CÁLCULO II

Prof. Ing. Silvia Seluy

TEMA: VECTORES UNITARIOS QUE ACTÚAN SOBRE UNA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO.

I. LONGITUD DE ARCO Y VECTOR T

Dada una curva en el espacio, se localizarán puntos sobre ella, mediante su distancia dirigida **s**, a lo largo de la curva desde un punto base.

El parámetro **s**, es un parámetro natural para medir *la forma* (propiedades geométricas) de una curva, tal como **t** es un parámetro natural para describir *velocidad y aceleración.*

LONGITUD DE UNA CURVA REGULAR

La longitud de una curva regular en el espacio, $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k} \quad a \leq t \leq b$ recorrida una vez desde t = a hasta t = b, está dada:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\; dt}$$

En forma reducida:

$$\boxed{L = \int_a^b |\vec{v}|\; dt}$$ siendo $|\vec{v}|$: rapidez

PARÁMETRO LONGITUD DE ARCO

Dada una curva C parametrizada por t, para cada punto P(t) hay un valor de t que determina: P(t)=x(t),y(t),z(t) en C, con <u>distancia dirigida:</u>

$$\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(\tau)| \, d\tau}$$

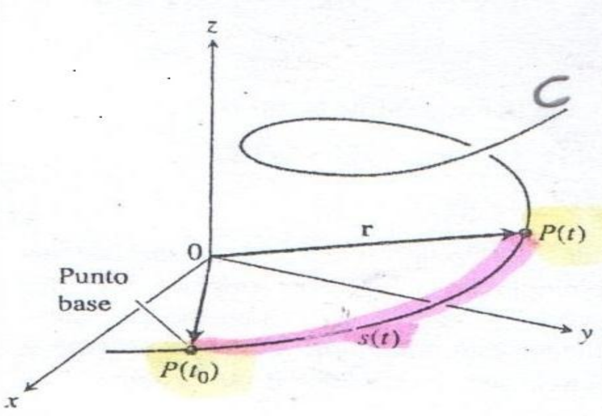


FIGURA 13.16 La distancia dirigida a lo largo de la curva desde $P(t_0)$ hasta cualquier punto $P(t)$ es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{v}(\tau)| \, d\tau.$$

Si t>to, s(t) va de P(to) a P(t)

Si t<to, s(t) es negativo de la distancia.

PARÁMETRO LONGITUD DE ARCO (2)

Cada valor de s determina un punto de C, y esto parametriza a C con respecto a s.

El valor de s aumenta en la dirección que t crece.

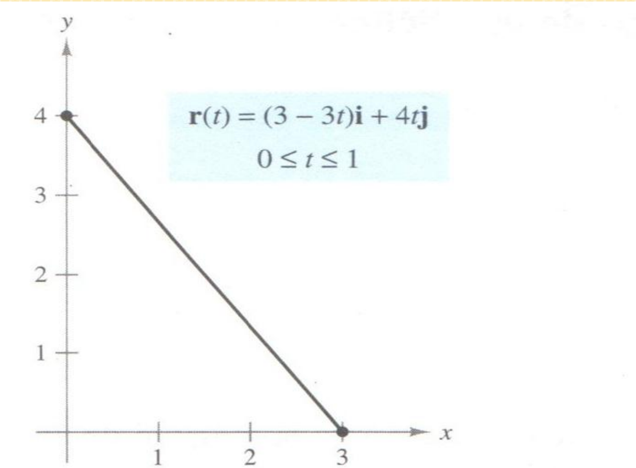
s: parámetro longitud de arco de la curva.

$$\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2}\; d\tau}$$

APLICACIÓN

Sea la curva **r**(t) en términos de t, y s(t) la longitud de arco, se puede expresar a t(s) y la curva ser reparametrizada como **r** = **r**(t(s)).

- *Encontrar la función longitud de arco para el segmento de recta dado por* $\vec{r}(t) = (3-3t)\vec{i} + (4t)\vec{j} \quad 0 \le t \le 1$



El segmento de recta que va de (3, 0) a (0, 4) puede parametrizarse empleando el parámetro longitud de arco s.

$$\vec{r}'(t) = -3\vec{i} + 4\vec{j} \qquad |\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

y con

$$s(t) = \int_0^t |\vec{v}(\tau)|\, d\tau = \int_0^1 5\, d\tau = 5t$$

*Reescribo a **r** con s:* $t = s/5$

$$\vec{r}(s) = (3 - \frac{3}{5}s)\vec{i} + (\frac{4}{5}s)\vec{j} \qquad 0 \le s \le 5$$

CARACTERÍSTICAS QUE DEFINEN MATEMÁTICAMENTE LOS GIROS PRONUNCIADOS Y VUELTAS NORMALES AL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA EN UNA CURVA.

VECTOR TANGENTE UNITARIO (T)

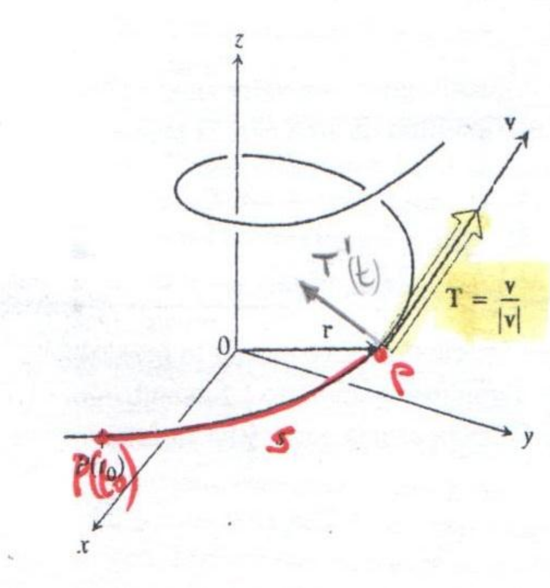


FIGURA 13.17 Hallamos el vector unitario tangente T, dividiendo a v entre |v|.

Como s´(t) >0 para estas curvas, s es uno a uno y tiene inversa que da a t como función diferenciable de s:

t´(s)= 1/s´(t).

r es diferenciable de s $\Longrightarrow$

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}=\bar{v}\frac{1}{|\bar{v}|}=\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}=\bar{T}=\frac{d\vec{r}}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

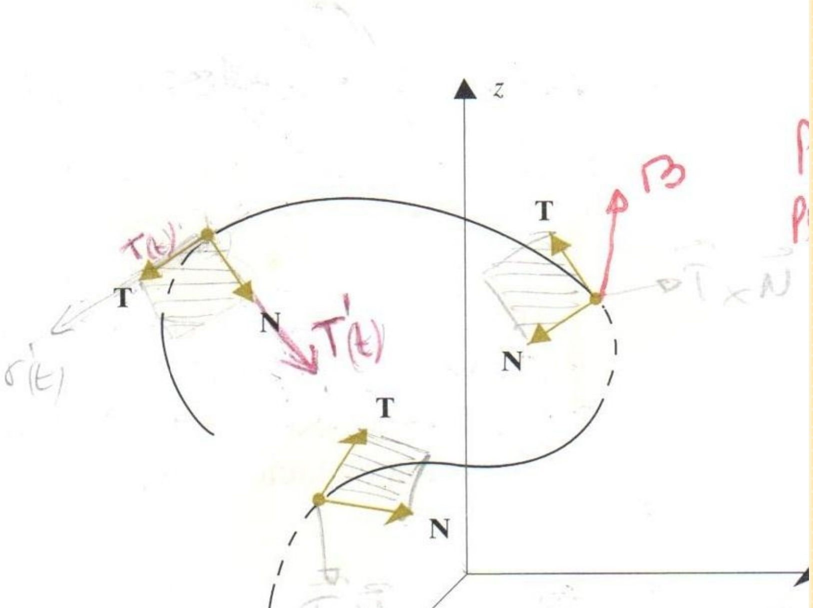
T:vector tg unitario en dirección de vector velocidad, en una curva regular **r**(t).**Da la dirección de la curva.**

Efectos de T(t) y T´(t)

Dado que $\left|\vec{T}(t)\right| = 1$ sólo varía su dirección y el vector $\vec{T}´(t)$ mide esa variación de dirección.

Si $\vec{T}´(t) = \vec{0}$,**T**(t) no cambia de dirección.

Si $\vec{T}´(t) \neq \vec{0}$, se puede formar el vector unitario normal **N**(t), en la dirección de **T**´(t).



Se puede ver que **T**´(t) es normal a **T**(t).

II. CURVATURA – VECTOR NORMAL UNITARIO (N)

Una parametrización de **r**(t) es <u>*suave* </u>en un intervalo I si **r**´(t) es continua y distinta de cero en I.

Una curva se llama suave (sin puntos cúspides) si tiene una parametrización suave; al girar el vector tangente lo hace en forma continua.

Recordando que el **T**(t) indica la dirección de la curva, *la <u>curvatura de una curva C</u> en un punto dado, es una medida de qué tan rápido cambia la curva de dirección en ese punto.*

CURVATURA (2)

Curvatura, es la razón con que **T**(t) gira por unidad de longitud a lo largo de la curva.

La curvatura (κ) de una curva del plano se define como:“Si **T** es el vector tangente unitario de una curva regular, su función curvatura es:

$$\boxed{\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|}$$

Cuando $\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$ aumenta, **T** gira rápidamente, κ crece.

Y cuando tiende a cero, **T** gira lentamente, κ decrece

En una línea recta, **T** apunta en la misma dirección (componentes ctes), por lo tanto:

su curvatura es cero.

Si el parámetro ya no es s, sino t en r(t)

La curvatura estaría dada por:

$$\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| \frac{1}{\left|\frac{ds}{dt}\right|} = \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| \cdot \frac{1}{|\vec{v}|}$$

Por lo tanto, si **r**(t) es una curva regular, su curvatura está dada por:

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}$$

La curvatura de una circunferencia de radio r = a es igual a 1/a

Dada la parametrización de una circunferencia de radio <u>a</u>: $\vec{r}(t) = (a.\cos t)\vec{i} + (a.sent)\vec{j} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -(a.sent)\vec{i} + (a.\cos t)\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-asent)^2 + (a\cos t)^2} = \sqrt{a^2} = |a| = a$$

Con $\vec{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -(sent)\vec{i} + (\cos t)\vec{j}$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = -(\cos t)\vec{i} - (sent)\vec{j} \qquad \Rightarrow \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = \sqrt{\cos^2 t + sen^2 t} = 1$$

$$\kappa = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right| = \frac{1}{a}(1) = \frac{1}{a} \Rightarrow \qquad \boxed{\kappa = \frac{1}{a}}$$

VECTOR NORMAL PRINCIPAL UNITARIO (N)

Un vector perpendicular al vector tangente T que apunta en la dirección en que gira la curva, es el vector $\dfrac{d\vec{T}}{ds}$

Al convertir el vector en unitario: $\dfrac{d\vec{T}}{ds} / \left|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right| = \vec{N}$ (normal)

Si recordamos que $\boxed{\kappa = \left|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right|}$

Podemos definir al <u>**vector normal principal unitario**</u> de una curva regular en el plano, en un punto donde $\kappa \neq 0$ como: $\boxed{\vec{N} = \dfrac{1}{\kappa} \cdot \dfrac{d\vec{T}}{ds}}$

VECTOR NORMAL CON OTRO PARÁMETRO

Se puede expresar a la curva C en función de otro parámetro distinto al parámetro longitud de arco s.

Partiendo de **N**(s), obtenemos **N**(t).

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} \Big/ \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right|$$

T: v. tangente unitario

$$= \frac{(d\vec{T}/dt)(dt/ds)}{|d\vec{T}/dt||dt/ds|} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}$$

N(t) es el vector u. normal principal, en una curva regular **r**(t), independiente de κ y de <u>s.</u>

EL CÍRCULO OSCULADOR

El círculo osculador en un punto P de una curva

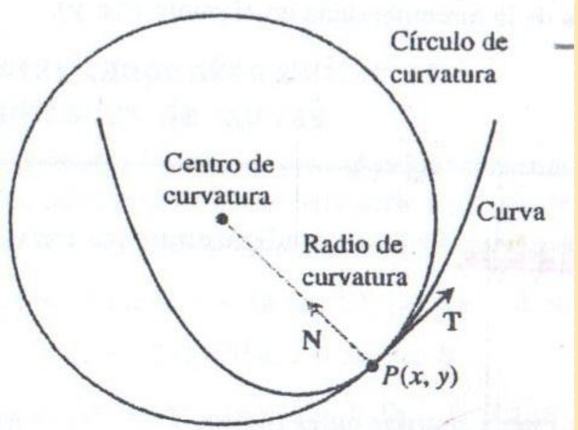


FIGURA 13.22 El círculo osculador en $P(x, y)$ está hacia el lado interno de la curva.

plana, verifica que:

a) Es tg a la curva en P.

b)Tiene en P, la misma curvatura que la curva.

c) Está del lado cóncavo de la curva

El centro de curvatura es el centro del círculo de curvatura. El radio de curvatura en P, es el radio del círculo de curvatura. Se define como: $\boxed{\rho = \frac{1}{\kappa}}$ ***Véase ej. 4***

CURVATURA Y N DE UNA CURVA EN EL ESPACIO

La curvatura en el espacio se define como: $\boxed{\kappa = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}$

Similar al caso de curvas planas, por lo que también se define a:

$$\vec{N} = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d\vec{T}}{ds} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{N} = \frac{\vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,''(t)|}$$

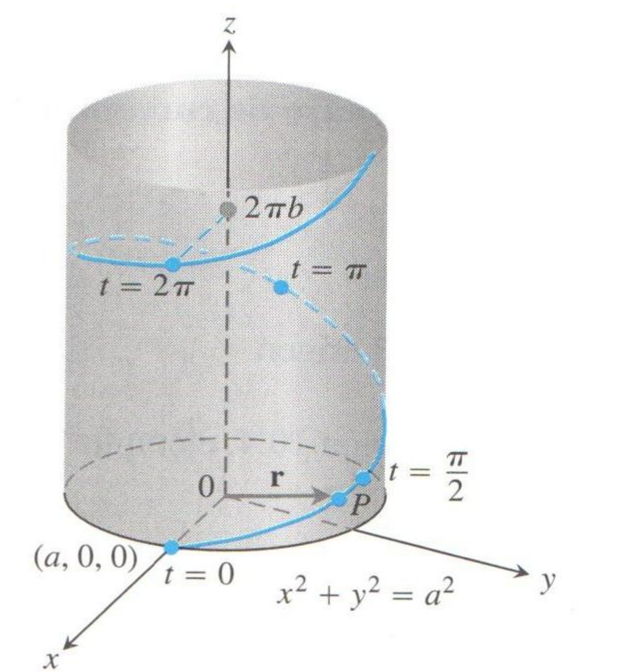
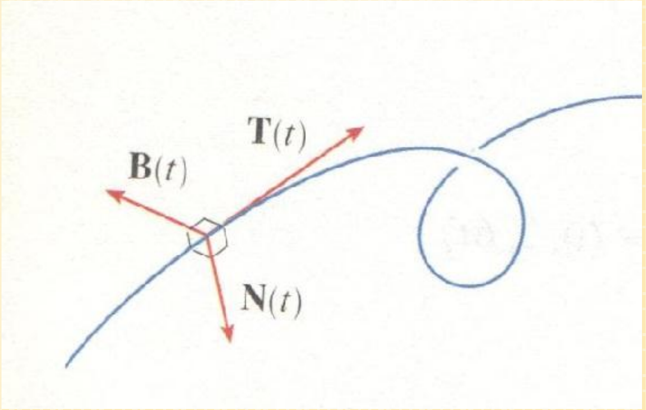


FIGURA 13.24 La hélice $\mathbf{r}(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$, trazada con a, b positivos y $t \geq 0$ (ejemplo 5).

III.TORSIÓN Y VECTOR BINORMAL UNITARIO



El vector Binormal, (**B**) es el tercer vector unitario principal que se analiza en el movimiento de una partícula. Está sobre ella, en forma normal al plano que determinan los vectores **T** y **N.**

Por lo tanto: **B** = **T** x **N**

Determinan el sistema de referencia TNB conocido como triedro de Frenet

ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN DE B

De **B** = **T** x **N** podemos analizar d**B**/ds

d**B**/ds=d**T**/ds x **N**+ **T** x d**N**/ds (d**T**/ds // **N**)

d**B**/ds= **O** + **T** x d**N**/ds $\Rightarrow$ d**B**/ds=**T** x d**N**/ds

Por lo cual d**B**/ds es normal al plano de **T** y **B**

N tiene la dirección de d**B**/ds $\Rightarrow$ **dB/ds= - τ.N**

Siendo τ : torsión de la curva.

Si =(d**B**/ds). **N**= - τ**N.N** = - τ.(1)= - τ

$\Rightarrow$ Siendo **B** = **T** x **N** ,**la torsión de una curva regular es: τ =** -(d**B**/ds). **N**= **(torsión de la trayectoria:**

Mide cuánto se tuerce la curva.

ANÁLISIS DE LOS TRES VECTORES SOBRE UNA PARTÍCULA EN MOVIMIENTO SOBRE LA CURVA

T: representa el movimiento hacia adelante de la partícula.

N: indica la dirección en que se dobla la trayectoria.

B: indica la tendencia de la partíc. a girar fuera del plano formado por los otros dos vectores, perpendicular a dicho plano.

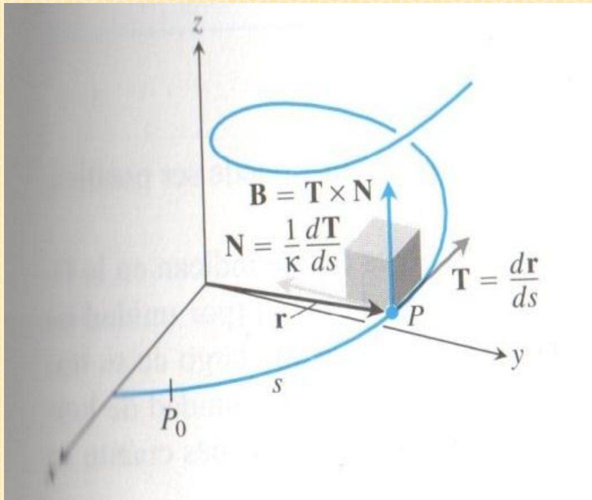


FIGURA 13.25 El marco (sistema) TNB de vectores unitarios mutuamente ortogonales que viajan a lo largo de una curva en el espacio.

κ: cuánto se curva la trayectoria por la partícula.

τ : cuánto la trayectoria rota ó sale de su plano de movimiento cuando el objeto se mueve