Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral
Cátedra de Álgebra Lineal 2020

Práctica N° 10: VALORES Y VECTORES PROPIOS

1) Encontrar los valores propios o autovalores y los espacios propios de la matriz dada en cada caso. Determinar la multiplicidad algebraica y geométrica:

a) $A = \begin{bmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}; b \neq 0$

g) $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}; bcd \neq 0$

2) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$:

a) Hallar los valores propios de A.

b) Verificar, usando la definición de valor propio y vector propio, que A tiene a $(0, 1)$ como vector propio asociado al valor propio d.

3) Demostrar que v_1 y v_2 son vectores propios de la matriz A para cualquier par de números reales a y b.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

4) Dada la matriz A que admite a v_1 y v_2 como autovectores, hallar los autovalores correspondientes y los valor a_1 y a_2 de esta matriz.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & a_1 \\ -5 & a_2 \end{bmatrix}$$

5) Demostrar que:

a) Si A es una matriz diagonal, entonces los valores propios de A son las componentes de su diagonal.

b) A es invertible si sólo si $\lambda = 0$ no es autovalor de A.

c) Si A es invertible con valor propio λ, entonces $1/\lambda$ es valor propio de A^{-1}.

d) Si λ es valor propio de A, entonces λ^2 es valor propio de A^2.

e) Si v es un vector propio asociado a λ y $\alpha \in R$, entonces αv también es un vector propio asociado a λ.

6) Dadas las matrices A_1, A_2, A_3 y A_4, demostrar que $\lambda = 2$ es un valor propio de cada una de estas matrices, con multiplicidad algebraica 4. En cada caso, encontrar su multiplicidad geométrica:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7) Sabiendo que $\lambda = 2$ es autovalor de $A = \begin{bmatrix} 1 & \beta & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta \end{bmatrix}$.

a) Calcular el valor de β.

b) Obtener los autovalores restantes.

c) Hallar el espacio de autovectores asociado a cada autovalor.

d) ¿Es invertible A? Justifique su respuesta.

8) Resolver los siguientes ítems:

a) Justificar por qué la suma de dos vectores propios de una matriz B asociados al mismo valor propio λ es también un vector propio de B.

b) Un vector que es múltiplo de un vector propio de una matriz es también un vector propio de dicha matriz. ¿Por qué?

c) Demostrar que si u y v son vectores propios de una matriz A asociados al mismo valor propio λ, entonces la combinación lineal $au + bv$ $(a, b \in R)$ también es un vector propio de A asociado a λ.

Observación: Como la búsqueda de autovalores de una matriz se basa en encontrar las raíces del polinomio característico, completamos esta práctica con esta lectura: Un resultado atribuido al matemático Gauss, da pistas sobre cuáles son las posibles raíces de un polinomio con coeficientes que son números enteros:

"Sea $P(x)$ un polinomio de la forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in Z$. Si $a = p/q$ es una raíz de $P(x)$ (expresada como fracción irreducible) entonces p es divisor del término independiente a_0 y q es divisor del coeficiente principal del polinomio a_n".

Ejemplo: Sea $P(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 5$. Entonces $a_0 = 5$ y $a_5 = 2$. Por lo tanto p (los divisores de a_0) son ± 1, ± 5 y q (los divisores de a_n) son ± 1 y ± 2. "Armando" los cocientes p/q, resulta que las posibles raíces de $P(x)$ son $1, -1, 5, -5, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$ y $-\frac{5}{2}$. Emplea métodos que ya conoces para determinar cuáles de los números anteriores son efectivamente raíces de $P(x)$.

Ejercitación adicional para seguir practicando:

9) Encontrar los valores propios o autovalores y los espacios propios de la matriz dada en cada caso. Determinar la multiplicidad algebraica y geométrica:

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10) Verifique que $\lambda = -1$ es un valor propio de A, asociado al vector propio w:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$