CÁLCULO II

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Ing. Silvia G. Seluy

Definición de límite de la función *f(x,y)*

- Una función *f(x,y)* tiende al límite L cuando (x,y) tiende a (xo,yo) y se expresa:

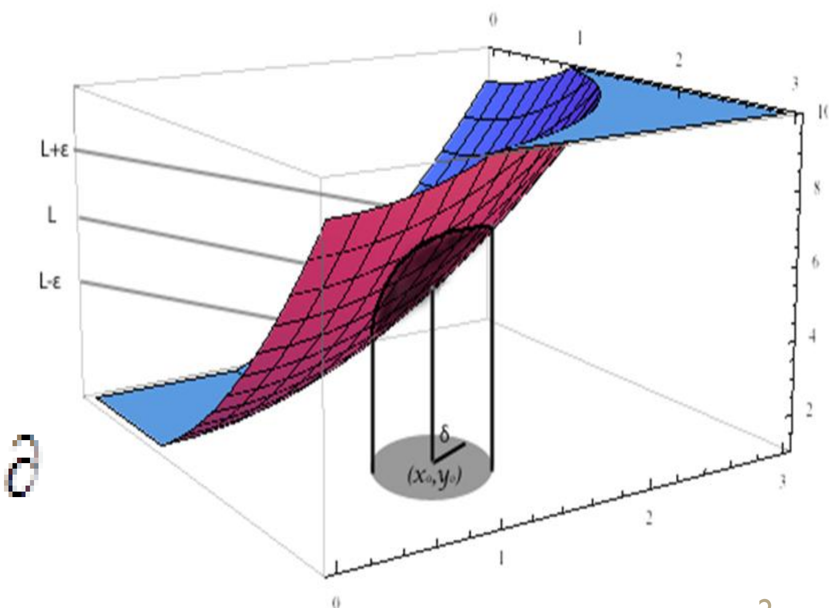
$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L} \quad Si \ \ \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, \partial > 0$$

Tal que para todo (x,y) en el dominio de *f* ,

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Siempre que

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \partial$$



Calculando el límite de una función

- Dada la función ***f(x, y)* = 9x2−y2 / x2+y2**

definida para todo punto excepto para el origen (0,0),vamos a determinar el valor del límite de la función cuando nos acercamos al origen, a través de los siguientes conjuntos:

1. **La recta y = x,** $\lim_{(x,y)\to(0,0),y=x} \left(9x2-y2 / x2+y2 \right) =$

$$= \lim_{x\to0} (9x2-x2 \; / \; x2+x2) =$$

$$= \lim_{x\to0} (8x2 \; / \; 2x2) \; \mathbf{= 4;}$$

2. La recta y = 3x

Lím (9x2−y2 / x2+y2)

(x,y)→(0,0),y=3x

=Lím (9x2−9x2 / x2+9x2)

x→0

= Lím (0 / 10x2)

x→0

=Lím (0) **= 0**

x→0

3. La parábola $x = y^2$

- $$\lim_{(x,y)\to(0,0),\,x=y^2} \left(9x^2-y^2 \,/\, x^2+y^2\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0} \left(9y^4-y^2 \,/\, y^4+y^2\right) =$$

$$= \lim_{y\to 0} \left(9y^2-1 \,/\, y^2+1\right) = -1$$

CRITERIO DE DOS TRAYECTORIAS PARA DEMOSTRAR LA INEXISTENCIA DE LÍMITES

Si una función *f(x,y)* tiene distintos límites a lo largo de dos trayectorias distintas cuando *(x,y)* tiende a *(xo,yo)*, entonces no existe el límite:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Para que exista el límite de la función *f(x,y) en un punto*, el mismo debe ser el mismo a lo largo de cualquier trayectoria de acercamiento a dicho punto.

TEOREMA 1 Propiedades de los límites de funciones de dos variables

Las siguientes reglas se cumplen si L, M y k son números reales y

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = L \quad \text{y} \quad \lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} g(x, y) = M.$$

1. *Regla de la suma:* $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = L + M$
2. *Regla de la resta:* $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) - g(x, y)) = L - M$
3. *Regla del producto:* $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = L \cdot M$
4. *Regla del múltiplo constante:* $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (kf(x, y)) = kL$ (es un número arbitrario k)
5. *Regla del cociente:* $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M} \qquad M \neq 0$
6. *Regla de la potencia:* Si r y s son enteros sin factores comunes, y $s \neq 0$, entonces

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} (f(x, y))^{r/s} = L^{r/s}$$

siempre que $L^{r/s}$ sea un número real. (Si s es par, suponemos que $L > 0$).

Continuidad de la función *f(x,y)*

DEFINICIÓN **Función continua de dos variables**

Una función $f(x, y)$ es **continua en el punto** (x_0, y_0) si

1. f está definida en (x_0, y_0),
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ existe,
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Una función es **continua** si es continua en cada punto de su dominio.

Determinar los puntos de discontinuidad de la función:

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$$

D(f) = {(x, y) ∈ R^2 : x+y ≠ 0; x-y ≠ 0 }, la función es discontinua en todos los puntos de las rectas y = x; y = -x.

Ahora bien, como $f(x, y) = \dfrac{(x + y)^2}{(x + y)(x - y)} =$

$= \dfrac{(x + y)}{(x - y)}$ si (x+y)≠0 entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0, x_0)} f(x, y) \text{ para } (x_0 \neq 0) \text{ no existe}$$

Sin embargo $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,-x_0)} f(x,y) = 0$ (para $x_0 \neq 0$)

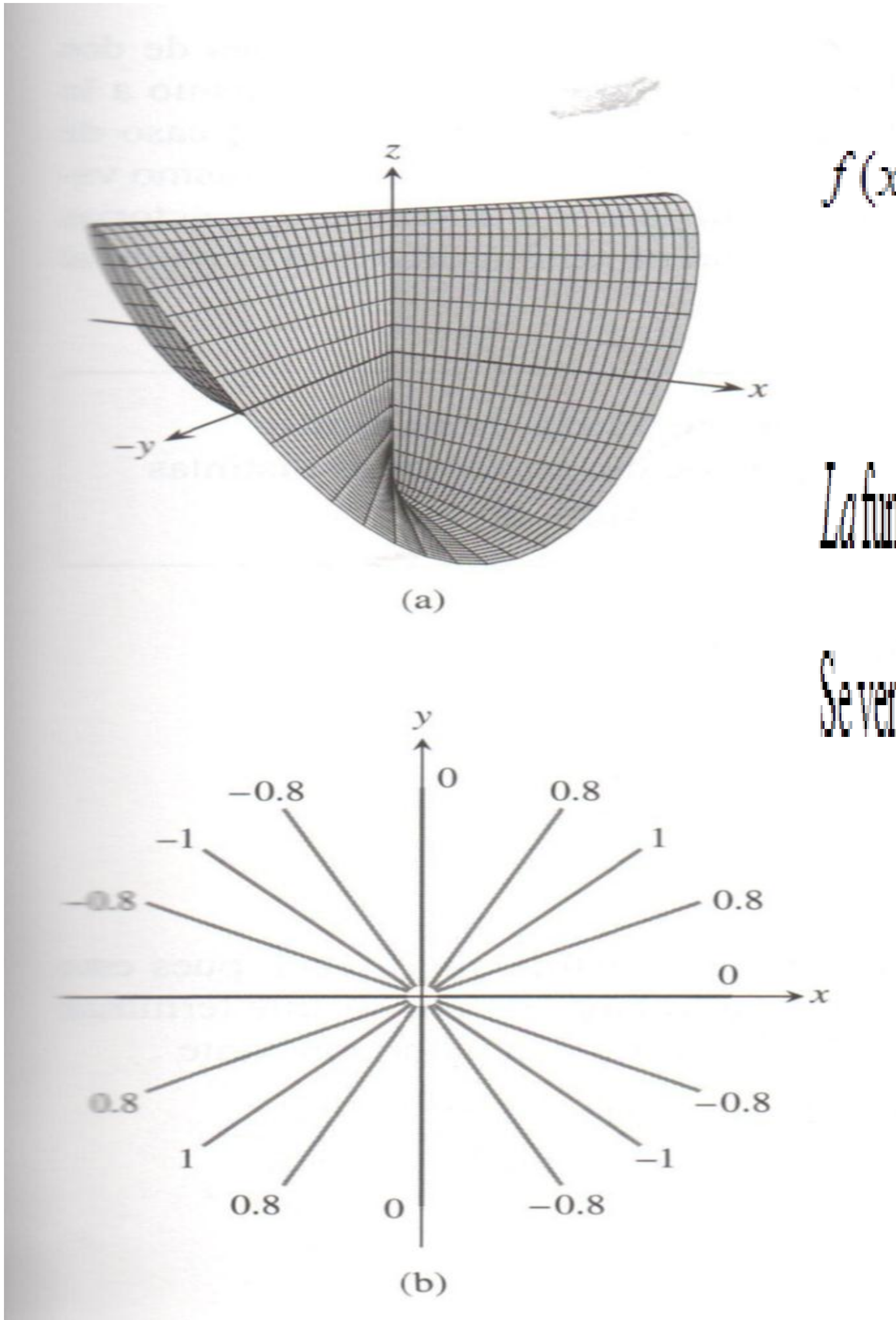
Por lo que la discontinuidad es evitable en los puntos de la recta (x+y) = 0.

Por último en el origen tampoco existe el límite.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{(x+y)}{(x-y)} \quad ; \quad \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{(1+m)x}{(1-m)x} = \frac{1+m}{1-m}$$

Este resultado varía según el valor de m.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



(a)

(b)

La función es continua en todo punto exepto en el origen.

Se ven las curvas de nivel de f(x, y)

No existe el límite de la función?

Al hablar en este sentido, por ejemplo al decir que una función no tiene límite cuando (x,y) tiende al origen, significa que <u>tiene muchos límites</u>, lo que no existe es un único límite independiente de la trayectoria, y de acuerdo a la definición, indica que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \text{NO EXISTE}$$

Importante!

Al igual que la definición de límite, la definición de continuidad se aplica tanto a puntos frontera, como a puntos interiores del dominio de la función.

El requisito a considerar, es que el punto (x,y) esté en el dominio en todo momento.

Continuidad de las composiciones

Si f es continua en (xo,yo) y g es una función de una variable continua en $f(xo,yo)$, entonces la composición $h= g \, o \, f$

definida por $h(x,y) = g(f(x,y))$ es continua en (xo,yo)

Ejemplos de composiciones continuas en todo punto (x,y)

$$e^{x-y} \quad , \quad \ln(1+x^2y^2)$$