Primera Parte

Con objeto de establecer un plan de producción, una empresa que administra una represa hidroeléctrica ha estimado que la demanda semanal de energía es una variable aleatoria X (expresada en millones de unidades), cuya función de probabilidad viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/3)^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

¿Podemos obtener la probabilidad de que la demanda semanal sea mayor a 2? ¿Cómo?

consultas: taulamet@unl.edu.ar

Planteo: F(x) y Prob. Contraria

Dado que la función de distribución nos brinda la posibilidad de calcular la probabilidad acumulada hasta un valor determinad y aprovechando el concepto de probabilidad contraria hacemos:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$P(X > 2) = 1 - F(2)$$

Resolviendo...

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/3)^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$P(X > 2) = 1 - F(2) =$$

$$1 - (1 - e^{-(2/3)^2}) = \frac{1}{e^{\frac{4}{9}}} = 0,6411$$

La probabilidad de que la demanda semanal sea superior a 2 es del 64%.

Segunda Parte

Si se sabe que una nueva variable aleatoria Y también es necesaria para el estudio de manera que la función conjunta de ambas variables es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

¿Se puede considerar que ambas variables son independientes?

Calcular $P(Y < 1/X > 2)$ e interpretar su significado.

Independencia

¿Son X e Y Independientes?

DATOS:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/3)^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Independencia

¿Son X e Y Independientes?

$$f(x,y) = f(x) * f(y)$$

Hallamos *f(x)*

$$f(x) = \int f(x,y) \cdot dy =$$

$$\int \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} \cdot dy =$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{9} x e^{\frac{-x^2}{9}}}$$

También puede obtenerse f(x) a partir de la derivada de F(x)

Hallamos *f(y)*

$$f(y) = \int f(x,y) \cdot dx =$$

$$\int \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} \cdot dx =$$

$$\boxed{f(y) = \frac{e^{\frac{-y}{2}}}{2}}$$

Hallamos *f(x) * f(y)*

$$f(x) = \frac{2}{9} x e^{\frac{-x^2}{9}}$$

$$f(y) = \frac{e^{\frac{-y}{2}}}{2}$$

$$f(x) \cdot f(y) = \frac{2}{9} x e^{\frac{-x^2}{9}} \cdot \frac{e^{\frac{-y}{2}}}{2}$$

$$\boxed{f(x) \cdot f(y) = \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2}}$$

Independencia

$$\boxed{f(x,y) = \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2}}$$

$$\boxed{f(x) \cdot f(y) = \frac{1}{9} x e^{-\frac{x^2}{9} - y/2}}$$

$$f(x,y) = f(x) * f(y)$$

X e Y son Independientes

Cálculo de Probabilidad

$$P(Y < 1/X > 2) = ?$$

Cálculo de Probabilidad

Recordando Planteo Condicional

$$P(Y < 1 / X > 2) =$$

$$\frac{P(Y < 1 \cap X > 2)}{P(X > 2)} =$$

Cálculo de Probabilidad

$$\frac{P(Y < 1 \cap X > 2)}{P(X > 2)} =$$

$$\frac{\int_0^1 \int_2^\infty \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} \cdot dx \cdot dy}{\int_0^\infty \int_2^\infty \frac{1}{9} x e^{-(x/3)^2 - y/2} \cdot dx \cdot dy} =$$

$$\frac{0,25}{0,64} \approx 39\%$$