Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Práctica N° 6: BASES ORTONORMALES Y PROYECCIONES

1) Identificar cuáles de los siguientes conjuntos son ortogonales, ortonormales o ninguna de las opciones anteriores:

a) $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

b) $C = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$

2) Encontrar condiciones sobre a y b para que el conjunto $B = \left\{(a, b), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)\right\}$ sea ortonormal.

3) Encontrar una base ortogonal y una base ortonormal a partir de la siguiente base de R^3: $B = (1, 0, 0), (4, -2, 0), (1, 1, 5)$.

4) Construir una base ortogonal y otra ortonormal para los siguientes subespacios H, mediante el procedimiento de Gram – Schmidt:

a) $H = \left\{(x, y, z) \in R^3 \,/\, \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}\right\}$

b) $H = \left\{(x, y, z, w) \in R^4 \,/\, 2x - y + 3z - w = 0\right\}$

5) Demostrar que las siguientes matrices son ortogonales:

a) $A = \begin{bmatrix} sen\, t & cos\, t \\ cos\, t & -sen\, t \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

6) Demostrar que:

a) Si P y Q son matrices ortogonales de nxn, entonces $P \cdot Q$ es tambien una matriz ortogonal.

b) Si Q es una matriz ortogonal simétrica, entonces $Q^2 = I$.

c) $u + v$ y $u - v$ son vectores ortogonales si y sólo si $\|u\| = \|v\|$.

d) Si u y v son ortogonales, entonces $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

e) Si A es una matriz ortogonal, entonces $det(A) = 1$ o $det(A) = -1$.

7) Dado el conjunto $S = \left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$:

a) Verificar que S es una base ortonormal para R^3.

b) Hallar el vector de coordenadas de $\alpha = (15, 3, 3)$ con respecto a S.

c) Expresar α como combinación lineal de los vectores de S y los escalares obtenidos en *b*).

8) Sea B una base ortonormal de R^2. Encontrar las coordenadas del vector $u = (2, 4)$ con respecto a la base B:

$$B = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

9) Hallar la proyección del vector v sobre el espacio vectorial H en cada ítem:

a) $H = \{(x, y, z, w) \in R^4 \,/\, x = y, w = 3y\}$ $\quad v = (-1, 2, 3, 1)$

b) *a*) $H = \{(x, y, z) \in R^3 \,/\, 3x - 2y + 6z = 0\}$ $\quad v = (-3, 1, 4)$

10) Se define la distancia de un vector x de R^n a un subespacio H de R^n como $d(x, H) = |x - proy_H\, x|$. Utilizar este concepto para hallar la distancia del punto $Q = (1, 3, 4)$ al plano de la ecuación $2x+y-z = 0$.

11) Calcular la distancia del punto $x = (4, 1, -7) \in R^3$ al subespacio $W = \{(a, b, b) \in R^3 \,/\, a, b \in R\}$.

Observaciones: La definición 4 y el teorema 4 de la Sección 4.9 de Grossman, pueden adaptarse en el caso de que se tenga una base ortogonal y no ortonormal:

a) Si $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base ortogonal de R^n, entonces cualquier vector $v \in R^n$ puede escribirse como:

$$v = \frac{v \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{v \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 + ... + \frac{v \cdot v_n}{\|v_n\|^2} v_n$$

Donde $\frac{v \cdot v_i}{\|v_i\|^2}$ es el escalar que multiplica al vector $v_i \,\forall\, i = 1, 2, ..., n$.

Esta igualdad muestra como calcular las coordenadas de un vector v de R^n con respecto a la base ortogonal B de dicho espacio.

b) Además, si $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base ortogonal de un ***subespacio*** H de R^n y $v \in R^n$, entonces la proyección de v sobre H esta dada por:

$$proy_H\, v = \frac{v \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{v \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 + ... + \frac{v \cdot v_n}{\|v_n\|^2} v_n$$

Notar que en *a*) se esta expresando un vector de R^n como combinación de los vectores de una base ortogonal de R^n. En B se esta proyectando un vector de R^n sobre un subespacio de R^n.

Ejercitación adicional para seguir practicando:

12) Sea H un subespacio de R^4 con base $\{(1, 1, -1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1,0, 0, 1)\}$:

a) Utilizar el proceso de Gram-Schmidt para determinar una base ortonormal de H.

b) Calcular la proyección de $v = (-1, 0, -4, -2)$ sobre la base ortonormal obtenida en *a*).

13) Determinar una base ortonormal para el espacio solución del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

14) ¿Para qué valores de α los vectores $u = (1, 1, -2)$ y $v = (\alpha, -1, 2)$ son ortogonales? Justificar.