Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Práctica N° 5: ESPACIOS VECTORIALES ASOCIADOS A UNA MATRIZ

1) Para cada una de las siguientes matrices, calcular el núcleo y describir el subespacio de R^2 obtenido:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) Determinar el espacio nulo, espacio imagen y espacio columna asociados a cada una de las siguientes matrices, una base para los mismos y su dimensión.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) Las siguientes matrices son las obtenidas en el último paso de la reducción por renglones de una cierta matriz A. Determinar la nulidad y el rango de A.

a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4) Calcular los cuatro espacios vectoriales asociados a las matrices A y B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

5) Encontrar una base para el subespacio generado por los conjuntos de vectores dados:

a) $\{(-1, 1, -2, 0), (3, 3, 6, 0), (9, 0, 0, 3)\}$

b) $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (-2, 0, 2, 2), (0, -3, 0, 3)\}$

6) Usando la noción de rango, determinar si cada sistema lineal dado es compatible o no. En el caso de ser compatible determinado, verificar que el vector de términos independientes es combinación de las columnas de la matriz. En el caso de ser compatible indeterminado, elegir una solución particular y verificar que el vector de términos independientes es combinación de las columnas de la matriz.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$b) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$c) \quad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

7) El conjunto solucion al sistema F es S. Asignar a x_4 el valor 0 y verificar que en el sistema anterior de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, el vector de términos independientes $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes A. ¿Cuantos otros puede asignársele a x_4 para que se verifique lo mismo?

$$F = \begin{cases} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases} \qquad S = \left\{ \left(\tfrac{20}{13} - \tfrac{4}{13}x_4, -\tfrac{28}{13} + \tfrac{3}{13}x_4, -\tfrac{45}{13} + \tfrac{9}{13}x_4, x_4 \right), x_4 \in R \right\}$$

Observación: Ecuación 5.7.10 del Teorema 9 de la página 393 de Grossman, 7° Edición.

8) Demostrar que para cualquier matriz A se verifica que $\rho(A) = \rho(A^t)$.

9) Sea C una matriz de orden $mx6$, encontrar m sabiendo que el sistema homogéneo $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única y que $\nu(C^t) = 2$. Justificar detalladamente su respuesta enunciando las propiedades usadas.

10) Encontrar, si es posible:

a) La nulidad de A sabiendo que es una matriz de $4x3$ que tiene dos pivotes.

b) La nulidad de A sabiendo que es una matriz de $5x4$ y que $dim\, C_A{}^t = 3$.

11) Sabiendo que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene por conjunto solución a S:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \,/\, x_1 = x_5, x_2 = x_3 = 0)\}$$

a) Determinar una base para el espacio nulo de A. Justificar que dicho conjunto es base de S.

b) Suponiendo que A es de $3x5$, calcular el rango de A.

12) Clasificar las siguientes proposiciones como verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera, demostrarla y en caso de ser falsa brindar un contraejemplo o explicar por qué lo es:

a) Si C es una matriz de cambio de base, entonces su nulidad es diferente de cero.

b) Para la matriz A, $\mathbf{v} \in Nu(A)$ y $\mathbf{u} \in R_A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) Sea A una matriz de mxn y B una matriz de $nx1$, entonces el producto $A \cdot B$ pertenece al espacio columna de A.

d) Sea A una matriz simétrica, entonces la dimensión del espacio fila de A es diferente a la dimensión del espacio columna de A.

e) Si A es una matriz de 3x4, entonces el espacio nulo y el espacio de renglones son subespacios de R^3, y el espacio imagen y el espacio de columnas son subespacios de R^4.

Ejercitación adicional para seguir practicando:

13) Calcular el espacio nulo, espacio imagen y espacio columna de A. Además, determinar una base para cada uno de ellos y su dimensión.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

14) Si A es una matriz de $3x4$ ¿Cuál es el máximo valor posible para el rango de A?

15) Sean $S = \{(1,2),(0,1)\}$ y $T = \{(1,1),(2,3)\}$, dos bases de R^2. Calcular $A_{S\to T}$ y $A_{T\to S}$.

16) Sean $S = \{(1,-1),(2,1)\}$ y $T = \{(3,0),(4,-1)\}$, dos bases de R^2. Si $\mathbf{v} \in R^2$ y $[\mathbf{v}]_T = (1,2)$, determine $[\mathbf{v}]_S$.

17) Sean $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $T = \{w_1, w_2, w_3\}$, dos bases de R^3, donde se conocen los vectores de S y la matriz de cambio de base $A_{T\to S}$. Determinar los vectores de la base T.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A_{T\to S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$