Clase teórica de la semana del 23-5

Mario Garelik

Misceláneas previas.

- No damos la sección 15.6 de Thomas.
- Comenzamos con el texto *Cálculo en varias variables* de D. Zill.

Sección 15.7 (Thomas) - Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas.

- **Ejercitación propuesta (pág. 875):**
  - 1 al 10 (para hacer solos)
  - 11a) 12a)
  - 13 al 20
  - 21 al 30 (para hacer solos)
  - 31a) 32a)
  - 33, 37, 38
  - 39 al 41
  - 43 al 66.
- **Coordenadas cilíndricas.**
  - Breve comentario intro: es un mix entre coordenadas polares en R^2, dejando la tercer coordenada, z, en rectangular, que permite ubicar puntos en R^3 de modo alternativo al cartesiano.
  - **Ecuaciones de la relación** entre las coordenadas cilíndricas y rectangulares ($r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$).
  - **Lugares geométricos** particulares: $r = a$, $\theta = \theta_0$ (corregir error acerca del lugar geométrico que representa) y $z = z_0$. Ver figura en p. 876.
  - Situaciones que sugieren el uso de coordenadas cilíndricas (por resultar en ecuaciones constantes en estas coordenadas):
    * Para describir cilindros con eje sobre el eje z.
    * Semiplanos que inician en el eje z.
    * Planos perpendiculares al eje z.
  - Rapidito: la partición en cuñas, norma, sumas de Riemann, integral triple sobre una región polar como límite de sumas de Riemann.

* Recordar que

$$\Delta V_k = \Delta A_k \cdot \Delta z_k = \Delta z_k \cdot r_k \cdot \Delta r_k \cdot \Delta \theta_k$$

donde: $\Delta A_k = r_k \cdot \Delta r_k \cdot \Delta \theta_k$ es el área de la cuña en el plano $r\theta$.

- Las **integrales triples** en cilíndricas también se evalúan **a partir de integrales iteradas**.
- Pasos sugeridos para integrar usando cilíndricas.
- Ver **ejemplo 1**. NO el ejemplo 2, que trata con centroide.

- **Coordenadas esféricas.**
  - Idea: identificar cada punto del espacio utilizando dos ángulos y una distancia.
  - Qué miden ρ , θ y r (corregir error). $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
  - **Lugares geométricos** particulares: $\rho = a$, $\phi = \phi_0$ (aclarar lo de cono generalizado) y $\theta = \theta_0$. Ver figura en p. 879.
  - **Ecuaciones de la relación** entre las coordenadas esféricas y rectangulares. Apoyarse en la figura 15.47 de la p. 879. Ver bien de dónde se deducen las relaciones
  - Rapidito: la partición en cuñas, norma, sumas de Riemann, integral triple sobre una región polar como límite de sumas de Riemann.
  - Volumen de una cuña esférica (no vemos la demo de esto... aceptarlo así).

$$\Delta V_k = \rho_k^2 \cdot \sin \phi_k \cdot \Delta \rho_k \cdot \Delta \phi_k \cdot \Delta \theta_k$$

  - A partir de lo anterior, el **diferencial de volumen** resulta:

$$\Delta V = \rho^2 \cdot \sin \phi \cdot \Delta \rho \cdot \Delta \phi \cdot \Delta \theta$$

  - Las **integrales triples** en esféricas también se evalúan **a partir de integrales iteradas**.
  - Vale Fubini: cálculo de la integral en esféricas a través de iteradas y consideraciones sobre el cambio del orden.
  - Por lo general, **integraremos primero con respecto a** ρ. Luego ϕ y θ.
  - Nos enfocamos a regiones definidas por sólidos de revolución en torno del eje z, con límites θ y ϕ constantes.
  - Pasos sugeridos para integrar usando esféricas.
  - Ejemplo 5. El ejemplo 6 no lo vemos

Un ejemplo de cilíndricas con la variable y cartesiana.

Calcular el volumen de la región limitada por los planos $y = 0$, $y = 1$ y los conos $x^2 + z^2 = y^2$ y $x^2 + z^2 = 4y^2$

Solución. Utilizando coordenadas cilíndricas,

$$x = r \cdot \sin\theta \ , \ z = r \cdot \sin\theta \ , \ y = y,$$

tenemos que:

$$x^2 + z^2 = r^2.$$

Las ecuaciones de los conos en coordenadas cilíndricas vienen dadas por

$$r^2 = y^2 \ \Rightarrow r = y$$

y

$$r^2 = 4y^2 \ \Rightarrow r = 2y$$

Cuando y varía desde $y = 0$ hasta $y = 1$, el radio varía desde $r = y$ hasta $r = 2y$, por lo que el volumen pedido es:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_y^{2y} r \cdot dr\, dy\, d\theta$$

$$= \pi \text{ (comprobar ésto)}$$

Sección 15.1 (Dennis Zill) - Integrales de línea.

- **Práctica sección 15.1 (pág. 807-808):** 1 – 35.
- Breve intro: la integral sobre una curva como extensión del concepto de integral sobre un intervalo.
- Lo desarrollado para R^2 es naturalmente extendible R^3 (p. 806).
- Terminología de base para una curva C parametrizada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad a \le t \le b$: curva suave, suave por partes, simple, cerrada, cerrada simple.
- **Orientación positiva** de una curva no cerrada: corresponde a valores crecientes del parámetro t.
- Construcción del concepto de **integral de línea como límite de sumas de Riemann**:
  - la partición del intervalo de variación del parámetro

    $$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

    induce una partición en subarcos en la curva C

    $$A = P_0 < P_1 < P_2 < \cdots < P_n = b$$

    donde $P_k = (x(t_k), y(t_k))$.
  - **Norma** de una partición.

- Sea f una función de dos (o tres) variables definida en una región de R^2 (o R^3) que contiene una curva suave C. Se define **integral de línea con respecto a *x*, con respecto a *y* y con respecto a la longitud de arco *s***: $\displaystyle\int_C f(x,y)\ dx$, $\displaystyle\int_C f(x,y)\ dy$, $\displaystyle\int_C f(x,y)\ ds$.

- La **continuidad como condición suficiente** para la integrabilidad. En adelante **todo integrando se supondrá continuo** en la región de integración.

- **Interpretación geométrica**. Supuesto de no negatividad de $f(x,y)$ sobre la curva C.

- **Evaluación de integrales de línea.** Las integrales de línea se evalúan de dos maneras diferentes, según la curva C esté definida paramétricamente o mediante una función explícita. en ambos casos, la idea es convertir la integral de línea en una integral definida.

  1. Si C está parametrizada: $C : \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Recordar que $s'(t) = ||\mathbf{v}(t)||$.
  2. Si C está definida por $y = g(x)$. En este caso, hay que tener en cuenta que como $y = g(x)$, entonces $dy = g'(x)dx$ y también $ds = \sqrt{1 + g'(x)^2}dx$.

- Escritura de las integrales de línea en la forma

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

  donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son campos escalares.

- Ejemplos.

- **Propiedades.**

  1. Integral de línea a lo largo de una **curva suave por partes** $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$.
  2. Independencia de la parametrización de la curva, pero todas las parametrizaciones con igual orientación.
  3. Orientación positiva.
  4. $\int_{-C} = -\int_C$