Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral
Cátedra de Álgebra Lineal 2020

Práctica N° 11: MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACIÓN

1) En los siguientes ítems determinar si la matriz es diagonalizable. Si lo es, hallar la matriz diagonalizante y la matriz diagonal semejante y verificar la semejanza. Si no lo es, explicar por qué.

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

c) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2) Demostrar que:

a) Si la matriz A es semejante a la matriz B y la matriz B es semejante a la matriz C, entonces la matriz A es semejante a la matriz C.

b) Si A y B son matrices semejantes, entonces A^2 es semejante a B^2.

3) Resolver los siguientes ítems:

a) Dar una condición necesaria pero no suficiente para que una matriz sea diagonalizable.

b) Dar una condición suficiente pero no necesaria para que una matriz sea diagonalizable.

c) Determinar si cada afirmación es verdadera o falsa justificando:

i) Si la matriz A de $4x4$ tiene tres valores propios diferentes, entonces no se puede diagonalizar.

ii) Es condición suficiente para que una matriz sea diagonalizable que se cumpla que la suma de las multiplicidades algebraicas y geométricas de sus valores propios coincidan.

iii) Si una matriz es invertible, entonces es diagonalizable.

iv) Si una matriz es diagonalizable, entonces es invertible.

4) Demostrar que si A es diagonalizable, entonces $det\, A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ son los valores propios de A.

5) Resolver los siguientes ítems:

a) Sea A una matriz de orden 3 y supongamos que A tiene solamente un valor propio real. ¿Puede asegurar con éste solo dato que A es diagonalizable? Justifique.

b) Sea M una matriz $5x5$ tal que los valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -2$, con $ma(\lambda_1) = 4$ y $ma(\lambda_2) = 1$:

i) ¿Qué condición debe satisfacerse para que A sea diagonalizable?

ii) Calcule el determinante de A.

6) Para cada una de las siguientes transformaciones:

a) $T : R^2 \to R^2 \,/\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x - 12y \\ 7x - 11y \end{pmatrix}$

b) $T : R^3 \to R^3 \,/\, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x + 10y - 28z \\ 2x - 3y + 4z \\ x + 2y - 7z \end{pmatrix}$

Ayuda para 6b)**:** los VAP de la matriz asociada a T con respecto a la base canónica de R^3 son $1, -2, -3$.

i) Encuentre una base del espacio de salida tal que la matriz asociada a T con respecto a dicha base sea diagonal.

ii) Halle (si es que existen) los vectores de R^2, distintos del nulo, que tal que su imagen con respecto a T es múltiplo escalar de ellos.

iii) Verifique la respuesta obtenida en el ítem anterior.

7) Sea $T : R^2 \to R^2 \,/\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + 2y \end{pmatrix}$:

i) Calcular la representación matricial T respecto de B_1, la base canónica de R_2. Denotarla por A_T.

ii) Calcular la representación matricial T respecto de la base $B_2 = \{(-1, 1), (2, 0)\}$. Denotarla por B_T.

iii) Verificar que los valores propios de A_T y de B_T son los mismos.

8) El polinomio característico de una matriz diagonalizable B es $p(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda + 1)^2$:

a) ¿Cuáles son sus autovalores y sus correspondientes multiplicidades algebraicas?

b) ¿Qué tamaño tiene la matriz?

c) Calcular el determinante, la nulidad y el rango de B.

9) Si A es una matriz cuyos valores propios son $\lambda = -1, \lambda = 2$ y $\lambda = -3$, determinar los valores propios de:

a) A^{-1}

b) A^t

c) A^3

d) $5A$

Sugerencia: consultar del ejercicio 30 al 36 de la Sección 8.1 de Grossman (7° edición).

10) Determinar los valores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$:

Ejercitación adicional para seguir practicando:

11) Demostrar que si A es no singular y diagonalizable entonces la matriz inversa de A es diagonalizable.

12) Determinar si la matriz dada es diagonalizable: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

13) Determinar una matriz no diagonal de $2x2$ cuyos valores propios sean 2 y -3 y cuyos vectores propios asociados sean $(-1, 2)$ y $(1, 1)$. ¿Podemos afirmar que A es diagonalizable? Justificar.

14) Determinar el rango de A dado que A es una matriz diagonalizable de $4x4$, sus valores propios distintos son 0 y 1 y la multiplicidad geométrica de 1 es 2.