ECUACIONES DIFERENCIALES (FICH-UNL) - EXAMEN FINAL 19/ 12/ 2022

NOMB[redacted]

Atención: Los alumnos regulares deben realizar sólo los ejercicios marcados con [redacted]
Realice un ejercicio por hoja, escriba de manera clara y justifique todos sus desarrollos. Guarde su celular mientras esté en el aula de examen.

Ejercicio 1

a) Considere la ED autónoma $\frac{dy}{dx} = y^n$, donde n es un entero positivo. ¿Para qué valores de n el punto crítico de la ecuación es asintóticamente estable? semiestable? inestable?

b) Proponga en cada ecuación una sustitución adecuada que le permita luego resolverla:

* i) $dy - (2 + \sqrt{y - 2x + 3}\,)dx = 0$

ii) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{(1-2x)}{3}y^4$

* iii) $xy' = y.\ln(xy)$

* c) i) ¿Qué significa que una ED ordinaria de primer orden sea exacta?

ii) Halle la solución de x^2 cost dt + (4 +5x sent) dx = 0 que satisfaga $x(\pi/2) = -2$.

Ejercicio 2

* a) Aplique el principio de superposición de las EDL no homogéneas para encontrar una solución particular de $3y''-6y'+30y = 15senx + e^x tg3x$.

b) Sean $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \le t < a \\ f(t-a) & , t \ge a \end{cases}$. Demuestre, sin usar tablas, que $G(s) = e^{-as}F(s)$.

Ejercicio 3

* a) Si una barra metálica pequeña, cuya temperatura inicial es de 20°, se deja caer en un recipiente de agua hirviendo, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar 90° si se sabe que su temperatura aumentó 2° en 1 segundo? ¿qué temperatura tendrá la barra después de 2.5 minutos? ¿se puede pronosticar qué ocurre con la temperatura de la barra después de un tiempo?

* b) Suponga que una pesa de 32 libras estira 2 pies un resorte. Si la pesa se suelta desde el reposo, en la posición de equilibrio, deduzca la ecuación del movimiento $x(t)$, si una fuerza aplicada $f(t) = 20t$ actúa sobre el sistema durante $0 \le t < 5$ y se elimina después. No tenga en cuenta fuerzas de amortiguamiento.

i) Justifique por qué la fuerza externa aplicada $f(t)$ cumple las condiciones suficientes de existencia de Transformada de Laplace y luego halle $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

ii) Utilice la expresión hallada en i) para resolver el problema con el método de Transformada.

Ejercicio 4

a) Considere $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$.

i) Demuestre que el único punto singular de la ecuación es regular y que sus raíces indiciales no difieren en un número entero.

* ii) Encuentre dos soluciones en serie de Frobenius alrededor del punto singular regular.

* iii) ¿Convergen las dos series obtenidas para $x<0$? Presente el mayor intervalo de definición de la solución general de la ecuación.

b) Dado el sistema $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, encuentre:

una

* i) ~~la~~ matriz fundamental.

ii) la componente $y(t)$ de la solución general.