ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

$$\emptyset \approx \widehat{\emptyset} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$$

$$\int_{\Omega} W R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W} R_{\Gamma} d\Gamma = 0$$

- ψ es una función que intenta anular los residuos en las fronteras (o al menos algunas de ellas).
- N_m es una familia de funciones (polinómicas, trigonométricas, potenciales) que serán la base de aproximación. En el caso de definir ψ para anular residuos en la frontera, N_m debe anularse en dichas fronteras.

Definiciones de residuo:

1) $R = \emptyset - \widehat{\emptyset}$ → Residuo como aproximación a una función conocida.

2) $R = A(\widehat{\emptyset})$ → Residuo que surge de aplicar la ecuación diferencial (y sus condiciones de borde) a una solución aproximada.

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

1) Aproximemos $\phi(x) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, con 0 ≤ x ≤ 1

$$\emptyset(0) = 1; \emptyset(1) = 2 \quad \rightarrow \quad \psi = x + 1$$

- Encontramos la función ψ que satisface las “condiciones de borde”, entonces no necesitamos evaluar el residuo en la frontera.
- Elegimos $N_m = \sin(m\pi x)$ teniendo en cuenta que $N_m(0) = N_m(1) = 0 \; \forall m$
- Las incógnitas son los a_m que “pesan” cada función N_m. Generamos un sistema de ecuaciones variando las funciones de peso para lograr el objetivo.

$$\int_0^1 W_l(\emptyset - \overline{\emptyset})dx = \int_0^1 W_l\left(\emptyset - \left(\psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m\right)\right)dx = 0$$

$$\int_0^1 W_l\left(\sum_{m=1}^{M} a_m N_m\right)dx = \int_0^1 W_l \emptyset dx - \int_0^1 W_l \psi dx$$

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

$$K_{lm} = \int_0^1 W_l N_m dx\,; \quad F_l = \int_0^1 W_l(\emptyset - \psi)dx$$

Opciones de elección de W como función de peso:

- **Colocación puntual**: $W_l = \delta(x - x_l)$. Elegimos tanto puntos x_l del dominio como coeficientes am utilice para conseguir igual número de ecuaciones e incógnitas.

$$K_{lm} = \int_0^1 \delta(x - x_l) N_m dx = N_m(x_l); \quad F_l = \int_0^1 \delta(x - x_l)(\emptyset - \psi)dx = \emptyset(x_l) - \psi(x_l)$$

Si tomamos 2 coeficientes (y dos puntos del dominios, x1=1/3, x2=2/3)…

$$K_{11} = N_1(x_1) = \sin\left({}^{\pi}/_{3}\right); K_{12} = N_2(x_1) = \sin\left({}^{2\pi}/_{3}\right); F_1 = \emptyset(x_1) - \psi(x_1) = \sin\left({}^{\pi}/_{6}\right) - {}^{1}/_{3}$$

$$K_{21} = N_1(x_2) = \sin\left({}^{2\pi}/_{3}\right); K_{22} = N_2(x_2) = \sin\left({}^{4\pi}/_{3}\right); F_2 = \emptyset(x_2) - \psi(x_2) = \sin\left({}^{\pi}/_{3}\right) - {}^{2}/_{3}$$

$$\begin{pmatrix} \sin(\pi/3) & \sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \sin(4\pi/3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\pi/6) - 1/3 \\ \sin(\pi/3) - 2/3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = 0.21132;\ a_2 = -0.018875 \ \rightarrow \ \hat{\emptyset} = \boldsymbol{x + 1 + 0.21132\,\sin(\pi x) - 0.01875\,\mathit{sin}(2\pi x)}$$

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

$$K_{lm} = \int_0^1 W_l N_m dx\,; \quad F_l = \int_0^1 W_l(\emptyset - \psi)dx$$

Opciones de elección de W como función de peso:

- **Galerkin**: $W_l = N_l$. Al utilizar funciones de peso idénticas a las funciones de prueba estaremos generando una matriz K simétrica para representar el sistema.

$$K_{lm} = \int_0^1 N_l N_m dx = \int_0^1 \sin(l\pi x)\sin(m\pi x)\,dx\,; \quad F_l = \int_0^1 \sin(l\pi x)\,(1+\sin(\pi/_2\, x) - (x+1))dx$$

Si tomamos 2 coeficientes…

$$K_{11} = \int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx = 1/_2\,; K_{12} = K_{21} = \int_0^1 \sin(\pi x)\sin(2\pi x)\,dx = 0; K_{22} = \int_0^1 \sin^2(2\pi x)\,dx = 1/_2$$

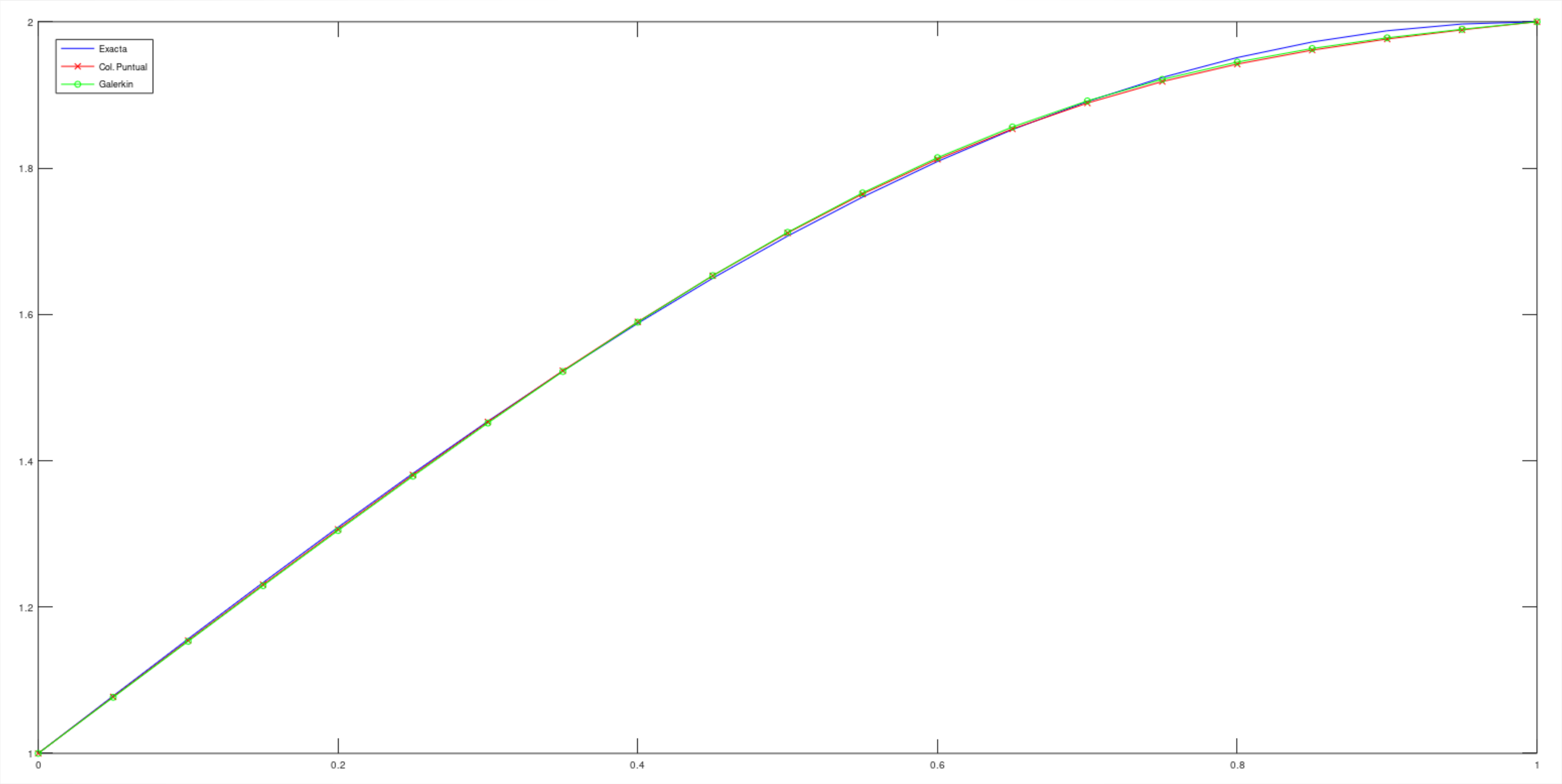
(chequear cálculos para F_1 y F_2)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/3 \\ \pi/30 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = 0.2122;\ a_2 = -0.0212 \ \rightarrow\ \hat{\emptyset} = \boldsymbol{x + 1 + 0.2122\sin(\pi x) - 0.0212\, sin(2\pi x)}$$

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados



ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

1) Aproximemos $\phi(x) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, con 0 ≤ x ≤ 1

$$\emptyset(0) = 1; \emptyset(1) = 2 \quad \rightarrow \widehat{\emptyset} = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$$

- No definimos la función ψ que satisface las "condiciones de borde", entonces necesitamos evaluar el residuo en la frontera.

$$\int_0^1 W_l(\emptyset - \overline{\emptyset})dx + \overline{W_l}(\overline{\emptyset} - 1)\Big|_{x=0} + \overline{W_l}(\overline{\emptyset} - 2)\Big|_{x=1} = 0$$

$$\int_0^1 W_l\left(\emptyset - \sum_{m=1}^{M} a_m N_m\right)dx + \overline{W_l}\left(\sum_{m=1}^{M} a_m N_m - 1\right)\Bigg|_{x=0} + \overline{W_l}\left(\sum_{m=1}^{M} a_m N_m - 2\right)\Bigg|_{x=1} = 0$$

$$K_{lm} = -\int_0^1 W_l N_m dx + \overline{W_l} N_m\Big|_{x=0} + \overline{W_l} N_m\Big|_{x=1} \; ; \; F_l = -\int_0^1 W_l \emptyset dx + \overline{W_l}\Big|_{x=0} + \overline{W_l}\Big|_{x=1}$$

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

- Utilicemos Galerkin ($W_l = N_l$) y tomemos $\overline{W_l} = -W_l$.

$$K_{lm} = \int_0^1 W_l N_m dx + N_l N_m\Big|_{x=0} + N_l N_m\Big|_{x=1} \; ; \; F_l = \int_0^1 W_l \emptyset dx + N_l\Big|_{x=0} + N_l\Big|_{x=1}$$

- Analicemos la solución obtenida a partir de dos bases de prueba N_m:
  - $N_m = \sin(m\pi x)$ → se anulan en la frontera
  - $N_m = (x+1)^m$ → toma valores en la frontera por lo tanto produce un residuo

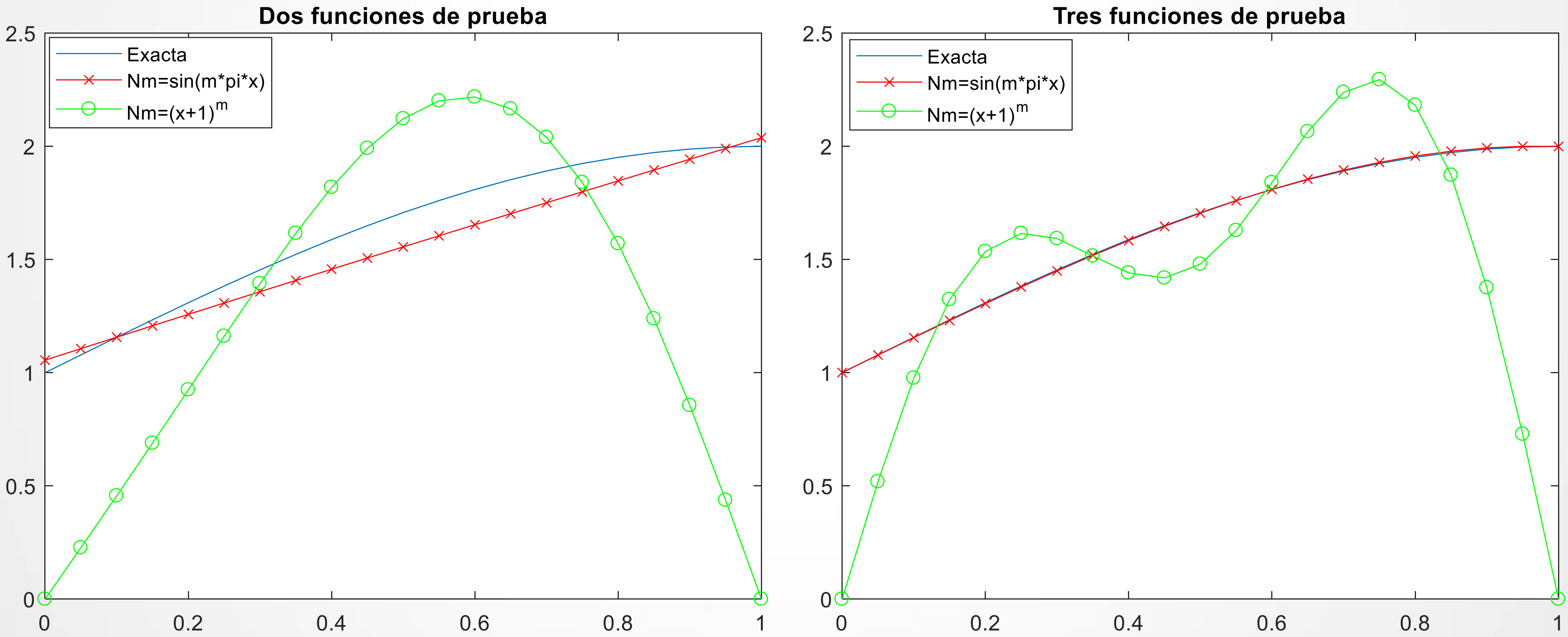
```
syms x;
PHI_ex = 1+sin(pi*x/2);
M = 3; % cantidad de funciones de prueba
N = sin((1:M)*pi*x);
% N = (x+1).^(1:M);

K = int(N'*N,0,1)+subs(N'*N,x,0)+subs(N'*N,x,1);
F = int(N*PHI_ex,0,1)+subs(N,x,0)+subs(2*N,x,1);
a = double(K)\double(F)';

PHI_ap = N*a;

x_num = 0:0.05:1;
plot(x_num,subs(PHI_ex,x,x_num));
hold on;
plot(x_num,subs(PHI_ap,x,x_num),'rx-');
```

Residuos Ponderados



Residuos Ponderados

2) Resolvemos una ecuación diferencial $R = A(\widehat{\emptyset})$.

Ejercicio 1a GTP: $\rho c_p = 0; k = 2; c = 0; G(x) = 100$

$$2\frac{\partial^2\emptyset}{\partial \mathrm{x}^2} + 100 = 0; \quad \forall \mathrm{x}[0,1]$$

$$\emptyset(0) = 10; \emptyset(1) = 50$$

Solución analítica: $\emptyset(x) = -25x^2 + 65x + 10$

$$\widehat{\emptyset} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m \; \rightarrow \; \psi = 40x + 10$$

$$\int_0^1 W_l R_\Omega dx = \int_0^1 W_l \left(2\frac{\partial^2\widehat{\emptyset}}{\partial x^2} + 100\right) dx = \int_0^1 W_l \left(2\left(\frac{\partial^2(\psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m)}{\partial x^2}\right) + 100\right) dx$$

$$= \int_0^1 2W_l \left(\frac{\sum a_m \, \partial^2 N_m}{\partial x^2}\right) + \int_0^1 100 W_l dx = 0$$

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

Consideraciones:

- Galerkin: $W_l = N_l$.
- Base de funciones de prueba: $N_m = x(x-1)^m; N_m(0) = N_m(1) = 0\ \forall m$

$$K_{lm} = 2\int_0^1 N_l \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx\,; \quad F_l = -100\int_0^1 N_l dx$$

Si tomamos 3 coeficientes…

```
K =

  -0.597264024732663    0.628084910487547   -0.594338582910361
   0.628084910487547   -1.02233162079974     1.18168498926123
  -0.594338582910361    1.18168498926123    -1.53299187883694
```

```
F =

  -10.9140914229523
   13.1965345699665
  -13.7427293451395
```

```
a =

   15.0112503447499
  -0.466798943727294
   2.78498199609626
```

Residuos Ponderados

Resolvemos el mismo ejercicio pero sin ψ.

$$\widehat{\emptyset} = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m \rightarrow N_m = e^{mx}$$

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W_l} R_{\Gamma} d\Gamma = \int_0^1 W_l \left(2\frac{\partial^2 \widehat{\emptyset}}{\partial x^2} + 100 \right) dx + \overline{W_l}\left(\widehat{\emptyset} - 10\right)\Big|_{x=0} + \overline{W_l}\left(\widehat{\emptyset} - 50\right)\Big|_{x=1} = 0$$

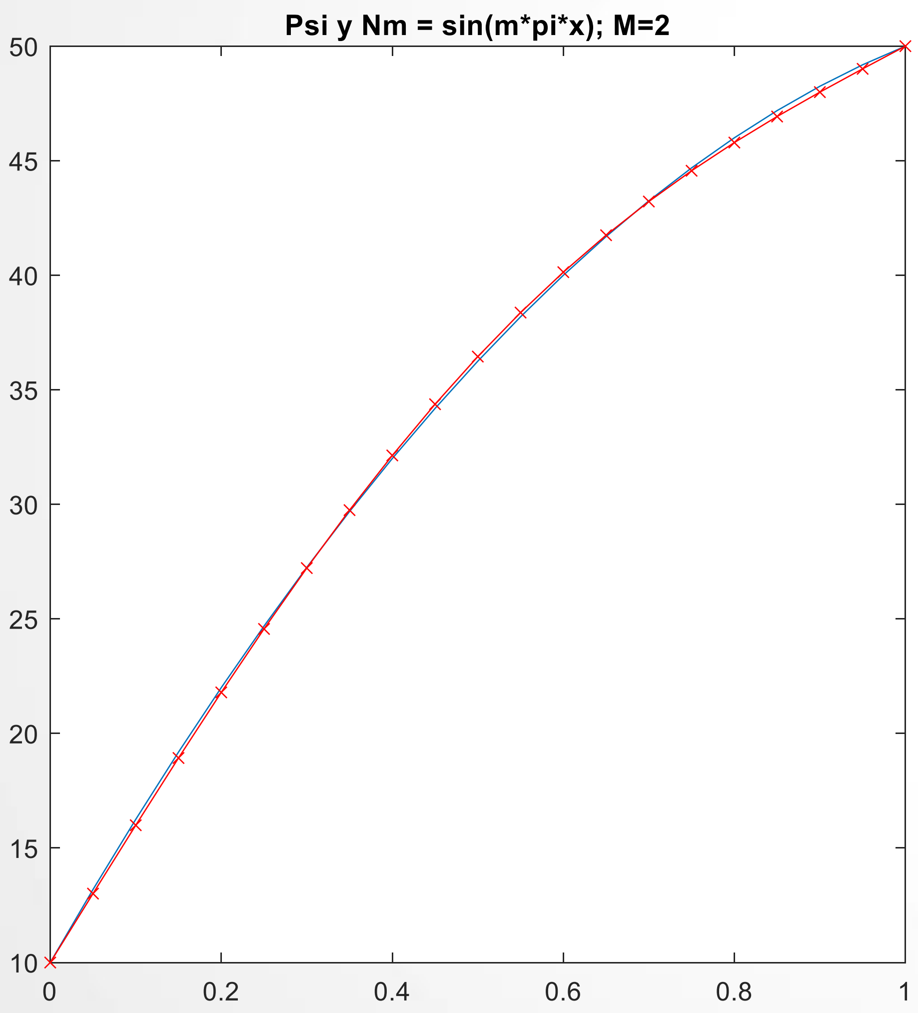
Galerkin: $W_l = N_l$; $\overline{W_l} = -W_l$

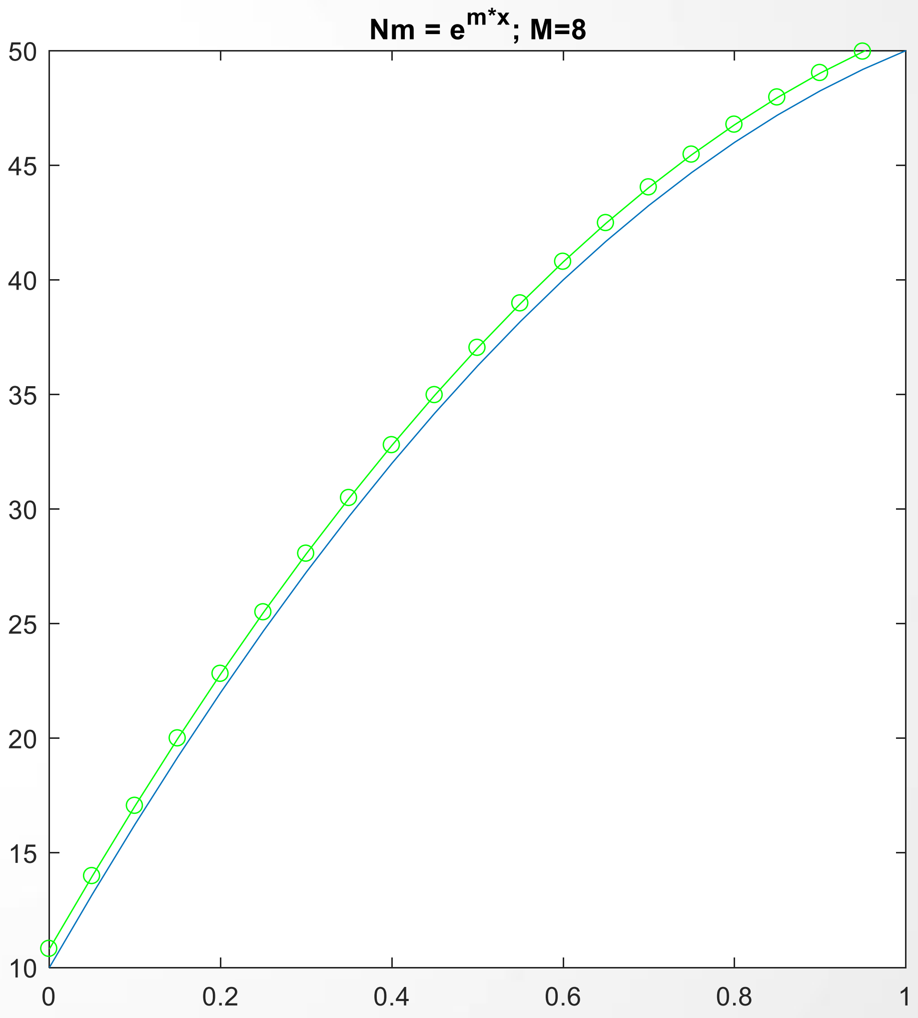
$$K_{lm} = 2\int_0^1 N_l \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx - N_l N_m\Big|_{x=0} - N_l N_m\Big|_{x=1}$$

$$F_l = -100\int_0^1 N_l dx - 10\, N_l\Big|_{x=0} - 50\, N_l\Big|_{x=1}$$

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados





ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

2) Resolvemos una ecuación diferencial $R = A(\widehat{\emptyset})$.

Ejercicio 1c GTP: $\rho c_p = 0; k = 1; c = 0; G(x) = 100(x-3)^2$

$$\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \mathrm{x}^2} + 100(x-3)^2 = 0; \quad \forall \mathrm{x}[1,5]$$

$$\mathrm{q}(1) = 2; \ \emptyset(5) = 0$$

Solución analítica: $\emptyset(x) = \frac{-25x^4+300x^3-1350x^2+1906x+2345}{3}$

- De ahora en más trabajaremos sin función psi y además introduciremos el concepto de **debilitación** o **formulación débil**.

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

$$\hat{\emptyset} = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m \rightarrow N_m = x^m$$

$$\int_1^5 W_l \left(k \frac{\partial^2 \hat{\emptyset}}{\partial x^2} + 100(x-3)^2 \right) dx + \overline{W_l} \left(-k \frac{\partial \hat{\emptyset}}{\partial x} . \eta - 2 \right) \Bigg|_{x=1} + \overline{W_l} \hat{\emptyset} \Big|_{x=5}$$

Galerkin: $W_l = N_l$; $\overline{W_l} = -W_l$

$$K_{lm} = \int_1^5 N_l \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx + N_l \frac{\partial N_m}{\partial x} . \eta \Bigg|_{x=1} - N_l N_m \Big|_{x=5}$$

$$F_l = -100 \int_1^5 N_l (x-3)^2 dx - 2\, N_l \Big|_{x=5}$$

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados

Formulación débil: $\int_{\Omega} \alpha \nabla \beta d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla \alpha \beta d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha \beta . \eta d\Gamma$ (Green, integ. por partes)

Término difusivo:

$$\int_1^5 W_l k \frac{\partial^2 \widehat{\emptyset}}{\partial x^2} dx = -\int_1^5 \frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \widehat{\emptyset}}{\partial x} dx + W_l k \frac{\partial \widehat{\emptyset}}{\partial x} . n \Big|_{x=1}^{x=5}$$

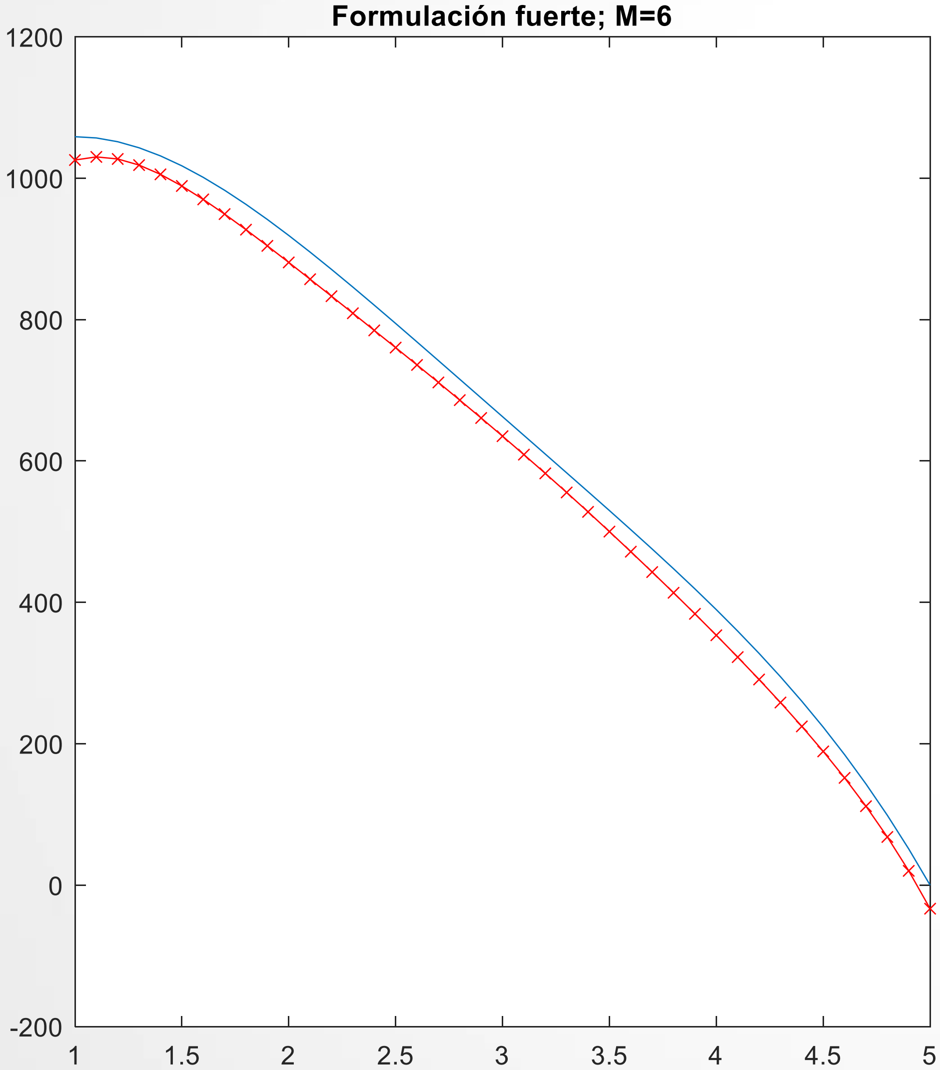
$$-\int_1^5 \frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \widehat{\emptyset}}{\partial x} dx + W_l k \frac{\partial \widehat{\emptyset}}{\partial x} . n \Big|_{x=1}^{x=5} + \int_1^5 W_l (100(x-3)^2)\, dx + \overline{W_l} \left(k \frac{\partial \widehat{\emptyset}}{\partial x} . n - 2 \right) \Big|_{x=1} + \overline{W_l} \widehat{\emptyset} \Big|_{x=5} = 0$$

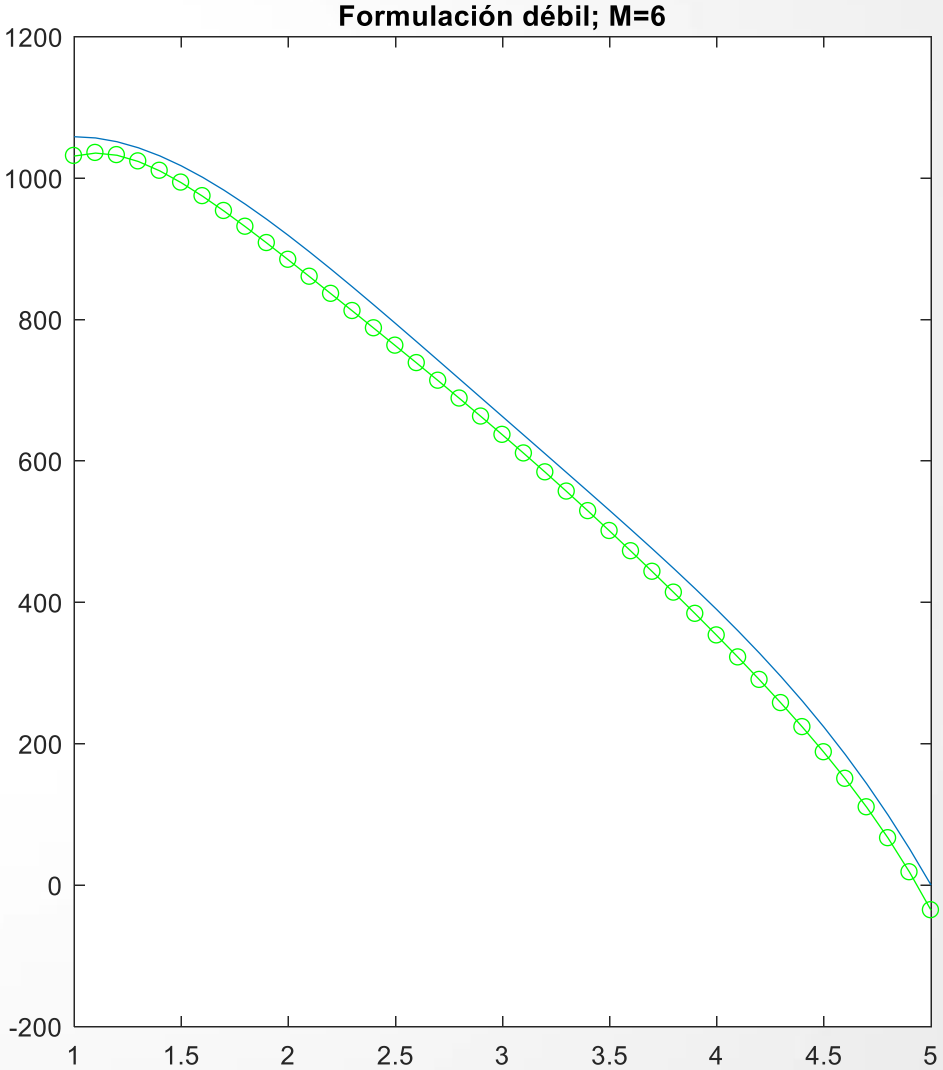
Galerkin: $W_l = N_l$; $\overline{W_l} = -W_l$

$$K_{lm} = \int_1^5 \frac{\partial N_l}{\partial x} k \frac{\partial N_m}{\partial x} dx - W_l k \frac{\partial N_m}{\partial x} . n \Big|_{x=5} + N_l N_m \Big|_{x=5} ; \quad F_l = 100 \int_0^1 N_l (x-3)^2 dx + 2\, N_l \Big|_{x=1}$$

ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados





ELEMENTOS FINITOS

Residuos Ponderados – Conclusiones:

- Podemos plantear una aproximación con o sin una función que se adapte a las condiciones de borde.
- Podemos utilizar varias opciones para la función de peso (Coloc. puntual, subdominios, Galerkin, mínimos cuadrados).
- Podemos plantear una formulación fuerte o débil del problema.
- En el Método de Elementos Finitos utilizaremos de manera definitiva
  - Aproximaciones sin funciones que cumplan con la condición de borde.
  - Galerkin como funciones de peso.
  - Formulación débil para el desarrollo de los términos de segundo orden.

ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión

Ejercicio 1a GTP: $\rho c_p = 0; k = 2; c = 0; G(x) = 100$

$$\mathrm{k}\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \mathrm{x}^2} + \mathrm{G} = 0; \quad \forall \mathrm{x}[0,1]$$

$$\emptyset(0) = 10; \emptyset(1) = 50$$

Solución analítica: $\emptyset(x) = -25x^2 + 65x + 10 \rightarrow \widehat{\emptyset} = \sum_{i=1}^{N} N_i(x) T_i$

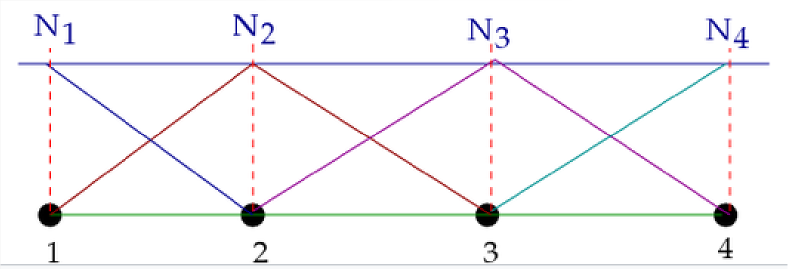
$$\int_{\Omega} W_l \left(k \frac{d^2\widehat{\emptyset}}{dx^2} + G \right) d\Omega = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} W_l \left(k \frac{d^2\widehat{\emptyset}}{dx^2} + G \right) d\Omega^e = 0$$

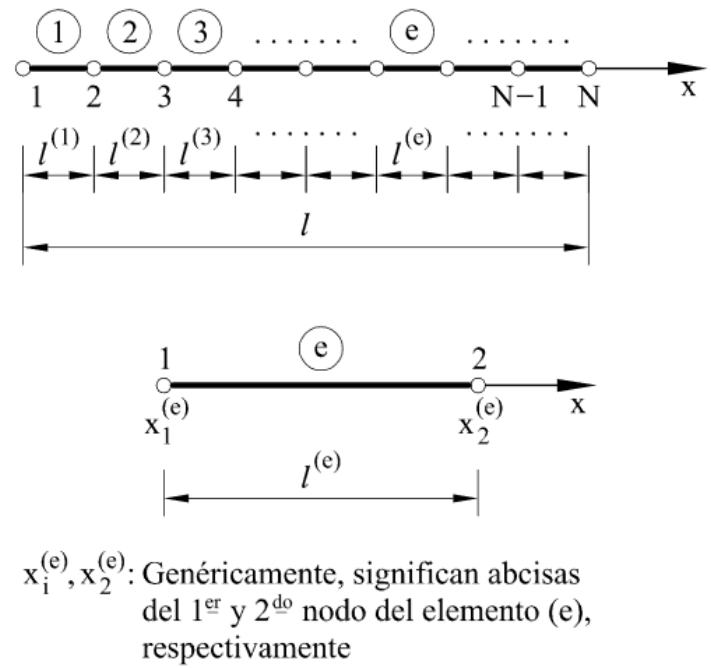
$$\sum_{e=1}^{E} \left[\int_{\Omega^e} N_l k \frac{d^2\widehat{\emptyset}}{dx^2} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} N_l G d\Omega^e \right] = \sum_{e=1}^{E} \left[-\int_{\Omega^e} \frac{dN_l}{dx} k \frac{d\widehat{\emptyset}}{dx} d\Omega^e + N_l k \frac{d\widehat{\emptyset}}{dx} \Bigg|_{x=0}^{x=1} + \int_{\Omega^e} N_l G d\Omega^e \right] = 0$$

$$\sum_{e=1}^{E} \left[\sum_{m=1}^{2} T_m \int_{\Omega^e} \frac{dN_l}{dx} k \frac{dN_m}{dx} d\Omega^e + N_l k \frac{d\widehat{\emptyset}}{dx} \Bigg|_{x=0}^{x=1} \right] = \sum_{e=1}^{E} \left[\int_{\Omega^e} N_l G d\Omega^e \right]$$

ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión





Elementalmente…

$$\sum_{m=1}^{2} T_m \int_{\Omega^e} \frac{dN_l}{dx} k \frac{dN_m}{dx} d\Omega^e + N_l k \frac{d\hat{\emptyset}}{dx}\bigg|_{x=0}^{x=1} = \int_{\Omega^e} N_l G d\Omega^e$$

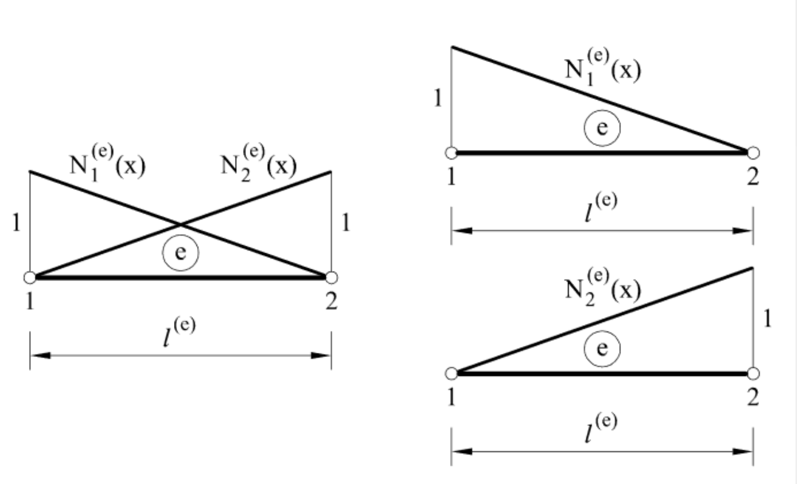
$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \frac{dN_l}{dx} k \frac{dN_m}{dx} d\Omega^e \,; \quad F_l^e = \int_{\Omega^e} N_l G d\Omega^e$$

$N_l k \frac{d\hat{\emptyset}}{dx}\Big|_{x=0}^{x=1}$ → Estará presente sólo en el análisis de los elementos con nodos de frontera.

ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión

- Funciones de forma lineales



$$N_1^e(x) = \frac{x_2 - x}{h^e}; \quad N_2^e(x) = \frac{x - x_1}{h^e}; \quad h^e = x_2 - x_1$$

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{-1}{h^e}; \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{h^e}$$

$$K_{lm}^e = k\int_{\Omega^e} \frac{dN_l}{dx}\frac{dN_m}{dx} d\Omega^e; \quad F_l^e = G\int_{\Omega^e} N_l d\Omega^e$$

$$K_{11}^e = k\left(\frac{-1}{h^e}\right)\left(\frac{-1}{h^e}\right)\int_{\Omega^e} d\Omega^e = \frac{k}{h^e}; \quad F_1^e = G\int_{\Omega^e} N_1 d\Omega^e = G\frac{h^e}{2}$$

En general, para cualquier elemento **e**:

$$K^e = \frac{k}{h^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad F^e = \frac{Gh^e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Discretización propuesta: $\Delta x = h^e = {}^1/_3$
Incógnitas del problema? $\emptyset_1 \; y \; \emptyset_2$

ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión

- Como la malla es uniforme (todos los elementos son del mismo tamaño):

$$K^1 = K^2 = K^3 = \frac{k}{h^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad F^1 = F^2 = F^3 = \frac{Gh^e}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{100}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ensamble parar generar el sistema de ecuaciones (numeración local vs numeración global):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & & \mathbf{O} \\ & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & & \\ \mathbf{O} & & & K_{12}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\ & & & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \phi_{n+1} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} + q_0 \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)} + f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} - \bar{q} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

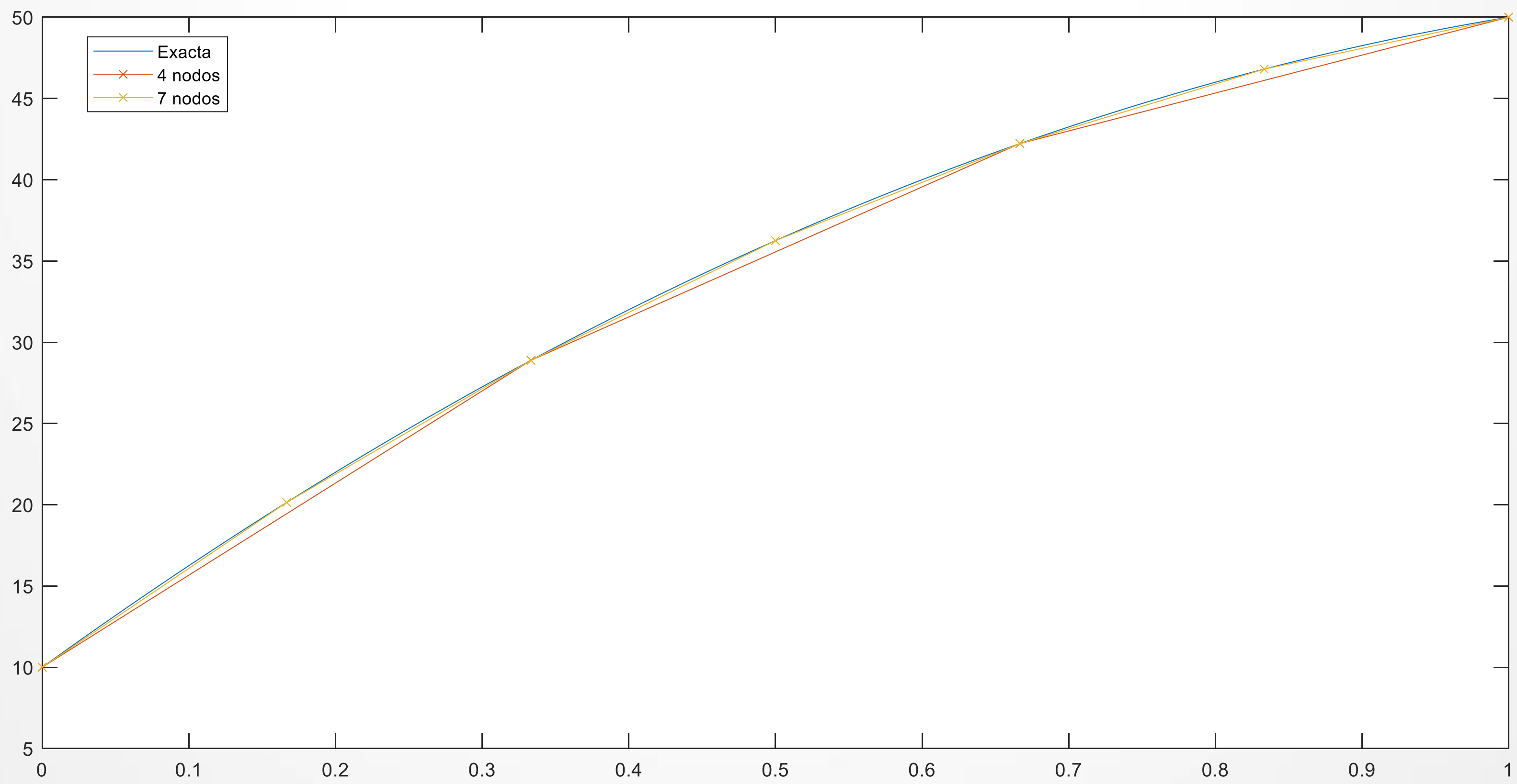
$$K = 6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \frac{100}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_1\, q\big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ N_4\, q\big|_{x=1} \end{pmatrix}$$

ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión

- Imponiendo condiciones de borde:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 12 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \\ \emptyset_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 100/3 \\ 100/3 \\ 50 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \\ \emptyset_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 28.88 \\ 42.22 \\ 50 \end{pmatrix}$$



ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión

Ejercicio 1c GTP: $\rho c_p = 0; k = 1; c = 0; G(x) = 100(x-3)^2$

$$\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \mathrm{x}^2} + 100(x-3)^2 = 0; \quad \forall \mathrm{x}[1{,}5]$$

$$\mathrm{q}(1) = 2; \; \emptyset(5) = 0$$

Solución analítica: $\emptyset(x) = \frac{-25x^4+300x^3-1350x^2+1906x+2345}{3} \rightarrow \widehat{\emptyset} = \sum_{i=1}^{N} N_i(x) T_i$

Discretización propuesta: $\Delta x = \frac{L}{N-1} = \frac{4}{3}$

Incógnitas del problema? $\emptyset_0, \, \emptyset_1 \; y \; \emptyset_2$

ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión

Elementalmente…

$$\sum_{m=1}^{2} T_m \int_{\Omega^e} \frac{dN_l}{dx} k \frac{dN_m}{dx} d\Omega^e + N_l k \left.\frac{d\widehat{\emptyset}}{dx}\right|_{x=5} = \int_{\Omega^e} N_l G d\Omega^e - N_l\, q\Big|_{x=1}$$

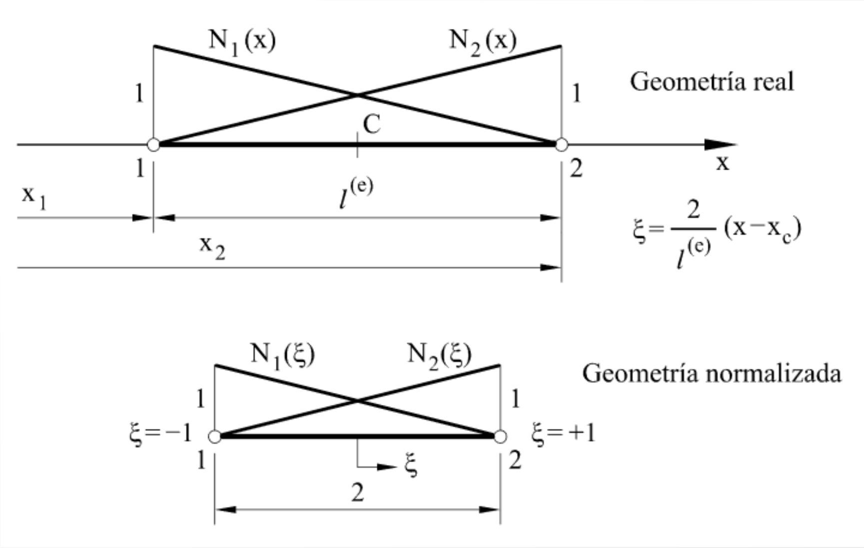
$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \frac{dN_l}{dx} k \frac{dN_m}{dx} d\Omega^e\,; \quad F_l^e = \int_{\Omega^e} N_l G d\Omega^e - N_l\, q\Big|_{x=1}$$

Formulación isoparamétrica: $\xi \in [-1,1]$

$$x(\xi) = \sum N_i(\xi) x_i = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2$$

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}; N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

$$x(\xi) = \frac{h^e}{2}\xi + x_c$$



ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión

Relaciones importantes:

$$\frac{dN_i}{d\xi} = \frac{dN_i}{dx}\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_i}{dx}\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = \frac{dN_i}{dx}\frac{h^e}{2} \rightarrow \frac{dN_i}{dx} = \frac{2}{h^e}\frac{dN_i}{d\xi} \; y \; dx = \frac{h^e}{2} d\xi$$

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{2}{h^e}\frac{dN_1}{d\xi} = \frac{2}{h^e}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{h^e}; \frac{dN_2}{dx} = \frac{2}{h^e}\frac{dN_2}{d\xi} = \frac{2}{h^e}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{h^e}$$

$$K_{lm}^e = \int_{x_i}^{x_j} \frac{dN_l}{dx} k \frac{dN_m}{dx} dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{h^e}\frac{dN_l}{d\xi} k \frac{2}{h^e}\frac{dN_m}{d\xi}\frac{h^e}{2} d\xi = k(-1)^{l+m}\frac{1}{h^e}$$

$$F_l^e = \int_{x_i}^{x_j} N_l(x) G(x) dx - N_l \, q\Big|_{x=1} = \int_{-1}^{1} N_l(\xi) G\big(x(\xi)\big)\frac{h^e}{2} d\xi - N_l \, q\Big|_{x=1}$$

$\int_{-1}^{1} N_l(\xi) G(\xi) \frac{h^e}{2} d\xi$ → Integración numérica: Gauss-Legendre es el más utilizado

ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión

$$K^e = \frac{k}{h^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_l^e = \int_{-1}^{1} N_l(\xi)100\left(\frac{h^e}{2}\xi + x_c - 3\right)^2 \frac{h^e}{2} d\xi + N_l\, q\Big|_{x=1}$$

$$F^1 = \begin{bmatrix} 167.901 - 2 \\ 88.888 \end{bmatrix}; F^2 = \begin{bmatrix} 9.8765 \\ 9.8765 \end{bmatrix}; F^3 = \begin{bmatrix} 88.888 \\ 167.9012 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.75 & -0.75 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1.5 & -0.75 & 0 \\ 0 & -0.75 & 1.5 & -0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \\ \emptyset_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165.901 \\ 98.7645 \\ 98.7645 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \\ \emptyset_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1058.662 \\ 837.460 \\ 484.5733 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ELEMENTOS FINITOS

Elementos Finitos – 1 dimensión