Práctica: Larson - Sección 6.7

Integrales impropias

Dra. Ma. Florencia Acosta

Diga si la integral es impropia, explique su razonamiento.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{3x-2}$, 2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$, 3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-5x+6}\,dx$ y 4. $\displaystyle\int_1^\infty \ln(x^2)\,dx$.

1. $3x-2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=\dfrac{2}{3}$ ✓
2. $x^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=0$ ✗
3. $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=2$ o $x=3$. ✗
4. ✓

Ejercicio 18

Determine si la integral impropia converge o diverge. Si converge, evalúe la integral.

18. $\displaystyle\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x}\,dx.$ $\quad \mathrm{Dm}_f = \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x}\,dx &= \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} (x-1)e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty} -xe^{-x}\Big|_0^{a}
\end{aligned}
$$

C.A.: $\displaystyle\int (x-1)e^{-x}\,dx = \int xe^{-x}\,dx + \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + C$

$$\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1$$

$$\int -e^{-x}\,dx = e^{-x} + C_2$$

Ejercicio 18

Determine si la integral impropia converge o diverge. Si converge, evalúe la integral.

18. $\displaystyle\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x}\,dx.$ $\quad \mathrm{Dm}_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} (x-1)e^{-x}\,dx &= \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} (x-1)e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty} -xe^{-x}\Big|_0^a \\
&= \lim_{a\to\infty} -ae^{-a} \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{-a}{e^a} && \text{(L'H)} \\
&= \lim_{a\to\infty} \frac{-1}{e^a} \\
&= 0. && \text{... y la integral coverge } \checkmark
\end{aligned}$$

Ejercicio 26

Determine si la integral impropia converge o diverge. Si converge, evalúe la integral.

26. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$ $\quad \mathrm{Dm}_f = \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx &= \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \\
&= \lim_{a\to\infty} \ln(1+e^x)\Big|_0^a \\
&= \lim_{a\to\infty} \ln(1+e^a) - \ln 2 \\
&= \infty.
\end{aligned}
$$

... y la integral diverge ✓

C.A.: $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + C = \ln(1+e^x) + C$

Dadas funciones continuas f y g tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ en el intervalo $[0, \infty)$, demuestre lo siguiente:

(a) Si $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

(b) Si $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverge.

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ entonces por propiedad de integrales se tiene que

$$0 \leq \int_a^{\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{\infty} g(x)\,dx \leq C$$

(a) $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx \leq C$ y por lo tanto converge.

Ejercicio 44

Dadas funciones continuas f y g tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ en el intervalo $[0, \infty)$, demuestre lo siguiente:

(a) Si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

(b) Si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ entonces por propiedad de integrales se tiene que

$$\infty = \int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx$$

(b) $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx = \infty$ y por lo tanto diverge.

Ejercicio 52

Use los resultados de los ejercicios 41-44 para determinar si la integral impropia converge o diverge.

52. $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx = 2$

$$x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \geq x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{1}{\frac{3}{2} - 1} = 2$$

✓

Ejercicio 64

Longitud de arco.
Encuentre la longitud de arco de la gráfica de $y = \sqrt{16 - x^2}$ en el intervalo $[0, 4]$.

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{16 - x^2}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = \frac{16}{16 - x^2}$$

Ejercicio 64

Longitud de arco. Encuentre la longitud de arco de la gráfica de $y = \sqrt{16 - x^2}$ en el intervalo $[0, 4]$.

$$
\begin{aligned}
s = \int_0^4 \sqrt{\frac{16}{16 - x^2}}\, dx &= \int_0^4 \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}}\, dx \\
&= \lim_{a \to 4^-} \int_0^a \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}}\, dx \\
&= \lim_{a \to 4^-} 4 \int_0^{\frac{a}{4}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\, du \qquad \left(u = \frac{x}{4},\ 4du = dx\right) \\
&= \lim_{a \to 4^-} 4 \arcsin u \Big|_0^{\frac{a}{4}} \\
&= \lim_{a \to 4^-} 4\left(\arcsin \frac{a}{4} - \arcsin 0\right) \\
&= 2\pi. \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

Ejercicio 73

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso explique porque o dé un ejemplo que muestre que es falso.

73. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \to \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{x+1} &= \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{dx}{x+1} \\
&= \lim_{a\to\infty} \ln|x+1|\Big|_0^a \\
&= \lim_{a\to\infty} \ln|a+1| - 0 \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

FALSO ✓

Ejercicio 74

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso explique porque o dé un ejemplo que muestre que es falso.

74. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ diverge, entonces $\lim_{x \to \infty} f(x) \neq 0$.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \to \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1} = \infty$$

Pero como $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ la afirmación es FALSA. ✓

¡Nos vemos en el foro de consultas!