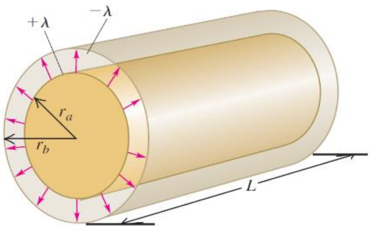
Examen final 6to turno (17/12/2019)

Apellido y nombres: ……………………………………………………………….…DNI:…………………………………

Carrera: ……………..…...…..……………………………………………………...Nro. de hojas: ....

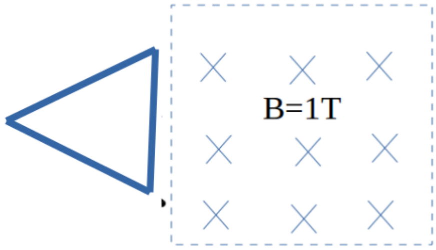
1. Un conductor cilíndrico largo tiene un radio r_a y densidad lineal de carga $+\lambda$. Está rodeado por una coraza conductora cilíndrica coaxial con radio interior r_b y densidad lineal de carga $-\lambda$ (ver figura).



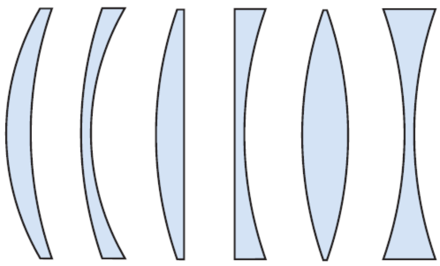
1.1 (1,5/10) Calcule la capacitancia por unidad de longitud para este capacitor, suponiendo que hay vacío en el espacio entre los cilindros.
1.2 (1/10) Escriba una ecuación que relacione la diferencia de potencial entre las placas y el campo eléctrico en el interior del capacitor.

2. La función, $\boldsymbol{E}(x,t) = -5\mathrm{sen}[9\mathrm{x}10^5 x - 2\mathrm{x}10^{14} t]\boldsymbol{k}$, con unidades del SI, representa el campo eléctrico de una onda plana electromagnética.
2.1 (1/10) Calcule la longitud de onda, frecuencia, periodo, velocidad de propagación y el índice de refracción del medio en el que se propaga.
2.2 (1/10) Obtenga la función que corresponde al campo magnético ***B*** de esta onda escrito en forma vectorial. Indique mediante un gráfico los vectores ***E, B*** y la dirección de propagación.
En todos los casos indique las unidades correspondientes.

3. Una bobina de cobre de 100 espiras triangulares (triángulo equilátero) de área 0,1 m² ingresa a una región de campo magnético B = 1 T a una velocidad constante de 2 m/s. Calcule:
3.1 (1/10) La fem inducida en la espira.
3.2 (1/10) La fuerza neta sobre la espira debida a la corriente inducida, sabiendo que la resistencia de la espira es 5 Ω.



4. (2/10) Utilice la ecuación del constructor de lentes para indicar y justificar el carácter “convergente” o “divergente” de cada una de las lentes (a)-(f) esquematizadas en la figura de la derecha.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

5. (1,5/10) Dos rendijas de ancho 0.015 mm están separadas una distancia *d* y son iluminadas con luz de longitud de onda λ = 600 nm. ¿Cuál debe ser la distancia *d* si se pretende observar cinco franjas brillantes dentro del máximo central de difracción? Justifique su respuesta con las ecuaciones necesarias.

(2) $\vec{E}(x,t) = -5\,sen[9\cdot 10^5 x - 2\cdot 10^{14} t]\hat{k}$

Como la onda va en dirección +X, el campo magnético debe ir en dirección +Y por regla de la mano derecha

(a) $E_{máx} = 5\frac{V}{m}$ Como $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\cdot 10^{14}$ rad/s

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{2\cdot 10^{14}\,rad/s} = 3,141\cdot 10^{-14}\,s}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = 3,183\cdot 10^{13}\ ciclos/s}$$

Como $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 9\cdot 10^5\,\frac{rad}{m}$

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{9\cdot 10^5\,rad/m} = 6,98\cdot 10^{-6}\,m}$$

$V = \lambda f = (6,98\cdot 10^{-6} m)(3,183\cdot 10^{13} rad/s) =$

$$\boxed{V = 2,222\cdot 10^8\,m/s}$$

Como el índice de refracción es $\boxed{n = \frac{c}{V} = \frac{3\cdot 10^8\,m/s}{2,222\cdot 10^8\,m/s} = 1,35}$

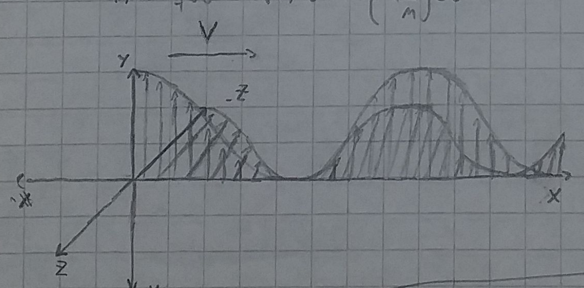
(b) Como $E_{máx} = V B_{máx}$

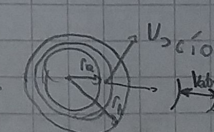
$$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{V} = \frac{5\,V/m}{2,222\cdot 10^8\,m/s} = 2,25\cdot 10^{-8}\,T$$

Para que la dirección de propagación sea +X, $\vec{B}$ +Y

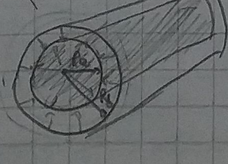
$$\vec{B}(x,t) = B_{máx}\,sen[kx - \omega t] = (2,25\cdot 10^{-8}T)\,sen[(9\cdot 10^5\,rad/m)x - (2\cdot 10^{14}\,rad/s)t]$$

y se tiene que $\vec{E}(x,t) = -\left(5\frac{V}{m}\right) sen[(9\cdot 10^5 rad/m)x - (2\cdot 10^{14} rad/s)t]$





(1) Radio r_a densidad lineal de carga $+\lambda$] Conductor
~~Ext~~ Radio r_b densidad lineal de carga $-\lambda$] Coraza coaxial conductora



Utilizando la simetría cilíndrica, con una superficie gaussiana que sea un cilindro coaxial de radio $r > r_a$ y $r < r_b$, el campo eléctrico es uniforme en todos los puntos a una distancia r y es radial, ⊥ a cada punto de la superficie y hacia afuera del cilindro r_a (cuyo campo es el único que contribuye al E_{tot}) Así, con $\vec{A}$ ⊥ hacia afuera

Por Ley de Gauss $\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = EA = E(2\pi r L) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

Como $Q_{enc} = \lambda L$

$$E(2\pi r \cancel{L}) = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r_0}$$

Como $V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl}$ con $V=0$ en b a una distancia arbitraria

$$V_{ab} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left[\ln r_b - \ln r_a \right]$$

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$ donde $V=0$ en $r_0 = r_b$

Como el campo del cilindro exterior no contribuye al campo entre ambos cilindros, puede elegirse que $V=0$ en r_b, y así $V_{ab} = V_a = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{r_b}{r_a}$

Y como $C = \frac{Q_{enc}}{V_{ab}}$, la capacitancia por unidad de longitud es

$$\therefore \frac{C}{L} = \frac{Q_{enc}}{L V_{ab}} = \frac{\cancel{\lambda} \cancel{L}}{\cancel{L} \frac{\cancel{\lambda}}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}} = \boxed{\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}}$$ donde $r_b = r_0$ y $r_a = r$

b) Como el campo eléctrico, por definición, es el negativo del gradiente de la diferencia de potencial, y además el campo eléctrico es radial respecto del eje:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{1}{r_0/r}\right)\left(r_0\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right)\right]$$

$$\boxed{E_r = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{r}{\cancel{r_0}}\right)\left(-\frac{\cancel{r_0}}{r^2}\right)\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}}$$

$$\therefore \boxed{E_r = E = -\frac{\partial V}{\partial r}}$$