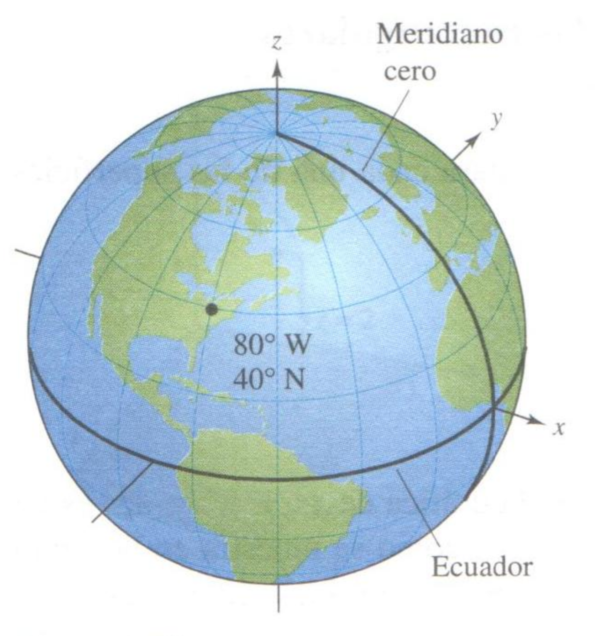
Cálculo II

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Prof. Ing. Silvia Seluy

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Las coordenadas esféricas representan puntos cuyas coordenadas son una distancia y dos ángulos. Sistema similar al de altitud y longitud empleado para situar puntos sobre la superficie de la Tierra. En la fig. hay un punto de latitud 40º N (respecto al ecuador) y longitud 80º O (respecto al meridiano cero).



Suponiendo esférica a la Tierra, con un radio de 4000 millas, el punto en coordenadas esféricas estará dado por las coordenadas:

P(4000, -80º, 50º), tales que:

4000 (longitud del radio de la Tierra)

80º (sentido horario a partir del meridiano cero)

50º (hacia abajo a partir del Polo Norte)

- La primera de las coordenadas esféricas es la distancia desde el punto hacia el origen de coordenadas (ρ).
- La segunda coordenada es el ángulo formado por $\dot{OP}$ con el semi eje z, llamado φ y otro
- ángulo conocido en las coord. cilíndricas, llamado θ.

DEFINICIÓN Coordenadas esféricas

Las **coordenadas esféricas** representan un punto P en el espacio mediante las tercias ordenadas (ρ, ϕ, θ) en las que

1. ρ es la distancia de P al origen.
2. ϕ es el ángulo que $\overrightarrow{OP}$ forma con el semieje positivo z $(0 \le \phi \le \pi)$.
3. θ es el ángulo de las coordenadas cilíndricas.

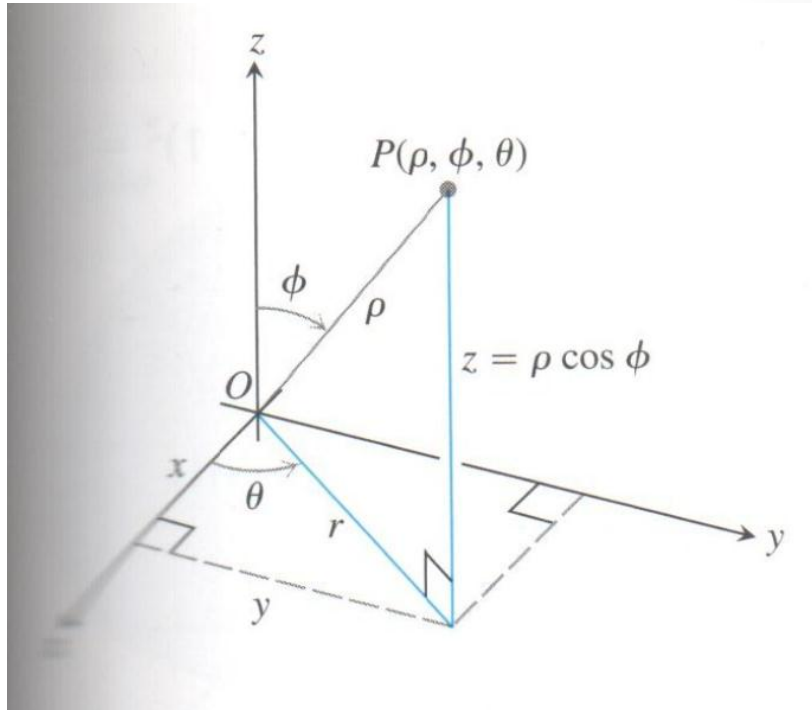


FIGURA 15.41 Las coordenadas esféricas ρ, ϕ y θ y su relación con x, y, z y

RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS RECTANGULARES Y LAS ESFÉRICAS

En los mapas de la Tierra, se relaciona al ángulo θ con el meridiano de un punto sobre la Tierra, mientras que el ángulo φ con la latitud, siendo ρ la relación con la altitud sobre la superficie terrestre.

Ecuaciones que relacionan las coordenadas esféricas con las coordenadas cartesianas y cilíndricas

$$r = \rho \operatorname{sen} \phi, \qquad x = r \cos \theta = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta,$$

$$z = \rho \cos \phi, \qquad y = r \operatorname{sen} \theta = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

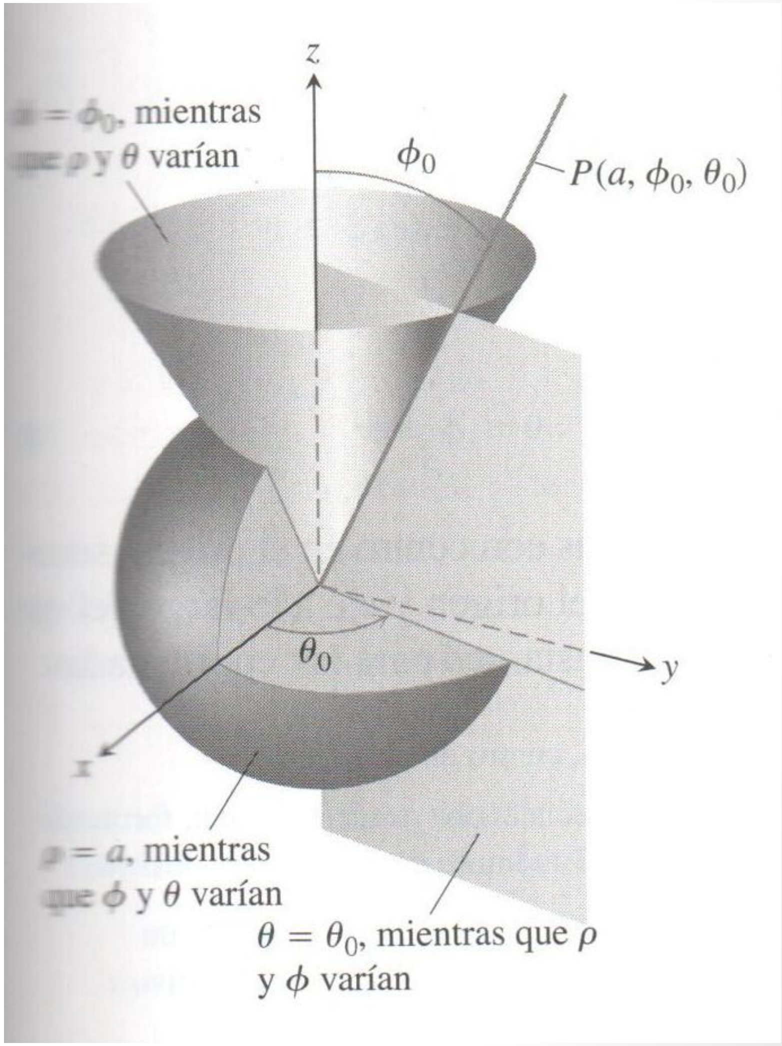
UTILIDAD DE LAS COORDENADAS ESFÉRICAS

El sistema de coordenadas esféricas es especialmente útil para superficies en el $z = z_0$ Espacio que tengan un punto ó centro de simetría.

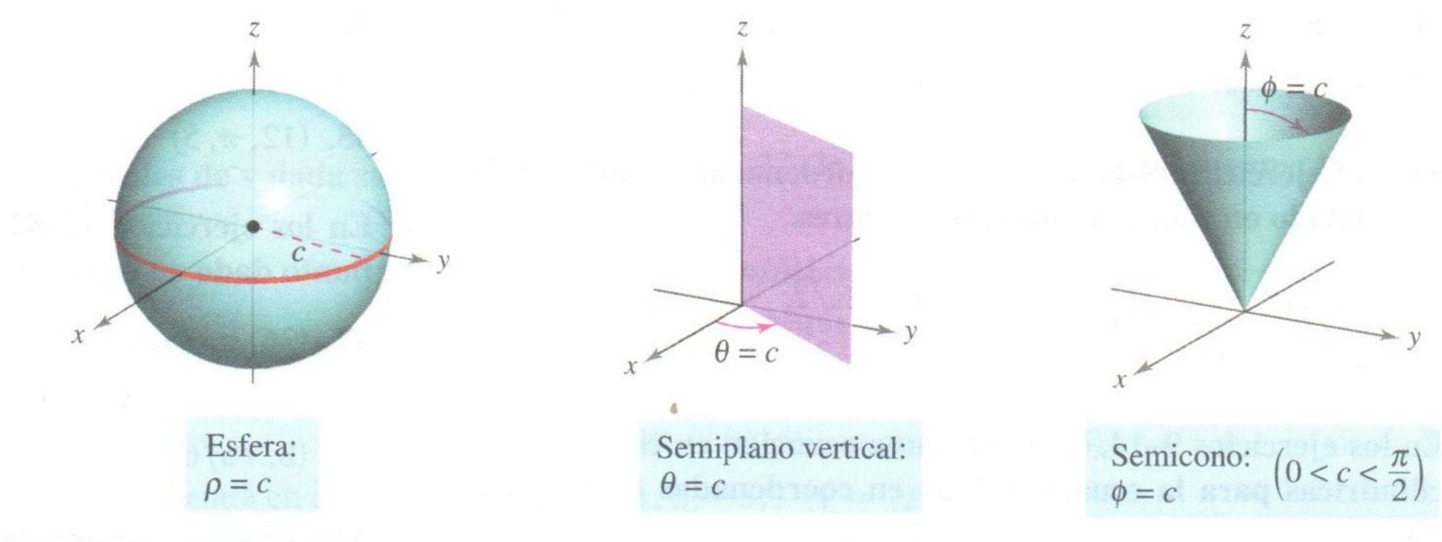
Esfera con centro en el origen tiene por ecuación: $\rho = a$

Un cono con vértice en el origen y eje paralelo al z $\varphi = \varphi_0$

Semiplano que contiene al eje z: $\theta = \theta_0$



Las ecuaciones vistas, sencillas, representan:



Pasaje de coordenadas rectangulares a esféricas - Ejemplo

Encuentre una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie representada por cada una de las ecuaciones rectangulares.

a. Cono: $x^2 + y^2 = z^2$

b. Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

Solución

a. Sustituyendo de manera adecuada x, y y z en la ecuación dada se obtiene lo siguiente.

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta = \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi = \rho^2 \cos^2 \phi$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi} = 1 \qquad \rho \geq 0$$

$$\tan^2 \phi = 1 \qquad \phi = \pi/4 \text{ o } \phi = 3\pi/4$$

La ecuación $\phi = \pi/4$ representa el semicono *superior* y la ecuación $\phi = 3\pi/4$ representa el semicono *inferior.*

b. Como $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = \rho\cos\phi$, la ecuación dada tiene la siguiente forma esférica.

$$\rho^2 - 4\rho\cos\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\rho - 4\cos\phi) = 0$$

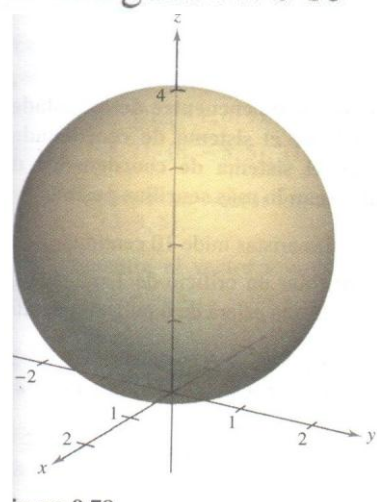
Descartando por un momento la posibilidad de que $\rho = 0$, se tiene la ecuación esférica

$$\rho - 4\cos\phi = 0 \qquad \text{o} \qquad \rho = 4\cos\phi.$$

Observe que el conjunto solución de esta ecuación comprende un punto en el que $\rho = 0$, por lo tanto no se pierde nada al descartar el factor ρ. En la figura 9.78 se muestra la esfera representada por la ecuación $\rho = 4\cos\phi$.

Rectangular:
$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

Esférica:
$\rho = 4\cos\phi$



igura 9.78

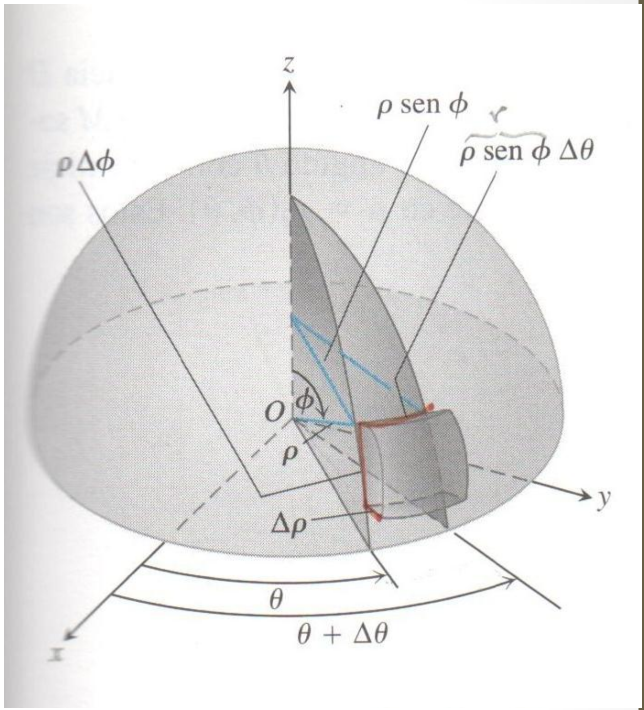
Integrales triples en coordenadas esféricas.

Se toma una región D, la cual se divide en n cuñas esféricas.

Consideramos la k-ésima cuña cilíndrica y el Punto $(\rho_k, \varphi_k, \theta_k)$. El tamaño de la cuña está Dado por los incrementos $\Delta\rho_k, \Delta\varphi_k, \Delta\theta_k$

Tal cuña esférica tiene por aristas:

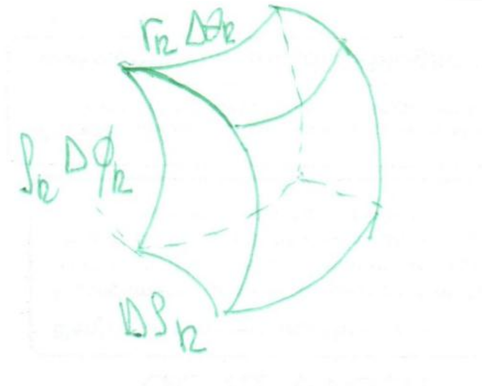
Un arco circular de longitud $\rho_k\Delta\varphi_k$ y otro arco circular de longitud $\rho_k sen\,\varphi_k \Delta\theta_k$ siendo su espesor $\Delta\rho_k$. Al tomar pequeños a $\Delta\rho_k, \Delta\varphi_k, \Delta\theta_k$ la cuña se aproxima a un cubo haciendo:



$$\Delta V_k = \rho_k \Delta\varphi_k . r_k \Delta\theta_k . \Delta\rho_k$$

$$\Delta V_k = \rho_k \Delta\varphi_k . \rho_k\, sen\,\varphi_k \Delta\theta_k . \Delta\rho_k$$

$$\Delta V_k = \rho_k^2 sen\,\varphi_k \Delta\varphi_k \Delta\theta_k . \Delta\rho_k$$



La suma de Riemann correspondiente para una función $F(\rho, \phi, \theta)$ es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(\rho_k, \phi_k, \theta_k)\, \rho_k^2 \operatorname{sen} \phi_k\, \Delta\rho_k\, \Delta\phi_k\, \Delta\theta_k .$$

Cuando la norma de la partición tiende a cero y las cuñas esféricas son cada vez más pequeñas, las sumas de Riemann tienen un límite si F es continua:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(\rho, \phi, \theta)\, dV = \iiint_D F(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

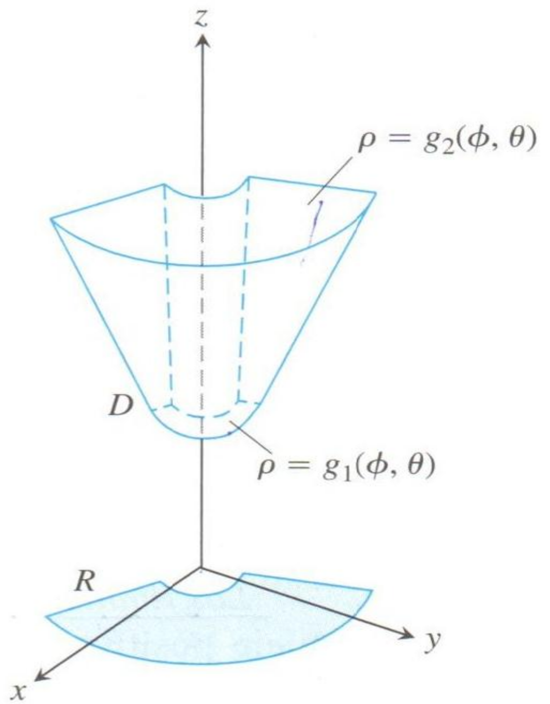
Cómo integrar en coordenadas esféricas?

Para evaluar

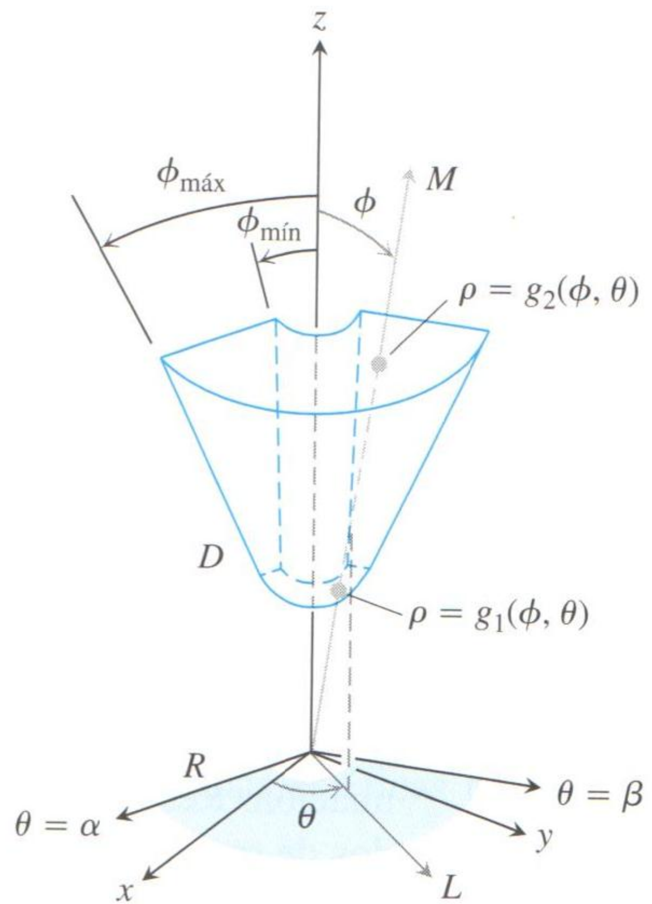
$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta)\, dV$$

sobre una región D en el espacio en coordenadas esféricas, integrando primero con respecto a ρ, luego con respecto a ϕ, y por último con respecto a θ, siga estos pasos.

1. *Haga un bosquejo*. Trace la región D junto con su proyección R sobre el plano xy. Marque las superficies que acotan a D.



2. *Determine los límites de integración en ρ.* Trace un rayo M desde el origen hacia D formando un ángulo ϕ con el semieje positivo z. Trace además la proyección de M sobre el plano xy (llame a la proyección L). El rayo L forma un ángulo θ con el semieje positivo x. Al crecer ρ M entra a D en $\rho = g_1(\phi, \theta)$ y sale en $\rho = g_2(\phi, \theta)$. Éstos son los límites de integración en ρ



3. *Determine los límites de integración en ϕ.* Para cualquier θ, dado, el ángulo ϕ que M forma con el eje z va desde $\phi = \phi_{\text{mín}}$ hasta $\phi = \phi_{\text{máx}}$. Éstos son los límites de integración en ϕ.

4. *Determine los límites de integración en θ.* El rayo L barre R cuando θ va de α a β. Éstos son los límites de integración en θ. La integral es

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{\phi=\phi_{\text{mín}}}^{\phi=\phi_{\text{máx}}} \int_{\rho=g_1(\phi, \theta)}^{\rho=g_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Fórmulas para conversión de coordenadas

Cilíndricas a rectangulares	Esféricas a rectangulares	Esféricas a cilíndricas
$x = r\cos\theta$	$x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta$	$r = \rho\operatorname{sen}\phi$
$y = r\operatorname{sen}\theta$	$y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$	$z = \rho\cos\phi$
$z = z$	$z = \rho\cos\phi$	$\theta = \theta$

Fórmulas correspondientes para dV en integrales triples:

$$dV = dx\,dy\,dz$$
$$= dz\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$