Clase teórica de la semana del 4-4

Mario Garelik

Sección 13.5 - Componentes tangencial y normal de la aceleración.

- **Ejercitación sugerida (pp. 738-739):** 1 al 14 // 17 al 28.
- Breve introducción al marco **TNB** (marco de Frenet).
- Definición del vector binormal **B**. Comprobación que **B** es unitario.
- Orientación de mano derecha para el sistema de referencia **TNB**.
- Deducción de las componentes a_T y a_N.
- Observar que el vector **a** está *siempre* en el plano **TN**, que es ortogonal a **B**. Interpretar qué dicen a_T y a_N.
  - Pequeña incongruencia entre la interpretación de Thomas acerca de lo que mide a_N y lo que se deduce a partir de la definición de κ.
  - Convención de reconciliación.
- El plano determinado por los vectores **T** y **N** se llama *Plano osculador*.
- El plano determinado por los vectores **B** y **N** se llama *Plano normal*.
- El plano determinado por los vectores **T** y **B** se llama *Plano de rectificación*.
- Fórmula para hallar el componente normal a_N de la aceleración, una vez conseguido $a_{\mathbf{T}}$.
- Definición de τ (*torsión de una curva suave*): $\tau = -\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N}$.

Sección 14.1 - Funciones de varias variables.

- **Ejercitación propuesta (pp. 753 - 755):** 1 – 68.
- Definiciones iniciales de función de valores reales y variable vectorial o campo escalar: dominio, variables independientes y dependientes.
- Si bien trabajamos en simultáneo con R^2 y R^3, la visualización de la gráfica (superficie) sólo será posible para $f : R^2 \to R$.
- Dominios y rangos: sin mucho para decir que sea distinto a lo conocido.
  - Ambos se deducen de la estructura de la ley funcional.
  - En el caso del dominio, puede venir explicitado o no.

  - Si está implícito se toma como tal al mayor conjunto posible para el cual la expresión funcional toma sentido.

- Ahora en el dominio se mide con *norma* y ya no con valor absoluto como en el caso de las funciones vectoriales.

- Topología básica de R^2 (extendible a R^3, con bolitas en vez de discos):
  - Las distancias ahora (en R^2 o R^3) se miden con el operador $||\cdot||$ (norma o magnitud) y ya no con $|\cdot|$ (valor absoluto).
  - Disco abierto. Diferencia entre *círculo* y *disco*.
  - Punto interior, exterior y frontera.
  - Conjunto interior y frontera.
  - Región abierta y cerrada.
  - Región acotada.

- Ejemplito 2 para visualizar.

- En R^2: Curvas de nivel y curvas de contorno: diferencias.

- En R^3: Superficies de nivel.

Sección 14.2 - Límites y continuidad en dimensiones superiores.

- **Ejercitación propuesta (pp. 761 - 764):** 1 al 59.
  - Error en el ejercicio 54 - p.763: donde dice: Si $(x_0, y_0) = 3$, debe decir: Si $f(x_0, y_0) = 3$.

- Intro general.

- La definición $\epsilon - \delta$ de límite: analogías con Cálculo 1 y la medición con normas en el dominio (discos o bolas).

- Propiedades de los límites.

- No trabajaremos con la verificación de la definición en práctica.

- Técnicas para el cálculo de límites:
  - Sustitución directa del punto de acumulación en la expresión de la función (sin indeterminación). Ver ejemplo 1.
  - Utilización de alguna técnica básica: racionalización de numeradores/denominadores, factorización de polinomios, alguna relación trigonométrica, etc. Ver ejemplo 2.
  - El Teorema de compresión: ejercicio 55 - p. 763 (corregir error en el libro).

- Ver ejemplos 1 y 2. El ejemplo 3 no, ya que busca un δ, a partir de un ϵ dado (no nos enfocamos en la verificación de la definición).

- No existencia de límite: para ver la no existencia de un límite en un punto, se puede usar:
  - La no independencia de la trayectoria como causa. Ver ejemplos 4 y 5.

- **Coordenadas polares:** ver material de repaso en *Material de estudio* en la página:
  - La propiedad que analiza el texto en el ejercicio 60 - p. 763 expresa:

$$lim_{\,(x,y)\to(0,0)}\, f(x,y) = L \Rightarrow \; lim_{\,r\to 0}\, f(r\cos\theta, r\sin\theta) = L \qquad \text{(*)}$$

  - Uso del ejemplo 3 como caso de visualización del uso de la propiedad.
  - Sólo aplicable si el punto de acumulación es $(0,0)$.
  - No sirve de mucho, porque ya se conoce que el límite existe y su valor, esto es, brinda una condición necesaria para la existencia de límite, pero no suficiente.
  - Mostrar que el recíproco es falso.
  - La propiedad sólo es útil, en consecuencia, por su contrarrecíproco, *para probar la no existencia* de un limite.
- Uso del contrarrecíproco de la propiedad (*) para probar la no existencia de un límite:
  - Mirar en detalle el ejercicio resuelto 60 (p. 764) cuando toma en polares el camino y=0, el límite le da cero. Pero cuando toma el camino $y = x^2$ (en polares $r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$), el límite le da 1.

• Definición de continuidad.

• Función discontinua en un punto: la inexistencia de límite en él. Ver ejemplo 6.

• Álgebra de continuas. La continuidad de la composición.

• Terminología: continuidad, x-continuidad, y-continuidad.

• Las nociones de límite y continuidad se extienden a funciones de más de dos variables, sólo que ya no es posible la visualización ni la interpretación en términos de bolas.

• Valores extremos de funciones continuas en regiones cerradas y acotadas: el Teorema de Weierstrass visto en Cálculo 1, vale también para funciones definidas en R^2 y R^3.