Práctica: Larson - Sección 7.4

Otros criterios de convergencia

Dra. Penélope Cordero

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

¿Qué ejercicios de práctica debo hacer?

✓ Ejercicios Propuestos:

- **Pág. 463**: 1 al 15 /// 31 al 88 /// 109 - 110 - 112 - 115 - 123 - 124

✓ En este video:

- Ejercicio 10.
- Ejercicio 15.
- Ejercicio 42.
- Ejercicio 58.
- Ejercicio 74.
- Ejercicio 82.
- Ejercicio 115.

EJERCICIO 10 DETERMINE LA CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE LA SERIE.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi$$

Solución: Notar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\cos n\pi = 1$ o $\cos n\pi = -1$, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n$$

resulta una serie alternante de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ donde $a_n = \frac{1}{n}$.

Para determinar si converge o diverge, analizaremos si se satisfacen las condiciones del *criterio modificado para series alternantes*:

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = a_n \text{ para todo } \Rightarrow \{a_n\} \text{ es decreciente. } \checkmark$$

Calculamos el límite de la sucesión $\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ \checkmark$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos n\pi$ **converge**.

Ejercicio 15 determine la convergencia o divergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$

Solución: Observando la expresión para el denominador del término general de la serie, podemos reescribir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{(2n-1)!}$$

Debido a que interviene una expresión factorial, emplearemos el *criterio de la razón*:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}(n+1)!}{(2(n+1)-1)!}}{\frac{(-1)^{n+1} n!}{(2n-1)!}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)!(2n-1)!}{(-1)^{n+1} n!(2n+1)!} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(2n-1)!}{n!(2n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n!(2n-1)!}{n!(2n+1)(2n)(2n-1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n)} = 0 < 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto la serie es **absolutamente convergente**, y en consecuencia **convergente**.

Ejercicio 42 determine si la serie converge condicionalmente o absolutamente, o si diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n}$$

Solución: En este caso

$$\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (-1)^{n+1}$$

Por lo tanto, podemos reescribir a la serie dada como una serie alternante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{donde} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

Veamos si es absolutamente convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{serie armónica}$$

La serie armónica es divergente, por lo tanto, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n}$ **no converge absolutamente**.

Veamos si la serie alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ con $a_n = \dfrac{1}{n}$, es convergente.

Teniendo en cuenta *el criterio modificado de la serie alternante*:

$a_{n+1} \leq a_n \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n} = a_n$ para todo $n \Rightarrow \{a_n\}$ es decreciente. ✓

Como la sucesión es decreciente, analizamos el límite de $\{a_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \checkmark$$

Se tiene que la serie es **convergente**.

Finalmente, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n}$ es **condicionalmente convergente**.

Ejercicio 58 use el criterio de la razón para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n]}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$$

Solución: En este caso podemos reescribir la serie como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \, [2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n]}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(3n-1)!}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(2(n+1))!}{(3(n+1)-1)!}}{\frac{(-1)^n(2n)!}{(3n-1)!}} \right| \\
&= \left| \frac{(-1)^{n+1}(2n+2)!(3n-1)!}{(-1)^n(2n)!(3n+2)!} \right| \\
&= \frac{(2n+2)!(3n-1)!}{(2n)!(3n+2)!}
\end{aligned}$$

Aplicando el *criterio de la razón* tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!(3n-1)!}{(2n)!(3n+2)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!(3n-1)!}{(2n)!(3n+2)(3n+1)(3n)(3n-1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+2)(3n+1)(3n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{27n^3+27n^2+6n}
\end{aligned}$$

Aplicamos regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+6x+2}{27x^3+27x^2+6x} = \lim_{x\to\infty}\frac{8x+6}{81x^2+54x+6} = \lim_{x\to\infty}\frac{8}{162x+54} = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n+2}{27n^3+27n^2+6n} = 0 < 1$$

En consecuencia la serie es **absolutamente convergente**, y por el *Teorema de la convergencia absoluta*, la serie **converge**.

Ejercicio 74 emplee el criterio de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$$

Solución: Notar que podemos reescribir la serie como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^2}\right)^n$$

Aplicando el *criterio de la raíz* tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n!}{n^2}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n!}{n^2}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n!}{n^2}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)!}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

En este caso, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty > 1$, por lo tanto la serie dada es **divergente**.

Ejercicio 82 determine la convergencia de la serie usando el criterio que resulte apropiado.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4n^2-1}$$

Solución: Aplicamos el criterio de la razón:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{4(n+1)^2-1}}{\frac{2^n}{4n^2-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n 2(4n^2-1)}{2^n(4(n+1)^2-1)}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-2}{4n^2+8n+3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{2}{n^2}}{4+\frac{8}{n}+\frac{3}{n^2}} \\
&= \frac{8}{4} \\
&= 2 > 1
\end{aligned}$$

Dado que $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, por el *criterio de la razón*, la serie **diverge**.

EJERCICIO 112 DETERMINE SI EL ENUNCIADO ES VERDADERO O FALSO. SI ES FALSO, EXPLIQUE POR QUÉ O DÉ UN EJEMPLO QUE MUESTRE QUE ES FALSO.

Si tanto $\sum a_n$ *como* $\sum b_n$ *convergen, entonces* $\sum a_n b_n$ *converge.*

Solución: Veamos con un ejemplo que este enunciado es **falso**: consideremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Dado que las sucesiones son decrecientes $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ para todo n, y

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Por el *criterio modificado para series alternantes*, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **convergen**.

Mientras que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es igual a la serie armónica que **diverge**.

Ejercicio 115 Pruebe que si $\sum |a_n|$ converge, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Es válido el recíproco? Si no lo es, dé un ejemplo que demuestre que es falso.

Solución: Por hipótesis, $\sum |a_n|$ converge, entonces por el *Teorema límite del n-ésimo término de una serie convergente*, se tiene que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
Por otra parte, las series $\sum a_n^2$ y $\sum |a_n|$ son de términos positivos , entonces teniendo en cuenta el *Ejercicio 99* de la Sección 7.3:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n^2}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum |a_n| \text{ converge}$$

resulta que $\sum a_n^2$ es convergente.

El recíproco **no** es válido: consideremos la serie armónica $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una p-serie con $p = 2$, y por lo tanto, convergente.
- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Por lo tanto es falso que si $\sum a_n^2$ converge, entonces $\sum |a_n|$ converge.