Sección 7.5

Polinomios de Taylor

Ejercicio 12

Encuentre el polinomio de Maclaurin de grado $n = 3$ para la función $f(x) = sen(\pi x)$.

Solución. Por definición, el polinomio de Maclaurin de grado 3 para f viene dado por:

$$P_3(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{'''}(0)}{3!}x^3$$

Dado que,

$f(x) = sen(\pi x) \Rightarrow f(0) = 0.$

$f^{'}(x) = \pi \cos(\pi x) \Rightarrow f^{'}(0) = \pi.$

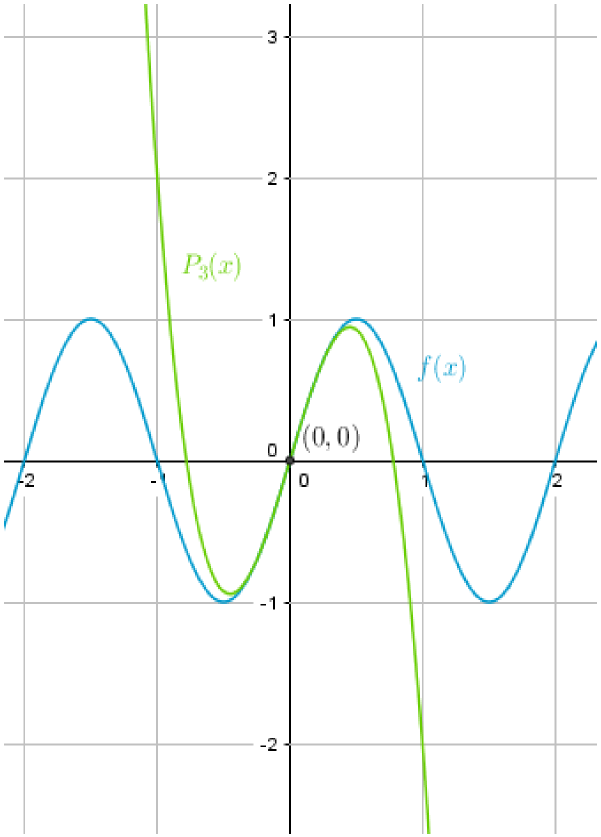
$f^{''}(x) = -\pi^2 sen(\pi x) \Rightarrow f^{''}(0) = 0.$

$f'''(x) = -\pi^3 \cos(\pi x) \Rightarrow f^{'''}(0) = -\pi^3.$

Ejercicio 12

Por consiguiente,

$$P_3(x) = \pi x - \frac{\pi^3}{3!}x^3 = \pi x - \frac{\pi^3}{6}x^3$$



Cerca de $(0,0)$ podemos emplear la gráfica de P_3 para aproximar la gráfica de $f(x) = sen(\pi x)$. Al alejarnos del punto de expansión $c = 0$, la exactitud de aproximación disminuye.

Ejercicio 14

Encuentre el polinomio de Maclaurin de grado $n = 4$ para la función $f(x) = x^2e^{-x}$.

Solución. Por definición, el polinomio de Maclaurin de grado 4 para f viene dado por:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

Dado que,

$f(x) = x^2e^{-x} \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = (2x)e^{-x} + x^2(-e^{-x}) = (-x^2 + 2x)e^{-x} \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (-x^2 + 2x)(-e^{-x}) =$

$= (x^2 - 4x + 2)e^{-x} \Rightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = (2x - 4)e^{-x} + (x^2 - 4x + 2)(-e^{-x}) =$

$= (-x^2 + 6x - 6)e^{-x} \Rightarrow f'''(0) = -6$

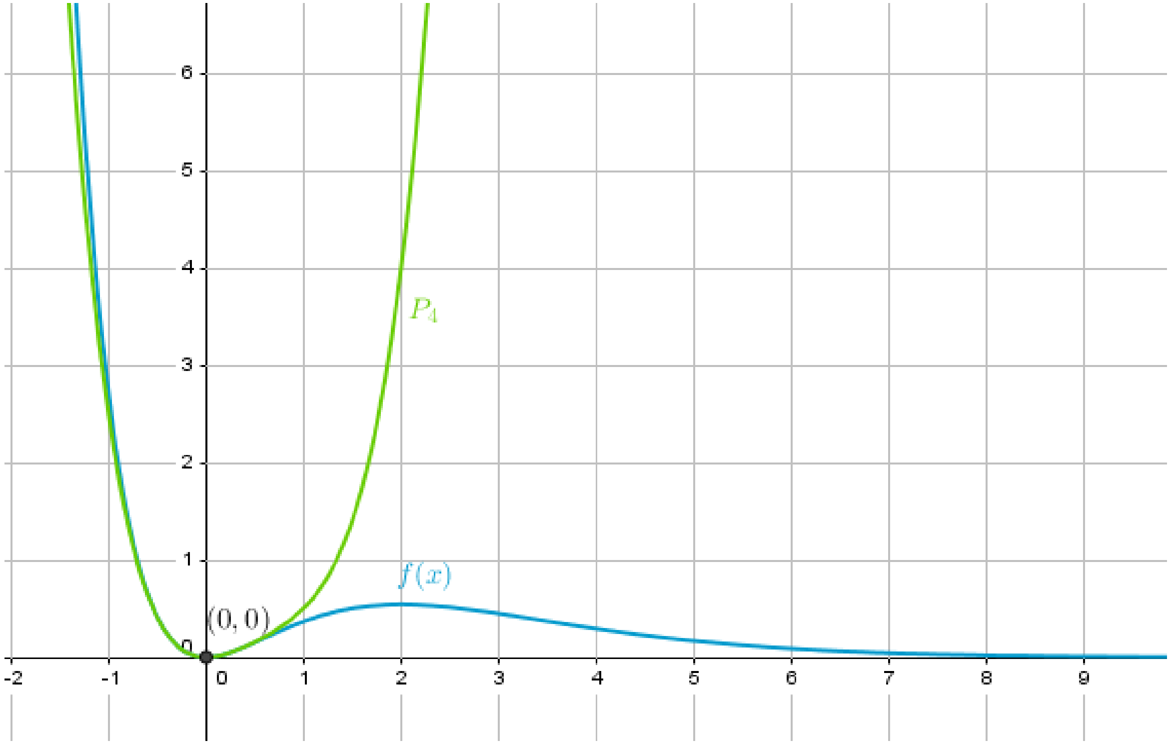
$f^{(4)}(x) = (-2x + 6)e^{-x} + (-x^2 + 6x - 6)(-e^{-x}) =$

$= (x^2 - 8x + 12)e^{-x} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 12$

Ejercicio 14

Por consiguiente,

$$P_4(x) = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{6}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 \Rightarrow P_4(x) = x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4$$



Cerca de $(0,0)$, podemos utilizar la gráfica de P_4 para aproximar la gráfica de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Ejercicio 23

Encuentre el polinomio de Taylor de grado 4 centrado en $c = 1$ para $f(x) = \ln x$.

Solución. Por definición, el polinomio de Taylor de grado 4 para f en $c = 1$ viene dado por:

$$P_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

Expandiendo alrededor de $c = 1$ se obtiene lo siguiente,

$$f(x) = \ln x \;\Rightarrow f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -x^{-2} \;\Rightarrow f''(1) = -1$$

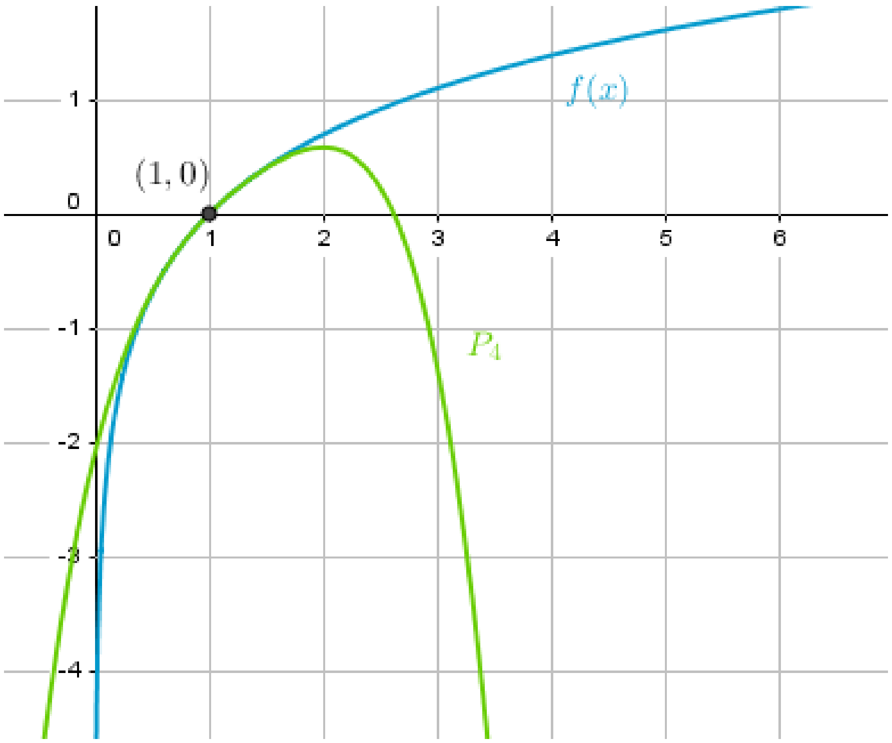
$$f'''(x) = 2x^{-3} \;\Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -6x^{-4} \;\Rightarrow f^{(4)}(1) = -6$$

Ejercicio 23

Por consiguiente,

$$P_4(x) = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$



Cerca de $(1,0)$ podemos emplear la gráfica de P_4 para aproximar la gráfica de $f(x) = \ln x$. Al alejarnos del punto de expansión $c = 1$, la exactitud de aproximación disminuye.

Ejercicio 24

Encuentre el polinomio de Taylor de grado 2 centrado en $c = \pi$ para $f(x) = x^2 \cos x$.

Solución. Por definición, el polinomio de Taylor de grado 2 para f en $c = \pi$ viene dado por:

$$P_2(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2$$

Expandiendo alrededor de $c = \pi$ se obtiene lo siguiente,

$$f(x) = x^2 \cos x \Rightarrow f(\pi) = -\pi^2$$

$$f'(x) = 2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x = x(2\cos x - x\, sen\, x) \Rightarrow f'(\pi) = -2\pi$$

$$f''(x) = 2\cos x - x\, sen\, x + x\big(-2\, sen\, x - (sen\, x + x \cos x\,)\big) \Rightarrow f''(\pi) = -2 + \pi^2$$

Por consiguiente,

$$P_2(x) = -\pi^2 - 2\pi(x-\pi) + \frac{-2+\pi^2}{2}(x-\pi)^2$$

Ejercicio 24

A continuación se ilustra la gráfica de $f(x)$ con su polinomio de Taylor de grado 2 centrado en $c = \pi$.