Clase 1

Sección 1.1

Definición 1.1.1 Ecuación diferencial

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (ED).

Clasificación por tipo:

Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria (EDO)**.

Ej: $\frac{dy}{dx} + 5y = e^{x}$;

$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$ <- una ED puede contener más de una variable dependiente

Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial (EDP). Por ejemplo: $\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2 u}{\vartheta y^2} = 0$

Clasificación por orden:

El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación. Por ejemplo:

$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5(\frac{dy}{dx}) - 4y = e^{x}$ es de segundo orden

Clasificación por Linealidad:

Una ecuación diferencial de n-ésimo orden se dice que es lineal si F es lineal en $y, y', \dots, y^{n}$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando la ecuación es

$a_n(x)y^{n} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ ...\ + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$ o

$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ ...\ + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

Definición 1.1.2 Solución de una EDO

Cualquier función ϕ , definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo.

INTERVALO DE DEFINICIÓN:

El intervalo I en la definición 1.1.2 también se conoce con otros nombres como son intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez, o dominio de la solución y puede ser un intervalo abierto (a, b) un intervalo cerrado $[a, \infty]$, un intervalo infinito (a, ∞), etcétera.

CURVA SOLUCIÓN:

La gráfica de una solución ϕ de una EDO se llama **curva solución.** Puesto que es una función derivable, es continua en su intervalo de definición I. Puede haber diferencia entre la gráfica de la función ϕ y la gráfica de la solución ϕ . Es decir, el dominio de la función ϕ no necesita ser igual al intervalo de definición I (o dominio) de la solución ϕ.

DEFINICIÓN 1.1.3 Solución implícita de una EDO

Se dice que una relación $G(x,y) = 0$ Es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo I, suponiendo que existe al menos una función que satisface la relación así como la ecuación diferencial en I.

Clasificación de soluciones:

Familia de soluciones: Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluciones llamado **familia de soluciones uniparamétrica.** Cuando resolvemos una ecuación diferencial de orden n, $F(x, y, y', . . . , y^n) = 0$, buscamos una **familia de soluciones n-paramétrica** $G(x, y, c1, c2, . . . , cn) = 0$.

Solución particular: Una solución de una ecuación diferencial que está libre de la elección de parámetros se llama solución particular.

Solución singular: Algunas veces una ecuación diferencial tiene una solución que no es miembro de una familia de soluciones de la ecuación, esto es, una solución que no se puede obtener usando un parámetro específico de la familia de soluciones. Esa solución extra se llama solución singular.

Sección 1.2

PVI de Primer y Segundo orden

PVI DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN El problema dado en (1) también se llama **problema con valores iniciales de *n*-ésimo orden**. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

y

$$\begin{aligned} &\textit{Resolver:} && \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ &\textit{Sujeto a:} && y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1 \end{aligned} \qquad (3)$$

EXISTENCIA Y UNICIDAD:

Al considerar un problema con valores iniciales surgen dos importantes preguntas: ¿Existe la solución del problema? Si existe la solución, ¿es única? Para el problema con valores iniciales de la ecuación (2) pedimos:

Existencia: { ¿La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ tiene soluciones?

¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto (x_0, y_0)

}

Unicidad: {¿Cuando podemos estar seguros de que hay precisamente una curva solución que pasa a través del punto (x_0, y_0)? }

TEOREMA 1.2.1 Existencia de una solución única

Sea R una región rectangular en el plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x,y)$ y $\frac{af}{ay}$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo $I_0: (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$ contenido en $[a,b]$, y una función única $y(x)$, definida en I_0 que es una solución del problema con valores iniciales

Sección 2.1

Campos direccionales:

Si evaluamos sistemáticamente a f en una malla rectangular de puntos en el plano xy y se dibuja un elemento lineal en cada punto (x, y) de la malla con pendiente $f(x,y)$, entonces al conjunto de todos estos elementos lineales se le llama **campo direccional o campo de pendientes** de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

ED DE PRIMER ORDEN AUTÓNOMAS

Una ecuación diferencial ordinaria en la que la variable independiente no aparece explícitamente se llama autónoma. Si el símbolo x denota a la variable independiente, entonces se puede escribir una ecuación diferencial autónoma de primer orden como $f(y, y^I) = 0$ o en la forma normal como $\frac{dy}{dx} = f(y)$

PUNTOS CRÍTICOS

Decimos que un número real c es un punto crítico de la ecuación diferencial autónoma si es una raíz de f, es decir, $f(c) = 0$. Un punto crítico también se llama **punto de equilibrio** o **punto estacionario.**

Si c es un punto crítico de la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(y)$, *entonces* $y(x) = c$ *es una solución constante de la ecuación diferencial autónoma.* Una solución constante $y(x) = c$ c se llama s**olución de equilibrio**

Esquema de fase de una ED autónoma:

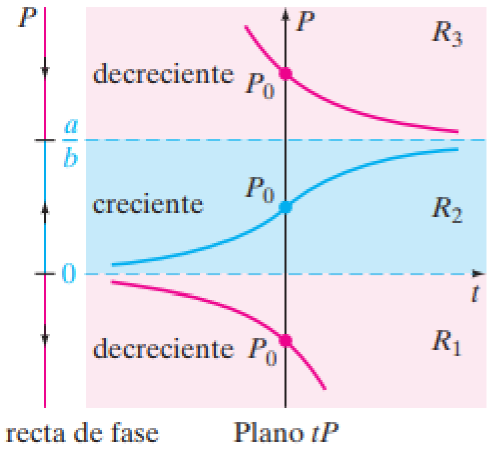


FIGURA 2.1.7 Esquema de fase y curvas solución en cada una de las tres subregiones.

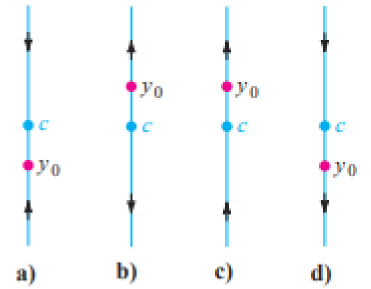


FIGURA 2.1.9 El punto crítico c es un atractor en a) y un repulsor en b) y semi-estable en c) y d).

ED AUTÓNOMAS Y CAMPOS DIRECCIONALES

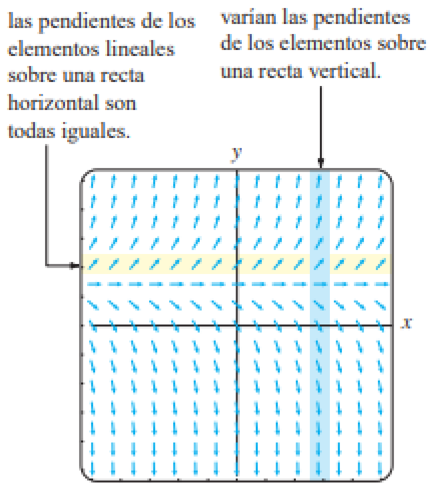


FIGURA 2.1.10 Campo direccional para una ED autónoma.

Clase 2

Sección 1.3

Sección 2.2 Variables separables

SOLUCIÓN POR INTEGRACIÓN

Considere la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Cuando f no depende de la variable y, es decir, $f(x, y) = g(x)$, la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = g(x)$ se puede resolver por integración. Si g(x) es una función continua, al integrar ambos lados de la ecuación se obtiene $y = \int g(x)\,dx + c$, donde G(x) es una antiderivada (integral indefinida) de g(x). Por ejemplo, si $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$ entonces su solución es $y = \int(1 + e^{2x})dx$

DEFINICIÓN 2.2.1 Ecuación separable

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ Se dice que es **separable** o que tiene **variables separables.**

LAS ECUACIONES AUTÓNOMAS SIEMPRE SON SEPARABLES

Metodos de solucion: separamos la ecuación en $p(y)\,dy = g(x)\,dx$ e integramos ambos miembros $\int p(y)\,dy = \int g(x)\,dx$

NOTA: NOTA No hay necesidad de emplear dos constantes cuando se integra una ecuación separable, porque si escribimos $H(y) + c1 = G(x) + c2$, entonces la diferencia c2 − c1 se puede reemplazar con una sola constante c

PÉRDIDA DE UNA SOLUCIÓN: Se debe tener cuidado al separar las variables ya que las variables que sean divisores podrían ser cero en un punto. Concretamente, si r es una raíz de la función $h(y)$, entonces sustituyendo $y = r$ en $\frac{dy}{dx}$ $g(x)h(y)$ se encuentra que ambos lados son iguales a cero; es decir, $y = r$ Es una solución constante de la ecuación diferencial. Pero después de que las variables se separan, el lado izquierdo de $\frac{dy}{h(y)} = g(x)$ está indefinido en r. Por tanto, $y = r$ podría no representar a la familia de soluciones que se ha obtenido después de la integración y simplificación. Recuerde que una solución de este tipo se llama solución singular

Sección 2.3 Ecuaciones Lineales

DEFINICIÓN 2.3.1 Ecuación lineal

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$a1(x)\frac{dy}{dx} + a0(x)y = g(x)$ (1)

Se dice que es una **ecuación lineal** en la variable dependiente y.

Se dice que la ecuación lineal es **homogénea** cuando $g(x) = 0$; si no es **no homogénea**

FORMA ESTÁNDAR: Al dividir ambos lados de la ecuación (1) entre el primer coeficiente, $a1(x)$, se obtiene una forma más útil, la forma estándar de una ecuación lineal: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ (2)

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER ORDEN:

$i)$ Ponga la ecuación lineal de la forma (1) en la forma estándar (2).

$ii)$ Identifique de la identidad de la forma estándar $P(x)$ y después determine el factor integrante $e^{\int p(x)dx}$.

$iii)$ Multiplique la forma estándar de la ecuación por el factor integrante. El lado izquierdo de la ecuación resultante es automáticamente la derivada del factor integrante y

y: $\frac{d}{dx}[e^{\int p(x)dx} y] = e^{\int p(x)dx} f(x)$

$iv)$ Integre ambos lados de esta última ecuación.

TÉRMINO TRANSITORIO: . Decimos que $y_c = ce^{-x}$ es un término transitorio, ya que $y_c \to 0$ conforme $x \to \infty$

Clase 3

Sección 2.4

Ecuación Exacta Definición 2.4.1

Una expresión diferencial $M(x, y)\, dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano xy si ésta corresponde a la diferencial de alguna función $f(x, y)$ definida en R. Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$M(x, y)\, dx + N(x,y)dy = 0$$

Se dice que es una ecuación exacta si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

Teorema 2.4.1 Criterio para una diferencial exacta

Sean $M(x, y)\, dx$ y $N(x,y)dy$ continuas y que tienen primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular R definida por

$a < x < b$, $c < y < d$ Entonces una condición necesaria y suficiente para que $M(x, y)\, dx + N(x,y)dy$ sea una diferencial exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Factor integrante:

Si conseguimos una función $\mu(x,y)$ no nula tal que al multiplicar la ED por $\mu(x,y)$ transformamos

$$\mu(x,y) * M(x,y)dx + \mu(x,y) * N(x,y)dy = 0$$

en exacta, entonces diremos que $\mu(x,y)$ es un **FACTOR INTEGRANTE de la ecuación original**

NOTA: Las ecuaciones lineales no son exactas

Para resolver:

1: Nos fijamos si es exacta, si no lo es buscamos el factor integrante con la fórmula $Fac = \frac{M_y - N_x}{N}$ o $\frac{N_x - M_y}{M}$ usamos la que dependa de una sola variable y multiplicamos toda la función por el factor integrante $u = e^{\int fac}$

2: la parte que tenga dx la integramos respecto a dx y sumamos al resultado el término $h(y)$

3: a ese resultado lo derivamos con respecto a y quedandonos $h'(y)$

4: igualamos el resultado que contiene $h'(y)$ con la parte de la función que contiene dy y despejamos $h'(y)$

5: integramos $h'(y)$ para obtener $h(y)$ y reemplazamos en la primer ecuación que aparece $h(y)$ como incógnita

Sección 2.5

ECUACIONES HOMOGENEAS: Si una función f tiene la propiedad $f(tx,ty) = t^{\alpha}f(x,y)$ para algún número real α, entonces se dice que es una función homogénea de grado α.

Por ejemplo $f(x,y) = x^3 + y^3$ es una función homogénea de grado 3, ya que $f(tx,ty) = (tx)^3 + (ty)^3 = t^3 * (x^3 + y^3) = t^3 f(x,y)$

Ecuaciones que se resuelven con alguna sustitución:

1)Ecuaciones homogéneas:

Una ED homogénea, siempre puede escribirse de la forma

$\frac{dy}{dx} = F(\frac{y}{x})$

Por ello la sustitución $u = (\frac{y}{x})$ la convierte en una ED de variables separables

Ecuacion de Bernoulli:

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$$

donde n es cualquier número real, se llama ecuación de Bernoulli. Observe que para $n = 0$ y $n = 1$, la ecuación es lineal. Para $n \neq 0$ y $n \neq 1$ la sustitución $u = y^{1-n}$ reduce cualquier ecuación de la forma de Bernoulli a una ecuación lineal

REDUCCIÓN A SEPARACIÓN DE VARIABLES:

Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(Ax + By + C)$$

Se puede siempre reducir a una ecuación con variables separables por medio de la sustitución $u = Ax + By + C$ $B \neq 0$

Sección 3.1 y Sección 3.2

Dinámica poblacional: $\frac{dP}{dt} = k * P$ (lineal)

$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$ (no lineal)

crecimiento poblacional $\rightarrow k > 0$

decrecimiento poblacional $\rightarrow k < 0$

Decaimiento radioactivo: $\frac{dA}{dt} = k * A$ (lineal)

$A(t) \rightarrow$ *cantidad de sustancia A a tiempo t*

$k < 0$

Ley de enfriamiento y calentamiento de newton:

$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$ (lineal)

$T(t) \rightarrow$ *temperatura a t*

en enfriamiento y calentamiento, si $Tm = cte,\ k < 0$

Propagación de una enfermedad

$\frac{dx}{dt} = kxy$

$x(t) \rightarrow$ *personas enfermas* $\rightarrow x + y = n + 1 \rightarrow y = n + 1 - x$

donde n es la población de n personas

$y(t) \rightarrow$ *personas no enfermas*

$\frac{dx}{dt} = kx(n + 1 - x)$

Reacciones químicas: $\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x)$ (*no lineal variables separables*)

$\frac{dx}{dt} = k(a - \frac{M}{M+N}x)(b - \frac{N}{M+N}x)$

$a \rightarrow g\ iniciales\ de\ A \quad b \rightarrow\ g\ iniciales\ de\ B \quad M \rightarrow partes\ de\ A\ formadas$
$N \rightarrow partes\ de\ B\ formadas$
$x(t) \rightarrow g\ de\ la\ sustancia\ C\ formada\ en\ t$

Mezclas

$\frac{dA}{dt} = R_{entrada} - R_{salida}$
$A(t) \rightarrow g\ de\ sal$
$L = líquido\ en\ el\ tanque\ + (R_{entrada} * t) - (R_{salida} * t)$

Drenado de un tanque

$\frac{dV}{dt} =- Ah\sqrt{2gh}$

$Ah \rightarrow área\ del\ agujero \quad \sqrt{2gh} \rightarrow rapidez\ de\ salida\ del\ agua \quad V(t) \rightarrow volumen\ en\ el\ tanque\ T$
$\frac{dh}{dt} =- \frac{Ah}{Aw}\sqrt{2gh}$
$Aw \rightarrow área\ cte.\ de\ la\ superficie\ superior$
$h(t) \rightarrow altura\ del\ agua$

Circuito en serie

$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \quad ; \quad R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)\ ;\ i = \frac{dq}{dt}$

Cuerpos en caída

$m\frac{d^2s}{dt^2} =- mg$

s=posición ; $\frac{ds}{dt} = velocidad$; $\frac{d^2s}{dt} = aceleración$

Cuerpos en caída y resistencia del aire

$$m\frac{dV}{dt} = mg - kv \quad \text{(lineal)}$$

$(fuerza = m * a) \quad (peso) \quad (fricción)$

$$m\frac{dV}{dt} = mg - kv^2 \quad \text{(lineal)}$$

$(fuerza = m * a) \quad (peso) \quad (fricción)$

Ecuación logística

$\frac{dP}{dt} = P(a - bP)$ (no lineal)
$\frac{dP}{dt} = P(a - b * ln(P))$ (Gompertz)

Clase 4

Sección 4.1 Teoría preliminar: Ecuaciones lineales

PVI DE N-ÉSIMO ORDEN

$resuelva: a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ . \ . \ . \ + \ a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y \ = \ g(x)$

$sujeta\, a\colon\ y(x_0) = y_0\,, y'(x_0) = y_1, \ . \ . \ . \ , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Teorema 4.1.1 Existencia de una solución únicas

Sean $a_n(x), a_{n-1}(x), \ . \ . \ . \ , a_1(x),\ a_0(x)\ y\ g(x)$ continuas en un intervalo I, y sea $a_n(x)\ \neq\ 0$ para toda x en este intervalo. Si $x = x_0$ es cualquier punto en este intervalo, entonces una solución y(x) del problema con valores iniciales existe en el intervalo y es única

PROBLEMA DE VALORES EN LA FRONTERA (PVF)

Un PVF puede tener muchas, una o ninguna solucion aun cumpliendose las hipotesis del teorema 4.1.1 para los PVI

$resuelva: a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y \ = \ g(x)$

$sujeta\, a\colon\ y(a) \ = \ y_0,\ y(b) = y_1$

se llama **problema de valores en la frontera.** Los valores prescritos $y(a) \ = \ y_0,\ y(b) = y_1$ se llaman **condiciones en la frontera**

4.1.2 Ecuaciones Homogéneas

Una ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden de la forma

$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ . \ . \ . \ + \ a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y \ = \ 0$ (6)

Se dice que ES HOMOGENEA.

Mientras que

$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ . \ . \ . \ + \ a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y \ = \ g(x)$ (7) con $g(x) \neq 0$ se dice que es NO HOMOGÉNEA

Nueva notación usando el operador diferencial:

$D^i\ con\ i \ = \ 1, \ ...\ , n\ representa\ la\ derivada\ i - \acute{e}sima\ respecto\ de\ x\ D^i = \frac{d^i}{dx^i}$

El operador D^i es lineal ya que $D^i(f + g) \ = \ D^i f \ + \ D^i g$ y $D^i(\alpha f) = \alpha f$

OPERADORES DIFERENCIALES

Se define un operador diferencial de n-ésimo orden u operador polinomial como

$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ . \ . \ . \ + \ a_1(x)D + a_0(x)$ (8)

donde $a_n(x), a_{n-1}(x), \ ...\ ,\ a_1(x),\ a_0(x)$ son funciones continuas en el intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I

Abreviamos $L(y) = 0$ y $L(y) = g(x)$ a las ecuaciones homogéneas y no homogéneas

Como consecuencia de que D^i es lineal, el operador diferencial L es lineal

El conjunto de todas las soluciones de L(y)=g(x) constituyen una familia n-paramétricas S(x,y,c1,c2, … ,cn)=0 SOLUCIÓN GENERAL

Toda solución $L(y) = g(x)$ está dada por $Y_H + Y_p$ donde

Y_H es una solución arbitraria de $L(y) = 0$

Y_p es una solución particular de $L(y) = g(x)$

Teorema 4.1.2 Principio de superposición; ecuaciones homogéneas

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluciones de la ecuación homogénea de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces la combinación lineal

$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ky_k(x)$

donde las c_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución del intervalo. (no se cumple en EDL no homogéneas ni ED no lineales)

Demo: Se demuestra el caso k=2. Sea L el operador diferencial que se definió en (8) y sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Si se define $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ entonces por linealidad se tiene que

$L(y) = L\{c_1y_1(x) + c_2y_2(x)\} = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1 * 0 + c_2 * 0 = 0$

La solución trivial siempre es solución para homogéneas lineales

Definición 4.1.1 Dependencia e independencia lineal

Se dice que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas cero, tales que $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0$ para toda x en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

Definicion 4.1.2 Wronskiano

DEFINICIÓN 4.1.2 Wronskiano

Suponga que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ tiene al menos $n - 1$ derivadas. El determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

donde las primas denotan derivadas, se llama el **Wronskiano** de las funciones.

Wronskiano de las SOLUCIONES $= 0$, *son LINEALMENTE DEPENDIENTES*

Wronskiano $\neq 0$, *las soluciones son LINEALMENTE INDEPENDIENTES*

Teorema 4.1.3 Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ n soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea $L(y) = 0$ de n-ésimo orden en un intervalo I. Entonces las 3 condiciones siguientes son equivalentes:

a) El conjunto $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ es linealmente independiente en I

b) $W(x) = W\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\} \neq 0$ para todo x en el intervalo.

c) $W(x_0) \neq 0$ para algún x_0 en el intervalo

Definición 4.1.3 Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en un intervalo I es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo

Teorema 4.1.4 Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en un intervalo

Teorema 4.1.5 Solución general: ecuaciones homogéneas

Sea $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden (6) en el intervalo I. Entonces la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$

donde c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ son constantes arbitrarias

4.1.3 ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

Teorema 4.1.6 Solución general; Ecuaciones no homogéneas.
Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (7) en un intervalo I, y sea $y_1, y_2, \dots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada (6) en I. Entonces la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p$

donde las c_i, $i = 1, 2, \dots, n$ son constantes arbitrarias.

DEMOSTRACIÓN Sea L el operador diferencial definido en (8) y sean $Y(x)$ y $y_p(x)$ soluciones particulares de la ecuación no homogénea $L(y) = g(x)$. Si se define $u(x) = Y(x) - y_p(x)$, entonces por la linealidad de L se tiene

$$L(u) = L\{Y(x) - y_p(x)\} = L(Y(x)) - L(y_p(x)) = g(x) - g(x) = 0.$$

Esto demuestra que $u(x)$ es una solución de la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Así por el teorema 4.1.5, $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$, y así

$$Y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

o

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x). \quad \blacksquare$$

$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x)$ (8)

Función complementaria:

Vemos en el teorema 4.1.6 que la solución general de una ecuación lineal no homogénea está compuesta por la suma de dos funciones:

$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) + y_p = y_c(x) + y_p(x)$.

La combinación lineal $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$, que es la solución general de (6), se llama **función complementaria** para la ecuación (7).

La solución general de la ecuación no homogénea es entonces

$y = \textit{función complementaria} + \textit{cualquier solución particular} = y_c + y_p$

Teorema 4.1.7 Principio de superposición; ecuaciones no homogéneas
Sean $y_{p1}, y_{p2}, \dots, y_{pk}$ k soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (7) en un intervalo I que corresponde, a su vez, a k funciones diferentes $g_1, g_2, \dots, g_k$. Es decir, se supone que y_{pi} denota una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente

$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ (12)

$donde\ i = 1, 2, \dots, k$. Entonces $y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \dots + y_{pk}(x)$ (13)

es una solución particular de

$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_k(x)$

Clase 5

Sección 4.2 Reducción de orden

REDUCCIÓN DE ORDEN:

Suponga que y_1 denota una solución no trivial de

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

y que y_1 se define en un intervalo I. Se busca una segunda solución y_2 tal que y_1 y y_2 ***sean un conjunto linealmente independiente en I.***

La función $u(x)$ se determina al sustituir $y_2(x) = u(x) * y_1(x)$ u(x)y1 (x) en la ecuación diferencial dada. Este método se llama **reducción de orden** porque debemos resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden para encontrar a u.

con $u(x)$ NO constante

Entonces necesito $\{y_1(x); y_2(x)\}$ para resolver, supongamos que se conoce $y_1(x)$ una solución trivial de la ED, la solución buscada es $y_2(x) = u(x) * y_1(x)$

FÓRMULA PARA RESOLVER EJERCICIOS de la forma

$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

$$y_2 = y_1(x) * \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2} dx$$

Sección 4.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Ecuación auxiliar:

$ay'' + by' + cy = 0$ (2) donde a y b son constantes. Si se intenta encontrar una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces después de sustituir $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$, la ecuación se convierte en

$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$ o $e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$, la única forma de satisfacer esta ecuación es cuando $am^2 + bm + c = 0$ que es la **ecuación auxiliar** de (2)

Hay tres formas de resolver la ecuación auxiliar

- $m_1\ y\ m_2\ reales\ y\ distintas\ (b^2 - 4ac\ > 0)$
- $m_1\ y\ m_2\ reales\ e\ iguales\ (b^2 - 4ac\ = 0)$
- $m_1\ y\ m_2\ reales\ y\ distintas\ (b^2 - 4ac < 0)$

CASO 1: RAÍCES REALES Y DISTINTAS

$y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = e^{m_2x}$ vemos que estas funciones son LI en $(-\infty, \infty)$ y por tanto forman un conjunto fundamental. Se deduce que la solución general de (2) en este intervalo es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}$$

CASO 2: RAÍCES REALES REPETIDAS

Cuando $m_1 = m_2$ necesariamente se obtiene sólo una solución exponencial $y_1 = e^{m_1x}$

$y_2 = e^{m_1x} * \int \frac{e^{2m_1x}}{e^{2m_1x}}dx = e^{m_1x} * \int dx = xe^{m_1x}$ entonces la solución general es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}$$

CASO 3: RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS

$$y = c_1e^{\alpha x}cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}sen(\beta x) = e^{\alpha x}(c_1cos(\beta x) + c_2sen(\beta x))$$

ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR:

Para resolver una ecuación diferencial de n-ésimo orden donde a_i, $i = 0, 1, \dots, n$ son constantes reales, se debe resolver una ecuación polinomial de n-ésimo grado

$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \dots + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0$

Si todas las raíces son reales y distintas entonces la solución general es

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \dots + c_ne^{m_nx}$$

y la solución general debe contener la combinación lineal

$$c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x} + c_3x^2e^{m_1x} + \dots + c_kx^{k-1}e^{m_1x}$$

Clase 6:

Teorema de la 4.1

Teorema 4.1.7 Principio de superposición; ecuaciones no homogéneas

Sean $y_{p1}, y_{p2}, \ldots, y_{pk}$ k soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal no homogénea de n-ésimo orden (7) en un intervalo I que corresponde, a su vez, a k funciones diferentes $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Es decir, se supone que y_{pi} denota una solución particular de la ecuación diferencial correspondiente

$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$ (12)

$donde\ i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces $y_p = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \ldots + y_{pk}(x)$ (13)

es una solución particular de

$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_k(x)$

Sección 4.4 Coeficientes indeterminados: Método de superposición

Es solo aplicable cuando:

*El operador diferencial L debe ser de coeficientes constantes

*El lado derecho $g(x)$ debe ser una Combinación lineal de:

- $funciones\ exponenciales\ e^{\alpha x}$
- $funciones\ polinómicas\ P_n(x)$
- $funciones\ con\ senos\ y\ cosenos\ sen(\beta x)\ cos(\beta x)\ o\ una\ CL\ entre\ estos$

Caso 1: $g(x) = P_n(x)$

$y_p = A_0 + A1x + \ldots + A_n x^n$ donde los coeficientes A_i deben determinarse. Se sustituye y_p en la ED y agrupando términos semejantes se forma un sistema de ecuaciones con estos coeficientes de incógnita

Caso 2: $g(x) = e^{\alpha x} * P_n(x)$

$y_p = e^{\alpha x}(A_0 + A1x + \ldots + A_n x^n)$ donde los coeficientes A_i deben determinarse.

Caso 3: $g(x) = sen(\beta x) * P_n(x)\ o\ g(x) = cos(\beta x) * P_n(x)$

$y_p = sen(\beta x) * (A_0 + A1x + \ldots + A_n x^n) + cos(\beta x) * (B_0 + B1x + \ldots + B_n x^n)$

Caso 4: $g(x) = e^{\alpha x} * P_n(x) * sen(\beta x)\ o\ g(x) = e^{\alpha x} * P_n(x) * cos(\beta x)$

NOTA: Tener en cuenta que la solución no puede estar incluida en y_c en caso de estar incluida, lo que tenemos que hacer es multiplicar

y_p por x tantas veces sea necesario para que no aparezca ninguna solución de y_c

TABLA DE SOLUCIONES PARTICULARES

TABLA 4.1 Soluciones particulares de prueba

$g(x)$	Forma de y_p
1. 1 (cualquier constante)	A
2. $5x + 7$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + E$
5. sen $4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
6. cos $4x$	$A \cos 4x + B \operatorname{sen} 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9x - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. e^{3x} sen $4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \operatorname{sen} 4x$
11. $5x^2$ sen $4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x + (Ex^2 + Fx + G) \operatorname{sen} 4x$
12. xe^{3x} cos $4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + E)e^{3x} \operatorname{sen} 4x$

Sección 4.6 Variación de parámetros

- No hay restricciones en la forma $a_i(x)$ en el operador diferencial L
- No hay restricciones en el lado derecho $g(x)$
- Pero existe una restricción: se necesita conocer un conjunto fundamental de $L_y = 0$

se busca una solución de la forma $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ donde y_1 e y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en I de la forma homogénea.
Realizando pasos algebraicos llegamos a la expresión

$$\frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x) \quad (4)$$

$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$
$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$ sist de ecuaciones con u_1' , u_2' de incógnitas

Puede expresarse en términos de determinantes

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W}, \tag{5}$$

donde
$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Las funciones u_1, u_2 se encuentran integrando los resultados de (5). El determinante W se reconoce como el Wronskiano de y_1 e y_2. Por la independencia lineal de y_1 e y_2 en I, se sabe que $W(y1\,(x),\, y2\,(x)) \neq 0$ para toda x en el intervalo

RESUMEN DEL MÉTODO: Para resolver $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$, primero se encuentra la función complementaria $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ y luego se calcula el Wronskiano $W(y1\,(x),\, y2\,(x))$. Dividiendo entre a_2, se escribe la ecuación en la forma estándar $y'' + Py' + Qy = f(x)$ para determinar $f(x)$. Se encuentra u_1, u_2 integrando $u_1' = \frac{W_1}{W}$ y $u_2' = \frac{W_2}{W}$, donde W_1 y W_2 se definen como en (6). Una solución particular es $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ Entonces la solución general de la ecuación es $y = y_c + y_p$

CONSTANTES DE INTEGRACIÓN Cuando se calculan las integrales indefinidas de u_1', u_2', no es necesario introducir algunas constantes. Esto es porque

$$\begin{aligned} y = y_c + y_p &= y_1 c_1 + y_2 c_2 + (u_1 + a_1) y_1 + (u_2 + b_1) y_2 \\ &= (c_1 + a_1) y_1 + (c_2 + b_1) y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2 \end{aligned}$$

Seccion 4.7 Ecuación de Cauchy-Euler

Ecuación de Cauchy-Euler

$$a_n(x) * x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) * x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x) * x \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

Nota: Centramos en encontrar soluciones generales definidas en $(0, \infty)$. Las soluciones en el intervalo $(-\infty, 0)$ se obtienen al sustituir t=-x en la ecuación diferencial

Ecuación auxiliar

$y = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una solución de la ecuación auxiliar

$am(m-1) + bm + c = 0$ o $am^2 + (b-a)m + c = 0$

CASO 1: RAÍCES REALES Y DISTINTAS

$y_1 = x^{m_1}$, $y_2 = x^{m_2}$ forman un conjunto fundamental de soluciones por lo tanto la solución general es:

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}$$

CASO 2: RAÍCES REALES REPETIDAS

Se llega aplicando $y = c_1 x^{m_1}$ **entonces**

$$y_2 = y_1(x) * \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2} dx = c_2 x^{m_1} ln(x) \text{ y así sucesivamente incrementando el exponente de } ln(x)$$

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} ln(x) + c_3 x^{m_1} ln(x^2) + \ldots + c_n x^{m_2} ln(x^{n-1})$$

CASO 3: RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS

$$y = x^{\alpha}[c_1 cos(\beta \, ln(x)) + c_2 sen(\beta \, ln(x))]$$

Reducción a coeficientes constantes

La ecuación de Cauchy-Euler siempre se puede escribir de nuevo como una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes sustituyendo $x = e^t$. La idea es resolver la nueva ecuación diferencial en términos de la variable t, usando los métodos de las secciones anteriores y una vez obtenida la solución general, sustituir nuevamente $t = ln(x)$.

Caso de ecuacion no homogenea:

En el caso de que la ecuación de Cauchy-Euler no fuese homogénea primero encontramos y_c realizando los pasos anteriores y para encontrar y_p utilizamos el metodo de variacion de parametros

Soluciones en $(-\infty, 0)$:
Para encontrar soluciones de Cauchy-Euler en el intervalo $(-\infty, 0)$ usamos $t = -x$

Conclusión: $y = |x|$ $\{x^m\ ;\ x > 0$
$\{(-x)^m\ ;\ x < 0$

Sección 5.1 Modelos lineales: problemas con valores iniciales

5.1.1 Sistemas resorte/masa: movimiento libre no amortiguado

ED DE UN MOVIMIENTO LIBRE NO AMORTIGUADO:

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ (2)

donde $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Se dice que la ecuación 2 describe el movimiento armónico simple o movimiento libre no amortiguado

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO:
para resolver la ecuación (2) se observa la solución de su ecuación auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$, entonces la solución general de (2) es:
$x(t) = c_1 cos(\omega t) + c_2 sen(\omega t)$ (3)

El periodo descrito por la ecuación (3) es $T = \frac{2\pi}{\omega}$

La frecuencia de movimiento es $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

El número $\omega = \frac{\sqrt{k}}{m}$ se llama frecuencia angular

FORMA ALTERNATIVA DE $X(t)$:
$x(t) = Asen(\omega t + \phi)$

donde $A = \sqrt{(c_1)^2 + (c_2)^2}$ es la amplitud y ϕ es un ángulo de fase definido por

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{c_1}{A} \\ \cos\phi &= \frac{c_2}{A} \end{aligned}\right\} \tan\phi = \frac{c_1}{c_2}.$$

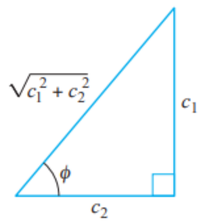


FIGURA 5.1.3 Una relación entre $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ y el ángulo de fase ϕ.

sistemas con constante de resorte variables

5.1.2 Sistemas resorte/masa: movimiento libre amortiguado

ED DE UN MOVIMIENTO LIBRE AMORTIGUADO:

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ donde $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ $\omega^2 = \frac{k}{m}$

CASO 1: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$

en este caso el sistema está sobreamortiguado

$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}t})$

CASO 2: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$

este sistema está críticamente amortiguado

$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 + c_2 t)$

CASO 3: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$

el sistema está subamortiguado

$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t) + c_2 sen(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t))$

FORMA ALTERNATIVA DE $X(t)$:

se puede escribir cualquier solución

$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t) + c_2 sen(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t))$ en la forma alternativa

$x(t) = Ae^{-\lambda t} sen(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t) + \phi$

5.1.3 SISTEMAS RESORTE/MASA: MOVIMIENTO FORZADO

ED DE MOVIMIENTO FORZADO CON AMORTIGUAMIENTO

$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t)$

donde $F(t) = \frac{f(t)}{m}$ y $2\lambda = \frac{\beta}{m}$; $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Términos transitorio y de estado estable:

$x_c(t) = termino\ transitorio$

$x_p(t) = término\ de\ estado\ estable$

Resonancia pura: En ausencia de una fuerza de amortiguación no habrá término transitorio en la solución del problema. Además, veremos que la aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana, o igual, a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un problema serio en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

5.1.4 CIRCUITO EN SERIE ANÁLOGO

$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$

Si $E(t) = 0$ se dice que las vibraciones eléctricas del circuito estan libres
Se dice que el circuito es:
sobreamortiguado si $R^2 - \frac{4L}{C} > 0$
críticamente amortiguado si $R^2 - \frac{4L}{C} = 0$
subamortiguado si $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$

TERMINAR

Sección 6.1 Repaso de series de potencias

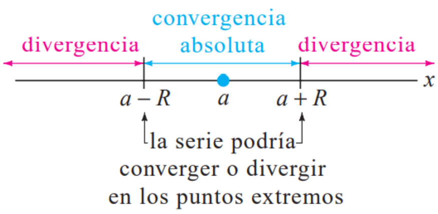
$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + ...$ serie de potencias centrada en a

- Convergencia: Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ es convergente en un valor especificado de x si el $\lim_{N\to\infty} S_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ existe. Si el limite no existe en x, se dice que la serie diverge
- Intervalo de convergencia; El intervalo de convergencia es el conjunto de todos los números reales x para los que converge la serie.
- Radio de convergencia:a Toda serie de potencias tiene un radio de convergencia R. Si $R > 0$, entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ converge para $|x-a| < R$ y diverge para $|x-a| > R$. Si la serie converge sólo en su centro a, entonces $R = 0$. Si la serie converge para toda x, entonces se escribe $R = \infty$.

- Convergencia absoluta: si x es un número en el intervalo de convergencia y no es un extremo del intervalo, entonces la serie de valores absolutos $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(x-a)^n|$ converge
- Prueba de la razón: La convergencia de una serie de potencias suele determinarse mediante el criterio de la razon. Suponga que $C_n \neq 0$ para toda n y que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}(x-a)^{n+1}}{C_n(x-a)^n}\right| = |x-a| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = L$$

Si L<1 la serie converge absolutamente; si L>1 la serie diverge y su L=1, el criterio no es concluyente



Si L<1 y $L \neq 0$, entonces $R = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|}$

Si L=0, entonces R=∞

Si L=∞, enonces R=0

- Una serie de potencias define una función: Una serie de potencias define una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Si el radio de convergencia es $R > 0$, entonces f es continua, derivable e integrable en el intervalo $(a-R, a+R)$. Además, $f'(x)$ y $\int f(x)dx$ se encuentran derivando e integrando término a término

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} C_n n(n-1)x^{n-2}$$

- Propiedad de identidad: Si $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n = 0$, $R > 0$ para los números x en el intervalo de convergencia, entonces $C_n = 0$ para toda n

- Analítica en un punto: Una función f es analítica en un punto a si se puede representar mediante una serie de potencias en x-a con un radio positivo o infinito de convergencia.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots, \qquad \text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

6.1.2 Soluciones en series de potencias

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ (5)$$
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \ (6)$$

Definición 6.1.1 Puntos ordinarios y singulares
Se dice que un punto x_0 es un punto ordinario de la ecuación diferencial (5) si tanto $P(x)$ como $Q(x)$ en la forma estándar (6) son analíticas en x_0 . Se dice que un punto que no es punto ordinario es un punto singular de la ecuación.

Coeficientes polinomiales: $x = x_0$ es un punto ordinario de (5) si $a_2(x_0) \neq 0$ mientras que $x = x_0$ es un punto singular de (5) si $a_2(x_0) = 0$

Teorema 6.1.1 Existencia de soluciones en serie de potencias
Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial (5), siempre es posible encontrar dos soluciones linealmente independientes en la forma de una serie de potencias centrada en x_0, es decir, $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$. Una solución en serie converge por lo menos en un intervalo definido por $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia desde x_0 al punto singular más cercano.

Toda solucion en serie con esa forma, converge por lo menos en el intervalo definido por $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia entre x_0 y el punto singular mas cercano (real o imaginario)

Una solucion de la forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n$ es una siolucion respecto a un punto odinario x_0. La distancia R en el teorema 6.1.1 es el valor minimo o limite inferior del radio de convergencia de las soluciones en seria de la ecuacion diferencial respecto a x_0

Sección 6.2 Soluciones en torno a puntos singulares

Un punto singular x_0 de una ecuación diferencial lineal

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \ (1)$$

Se clasifica más bien como regular o irregular. La clasificación de nuevo depende de las funciones P y Q en la forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \ (2)$$

DEFINICIÓN 6.2.1 Puntos singulares regulares e irregulares
Se dice que un punto singular x_0 es un punto singular regular de la ecuación diferencial (1) si las funciones $p(x) = (x - x_0) * P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2 * Q(x)$ son analíticas en x_0 . Un punto singular que no es regular es un punto singular irregular de la ecuación.

Si $x - x_0$ aparece a lo más a la primera potencia en el denominador de $P(x)$ y a lo más a la segunda potencia en el denominador de $Q(x)$, entonces $x = x_0$ es un punto singular regular

TEOREMA 6.2.1 Teorema de Frobenius
Si $x = x_0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial (1), entonces existe al menos una solución de la forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^{n+r} \quad (4)$$

donde el número r es una constante por determinar. La serie converge por lo menos en algún intervalo $0 < x - x_0 < R$

Ecuación indicial: SIEMPRE LA QUE ACOMAPÑA EL C_k MENOR
Si $x = x_0$ es Punto singular regular de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ la Ecuación indicial de x_0 es $r * (r - 1) + p_0 * r + q_0 = 0$
donde $p_0 = \lim_{x \to \infty} (x - x_0) * P(x)$

$$q_0 = \lim_{x \to \infty} (x - x_0)^2 * Q(x)$$

TRES CASOS:
CASO 1: Si $r_1 y r_2$ son distintas y la diferencia $r_1 - r_2$ no es un entero positivo, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1) de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \ , C_0 \neq 0, \ y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n+r2}, \ b_0 \neq 0$$

CASO 2: Si $r_1 y r_2$ son distintas y la diferencia $r_1 - r_2$ es un entero positivo, entonces existen dos soluciones de la ecuación (1) linealmente independientes de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \ , C_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = y_1(x)ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r}$$

CASO III: Si $r_1 y\ r_2$ son iguales, entonces existen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (1) de la forma

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1} \quad , C_0 \neq 0$$

$$y_2(x) = y_1(x)ln(x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1}$$

Seccion 7.1 Definicion de la transformada de Laplace

DEFINICIÓN 7.1.1 Transformada de Laplace
Sea f una función definida para t≥0. Entonces se dice que la integral

$$L(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

es la transformada de Laplace de f, siempre que la integral converja

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE $L\{f(t)\}$
Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de {f(t)} son que f sea continua por tramos en [0,∞) y que f sea de orden exponencial para t > T

DEFINICIÓN 7.1.2 Orden exponencial Se dice que f es de orden exponencial c si existen constantes c, M > 0 y T > 0 tales que
$|f(t)| \leq M * e^{ct}$para toda t > T

TEOREMA 7.1.2 Condiciones suficientes para la existencia
Si f es una función continua por tramos en [0,∞) y de orden exponencial c, entonces $L\{f(t)\}$ existe para s>c

DEMOSTRACIÓN Por la propiedad aditiva del intervalo de integrales definidas podemos escribir

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\, dt = I_1 + I_2.$$

La integral I_1 existe ya que se puede escribir como la suma de integrales en los intervalos en los que $e^{-st}f(t)$ es continua. Ahora puesto que f es de orden exponencial, existen constantes c, $M > 0$, $T > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t > T$. Entonces podemos escribir

$$|I_2| \leq \int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt \leq M \int_T^\infty e^{-st} e^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{-(s-c)t} dt = M \frac{e^{-(s-c)T}}{s - c}$$

para $s > c$. Puesto que $\int_T^\infty Me^{-(s-c)t}\, dt$ converge, la integral $\int_T^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt$ converge por la prueba de comparación para integrales impropias. Esto, a su vez, significa que I_2 existe para $s > c$. La existencia de I_1 e I_2 implica que existe $\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ para $s > c$. ■

TEOREMA 7.1.3 Comportamiento de F(s) conforme s :
Si f es continua por partes en $(0,\infty)$ y de orden exponencial y $F(s) = L\{f(t)\}$, entonces el $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

Sección 7.2 Transformadas inversas y transformadas de derivadas

TEOREMA 7.2.2 Transformada de una derivada Si $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ son continuas en $[0,\infty)$ y son de orden exponencial y si $f^n(t)$ es continua por tramos en $[0,\infty)$, entonces

$$L\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

donde $F(s) = L\{f(t)\}$

Seccion 7.3 PROPIEDADES OPERACIONALES I

TEOREMA 7.3.1 Primer teorema de traslación
Si $L\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces
$L\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$

Para enfatizar, a
veces es útil usar el simbolismo
$L\{e^{at} f(t)\} = L\{f(t)\}|_{s\to s-a}$

FORMA INVERSA DEL TEOREMA 7.3.1

$L^{-1}\{F(s-a)\} = L^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at}f(t)$ donde $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$

DEFINICIÓN 7.3.1 Función escalón unitario

La función escalón unitario $U(t-a)$ se define como

$$U(t-a) = \begin{cases} 0\ , & 0 \le t < a \\ 1\ , & t \ge a \end{cases}$$

PARA TRANSFORMAR UNA FUNCIÓN ESCALÓN UNITARIO:

$f(t) = \{\, g(t)\ \ 0 \le t < a$

$\quad = \{h(t)\ \ a \le t < b$

$\quad = \{k(t)\ \ a \ge t$

$f(t) = g(t) + U(t-a)[h(t) - g(t)] + U(t-b)[k(t) - h(t)]$

TEOREMA 7.3.2 Segundo teorema de traslación

Si $F(s) = L\{f(t)\}$, y a > 0, entonces

$L\{f(t-a) * U(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

splazamiento en el

DEMOSTRACIÓN Por la propiedad de intervalo aditivo de integrales,

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a)\,dt$$

se puede escribir como dos integrales:

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a)\} = \int_0^a e^{-st}f(t-a)\underbrace{\mathscr{U}(t-a)}_{\substack{\text{cero para}\\ 0\le t<a}}dt + \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)\underbrace{\mathscr{U}(t-a)}_{\substack{\text{uno para}\\ t\ge a}}dt = \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a)\,dt.$$

Ahora si hacemos $v = t - a$, $dv = dt$ en la última integral, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-s(v+a)}f(v)\,dv = e^{-as}\int_0^{\infty} e^{-sv}f(v)\,dv = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}.$$

FORMA INVERSA DEL TEOREMA 7.3.2

Si $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$, la forma inversa del teorema 7.3.2 a > 0, es

$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a) * U(t-a)$

FORMA ALTERNATIVA DEL TEOREMA 7.3.2

$L\{g(t) * U(t-a)\} = e^{-as} * L\{g(t+a)\}$

Seccion 7.4 Propiedades operacionales 2

Teorema 7.4.3 Transformada de una función periódica

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0,\infty)$, de orden exponencial y periódica con periodo T, entonces

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{sT}} * \int_0^T e^{-st}f(t)dt$$

Seccion 8.2 SISTEMAS LINEALES HOMOGENEOS

Eingevalores y eingevectores: $(A - \lambda I)K = 0$
para encontrar soluciones planteamos
$det(A - \lambda I)K = 0$ que es la ecuacion caracteristica de la matriz A.
Sus soluciones son los eigenvalores de A.

8.2.1 Eingenvalores reales distintos

Teorema 8.2.1 Solucion general: Sistemas homogeneos
Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n eigenvalores reales y distintos de la matriz de coeficientes A del sistema homogéneo $X' = AX$ y sean $K_1, K_2, \dots, K_n$ los eigenvectores correspondientes. Entonces la solución general de $X' = AX$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ está dada por
$X = c_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 K_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n K_n e^{\lambda_n t}$

8.2.2 EIGENVALORES REPETIDOS

EINGEVALORES DE MULTIPLICIDAD DOS
SEGUNDA SOLUCIÓN: Suponga que λ_1 es un valor propio de multiplicidad dos y que sólo hay un eigenvector asociado con este valor. Se puede encontrar una segunda solución de la forma
$X_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}$
$(A - \lambda I)K = 0$
$(A - \lambda I)P = K$

EINGEVALORES DE MULTIPLICIDAD TRES
$X_3 = K\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + Pte^{\lambda_1 t} + Qe^{\lambda_1 t}$
$(A - \lambda I)K = 0$
$(A - \lambda I)P = K$
$(A - \lambda I)Q = P$

8.2.3 EIGENVALORES COMPLEJOS

TEOREMA 8.2.3 Soluciones reales que corresponden a un eigenvalor complejo

Sea $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ un eigenvalor complejo de la matriz de coeficientes A en el sistema homogéneo (2) y sean $B_1 \, y \, B_2$ los vectores columna definidos en (22). Entonces

$X_1 = [B_1 cos(\beta t) - B_2 sen(\beta t)]e^{\alpha t}$

$X_2 = [B_2 cos(\beta t) + B_1 sen(\beta t)]e^{\alpha t}$

son soluciones linealmente independientes de (2) en (,).