FÍSICA I

Notas sobre conservación de la energía mecánica

Version v.2

FICH – UNL

2021

Prof. Damian Ramajo

Algunas definiciones...

Todos sabemos que ***la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma***. Este es el postulado de la Ley de Conservación de la Energía. Pero cuando hablamos de tipos particulares de energía, como por ejemplo la **Energía Mecánica**, entonces debemos aprender bajo qué condiciones podemos afirmar, y hacer uso, de su conservación para resolver problemas de física.
La energía mecánica es la suma de la energía cinética o de movimiento y de la energía potencial. Esta última puede ser de dos tipos: gravitatoria o elástica.

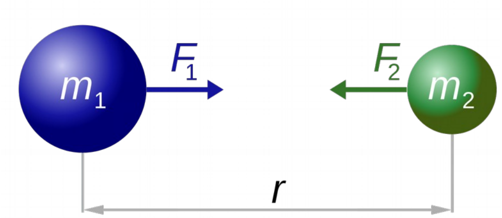
Energía, ¿y masa? ($E = mc^2$)

- **Química** (pilas, combustibles, procesos biológicos, ...)
- **Nuclear** (fisión, fusión, estrellas, ...)
- **Mecánica (E)** (movimiento, planetas, eólica, ...)
  - **Energía cinética (K)**
    - **Traslación** (trenes, proyectiles, ...)
    - **Rotación** (motores, planetas, ...)
  - **Energía potencial (U)**
    - **Gravitatoria (U_g)** (planetas, cosas elevadas, , ...)
    - **Elástica (U_s)** (resortes, gomas, gases, ...)
- **Electromagnética** (radiación, electricidad, magnétismo, ...)
- **Interna** (entalpía, calor, presión)

Energía potencial gravitatoria

La energía potencial gravitatoria tiene su origen en la Ley de Gravitación Universal de Newton (1687). Esta ley establece que todo par de cuerpos se atraen mutuamente con una fuerza que es directamente proporcional a las masas de ambos, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Esta fuerza es normalmente llamada ***peso***:

$$F_{1,2} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

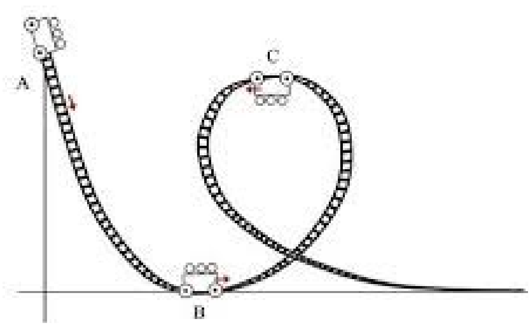


G es una constante, m_1 y m_2 son las masas de ambos cuerpos y r es la distancia que los separa.

Debemos hacernos dos preguntas:

1- ¿Por qué hablamos de energía "potencial"?

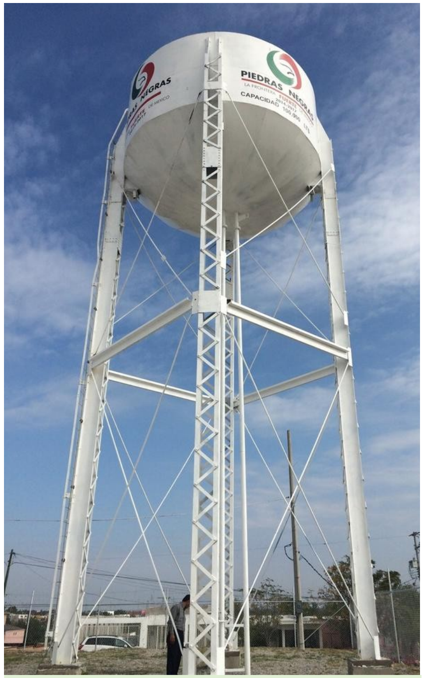
2- ¿por qué es tan importante la ley de gravitación en referencia a la energía potencial?



Podemos imaginar muchos usos divertidos de almacenar energía potencial para luego convertirla en energía cinética. Las montañas rusas, las pistas de sky, o saltar en paracaídas son algunos ejemplos...

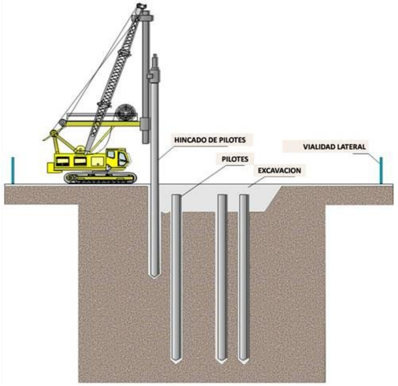
Energía potencial gravitatoria

Pero también podemos imaginar otras situaciones donde la energía potencial es almacenada para usos tecnológicos.

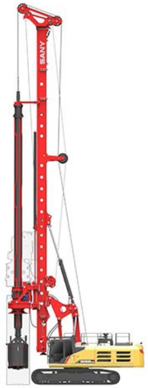


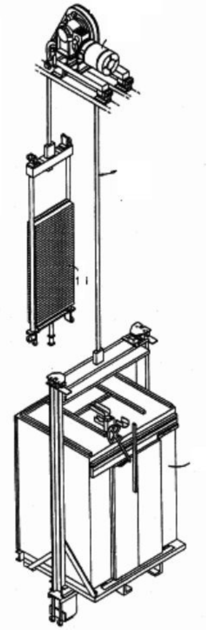
En las ciudades el agua es almacenada en tanques elevados. La energía potencial almacenada permite vencer la resistencia en las cañerías y llevar agua a grandes distancias

Las represas almacenan agua en grandes lagos artificiales. El agua luego es descargada a través de turbinas en la parte inferior de los diques y la energía potencial se convierte en cinética y luego en electricidad



En la construcción se emplean grandes máquinas para clavar pilotes en el suelo. Las máquinas elevan los pilotes una gran altura y los dejan caer una y otra vez , clavándolos más de 10 mts en el suelo.



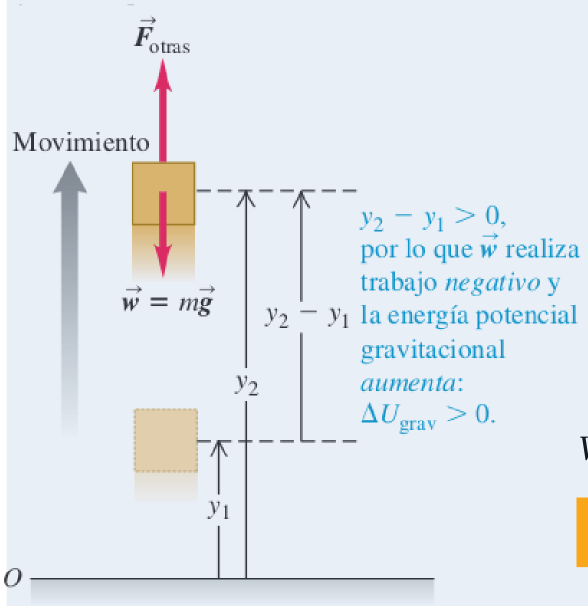


Los ascensores tienen un contrapeso colgado y unido al ascensor, el cual baja cuando el ascensor sube, entregando energía potencial, y sube cuando el ascensor baja, almacenándola.

Energía potencial gravitatoria

Entonces, la energía es **potencial** porque puede ser convertida a energía cinética. El agua acumulada o los pilotes elevados pueden entregar trabajo al medio a medida que convierten energía potencial en cinética.

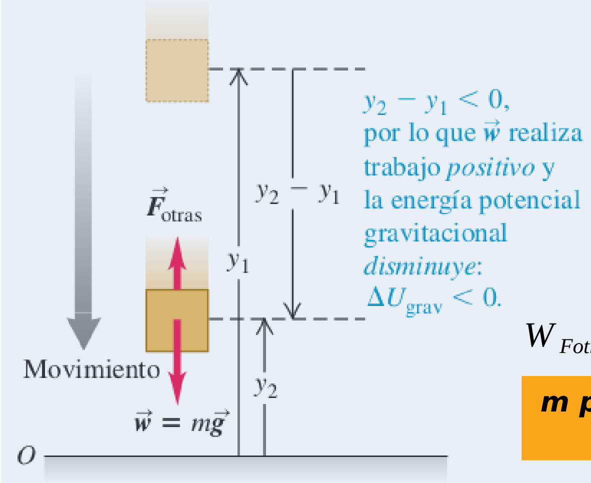
La fuerza de gravedad es tan importante porque si aplicamos una fuerza ***F*** para **elevar** un cuerpo de masa ***m*** a una altura ***H*** debemos hacer un trabajo $\boldsymbol{W_F}$. Pero, cuando el cuerpo se deja caer entonces la fuerza peso ***P*** genera un trabajo $\boldsymbol{W_P}$ sobre dicho cuerpo. Cuando la fuerza ***F*** aplicada es igual al peso ***P***, entonces el trabajo $\boldsymbol{W_F}$ es igual al trabajo $\boldsymbol{W_P}$.



Pensemos en una masa ***m*** moviéndose hacia arriba por la acción de $\boldsymbol{F_{otras}}$ en contra del peso ***w***. Si el movimiento es a velocidad cte entonces $F_{otras} = w$. Luego, el trabajo hecho por F_{otras} es:

$$W_{Fotras} = F_{otras}\,\Delta y = mg\,(y_2 - y_1)$$

m gana energía potencial



Pero si ahora el movimiento es hacia abajo, entonces el trabajo de $\boldsymbol{F_{otras}}$ será negativo. Luego, el trabajo hecho por $\boldsymbol{F_{otras}}$ es:

$$W_{Fotras} = F_{otras}\,\Delta y = mg\,(y_2 - y_1)$$

m pierde energía potencial

Esto significa que sí el trabajo de las fuerza externas (sin el peso) es positivo, entonces el cuerpo almacena energía potencial, y si es negativo la pierde.

Energía potencial gravitatoria

Entonces, la energía potencial almacenada puede definirse, no en términos del trabajo de la fuerza que la produce, sino en términos del trabajo que puede ser recuperado. Es decir, el trabajo de la fuerza peso:

$$\Delta U_g = -W_P = mg\,\Delta h = mg(y_2 - y_1)$$

donde y_1 es la coordenada inicial y y_2 la final. Para que el signo sea el correcto, se debe considerar SIEMPRE el eje ***y*** positivo hacia arriba.

Definiremos entonces a la energía potencial gravitacional como:

$$U_g = mgy$$

En este punto debemos hacer una aclaración. Dijimos que $\boldsymbol{U_g}$ es igual al negativo del trabajo de la fuerza peso. Por otro lado, dijimos que el peso en realidad es la fuerza de atracción de Newton, y esta fuerza es variable con la distancia. Entonces, ¿por qué consideramos que el peso es *mg* y no usamos la expresión de Newton?

La razón es que para cambios de altura relativamente pequeños, del orden de miles de metros, la fuerza peso producida por la tierra es relativamente constante e igual a *mg*. Pero cuando trabajemos con magnitudes planetarias, veremos que esta aproximación ya no es válida y tendremos que definir a U_g en forma exacta.

Podemos decir que, si un cuerpo se mueve solo bajo la acción de la fuerza peso, entonces la energía mecánica deberá conservarse. Esto es:

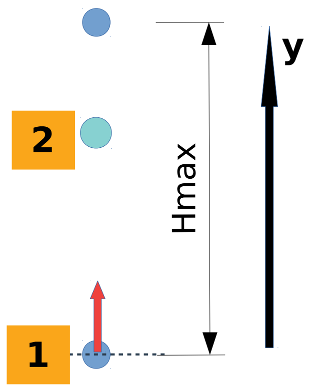
$$\Delta E = E_2 - E_1 = 0 \;\Rightarrow\; E_2 = E_1 \;\Rightarrow\; K_2 + U_{g2} = K_1 + U_{g1}$$

La energía mecánica (cinética+potencial) en cualquier estado 2 será igual a la energía del cuerpo en cualquier estado anterior 1.

Energía potencial gravitatoria

Ejemplo 1: Un niño arroja una pelota hacia arriba con una rapidez de 30 m/s.

1- Calcule a que altura máxima llegará.
2- Calcule que velocidad tendrá al haber alcanzado la mitad de la altura máxima



Solución: Una vez que el niño suelta la pelota, la única fuerza que actuará sobre la pelota es la gravedad. Luego, es posible aplicar la conservación de la energía mecánica entre el estado inicial 1 y cualquier estado 2:

$$K_2 + U_{g2} = K_1 + U_{g1}$$

Lo primero es definir el punto 0 para la coordenada ***y***. **La dirección deberá ser siempre hacia arriba**, pero la posición del origen puede ser cualquiera. Pongamos el origen en el punto de lanzamiento. Luego, $U_{g1} = 0$.

Para responder la primera pregunta (altura máxima), debemos recordar que se alcanza cuando la velocidad v_y se hace 0. Esto es, $K_2 = 0$:

$$U_{g2} = K_1 \longrightarrow mgh_2 = mgH_{max} = \frac{1}{2} m v_1^2 \longrightarrow H_{max} = \frac{v_1^2}{2g} = 45.9\, m$$

Para la segunda pregunta (velocidad a la mitad de la altura máxima = 45.9 m/2 = 22.95 m):

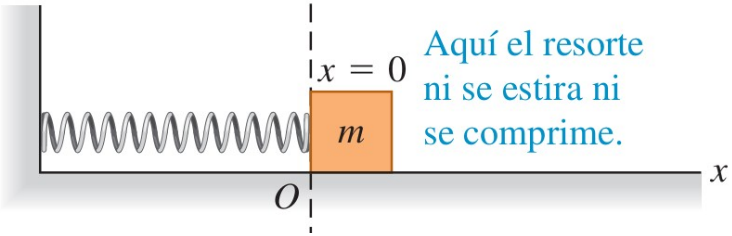
$$K_2 + U_{g2} = K_1 \longrightarrow K_2 = K_1 - U_{g2} \longrightarrow \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 - mgh_2 \longrightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2gh_2} = 21.21\, m/s$$

El resultado obtenido es la rapidez de la pelota para una altura dada. El resultado es una escalar, no un vector ya que la energía es una escalar. No tiene dirección!!!. Pero sabemos que la pelota está subiendo y por lo tanto la respuesta es:

$$v_2 = 21.21 \frac{m}{s} \hat{j}$$

Energía potencial elástica

Los resortes son los elementos más conocidos para almacenar energía potencial elástica. Pero en realidad, cualquier material que pueda deformarse en forma elástica (sin sufrir deformación permanente) será un acumulador de energía elástica. Otros elementos masivamente utilizados son las gomas, cauchos y elastómeros.
Los gases también son acumuladores de energía potencial. Por ejemplo, los compresores de aire acumulan energía potencial, aunque por ser gases la llamamos energía interna.



Al igual que con la fuerza peso, para un resorte la energía potencial elástica almacenada será igual al trabajo de la fuerza del resorte cuando este vuelve a su posición luego de haber sido deformado.

Si comprimimos un resorte desde una posición x_1 a otra x_2 mediante una fuerza externa F_{ext}, la energía almacenada será igual al trabajo realizado por F_{res} para volver a la posición original:

$$W_{Fres}=\int_{x_1}^{x_2} F_{res}\,dx=W_{Fext}=\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx=\frac{1}{2}k\left(x_2^2-x_1^2\right)$$

El resorte almacenará energía tanto si se comprime como si se estira. Luego, la energía del resorte será siempre positiva y definida como:

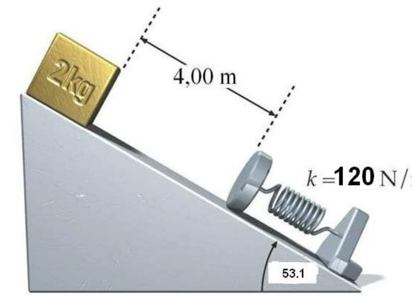
$$U_{el}=\frac{1}{2}k\,x^2$$

donde x es la distancia desde la posición de equilibrio.

La energía mecánica ahora es: $$E=K+U_g+U_{el}$$

Conservación de la energía

Ejemplo 2: Un bloque de 2 kg es soltado (v_1 = 0) desde un plano inclinado sin fricción con un ángulo Ø de 53°. El bloque recorre una distancia de 4 m hasta tocar una resorte de constante k = 120 N/m. Calcule:



1- ¿Cuanto se comprimirá el resorte antes de detener al bloque?
2- ¿Cuanto se comprimirá si en lugar de dejarlo caer se lo empuja con una velocidad de 5 m/s?

Solución: lo primero que debemos hacer es definir un sistema de referencia. Si quisiéramos resolver el problema con dinámica y cinemática, lo cual no sería posible con las herramientas que conocemos (¿por qué?), pondríamos un sistema inclinado sobre la cuña. Pero, cuando resolvemos por energía, el eje ***y*** debe apuntar vertical hacia arriba. Queda por definir el origen o altura 0. Dado que no sabemos donde se detendrá el bloque y tampoco tenemos la longitud del resorte, no podemos elegir la base de la cuña. Opciones razonables son el punto inicial del bloque o el punto donde el bloque toca el resorte. Elegimos el punto más alto. Aplicamos ahora la conservación de energía:

$$E_1 = E_2 \;\Rightarrow\; \cancelto{0}{K_1} + \cancelto{0}{U_{g1}} + \cancelto{0}{U_{el1}} = \cancelto{0}{K_2} + U_{g2} + U_{el2} \;\Rightarrow\; 0 = U_{g2} + U_{el2} \;\Rightarrow\; 0 = mgh_2 + \frac{1}{2}kx^2$$

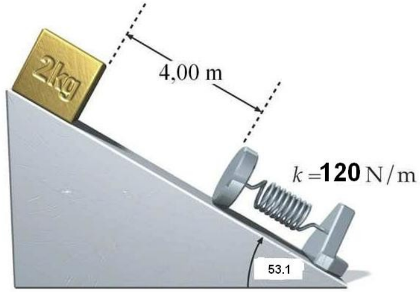
donde ***x*** es la distancia que se comprime el resorte y h_2 es la altura que baja el bloque. Tenemos dos incógnitas, h_2 y x, pero ambas pueden escribirse como una sola: $h_2 = -(4+x)\,sen\,\phi = -0.8(4+x)$

$$0 = mg[-0.8(4+x)] + \frac{1}{2}kx^2 \;\Rightarrow\; 3.2\,mg + 0.8\,mgx - \frac{1}{2}kx^2 = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 1.16\,m \\ x_2 = -0.9\,m \end{cases}$$

Nota: Este problema nos muestra cómo la energía potencial gravitatoria se transforma en cinética y finalmente en potencial elástica. Pero, el proceso intermedio, es decir de gravitatoria a cinética no es incluido en el cálculo.

Conservación de la energía

Para responder a la segunda pregunta, es decir ¿cuanto se comprimirá el resorte sí en lugar de dejarlo caer se lo empuja con una velocidad de 5 m/s?, solo tenemos que incluir esta velocidad en el término K_1 en la ecuación anterior:



$$K_1+\cancel{U_{g1}}^{0}+\cancel{U_{el1}}^{0}=\cancel{K_2}_{0}+U_{g2}+U_{el2} \rightarrow K_1=U_{g2}+U_{el2} \rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2=mgh_2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2=-0.8\,mg(4+x)+\frac{1}{2}kx^2 \rightarrow 25\,J+62.7\,J=-15.7\,kg\frac{m}{s^2}x+60\frac{N}{m}x^2$$

$$x_1=1.34\,m$$

$$x_2=-1.08\,m$$

Nota: vemos qué, al darle velocidad inicial hacia abajo al bloque llega con mayor energía y por lo tanto comprime más el resorte. Nuevamente, toda la energía inicial, sea cinética o gravitacional debe sumarse a la izquierda. Esto significa que si al bloque lo hubiéramos empujado hacia arriba en lugar de hacia abajo, a los fines de la ecuación sería lo mismo ya que la energía cinética es siempre positiva.

¿Esto es correcto?.

Si, lo es. Da lo mismo haber empujado al bloque hacia arriba o hacia abajo. Si lo hubieramos empujado hacia arriba, este habría subido hasta detenerse por la acción del peso, luego habría comenzado a bajar y al pasar por el punto inicial tendría la misma rapidez que le dimos pero hacia abajo. Lo mismo que ocurre cuando lanzamos una piedra al aire y la volvemos a agarrar cuando cae; cuando la agarramos tiene la misma rapidez que le dimos, pero ahora hacia abajo.

Pero, ¿qué ocurrirá si además de la fuerza peso, aparecen otras fuerzas externas, como por ejemplo la fricción?

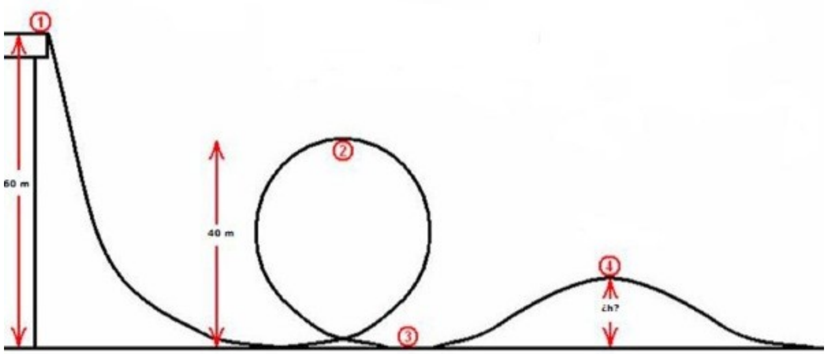
Fuerzas no conservativas

Cuando aprendimos el Teorema del Trabajo y la Energía (TTE), vimos que el trabajo de las fuerzas externas, sean conservativas o no, modifican la energía cinética de los cuerpos. También vimos que la fricción no siempre es una fuerza disipativa, sino que muchas veces es la responsable de aumentar la energía cinética, por ejemplo de un auto acelerando. Entonces, el ***TTE*** nos dice que el trabajo de una fuerza genera energía cinética, y la ley de conservación nos dice que energía cinética y potencial son la misma cosa (energía mecánica). Entonces, nuestra ecuación para ***E*** puede incluir al trabajo de todas las fuerzas externas que no sean las ya consideradas, es decir el peso y la elástica:

La energía mecánica ahora es: $E = K + U_g + U_{el} + W_{otras}$

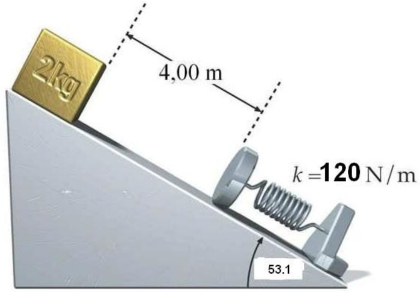
Ahora, la energía mecánica en cualquier estado **2** será igual a la energía en un estado anterior **1** más (o menos según el signo del trabajo) el trabajo de las otras fuerzas no consideradas en U_g y U_{el}:

Sin importar si el trabajo de $\mathbf{W_{otras}}$ aumenta o disminuye la energía del cuerpo, si este trabajo no es producido por el peso o por una fuerza elástica (resorte, goma o cualquier material que se deforme elásticamente) entonces deberemos hablar de **fuerzas no conservativas**.



La no conservación implica la irreversibilidad de un proceso. Un proceso irreversible es aquel que no puede ocurrir de igual modo en un sentido y en otro. Pero la mejor forma de definir a una fuerza conservativa es cuando su trabajo no depende de la trayectoria seguida por el cuerpo sino del punto inicial y final al que arriba. Pensemos en una montaña rusa donde podemos despreciar el rozamiento y asumir conservación de la energía: En el punto 1 tenemos disponible energía potencial gravitatoria, que a medida que descendemos se irá convirtiendo en cinética. Cuando llegamos a 2, hemos convertido 20 mts de altura en su equivalente en velocidad, pero cuando hacemos la cuenta, nunca incluimos la trayectoria del carrito, solo esos 20 mts de altura.

Fuerza de fricción



Ejemplo 3: ahora existe fricción entre el bloque y el plano con coeficientes $\mu_k = 0.5$ y $\mu_s = 0.7$. Calcule:

1- ¿Cuanto se comprimirá el resorte antes de detener al bloque?
2- ¿A que altura máxima llegará el bloque cuando el resorte lo vuelva a expulsar?

Solución: Si mantenemos el sistema de referencia anterior, es decir en la parte superior del plano, entonces el trabajo de la fricción deberá incluirse a la izquierda, restando energía inicial:

$$E_1 + W_{Fres} = E_2 \rightarrow 0 + W_{Fres} = U_{g2} + K_2 \rightarrow -\mu_k NS = U_{g2} + U_{el2} \quad -\mu_k mg\cos\phi S = mgh_2 + \frac{1}{2}kx^2$$

donde $S = 4 + x$. Reemplazando:

$$-5.88(4+x) = -15.68(4+x) + 60x^2 \rightarrow 9.8(4+x) - 60x^2 = 0 \rightarrow 39.2 + 9.8x - 60x^2 = 0$$

$$x_1 = 0.894\, m \qquad x_2 = -1.8\, m$$

Para contestar la segunda pregunta debemos aplicar la ecuación entre el estado de máxima compresión y un estado final donde el bloque asciende hasta que se detiene. Para simplificar podemos colocar el origen del eje y en el punto de máxima compresión:

$$E_2 + W_{Fres} = E_3 \rightarrow \frac{1}{2}kx^2 + W_{Fres} = U_{g3} \rightarrow \frac{1}{2}120\, N/m(0.894\, m)^2 - (0.5)2\, kg\, 9.8\, m/s^2\, S_{2-3} = 2\, kg\, 9.8\, m/s^2\, h_3$$

$47.5\, J - 9.8\, N\, S_{2-3} = 19.6\, N\, h_3$ Ahora debemos escribir S_{2-3} en función de h_3: $S_{2-3} = \frac{h_3}{sen\,\phi} = \frac{h_3}{0.8} = 1.25\, h_3$

$$47.5\, J - 12.25\, N\, h_3 = 19.6\, N\, h_3 \rightarrow h_3 = 1.45\, m$$

Fuerzas no conservativas. Algo mas..

Pensemos en un caso más simple, en un cuerpo moviéndose en linea recta sometido a la acción del peso y de fuerzas de fricción. La fuerza peso ***P*** apuntará siempre en la misma dirección sin importar la trayectoria elegida, mientras que la fricción será opuesta al movimiento. Analicemos como será el trabajo de cada una de las fuerzas para distintas trayectorias cerradas. Es decir, saliendo de ***A*** y volviendo al mismo punto. En este sencillo caso podríamos elegir tres caminos, el 1 sería A-B-C-D-A, el 2 sería A-B-C-A, y el 3 A-C-D-A. Sabemos que el trabajo total será la suma de los trabajos de cada trayecto. Supongamos que cada tramo tiene una longitud S. Para la fuerza peso tenemos:

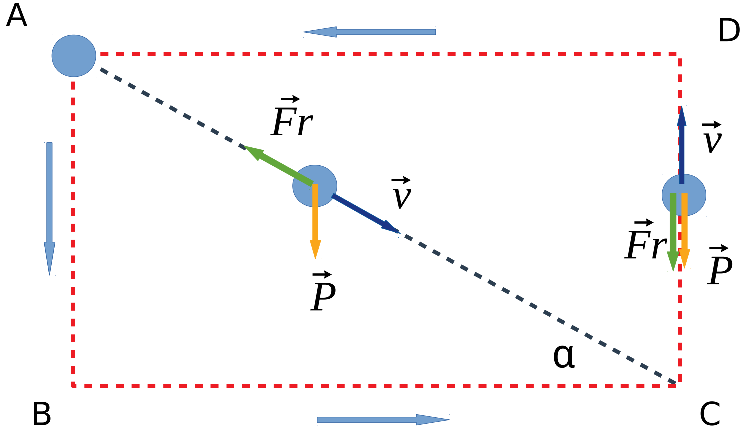
$$\left.\begin{array}{l} W_{PA-B}=PS \\ W_{PB-C}=0 \\ W_{PC-D}=-PS \\ W_{PC-D}=0 \\ W_{PA-C}=\sqrt{(2)}PS\,sen\,45°=PS \end{array}\right\}$$

$$W_{P(A-B-C-D-A)}=PS+0-PS+0=0$$

$$W_{P(A-C-D-A)}=PS-PS+0=0$$

$$W_{P(A-B-C-A)}=PS+0-PS=0$$

No importa cual sea el camino elegido, el trabajo de una fuerza conservativa a lo largo de una trayectoria cerrada es igual a 0.



Podríamos hacer el mismo ejercicio para la fuerza de fricción. El caso más sencillo sería considerar un valor para ***Fr*** constante. Luego, el trabajo de esa fuerza será simplemente el valor de la fuerza por la longitud recorrida:

$$W_{Fr(A-B-C-D-A)}=-|Fr|4S$$

$$W_{Fr(A-C-D-A)}=-|Fr|S(2+\sqrt{2})$$

$$W_{Fr(A-B-C-A)}=-|Fr|S(2+\sqrt{2})$$

Dos de las tres trayectorias tienen el mismo valor, pero podríamos encontrar infinitas trayectorias que dieran distinto valor. Además, sin importar el valor, el trabajo sobre una trayectoria cerrada es distinto de 0. Esto claramente indica que la fuerza *Fr* no es conservativa.

CUIDADO: no debemos pensar que una fuerza es conservativa porque tiene un valor constante y apunta en una única dirección. De hecho la fuerza peso no cumple ninguna de esas dos condiciones. Tampoco la fuerza del resorte, que tiene valor variable y cambia de sentido según donde esté la masa.

Fuerzas y campos conservativos. Un poco más

Básicamente existen tres tipos de fuerzas conservativas:

-Gravitatoria
-Elástica
-Electrostática

Desde el punto de vista matemático puede decirse que una fuerza es conservativa cuando el campo asociado a dicha fuerza cumple con 4 condiciones:

1- si, y sólo si, el trabajo que realiza la fuerza que genera el campo entre dos puntos no depende del camino entre esos dos puntos

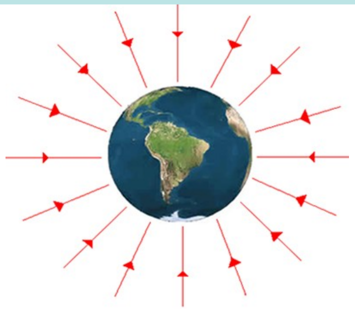
2- si, y solo si, el rotacional de ese campo vectorial en todos los puntos es cero

3- si y sólo si podemos encontrar una función escalar potencial llamada energía potencial *U*, de la cual su gradiente sea esa fuerza:

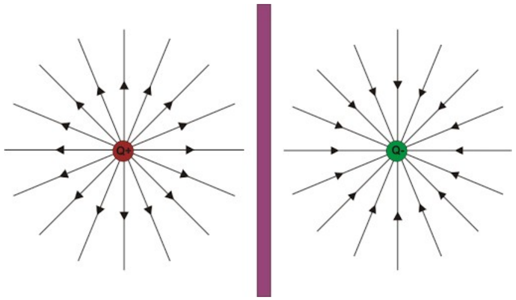
$$\vec{F} = -\nabla U$$

4- las líneas de campo no pueden ser cerradas

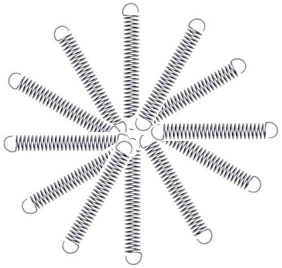
Campo gravitatorio: Las líneas entran al cuerpo.



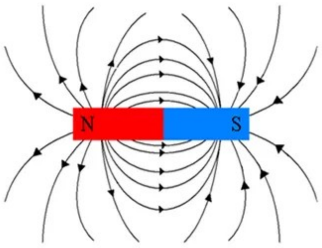
Campo eléctrico: Las líneas entran o salen dependiendo de la polaridad.



Campo elástico: La fuerza apunta al centro o hacia afuera pero siempre es restitutiva.



Campo magnético: Las lineas son cerradas. **No es un campo conservativo**.



Fuerzas y campos conservativos. Un poco más

La expresión que relaciona a la fuerza conservativa con el gradiente de la energía potencial (U_g, U_{el} o U_{elec}) puede ser usada también para relacionar el trabajo de dicha fuerza con la variación de energía:

$$\vec{F} = -\nabla U = \frac{-\partial U}{\partial x}$$ → Multiplicando ambos lados por ∂x → $$\vec{F}\,\partial x = \partial W_F = -\partial U$$

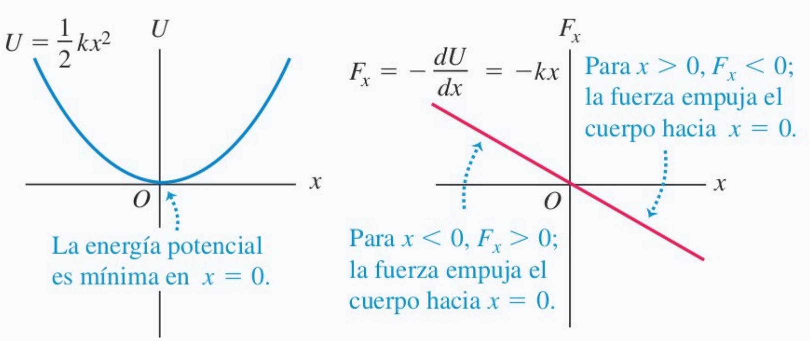
Esta relación nos dice qué, el trabajo de una *fuerza conservativa* ***F*** es igual al negativo del cambio de energía potencial. Para fijar la idea pensemos en el trabajo de la fuerza peso ***P***: sí yo muevo un objeto de arriba hacia abajo el trabajo de la fuerza peso es positivo, ya que la fuerza y el desplazamiento van en la misma dirección. Y como sabemos, un cuerpo a menor altura tiene menor energía potencial gravitatoria. Es decir que a **∂W** positivo $\boldsymbol{\partial U_g}$ negativo. Al contrario, si muevo el objeto hacia arriba entonces el trabajo de ***P*** es negativo pero la energía potencial gravitatoria aumenta.

La relación entre fuerza y gradiente de energía potencial podemos escribirla en un sistema cartesiano:

$$\vec{F} = -\nabla U \quad \rightarrow \quad F_x = \frac{-\partial U}{\partial x} \qquad F_y = \frac{-\partial U}{\partial y} \qquad F_z = \frac{-\partial U}{\partial z}$$

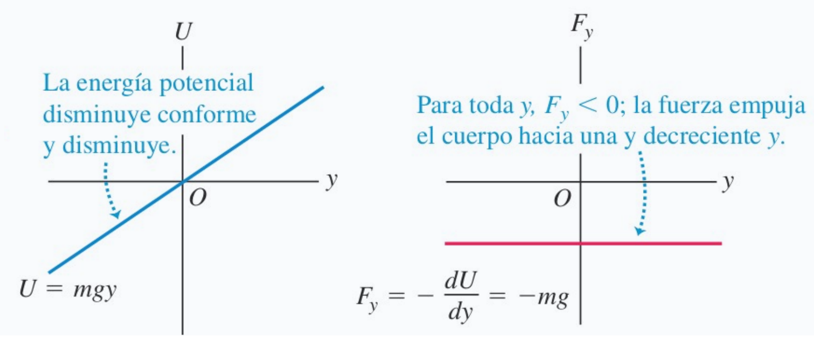
Resorte, la energía aumenta siguiendo una parábola $U_{el} = \frac{1}{2} k x^2$

Y al derivar U_{el} obtenemos la conocida formula $F_{res} = -kx$

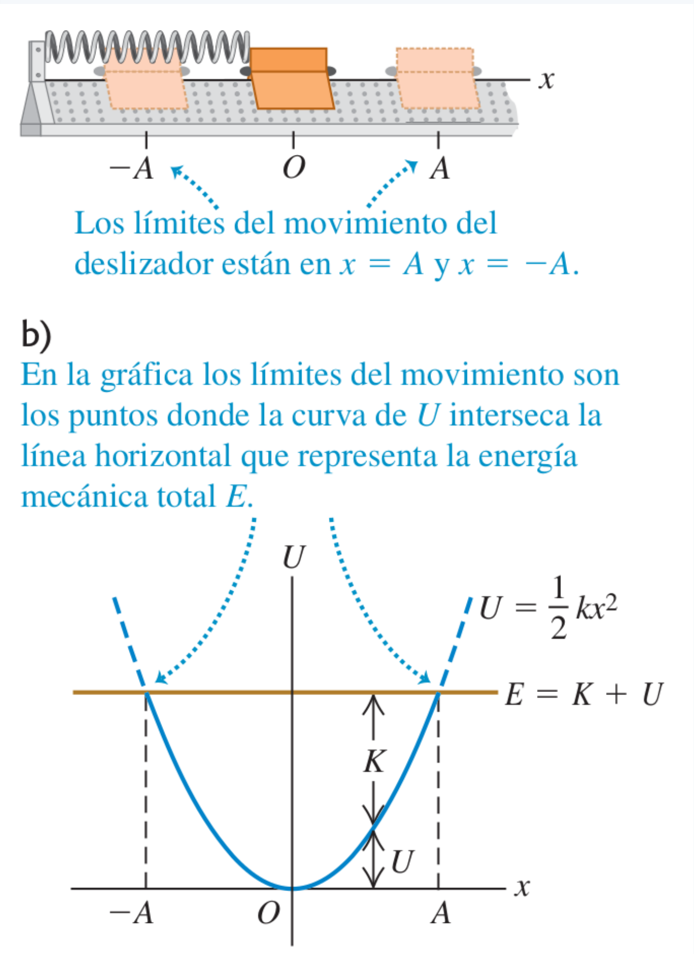


Gravedad, la energía aumenta linealmente $U_g = mgy$

Y al derivar U_g obtenemos la conocida formula $\vec{P} = m\vec{g}$



Diagramas de energía



Como dijimos la energía mecánica ***E*** es la suma de la cinética y la potencial. Para el caso de un sistema masa resorte oscilando, la energía mecánica es constante y en cada posición x será la suma de la energía cinética y potencial elástica. Esto puede ser graficado en un diagrama

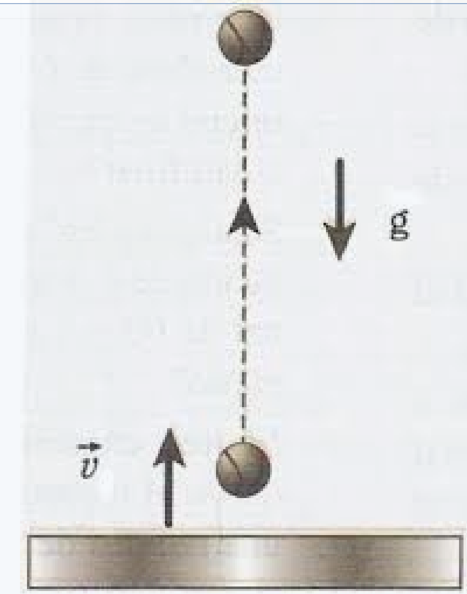
¿Como sería el caso de la energía potencial gravitatoria?. Tomemos el caso de una pelota que sale con velocidad inicial v_0 = 30 m/s. La altura máxima será H_{max} = *46 m*. Dado que la energía potencial es una recta U_g = *mgy*, la energía cinética también será una recta. Podemos encontrar fácilmente la expresión para K(y):

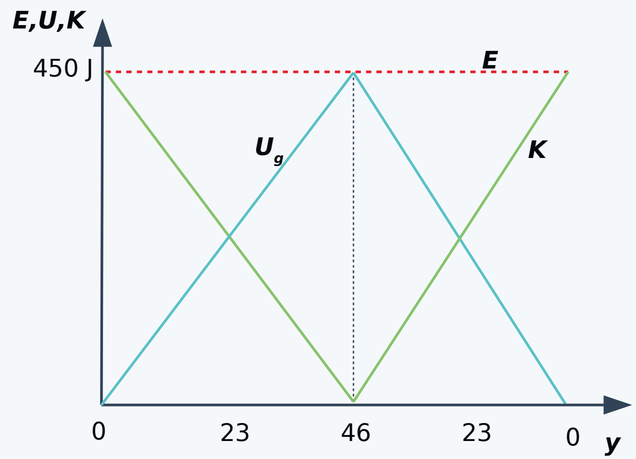
$$K=\frac{1}{2}mv_0^2-mgy$$

$$U_g=mgy$$

Y la energía E será:

$$E=U_g+K=\frac{1}{2}mv_0^2$$

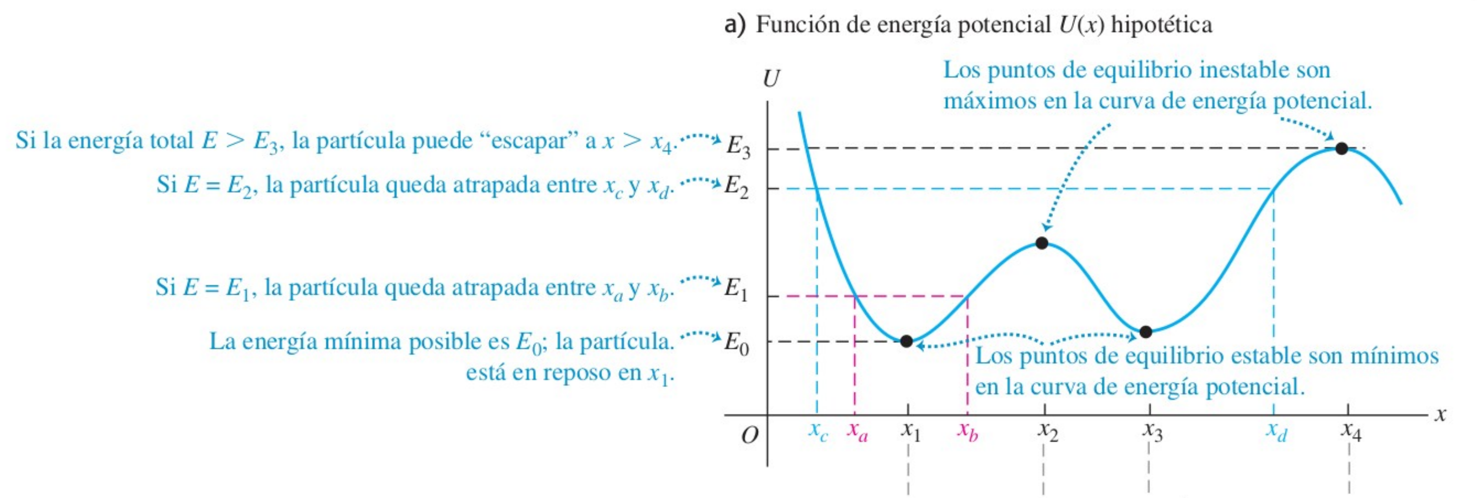


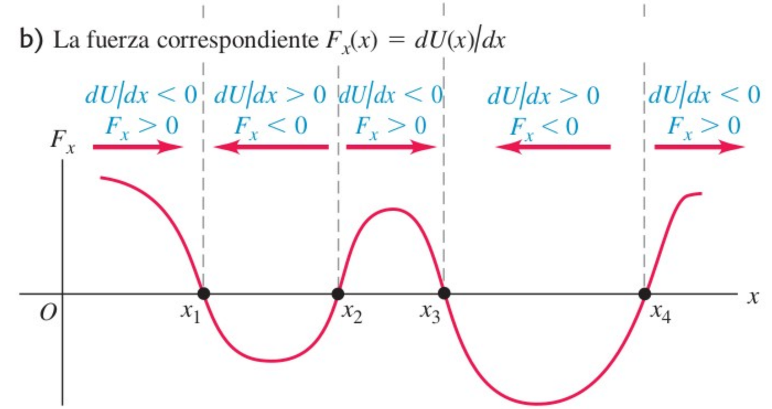


Sistemas estables e inestables

De dinámica sabemos que un cuerpo está en equilibrio cuando la sumatoria de fuerzas sobre él es nula. Pero este equilibrio puede ser inestable. Esto significa que aunque la sumatoria de fuerzas en un punto sea nula, si dicho cuerpo es perturbado momentáneamente entonces no recuperará el equilibrio. Esto es fácilmente ejemplificado si pensamos en una bolita que está sobre una pista como la mostrada en la figura.

En este ejemplo existen 4 estados de equilibrio, donde la derivada de la curva es nula. Pero existen solo dos en los cuales el equilibrio es estable. Estos son en los valles en x_1 y x_3. Estos puntos son mínimos locales de energía potencial. Claramente, si colocamos la bolita en x_1 y la movemos en el entorno de este punto, digamos a x_a o x_b la bolita retornará a x_1 por la acción de la fuerza peso, que da origen a la energía potencial U_g.





Por otro lado, los puntos x_2 y x_4 son máximos locales y en ellos el equilibrio es inestable. En este caso, cualquier perturbación sacará definitivamente a la bolita del equilibrio. Si derivamos la función potencial para esta curva en particular obtendremos la fuerza ***F*** correspondiente, la cual nos muestra que para los puntos estables (x_1 y x_3) la fuerza es restitutiva ya que apunta a dichos puntos. Por otro lado, para x_2 y x_4 la fuerza apunta hacia afuera de los puntos.

Algunas preguntas ...

Un proyectil tiene la misma energía cinética inicial sin importar su ángulo de lanzamiento. ¿Por qué no alcanza la misma altura máxima en todos los casos?

¿La rapidez de un objeto en la base de una rampa sin fricción depende de la forma de la rampa o sólo de su altura? Explique su respuesta. ¿Y cuando la rampa sí tiene fricción?

¿Una fuerza de fricción puede en algún caso aumentar la energía mecánica de un sistema? De ser así, mencione algunos ejemplos.

Una clavadista rebota en un trampolín, yendo un poco más alto cada vez. Explique cómo aumenta la energía mecánica total.

Una piedra de masa m y otra de masa 2m se sueltan desde el reposo a la misma altura sin que sufran resistencia del aire durante la caída. ¿Qué enunciado sobre estas piedras es verdadero? (Puede haber más de una opción correcta.) a) Ambas tienen la misma energía potencial gravitacional inicial. b) Ambas tienen la misma energía cinética cuando llegan al suelo. c) Ambas llegan al suelo con la misma rapidez. d) Cuando llegan al suelo, la piedra más pesada tiene el doble de energía cinética que la más ligera. e) Cuando llegan al suelo, la piedra más pesada tiene cuatro veces la energía cinética que la más ligera.

¿Los métodos de energéticos permiten resolver problemas donde las fuerzas involucradas son variables?

¿Es posible almacenar energía potencial en cualquier material o esto solo es posible en resortes y gomas? ¿Qué condición debe cumplirse para que la energía almacenada pueda ser recuperada como energía cinética?