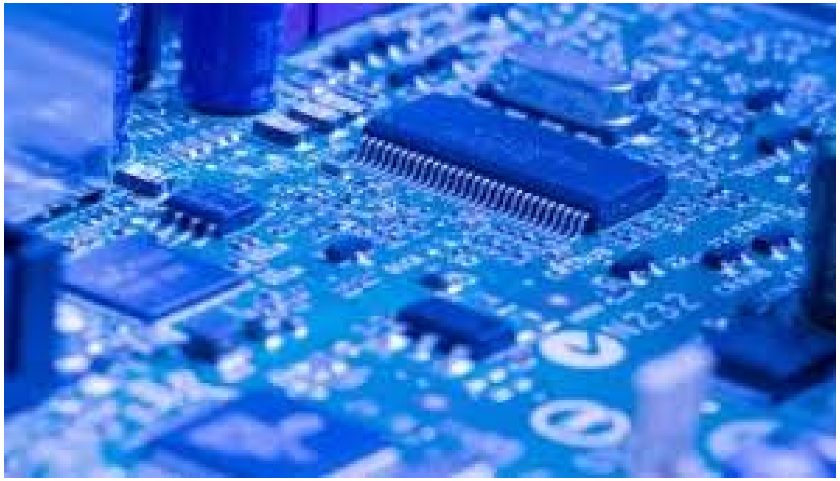
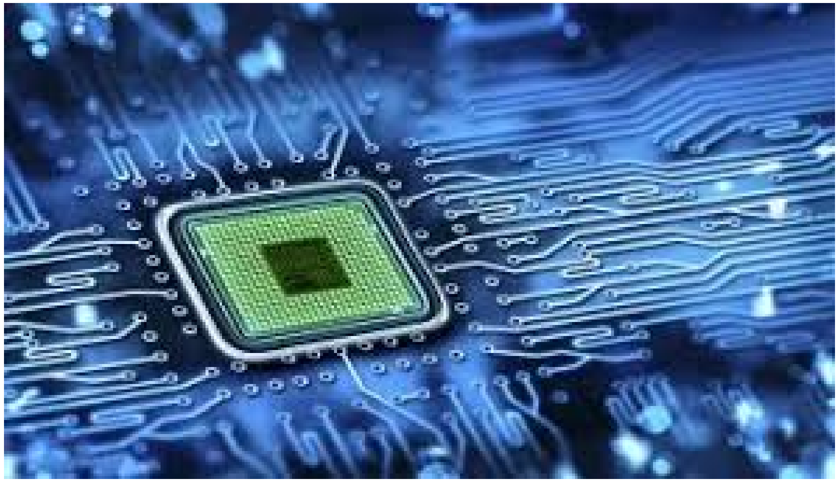
Electrónica Digital

Ingeniería Informática – FICH, UNL
Leonardo Giovanini





Funciones lógicas

Organización de la clase

En esta se estudiarán los siguientes temas:

- Funciones lógicas;
- Formas de representación;
- Ejemplos de aplicación;
- Formas canónicas.

Funciones lógicas - *Definición*

Una ***función lógica*** es una función matemática y lógica cuyos argumentos, y la función misma, asumen uno de los dos valores posibles del conjunto que define las variables.

Una función lógica toma la forma

$$f\colon \mathfrak{B}^n \to \mathfrak{B},$$

donde $\mathfrak{B} = \{0, 1\}$ es el dominio Booleano y n es un entero no negativo que determina el número de argumentos necesarios para que dicha función se pueda calcular.

La cantidad de funciones depende de la cantidad de argumentos, hay 2^{2^n} posibles funciones.

Estas funciones se utilizan en el estudio de ***teoría de complejidad***, sus propiedades son fundamentales en el diseño de algoritmos de clave simétrica en ***criptografía*** y el ***diseño de circuitos digitales***.

Las funciones lógicas se pueden representar a través de ***fórmulas proposicionales*** con la misma cantidad de variables y ***polinomios multivariados sobre cuerpo finito*** de Galois con dos elementos GF(2).

Funciones lógicas - *Representaciones*

Existen tres formas básicas de representar una función lógica, el uso de una u otra dependerá de las necesidades concretas en cada caso.

- **Expresión algebraica** – es una representación matemática de las expresiones lógicas utilizando las tres operaciones básicas (AND, OR y NOT). Combinando estas tres operaciones es posible construir cualquier expresión lógica. Los parentesis se utilizan para indicar el orden en el que las operaciones deben realizarse.

$$\overline{A+B\overline{C}}+D(\overline{E+\overline{F}})$$

$$\overline{(\overline{A+B})+\overline{C}}$$

$$\overline{(\overline{A}+B)+CD}$$

$$(A+B)\overline{C}\,\overline{D}+E+\overline{F}$$

Las expresiones algebraicas pueden proceder de un problema lógico planteado o del paso de unas especificaciones a lenguaje algebraico.

- **Tabla de verdad** - es una tabla matemática utilizada en lógica que establece los valores de las expresiones lógica para cada una de las combinaciones de los valores de los argumentos de la función.

  Una tabla de verdad tiene ***una columna por cada variable de entrada y una columna final mostrando todos los resultados*** de la expresión lógica que la tabla representa. Cada fila de la tabla contiene una posible configuración de las variables de entrada y el resultado de esa operación.

  Si las funciones ***tienen definidas todas*** sus combinaciones se las denominan ***funciones completas***.

  Si las funciones ***no tienen definidas todas*** sus combinaciones se las denominan ***funciones incompletas***. Esta situación puede deberse a que hay combinaciones de entrada que

  - No existen;
  - Están inhibidas.

Entradas			Salida
A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	X
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	X
1	1	1	X

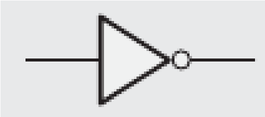
Los ***términos indiferentes*** se designan con una equis (X). A la hora de operar esto términos servirán como ***comodines***: lo tomamos como 1 ó 0 ***según convenga***.

- **Gráfica** - es la que se utiliza en el desarrollo de circuitos electrónicos. En esta forma, las funciones algebraicas se representan gráficamente con símbolos normalizados para cada operación básica

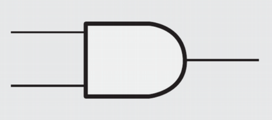
Los símbolos lógicos que se usan para representar las puertas lógicas están de acuerdo con el estándar ANSI/IEEE 91−1984. Este estándar ha sido adoptado por la industria privada, y la industria militar lo utiliza para su documentación interna así como para sus publicaciones.

El término ***puerta*** se usa para describir un circuito que realiza una ***operación lógica*** básica.

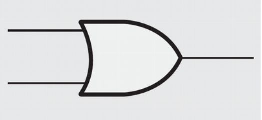
- **Inversor** (NOT) – es una puerta que tiene una sola entrada. Realiza la ***operación complementación***.



- **Producto** (AND) – es una puerta que tiene dos o más entradas y una única salida. Realiza la ***operación producto lógico*** (intersección, disyunción) entre las entradas.



- **Suma** (OR) - tiene dos o más entradas y una única salida. Realiza la ***operación suma lógica*** (unión, conjunción) entre las entradas.



Funciones lógicas – *Uso de las representaciones*

Expresión algebraica

$$f = A(B+CD)$$

Gráfica

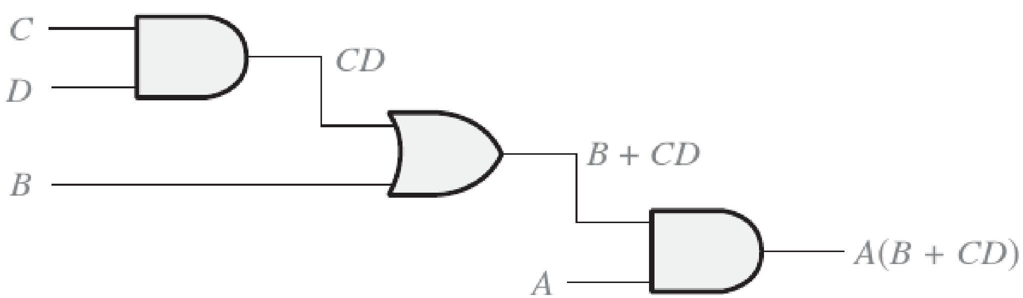
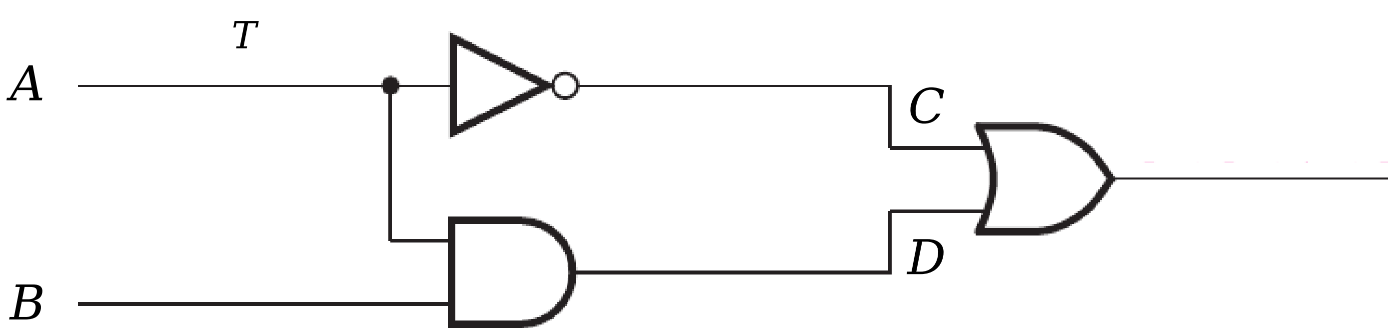


Tabla de verdad

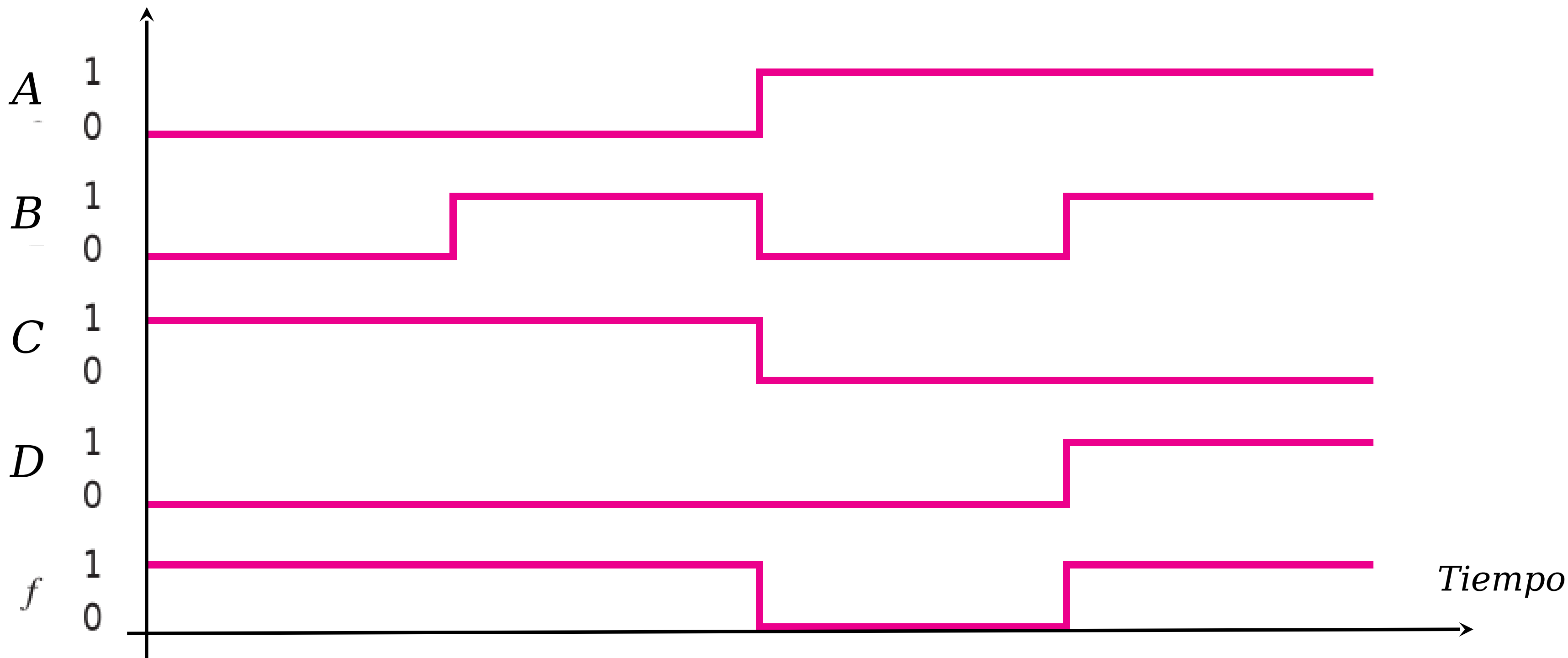
Entradas				Salida
A	B	C	D	$A(B+CD)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

El uso de una u otra dependerá de las necesidades concretas en cada caso.

Funciones lógicas– *Uso de las representaciones Análisis temporal*

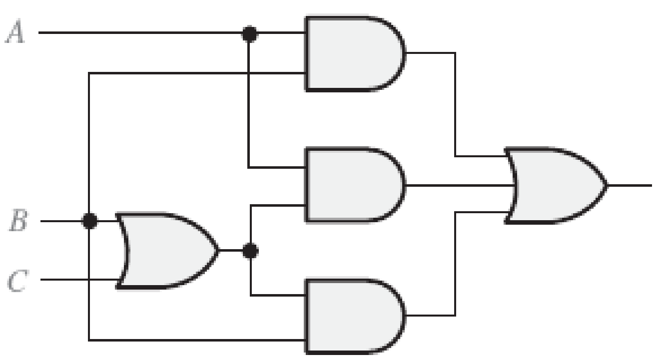


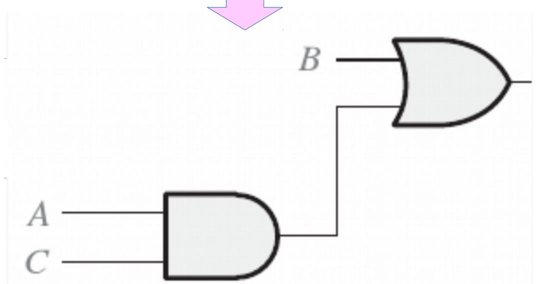
A	B	f(A, B)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Funciones lógicas – *Uso de las representaciones Simplificación*

$$AB + A(B + C) + B(B + C)$$





Paso 1. Aplicar la ley distributiva al segundo y tercer término

AB + AB + AC + BB + BC

Paso 2. Aplicar el *teorema de idempotencia* al cuarto término

AB + AB + AC + B + BC

Paso 3. Aplicar el *teorema de idempotencia* a los dos primeros términos

AB + AC + B + BC

Paso 4. Sacar *factor común* B y aplicar el *teorema de absorción* los últimos términos

AB + AC + B

Paso 5. Sacar *factor común* B y aplicar el *teorema de absorción* al primer y tercer términos

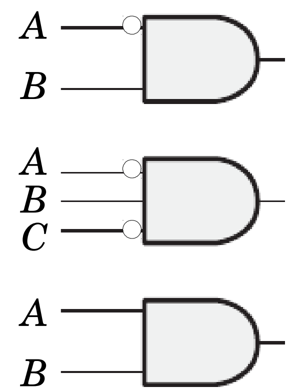
B + AC

Funciones lógicas – *Formas canónicas*

La ***estandarización*** de los términos de las funciones lógicas hace que su evaluación, análisis, simplificación e implementación sea ***sistemática y sencilla***.

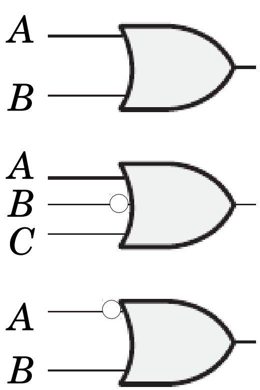
Un ***término canónico*** de una función lógica es todo ***producto o suma*** en la cual ***aparecen todas las variables*** en su forma directa o inversa. Estos términos se conocen como

$\overline{A}B \quad \overline{A}B\overline{C} \quad AC$



- **Minitérmino** (*minterm*) - m_i - es una expresión lógica de *n* variables consistente sólo en el operador producto (AND) y el operador negación (NOT). Representa aquellos términos de la tabla de verdad que tienen valor 1. A cada mintérmino se le asigna un índice basado en el valor binario (escribiendo las variables que lo componen en el mismo orden).

$(A+B) \quad (A+\overline{B}+C) \quad (\overline{A}+C)$



- **Maxitérmino** (*maxterm*) - M_i - es una expresión lógica de *n* variables consistente sólo en el operador suma (OR) y el operador negación (NOT). Representa aquellos términos de la tabla de verdad que tienen valor 0. A cada maxtérmino se le asigna un índice basado en el complemento del número binario que representa (escribiendo las variables en el mismo orden).

Para ilustrar estos conceptos consideremos una tabla de verdad con tres entradas (A,B y C). Hemos numerado las filas de 0 al 7 para facilitar las referencias.

	A	B	C	Minitérminos	Maxitérminos
0	0	0	0	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$M_0 = A+B+C$
1	0	0	1	$m_1 = \overline{A}\,\overline{B}\,C$	$M_1 = A+B+\overline{C}$
2	0	1	0	$m_2 = \overline{A}\,B\,\overline{C}$	$M_2 = A+\overline{B}+C$
3	0	1	1	$m_3 = \overline{A}\,B\,C$	$M_3 = A+\overline{B}+\overline{C}$
4	1	0	0	$m_4 = A\,\overline{B}\,\overline{C}$	$M_4 = \overline{A}+B+C$
5	1	0	1	$m_5 = A\,\overline{B}\,C$	$M_5 = \overline{A}+B+\overline{C}$
6	1	1	0	$m_6 = A\,B\,\overline{C}$	$M_6 = \overline{A}+\overline{B}+C$
7	1	1	1	$m_7 = A\,B\,C$	$M_7 = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$

Funciones lógicas – *Formas canónicas*

Todas las expresiones booleanas, independiente de su forma, pueden convertirse en cualquiera de las dos formas estándar

- ***Suma de productos*** – una función lógico puede expresarse como una suma (OR) de minitérminos

  Si la función *f* es especificada en la forma de una tabla de verdad, entonces la forma canónica suma de productos de *f* se obtiene considerando las filas de la tabla para las cuales f = 1.

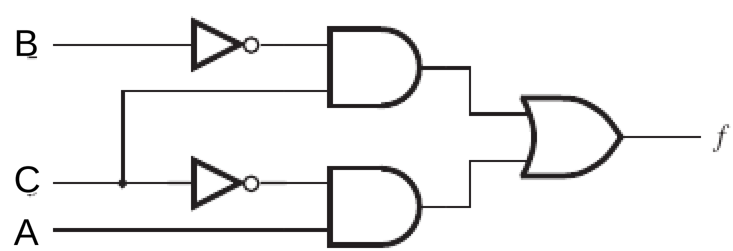
$$f=\sum_{i=0}^{n^2} m_i \qquad n\geq 2.$$

	A	B	C	*f*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Por ejemplo la suma de productos de la función descripta en la tabla es

$$f=\overline{A}\,\overline{B}\,C+A\,\overline{B}\,\overline{C}+A\,\overline{B}\,C+A\,B\,\overline{C}=\sum(m_1,m_4,m_5,m_6),$$

cuyo diagrama lógico es



Funciones lógicas – *Formas canónicas*

Aplicando el dual de Morgan a la suma de productos se obtiene la forma canónica producto de sumas.

- ***Producto de sumas*** – una función lógico puede expresarse como el producto (AND) de maxitérminos.

Si la función *f* es especificada en la forma de una tabla de verdad, entonces la forma canónica producto de sumas de *f* se obtiene considerando las filas de la tabla para las cuales f = 0.

$$f=\prod_{i=0}^{n^2} M_i \qquad n\geq 2.$$

	A	B	C	*f*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Por ejemplo el producto de sumas de la función descripta en la tabla es

$$f=(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})=\prod(M_0, M_2, M_3, M_7),$$

cuyo diagrama lógico es