Clase teórica de la semana del 18-4

Mario Garelik

Sección 14.3 - Derivadas parciales.

- **Ejercitación propuesta (pág. 772 - 775):** 1 - 32 // 35 - 38 // 41 - 92.
- Definición de derivada parcial, notación e interpretación geométrica.
- Cálculo de derivadas parciales: ejemplos 3 y 4 (el 4 involucra también derivación implícita).
- Extensión a más de dos variables.
- Derivadas parciales y continuidad.
  - La existencia de derivadas parciales en un punto no es suficiente para que la función sea continua en él. Ejemplo 8 funciona como contraejemplo: analizarlo bien.
  - La existencia de derivadas parciales en un punto no es necesaria para que la función sea continua en él. Buscar y desarrollar un contraejemplo.
  - Sí es cierto que la x -derivabilidad es suficiente para la x -continuidad (análogamente para la variable y): remitir a Cálculo 1.
- El teorema de Clairaut o de la derivada mixta. Analizar ejemplo 10. Ventajas de poder alterar el orden de derivación.
- Derivadas parciales de orden superior.
- Hacia el concepto de diferenciabilidad.
  - De Cálculo 1, en la aproximación por diferenciales, teníamos:

    $$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x$$

    donde $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.
  - Teorema del incremento para dos variables como generalización de lo anterior. Ver bien qué se pide como hipótesis.
  - Diferenciabilidad: definición (a partir del Teorema del incremento).
    - Notar que esta definición de diferenciabilidad es extensible a R^n.
  - Diferenciabilidad en una región y en todas partes.
  - La gráfica de una función diferenciable es una *superficie suave.*
  - Corolario del Teorema del incremento: una condición suficiente de diferenciabilidad.
    - No confundir la definición de diferenciablidad en un punto (que vimos como generalización de lo visto en Cálculo I) con la condición suficiente para ser diferenciable en él (corolario del Teorema del incremento).

- Esquema relacional local.
  - Diferenciabilidad $\Rightarrow$ continuidad $\Rightarrow$ x-continuidad e y-continuidad.
  - Diferenciabilidad $\Rightarrow$ existencia de derivadas parciales $\Rightarrow$ x-continuidad e y-continuidad.
  - derivadas parciales continuas en una región abierta R $\Rightarrow$ diferenciabilidad.
  - Buscar y **desarrollar** contraejemplos que muestren la falsedad de los recíprocos. anteriores

Sección 14.4 - Regla de la cadena y derivación implícita.

- **Ejercitación propuesta (pág. 782 - 783):** 1 al 38 // 40 - 50.
- Teorema 5: regla de la cadena para funciones de dos variables (extensible a R^n; $n \geq 3$).
  - Sólo tener cuenta el teorema como marco de trabajo, pero no haremos su demostración, y sólo lo usaremos en la práctica mediante la consideración de los diagramas de árbol.
- Diagramas de árbol: ver ejemplo 2.
- Regla de la cadena para dos variables independientes y tres variables intermedias. Ver ejemplo 3.
  - Atender bien el uso de los operadores derivada parcial (∂) o bien derivada ($\frac{d}{dt}$)
- Teorema 8: fórmula para la derivación implícita. Ver rapidito su deducción.
- Ver ejemplo 5.
- Extensión a tres variables: ver modelo en pie de página 780 y ejemplo 6, p. 781.

Sección 14.5 - Derivadas direccionales y vector gradiente.

- **Ejercitación propuesta:** pág. 790: 1 al 33 // 35 al 40.
- Breve introducción acerca del uso en topocartografía de las curvas de nivel.
- Hecha la salvedad entre *curvas* y *superficies* de nivel, lo que en adelante se hable para para R^2 es generalizable a R^3.
- Breve intro a la definición de derivada direccional.
- Definición de derivada direccional (rapidísima revisión de las ecuaciones paramétricas de la recta).
  - Notación.
  - Las derivadas parciales como casos particulares de derivadas direccionales.
  - Ejemplo de cálculo por definición.
  - Interpretación geométrica, física y como tasa de cambio.
- Hacia una forma práctica de cálculo de la derivada direccional:

  - Concepto de vector gradiente. Notación con *nabla* o *grad f*.
  - Deducción de la fórmula de la derivada direccional expresada como producto escalar: $(D_{\mathbf{u}}f)_{P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot \mathbf{u}$

- Propiedades de la derivada direccional:
  - $\mathbf{u} = \nabla f$ ($\mathbf{u} = -\nabla f$) como dirección de crecimiento (decrecimiento) más rápido.
  - Volver a mirar el grafico inicial de los afluentes del Río Hudson y el ejemplo del ciclista cuerdo.
  - Valor de la derivada en esas direcciones.
  - Cualquier dirección $\mathbf{u}$ ortogonal a un gradiente es una dirección de cambio nulo en f.

- Posición relativa del vector gradiente en el punto P_0 respecto de la curva (superficie) de nivel que pasa por P_0.
  - ¡¡¡$U\pi$!!! Ahora entendemos cuál era la dirección que daba la tasa de cambio instantánea más rápida de la altura del flujo de agua de los afluentes del Hudson.

- Ecuación de la recta tangente a una curva de nivel en un punto.

- Álgebra de gradientes.

- **Observaciones varias.**
  - **Derivadas direccionales y derivadas parciales.** Claramente, si en un punto de su dominio, una función tiene derivadas direccionales en todas las direcciones, entonces tiene en ese punto derivadas parciales (de hecho, las derivadas parciales son casos especiales de derivadas direccionales).
    * El recíproco es falso: puede suceder que, en un punto, una función tenga sus derivadas parciales y no las demás direccionales. **Buscar y desarrollar contraejemplo.** Se tratarán en clases de consultas.
  - **Diferenciabilidad y derivadas direccionales.** La diferenciabilidad es, como era de esperar, *suficiente* para la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto.
    * El recíproco es falso: puede suceder que, en un punto, una función tenga todas sus derivadas direccionales y no no sea diferenciable en él. **Buscar y desarrollar contraejemplo.** Se tratarán en clases de consultas.
  - A partir de las dos observaciones anteriores, **completar el esquema relacional** que incialmente planteamos entre continuidad, diferenciabilidad y existencia de derivadas parciales (continuas) en un punto, incorporando la existencia de todas las derivadas direccionales en el punto (es decir mirar de qué manera se relaciona ésto con lo visto previamente).