UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°10

VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ

1. Sea A $\in$ M_{3x3} cuyos valores propios son λ_1= 1, λ_2= 5. Sabiendo que $\rho(A-I_3)=1$, indicar justificando cuál de los valores propios tiene multiplicidad algebraica 2.

2. Demuestre que si λ es un valor propio de una matriz A entonces $m\lambda$ es un valor propio de la matriz mA $\forall m \in R-\{0\}$.

3. Pruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene

- dos valores propios reales distintos si $(a-d)^2 + 4bc > 0$
- dos valores propios reales iguales si $(a-d)^2 + 4bc = 0$
- ningún valor propio real si $(a-d)^2 + 4bc < 0$

4. Demuestre que 0 es un autovalor de la matriz A si y sólo si A **no** es invertible.

5. Demuestre que si A es una matriz de nxn

a) Y λ es un valor propio de A con vector propio correspondiente x entonces todo múltiplo escalar de x (diferente del vector nulo) también es un vector propio de A. (Ayuda: considere el vector c x con (c $\in R-\{0\}$) y demuestre que satisface la ecuación de vector propio).

b) Y λ es un valor propio de A con vectores propios correspondientes x_1 y x_2 entonces x_1+x_2 también es un vector propio de A.

Observación: Las propiedades del ejercicio 5 son la demostración de la cerradura de la suma y de la multiplicación por un escalar en el espacio E_λ (Teorema 8.1.2 de Grossman, 7ma edición)

6- Determine si cada afirmación es verdadera o falsa. En todos los ítems justifique:

a) v=$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ es vector propio de la matriz A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Si los VAP de una matriz M de 3x3 son $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ entonces los VAP M^{-1} son $\lambda_1 = \frac{-1}{2}, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$.

c) Sabiendo que el polinomio característico de una matriz se puede factorizar como

$$\boxed{(-1)^n\, p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{r_m} = 0} \qquad \textbf{(8.1.10)}$$

Los números $r_1, r_2, \ldots, r_m$ se denominan **multiplicidades algebraicas** de los valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respectivamente.

Grossman, 2012, p 549

Si A es una matriz de 3x3 que tiene valores propios $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$ entonces el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda\ (\lambda^2 + 1)$.

d) Si A es una matriz de 3x3 que tiene valores propios $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$ entonces el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

ALGUNOS EJERCICIOS RESUELTOS

1. Como ρ(A- I3)=ρ(A-1.I_3)= 1 y la matriz A-1.I_3 es una matriz de 3x3 resulta que ν(A-1.I_3)= 2=mg(λ1=1).

Ya que para cada valor propio la multiplicidad geométrica es menor o igual que la algebraica, la multiplicidad algebraica de $\lambda_1=1$ puede ser 2,3,4…. Sin embargo como la suma de las multiplicidades algebraicas es igual al tamaño de la

matriz debe ser ma($\lambda_1=1$)= 2 porque de otro modo ma($\lambda_2=5$)=0, absurdo.

2. Este ejercicio afirma que si λ es un valor propio de una matriz A entonces todo múltiplo m no nulo de λ es un valor propio de la matriz mA.

   Si λ es un vap de A entonces $\exists$ $v\neq 0$ tal que $Av=\lambda v$.

   Multiplicando m.a.m por $m\in \mathbb{R}-\{0\}$ resulta que $m(Av)=m(\lambda v) \Rightarrow (mA)\, v= (m\lambda)\, v \Rightarrow m\lambda$ es un vap de mA.

3. Sea $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$. Entonces $p(\lambda)=det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda\end{pmatrix}=(a-\lambda).(d-\lambda)-bc=ad-a\lambda-d\lambda+\lambda^2-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$

Las soluciones de la ecuación $\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$ son

$$\lambda=\frac{(a+d)\pm\sqrt{[(-1)(a+d)]^2-4(ad-bc)}}{2}=\frac{(a+d)\pm\sqrt{a^2+2ad+d^2-4ad+4bc}}{2}=\frac{(a+d)\pm\sqrt{a^2-2ad+d^2+4bc}}{2}=\frac{(a+d)\pm\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2}\ (*)$$

Entonces los valores propios de A:

- son dos números reales distintos si el radicando de la raíz de (*) es positivo, es decir si $(a-d)^2+4bc>0$.
- son dos números reales iguales si el radicando de la raíz de (*) es cero
- no son números reales si el radicando de la raíz de (*) es negativo.

4. Supongamos que $\lambda=0$ es un valor propio de A. Entonces mg($\lambda=0$) $\geq$ 1. Como

$$\nu(A)=\nu(A-0I)=mg(\lambda=0)$$

(reveer la definición de multiplicidad geométrica en la pág. 5456 de

Grossman(7ma edición)) resulta que la v(A) $\neq$ 0 y, por el Teorema de Resumen, A no es invertible.

6.

a) Si v es vector propio de la matriz A entonces existe un número (real o complejo) λ para el cual se verifique que Av=λv (*)

Vamos a buscarlo.

Reemplazando A y v en (*) resulta $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Resolviendo en cada miembro se obtiene que $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ -\lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix}$

Igualando componente a componente resultan tres ecuaciones:

$$4 = 2\lambda \qquad -2 = -\lambda \qquad -6 = -3\lambda$$

En todas ellas la solución es λ=2. Por lo tanto la afirmación es verdadera: v es VEP de A correspondiente al VAP λ=2.

b) Falso. Como uno de los VAP de M es cero no existe su inversa.

c) Factorizando el polinomio característico dado se obtiene $p(\lambda) = \lambda\,(\lambda + i).(\lambda - i)$, de modo que sus raíces son $\lambda = 0, \lambda = i, \lambda = -i.$ Así que la afirmación es falsa.

d) Verdadero. Se obtiene de la ecuación 8.1.10 de Grossman reemplazando por los VAP dados.