intervalo de convergencia de $f^{''}(x)$ está contenido en el intervalo de convergencia de $f'(x)$).

Dado que $f(x)$ es la derivada de $\int f(x)\ dx$, por lo mencionado anteriormente el intervalo de convergencia de la serie de $f(x)$ está contenido en el intervalo de convergencia de la serie dada por su antiderivada. Como el intervalo de convergencia de $f(x)$ es $(1, 3]$ podemos afirmar que su antiderivada converge en dicho intervalo, sólo resta analizar la convergencia de la misma en $x = 1$.

Ejercicio 42

Para $x = 1$, la serie dada por la antiderivada es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2(n+1)}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Dado que $0 < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ para toda n donde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge por ser la serie p con $p = 2 > 1$ entonces por criterio de comparación directa la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Luego el intervalo de convergencia de la serie dada por la antiderivada es $[1,3]$.

Ejercicio 50

Demuestre que la función representada por la serie de potencias

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$.

Solución. En primer lugar hallaremos el radio de convergencia de la serie dada.

Para $x \neq 0$, sea $u_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}$$

Para todo valor fijo de x, este límite es 0. Por lo tanto, por el criterio de la razón, esta serie converge para toda x de manera que el radio de convergencia es $R = \infty$.

Dado que la serie converge en $(-\infty, \infty)$, por teorema 7.21, en dicho intervalo la serie de potencias se comporta como un polinomio, en el sentido que su derivada puede determinarse por derivación de cada uno de sus términos.

Ejercicio 50

La primera y segunda derivada de la serie vienen dadas por:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) x^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1) x^{2n-2}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}$$

Observación: En el último paso, a la serie de potencias correspondiente a y'' la escribimos en una forma equivalente en la que el índice de la suma empieza en $n = 0$.

Por consiguiente,

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^{2n} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \right) \right) = 0$$

Ejercicio 50

Observación: En el último paso tenemos en cuenta lo siguiente: si n es par entonces $n + 1$ es impar por tanto $(-1)^n = 1$ y $(-1)^{n+1} = -1$ de modo que los términos semejantes se cancelan. Un razonamiento análogo aplicamos para el caso de n impar.

Luego queda probado que la función representada por la serie de potencias es una solución de la ecuación diferencial.

Ejercicio 66

Determine si el siguiente enunciado es verdadero o falso justificando:

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < 2$, entonces

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$$

Solución. Dado que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en el intervalo $(-2,2)$ entonces, por teorema 7.21, en dicho intervalo la antiderivada de f viene dada por

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (*)$$

Por lo tanto, como el intervalo $(0,1)$ está contenido en el intervalo $(-2,2)$ la integral definida de f en $[0,1]$ puede calcularse utilizando la antiderivada de f dada por la expresión (*). Luego,

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$$

Lo que muestra que el enunciado es **verdadero**.