# Clase teórica de la semana del 13-6

Mario Garelik

## Sección 15.6 - Integrales de superficie.

- **Ejercitación propuesta (p. 844 - 845):** 1 al 12 /// 15 al 24.
- Construcción de la integral de superficie como límite de **sumas de Riemann**.
- Definir norma de la partición como $||P|| = máx\{\Delta x_i, \Delta y_i\}$ y no como la define Zill en términos de las diagonales de los subrectángulos.
- **Métodos de evaluación** de una integral de superficie:
  - Si **S viene dada explícitamente** $z = g(x, y)$, entonces $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA$ y entonces:
  $$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_R f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dA$$
  .
    - Si $f \equiv 1$, la integral se reduce a $\displaystyle\iint_S dS$, que es el área de la superficie.
    - Ejemplo 1: no lo vemos.
    - Ejemplo 2: cálculo de una integral de superficie para S dada explícitamente.
  - Si **S parametrizada** por $S : \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$, se tiene:
  $$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dA,$$
  donde, en este caso, es
  $$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dA.$$
    - Ejemplo 3: cálculo de una integral de superficie para $S$ parametrizada.
- **Superficies orientadas.**
  - El campo vectorial orientación $\mathbf{n}$.
  - Orientación hacia arriba y hacia abajo. Si **S cerrada** (frontera de un sólido finito) *hacia afuera* y *hacia adentro.*
  - Para **superficies definidas implícitamente** por $h(x, y, z) = 0$ es $\mathbf{n}(x, y, z) = \dfrac{\nabla h}{|\nabla h|}$.
  - Ejemplo 4: las dos orientaciones posibles para una esfera.
- **Integrales de campos vectoriales**: Hasta el momento se trató con campos escalares. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i}+Q(x, y, z)\mathbf{j}+R(x, y, z)\mathbf{k}$ el campo de velocidades de un fluido.

– Aproximación al volumen de un fluido que pasa por un elemento $\Delta S$ de superficie por unidad de tiempo: $(\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\Delta S = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\Delta S$

– **Integral de flujo**: flujo $= \displaystyle\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS =$ **flujo de F a través de S** = volumen total del fluido que pasa por la superficie $S$ por unidad de tiempo.

– Ejemplo 5: cálculo de flujo.

– Consideraciones finales: superficies suaves a trozos.

## Sección 15.7 - Rotacional y divergencia.

**Observación previa a la sección 15.7.** Se altera levemente el orden en que se presentarán los temas de esta sección. Las modificaciones son:

- Luego del ejemplo 1, vemos el Teorema 15.7.1 (y no la propiedad (5) de la pág. 846 que Zill deja para que el lector demuestre). Esa propiedad (5) forma parte del teorema 15.7.1.

- El Teormea 15.7.1 (brinda una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial sea conservativo) va con la demostración completa.

- Después del teorema 15.7.1, vemos el ejemplo 2.

- Luego del ejemplo 2, pasamos a la pág. 848 y vemos el concepto de divergecia y el ejemplo 3 (aplicación de la definición).

- Luego, volver a la página 847 para ver la relación entre divergencia y flujo.

- Finalmente, vemos las interpretaciones físicas del rotacional y divergencia.

- **Ejercitación propuesta (pág. 849-850):** 1 – 30.

- Breve intro. El operador $\nabla$ que se usa para el gradiente de campos escalares se combinará ahora con un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ de dos maneras diferentes: una, dando lugar a un campo vectorial (rot $\mathbf{F}$) y dos, a un campo escalar (div $\mathbf{F}$).

- De ahora en adelante, los campos escalares $P, Q, R$, compoenentes del campos vectorial $\mathbf{F}$ se supondrán con derivadas parciales continuas en toda una región $R \subset \mathbb{R}^3$.

- **Definición de rotacional.**

- Ejemplo 1: Cálculo del rot $\mathbf{F}$ para un campo vectorial $\mathbf{F}$ dado.

- **Teorema 15.7.1: condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial sea conservativo en $\mathbb{R}^3$ (con demo).** Sea $\mathbf{F} = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ un campo vectorial conservativo (existe $f$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$). Supongamos que que los campos escalares $P, Q$ y $R$ son continuos y tienen primeras derivadas parciales continuas y que el campo escalar $f$ (potencial de $\mathbf{F}$) tiene sus segundas derivadas parciales continuas, entonces:
$$\mathbf{F} \text{ conservativo} \Leftrightarrow \text{rot}\,\mathbf{F}\,(= \nabla\times\nabla f) = \mathbf{0}$$
.

- Ejemplo 2: Demostración que un campo vectorial es *no conservativo* usando el teorema 15.7.1 (no como lo usa Zill).
- **Definición de divergencia.**
- Ejemplo 3: Cálculo de la div $\mathbf{F}$ de un campo vectorial $\mathbf{F}$ dado.
- Relación entre divergencia y flujo.
  - Obtención del *flujo hacia afuera del campo vectorial* $\mathbf{F}$ *por unidad de volumen.*
    1. Recordar que $(\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F}) \cdot \Delta S$ = volumen de fluido que fluye a través de un elemento de área superficial $\Delta S$ por un unidad de tiempo (donde $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a la superficie).
    2. Consideración de un paralelepípedo, tomado como una unidad de volumen, para el cálculo del flujo total hacia afuera de un cierto campo vectorial $\mathbf{F}$. Deducción del volumen de flujo hacia fuera de dos caras: superior e inferior (Zill hace las laterales).
    3. Obtención del flujo hacia afuera de $\mathbf{F}$ por unidad de volumen como

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

- **Propiedad:** $\text{div}(\text{rot}\mathbf{F}) = 0$. Usar en la demo las propiedades geométricas del producto vectorial.
- **Interpretaciones físicas.**
  - rot $\mathbf{F}$ da una medida de la tendencia del fluido a girar el molinito en torno a su eje vertical. Flujo *irrotacional* de un fluido.
  - div $\mathbf{F}$ da el flujo por unidad de volumen. **Fuente** y **sumidero**.
  - Otra interpretación de div $\mathbf{F}$ está dada por ser una medida de la tasa de cambio de la densidad de un fluido, o sea de la *compresibilidad* del mismo. Por ejemplo, un líquido con muchos solutos es más denso que uno que no los tiene.
  - En electromagnetismo, div $\mathbf{F} = 0$, significa que el campo $\mathbf{F}$ es solenoidal.
  - El producto escalar del operador $\nabla$ consigo mismo, aplicado a un campo escalar $f(x, y, z)$, da lugar al laplaciano tridimensional, muy utilizado en matemática.