



Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

ESTADÍSTICA

Ingeniería Informática

TEORÍA

Mg.Ing. Susana Vanlesberg
Profesor Titular

UNIDAD 2

Variables Aleatorias

Al hablar de sucesos elementales, se definieron casi exclusivamente en forma cualitativa (buenos y malos; defectuosos y no defectuosos; varón y mujer, etc.); pero muchas veces es conveniente cuantificar resultados. Es más, la mayor parte de los problemas que se plantean en la práctica tienen que ver con cantidades medibles. Esta cuantificación se realiza a través de una variable que será de tipo aleatoria.

Formalmente **variable aleatoria** es aquella función definida en el espacio muestral que asocia a cada punto muestral un número perteneciente a los reales. Al realizar el experimento aleatorio la variable toma un solo valor.

Clasificación

Al observar un determinado fenómeno es sencillo deducir que existen distintos tipos de variables aleatorias. Si el fenómeno estudiado u observado es tal que puede ser cuantificado por valores contables o enteros, entonces la variable aleatoria se dice **discreta**. El conjunto de los valores posibles de esta variable puede ser finito o infinito numerable. Como ejemplo, cantidad de procesadores Pentium Intel defectuosos en una partida.

Si el fenómeno puede ser cuantificado a través de cualquier número real, la variable se dirá **continua**. Por ejemplo monto de ganancias anuales de una empresa.

2.1 - Distribución de Probabilidades

Si se considera la variable aleatoria "cantidad de pulsos telefónicos registrados en un nodo Internet en un mes determinado" se verifica que hay cierta cantidad de resultados posibles: pueden haber 200, 300, 1500 etc. También puede asegurarse que hay una cierta probabilidad que sean 300 pulsos, 1500, etc.

Existe una asignación de probabilidades a cada uno de los posibles valores que puede tomar una variable aleatoria. Esa correspondencia entre los valores de la variable aleatoria y su probabilidad de ocurrencia es lo que se denomina **Distribución de Probabilidades**.

Distribución de Probabilidades

El comportamiento de una variable aleatoria es descrito por sus leyes de probabilidad, las cuales pueden ser caracterizadas de distintas formas:

- a- la forma más común es a través de la distribución de probabilidades, el caso más sencillo es a través de una lista de los valores que la variable aleatoria puede tomar y sus respectivas probabilidades (sólo posible en el caso de variable aleatoria discreta);
- b- a través de gráficos
- c- a través de modelos matemáticos que representen la ley.

2.1.1- Variable Discreta. Función Masa de probabilidad o Función de Cuantía.

Esta Función es la forma matemática de expresar la correspondencia entre los valores de la variable y sus probabilidades:

$$f(x) = P(X = x) \quad (2.1)$$

Para satisfacer los axiomas de la Teoría de Probabilidad y ser una función de probabilidad, deberá cumplir con los siguientes requisitos:

a- $f(x_i)$ debe tener un valor numérico para todos los posibles valores de la variable aleatoria.

b- $0 \leq f(x_i) \leq 1$ para cualquier valor de x

b- $\sum f(x_i) = 1$ para todos los valores de x

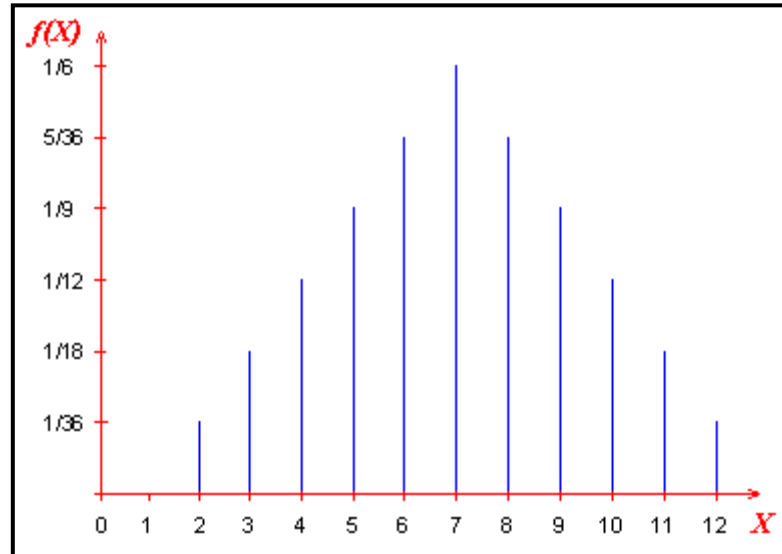
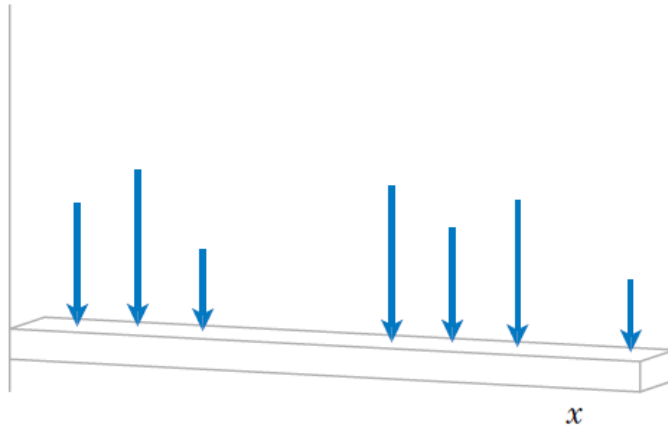


Fig. N° 1- Función de cuantía

Puede hacerse una semejanza con mecánica considerando una masa total unitaria distribuida sobre el eje de las x , con la masa ubicada en cada uno de los puntos y proporcional en altura a la probabilidad de que la variable tome ese valor.

$$\sum P(x_i) = 1$$



Otra forma de describir la distribución de probabilidades de una variable aleatoria es a través de una función denominada **función acumulativa** o **función de distribución**. Esta función $F(x)$ es simplemente la probabilidad que la variable aleatoria tome valores menores o iguales que un valor determinado:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

(2.2)

Para el caso de variable aleatoria discreta esta función es la suma de los valores de la función masa de probabilidad evaluada en todos aquellos valores menores o iguales que x , que la variable puede tomar:

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

(2.3)

La gráfica de esta función es de tipo escalonada, ya que experimenta saltos en los distintos x_i , iguales a la probabilidad de que la variable aleatoria tome esos valores. Entre dos valores de la variable la probabilidad permanece constante:

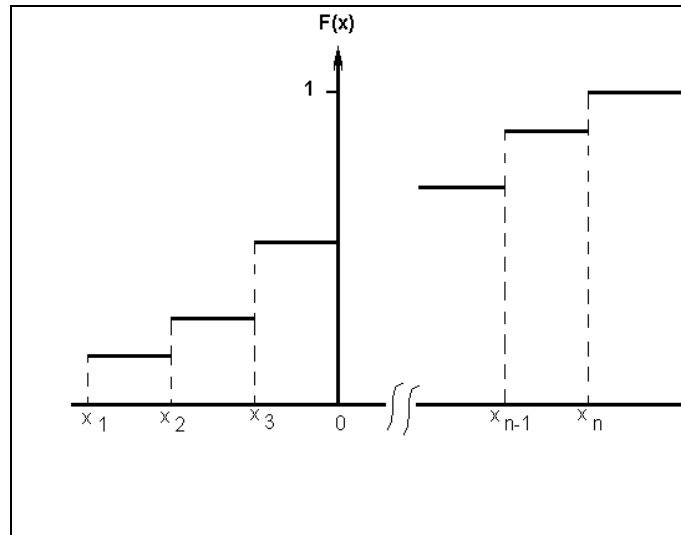
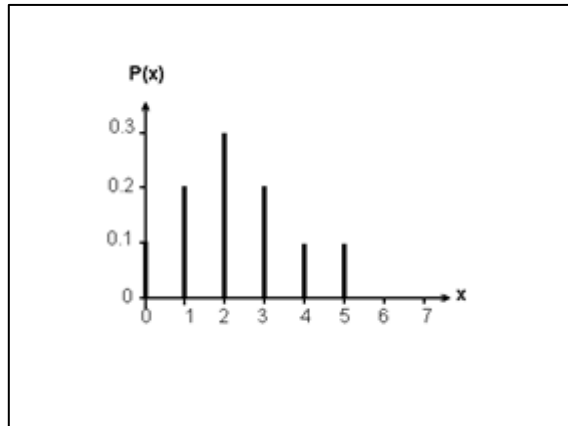


Fig. N° 2- Función de distribución

Ejemplo: considérese la variable aleatoria X N° de bultos de carga que llegan a una fábrica en una semana determinada del mes de mayo. Las probabilidades para los distintos casos son:

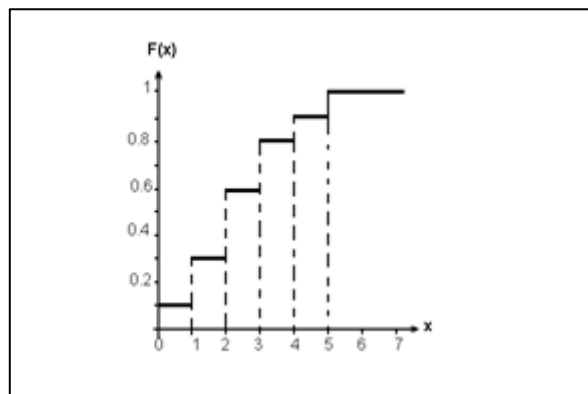
$$p(x) = \begin{cases} 0.1 & x = 0 \\ 0.2 & x = 1 \\ 0.3 & x = 2 \\ 0.2 & x = 3 \\ 0.1 & x = 4 \\ 0.1 & x = 5 \\ 0 & x = 6, 7, \dots \end{cases}$$

Su gráfica correspondiente es la siguiente:



La función de distribución y su gráfica son las siguientes:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & 2 \leq x < 3 \\ 0.8, & 3 \leq x < 4 \\ 0.9, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$



Se puede decir que la probabilidad de recibir 2 bultos o menos en la fábrica $F(2) =$

$$0.6 = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6.$$

Variable aleatoria continua. Función de densidad.

El problema de especificar la distribución de probabilidades y de esta manera la ley para una variable aleatoria continua es sencillo de derivar realizando el siguiente razonamiento:

Si el eje x se divide en un gran número de intervalos infinitesimales, cada uno de longitud dx , es posible definir una función $f(x)$, tal que la probabilidad de que x esté en un intervalo $(x, x+dx)$ es $f(x)dx$. Esta función se denomina *función de densidad de probabilidad* o, simplemente, *función de densidad*.

Ya que ocurrencias en distintos intervalos son eventos mutuamente excluyentes, se deduce que la probabilidad de que una variable aleatoria tome valores en un intervalo de longitud finita, es la suma de probabilidades en los intervalos infinitesimales, o sea, es $\int f(x)dx$ sobre el intervalo de interés.

De esta manera, el área bajo la curva de esta función en un intervalo, representa la probabilidad de que la variable tome valores en el intervalo referido:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \quad (2.4)$$

La probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor específico es 0, ya que la longitud del intervalo dx desaparecería:

$$P(X = x_1) = \int_{x_1}^{x_1} f(x)dx = 0$$

Como consecuencia de esto, las siguientes expresiones son equivalentes:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$$

El valor de $f(x)$ en sí mismo no es una probabilidad, sino solamente la medida de la densidad de probabilidad en un intervalo. Debe cumplir con dos condiciones:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Puede hacerse una analogía con mecánica, diciendo que se tiene una masa total unitaria distribuida en forma continua en el intervalo en el que toma valores la variable.

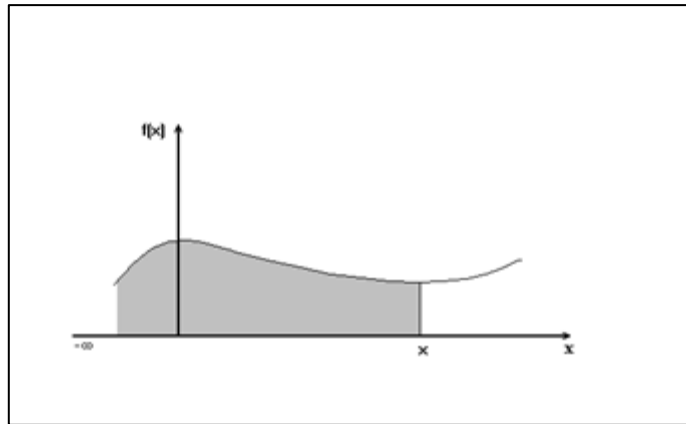
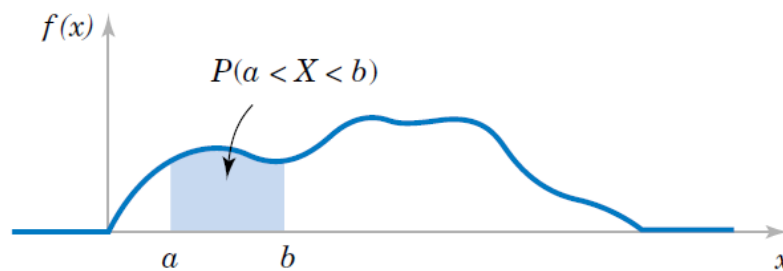


Fig. N° 3 - Función de densidad



Función de Distribución

Se define la función de distribución acumulativa de la v.a. X , $F(x)$, como la probabilidad de que la v.a. continua X tome valores menores o iguales a x , es decir:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (2.5)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (2.6)$$

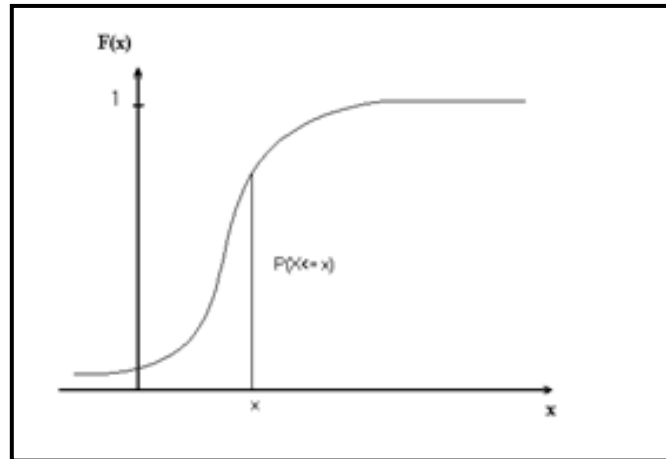


Fig. N° 4 - Función de distribución

Consideramos una masa unidad distribuida sobre el intervalo $(-\infty, +\infty)$, y la función de distribución $F(x)$ para cada valor x de la v.a. da la cantidad de masa que hay en el intervalo $(-\infty, x)$, es decir, la masa que hay en el punto x y a la izquierda de x , aunque dará igual considerar el intervalo $(-\infty, x)$.

Propiedades de la Función de Distribución:

$$F(-\infty) = 0, \quad F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f(u) du = 0$$

$$F(\infty) = 1, \quad F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x f(u) du = 1$$

Es una función monótona creciente:

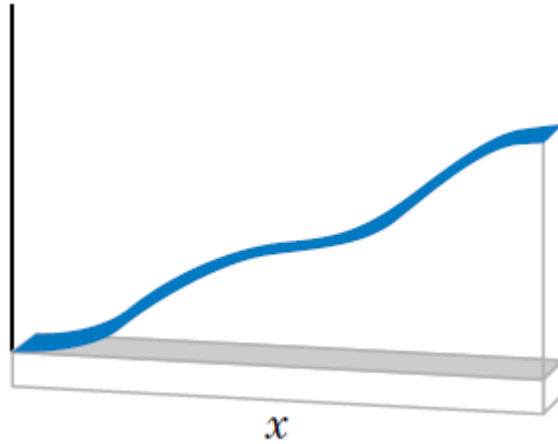
Si $x < x+m$ entonces $F(x) \leq F(x+m)$.

$$F(x+m) = F(x) + P(x < X \leq x+m)$$

Esto permite obtener la probabilidad en un intervalo:

$$F(x+m) - F(x) = P(x < X \leq x+m)$$

$$\boxed{P(a < X < b) = F(b) - F(a)} = \int_a^b f(x) \quad \text{conclusión}$$



Puede establecerse la relación entre ambas funciones, considerando un Δx arbitrariamente pequeño y evaluar la función acumulativa en los extremos de ese intervalo: $x + \Delta x$ y x , haciendo tender a cero la amplitud Δx :

Relación
entre
las
funcio



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(X \leq x + \Delta x) - P(X \leq x)}{\Delta x}$$

$$F'(x) = f(x) = \frac{P(x < X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

luego:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (2.7)$$

2.2 - Variables aleatorias bidimensionales

Muchas veces es de interés observar en forma simultánea dos o más variables, por ejemplo cantidad de equipos de computación fabricados por una compañía y cantidad de operarios que trabajan en ella.

Se puede definir variable aleatoria bidimensional como el par de números que expresa el resultado de un experimento combinado y esto puede ser representado en el plano x y ; el recorrido o rango será ahora un subconjunto del plano x y .

También corresponde hacer la distinción entre variable bidimensional discreta y bidimensional continua. El comportamiento conjunto de las variables aleatorias bidimensionales es descrito por su ley de probabilidad conjunta. Se puede también hacer la analogía con mecánica considerando que es la distribución de una unidad de masa sobre el plano x y : en forma continua sobre todo el plano x y si la variable aleatoria bidimensional es continua y concentrada en un número finito o infinito numerable de puntos con masa igual a $p(x_i, y_j)$ en cada punto (x_i, y_j) si la variable bidimensional es discreta.

2.2.1- Variable aleatoria bidimensional discreta. Función masa de probabilidades conjuntas

Esta función es la correspondencia entre cada par de puntos y su probabilidad de ocurrencia. Analíticamente se expresa por:

$$f(x, y) = P(X = x; Y = y) \quad (2.8)$$

ya que es una probabilidad debe cumplir con las siguientes condiciones :

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\sum_{\forall x_i} \sum_{\forall y_j} f(x_i, y_j) = 1, \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, m \quad j = 0, 1, \dots, n$$

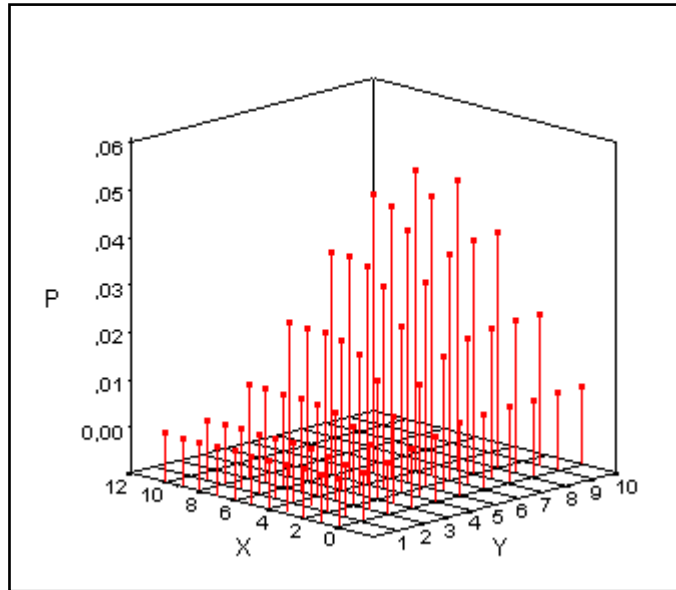


Fig. N° 5- Función de cuantía conjunta

Esta distribución conjunta puede presentarse también a través de una tabla a doble entrada, considerando cada valor de cada variable en los extremos de la tabla y en el cuerpo de ella las probabilidades de presentación conjunta (para cada par de valores). Esto sólo puede hacerse si la variable aleatoria bidimensional es discreta.

	x	x1	x2	...	xm	Distrib. Marginal de Y
y						
y1						
y2			$f(x2,y2)$			
...						
yn						
Distrib. Marginal de X						1

$$F(x, y) = P(X \leq x; Y \leq y) = \sum_{\forall x_i \leq x} \sum_{\forall y_j \leq y} f(x_i, y_j), i = 0, 1, \dots, m \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Funciones marginales. Funciones masa de probabilidad marginales

El comportamiento de una variable en particular sin considerar la otra, se describe a través de las funciones marginales. Se las obtiene a partir de la función masa de probabilidades conjuntas, por darle todos los valores de su recorrido a la variable que no interesa considerar. En forma analítica se expresa a través de:

$$f(x) = P(X = x) = \sum_{\forall y_j} f(x, y_j) \quad \text{con } j = 0, 1, \dots, n \quad (2.10)$$

$$f(y) = P(Y = y) = \sum_{\forall x_i} f(x_i, y) \quad \text{con } i = 0, 1, \dots, m$$

Funciones acumulativas marginales

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j=0}^n f(x_i, y_j) \quad (2.11)$$

$$F(y) = P(Y \leq y) = \sum_{y_j \leq y} f(y_j) = \sum_{x_i=0}^m \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$

Funciones condicionales

Pueden obtenerse a partir de la distribución conjunta, es aquella que se deriva al evaluar las probabilidades de presentación de una variable conociendo que la otra variable ha ocurrido con un valor particular.

Para un valor particular de Y, $Y=y_0$ la función de cuantía de x condicionada a Y está dada por :

$$f(x/y) = P(X = x | Y = y_0) = \frac{P(X = x \wedge Y = y)}{P(Y = y_0)}$$

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{\sum_{\forall x_i} f(x_i, y)} = \frac{f(x, y)}{f(y)}, \quad \text{con } f(y) \neq 0 \quad (2.12)$$

Esta función de cuantía condicional, por ser una función de probabilidad debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$a - 0 \leq f(x/y) \leq 1$$

$$b - \sum_{\forall x_i} f(x/y) = 1$$

La distribución condicional de Y dado un valor particular de X se define de forma similar:

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}, \text{ con } f(x) \neq 0 \quad (2.13)$$

Variable aleatoria bidimensional continua

Las funciones asociadas con variables aleatorias bidimensionales continuas son análogas a las del caso discreto, pero la función de cuantía será reemplazada por la función de densidad conjunta, siendo $f(x,y) \Delta x \Delta y$ la probabilidad de que la variable (x,y) caiga en el intervalo $x, x+\Delta x$; $y, y+\Delta y$.

La probabilidad de ocurrencia conjunta de x e y en alguna región del espacio muestral se determina por integrar la función de densidad conjunta en esta región:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2; y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dx dy \quad (2.14)$$

Esto es igual al volumen debajo de la función de densidad conjunta $f(x,y)$, sobre la región limitada por x_1, x_2 e y_1, y_2 .

La función de densidad conjunta debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

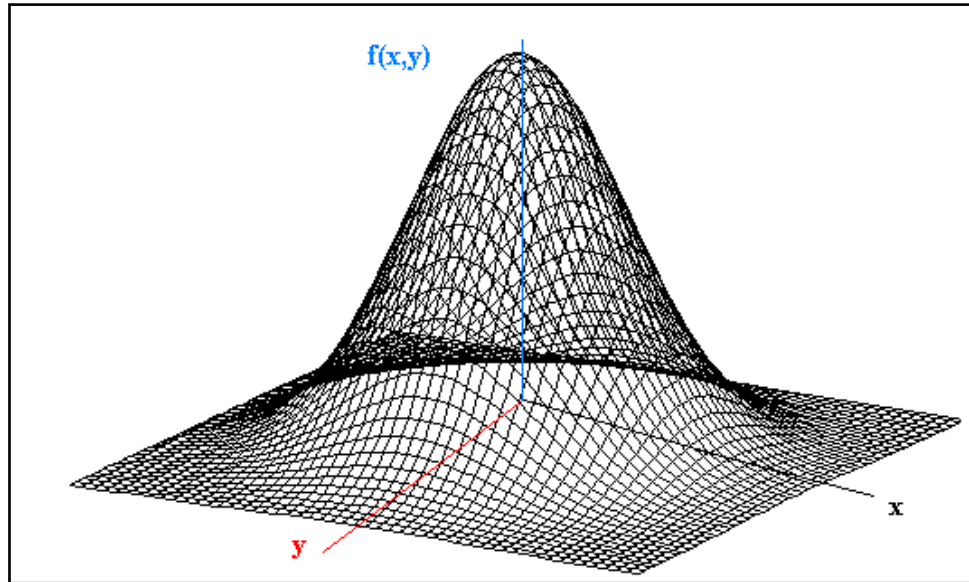


Fig. N° 6- Función de densidad conjunta

La función de distribución conjunta se define como:

$$F(x, y) = P(-\infty \leq X \leq x; -\infty \leq Y \leq y)$$

$$F(x, y) = P(X \leq x; Y \leq y)$$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t, l) dt dl$$

(2.15)

Propiedades:

Son similares al caso unidimensional:

$$F(-\infty; -\infty) = 0$$

$$F(\infty; \infty) = 1$$

$$F(-\infty; y) = 0$$

$$F(x; -\infty) = 0$$

ya que $F(X, Y)$ es una probabilidad deberá tomar valores entre 0 y 1.

A partir de esta función, se puede obtener la de densidad conjunta por derivar parcialmente:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y) \quad (2.16)$$

Funciones de densidad marginales

Como en el caso discreto, para estudiar el comportamiento de una de las variables en particular se elimina la otra, integrando sobre todos sus valores:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \quad (2.17)$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \quad (2.18)$$

Funciones de distribución marginales

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F_1(x) = F_{x,y}(x, \infty) \quad (2.19)$$

De lo anterior se deduce que:

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} [F(x, \infty)] = \frac{\partial}{\partial x} [F(x)] \quad (2.20)$$

De forma similar:

$$F_2(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^y f(s) ds \quad (2.21)$$

$$F(y) = F_{x,y}(\infty, y)$$

Se deduce que:

$$f(y) = \frac{\partial}{\partial y} F(\infty, y) = \frac{\partial}{\partial y} [F(y)] \quad (2.22)$$

Gráficamente:

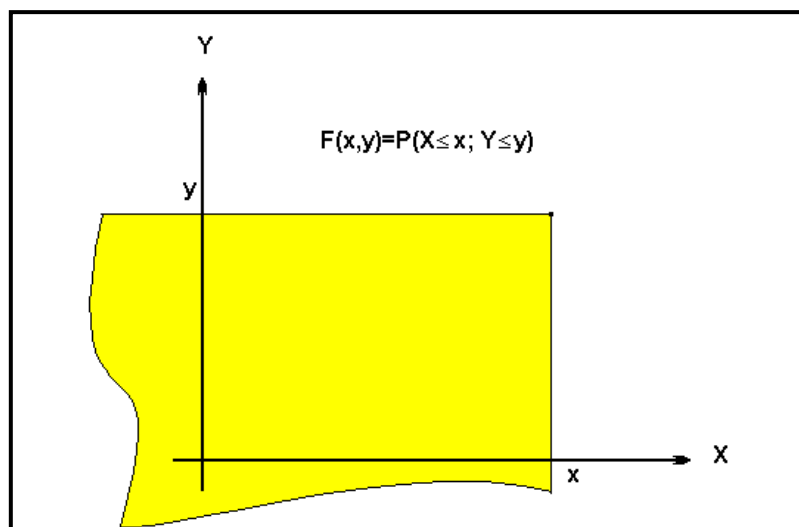


Fig. N° 7- Función de distribución conjunta

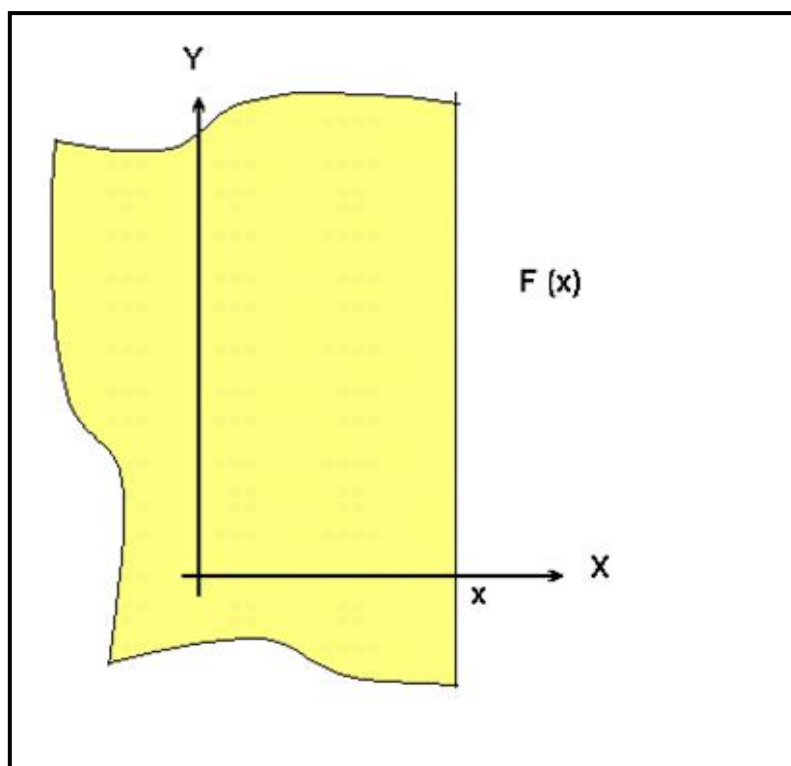


Fig. N° 8 -Función de distribución marginal de X

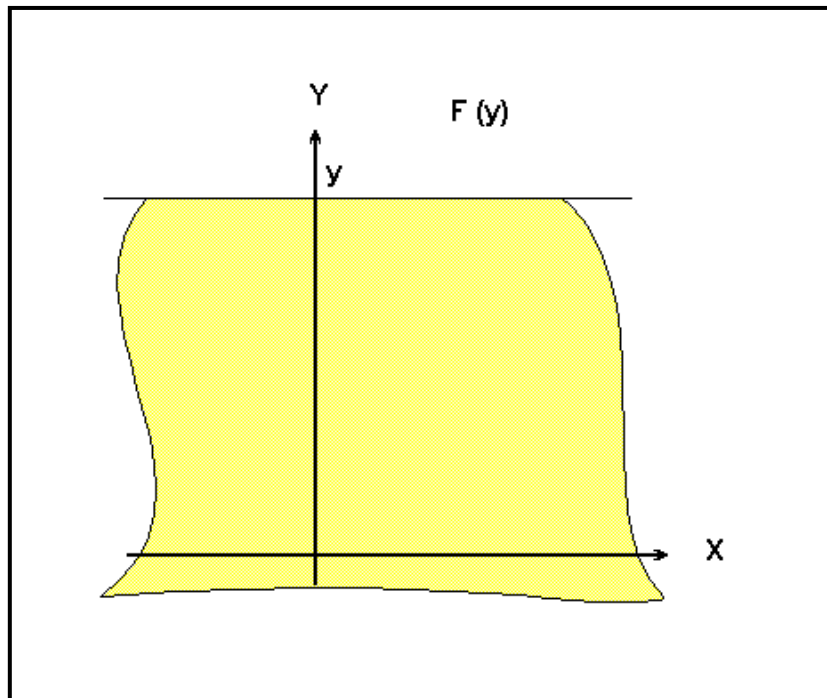


Fig. N° 9 -Función de distribución marginal de Y

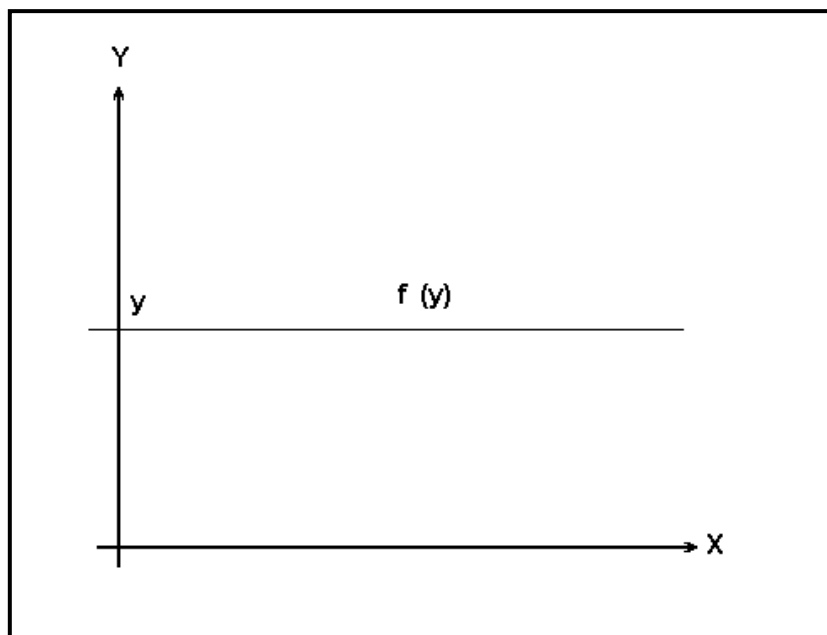


Fig. N° 10 -Función de densidad marginal de Y

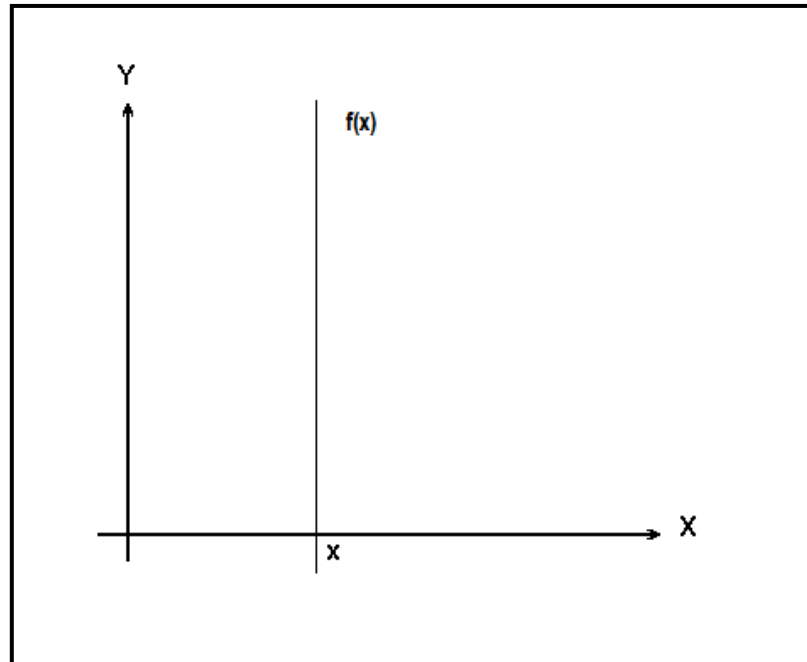


Fig. N° 11 -Función de densidad marginal de X

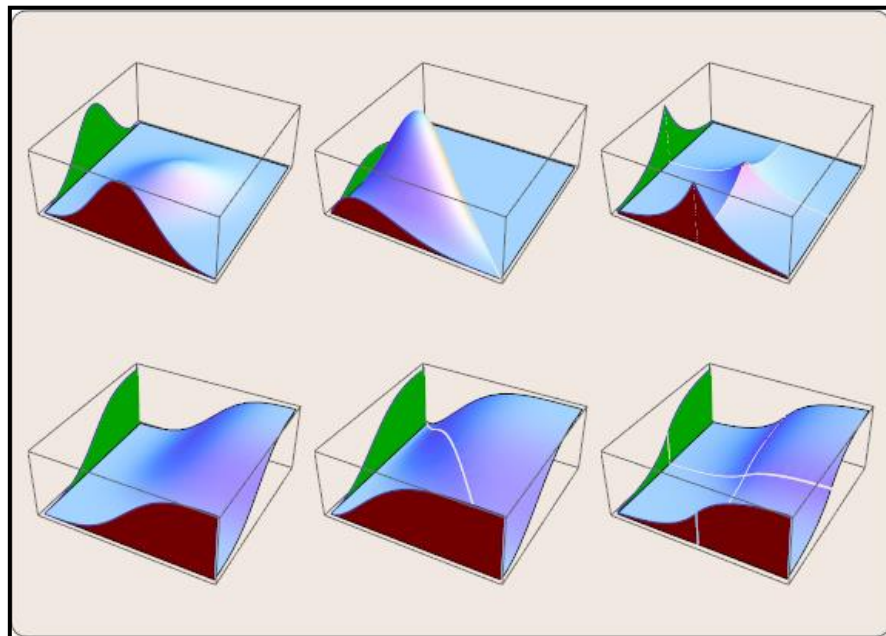


Fig. N° 12 –Funciones marginales

Si interesa obtener la probabilidad en un intervalo para una de las variables puede obtenerse a partir de la función conjunta o a partir de las marginales:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx$$

(2.23)

Funciones de probabilidad condicionales.

Recordando el concepto de sucesos dependientes:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \quad \text{con } P(A) \text{ y } P(B) \neq 0$$

En el caso de variable continua la probabilidad de que alguna de las variables tome un valor específico, no tiene sentido:

$$P(X = x) = 0 \quad P(Y = y) = 0$$

Tiene sentido que las variables tomen valores en un intervalo tan pequeño como se quiera, por ejemplo:

$$P(X \leq x; y \leq Y \leq y + \Delta y) = F(X/Y)$$

$$\frac{P(X \leq x; y \leq Y \leq y + \Delta Y)}{P(y \leq Y \leq y + \Delta y)}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+\Delta y} f(l, m) dl dm}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_y^{y+\Delta y} f(x, m) dx dm} \quad \text{si } \Delta y \rightarrow 0 \text{ luego}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^x f(l, y) dl}{\int_y^{y+\Delta Y} f(y) dy} = \frac{\int_{-\infty}^x f(l, y) dl}{f(y)}$$

Puede demostrarse que la anterior es función de densidad si se integra en todo el recorrido y se obtiene 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X/Y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{f(y)} dx = \frac{1}{f(y)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \frac{f(y)}{f(y)} = 1$$

Función de distribución condicionada de la v.a. continua X dado $Y=y_0$:

$$F(x/y) = \int_{-\infty}^x f(x/y)dx = \frac{\int_{-\infty}^x f(x, y)dx}{f(y)} \quad (2.24)$$

Función de distribución condicionada de la v.a. continua Y dado $X=x_0$:

$$F(y/x) = \int_{-\infty}^y f(y/x)dy = \frac{\int_{-\infty}^y f(x, y)dy}{f(x)} \quad (2.25)$$

Independencia de variables aleatorias

Cuando se tienen dos variables aleatorias distribuidas conjuntamente, puede interesar saber si las variables son dependientes o independientes, ya que puede tener importancia para determinar si es correcto predecir el valor de una basándose en el valor de la otra. Recordar también aquí el concepto de independencia de sucesos:

$$P(AB) = P(A).P(B)$$

$$P(X \leq x; Y \leq y) = P(X \leq x).P(Y \leq y)$$

$$F(x, y) = F(x).F(y)$$

Esto sólo es posible de expresar si las variables son independientes. Las variables aleatorias son independientes si y sólo si la función conjunta puede expresarse como el producto de sus marginales. Si la variable bidimensional es discreta se expresa de la siguiente forma:

$$P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

$$f(x_i, y_j) = f(x_i) \cdot f(y_j)$$

Por lo tanto puede concluirse que: **es necesario para que dos variables aleatorias distribuidas conjuntamente sean independientes, que su función conjunta pueda descomponerse en el producto de sus marginales.**

Ahora si la función conjunta está expresada como el producto de sus marginales, es suficiente para asegurar que las variables son independientes.

Ejemplo de variable aleatoria bidimensional

Variable continua

Si X e Y representan las duraciones, en años, de dos componentes en un sistema electrónico y la función de densidad conjunta de estas variables es la que se presenta, interesa saber si son variables dependientes o no.

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

se debería verificar que es una función de densidad conjunta:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy dx = 1$$

luego las funciones marginales:

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy$$

$$f(y) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dx$$

para luego verificar si su producto es igual a la función conjunta.