Estadística

La Estadística se ocupa de los métodos y procedimientos para recoger, clasificar, resumir, hallar regularidades y analizar los datos, siempre y cuando la variabilidad e incertidumbre sea una causa intrínseca de los mismos. Además se ocupa de realizar inferencias a partir de ellos, con la finalidad de ayudar a la toma de decisiones y en su caso formular predicciones.

Estadística descriptiva: Describe, analiza y representa un grupo de datos utilizando métodos numéricos y gráficos que resumen y presentan la información contenida en ellos.

Estadística inferencial: Apoyándose en el cálculo de probabilidades y a partir de datos muestrales, efectúa estimaciones, decisiones, predicciones u otras generalizaciones sobre un conjunto mayor de datos.

CONCEPTOS BÁSICOS

Individuos o elementos: personas u objetos que contienen cierta información que se desea estudiar.
Población: conjunto de individuos o elementos que cumplen ciertas propiedades comunes. Muestra: subconjunto representativo de una población.
Parámetro: función definida sobre los valores numéricos de características medibles de una población.
Estadístico: función definida sobre los valores numéricos de una muestra.

En relación al tamaño de la población, ésta puede ser:

Finita: como es el caso del número de mensajes que llegan al servidor de la Facultad en un día.
Infinita: si por ejemplo estudiamos el número de mensajes recibidos por el servidor de la Facultad a lo largo de su vida útil.
Caracteres: propiedades, rasgos o cualidades de los elementos de la población. Estos caracteres pueden dividirse en cualitativos y cuantitativos.
Modalidades: diferentes situaciones posibles de un caracter. Las modalidades deben ser a la vez exhaustivas y mutuamente excluyentes—cada elemento posee una y sólo una de las modalidades posibles.
Clases: conjunto de una o más modalidades en el que se verifica que cada modalidad pertenece a una y sólo una de las clases

El cálculo de probabilidades suministra las reglas para el estudio de los experimentos aleatorios o de azar, constituyendo la base para la Estadística inductiva o inferencial

Experimentos y sucesos aleatorios

Llamamos experimento aleatorio al que satisface los siguientes requisitos:
-Todos sus posibles resultados son conocidos de antemano.
-El resultado particular de cada realización del experimento es imprevisible.
-El experimento se puede repetir indefinidamente en condiciones idénticas.
Al conjunto de resultados posibles lo denominaremos espacio muestral y lo denotaremos normalmente mediante la letra E o S. Los elementos del espacio muestral se denominan sucesos elementales.

Cualquier subconjunto de E será denominado suceso aleatorio, y se denotará normalmente con las letras A, B, …..…..

Por experimento aleatorio o estadístico se entiende al conjunto de acciones que llevan a obtener resultados que pueden variar por causas que no se pueden prever, aunque se realicen en las mismas condiciones.

De acuerdo a los valores que el espacio muestral contenga, puede ser clasificado como:
-Finito: si contiene una cantidad dada de valores posibles y es posible listarlos. Por ejemplo, la cantidad de resortes defectuosos en un teclado (de 0 a 121), cantidad de virus detectados en un proceso de corrida de un antivirus.
-Infinito numerable: si se sabe que contendrá una gran cantidad de elementos pero posibles de enumerar, y pueden ponerse en correspondencia con el conjunto de los enteros positivos. Por ejemplo: cantidad de CD que se venden en un comercio expendedor de suministros de computación, cantidad de alumnos ingresantes a la carrera Ing. en Informática en los últimos 10 años.
-Infinito o continuo: sus elementos se corresponden con los números reales. Por ejemplo: salario de los operarios de una empresa, Kw consumidos en una industria en los últimos 5 años

1.2 - RELACIONES ENTRE EVENTOS

- Todos los puntos muestrales comunes a ambos eventos se denomina intersección
- El conjunto que no contiene ningún suceso elemental se denomina evento o suceso imposible (ø)
- Si dos eventos A y B no contienen puntos elementales en común se dice que son mutuamente excluyentes; esta relación puede extenderse a más de dos eventos $(A \cap B = \emptyset)$.
- La unión de dos eventos A y B es el evento que contiene los puntos muestrales pertenecientes a uno o a otro o a ambos (A B).

1.3 - PROBABILIDAD

Probabilidad subjetiva:
Las probabilidades subjetivas están basadas en las creencias de las personas que efectúan la estimación de probabilidad.

Probabilidad a priori
La más antigua es la que se originó en los juegos de azar, denominada probabilidad a priori, según Laplace y se basa en el sencillo supuesto de resultados igualmente probables de un experimento.

$$P(E) = \frac{n}{N}$$

siendo n el número de casos favorables o que pertenecen al suceso y N el número de casos igualmente posibles o probables.

Probabilidad a posteriori o frecuencial
Esto es, si un experimento es repetido un número n de veces en condiciones iguales y existen $n_1 \, (n_1 \leq n)$ resultados en los cuales se ha presentado el suceso que interesa, la frecuencia relativa $\frac{n_1}{n}$ puede estimar a su probabilidad

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{N}$$

Probabilidad axiomática

Sea E el espacio muestral, se define la probabilidad como una aplicación $P: P(E) \to [0, 1]$ que cumple las siguientes condiciones:

- Axioma I: La probabilidad de un evento es un número mayor o igual que cero y menor o igual que uno. $0 \leq P(E) \leq 1$

- Axioma II: La probabilidad del espacio muestral S es igual a uno $P(S) = 1$
- Axioma III: La probabilidad de un evento el cual es la unión de dos eventos mutuamente excluyentes es la suma de sus probabilidades.
  $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B = E$; $P(A \cup B) = P(E) = P(A) + P(B)$
  Esto puede generalizarse como:
  $P(U_i A_i) = \sum_{i-1}^{n} P(A_i)\, con\, A_i \cap A_j = \emptyset \;\; y\, i \neq j$

Algunas consecuencias de estos axiomas que tienen gran aplicación práctica:

- Si A es el complemento de A en el espacio muestral S, luego:
  $\overline{A} \cup A = S$
  $\overline{A} \cap A = \emptyset$
  $P(\overline{A} \cup A) = P(S)\; y\; P(S) = 1$
  $P(\overline{A}) + P(A) = 1 \;\; P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- La probabilidad del suceso imposible es igual a cero. El suceso contrario de S es un suceso imposible, aplicando la consecuencia anterior:
  $$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$$
  $$P(\emptyset) = 0$$

Sistema exhaustivo y excluyente de sucesos

Se dice que la colección $A_1, A_2, \dots, A_n \subset E$ es un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos si se verifican las relaciones:

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$; $A_i \cap A_j = \emptyset$; $\forall\, i \neq j$

1.4 - PROBABILIDAD TOTAL

Teorema. Si dos eventos A y B pertenecen al mismo espacio muestral, la probabilidad de que A o B o ambos ocurran es la suma de sus probabilidades menos la probabilidad de su ocurrencia conjunta.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.5 - PROBABILIDAD COMPUESTA Y CONDICIONAL

Cuando para la ocurrencia de un suceso es necesario que se presenten otros dos sucesos en forma conjunta se habla de probabilidad compuesta. Se deberá analizar si la presentación de uno de estos sucesos previamente condiciona la presentación del otro.

La probabilidad condicional de un evento A dado que el B ha ocurrido se define como el cociente entre la probabilidad de la presentación conjunta de ambos eventos y la probabilidad del suceso B

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Cuando la probabilidad de B es igual a cero, la probabilidad condicional no está definida. De la misma forma:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)};\ P(A) > 0$$

1.5.1 - INDEPENDENCIA

La probabilidad de ocurrencia conjunta de dos sucesos A y B está dada por:

SI SON SUCESOS DEPENDIENTES

$P(A \cap B) = P(B) * P(A/B)$

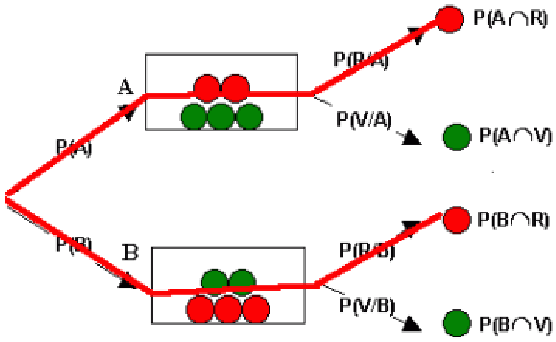
$P(A \cap B) = P(A) * P(B/A)$

SI SON SUCESOS INDEPENDIENTES

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

1.6 - TEOREMA DE BAYES (Probabilidades a posteriori)

Este teorema tiene gran importancia a la hora de tomar decisiones ya que permite incorporar nueva información para mejorar las estimaciones de probabilidad ya realizadas o conocidas, esas probabilidades se denominan probabilidades revisadas o a posteriori.



$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R)$$

$$P(A/R) = \frac{P(A \cap R)}{P(A \cap R) + P(B \cap R)} = \frac{P(A) \cdot P(R/A)}{P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B)}$$

TEOREMA DE BAYES:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)}$$

$$P(G_i/E_i) = \frac{P(G_i) * P(E/G_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(G_i) * P(E/G_i)} \quad con\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Resolución independiente del problema:
Si la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades individuales, entonces podemos decir que la resolución del problema con estas dos versiones es independiente.
$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

UNIDAD 2

VARIABLES ALEATORIAS

Formalmente **variable aleatoria** es aquella función definida en el espacio muestral que asocia a cada punto muestral un número perteneciente a los reales.

Clasificación

Si el fenómeno estudiado u observado es tal que puede ser cuantificado por valores contables o enteros, entonces la variable aleatoria se dice discreta. El conjunto de los valores posibles de esta variable puede ser finito o infinito numerable.

Si el fenómeno puede ser cuantificado a través de cualquier número real, la variable se dirá **continua.** Por ejemplo monto de ganancias anuales de una empresa

2.1 - Distribución de Probabilidades

Existe una asignación de probabilidades a cada uno de los posibles valores que puede tomar una variable aleatoria. Esa correspondencia entre los valores de la variable aleatoria y su probabilidad de ocurrencia es lo que se denomina **Distribución de Probabilidades**

Distribución de Probabilidades

El comportamiento de una variable aleatoria es descrito por sus leyes de probabilidad, las cuales pueden ser caracterizadas de distintas formas:

- la forma más común es a través de la distribución de probabilidades, el caso más sencillo es a través de una lista de los valores que la variable aleatoria puede tomar y sus respectivas probabilidades (sólo posible en el caso de variable aleatoria discreta);
- a través de gráficos
- a través de modelos matemáticos que representen la ley

2.1.1- Variable Discreta. Función Masa de probabilidad o Función de Cuantía.

$$f(x) = P(X = x) \quad (2.1)$$

p(x) es la probabilidad de que X tome el valor x, cumple las sig condiciones

1: $p(x) \geq 0 \, \forall \, x \in R_x$

2: $\sum p(x) = 1$

Para satisfacer los axiomas de la Teoría de Probabilidad y ser una función de probabilidad, deberá cumplir con los siguientes requisitos:

- $f(x_i)$ debe tener un valor numérico para todos los posibles valores de la variable aleatoria.
- $0 \leq f(x_i) \leq 1$ para cualquier valor de x
- $\sum f(x_i) = 1$ para todos los valores de x

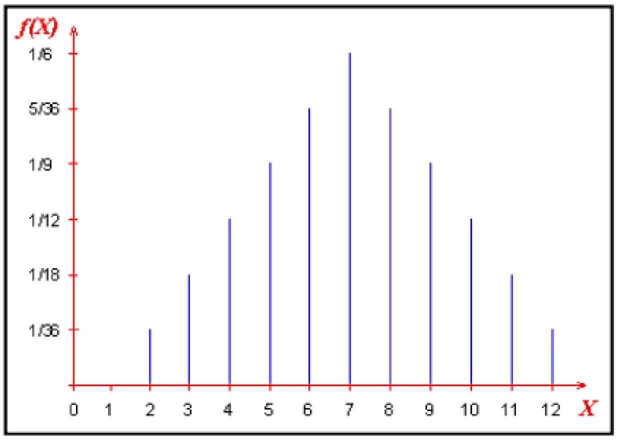


Fig. Nº 1- Función de cuantía

Otra forma de describir la distribución de probabilidades de una variable aleatoria es a través de una función denominada **función acumulativa o función de distribución**

FUNCIÓN ACUMULATIVA O DE DISTRIBUCIÓN: $F(X) = P(X \leq x)$

Para el caso de variable aleatoria discreta esta función es la suma de los valores de la función masa de probabilidad evaluada en todos aquellos valores menores o iguales que x, que la variable puede tomar:

$$F(x) = \sum_{\forall x_i \leq x} f(x_i)$$

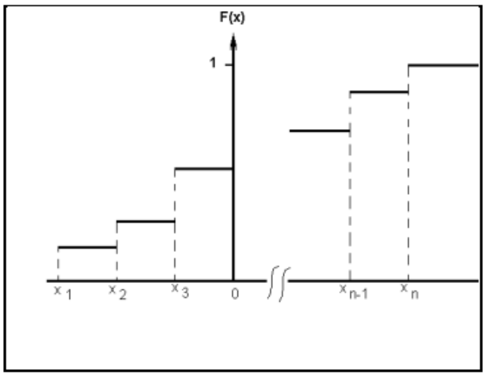


Fig. Nº 2- Función de distribución

Variable aleatoria continua. Función de densidad

Para una variable aleatoria continua por lo tanto se dispone de un conjunto no numerable de valores. No es posible definir una probabilidad para cada uno. Por eso se define la función de densidad de probabilidad

El área bajo la curva de esta función en un intervalo, representa la probabilidad de que la variable tome valores en el intervalo referido:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor específico es 0, ya que la longitud del intervalo dx desaparecería:

$$P(X = x_1) = \int_{x1}^{x2} f(x)dx = 0$$

Como consecuencia las siguientes expresiones son equivalentes

$$P(a \leq x \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b)$$

El valor de $f(x)$ en sí mismo no es una probabilidad, sino solamente la medida de la densidad de probabilidad en un intervalo. Debe cumplir con dos condiciones:

- $f(x) \geq 0 \; \forall x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

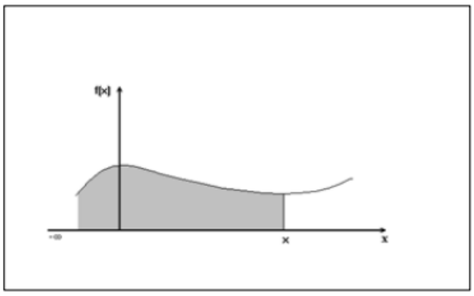


Fig. Nº 3 - Función de densidad

Función de Distribución

Se define la función de distribución acumulativa de la v.a. X, F(x), como la probabilidad de que la v.a. continua X tome valores menores o iguales a x, es decir:

$$F(X) = P(X \leq x) \quad (2.5)$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du \quad (2.6)$$

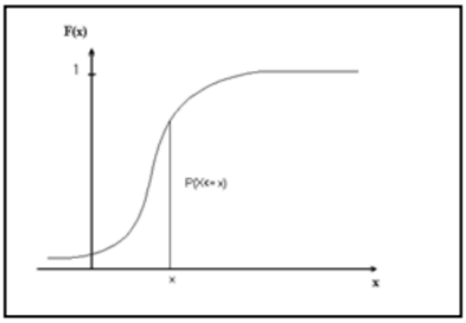


Fig. Nº 4 - Función de distribución

Propiedades de la Funcion de Distribucion:

$F(-\infty) = 0$, $F(X) = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 0$

$F(\infty) = 1$, $F(X) = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f(u)du = 1$

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)$$

Puede establecerse la relación entre ambas funciones, considerando un Δx arbitrariamente pequeño y evaluar la función acumulativa en los extremos de ese intervalo: x+Δx y x, haciendo tender a cero la amplitud Δx:

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(X\leq x+\Delta x)-P(X\leq x)}{\Delta x}$

$F'(x) = f(x) = \frac{P(x<X\leq x+\Delta x)}{\Delta x}$

luego:

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

2.2 - Variables aleatorias bidimensionales

Se puede definir variable aleatoria bidimensional como el par de números que expresa el resultado de un experimento combinado y esto puede ser representado en el plano x y; el recorrido o rango será ahora un subconjunto del plano x y.

2.2.1- Variable aleatoria bidimensional discreta. Función masa de probabilidades conjuntas

Esta función es la correspondencia entre cada par de puntos y su probabilidad de ocurrencia. Analíticamente se expresa por:

$f(x\,y) = P(X = x\,;\, Y = y)$

ya que es una probabilidad debe cumplir con las siguientes condiciones:

- $f(x\,y) \geq 0$
- $\sum_{\forall x_i} \sum_{\forall y_j} f(x_i\, y_j) = I,\ con\ i = 0, 1... m \quad j = 0, 1.... n$

$$f(x\,y) = P(X \leq x\,;\, Y \leq y) = \sum_{\forall x_i} \sum_{\forall y_j} f(x_i\, y_j) = I,\ con\ i = 0, 1 \ldots m \quad j = 0, 1 \ldots. n$$

Funciones marginales. Funciones masa de probabilidad marginales

El comportamiento de una variable en particular sin considerar la otra, se describe a través de las funciones marginales. Se las obtiene a partir de la función masa de probabilidades conjuntas, por darle todos los valores de su recorrido a la variable que no interesa considerar

$$f(x) = P(X = x) = \sum_{\forall y_i} f(x,\ y_j)\ con\ j = 0, 1 \ldots\ n$$

$$f(y) = P(Y = y) = \sum_{\forall x_i} f(x_i,\ y)\ con\ i = 0, 1 \ldots\ m$$

Funciones acumulativas marginales

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall x_i \leq x} f(x_i) \qquad \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j = 0}^{n} f(x_i\, y_j)$$

$$F(y) = P(Y \leq y) = \sum_{y_j \leq y} f(y_i) \qquad \sum_{x_i = 0} \sum_{y_j \leq y}^{n} f(x_i\, y_j)$$

Funciones condicionales

Pueden obtenerse a partir de la distribución conjunta, es aquella que se deriva al evaluar las probabilidades de presentación de una variable conociendo que la otra variable ha ocurrido con un valor particular.

Para un valor particular de Y, $Y = Y_0$ la función de cuantía de x condicionada a Y está dada por :

$$f(x/y) = P(X = x/Y = y_0) = \frac{P(X=x \wedge Y=y)}{P(Y=y_0)}$$

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{\sum_{\forall x_i} f(x_i,y)} = \frac{f(x,y)}{f(y)},\ con\ f(y) \neq 0$$

debe cumplir por ser una funcion de probabilidad:

- $0 \leq f(x/y) \leq I$
- $\sum_{\forall x_i} f(x/y) = I$

La distribución condicional de Y dado un valor particular de X se define de forma similar: $F(y/x) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$, $con\, f(x) \neq 0$

Variable aleatoria bidimensional continua

La probabilidad de ocurrencia conjunta de x e y en alguna región del espacio muestral se determina por integrar la función de densidad conjunta en esta región:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2 \;;\; y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)dxdy$$

Esto es igual al volumen debajo de la función de densidad conjunta f(x,y) , sobre la región limitada por x1x2 e y1 y2

La función de densidad conjunta debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$\cdot f(x, y) \geq 0 \quad ; \quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$$

La funcion de distribucion se define como:

$$F(x, y) = P(-\infty \leq X \leq x \,;\, -\infty \leq Y \leq y)$$

$$F(x, y) = P(X \leq x \,;\, Y \leq y)$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t, l)dtdl$$

Propiedades: $F(-\infty; \infty) = 0$; $F(\infty; \infty) = 1$; $F(-\infty; y) = 0$; $F(x; -\infty) = 0$
ya que $F(X, Y)$ $es\ una\ probabilidad\ deberá\ tomar\ valores\ entre\ 0\ y\ 1$

A partir de esta función se puede obtener la de densidad conjunta por derivar parcialmente:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\ \partial y} = f(x, y)$$

Funciones de densidad marginales

Como en el caso discreto, para estudiar el comportamiento de una de las variables en particular se elimina la otra, integrando sobre todos sus valores

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \qquad\qquad f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

Funciones de distribución marginales

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$F_1(x) = F_{x,y}(x, \infty)$$

De lo anterior se deduce que:

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x}[F(x, \infty)] = \frac{\partial}{\partial x}[F(x)]$$

De forma similar:

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{y} f(s)ds$$

$$F(y) = F_{x,y}(\infty, y)$$

Se deduce que:

$$f(y) = \frac{\partial}{\partial y}[F(\infty, y)] = \frac{\partial}{\partial y}[F(y)]$$

Si interesa obtener la probabilidad en un intervalo para una de las variables puede obtenerse a partir de la función conjunta o a partir de las marginales:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx \quad ; \quad P(a < X < b) = \int_{a}^{b} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy\,dx$$

Funciones de probabilidad condicionales

En el caso de variable continua la probabilidad de que alguna de las variables tome un valor específico, no tiene sentido:

$$P(X = x) = 0 \qquad P(Y = y) = 0$$

Tiene sentido que las variables tomen valores en un intervalo tan pequeño como se quiera, por ejemplo:

$$P(X \leq x/y \leq Y \leq y + \Delta y) = F(X/Y)$$

$$\frac{P(X \leq x; y \leq Y \leq y + \Delta Y)}{P(y \leq Y \leq y + \Delta y)}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y}^{y+\Delta y} f(l,m)dl\,dm}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{y}^{y+\Delta y} f(x,m)dx\,dm} \quad si \ \Delta y \to 0 \quad luego$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{x} f(l,y)dl}{\int_{y}^{y+\Delta Y} f(y)dy} = \frac{\int_{-\infty}^{x} f(l,y)dl}{f(y)}$$

Independencia de variables aleatorias

$$P(X \leq x ; Y \leq y) = P(X \leq x) * P(Y \leq y)$$
$$F(x, y) = F(x) * F(y)$$

ESTO ES SOLO POSIBLE DE EXPRESAR SI LAS VARIABLES SON INDEPENDIENTES

$$P(X = x_i , Y = y_j) = P(X = x_i) * P(Y = y_j)$$
$$F(x_i , y_j) = f(x_i) * f(y_j)$$

es necesario para que dos variables aleatorias distribuidas conjuntamente sean independientes, que su función conjunta pueda descomponerse en el producto de sus marginales

Ahora si la función conjunta está expresada como el producto de sus marginales, es suficiente para asegurar que las variables son independientes

UNIDAD 3

CARACTERÍSTICAS

VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

Existen una serie de números que resumen las características dominantes del comportamiento de una variable aleatoria

a- Medidas de la tendencia central
b- Medidas de variabilidad
c- Medidas de asimetría
d- Medidas de curtosis

3.1 Medidas de tendencia central

Promedios

a-Esperanza matemática
b-Media geométrica
c-Media armónica

Medidas de ubicación

a- Mediana
b- Modo
c- Cuantiles

Promedios

a- Esperanza Matemática

Suele ser denominada también valor medio ó valor esperado

Se la define: $E(x) = \sum_{\forall i} x_i\, f(x_i) \quad variable\ discreta$

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx \quad variable\ continua$

Propiedades

1. La esperanza de una constante es igual a la misma constante: $E(C) = C$

2. La esperanza de una constante por una función es igual a la constante por la esperanza de la función:
$$E(CX) = C\, E(X)$$
$E(CX) = \int_{-\infty}^{\infty} C\, X\, f(X)dX = C \int_{-\infty}^{\infty} X\, f(X)dX = C\, E(X)$

3. Esperanza de una función de la variable X: $E(a + bX) = a + b\, E(X)$
4. Esperanza de una suma de funciones de X: $E(g_1(x) \pm g_2(x)) = E(g_1(x)) \pm E(g_2(x))$
5. Esperanza de un producto de variables aleatorias independientes: $E(X.Y) = E(X) .\, E(Y)$
dependientes: $E(XY) = \int\int xy * f(x, y)\, dx\, dy$
6. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

b-Media Geométrica

$$M_g = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$$

El logaritmo de la media geométrica es igual al valor esperado de los logaritmos de los x_i

$log\, M_G = \sum_{\forall i} f(x_i) log\, x_i \quad para\ variable\ discreta$

$log\, M_G = \int_{-\infty}^{\infty} log\, x\, f(x)dx \quad para\ variable\ continua$

c-Media armónica

$$M_H = \frac{1}{\sum_{\forall i} \frac{1}{x_i} f(x_i)} \; para\ variable\ discreta$$

$$M_H = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f(x)} \; para\ variable\ continua$$

Medidas de ubicación

a-Mediana

Es el valor de la variable que cumple con la siguiente condicion:

$\int_{-\infty}^{Mediana} f(x)dx = 0.5$; $P(X \leq Mediana) = 0.5$ **Si X es variable continua**

$\int_{Mediana}^{\infty} f(x)dx = 0.5$; $Prob(X \leq Mediana) = \sum_{i=1}^{Mediana} f(x_i) = 0.5$

Si X es variable discreta

b-Modo

$\frac{df(x)}{dx} = 0 \;\; y \; \frac{d^2 f(x)}{dx} < 0$ si la variable es discreta, será el valor de la variable asociado a la máxima probabilidad:

$M_x \; {}_{i=1}^{n} f(x_i)$

c-Cuantiles

Se denomina cuantil de orden p(siendo p un número perteneciente al intervalo [0,1]) al valor de la variable Xp que cumple con la siguiente condición:

$P(X \leq x_p) = p\ o\ bien\ P(X > x_p) = 1 - p$

Cuartiles: Existen tres cuartiles, y dividen a la distribución de probabilidades en cuatro partes; de allí su nombre. Su expresión es la siguiente:

$P(X \leq x_{pi}) = \frac{i}{4},\ para\ i = 1, 2, 3$

El cuartil de orden 2 corresponde a la mediana

Deciles. Dividen la distribución de probabilidades en diez partes, por lo tanto hay 9 deciles:

$$P(X \leq x_{pi}) = \frac{i}{10},\ para\ i = 1, 2,\ \dots\ , 9$$

Porcentiles: Dividen la distribución de probabilidades en 100 partes, por lo tanto, hay 99 porcentiles

$$P(X \leq x_{pi}) = \frac{i}{100},\ para\ i = 1, 2,\ \dots\ , 99$$

3.2 - Medidas de variabilidad

a - Rango

Es simplemente la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable; es una cantidad que no aporta mucha información, ya que solamente se considera un par de números. Suele variar desde -∞ a +∞ ó de 0 a +∞, o bien entre dos números.

b - Varianza

Es la medida de dispersión más usada. Previo a definirla, se hace necesario definir una herramienta muy importante: los momentos

Momentos: se los define como los promedios de distintas potencias de la variable aleatoria

$$\alpha_k = E[x^k] = \sum_{\forall i} x_i^k * f(x_i) \quad o \quad \alpha_k = E[x^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$$

momentos con respecto a la media se denominan momentos centrados.

$$\mu_k = E[(X - E[X])^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[x])^k f(x)dx \quad \textbf{si X es continua}$$

$$\mu_k = E[(X - E[X])^k] = \sum_{\forall i} (x_i - E[X])^k * f(x_i) \quad \textbf{si X es discreta}$$

El momento de orden 1 es igual a 0:

$$\mu_1 = E[x - E[X]] = E[X] - E[E[X]] = E[X] - E[X] = 0$$

El momento centrado de orden 2 define a la varianza de X:

$$Var[X] = \sigma^2_x = E[X - E[X]]^2$$

$$Var[X] = E[X^2] - [E(X)]^2$$

$Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x)dx$ **si X es continua**

$Var[X] = \sum_{\forall i}(x - E[X])^2 f(x_i)$ **si X es discreta**

Propiedades

1. La varianza de una constante es igual a cero:
   $Var(C) = 0$
   $E[C - E(C)]^2 = E[C - C]^2 = E(C) = 0$

2. La varianza de una constante por X es igual a la constante al cuadrado por la varianza de la variable X:
   $Var(CX) = C^2 Var(X)$
   $E[CX - E(CX)]^2 = E[CX - CE(X)]^2 =$
   $E\{[C.(X - E(X))\,]^2 = E\{C^2.[X - E(X)\,]^2 =$
   $C^2 E[X - E(X)]^2 = C^2 Var(x)$

3. Varianza de una función X:
   $Var(a + bX) = Var(a) + Var(bx) = 0 + b^2 Var(x)$

Desvío Estándar

se define el desvío estándar como la raíz cuadrada positiva de la varianza

$\sigma_x = \pm \sqrt{Var(X)}$

$\sigma_x = \pm \sqrt{\alpha_2 - \alpha_I^2}$

Coeficiente de Variabilidad

Es un coeficiente adimensional que se obtiene de dividir el desvío por el valor esperado.

$$C_v = \frac{\sigma(X)}{E(x)}$$

3.3 - Medidas de asimetría

Miden la ubicación y dispersión de una distribución.

El tercer momento respecto a la media es usado para determinar si una distribución es simétrica o asimétrica.

- Si la distribución es simétrica, como las desviaciones están elevadas al cubo, las positivas y negativas tienden a anularse y, por lo tanto, $\mu_3 = 0$
- Si la distribución es asimétrica a la derecha, $\mu_3 < 0$.
- Si la distribución es asimétrica a la izquierda, $\mu_3 > 0$.

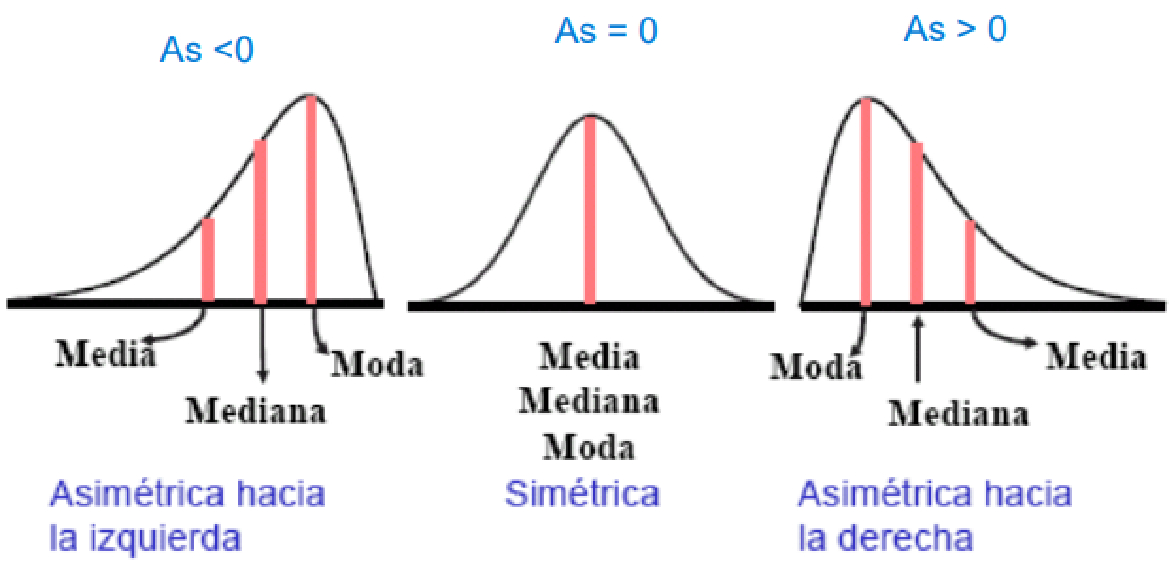
μ3, tomado como valor aislado, no es una buena medida de la asimetría, ya que tiene las mismas unidades que la variable; por eso es que se define una medida relativa denominada coeficiente de asimetría: $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3}{(\alpha_2 - \alpha_1^2)^{3/2}}$$

Se cumplen también las siguientes relaciones aproximadas:

$$As = \frac{E(X) - Modo}{\sigma(X)} \qquad As = \frac{3[E(X) - Mediana]}{\sigma(X)}$$

La distribución será simétrica si $As = 0$; asimétrica a la derecha si $As > 0$; y asimétrica a la izquierda si $As < 0$.

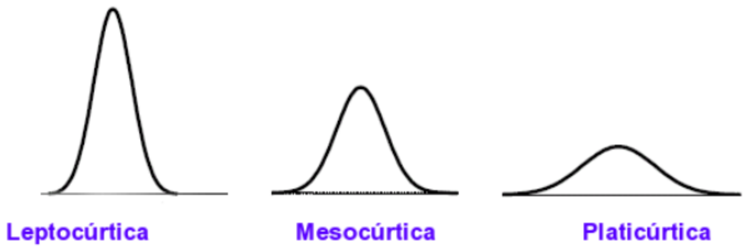


3.4 Medidas de curtosis

Puede introducirse una medida relativa para independizarse de las unidades $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^{\,2} - 3\alpha_1^{\,4}$$

La Curtosis de la curva Normal es igual a 3, y se la denomina distribución mesocúrtica. Para distribuciones que presentan mayor concentración de probabilidad cerca de la media, mayor que en la Normal , la curtosis será mayor que 3 y se denominará leptocúrtica. En caso que la concentración alrededor de la media sea menor que en la Normal la curtosis será menor que 3 y la distribución se dice platicúrtica



3.5 - Momentos de variables aleatorias distribuidas conjuntamente

$$E(X^l, Y^n) = \sum_{\forall x_i}\sum_{\forall y_j} x^l y^n f(x, y)$$

En el caso que g(X,Y)= X , se obtiene la esperanza de X:

$$E[g(X, Y)] = E(X) = \sum_{\forall x_i}\sum_{\forall y_j} x_i f(x_i, y_j)$$

$E(X) = \alpha_{1,0} = \sum_{\forall x_i} x_i \sum_{\forall y_j} f(x, y_j)$

$E(X) = \alpha_{1,0} = \sum_{\forall x_i} x_i\, f(x_i)$

Para obtener la esperanza de Y se produce de forma análoga

$E(Y) = \sum_{\forall x_i} \sum_{\forall y_j} y_j f(x_i, y_j) = \sum_{\forall y_j} y_j \sum_{\forall x_i} f(x_i, y)$

$E(Y) = \alpha_{0,1} = \sum_{\forall y_j} y_j f(y_j)$

α1,0 y α0,1 establecen el centro de masa de la distribución de probabilidades.

3.5.1 - Momentos centrados

$E[g(x, y)] = E\{[x - E(X)]^{l} . [y - E(Y)]^{ll}\}$

Expresadas en función de los momentos respecto al origen,

$\sigma^2(X) = \alpha_{2,0} - \alpha^2{}_{1,0}$

Un resultado similar se obtiene para la varianza de Y:

$\sigma^2(Y) = \alpha_{0,2} - \alpha^2{}_{0,1}$

Covarianza

Un momento muy importante se obtiene de considerar l=1 y n=1. Este momento se denomina ***covarianza***.

$Cov(X, Y) = \sigma_{x,y} = E\{ [X - E(X)]\, [y - E(Y)] \} = \sum_{\forall x_i} \sum_{\forall y_j} [x_i - E(X)][y_j - E(Y)]\, f(x_i, y_j)$

Puede ser expresada en función de los momentos respecto al origen por desarrollar la ecuación anterior: $\sigma_{x,y} = \alpha_{1,1} - \alpha_{1,0} \cdot \alpha_{0,1}$

$$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] * E[Y]$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 * COV(X, Y)$$

Coeficiente de correlación

Una versión normalizada de la covarianza es el denominado coeficiente de correlación ρ(x,y) , y se obtiene dividiendo la covarianza por el producto de sus desviaciones:

$$\rho_{x,y} = \frac{cov_{x,y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\mu_{1,1}}{\sqrt{\mu_{2,0} \cdot \mu_{0,2}}} \qquad -1 \leq \rho \leq 1$$

UNIDAD 4

4.1 - MODELOS DE VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

4.1.1- Modelo Bernoulli

Puede entonces definirse la variable aleatoria x Bernoulli y asignársele valores (arbitrarios pero muy prácticos) a los eventos antes mencionados:

$x = 0 \, fracaso$

$x = 1 \, éxito$

La función masa de x es simplemente:

$$f(x) = \begin{cases} p & si\, x = 1 \\ 1 - p & si\, x = 0 \end{cases}$$

siendo p la probabilidad del éxito

Esta función deberá cumplir con las condiciones de una función de probabilidad, una de ellas es que deberá ser igual a uno para todos los valores de la variable:

$$\sum_{x_i=0}^{x_i=1} f(x_i) = 1$$

$$p + (1 - p) = p + 1 - p = 1$$

Las características de este modelo son:

Características:

$E(x) = \sum_{x_i} x_i f(x_i) = 0.(1 - p) + 1.p = p$

$V(x) = p(1 - p)$

4.1.2 - Modelo Binomial

Si se realizan una serie de pruebas de tipo Bernoulli cuyos resultados sean mutuamente independientes y si la probabilidad de éxito permanece invariable en todas ellas se origina un nuevo modelo denominado BINOMIAL.

$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$

con el coeficiente binomial $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

El modelo se denomina BINOMIAL porque puede considerarse como el desarrollo del binomio $(p + q)^n$

-Ningun exito:

0;0;0 $(1 - p)^3$

-Un éxito:

1;0;0 o 0;1;0; o 0;0;1

cada secuencia es un evento , que entre sí son mutuamente excluyentes; cuya probabilidad es : $p(1 - p)^2$;

de esta manera la probabilidad de un éxito es : $3p(1 - p)^2$

-Dos éxitos:

1;1;0 o 1;0;1 o 0;1;1

nuevamente cada secuencia es un evento que es excluyente de los restantes:

$p^2(1 - p)$ *y el total*: $3p^2(1 - p)$

-Tres éxitos:

1;1;1; $p; p; p = p^3$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

Características:

$E(x) = np$

$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = np(1 - p) = n * p * q$

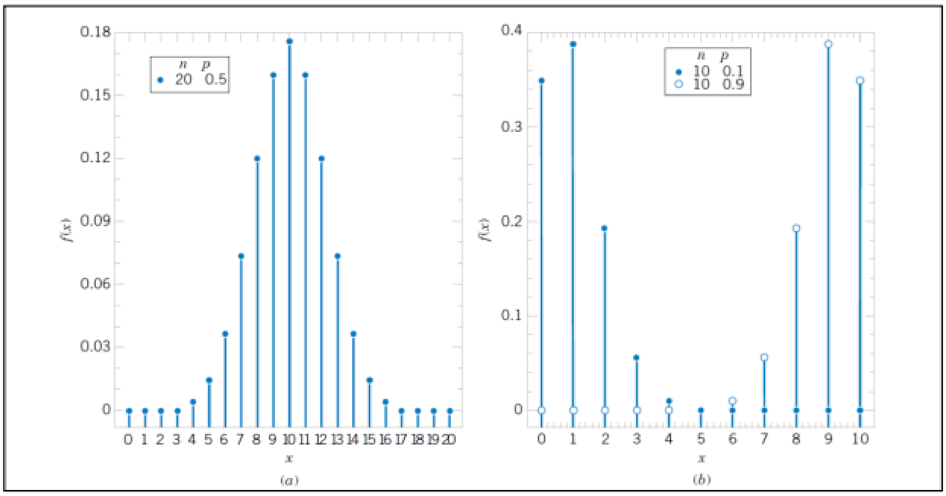


Figura Nº 1 - Distribución Binomial para distintos valores de *n* y *p*

4.1.3 - Modelo Poisson

partiendo del modelo binomial, si $p \to 0 \, y \, n \to \infty$ $\quad usamos\ poisson\ con$ $\lambda = n\,.\,p$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$ siendo λ el parametro del modelo

Características:

$E(X) = \lambda$

$Var(X) = \lambda$

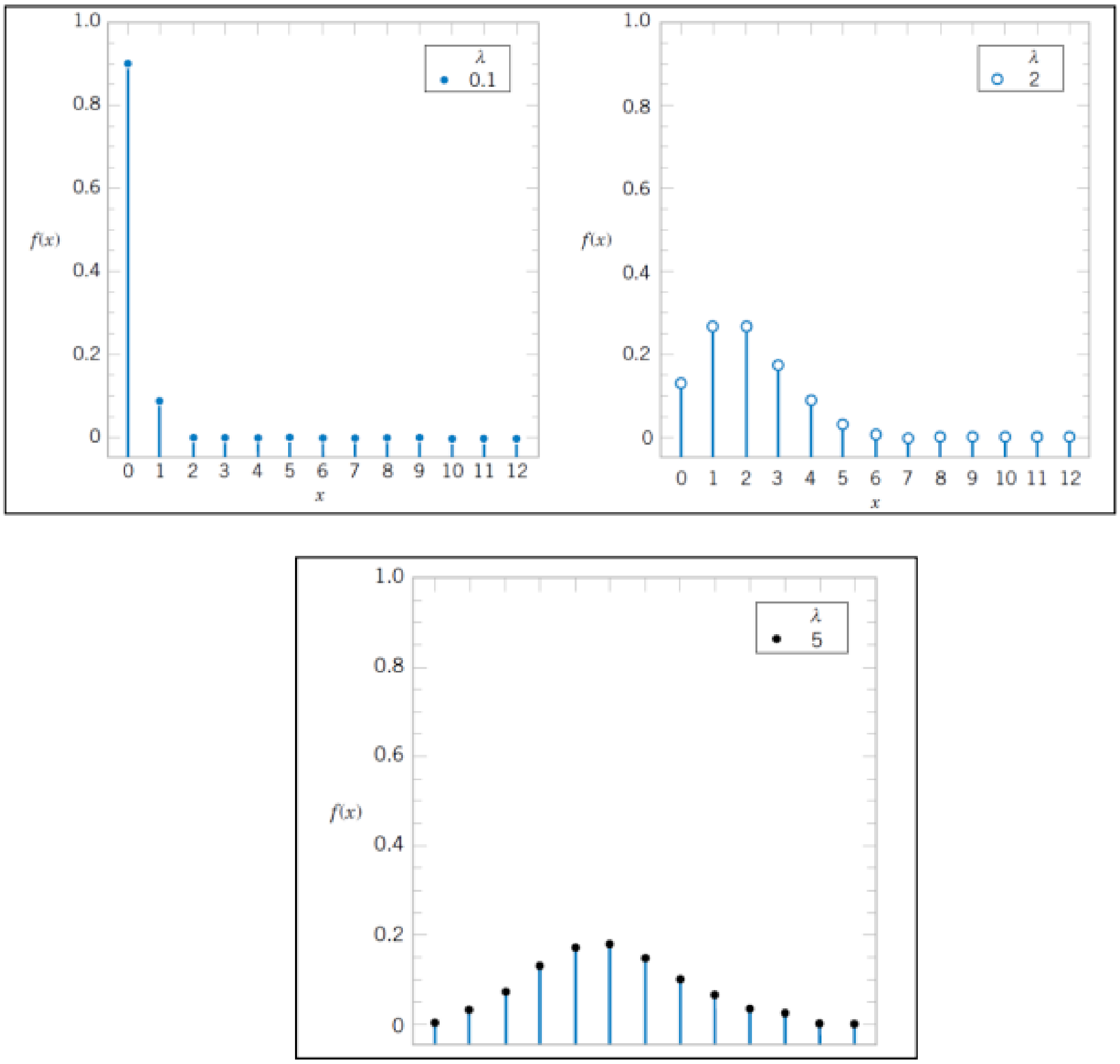


Figura Nº 2 - Distribución de Poisson para distintos valores del parámetro

Generalmente este modelo se vincula a aquellos eventos que ocurren en una unidad de tiempo, luego el período de tiempo en el que se realiza el análisis constituye una secuencia de pruebas independientes cada una con distribución Binomial. Si se tomara para el análisis un intervalo de tiempo igual al doble o al triple del inicial se verá que el parámetro es también igual al doble, al triple, etc., marcando esto la dependencia del tiempo de este modelo y por ello vinculado a los procesos estocásticos. Se entiende por procesos estocásticos a aquellos en los que interesa la secuencia, en el tiempo, de ocurrencia de eventos.

4.1.4 - Modelo hipergeométrico

Surge cuando se realiza un **muestreo sin reposición** de una **población finita** que tiene sus elementos clasificados en dos categorías.

Si **N** es total de elementos de los cuales hay **k** de una categoría y **N-k** de otra, al realizar una extracción de **n** elementos,sin reposición, cada extracción que se realice posteriormente es dependiente del resultado de la extracción anterior con la cual ***va cambiando la probabilidad de éxito***

$$P(X=x)=f(x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

N=tamaño población
n=tamaño muestra
k=numero de exitos en la muestra

Características:

Esperanza:

$$E(X) = n\,p = n(\frac{k}{N})$$

Varianza:

$$Var(X) = \frac{n\,k\,(N-k)}{N^2}\,(\frac{N-n}{N-1})$$

$$Var(X) = n * p * q(\frac{N-n}{N-1})$$

siendo $(\frac{N-n}{N-1})$ el factor de corrección por muestreo sin reposición y población finita

Cuando $(\frac{n}{N}) \leq 0.05$ La distribución Hipergeométrica se aproxima a la Binomial.

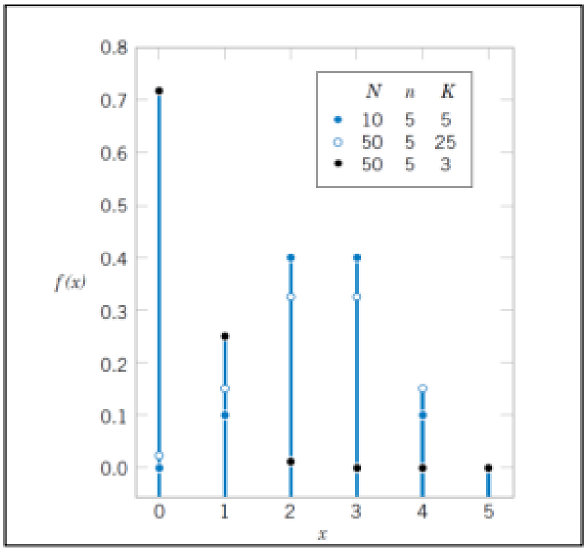


Figura N° 3 - Distribución Hipergeométrica para distintos valores de N, n y K

MODELOS PROBABILÍSTICOS

MODELO EXPONENCIAL

Este modelo surge al considerar el tiempo hasta la primera ocurrencia de un evento que pueda ser considerado como proceso de Poisson.

Si la variable aleatoria es ahora el tiempo transcurrido hasta que se verifica la primera ocurrencia, entonces será una variable continua, la probabilidad que T excede algún valor t es lo mismo que decir que no se verificaron ocurrencias en ese intervalo de longitud t, lo que es equivalente a decir que la variable aleatoria N° de ocurrencias de tipo Poisson toma el valor 0:

$$P(T > t) = P(x = 0)$$

Funcion de distribucion:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad ; \quad t \geq 0$$

Función de densidad:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Características

Esperanza: $E(T) = \frac{1}{\lambda}$

λ en los procesos de Poisson, representa el número promedio de ocurrencias, aquí, $1/\lambda$ representa el tiempo promedio entre ocurrencias.

Varianza: $Var(T) = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

MODELO NORMAL

suele conocerse como Modelo de las sumas, surge de n sumas de efectos. Grafico de gauss

Función de densidad:

$f(x) = ke^{-c(x-m)^2}$, $-\infty \leq x \leq \infty$

siendo **m** la distancia al centro de la distribución que por la simetría de la distribución es igual a su media μ.

Las constantes k y c se pueden determinar: k por considerar que f(x) para ser función de densidad deberá cumplir la condición de ser igual a uno para todos los valores que la variable puede tomar

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\, e^{-c(x-u)^2} dx = 1$$

$$k = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}$$

Para completar la función de densidad es necesario evaluar la otra constante, c. Para esto se utiliza la varianza:

$$Var(x) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 e^{-c(X-\mu)^2} dx$$

$$c = \frac{1}{2\sigma^2}$$

entonces la función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

La función acumulativa será:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Características:

Esperanza: $E(X) = \mu$

Varianza: $Var(X) = \sigma^2$

Media μ = (suma de todos los valores en la distribución) / (número total de valores en la distribución)

Modelo Normal estándar

La distribución normal se encuentra tabulada y existen, además, rutinas computacionales que permiten trabajar con ella

Para estandarizar el modelo normal:

$$z = \frac{x-u}{\sigma}$$

Función de densidad:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

Función acumulativa

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Características:

Esperanza: $E(z) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu)$

Varianza: $Var(z) = 1$

Los momentos centrados de orden impar = 0
Los momentos centrados de orden par:

$$\mu_n = E(x - \mu)^n = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!}\sigma^n$$

Asimetría: $A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$

Kurtosis en momentos centrados de orden par: K=3

Distribución de la suma de variables aleatorias Normales

Aproximación del modelo Binomial al Normal

$$P(X \leq x_0) = F_N(\frac{x_0 - np}{\sqrt{npq}})$$

siendo x_0 un valor cualquiera de x

DISTRIBUCIONES RELACIONADAS CON LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Distribución Chi-cuadrado
Este modelo describe la distribución de la suma de los cuadrados de variables aleatorias independientes, con distribución N(0,1):

$$V = \sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 \sim \chi_v^2$$

Si las variables que intervienen en la suma no fuesen N(0,1), se las debería estandarizar, con lo cual se obtendría:

$$V = \sum_{i=1}^{\nu} (\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i})^2 \sim \chi_v^2$$

V es también una variable aleatoria, ya que es el resultado de la suma de variables aleatorias. Por ser una suma de cuadrados, varía desde 0 a infinito.

Función de densidad:

La función de densidad surge de considerar la función N(0,1) de cada componente al cuadrado, y es la siguiente:

$$f(\chi^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\upsilon}{2}}\,\Gamma\left(\dfrac{\upsilon}{2}\right)}\,\chi^{2\left(\frac{\upsilon-2}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \; para\; \chi^2 > 0 \\ \\ 0, \; en\; otro\; caso \end{cases} \qquad (19)$$

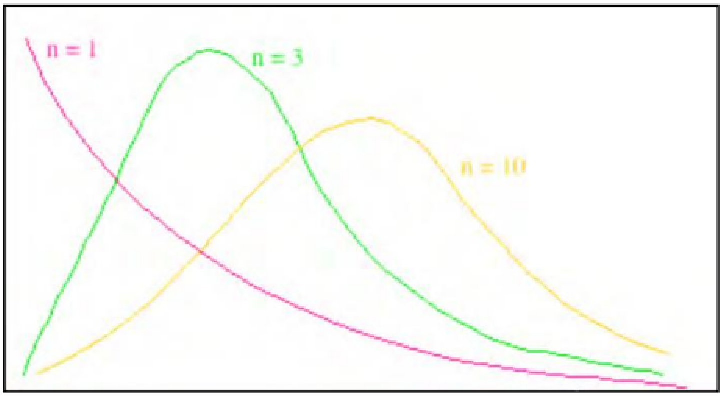


Figura Nº 8 – Distribución chi- cuadrado

Características:

$E(\xi^2) = \nu$

$\sigma^2(\xi^2) = 2\nu$

Propiedades de la distribución chi-cuadrado

1.- La variable solo puede tomar valores positivos.
2.- Es asimétrica.
3.- Depende del parámetro ν (grados de libertad).
4.- Su esperanza matemática es ν, y su varianza, 2ν

5.- *Propiedad aditiva o reproductiva :* $Si\,\chi^{2n}$ y χ^{2m} son dos variables Chi cuadrado con n y m grados de libertad respectivamente, independientes entre sí, entonces la suma de las dos variables es una variable Chi-cuadrado con n+m grados de libertad. Esto se

puede generalizar a la suma de cualquier número de variables Chi-cuadrado, independientes.
6.- Al aumentar el número de grados de libertad, la distribución Chicuadrado se aproxima asintóticamente a una distribución normal

Distribucion t de Student

$$t_\nu = \frac{x}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}}, \{\ x \sim N(0,1)$$

$$\{V - \chi_\nu^2$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\upsilon}} \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}}, \quad para\ \ -\infty < t < \infty$$

siendo v los grados de libertad asociados a la componente χ^2

Caracteristicas:

$E(t) = 0$

$\sigma^2(t) = \frac{\nu}{\nu-2}\ ,\ \nu > 2$

Propiedades de la distribución "t"

1.- Depende de un único parámetro, el número de grados de libertad. 2.- El rango de la variable es todo el eje real (-∞, +∞).
3.- Su gráfica es simétrica respecto al eje de ordenadas OY.
4.- El valor x = 0 es la media, mediana y moda de la distribución.
5.- Al aumentar n, se va haciendo cada vez más apuntada la gráfica de su función de densidad, siendo el límite para n →∞ la curva normal tipificada.

Distribución F de Snedecor

Distribucion:

$$F_{\upsilon_1,\upsilon_2} = \frac{\frac{X}{\nu_1}}{\frac{Y}{\nu_2}} = \frac{\frac{\chi_1^2}{\nu_1}}{\frac{\chi_2^2}{\nu_1}}$$

Funcion de densidad:

$$f(F)=\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}\right)\upsilon_1^{\frac{\upsilon_1}{2}}\upsilon_2^{\frac{\upsilon_2}{2}}F^{\frac{\upsilon_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\upsilon_2}{2}\right)(\upsilon_2+\upsilon_1 F)^{\frac{\upsilon_1+\upsilon_2}{2}}}, \quad para\ F>0$$

A veces es necesario tener en cuenta la siguiente relación:

$$F_{1-\alpha,\upsilon_2,\upsilon_1}=\frac{1}{F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}} \qquad (26)$$

MODELOS DE VALORES EXTREMOS

$P(Y \le y) = F(y) = P\,(para\ todo\ n\ de\ x_i \le y)$

Si los valores de x son independientes entonces:
$F(y) = P(X_1 \le y)\,P(X_2 \le y)...\,P(X_n \le y) = F_{x1}(y)F_{x2}(y)...\,F_{xn}(y)$

Si los x_i son idénticamente distribuidos, F(x),luego:

$F(y) = [F_x(y)]^n$ y cuando $n \rightarrow$: *se deriva el modelo buscado*

Modelo Tipo I

Surge de aquellas distribuciones iniciales que no tienen límite superior. El extremo de la curva correspondiente a la función de densidad debe decrecer tan rápidamente como una función exponencial; entonces, valores extremos provenientes de una distribución normal, log-normal, gamma, pueden ser ajustados por un Modelo Tipo I de máximos. En cambio, si la distribución inicial no es limitada en la dirección de los mínimos, se origina un Modelo Tipo I de mínimos.

Modelo Tipo II

Este modelo surge de aquellas distribuciones iniciales ilimitadas, y que poseen un número finito de momentos.

Modelo Tipo III

Este modelo surge cuando la distribución inicial está limitada en la dirección del valor extremo, es así que la distribución de valores mínimos provenientes de distribuciones lognormal, gamma y beta pueden ajustarse por un Modelo Tipo III

Modelo Tipo III -Weibull

$$F(x) = e^{-\left(\frac{\omega - x}{\omega - \mu_0}\right)^k}, \; x < \omega$$

$$f(x) = \frac{k}{\omega - \mu_0}\left(\frac{\omega - x}{\omega - \mu_0}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{\omega - x}{\omega - \mu_0}\right)^k}$$

Funcion distribucion

$$P(Z \leq z) = 1 - e^{-\left(\frac{z-\varepsilon}{\mu_0 - \varepsilon}\right)^k}$$

$$f(z) = \frac{k}{\mu_{0-}\varepsilon}\left(\frac{z-\varepsilon}{\mu_{0-}\varepsilon}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{z-\varepsilon}{\mu_{0-}\varepsilon}\right)^k}$$

Caracteristicas

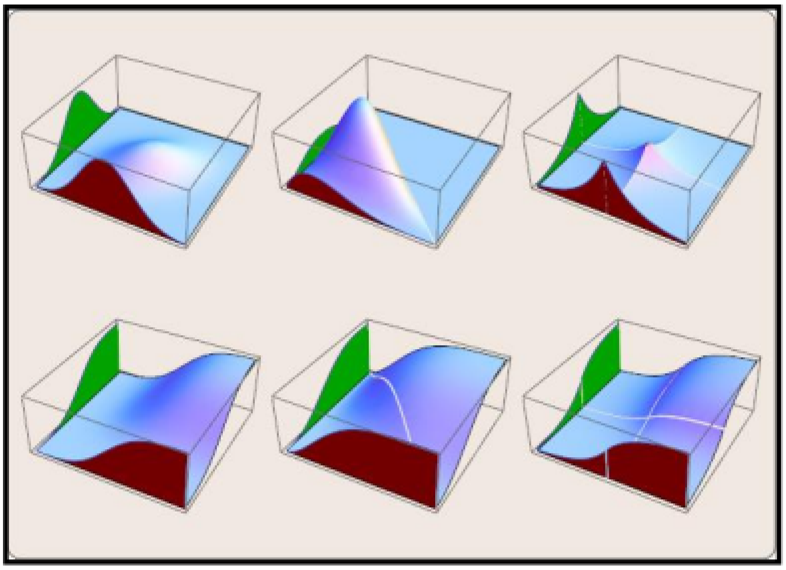
$E(x) = \mu = \varepsilon + (\mu_0 - \varepsilon)\Gamma(1 + \frac{1}{k})$

$Var(x) = \sigma^2 = (\mu_0 - \varepsilon)^2[\Gamma(1 + \frac{2}{k}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{k})]$

Generalmente es posible adoptar $\varepsilon = 0$ lo cual simplificarioa las expresiones del modelo:

$$F(z) = 1 - e^{-(\frac{z}{\mu_0})^k}$$

$$f(z) = \frac{k}{\mu_0}(\frac{z}{\mu_0})^{k-1} * e^{-(\frac{z}{\mu_0})^k}$$



Las 3 de arriba representan la funcion de densidad lo que estaria en color celeste, la verde una funcion de densidad marginal de una de las variables, lo bordo la funcion de densidad de otra de las variables

Las 3 de abajo representan la funcion acumulativa lo que estaria en color celeste, la verde una funcion acumulativa de una de las marginales
lo bordo la funcion acumulativa de otra de las marginales