Práctica: Sección 2.5 - Larson

Derivación Implícita

FICH UNL

Profesor: Dr. Ing. Carlos C. SCIOLI

Práctica: Sección 2.5 - Larson

Ejercicios para la Sección 2.5 del Larson (pag. 131):

1 al 48 /// 51 al 56 /// 59 al 61 /// 63 – 74 /// 90 – 91 – 92 – 94

Ejercicios de la sección 2.5

Vea www.CalcChat.com para las soluciones a los ejercicios impares.

En los ejercicios 1–20, encuentre dy/dx mediante la derivación implícita.

1. $x^2 + y^2 = 36$
2. $x^2 - y^2 = 81$
3. $x^{1/2} + y^{1/2} = 9$
4. $x^3 + y^3 = 8$
5. $x^3 - xy + y^2 = 4$
6. $x^2y + y^2x = -3$
7. $xe^y - 10x + 3y = 0$
8. $e^{xy} + x^2 - y^2 = 10$
9. $x^3y^3 - y = x$
10. $\sqrt{xy} = x - 2y$
11. $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 = 38$
12. $2 \operatorname{sen} x \cos y = 1$
13. $\operatorname{sen} x + 2 \cos 2y = 1$
14. $(\operatorname{sen} \pi x + \cos \pi y)^2 = 2$
15. $\operatorname{sen} x = x(1 + \tan y)$
16. $\cot y = x - y$
17. $y = \operatorname{sen}(xy)$
18. $x = \sec \dfrac{1}{y}$
19. $x^2 - 3 \ln y + y^2 = 10$
20. $\ln xy + 5x = 30$

En los ejercicios 21–24, (a) encuentre dos funciones explícitas despejando de la ecuación y en términos de x, (b) trace la gráfica de la ecuación e identifique las partes dadas por las funciones explícitas correspondientes, (c) derive las funciones explícitas y (d) calcule dy/dx implícitamente y muestre que el resultado es equivalente al del inciso (c).

21. $x^2 + y^2 = 16$
22. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
23. $9x^2 + 16y^2 = 144$
24. $4y^2 - x^2 = 4$

En los ejercicios 25–34, encuentre dy/dx mediante la derivación implícita y evalúe la derivada en el punto indicado.

25. $xy = 4, \quad (-4, -1)$
26. $x^3 - y^2 = 0, \quad (1, 1)$
27. $y^2 = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 9}, \quad (3, 0)$
28. $(x + y)^3 = x^3 + y^3, \quad (-1, 1)$
29. $x^{2/3} + y^{2/3} = 5, \quad (8, 1)$
30. $x^3 + y^3 = 2xy, \quad (1, 1)$
31. $\tan(x + y) = x, \quad (0, 0)$
32. $x \cos y = 1, \quad \left(2, \dfrac{\pi}{3}\right)$
33. $3e^{xy} - x = 0, \quad (3, 0)$
34. $y^2 = \ln x, \quad (e, 1)$

FICH UNL

Práctica: Sección 3.4 - Larson

Ejercicio 20

Encuentre dy/dx mediante la derivación implícita

$\ln xy + 5x = 30$ *reescribo por propiedad de logaritmos*

$\ln x + \ln y + 5x = 30$

1) derivo con respecto a x en ambos lados

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}y' + 5 = 0$

2) Agrupo los términos que aparezca y’ , paso los demás términos al otro lado

$y' = \left(-5 - \frac{1}{x}\right)y = -5y - \frac{y}{x}$

FICH UNL

Práctica: Sección 3.4 - Larson

Ejercicio 32

Encuentre dy/dx mediante la derivación implícita y evalúe la derivada en el punto indicado

$x \cos y = 1 \qquad \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

1) derivo con respecto a x en ambos lados

$1 \cos y + x\,(-seny)\,y' = 0 = \cos y - x\ seny\ y'$

2) Agrupo los términos que aparezca y', paso los demás términos al otro lado

$-x\ seny\ y' = -\cos y$

$y' = \frac{1}{-}\frac{\cos y}{x\ seny} = \frac{cotg\ y}{x}$ *ahora evaluarla en* $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

$y' = \frac{cotg\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}$

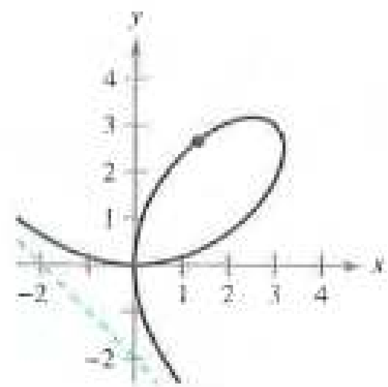
FICH UNL

Práctica: Sección 3.4 - Larson

38. Folium de Descartes:

$x^3 + y^3 - 6xy = 0$

Punto: $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$



Ejercicio 38

Curvas Famosas. Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto indicado

$x^3 + y^3 - 6xy = 0 \qquad \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

derivo con respecto a x en ambos lados

$3x^2 + 3y^2y' - 6y - 6xy' = 0$

Agrupo los términos que aparezca y' , paso los demás términos al otro lado

$3y^2y' - 6xy' = 6y - 3x^2$

$y'(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2 \;\rightarrow y' = \frac{6y-3x^2}{3y^2-6x} = \frac{2y-x^2}{y^2-2x}$

Ahora reemplazo en el punto

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) \qquad y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x} = \frac{2\frac{8}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2\frac{4}{3}} = \frac{\frac{16}{3} - \frac{16}{9}}{\frac{64}{9} - \frac{8}{3}} = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

FICH UNL

Práctica: Sección 3.4 - Larson

Ejercicio 56

Encuentre d^2y/dx^2 en términos de y y de x

$$y^2 = 4x$$

Derivo con respecto a x en ambos lados

$$2yy' = 4$$

$$y' = \frac{2}{y}$$

Derivo nuevamente con respecto a x en ambos lados

$$y'' = -2y^{-2}y' = \frac{-2}{y^2}\frac{2}{y} = \frac{-4}{y^3}$$

FICH UNL

Práctica: Sección 3.4 - Larson

Ejercicio 61

Demuestre que la recta normal en cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ pasa por el origen

$x^2 + y^2 = r^2$

Derivo con respecto a x en ambos lados

$2x + 2yy' = 0$

Agrupo los términos que aparezca y', paso los demás términos al otro lado

$y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$ *es la pendiente de la recta tangente*

ahora $\frac{y}{x}$ *es la pendiente de la recta normal*

FICH UNL

Práctica: Sección 3.4 - Larson

Ejercicio 61

Demuestre que la recta normal en cualquier punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ pasa por el origen

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Siendo (x_0, y_0) *puntos de la circunferencia. Si* $x_0 = 0$*, entonces recta tangente es horizontal, la recta normal es vertical y por lo tanto, pasa por el origen. Si* $x_0 \neq 0$*, la ecuación de la recta normal es:*

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

$$y = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0) + y_0 = \frac{y_0}{x_0}x - \frac{y_0}{x_0}x_0 + y_0 = \frac{y_0}{x_0}x$$

$$Entonces\ y = \frac{y_0}{x_0}x\ es\ una\ recta\ que\ pasa\ por\ el\ origen$$

FICH UNL

Práctica: Sección 3.4 - Larson

Ejercicio 70

Encuentre dy/dx usando la derivada Logarítmica

$$y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

Tomar logaritmos a ambos lados

$$lny = ln\frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$ *aplico propiedades de los logarítmos*

$$lny = ln(x+1) + ln(x+2) - ln(x-1) - ln(x-2)$$

Derivo con respecto a x en ambos lados

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)}$$

Agrupo los términos que aparezca y' , paso los demás términos al otro lado

FICH UNL

Práctica: Sección 3.4 - Larson

Ejercicio 70

Encuentre dy/dx usando la derivada Logarítmica

Agrupo los términos que aparezca y' , paso los demás términos al otro lado

$$y' = \left(\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)}\right) y$$

$$y' = \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)}\right) \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

FICH UNL

Práctica: Sección 3.4 - Larson

Ejercicio 94

Recta Normal. Encuentre la ecuación de la recta normal a la elipse

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1 \qquad (4,2\ )$$

Derivo con respecto a x en ambos lados

$$\frac{2x}{32}+\frac{2yy'}{8}=0$$

Agrupo los términos que aparezca y’ , paso los demás términos al otro lado

$$y' = -\frac{2x}{32}\frac{8}{2y} = -\frac{x}{4y} \ \textit{pendiente de la recta a tangente}$$

$$\textit{mientras que } \frac{4y}{x} \ \textit{pendiente de la recta a Normal}$$

$$(y-y_0) = \frac{4y_0}{x_0}(x-x_0) \ \textit{Ec. Recta Normal}$$

$$(y-2) = 2(x-4) \rightarrow y = 2x-6 \ \textit{Ec. Recta Normal al punto}\ (4,2\ )$$

FICH UNL

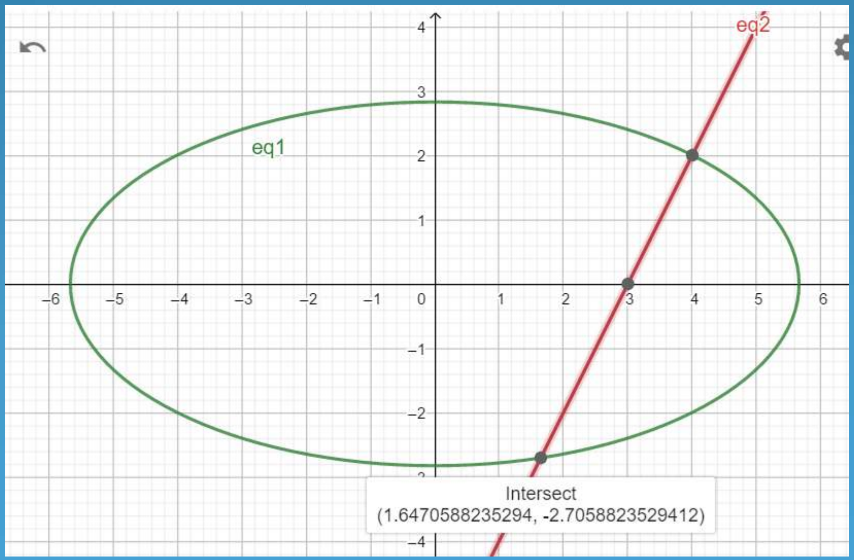
Práctica: Sección 3.4 - Larson

Ejercicio 94

Recta Normal. Encuentre la ecuación de la recta normal a la elipse

$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1 \qquad (4,2\ )$$

$$(y-2)=2(x-4) \rightarrow y=2x-6 \textit{ Ec. Recta Normal al punto } (4,2\ )$$



FICH UNL