# Breve repaso de coordenadas polares

## 11.3 Coordenadas polares

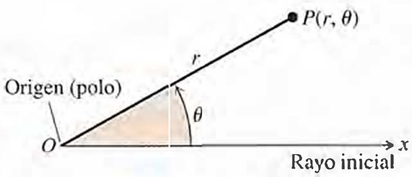


**FIGURA 11.18** Para definir las coordenadas polares en el plano, iniciamos con un origen, llamado polo, y un rayo inicial.

En esta sección estudiaremos las coordenadas polares y su relación con las coordenadas cartesianas. Usted verá que las coordenadas polares son muy útiles cuando se calculan muchas de las integrales múltiples estudiadas en el capítulo 15.

### Definición de las coordenadas polares

Para definir las coordenadas polares, primero fijamos un **origen** $O$ (llamado **polo**) y un **rayo inicial** desde $O$ (figura 11.18). Luego se puede localizar cada punto $P$ asignándole una **pareja de coordenadas polares** $(r, \theta)$ donde $r$ es la distancia dirigida de $O$ a $P$ y $\theta$ es el ángulo dirigido del rayo inicial al rayo $OP$.

**Coordenadas polares**

$P(r, \theta)$

Distancia dirigida de $O$ a $P$ — Ángulo dirigido del rayo inicial a $OP$

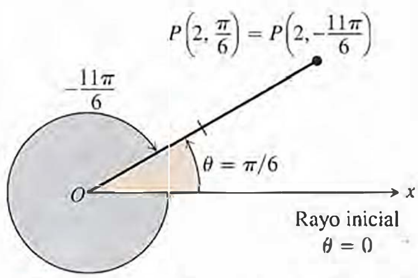


**FIGURA 11.19** Las coordenadas polares no son únicas.

Como en trigonometría, $\theta$ es positivo cuando se mide en sentido contrario a las manecillas del reloj, y negativo cuando se mide en el sentido de las manecillas del reloj. El ángulo asociado con un punto dado no es único. Mientras que un punto en el plano tiene solamente un par de coordenadas cartesianas, tiene, por otro lado, un número infinito de parejas de coordenadas polares. Por ejemplo, el punto a 2 unidades del origen a lo largo del rayo $\theta = \pi/6$ tiene coordenadas polares $r = 2$, $\theta = \pi/6$, pero tiene también coordenadas $r = 2$, $\theta = -11\pi/6$ (figura 11.19). En algunas situaciones permitimos que $r$ sea negativa. Por esta razón, usamos la distancia dirigida en la definición de $P(r, \theta)$. El punto $P(2, 7\pi/6)$ puede obtenerse girando $7\pi/6$ radianes en el sentido contrario a las manecillas del reloj a partir del rayo inicial y dos unidades hacia delante (figura 11.20). También puede alcanzarse girando $\pi/6$ radianes en el sentido contrario a las manecillas del reloj a partir del rayo inicial y dos unidades hacia atrás. Así, el punto también tiene coordenadas polares $r = -2$, $\theta = \pi/6$.

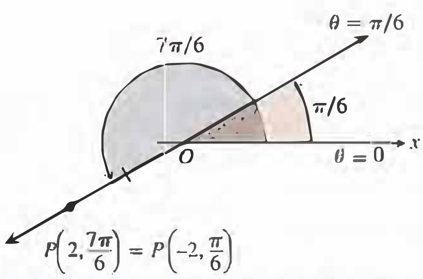


**FIGURA 11.20** Las coordenadas polares pueden tener valores de $r$ negativos.

**EJEMPLO 1** Obtenga todas las coordenadas polares del punto $P(2, \pi/6)$.

**Solución** Trazamos el rayo inicial del sistema coordenado, dibujamos el rayo desde el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ radianes con el rayo inicial, y marcamos el punto $(2, \pi/6)$ (figura 11.21). Después, encontramos los ángulos para los otros pares coordenados de $P$ en los cuales $r = 2$ y $r = -2$.

Para $r = 2$, la lista completa de los ángulos es

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} \pm 2\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 4\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots .$$

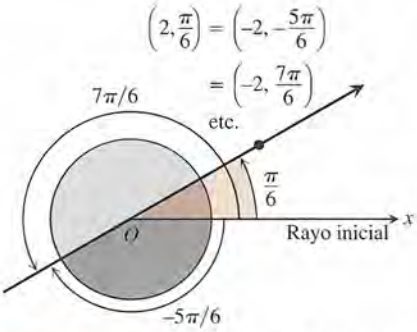


**FIGURA 11.21** El punto $P(2, \pi/6)$ tiene un número infinito de pares de coordenadas polares (ejemplo 1).

Para $r = -2$, la lista de ángulos es

$$-\frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots.$$

Las correspondientes parejas de coordenadas de $P$ son

$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y

$$\left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Cuando $n = 0$, las fórmulas dan $(2, \pi/6)$ y $(-2, 5\pi/6)$. Cuando $n = 1$, dan $(2, 13\pi/6)$ y $(-2, 7\pi/6)$, y así sucesivamente. ■

## Ecuaciones polares y gráficas

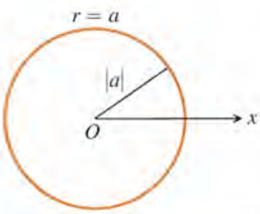


**FIGURA 11.22** La ecuación polar de una circunferencia es $r = a$.

Si se mantiene $r$ fija en un valor constante $r = a \neq 0$, el punto $P(r, \theta)$ permanecerá a $|a|$ unidades del origen $O$. Como $\theta$ varía sobre cualquier intervalo de longitud $2\pi$, $P$ describe una circunferencia de radio $|a|$ con centro en $O$ (figura 11.22).

Si mantenemos $\theta$ fija en un valor constante $\theta = \theta_0$ y hacemos que $r$ varíe entre $-\infty$ y $\infty$, el punto $P(r, \theta)$ describe una recta que pasa por $O$ y que forma un ángulo de magnitud $\theta_0$ con el rayo inicial.

| Ecuación | Gráfica |
|---|---|
| $r = a$ | Circunferencia con radio $\|a\|$ y centro en el origen $O$ |
| $\theta = \theta_0$ | Recta que pasa por $O$ formando un ángulo $\theta_0$ con el rayo inicial |

**EJEMPLO 2**

**(a)** $r = 1$ y $r = -1$ son las ecuaciones para la circunferencia de radio 1 centrada en $O$.

**(b)** $\theta = \pi/6$, $\theta = 7\pi/6$, y $\theta = -5\pi/6$ son ecuaciones para la recta de la figura 11.21. ■

Las ecuaciones de la forma $r = a$ y $\theta = \theta_0$ pueden combinarse para definir regiones, segmentos y rayos.

**EJEMPLO 3** Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las siguientes condiciones.

**(a)** $1 \leq r \leq 2 \quad$ y $\quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

**(b)** $-3 \leq r \leq 2 \quad$ y $\quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

**(c)** $\dfrac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{6} \quad$ (no hay restricción sobre $r$)

**Solución** Las gráficas se presentan en la figura 11.23. ■

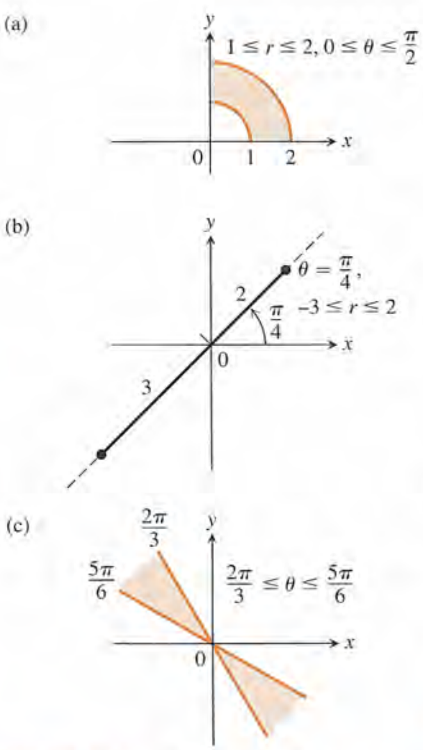


**FIGURA 11.23** Las gráficas de desigualdades típicas en $r$ y $\theta$ (ejemplo 3).

## Relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas

Cuando usamos tanto el sistema de coordenadas polares como el cartesiano en un plano, colocamos los dos orígenes juntos y tomamos el rayo polar inicial como el eje $x$ positivo. El rayo

$\theta = \pi/2, r > 0$, se convierte en la parte positiva del eje $y$ (figura 11.24). Entonces, los dos sistemas de coordenadas están relacionados por las siguientes ecuaciones.

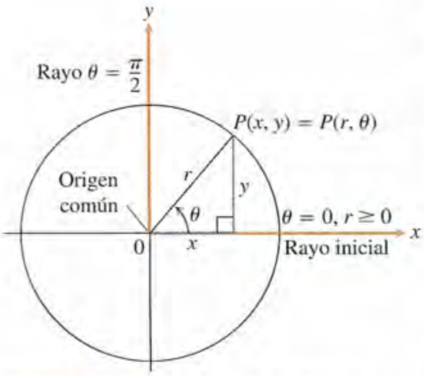


**FIGURA 11.24** La manera usual para relacionar coordenadas polares y cartesianas.

**Ecuaciones que relacionan las coordenadas polares y cartesianas**

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Las primeras dos ecuaciones determinan unívocamente las coordenadas cartesianas $x$ y $y$ dadas las coordenadas polares $r$ y $\theta$. Por otro lado, si $x$ y $y$ son conocidas, la tercera ecuación da dos posibles elecciones de $r$ (una positiva y otra negativa). Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$, existe un único $\theta \in [0, 2\pi]$ que satisface las dos primeras ecuaciones, cada una de las cuales da una representación en coordenadas polares del punto cartesiano $(x, y)$. Las otras representaciones en coordenadas polares para el punto pueden determinarse a partir de estas dos, como en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 4** He aquí algunas ecuaciones equivalentes expresadas en términos tanto de coordenadas polares como cartesianas.

| Ecuación polar | Equivalente cartesiano |
|---|---|
| $r\cos\theta = 2$ | $x = 2$ |
| $r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = 4$ | $xy = 4$ |
| $r^2\cos^2\theta - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 1$ | $x^2 - y^2 = 1$ |
| $r = 1 + 2r\cos\theta$ | $y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$ |
| $r = 1 - \cos\theta$ | $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$ |

Algunas curvas se expresan mejor en coordenadas polares; otras no. ■

**EJEMPLO 5** Determine la ecuación polar para la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ (figura 11.25).

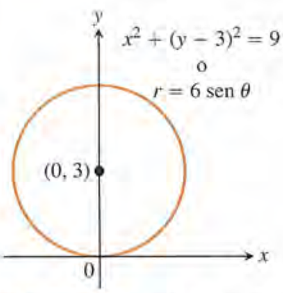


**FIGURA 11.25** La circunferencia del ejemplo 5.

**Solución** Aplicamos las ecuaciones que relacionan las coordenadas polares con las cartesianas:

$$
\begin{aligned}
x^2 + (y-3)^2 &= 9 && \text{Desarrollar } (y-3)^2. \\
x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 9 && \text{Cancelación} \\
x^2 + y^2 - 6y &= 0 && x^2 + y^2 = r^2 \\
r^2 - 6r\,\mathrm{sen}\,\theta &= 0 && \\
r = 0 \quad \text{o} \quad r - 6\,\mathrm{sen}\,\theta &= 0 && \text{Incluye ambas posibilidades} \\
r &= 6\,\mathrm{sen}\,\theta &&
\end{aligned}
$$

■

**EJEMPLO 6** Sustituya las siguientes ecuaciones polares por ecuaciones cartesianas equivalentes e identifique sus gráficas.

**(a)** $r\cos\theta = -4$

**(b)** $r^2 = 4r\cos\theta$

**(c)** $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta}$

**Solución** Usamos las sustituciones $r\cos\theta = x$, $r\,\mathrm{sen}\,\theta = y$, $r^2 = x^2 + y^2$.

**(a)** $r\cos\theta = -4$

La ecuación cartesiana es: $r\cos\theta = -4$

$x = -4$

La gráfica es: Recta vertical que pasa por $x = 4$ en el eje $x$

**(b)** $r^2 = 4r\cos\theta$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4r\cos\theta \\ x^2 + y^2 &= 4x \\ x^2 - 4x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 4 \qquad \text{Completando el cuadrado} \\ (x-2)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

La gráfica es: Circunferencia, radio 2, centro $(h, k) = (2, 0)$

**(c)** $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{aligned} r(2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) &= 4 \\ 2r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta &= 4 \\ 2x - y &= 4 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

La gráfica es: Recta, pendiente $m = 2$, intersección en $y$, $b = -4$ ■

## Ejercicios 11.3

### Coordenadas polares

**1.** ¿Cuáles pares de coordenadas polares representan el mismo punto?

**a.** $(3, 0)$ **b.** $(-3, 0)$ **c.** $(2, 2\pi/3)$
**d.** $(2, 7\pi/3)$ **e.** $(-3, \pi)$ **f.** $(2, \pi/3)$
**g.** $(-3, 2\pi)$ **h.** $(-2, -\pi/3)$

**2.** ¿Cuáles pares de coordenadas polares representan el mismo punto?

**a.** $(-2, \pi/3)$ **b.** $(2, -\pi/3)$ **c.** $(r, \theta)$
**d.** $(r, \theta + \pi)$ **e.** $(-r, \theta)$ **f.** $(2, -2\pi/3)$
**g.** $(-r, \theta + \pi)$ **h.** $(-2, 2\pi/3)$

**3.** Grafique los siguientes puntos (dados en coordenadas polares). Luego, determine todas las coordenadas polares de cada punto.

**a.** $(2, \pi/2)$ **b.** $(2, 0)$
**c.** $(-2, \pi/2)$ **d.** $(-2, 0)$

**4.** Grafique los siguientes puntos (dados en coordenadas polares). Luego, determine todas las coordenadas polares de cada punto.

**a.** $(3, \pi/4)$ **b.** $(-3, \pi/4)$
**c.** $(3, -\pi/4)$ **d.** $(-3, -\pi/4)$

### Coordenadas polares a coordenadas cartesianas

**5.** Encuentre las coordenadas cartesianas de los puntos del ejercicio 1.

**6.** Obtenga las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos (dados en coordenadas polares).

**a.** $(\sqrt{2}, \pi/4)$ **b.** $(1, 0)$
**c.** $(0, \pi/2)$ **d.** $(-\sqrt{2}, \pi/4)$
**e.** $(-3, 5\pi/6)$ **f.** $(5, \tan^{-1}(4/3))$
**g.** $(-1, 7\pi)$ **h.** $(2\sqrt{3}, 2\pi/3)$

### Coordenadas cartesianas a coordenadas polares

**7.** Obtenga las coordenadas polares, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $r \geq 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

**a.** $(1, 1)$ **b.** $(-3, 0)$
**c.** $(\sqrt{3}, -1)$ **d.** $(-3, 4)$

**8.** Obtenga las coordenadas polares, $-\pi \leq \theta < \pi$ y $r - 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

**a.** $(-2, -2)$ **b.** $(0, 3)$
**c.** $(-\sqrt{3}, 1)$ **d.** $(5, -12)$

**9.** Determine las coordenadas polares, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $r \leq 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

**a.** $(3, 3)$ **b.** $(-1, 0)$
**c.** $(-1, \sqrt{3})$ **d.** $(4, -3)$

**10.** Obtenga las coordenadas polares, $-\pi \leq \theta < 2\pi$ y $r \leq 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

**a.** $(-2, 0)$ **b.** $(1, 0)$
**c.** $(0, -3)$ **d.** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

### Gráficas en coordenadas polares

Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las ecuaciones y desigualdades de los ejercicios 11 a 26.

**11.** $r = 2$ **12.** $0 \leq r \leq 2$
**13.** $r \geq 1$ **14.** $1 \leq r \leq 2$