Práctica: Larson - Sección 7.2

Series y convergencia

Dra. Ma. Florencia Acosta

Ejercicio 12

Verifique que la serie infinita diverge.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$, entonces por criterio del n-ésimo término la serie diverge.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = 1.$$

✓

Ejercicio 20

Verifique que la serie infinita converge.

20. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

$$S_1 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$S_3 = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

Ejercicio 20

Verifique que la serie infinita converge.

20. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$S_4 = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$$

$$S_5 = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$S_n = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

✓

Ejercicio 24

Verifique que la serie infinita converge.

24. $\sum_{n=0}^{\infty}(-0.6)^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad (|r| < 1).$$

Como $|-0.6| < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty}(-0.6)^n = \frac{1}{1-(-0.6)} = 0.625$

✓

Ejercicio 52

Escriba el decimal periódico en forma de una serie geométrica y escriba su suma como cociente de dos enteros.

52. $0.2\overline{15}$

$$
\begin{aligned}
0.2\overline{15} &= \frac{2}{10} + \frac{15}{1000} + \frac{15}{100000} + \frac{15}{10000000} + \dots \\
&= \frac{2}{10} + \frac{15}{10^3} + \frac{15}{10^5} + \frac{15}{10^7} + \dots \\
&= \frac{2}{10} + 15\left(\frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^5} + \frac{1}{10^7} + \dots\right) \\
&= \frac{2}{10} + 15\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2n+3}}\right) \\
&= \frac{2}{10} + 15\frac{1}{10^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}}\right)
\end{aligned}
$$

Ejercicio 52

Escriba el decimal periódico en forma de una serie geométrica y escriba su suma como cociente de dos enteros.

52. $0.2\overline{15}$

$$\begin{aligned}
0.2\overline{15} &= \frac{2}{10} + \frac{15}{10^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2n}}\right) \\
&= \frac{2}{10} + \frac{15}{10^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{100^{n}}\right) \\
&= \frac{2}{10} + \frac{15}{10^3}\left(\frac{1}{1-1/100}\right) \\
&= \frac{2}{10} + \frac{15}{10^3}\left(\frac{100}{99}\right) \\
&= \frac{71}{330}.
\end{aligned}$$

✓

Ejercicio 66

Determine la convergencia o divergencia de la serie.

66. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n} = \frac{1}{e-1}$ ✓

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n} = \left(\frac{1}{e}\right)^{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n}$$

$$\frac{1}{1-1/e} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n}$$

$$\frac{1}{1-1/e} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n}$$

$$\frac{1}{e-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n}$$

Ejercicio 67

Determine la convergencia o divergencia de la serie.

67. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$, entonces por criterio del n-ésimo término la serie diverge.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \arctan n = \tfrac{\pi}{2} \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

✓

Ejercicio 81

Encuentre todos los valores de x para los que la serie converge. Para esos valores de x, escriba la suma de la serie en función de x.

81. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}, \quad (|r|<1).$$

$$\left|\frac{1}{x}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 < |x| \quad \Longleftrightarrow \quad x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty).$$

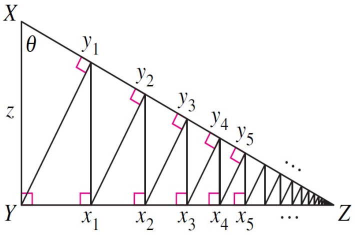
Si $x \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$, entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{1-1/x} = \frac{x}{x-1}.$ ✓

Ejercicio 102

Se muestra un triángulo rectángulo XYZ, en el que $|XY| = z$ y el ángulo en el vértice X es igual a θ.

(a) Encuentre la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares $|Yy_1| + |x_1y_1| + |x_1y_2| + \ldots$ en términos de z y θ.

(b) Si $z = 1$ y $\theta = \pi/6$, encuentre la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares.



$$|Yy_1| : \ \sin\theta = \frac{|Yy_1|}{z} \rightarrow |Yy_1| = \sin\theta \cdot z$$

$$|y_1x_1| : \ \sin\theta = \frac{|y_1x_1|}{|Yy_1|} \rightarrow |y_1x_1| = \sin^2\theta \cdot z$$

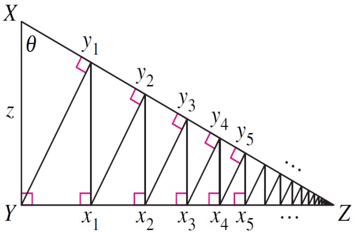
$$|y_2x_1| : \ \sin\theta = \frac{|y_2x_1|}{|y_1x_1|} \rightarrow |y_2x_1| = \sin^3\theta \cdot z$$

Ejercicio 102

Se muestra un triángulo rectángulo XYZ, en el que $|XY| = z$ y el ángulo en el vértice X es igual a θ.

(a) Encuentre la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares $|Yy_1| + |x_1y_1| + |x_1y_2| + \dots$ en términos de z y θ.

(b) Si $z = 1$ y $\theta = \pi/6$, encuentre la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares.



(a)

$$L = \left(z\sin\theta + z\sin^2\theta + z\sin^3\theta + \dots\right)$$

$$L = z\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\theta)^n$$

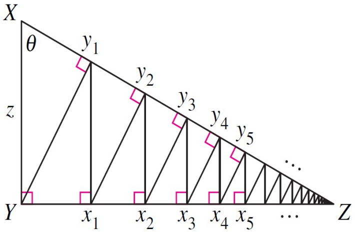
$$L = z\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\theta)^n = z\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\sin\theta)^n - 1\right) = z\left(\frac{1}{1-\sin\theta} - 1\right) = \frac{z\sin\theta}{1-\sin\theta}.$$

Ejercicio 102

Se muestra un triángulo rectángulo XYZ, en el que $|XY| = z$ y el ángulo en el vértice X es igual a θ.

(a) Encuentre la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares $|Yy_1| + |x_1y_1| + |x_1y_2| + \dots$ en términos de z y θ.

(b) Si $z = 1$ y $\theta = \pi/6$, encuentre la longitud total de los segmentos de recta perpendiculares.



(b)

$$L = z\sum_{n=1}^{\infty}(\sin\theta)^n = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{1-\sin\frac{\pi}{6}} = 1.$$

¡Nos vemos en el foro de consultas!