

## CAPÍTULO 2

# ELEMENTOS FINITOS DE BARRA. CONCEPTOS BÁSICOS

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Desde un punto de vista estricto, la mayor parte de las estructuras deberían clasificarse dentro de lo que en el capítulo precedente hemos denominado *sistemas estructurales continuos* con infinitos grados de libertad y, por tanto, para conocer su comportamiento frente a la acción de cargas exteriores debería ser necesario integrar las correspondientes ecuaciones diferenciales de equilibrio. Sin embargo, este tipo de análisis es con frecuencia difícil, o imposible, debido a la geometría de la estructura, la naturaleza de las condiciones de contorno, la distribución de las propiedades mecánicas de los materiales, el tipo de cargas, etc., y en la práctica es necesario utilizar métodos más simplificados que permitan analizar la estructura de manera aproximada. El método de los elementos finitos es uno de los procedimientos que existen para aproximar el comportamiento de una estructura con infinitos grados de libertad por el de otra, con aproximadamente las mismas propiedades físicas y geométricas, pero con un número finito de grados de libertad, cuyas ecuaciones de equilibrio pueden expresarse por un sistema algebraico de ecuaciones simultáneas con un número limitado de incógnitas.

El objetivo de este capítulo es introducir los conceptos básicos del método de los elementos finitos mediante su aplicación al análisis de sencillos problemas de barras sometidas únicamente a fuerzas axiales.

La organización del capítulo es la siguiente: En primer lugar se estudia detalladamente la solución del problema de tracción (o compresión) de barras con elementos finitos unidimensionales de dos nodos, incidiendo en las analogías con la solución del cálculo matricial de estructuras estudiada en el capítulo precedente y presentándose varios ejemplos de aplicación. Tras ello, se introducen los conceptos básicos de la formulación matricial de elementos finitos que será utilizada a lo largo del curso.

## 2.2 BARRA SOMETIDA A FUERZAS AXILES

Consideremos una barra de longitud  $l$  sometida a una fuerza por unidad de longitud  $b(x)$ , y a un sistema de fuerzas puntuales  $X_i$  aplicadas en  $p$  puntos diferentes  $x_i$ . Todas las fuerzas actúan en la dirección del eje de la barra (ver Figura 2.1). La barra puede tener desplazamientos prescritos  $u_j$  en  $m$  puntos distintos  $x_j$ . Al deformarse la barra por acción de las fuerzas exteriores y/o por los desplazamientos impuestos, aparecen en su interior tensiones  $\sigma(x)$  y deformaciones  $\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}$ , que en materiales elásticos están relacionadas entre sí en cada punto por la ley de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} \quad (2.1)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad de la barra.

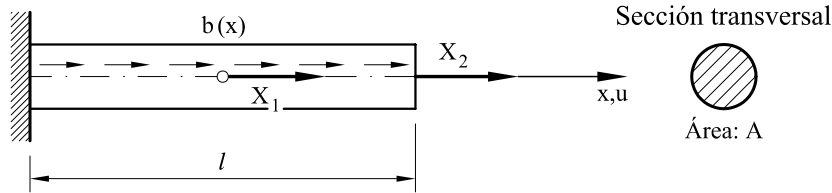


Figura 2.1 Barra sometida a fuerzas axiales.

En la configuración de equilibrio de la barra, las tensiones y las fuerzas exteriores satisfacen el *Principio de los Trabajos Virtuales* (PTV) que se definió en el Apartado 1.2. Dicho principio se expresa en forma matemática para el problema de la barra que tratamos como

$$\int \int \int_V \delta\varepsilon \sigma dV = \int_0^l \delta u b dx + \sum_{i=1}^p \delta u_i X_i \quad (2.2)$$

donde  $\delta u$  y  $\delta\varepsilon$  son el movimiento y deformación virtual genéricos de un punto de la fibra media de la barra;  $\delta u_i$  es el movimiento virtual del punto de actuación de la carga puntual  $X_i$ , y  $V$  es el volumen de la barra. El segundo miembro de (2.2) representa el trabajo “virtual” de las fuerzas exteriores sobre los desplazamientos virtuales  $\delta u$ , mientras que la integral del primer miembro es el trabajo virtual interno que realizan las tensiones “reales” en la barra  $\sigma$  sobre las deformaciones virtuales  $\delta\varepsilon$ .

Teniendo en cuenta que  $dV = dA \cdot dx$ , donde  $A$  es el área de la sección transversal, la ecuación (2.2) queda, tras efectuar la integración correspondiente y utilizar (2.1), como

$$\int_0^l \delta\varepsilon EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^l \delta u b dx + \sum_{i=1}^p \delta u_i X_i \quad (2.3)$$

Puede demostrarse [T7] que el problema de obtener la configuración de equilibrio de la barra bajo la actuación de las fuerzas exteriores se reduce a

encontrar el campo de desplazamientos  $u(x)$  que satisfaga (2.3) y las condiciones de contorno sobre los desplazamientos prescritos (condiciones cinemáticas). La solución aproximada de este problema por el método de los elementos finitos consiste simplemente en encontrar un campo de desplazamientos alternativo que aproxime  $u(x)$  y que, asimismo, satisfaga la ec.(2.3) y las condiciones cinemáticas.

Para aproximar el campo de desplazamientos  $u(x)$  *escogemos la opción más sencilla, utilizando funciones polinómicas definidas localmente para cada elemento*, como

$$u(x) \simeq \bar{u}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i \quad (2.4)$$

En (2.4)  $\bar{u}(x)$  es el campo de desplazamientos aproximado y  $n$  es el número de puntos del elemento donde se supone conocido el desplazamiento. Dichos puntos se denominan *nodos*. Por otra parte,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  son constantes que dependen *únicamente* de los valores del desplazamiento  $\bar{u}(x)$  en los nodos. Para mayor sencillez de la notación, en lo sucesivo no haremos distinción entre el campo de desplazamientos  $u(x)$  y el campo aproximado  $\bar{u}(x)$ . En la práctica es usual escribir (2.4) como

$$u(x) = N_1^{(e)}(x)u_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)u_2^{(e)} + \cdots + N_n^{(e)}(x)u_n^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(x)u_i^{(e)} \quad (2.5)$$

donde  $N_1^{(e)}(x), \dots, N_n^{(e)}(x)$  son las funciones de interpolación polinómicas definidas en el dominio del elemento (denominadas *funciones de forma*) y  $u_i^{(e)}$  es el valor aproximado del desplazamiento en el nodo  $i$ . La función  $N_i^{(e)}(x)$  interpola dentro del elemento únicamente los desplazamientos correspondientes al nodo  $i$  y por ello se denomina *función de forma del nodo  $i$* . Se deduce de (2.5) que para que  $u(x)$  coincida con  $u_i^{(e)}$  en el nodo  $i$ , la función de forma  $N_i^{(e)}(x)$  ha de valer uno en el nodo  $i$  y cero en el resto de los nodos.

La sustitución de la expresión aproximada de  $u(x)$  para cada elemento en el PTV permite obtener las ecuaciones algebraicas de equilibrio de la estructura, en función de los desplazamientos de los nodos de la malla de elementos finitos. Dichas ecuaciones pueden escribirse en la forma matricial:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.6)$$

donde, por analogía con el cálculo matricial de estructuras de barras,  $\mathbf{K}$  se denomina matriz de rigidez de la malla de elementos finitos, y  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}$  vectores de desplazamientos y de fuerzas nodales, respectivamente. Tanto  $\mathbf{K}$  como  $\mathbf{f}$  pueden obtenerse a partir de las contribuciones individuales de cada elemento, como ocurría en el análisis matricial de estructuras de barras. La solución de (2.6) proporciona los valores de los desplazamientos nodales a partir de los que pueden encontrarse las deformaciones y tensiones en el interior de cada elemento.

Para ilustrar todos estos conceptos estudiaremos en los apartados siguientes el análisis de una barra de sección constante mediante dos mallas de uno y dos elementos finitos unidimensionales de dos nodos, respectivamente.

### 2.3 BARRA DE SECCIÓN CONSTANTE. DISCRETIZACIÓN EN UN ELEMENTO LINEAL

Sea la barra de sección constante de la Figura 2.2. Para empezar discretizaremos la barra en un único elemento de barra de dos nodos que definen una variación lineal del desplazamiento  $u(x)$  en su interior como

$$u(x) = a_o + a_1 x \quad (2.7)$$

Lógicamente  $u(x)$  tiene que tomar en los nodos 1 y 2 los valores  $u_1^{(1)}$  y  $u_2^{(1)}$ , respectivamente. Es decir

$$u(x_1^{(1)}) = u_1^{(1)} \quad \text{y} \quad u(x_2^{(1)}) = u_2^{(1)} \quad (2.8)$$

siendo  $x_1^{(1)}$  y  $x_2^{(1)}$  las coordenadas de los nodos 1 y 2. El índice 1 indica que los valores se refieren al elemento número 1.

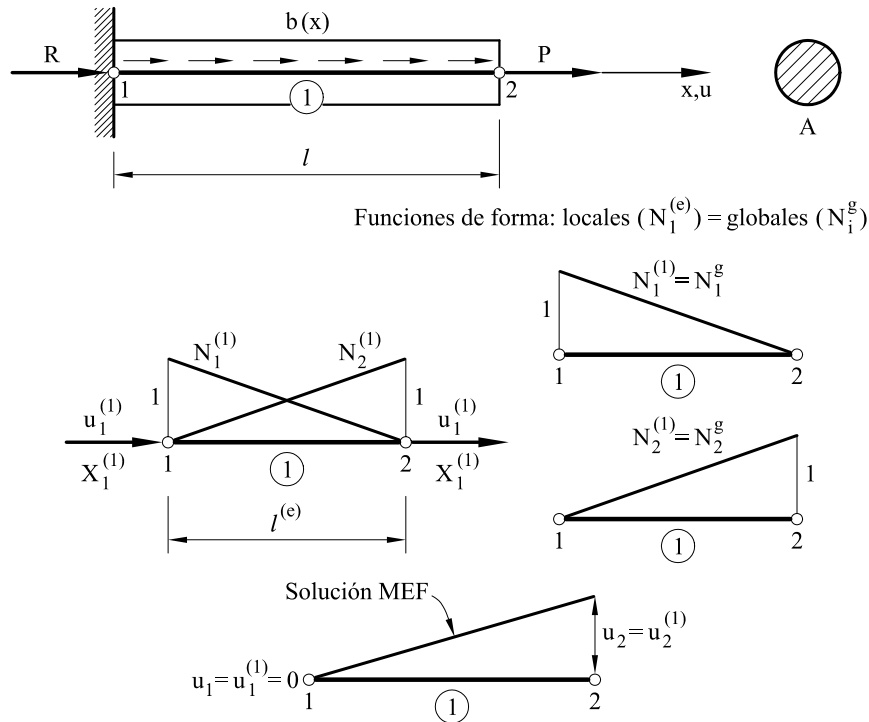


Figura 2.2 Barra de sección constante. Discretización en un elemento de barra de dos nodos.

Sustituyendo las condiciones (2.8) en (2.7) se obtiene el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas siguiente

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} &= a_o + a_1 x_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} &= a_o + a_1 x_2^{(1)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

de donde pueden despejarse las constantes  $a_o$  y  $a_1$

$$a_o = \frac{x_2^{(1)} u_1^{(1)} - x_1^{(1)} u_2^{(1)}}{x_2^{(1)} - x_1^{(1)}} \quad y \quad a_1 = \frac{u_1^{(1)} - u_2^{(1)}}{x_1^{(1)} - x_2^{(1)}} \quad (2.10)$$

Sustituyendo (2.10) en (2.7), puede reescribirse ésta como

$$u = N_1^{(1)}(x)u_1^{(1)} + N_2^{(1)}(x)u_2^{(1)} \quad (2.11)$$

donde  $N_1^{(1)}$  y  $N_2^{(1)}$  son las funciones de forma de los nodos 1 y 2 del elemento, respectivamente, que tienen la expresión siguiente

$$N_1^{(1)}(x) = \frac{x_2^{(1)} - x}{l^{(1)}} \quad ; \quad N_2^{(1)}(x) = \frac{x - x_1^{(1)}}{l^{(1)}} \quad (2.12)$$

siendo  $l^{(1)} = x_2^{(1)} - x_1^{(1)}$  la longitud del elemento. Se deduce de (2.12) que cada función de forma  $N_i^{(1)}$  ( $i = 1, 2$ ) varía linealmente en el interior del elemento y vale uno en el nodo  $i$  y cero en el otro nodo (ver Figura 2.2). Esta última propiedad es consecuencia directa de la definición local de la aproximación polinómica (2.11) y permite siempre anticipar la geometría de las funciones de forma del elemento, como veremos en repetidas ocasiones.

Antes de seguir conviene tener bien clara la diferencia entre la numeración nodal local y global. En la Tabla 2.1 se muestra dicha distinción para los números de los nodos, las coordenadas y los desplazamientos nodales. Obsérvese que debido a que sólo hemos tomado un elemento los números locales y globales coinciden.

Elemento	nodos		coordenadas		desplazamiento	
	local	global	local	global	local	global
1	1	1	$x_1^{(1)}$	$x_1$	$u_1^{(1)}$	$u_1$
	2	2	$x_2^{(1)}$	$x_2$	$u_2^{(1)}$	$u_2$

Tabla 2.1 Parámetros locales y globales en el ejemplo de la Figura 2.2.

Las derivadas de las funciones de forma se pueden escribir como

$$\frac{dN_1^{(1)}}{dx} = -\frac{1}{l^{(1)}} \quad y \quad \frac{dN_2^{(1)}}{dx} = \frac{1}{l^{(1)}} \quad (2.13)$$

De esta manera se puede obtener la deformación axial en cualquier punto dentro del elemento por

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} = -\frac{1}{l^{(1)}} u_1^{(1)} + \frac{1}{l^{(1)}} u_2^{(1)} \quad (2.14)$$

Obsérvese que por ser las funciones de forma lineales la deformación es constante sobre el elemento.

Las fuerzas entre elementos se transmiten únicamente a través de los nodos. Dichas fuerzas nodales, que denominaremos “de equilibrio”, pueden calcularse *para cada elemento* haciendo uso del PTV, que se escribe para el elemento considerado como

$$\int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \delta \varepsilon E A \varepsilon dx = \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \delta u b dx + \delta u_1^{(1)} X_1^{(1)} + \delta u_2^{(1)} X_2^{(1)} \quad (2.15)$$

donde  $\delta u_1^{(1)}$ ,  $\delta u_2^{(1)}$ ,  $X_1^{(1)}$  y  $X_2^{(1)}$  son los desplazamientos virtuales y las fuerzas nodales de equilibrio de los nodos 1 y 2 del elemento, respectivamente. El desplazamiento virtual puede también interpolarse en función de los desplazamientos virtuales de los dos nodos del elemento. Así, de acuerdo con (2.11), puede escribirse

$$\delta u = N_1^{(1)} \delta u_1^{(1)} + N_2^{(1)} \delta u_2^{(1)} \quad (2.16)$$

Por otra parte, la deformación virtual puede expresarse en función de los desplazamientos virtuales nodales como

$$\delta \varepsilon = \frac{d}{dx}(\delta u) = \frac{dN_1^{(1)}}{dx} \delta u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \delta u_2^{(1)} \quad (2.17)$$

La ec.(2.15) se escribe, tras sustituir convenientemente (2.11), (2.13) y (2.14), como

$$\begin{aligned} & \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left[ \frac{dN_1^{(1)}}{dx} \delta u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \delta u_2^{(1)} \right] (EA) \left[ \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} \right] dx - \\ & - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left[ N_1^{(1)} \delta u_1^{(1)} + N_2^{(1)} \delta u_2^{(1)} \right] b dx = \delta u_1^{(1)} X_1^{(1)} + \delta u_2^{(1)} X_2^{(1)} \end{aligned} \quad (2.18)$$

y, agrupando términos

$$\begin{aligned} & \delta u_1^{(1)} \left[ \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left( \frac{dN_1^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_1^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} \right) dx - \right. \\ & \left. - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_1^{(1)} b dx - X_1^{(1)} \right] + \delta u_2^{(1)} \left[ \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left( \frac{dN_2^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} \right) dx - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_2^{(1)} b dx - X_2^{(1)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Como los desplazamientos virtuales son arbitrarios, el cumplimiento de (2.19) para cualquier valor de  $\delta u_1^{(1)}$  y  $\delta u_2^{(1)}$  obliga a que los valores de los corchetes sean nulos, lo que proporciona las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left( \frac{dN_1^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_1^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} \right) dx - \\ - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_1^{(1)} b dx - X_1^{(1)} = 0 \\ \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \left( \frac{dN_2^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} \right) dx - \\ - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_2^{(1)} b dx - X_2^{(1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Del sistema de ecuaciones anterior se deducen los valores de  $X_1^{(1)}$  y  $X_2^{(1)}$ . En forma matricial

$$\begin{aligned} \left( \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \begin{bmatrix} \left( \frac{dN_1^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_1^{(1)}}{dx} \right) & \left( \frac{dN_1^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \right) \\ \left( \frac{dN_2^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_1^{(1)}}{dx} \right) & \left( \frac{dN_2^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \right) \end{bmatrix} dx \right) \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} - \\ - \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \begin{Bmatrix} N_1^{(1)} \\ N_2^{(1)} \end{Bmatrix} b dx = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

La ecuación anterior expresa el equilibrio entre las fuerzas nodales de equilibrio, la carga repartida sobre el elemento y los desplazamientos nodales y puede escribirse como

$$\mathbf{K}^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} - \mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{q}^{(1)}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij}^{(1)} &= \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \frac{dN_i^{(1)}}{dx} (EA) \frac{dN_j^{(1)}}{dx} dx \\ \mathbf{f}_i^{(1)} &= \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} N_i^{(1)} b dx \quad i, j = 1, 2 \\ \mathbf{a}^{(1)} &= [u_1^{(1)}, u_2^{(1)}]^T \quad ; \quad \mathbf{q}^{(1)} = [X_1^{(1)}, X_2^{(1)}]^T \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $\mathbf{K}^{(1)}$ ,  $\mathbf{a}^{(1)}$ ,  $\mathbf{f}^{(1)}$  y  $\mathbf{q}^{(1)}$  son la matriz de rigidez, el vector de desplazamientos nodales, el vector de fuerzas nodales equivalentes y el vector de fuerzas nodales de equilibrio del elemento, respectivamente.

Si el módulo de Young, la sección de la barra y la carga repartida son constantes dentro del elemento, se obtiene

$$\mathbf{K}^{(1)} = \left(\frac{EA}{l}\right)^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{f}^{(1)} = \frac{(bl)^{(1)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

expresiones que coinciden con las obtenidas para la barra bajo cargas axiales en el Capítulo 1. Dicha coincidencia no es fortuita, y podía haberse anticipado, ya que en ambos casos se parte de la misma hipótesis de distribución lineal de desplazamientos, lo que evidentemente conduce a idénticas expresiones para la matriz de rigidez y el vector de fuerzas en los extremos de la barra.

Las ecuaciones que expresan el equilibrio global de la estructura se pueden obtener por un proceso idéntico al explicado para las estructuras de barras en el Capítulo 1. Así, en cada nodo se tiene que satisfacer la ecuación básica de equilibrio de fuerzas

$$\sum_e X_i^{(e)} = X_j^{\text{ext}} \quad (2.24)$$

donde el sumatorio se extiende sobre todos los elementos que concurren en el nodo en cuestión,  $X_i^{(e)}$  es la fuerza de equilibrio que aporta cada elemento y  $X_j^{\text{ext}}$  la fuerza puntual exterior sobre el nodo de número global  $j$ .

Para la malla de un solo elemento que se considera, la ec.(2.24) se escribe, teniendo en cuenta la Figura 2.2, como

$$\text{nodo 1 : } X_1^{(1)} = R_1$$

$$\text{nodo 2 : } X_2^{(1)} = P$$

Utilizando (2.21) y operando cuidadosamente es fácil llegar al sistema de ecuaciones global que, haciendo uso de las relaciones de la Tabla 2.1, puede escribirse en forma matricial como

$$\left(\frac{EA}{l}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 + \frac{bl}{2} \\ P + \frac{bl}{2} \end{Bmatrix}$$

o

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.25)$$

donde  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}$  son la matriz de rigidez, el vector de desplazamientos nodales y el vector de fuerzas nodales equivalentes de toda la malla, respectivamente. La ec.(2.25) se resuelve añadiendo la condición  $u_1 = 0$  para obtener

$$u_2 = \frac{l}{EA} \left(P + \frac{bl}{2}\right) \quad ; \quad R_1 = -(P + bl) \quad (2.26)$$



La deformación y el axil (constantes) en el único elemento vienen dados por

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} = \frac{u_1^{(1)}}{l^{(1)}} = \frac{P + \frac{bl}{2}}{EA}$$

$$N^{(1)} = (EA)^{(1)} \varepsilon^{(1)} = P + \frac{bl}{2} \quad (2.27)$$

La solución exacta para este sencillo problema es [T7]

$$u = \frac{1}{EA} \left[ -\frac{bx^2}{2} + (P + bl)x \right]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{EA} [P + b(l - x)] \quad (2.28)$$

En la Figura 2.3 se comparan las soluciones exacta y aproximada para un valor de  $P = 0$  y  $b = 1 \text{ T/m}$ . Se aprecia en dicha figura que el error obtenido en el valor del desplazamiento en el extremo es nulo, lo que realmente debe considerarse como una excepción [O3]. En el interior de la barra la aproximación con un solo elemento proporciona una variación lineal del desplazamiento diferente de la variación “exacta” parabólica de (2.28). En el Apartado 2.4 comprobaremos como la solución en el interior de la barra mejora sensiblemente utilizando una malla de dos elementos.

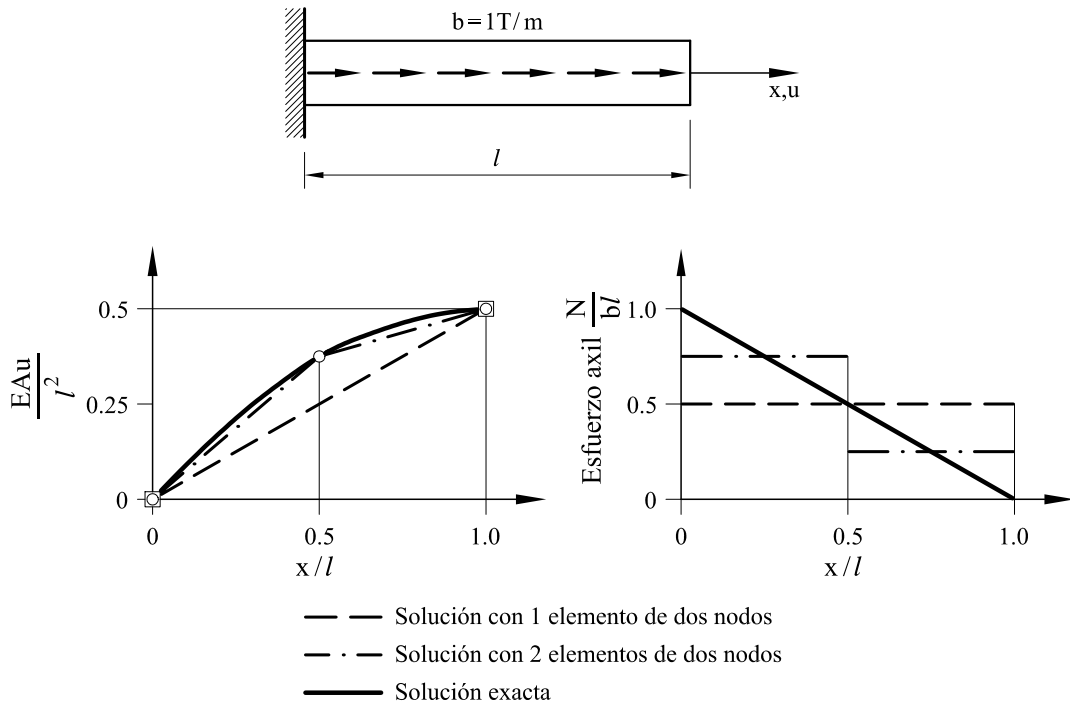


Figura 2.3 Barra de sección constante bajo fuerza uniformemente repartida. Solución exacta y aproximada utilizando uno y dos elementos de barra de dos nodos.

## 2.4 BARRA DE SECCIÓN CONSTANTE. DISCRETIZACIÓN EN DOS ELEMENTOS LINEALES

Discretizaremos ahora la misma barra del ejemplo anterior en dos elementos lineales como se muestra en la Figura 2.4, donde se puede apreciar la diferencia entre funciones de forma locales y globales.

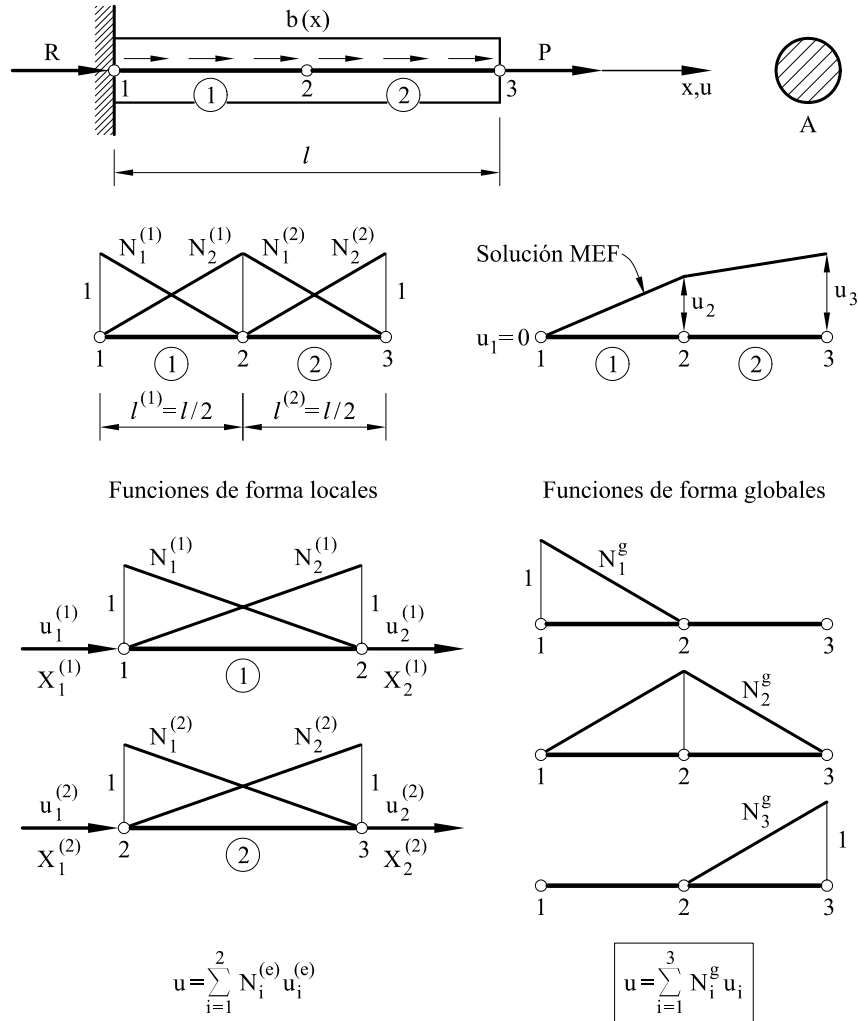


Figura 2.4 Barra de sección constante. Discretización en dos elementos de dos nodos.

Obtendremos en primer lugar las ecuaciones de la discretización a partir de las funciones de forma locales para cada elemento.

Los desplazamientos en el interior de cada elemento se aproximan por:

**Elemento 1**

**Elemento 2**

$$u(x) = N_1^{(1)}(x)u_1^{(1)} + N_2^{(1)}(x)u_2^{(1)} \quad \Bigg| \quad u(x) = N_1^{(2)}(x)u_1^{(2)} + N_2^{(2)}(x)u_2^{(2)} \quad (2.29)$$

**Elemento 1****Elemento 2**

Las funciones de forma y sus derivadas son ahora

$$\left. \begin{aligned} N_1^{(1)} &= \frac{x_2^{(1)} - x}{l^{(1)}} ; \quad \frac{dN_1^{(1)}}{dx} = -\frac{1}{l^{(1)}} \\ N_2^{(1)} &= \frac{x - x_1^{(1)}}{l^{(1)}} ; \quad \frac{dN_2^{(1)}}{dx} = \frac{1}{l^{(1)}} \end{aligned} \right| \quad \left. \begin{aligned} N_1^{(2)} &= \frac{x_2^{(2)} - x}{l^{(2)}} ; \quad \frac{dN_1^{(2)}}{dx} = -\frac{1}{l^{(2)}} \\ N_2^{(2)} &= \frac{x - x_1^{(2)}}{l^{(2)}} ; \quad \frac{dN_2^{(2)}}{dx} = \frac{1}{l^{(2)}} \end{aligned} \right| \quad (2.30)$$

La deformación axial en un punto cualquiera de cada elemento es

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1^{(1)}}{dx} u_1^{(1)} + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} u_2^{(1)} \quad \left| \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1^{(2)}}{dx} u_1^{(2)} + \frac{dN_2^{(2)}}{dx} u_2^{(2)} \quad (2.31)$$

La expresión matricial de equilibrio se obtiene a partir del PTV de manera idéntica a como se hizo en las ecs.(2.12)–(2.20) para el caso de un solo elemento. Así, pues, puede encontrarse fácilmente

$$\mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{a}^{(1)} - \mathbf{f}^{(1)} \quad ; \quad \mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{a}^{(2)} - \mathbf{f}^{(2)} \quad (2.32a)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} (EA) \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(1)}}{dx} & \frac{dN_1^{(1)}}{dx} & \frac{dN_1^{(1)}}{dx} & \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \\ \frac{dN_2^{(1)}}{dx} & \frac{dN_1^{(1)}}{dx} & \frac{dN_2^{(1)}}{dx} & \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \end{bmatrix} dx \\ \mathbf{f}^{(1)} &= \int_{x_1^{(1)}}^{x_2^{(1)}} \begin{bmatrix} N_1^{(1)} & N_2^{(1)} \end{bmatrix}^T b^{(1)} dx \\ \mathbf{q}^{(1)} &= \begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_2^{(1)} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{a}^{(1)} &= \begin{bmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{K}^{(2)} &= \int_{x_1^{(2)}}^{x_2^{(2)}} EA \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(2)}}{dx} & \frac{dN_1^{(2)}}{dx} & \frac{dN_1^{(2)}}{dx} & \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \\ \frac{dN_2^{(2)}}{dx} & \frac{dN_1^{(2)}}{dx} & \frac{dN_2^{(2)}}{dx} & \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \end{bmatrix} dx \\ \mathbf{f}^{(2)} &= \int_{x_1^{(2)}}^{x_2^{(2)}} \begin{bmatrix} N_1^{(2)} & N_2^{(2)} \end{bmatrix}^T b^{(2)} dx \\ \mathbf{q}^{(2)} &= \begin{bmatrix} X_1^{(2)} & X_2^{(2)} \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{a}^{(2)} &= \begin{bmatrix} u_1^{(2)} & u_2^{(2)} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (2.32b)$$

son, respectivamente, las matrices de rigidez , los vectores de fuerzas nodales equivalentes, los vectores de fuerzas nodales de equilibrio y los vectores de desplazamientos nodales de los elementos 1 y 2.

Para calcular las integrales que aparecen en las expresiones anteriores conviene tener en cuenta las equivalencias entre la definición local y global de las variables que se ha resumido en la Tabla 2.2.

Elementos	nodos		coordenadas		desplazamiento	
	local	global	local	global	local	global
1	1	1	$x_1^{(1)}$	$x_1$	$u_1^{(1)}$	$u_1$
	2	2	$x_2^{(1)}$	$x_2$	$u_2^{(1)}$	$u_2$
2	1	2	$x_1^{(2)}$	$x_2$	$u_1^{(2)}$	$u_2$
	2	3	$x_2^{(2)}$	$x_3$	$u_2^{(2)}$	$u_3$

Tabla 2.2 Parámetros locales y globales en el ejemplo de la Figura 2.4.

Sustituyendo las ecs.(2.30) en (2.32) y utilizando la Tabla 2.2, es fácil obtener, si las propiedades del elemento y la carga repartida son constantes dentro de cada elemento,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \left(\frac{EA}{l}\right)^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & \mathbf{K}^{(2)} &= \left(\frac{EA}{l}\right)^{(2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}^{(1)} &= \frac{(bl)^{(1)}}{2} [1, \quad 1]^T & \mathbf{f}^{(2)} &= \frac{(bl)^{(2)}}{2} [1, \quad 1]^T \end{aligned} \quad (2.33)$$

La expresión (2.24) del equilibrio de fuerzas nodales se escribe ahora en forma desarrollada como (ver Figura 2.4)

$$\begin{aligned} \text{Nodo 1 : } X_1^{(1)} &= R_1 \\ \text{Nodo 2 : } X_2^{(1)} + X_1^{(2)} &= 0 \\ \text{Nodo 3 : } X_2^{(2)} &= P \end{aligned} \quad (2.34)$$

Finalmente, sustituyendo (2.32) en (2.34), y una vez ordenada ésta adecuadamente, se puede escribir en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{EA}{l}\right)^{(1)} & -\left(\frac{EA}{l}\right)^{(1)} & 0 \\ -\left(\frac{EA}{l}\right)^{(1)} & \left[\left(\frac{EA}{l}\right)^{(1)} + \left(\frac{EA}{l}\right)^{(2)}\right] & -\left(\frac{EA}{l}\right)^{(2)} \\ 0 & -\left(\frac{EA}{l}\right)^{(2)} & \left(\frac{EA}{l}\right)^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{bl}{4} + R_1 \\ \frac{bl}{2} \\ \frac{bl}{4} + P \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.36)$$

De lo anterior se deduce que la matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$  puede obtenerse calculando primeramente la de cada elemento por separado como

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} (EA)^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \\ \frac{dN_2^{(e)}}{dx} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \end{bmatrix} dx =$$

$$= \left( \frac{EA}{l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

y ensamblando seguidamente las matrices individuales de todos los elementos *siguiendo precisamente las mismas reglas del Capítulo 1 para las estructuras de barras*.

El mismo proceso es aplicable al vector de fuerzas nodales equivalentes. Por tanto, si sobre los elementos actúan fuerzas uniformemente repartidas, el ensamblaje del vector  $\mathbf{f}$  puede efectuarse a partir del vector de fuerzas nodales equivalentes de los diferentes elementos dado por

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \end{Bmatrix} b^{(e)} dx = \left( \frac{bl}{2} \right)^{(e)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Sustituyendo  $\left( \frac{EA}{l} \right)^{(1)} = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(2)} = \frac{2EA}{l}$  y resolviendo el sistema con  $u_1 = 0$  se encuentra

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 & ; & & u_2 &= \frac{l}{2EA} \left( P + \frac{3bl}{4} \right) \\ u_3 &= \frac{l}{2EA} (2P + bl) & ; & & R_1 &= -(P + bl) \end{aligned} \quad (2.39)$$

La deformación y el esfuerzo axial en cada elemento se obtienen por

<b>Elemento 1</b>	<b>Elemento 2</b>
$\begin{aligned} \varepsilon^{(1)} &= \left( \frac{du}{dx} \right)^{(1)} = \frac{u_2}{l^{(1)}} = \frac{P + \frac{3bl}{4}}{EA} \\ N^{(1)} &= (EA)^{(1)} \varepsilon^{(1)} = P + \frac{3bl}{4} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \varepsilon^{(2)} &= \left( \frac{du}{dx} \right)^{(2)} = \frac{u_3 - u_2}{l^{(2)}} = \frac{1}{EA} \left( \frac{bl}{4} + P \right) \\ N^{(2)} &= (EA)^{(2)} \varepsilon^{(2)} = \frac{bl}{4} + P \end{aligned}$

(2.40)

En la Figura 2.3 se ha representado la variación del desplazamiento  $u$  y del esfuerzo axial en cada elemento. Obsérvese que, de nuevo, los desplazamientos nodales coinciden con los valores exactos. Asimismo se puede observar la mejor aproximación del campo de desplazamientos a lo largo de la barra. Por otra parte, vemos que mejora también la aproximación del esfuerzo axial, aunque el error cometido es aún importante y su disminución exigiría una discretización más tupida. De ello se deduce una conclusión general de gran interés práctico: *los errores en la aproximación de los campos de deformaciones y tensiones son siempre mayores que el error en los desplazamientos*. Esta afirmación tiene una explicación intuitiva, ya que al obtenerse las deformaciones y tensiones a partir de las derivadas del campo de desplazamientos (aproximado), es lógico que el error en aquéllas sea mayor.

## 2.5 GENERALIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN CON VARIOS ELEMENTOS DE DOS NODOS

El proceso de solución explicado en los apartados anteriores puede generalizarse fácilmente para el caso de que se utilice una discretización con  $n$  elementos de dos nodos. La matriz de rigidez y el vector de fuerzas de cada elemento se obtienen por

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} (EA)^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \\ \frac{dN_2^{(e)}}{dx} & \frac{dN_1^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} & \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \end{bmatrix} dx$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{x_1^{(e)}}^{x_2^{(e)}} \begin{Bmatrix} N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} \end{Bmatrix} b^{(e)} dx \quad (2.41)$$

que, tras sustituir las expresiones de las funciones de forma,

$$N_1^{(e)} = \frac{x_2^{(e)} - x}{l^{(e)}} ; \quad \frac{dN_1^{(e)}}{dx} = -\frac{1}{l^{(e)}}$$

$$N_2^{(e)} = \frac{x - x_1^{(e)}}{l^{(e)}} ; \quad \frac{dN_2^{(e)}}{dx} = \frac{1}{l^{(e)}} \quad (2.42)$$

se convierte (para propiedades geométricas, mecánicas y de carga constantes) en

$$\mathbf{K}^{(e)} = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{f}^{(e)} = \frac{(bl)^{(e)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

El proceso de ensamblaje conduce, tras operar, a la ecuación matricial global

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k^{(1)} & -k^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ -k^{(1)} & [k^{(1)} + k^{(2)}] & -k^{(2)} & \dots & 0 \\ 0 & -k^{(2)} & [k^{(2)} + k^{(3)}] & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -k^{(3)} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & [k^{(n-1)} + k^{(n)}] & -k^{(n)} \\ 0 & 0 & \dots & -k^{(n)} & k^{(n)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{(bl)^{(1)}}{2} + P_1 \\ \frac{(bl)^{(1)}}{2} + \frac{(bl)^{(2)}}{2} + P_2 \\ \frac{(bl)^{(2)}}{2} + \frac{(bl)^{(3)}}{2} + P_3 \\ \vdots \\ \frac{(bl)^{(n-1)}}{2} + \frac{(bl)^{(n)}}{2} + P_{n-1} \\ \frac{(bl)^{(n)}}{2} + P_n \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

$$\text{con} \quad k = \frac{EA}{l} \quad (2.44)$$

donde  $\mathbf{K}$  es función únicamente de la longitud, del módulo de elasticidad y del área de la sección transversal de los diferentes elementos individuales, y  $\mathbf{f}$  del valor de la fuerza repartida  $b^{(e)}$  actuando sobre cada elemento, de su longitud y de las fuerzas puntuales  $P_i$  que actúen en los diversos nodos de la malla.

Dichas fuerzas pueden ser reacciones incógnitas que deberán calcularse en el proceso de solución de (2.44), siguiendo procedimientos generales de cálculo matricial de estructuras de barras [L2], [T6].

## 2.6 FORMULACIÓN MATRICIAL DE LAS ECUACIONES DEL ELEMENTO

El método que hemos seguido para obtener las expresiones de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes de la barra en los apartados anteriores es muy útil para explicar los conceptos básicos de discretización a nivel preliminar, pero poco práctico para el estudio de problemas más complejos en donde interviene más de una variable de desplazamientos o deformaciones. En todos estos casos es indispensable el uso de una formulación matricial que permita agrupar variables y operaciones de forma compacta. Adicionalmente, la formulación matricial permite desarrollar una metodología de cálculo muy sistemática que se repite invariablemente para todos los problemas de análisis de estructuras por elementos finitos. Presentaremos seguidamente las ideas fundamentales en las que se basa dicha formulación.

En apartados anteriores hemos considerado más didáctico distinguir siempre con el índice  $e$  todas las variables asociadas a un elemento aislado.

*No obstante, puesto que generalmente todas las expresiones que utilizaremos se referirán a un solo elemento, prescindiremos de aquí en adelante, para mayor simplicidad, de distinguir con el índice “e” a las variables asociadas con un elemento, manteniéndolo solamente en algunas variables muy significativas, tales como las dimensiones del elemento ( $l^{(e)}$ ,  $A^{(e)}$  y  $V^{(e)}$ ); los vectores de desplazamientos, coordenadas y fuerzas nodales ( $\mathbf{a}^{(e)}$ ,  $\mathbf{x}^{(e)}$  y  $\mathbf{f}^{(e)}$ ); la matriz de rigidez del elemento  $\mathbf{K}^{(e)}$ , y alguna otra variable elemental relevante. Todas las demás variables y vectores deberán también interpretarse, a menos que se indique lo contrario, como pertenecientes a un solo elemento aislado.*

### 2.6.1 Matriz de funciones de forma

Consideremos un elemento de dos nodos perteneciente a una barra que trabaja a esfuerzo axial, similar a uno cualquiera de los considerados en los apartados anteriores. Dentro del elemento el desplazamiento  $u$  se expresa, tal y como ya hemos visto, por

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \quad (2.45)$$

La expresión anterior puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{u} = \{u\} = [N_1, N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.46)$$

donde

$$\mathbf{N} = [N_1, N_2] \quad ; \quad \mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

son la *matriz de funciones de forma* y el *vector de desplazamientos nodales* del elemento, respectivamente. Este último vector ya había aparecido con anterioridad. [Obsérvese que, de acuerdo con el nuevo criterio adoptado, hemos prescindido en (2.45)–(2.47) del índice  $e$  que hasta ahora caracterizaba las funciones de forma y los desplazamientos nodales del elemento].

### 2.6.2 Matriz de deformación

El vector de deformaciones se puede escribir como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon\} = \left\{ \frac{dN_1}{dx} u_1 + \frac{dN_2}{dx} u_2 \right\} = \left[ \frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_2}{dx} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.48)$$

donde

$$\mathbf{B} = \left[ \frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_2}{dx} \right] \quad (2.49)$$

es la *matriz de deformación* del elemento.

### 2.6.3 Matriz constitutiva

El *vector de tensiones* se expresa por

$$\boldsymbol{\sigma} = [N] = (EA) \boldsymbol{\varepsilon} = [EA] \varepsilon = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (2.50)$$

donde

$$\mathbf{D} = [EA] \quad (2.51)$$

es la *matriz de propiedades mecánicas* o *matriz constitutiva*.

En el problema que consideramos  $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{D}$  tienen una sola componente. En general, el vector  $\boldsymbol{\sigma}$  tendrá  $t$  componentes y, por tanto, si  $n$  es el número de variables nodales y  $d$  los grados de libertad de cada nodo, las dimensiones de las matrices y vectores que intervienen en la ecuación constitutiva son

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{\sigma} & = & \mathbf{D} & \cdot & \mathbf{B} & \cdot & \mathbf{a}^{(e)} \\ t \times 1 & & t \times t & & [t \times (n \times d)] & & [(n \times d) \times 1] \end{array} \quad (2.52)$$



### 2.6.4 Expresión del Principio de los Trabajos Virtuales

El PTV para un elemento aislado se escribe en forma matricial como

$$\int_{l(e)} \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dx = \int_{l(e)} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dx + [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.53)$$

El carácter unidimensional del problema que consideramos puede quizás oscurecer las razones de la utilización de la traspuesta de vectores en la expresión anterior. Esto es necesario ya que los integrandos del PTV son escalares (expresan el trabajo de las fuerzas externas e internas) que se obtienen como producto de un vector fila por otro columna.

### 2.6.5 Matriz de rigidez y vector de fuerzas nodales equivalentes

De (2.45) y (2.52) se deduce

$$\begin{aligned} [\delta \mathbf{u}]^T &= [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{N}^T \\ [\delta \boldsymbol{\epsilon}]^T &= [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{B}^T \end{aligned} \quad (2.54)$$

Por consiguiente, sustituyendo (2.48), (2.50) y (2.54) en la expresión de los trabajos virtuales del elemento se obtiene

$$\int_{l(e)} [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} dx - \int_{l(e)} [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx = [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.55)$$

donde  $\mathbf{b} = \{b\}$  es el vector de fuerzas repartidas actuando en el elemento.

Sacando factor común el vector de desplazamientos virtuales se obtiene

$$[\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \left[ \left( \int_{l(e)} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \right) \mathbf{a}^{(e)} - \int_{l(e)} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx - \mathbf{q}^{(e)} \right] = \mathbf{0} \quad (2.56)$$

Como el cumplimiento de la ecuación anterior para cualquier desplazamiento virtual arbitrario obliga a que el corchete que multiplica a  $[\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T$  sea nulo, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas de equilibrio del elemento

$$\left( \int_{l(e)} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \right) \mathbf{a}^{(e)} - \int_{l(e)} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx = \mathbf{q}^{(e)} \quad (2.57)$$

o

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{l(e)} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx \\ \mathbf{f}^{(e)} &= \int_{l(e)} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx \end{aligned}$$

(2.58)

son, respectivamente, la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a cargas repartidas del elemento, que se obtienen a partir de las matrices de funciones de forma, de deformación y constitutiva de cada elemento.

Hay que destacar que el proceso anterior de obtención de la matriz  $\mathbf{K}^{(e)}$  y el vector  $\mathbf{f}^{(e)}$  es *totalmente general*.

La forma explícita de  $\mathbf{K}^{(e)}$  y  $\mathbf{f}^{(e)}$  para el elemento de barra de dos nodos puede encontrarse de nuevo sin más que sustituir en (2.58) las matrices adecuadas. Así, en este caso,

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] = [N_1, N_2] = \left[ \frac{x_2 - x}{l^{(e)}}, \frac{x - x_1}{l^{(e)}} \right] \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] = \left[ \frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_2}{dx} \right] = \left[ -\frac{1}{l^{(e)}}, \frac{1}{l^{(e)}} \right]\end{aligned}\quad (2.59)$$

$$\mathbf{D} = [EA] \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \{b\}$$

y sustituyendo en (2.58)

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} \left\{ -\frac{1}{l^{(e)}} \right\} (EA) \left[ -\frac{1}{l^{(e)}}, \frac{1}{l^{(e)}} \right] dx = \left( \frac{EA}{l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} \left\{ \frac{x_2 - x}{x - x_1} \right\} \left( \frac{b}{l} \right)^{(e)} dx = \frac{(bl)^{(e)}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.60)$$

expresiones que, obviamente, coinciden con las (2.43) deducidas por procedimientos no matriciales.

Finalmente apuntaremos que la obtención de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes suele hacerse en la práctica a partir de las submatrices y subvectores correspondientes.

La forma de operar es muy sencilla si se desarrollan las ecs.(2.58) como

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_2^T \end{bmatrix} \right\} \mathbf{D} [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] dx = \int_{l^{(e)}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \vdots & \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 & \vdots & \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} dx \quad (2.61)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \\ \mathbf{N}_2^T \end{bmatrix} \right\} \mathbf{b} dx = \int_{l^{(e)}} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T \mathbf{b} \\ \mathbf{N}_2^T \mathbf{b} \end{bmatrix} \right\} dx$$

De (2.61) puede definirse la matriz  $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$  que relaciona los nodos  $i$  y  $j$  del elemento como

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \begin{matrix} \mathbf{B}_i^T & \mathbf{D} & \mathbf{B}_j \\ (d \times t) & (t \times t) & (t \times d) \end{matrix} dx \quad ; \quad i, j = 1, 2 \quad (2.62)$$

y el vector de fuerzas nodales equivalentes del nodo  $i$  del elemento como

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \mathbf{N}_i^T \mathbf{b} dx \quad i = 1, 2 \quad (2.63)$$

Para el caso particular del elemento de dos nodos ( $d = t = 1$ ) se tiene

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \frac{dN_i}{dx} EA \frac{dN_j}{dx} dx = (-1)^{i+j} \left( \frac{EA}{l} \right)^{(e)} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{f}_i^{(e)} = \int_{l^{(e)}} N_i b dx = \frac{(bl)^{(e)}}{2}$$

a partir de las que pueden obtenerse las expresiones de  $\mathbf{K}^{(e)}$  y  $\mathbf{f}^{(e)}$ .

Todo este planteamiento puede resultar de poca relevancia para el caso del elemento de barra de dos nodos, puesto que las operaciones a efectuar son, de cualquier manera, muy sencillas. No obstante, esta técnica de obtener las matrices y vectores del elemento es la más indicada en la práctica, obteniéndose una mejor organización general del cálculo.

## 2.7 RESUMEN DE LAS ETAPAS DEL ANÁLISIS DE UNA ESTRUCTURA POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Resumiremos las etapas esenciales que deben seguirse en el análisis de una estructura por el método de los elementos finitos haciendo referencia a las expresiones matriciales obtenidas en el apartado anterior:

1. Dividir la estructura en una malla de elementos finitos.
2. Para cada elemento calcular la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes. Para el problema de la barra a tracción:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx & : & \quad \mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dx \\ \mathbf{f}^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dx & ; & \quad \mathbf{f}_i^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \mathbf{N}_i^T \mathbf{b} dx \end{aligned} \quad (2.65)$$

3. Ensamblar las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas nodales equivalentes de los distintos elementos en la matriz de rigidez y el vector de fuerzas de toda la estructura, respectivamente:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{K} = \mathbb{I}_e \mathbf{K}^{(e)} \quad ; \quad \mathbf{f} = \mathbb{I}_e \mathbf{f}^{(e)} \quad (2.66)$$

donde el símbolo  $\mathbf{I\!E}_e$  indica ensamblaje de las diversas matrices y vectores elementales.

4. Una vez impuestas las condiciones de contorno, calcular los desplazamientos nodales resolviendo el sistema de ecuaciones de la discretización. En los nodos con movimientos prescritos calcular las reacciones correspondientes:

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \quad (2.67)$$

5. Calcular para *cada elemento* otras magnitudes de interés, tales como deformaciones, tensiones o esfuerzos:

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)}\mathbf{a}^{(e)} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \mathbf{D}^{(e)}\mathbf{B}^{(e)}\mathbf{a}^{(e)} \quad (2.68)$$

En temas posteriores se detallará la obtención de las matrices y vectores que intervienen en cada una de las etapas anteriores para diferentes tipologías estructurales.