CÁLCULO II

ANÁLISIS VECTORIAL

Prof. Ing. Silvia Seluy

CAMPOS VECTORIALES

Al estudiar funciones vectoriales se ha dado el concepto de funciones que asignan un vector a un número real, mediante las cuales se pueden representar curvas y movimientos en ellas.

Al estudiar los **campos vectoriales**, se introducen dos nuevos conceptos de funciones vectoriales y se trata de funciones que **asignan un vector: a un punto del plano ó a un punto en el espacio.**

Se usan para representar **campos de fuerza** y **campos de velocidades**.

Definición de campo vectorial

Sean M y N funciones de dos variables x y y, definidas sobre una región R en el plano. La función $\mathbf{F}$ definida por

$$\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} \qquad \text{Plano}$$

se llama **campo vectorial en *R*.**

Sean M, N y P funciones de tres variables x, y y z definidas sobre una región sólida Q en el espacio. La función $\mathbf{F}$ definida por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k} \qquad \text{Espacio}$$

se llama **campo vectorial en *Q*.**

Reforzando el concepto de campo vectorial

- Un campo vectorial asocia un vector con un punto del espacio. Por ejemplo, si **F** es una función vectorial definida en un disco abierto B de R^3, tal que

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$$

Entonces **F** asocia a cada punto (x,y,z) de B, un vector, y **F** recibe el nombre de **campo vectorial.**

El dominio del campo vectorial es un subconjunto de R^3 y como imagen, un subconjunto de V_3 .

Cuando el dominio del campo vectorial es un conjunto del plano y la imagen un subconjunto de V_2, el campo tiene la forma:

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j}$$

En general, un campo tendrá las características de sus componentes: continuo, diferenciable, etc.

Campos vectoriales y campos escalares

- Cuando se asocia un escalar (en lugar de un vector) con un punto del espacio, se trata de un **campo escalar.** Por lo tanto, un campo escalar es una **función real.**
- **Ejemplo de campo escalar:** la temperatura en un punto como función de las coordenadas del punto.
- **Ejemplo de campo vectorial:** el flujo de un fluido como el agua a través de un tubo o la sangre en una arteria.
- En un punto (x,y,z) la velocidad del fluido está dada por el campo **F**(x,y,z), por lo que se denomina un campo de velocidad del fluido.

El gradiente como campo vectorial

El gradiente de un campo escalar es un campo vectorial:

Si f es un campo escalar y **F** es el campo vectorial, definido por $\vec{F} = \nabla f$ entonces **a F** se lo llama campo vectorial gradiente y f recibe el nombre de función potencial para **F.** (ej. 6)

Un campo vectorial gradiente también recibe el nombre de **campo vectorial conservativo.**

Condición Necesaria y Suficiente para que un campo vectorial en el plano sea conservativo

Sean M y N funciones cuyas primeras derivadas parciales sean continuas en un disco abierto R. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Demostración Para demostrar que la condición dada es necesaria para que $\mathbf{F}$ sea conservativo, suponga que existe una función de potencial f tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}.$$

Entonces se tiene

$$f_x(x, y) = M \Rightarrow f_{xy}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$f_y(x, y) = N \Rightarrow f_{yx}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y, dada la equivalencia de las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx}, se concluye que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$ para todo (x, y) en R. La suficiencia de esta condición se demuestra en la sección 13.4.

Dos campos importantes: **Rotacional** y **Divergencia**

- Dos campos que involucran derivadas y que se asocian con un campo vectorial **F, son los llamados:**
- **Rotacional de F:** es un campo vectorial
- **Divergencia de F:** es un campo escalar

Ambos campos se asocian al campo vectorial F, definidos por medio de un operador, que los convierte en campos vectoriales o escalares.

A continuación, se estudiarán estos campos.

El vector operador nabla ($\vec{\nabla}$) y el rotacional

El vector operador nabla que se define como:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

El rotacional se define por medio del operador nabla relacionado con **F** con un producto vectorial, cuyo resultado es un vector.

Definición de rotacional

El rotacional de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\begin{aligned}\textbf{rot F}\ (x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Condición Necesaria y Suficiente para que un campo vectorial en el espacio sea conservativo

Suponga que M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas en una esfera abierta Q en el espacio. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo si y sólo si $\mathbf{rot}\ \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$. Es decir, $\mathbf{F}$ es conservativo si y sólo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

- Esto significa que si el **rot F** = **0** , entonces el campo **F** se denomina irrotacional y **F** es un **campo conservativo.** (ej. 7 y 8)

El vector operador nabla (∇) y la divergencia

El operador nabla se asocia al campo vectorial **F** con un producto escalar entre ambos vectores, lo cual origina un campo escalar.

Definición de divergencia

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es

$$\text{div}\ \mathbf{F}(x, y) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}.$$ Plano

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\text{div}\ \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}.$$ Espacio

Si div $\mathbf{F} = 0$, entonces se dice que $\mathbf{F}$ es **libre de divergencia.**

Interpretación física del rotacional y la divergencia

Rotacional: se considera que es la tendencia que tiene un fluido a circular alrededor de una frontera. Cuando el fluido está libre de rotación, se considera irrotacional.

Divergencia: asociada a partículas en movimiento representa la cantidad de partículas que fluyen por un punto, por unidad de volumen.

Relaciones entre rotacional y divergencia

Sean **F** y **G** dos campos vectoriales con derivadas parciales segundas continuas y sea f una función escalar.

Se puede demostrar (Ej 55 a 62) que:

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \mathbf{rot}\,\mathbf{F} + \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$$

$$\mathbf{rot}\,(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \mathrm{div}\,\mathbf{F} + \mathrm{div}\,\mathbf{G}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot (\mathbf{rot}\,\mathbf{G})$$

$$\nabla \times [\nabla f + (\nabla \times \mathbf{F})] = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$$

$$\mathrm{div}(f\,\mathbf{F}) = f\,\mathrm{div}\,\mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{rot}\,\mathbf{F}) = 0 \quad \text{(teorema 13.3)}$$