Práctica: Sección 5.4 - Larson

Cálculo de Longitud de Arco

FICH UNL

Profesor: Dr. Ing. Carlos C. SCIOLI

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Ejercicios para la Sección 5.4 del Larson (pag. 340):

Longitud de arco 1 al 14

Ejercicios de la sección 5.4

En los ejercicios 1 y 2, encuentre la distancia entre los puntos usando (a) la fórmula para la distancia, (b) integración.

1. $(0, 0)$, $(5, 12)$
2. $(1, 2)$, $(7, 10)$

En los ejercicios 3–14, encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado.

3. $y = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1$, $[0, 1]$
4. $y = 2x^{3/2} + 3$, $[0, 9]$
5. $y = \frac{3}{2}x^{2/3}$, $[1, 8]$
6. $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$, $[1, 2]$
7. $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$, $[1, 2]$
8. $y = \frac{3}{2}x^{2/3} + 4$, $[1, 27]$
9. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$
10. $y = \ln(\cos x)$, $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
11. $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $[0, 2]$
12. $y = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, $[\ln 2, \ln 3]$
13. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$, $0 \le y \le 4$
14. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y - 3)$, $1 \le y \le 4$

FICH UNL

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Ejercicio 12: encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado

$Longitud\ de\ Arco = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$y = f(x) = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ $\quad (ln2, ln3)$

$f(x) = \ln(e^x+1) - ln(e^x-1)$

1º se debe determinar f'(x) $\rightarrow$ $f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)} - \frac{e^x}{(e^x-1)} = \frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+1)}{(e^{2x}-1)}$

$f'(x) = \frac{(e^{2x}-e^x)-(e^{2x}+e^x)}{(e^{2x}-1)} = \frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x}{(e^{2x}-1)} = \frac{-2e^x}{(e^{2x}-1)}$

2º, $f'(x)^2 \rightarrow f'(x)^2 = \left(\frac{-2e^x}{(e^{2x}-1)}\right)^2 = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

FICH UNL

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Ejercicio 12: encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado

$$\textit{Longitud de Arco} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$\textit{Ahora, } 1 + f'(x)^2 \quad \rightarrow \quad 1 + f'(x)^2 = 1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{(e^{2x}-1)^2 + 4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$1 + f'(x)^2 = \frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1 + 4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2} = \left(\frac{(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)}\right)^2$$

$$\textit{Longitud de Arco} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_{ln2}^{ln3} \sqrt{\left(\frac{(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)}\right)^2}\, dx$$

$$\textit{Longitud de Arco} = \int_{ln2}^{ln3} \frac{(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)}\, dx$$

FICH UNL

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Ejercicio 12: encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado

$$Longitud\ de\ Arco = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$Longitud\ de\ Arco = \int_{ln2}^{ln3} \frac{(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)}\,dx$$

$$X\ sustitución\ reemplazando\ u = e^{2x}-1 \qquad du = 2e^{2x}dx$$

$$u+1 = e^{2x} \qquad du = 2(u+1)dx$$

$$\frac{du}{2(u+1)} = dx$$

$$Reemplazando\ en\ Longitud\ de\ Arco = \int_a^b \frac{(u+1+1)}{(u+1-1)}\frac{du}{2(u+1)} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{(u+2)}{u(u+1)}\,du$$

FICH UNL

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Ejercicio 12: encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado

$$Longitud\ de\ Arco = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$Longitud\ de\ Arco = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{(u+2)}{u(u+1)}\,du$$

$$X\ fracciones\ parciales\ \frac{(u+2)}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{(u+1)} = \frac{A(u+1)+Bu}{u(u+1)}$$

$\rightarrow u + 2 = A(u+1) + Bu$, ahora doy valores a u para obtener los valores de A y B

$para\ u = 0 \rightarrow 2 = A(0+1) + 0$, entonces A= 2

$para\ u = -1 \rightarrow 1 = 2(0) + B\ (-1)$, entonces B= -1

$$\frac{(u+2)}{u(u+1)} = \frac{2}{u} - \frac{1}{(u+1)}$$

$$entonces\ \frac{1}{2}\int_a^b \frac{(u+2)}{u(u+1)}\,du = \frac{1}{2}\left[\int_a^b \frac{2}{u}\,du - \int_a^b \frac{1}{(u+1)}\,du\right]$$

$$entonces\ \frac{1}{2}\left[2lnu|_a^b - ln(u+1)|_a^b\right] \qquad reemplazando\ u = e^{2x} - 1$$

$$\frac{1}{2}\left[2ln(e^{2x}-1)|_{ln2}^{ln3} - ln(e^{2x})|_{ln2}^{ln3}\right]$$

FICH UNL

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Ejercicio 12: encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado

$$Longitud\ de\ Arco = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$entonces\ \frac{1}{2}\left[2lnu|_a^b - ln(u+1)|_a^b\right] \qquad reemplazando\ u = e^{2x}-1$$

$$\frac{1}{2}\left[2ln(e^{2x}-1)|_{ln2}^{ln3} - ln(e^{2x})|_{ln2}^{ln3}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[2\left[\left(ln\left(e^{2ln3}-1\right) - ln\left(e^{2ln2}-1\right)\right] - \left(ln\left(e^{2ln3}\right) + ln\left(e^{2ln2}\right)\right]\right.$$

$$\left(ln\left(e^{2ln3}-1\right) - ln\left(e^{2ln2}-1\right) - \frac{1}{2}\left(ln\left(e^{2ln3}\right) + \frac{1}{2}ln\left(e^{2ln2}\right)\right.$$

FICH UNL

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Ejercicio 14: encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado

Longitud de Arco$= \int_a^b \sqrt{1+(f'(y))^2}\,dx$

$f(y) = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3)$ $\quad (1,4)$

1º se debe determinar f'(y) $\rightarrow \quad f'(y) = \frac{1}{3}\left[\frac{y-3}{6\sqrt{y}} + \sqrt{y}\right] = \frac{y-3}{6y^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{y}}{3}$

2º, $f'(x)^2 \quad \rightarrow \; f'(x)^2 = \left(\frac{y-3}{6y^{\frac{1}{2}}} + \frac{\sqrt{y}}{3}\right)^2 = \frac{(y-3)^2}{36y} + 2\,\frac{y-3}{6\cancel{y^{\frac{1}{2}}}}\,\frac{\cancel{y^{\frac{1}{2}}}}{3} + \frac{y}{9} = \frac{y^2-6y+9}{36y} + \frac{y-3}{9} + \frac{y}{9}$

$= \frac{y^2-6y+9+(4y(y-3))+4y^2}{36y} = \frac{y^2-6y+9+4y^2-12y+4y^2}{36y} = \frac{9y^2-18y+9}{36y} = \frac{9(y^2-2y+1)}{36y} =$

$\rightarrow f'(x)^2 = \frac{(y-1)^2}{4y}$

FICH UNL

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Ejercicio 14: encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado

Longitud de Arco $= \int_a^b \sqrt{1+(f'(y))^2}\,dx$

$$\rightarrow\ f'(x)^2 = \frac{(y-1)^2}{4y}$$

$$1+f'(x)^2 = 1+\frac{(y-1)^2}{4y} = \frac{4y+y^2-2y+1}{4y} = \frac{y^2+2y+1}{4y} = \frac{(y+1)^2}{4y} = \left(\frac{y+1}{2\sqrt{y}}\right)^2$$

$$\textit{Longitud de Arco} = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{y+1}{2\sqrt{y}}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{y+1}{2\sqrt{y}}\right)dx$$

X sustitución reemplazando $u=\sqrt{y}$ $\quad du = \frac{1}{2\sqrt{y}}dx \quad u^2 = y$

Reemplazando en Longitud de Arco $= \int_a^b (u^2+1)\,du = u^3 + u\big|_a^b$

FICH UNL

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Ejercicio 14: encuentre la longitud de arco de la gráfica de la función en el intervalo indicado

$$Longitud\ de\ Arco = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dx$$

$$Reemplazando\ en\ Longitud\ de\ Arco = \int_a^b (u^2 + 1)\, du = \frac{1}{3}u^3 + u\Big|_a^b$$

$reemplazando$ u= $\sqrt{y}$

$$Longitud\ de\ Arco = \frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}4^{\frac{3}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}1^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}$$

$$Longitud\ de\ Arco = \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 1 = \frac{13}{3}$$

FICH UNL

Práctica: Sección 5.4 - Larson

Cálculo de Longitud de Arco

FICH UNL

Profesor: Dr. Ing. Carlos C. SCIOLI