

CÁLCULO II

Extremos en funciones de varias variables

Prof. Ing. Silvia Seluy

GENERALIDADES

- Una aplicación de la derivada de una función de una variable se relaciona con los valores extremos de una función.
- A partir de procedimientos que involucran a la primera y segunda derivada se determinan los valores máximos y mínimos relativos de la función, y luego con estos valores se examina la posibilidad que fuesen también extremos absolutos.
- Al extender la teoría a funciones de dos variables, se verá que el procedimiento es similar al de una variable, con alguna complicación adicional.

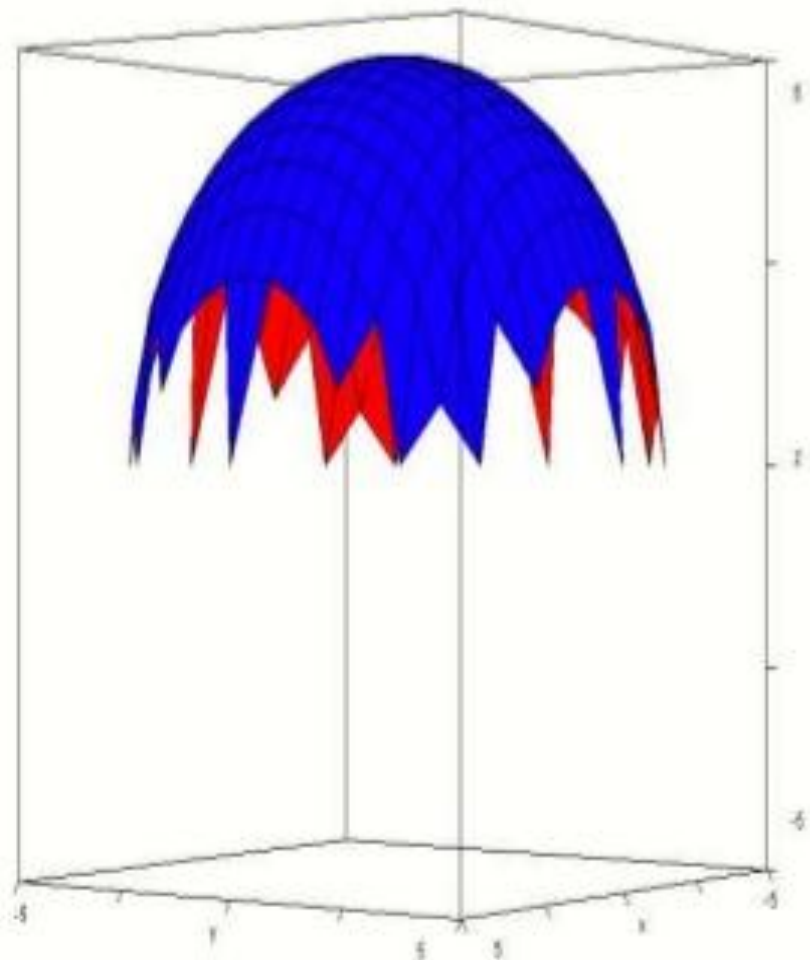
EXTREMOS RELATIVOS EN FUNCIONES DE DOS VARIABLES

- Se dice que la función $f(x,y)$ *tiene un valor máximo RELATIVO* en su dominio D del plano xy , si existe algún punto (a,b) en D tal que $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todos los puntos (x,y) de D en un disco abierto con centro en (a,b)
- En tal caso $f(a,b)$ es el valor máximo relativo de f en D .
- Se dice que la función $f(x,y)$ *tiene un valor mínimo RELATIVO* en su dominio D del plano xy , si existe algún punto (a,b) en D tal que $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todos los puntos (x,y) de D en un disco abierto con centro en (a,b)
- En tal caso, $f(a,b)$ es el valor mínimo relativo de f en D .

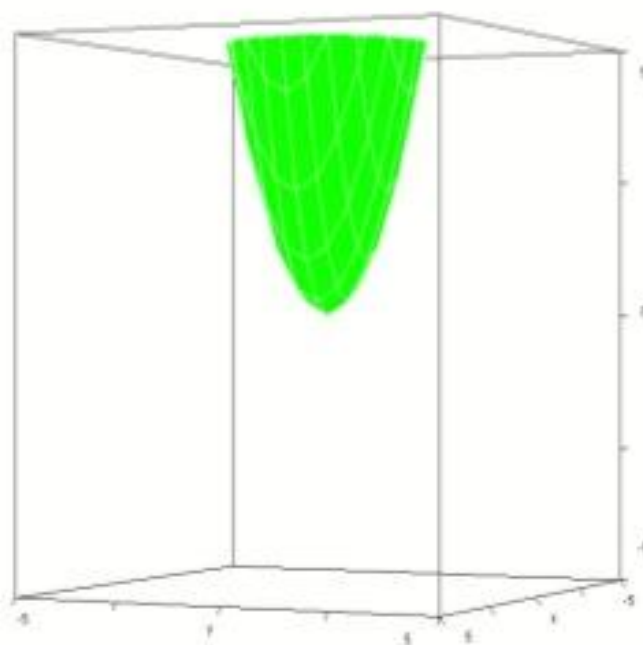
Caso de un disco abierto $((0,0),r)$ para $r < 5$.



En el caso de la función $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$



La siguiente grafica correspondiente a la función $g(x, y) = x^2 + y^2$



El dominio de g es el plano xy completo, en este caso según las definiciones, g tiene un mínimo relativo de 0 en el origen, también 0 es el mínimo absoluto de g , considerando un disco abierto $((0,0);r)$

Condición necesaria para la existencia de extremos

Sea

$z = f(x, y)$ definida para todo punto de un entorno de (X_0, Y_0) .

Se dice que (X_0, Y_0) es un punto critico de $z = f(x, y)$ si se verifica que

- 1) $f_x(X_0, Y_0) = 0$ y $f_y(X_0, Y_0) = 0$
- 2) $f_x(X_0, Y_0)$ no existe o $f_y(X_0, Y_0)$ no existe

Ejemplo

Sea $Z = f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$

Hallar los puntos críticos y analizar si son extremos

$$Z_x = 4x + 8$$

$$Z_y = 2y - 6$$

$$4x + 8 = 0$$

$$x = -2$$

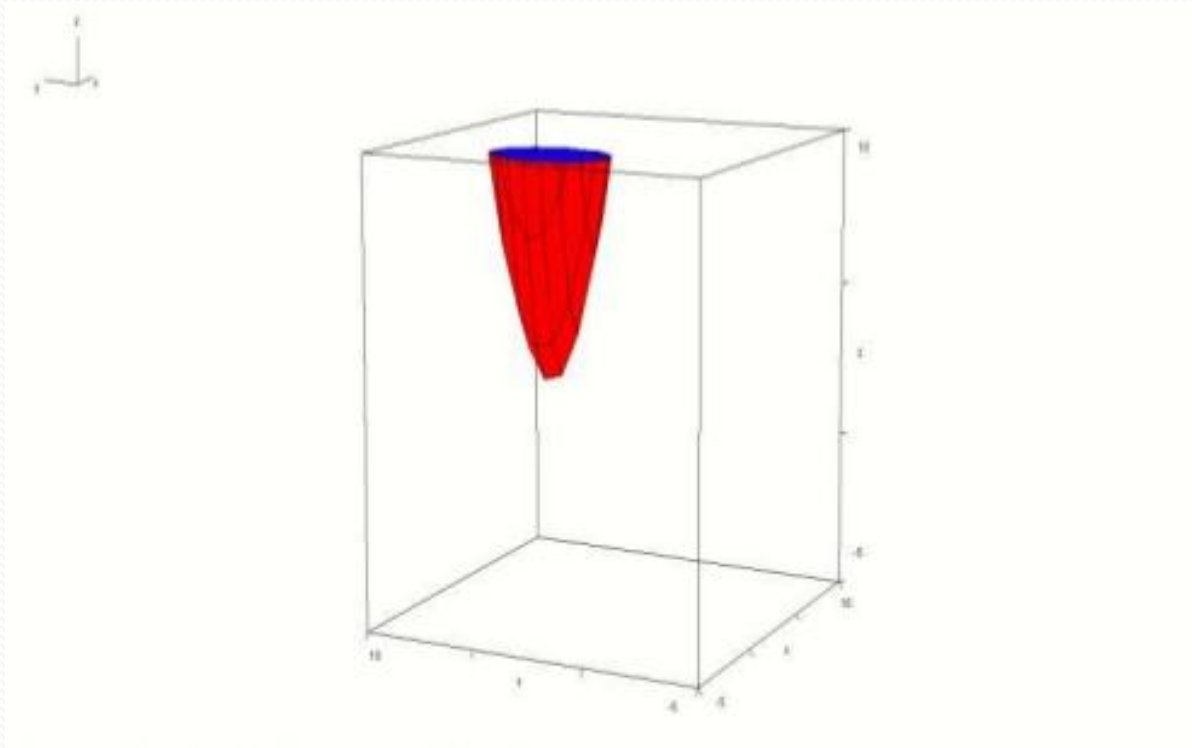
$$2y - 6 = 0$$

$$y = 3$$

punto critico (-2;3)

Con $x = -2$ e $y = 3$ el valor de $f(x,y) = 3$

- Su gráfica es la siguiente:



- El valor mínimo de la función es $(-2, 3, 3)$

CRITERIO DE LA DERIVADA PRIMERA PARA EXTREMOS LOCALES O RELATIVOS

Si $f(x,y)$ tiene un máximo o mínimo local en un punto interior (a,b) de su dominio, y si las primeras derivadas parciales existen en el punto, entonces

$$f_x(a,b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a,b) = 0$$

Demostración: si f tiene un extremo local en (a,b) , entonces la función $g(x) = f(x,b)$ tiene un extremo local en $x = a$; $g'(a) = 0$.

Pero $g'(a) = f_x(a,b) = 0$.

Análogamente, $h(y) = f(a,y)$ muestra que $f_y(a,b) = 0$

Si se sustituyen los valores nulos de las derivadas parciales en a,b en la ecuación del plano tg a la superficie $z = f(x,y)$:

$$o(x-a) + o(y-b) - (z - f(a,b)) = 0 ; \quad z = f(a,b)$$

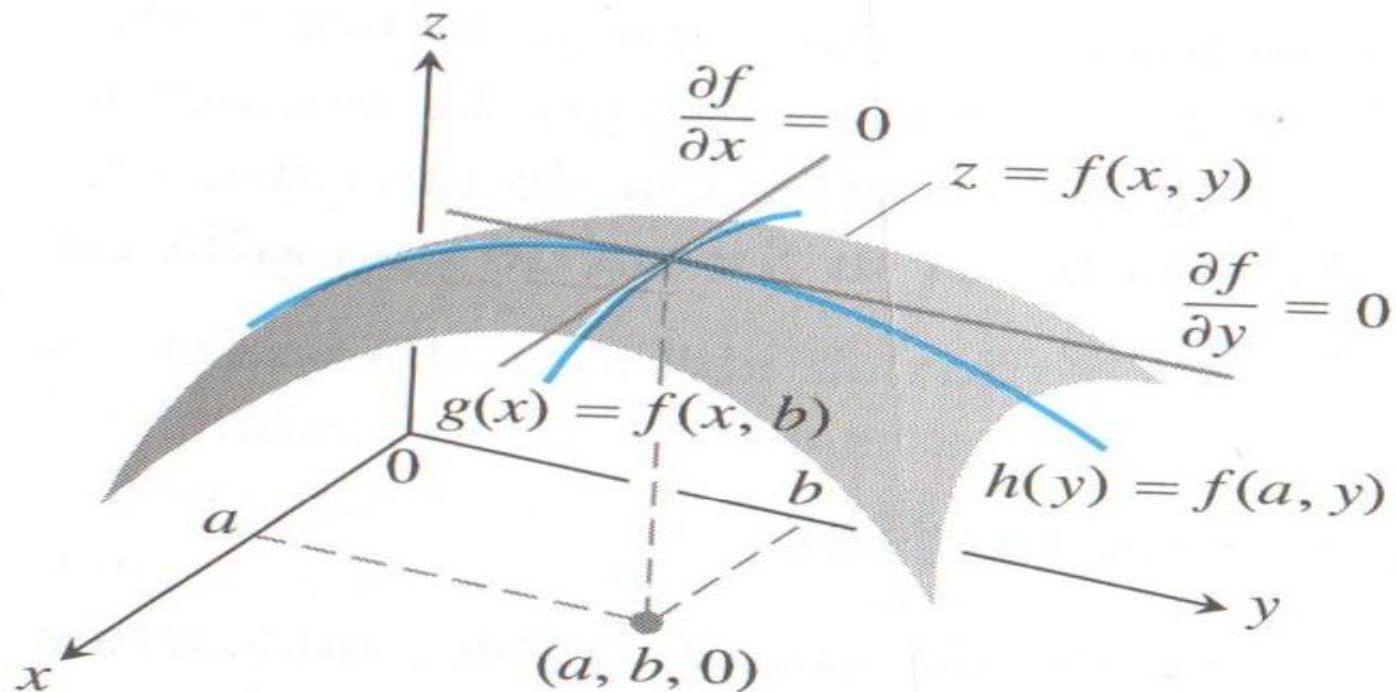
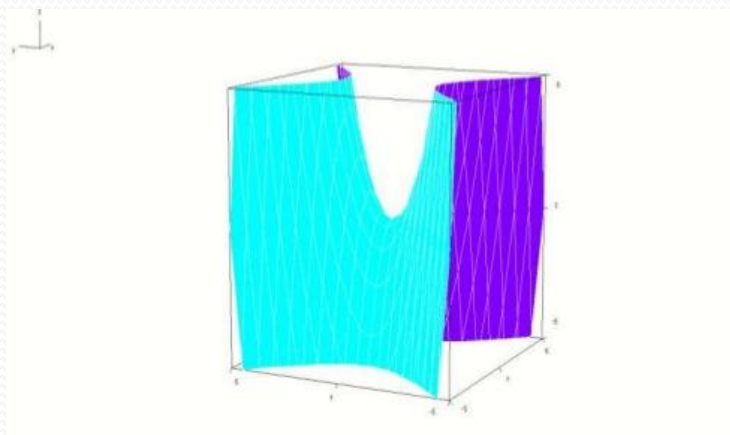


FIGURA 14.39 Si un máximo local de f ocurre en $x = a$, $y = b$, entonces las primeras derivadas parciales $f_x(a, b)$ y $f_y(a, b)$ se anulan.

Veamos qué sucede ,si consideramos la función

$$z = f(x,y) = y^2 - x^2$$

- Su gráfica es la siguiente:



- Existen las derivadas parciales, ya que
- $Z_x = -2x = 0$, entonces $x=0$
- $Z_y = 2y = 0$, entonces $y = 0$
- Punto crítico: $(0,0)$

El paraboloide hiperbólico

es la superficie de ecuación $y^2 - x^2 = z$
cuya gráfica es llamada silla de montar:
Sus trazas sobre planos horizontales
 $z = k$, son hipérbolas o dos rectas ($z = 0$).
Sus trazas sobre planos verticales paralelos
al plano xz son parábolas que abren hacia
abajo, mientras que las trazas sobre planos
verticales paralelos al plano yz son parábolas
que abren hacia arriba.

La función “*aparenta*” tener un máximo en $(0,0)$ y un mínimo en $(0,0)$, pero dado que ocurren en el mismo punto, se dice que la función no tiene extremos en el origen.

El punto es llamado punto de silla o ensilladura.

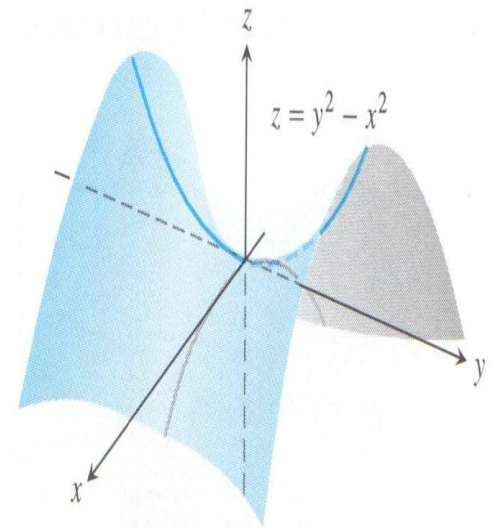


FIGURA 14.42 El origen es un punto de silla de la función $f(x, y) = y^2 - x^2$. No hay valores extremos locales (ejemplo 2).

El punto crítico siempre conduce a extremos relativos?

- Si tomamos un entorno del punto $(0,0)$ tiene puntos (x,y) que son mayores que $f(0,0)$ y otros puntos que son menores que $f(0,0)$, por lo tanto no verifican la definición de máximo ni de mínimo, por lo cual la función no tiene en $(0,0)$, ni máximo ni mínimo. Por lo que se concluye que la función no tiene extremos.
- Dicho punto es el punto silla o de ensilladura y la superficie recibe el nombre de silla de montar.
- Tal como ocurría en funciones de una variable, los puntos críticos no siempre conducen a extremos relativos.

El criterio básico para determinar extremos relativos de funciones de dos variables es el de *la segunda derivada*, el cual proporciona condiciones que garantizan el hecho de que una función tiene un extremo relativo en un punto en donde las primeras derivadas son iguales a cero

Condición suficiente para la existencia de extremos De una función de dos variables

Teorema criterio de la segunda derivada

Sea f una función de dos variables tal que f y sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas en un disco abierto $B((a, b); r)$. Suponga además que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$. Sea

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

(i) f tiene un valor mínimo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) > 0 \quad (\text{o } f_{yy}(a, b) > 0)$$

(ii) f tiene un valor máximo relativo en (a, b) si

$$D(a, b) > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(a, b) < 0 \quad (\text{o } f_{yy}(a, b) < 0)$$

(iii) $f(a, b)$ no es un extremo relativo, pero f tiene un punto silla en $(a, b, f(a, b))$ si

$$D(a, b) < 0$$

(iv) No se tiene ninguna conclusión acerca de los extremos relativos si

$$D(a, b) = 0$$

EL CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA

Si $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$, entonces la expresión para $D(a, b)$ del enunciado del criterio de la segunda derivada es el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

Este determinante, denominado **hessiano** (o **discriminante**) de la función f , proporciona un método conveniente para recordar la fórmula de $D(a, b)$.

El resultado de este determinante es

$$f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{yx}(a, b) \cdot f_{xy}(a, b)$$

$$\text{O } f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b)$$

La expresión $f_{xy}^2(a, b)$, recibe el nombre de hessiano, y se debe al matemático alemán Hesse, podemos decir, que **la condición suficiente** para que una función de 2 variables alcance un extremo relativo en (a, b) es que el determinante hessiano sea positivo en ese punto

Pasos para calcular extremos relativos

- 1) se calculan las derivadas parciales de 1er orden y se igualan a 0, quedan determinados sistemas de ecuaciones que al resolverlos dan los puntos críticos
- 2) Se calculan las derivadas parciales 2das, se forma el hessiano, y se analiza el signo del mismo en cada punto critico si es positivo hay extremos
- 3) Se analiza el signo de la derivada parcial 2da f_{xx} en los puntos seleccionados para determinar que tipo de extremos hay

4) Puede ocurrir que se verifique la condición necesaria que ambas derivadas parciales en el punto critico no existan, en este caso se debe estudiar la variación de la función en un entorno de dicho punto

5) Si el hessiano es igual a 0 se procede como en 4, se analiza la variación de la función

Ejemplo

$$Z=f(x, y) = x^2-xy+y^2+3x-2y+1$$

$$f_x(x,y) = 2x - y + 3 = 0$$

$$f_y(x,y) = -x + 2y - 2 = 0$$

La solución del sistema da como punto critico
 $(-4/3, 1/3)$

$$f_{xx} = 2 \quad f_{xx}(-4/3, 1/3) = 2$$

$$f_{yy} = 2 \quad f_{yy}(-4/3, 1/3) = 2$$

$$f_{yx} = -1$$

$$f_{xy} = -1$$

Calculando el hessiano

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \text{ hay extremos}$$

Como $f_{xx}(-4/3, 1/3) = 2 > 0$ la función tiene un mínimo en el Punto $(-4/3, 1/3)$

Ej: determine los extremos relativos de la función:

$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$$

Cálculo de los puntos críticos de la función dada:

a) Se hallan las derivadas parciales:

$$f_x(x, y) = 6x^2 + y^2 + 10x$$

$$f_y(x, y) = 2xy + 2y$$

b) Se igualan a cero las derivadas parciales para buscar puntos críticos, formando un sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{array} \right\}$$

Este es un sistema de ecuaciones
no lineales

- Resolviendo el sistema, se obtienen los puntos críticos:

$$(0,0) \quad (-5/3; 0) \quad (-1;-2) \quad \text{y} \quad (-1;2)$$

c) Se aplica el criterio de la derivada segunda, para lo cual se calcula el Hessiano:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Siendo:

$$f_{xx}(x, y) = 12x + 10$$

$$f_{xy}(x, y) = 2y$$

$$f_{yy}(x, y) = 2x + 2$$

$$f_{yx}(x, y) = 2y$$

El cálculo se hace en cada uno de los puntos críticos:

En el punto (0,0)

d) Se evalúan las derivadas segundas en el punto crítico:

$$f_{xx}(x, y) = 12.0 + 10 = 10$$

$$f_{yx}(x, y) = 2.0 = 0$$

$$f_{yy}(x, y) = 2.0 + 2 = 2$$

$$f_{xy}(x, y) = 2.0 = 0$$

Se forma el Hessiano:

$$D = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

e) Valor de la función en el punto crítico:

$$f(0,0) = 2.0^3 + 0.0^2 + 5.0^2 + 0^2 = 0$$

f) **CONCLUSIÓN:**

Con $D > 0$ y $f_{xx}(0,0) > 0$ existe un mínimo que vale cero y se da en (0,0). O bien el mínimo es el (0,0,0).

Luego se procede de igual forma con cada uno de los puntos críticos, obteniendo los resultados:

- En el $(-5/3 ; 0)$,

Con $D > 0$ y $f_{xx}(0,0) < 0$ existe un máximo.

Al evaluar la función con el punto crítico, se obtiene que el máximo es $(-5/3; 0; 125/27)$.

- En el $(-1 ; 2)$:

Con $D < 0$ existe un punto de silla en $(-1;2)$

El valor que toma la función es 3, con lo cual se obtiene que el punto silla es $(-1; 2; 3)$.

- En el $(-1; -2)$

Con $D < 0$ existe un punto de silla en $(-1; -2)$

El valor que toma la función es 3, con lo cual se obtiene que el punto silla es $(-1; -2; 3)$.

EXTREMOS ABSOLUTOS EN FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Se buscan los extremos absolutos de una función continua en regiones cerradas y acotadas:

- 1) Enumerar los puntos interiores de R donde la función puede tener extremos locales. Determinar ptos. Críticos.
- 2) Enumerar los puntos frontera de R donde la función tiene extremos locales y evaluar la función en ellos.
- 3) Buscar en ambas listas los valores extremos de f .

Habremos encontrado los extremos absolutos de f en R . Como los extremos absolutos son también locales, aparecen en las primeras listas.

Ver ejemplo 5 – pág.1031 – (Thomas)

EJEMPLO 5 Determinación de extremos absolutos

Determine los valores máximos y mínimos absolutos de

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

en la región triangular del primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$.

Solución Como f es diferenciable, los únicos lugares donde f puede asumir estos valores son los puntos interiores del triángulo (figura 14.44) donde $f_x = f_y = 0$ y los puntos en la frontera.

(a) **Puntos interiores.** Para éstos, tenemos

$$f_x = 2 - 2x = 0, \quad f_y = 2 - 2y = 0,$$

lo que da el único punto $(x, y) = (1, 1)$. El valor de f ahí es

$$f(1, 1) = 4.$$

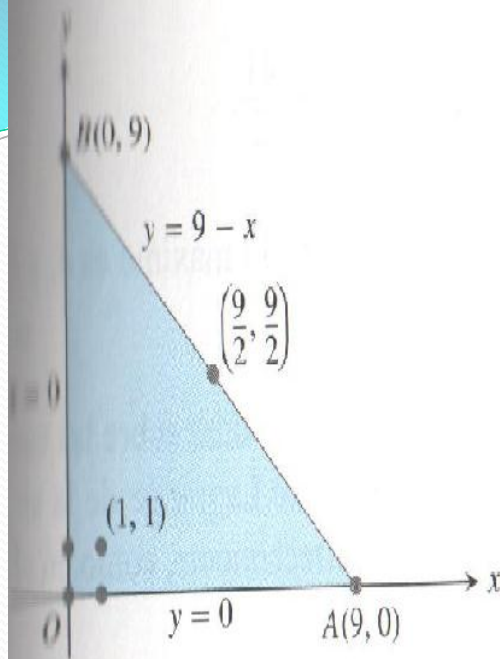


FIGURA 14.44 Esta región triangular es el dominio de la función del ejemplo 5.

(b) **Puntos frontera.** Consideramos un lado del triángulo a la vez.

(i) Sobre el segmento OA , $y = 0$. La función

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$$

puede considerarse ahora como una función de x definida en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 9$. Sus valores extremos (que conocemos del capítulo 4) pueden ocurrir en
→ los puntos extremos

$$x = 0 \quad \text{donde} \quad f(0, 0) = 2$$

$$x = 9 \quad \text{donde} \quad f(9, 0) = 2 + 18 - 81 = -61$$

→ y en los puntos interiores donde $f'(x, 0) = 2 - 2x = 0$. El único punto interior donde $f'(x, 0) = 0$ es $x = 1$, donde

$$f(x, 0) = f(1, 0) = 3.$$

(ii) En el segmento OB , $x = 0$ y

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2.$$

Por la simetría de f con respecto a x y y , y por el análisis anterior sabemos que didatos en este segmento son

$$f(0, 0) = 2, \quad f(0, 9) = -61, \quad f(0, 1) = 3.$$

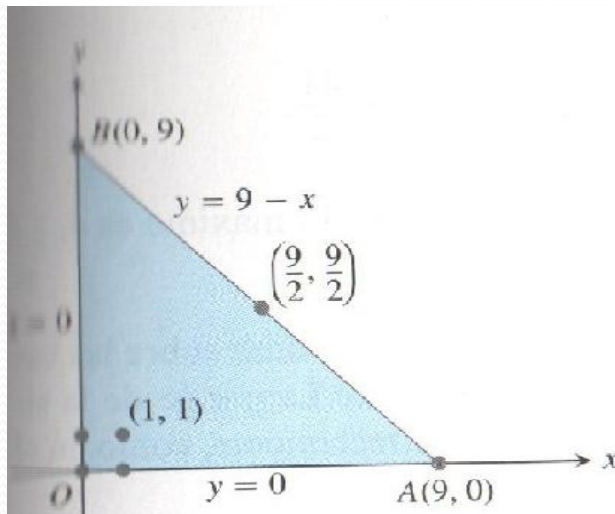


FIGURA 14.44 Esta región triangular es el dominio de la función del ejemplo 5.

(iii) Ya tomamos en cuenta los valores de f en los extremos de AB , de modo que solo necesitamos buscar en los puntos interiores de AB . Como $y = 9 - x$, tenemos

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 = -61 + 18x - 2x^2.$$

Al hacer $f'(x, 9 - x) = 18 - 4x = 0$ tenemos

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

En este valor de x ,

$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{y} \quad f(x, y) = f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}.$$

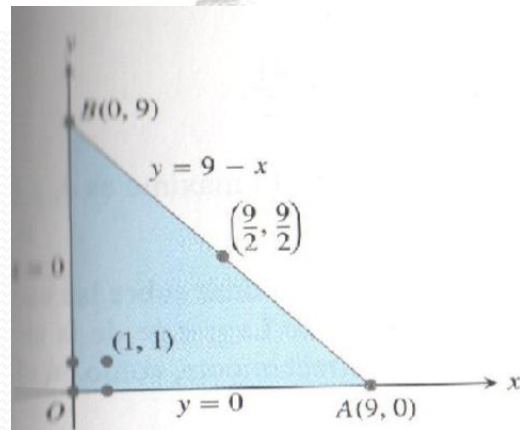


FIGURA 14.44 Esta región triangular es el dominio de la función del ejemplo 5.

Resumen de criterios de máximos y mínimos

Los valores extremos de $f(x, y)$ pueden ocurrir sólo en

- i. **puntos frontera** del dominio de f
- ii. **puntos críticos** (puntos interiores donde $f_x = f_y = 0$, o puntos donde f_x o f_y no existen).

Si las derivadas parciales de primer y segundo orden de f son continuas en un disco con centro en un punto (a, b) y $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, la naturaleza de $f(a, b)$ puede verificarse con el **criterio de la segunda derivada**:

- i. $f_{xx} < 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **máximo local**
- ii. $f_{xx} > 0$ y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **mínimo local**
- iii. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **punto de silla**
- iv. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ en $(a, b) \Rightarrow$ **el criterio no es concluyente.**