CÁLCULO II

DERIVADAS PARCIALES

Ing. Silvia G. Seluy

CONCEPTO

Dada una función de dos variables *f(x,y)*, y un punto (a,b) de su dominio, si dejamos variar x, dejando y fija, podríamos llamar y=b, siendo b una constante. De esta manera se considera una función de una sola variable x, a saber:

$$g(x) = f(x,b)$$

Si g tiene una derivada en a, la llamamos derivada parcial de f con respecto a x en (a,b) y la denotamos con:

$$f_x(a,b) = g'(a), \text{ donde } g(x) = f(x,b).$$

Por definición de derivada:

g´(a) es: $g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$

CONCEPTO_CONTINUACIÓN

Podemos escribir entonces:

$$f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

De manera semejante se puede expresar la derivada de la función *f* con respecto a y en (a,b), que se denota con $f_y(a,b)$ fijando x en x=a y calcular la derivada en b de la función *G(y)*= *f(a,y)*. Por lo tanto expresamos:

$$f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si se considera al punto (xo,yo) del dominio de *f*, el plano vertical y=yo corta a la superficie *z=f(x,y)* en la curva *z=f(x,yo)*, que es la gráfica de la función *z=f(x,yo) en el plano y=yo*.

En este plano, x,z son variables, pero y=cte, que toma el valor yo.

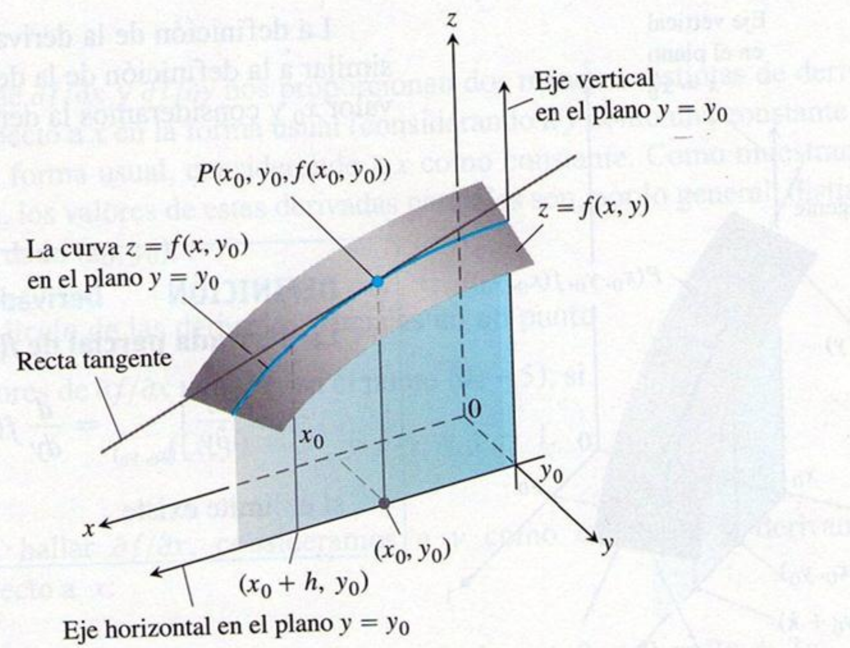


FIGURA 14.13 La intersección del plano $y = y_0$ con la superficie $z = f(x, y)$, vista desde arriba del primer cuadrante del plano xy.

DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

<u>Se define</u> derivada parcial de f(x,y) con respecto a x:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

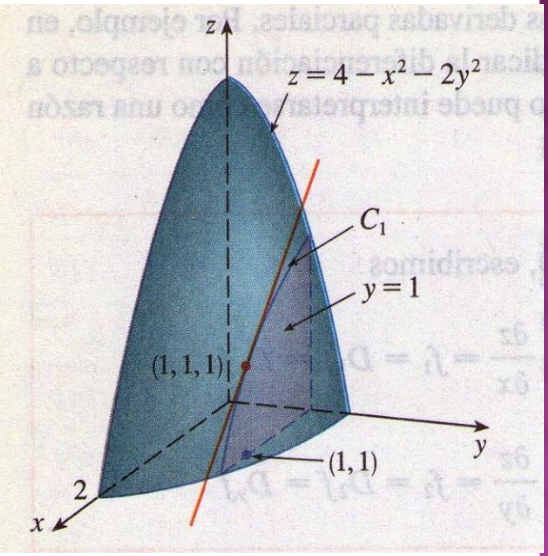
Siempre que el límite exista.

<u>Se interpreta</u> geométricamente, que la derivada parcial es la pendiente de la recta tangente a la curva *z=f(x,yo)* en P(xo,yo,f(xo,yo)) formada por la intersección del plano y =yo y la superficie *z=f(x,y)*.

EJEMPLO:

- Sea la superficie $f(x,y)=4-x^2-2y^2$, calcule las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto (1,1) e interprete los resultados como pendientes.

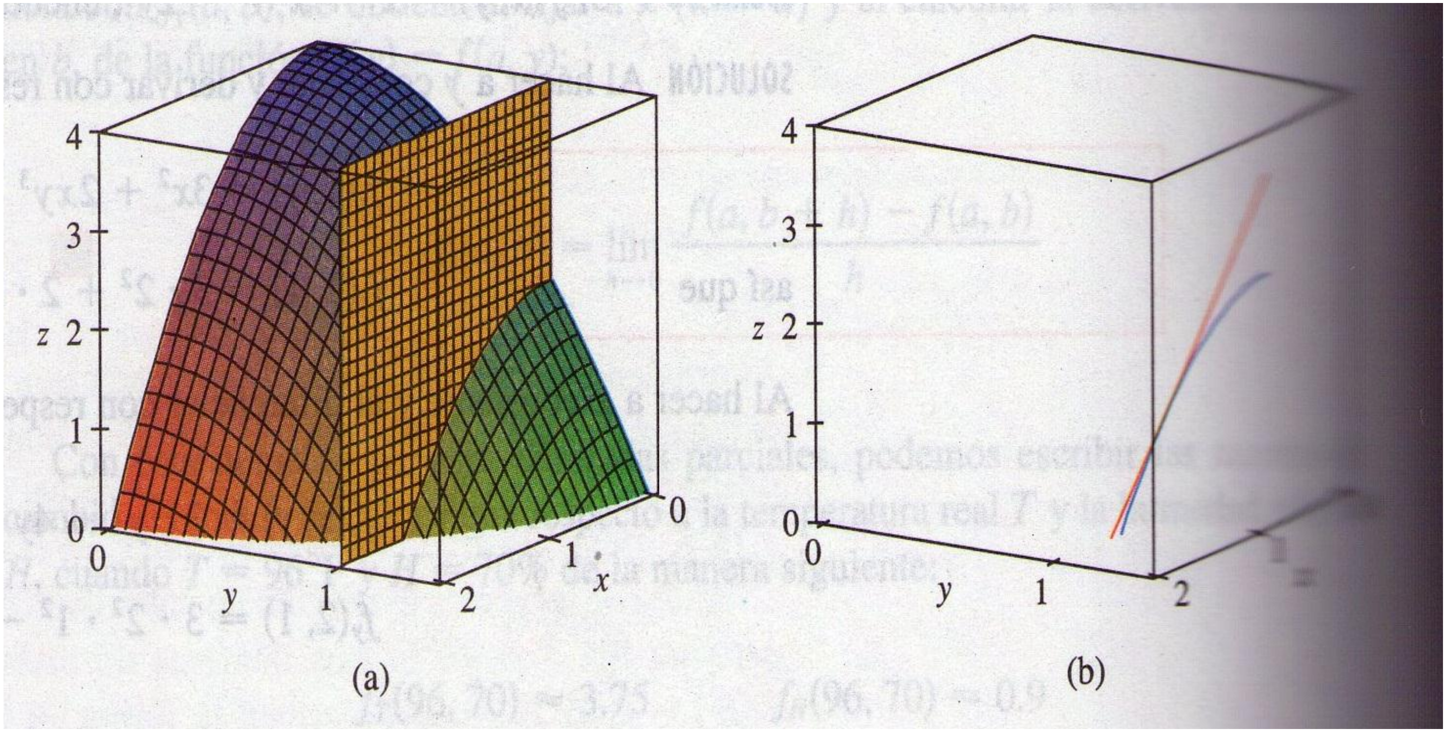
$f_x(x,y) = -2x$; $f_x(1,1) = -2$



La gráfica de la superficie es un Paraboloide y el plano vertical y=1 lo cruza en la parábola $z=2-x^2$

La pendiente de la tangente a C1 en el punto es -2

- Para interpretar mejor la situación, se puede observar el gráfico obtenido por computadora donde se aprecia el plano que intercepta a la superficie, delimitando a la curva C_1 mencionada.



(a) (b)

DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si se considera al punto (xo,yo) del dominio de *f*, el plano vertical x=xo corta a la superficie *z=f(x,y)* en la curva *z=f(xo,y)*, que es la gráfica de la función *z=f(xo,y) en el plano x=xo*.

En este plano, y,z son variables, pero x=cte, que toma el valor xo.

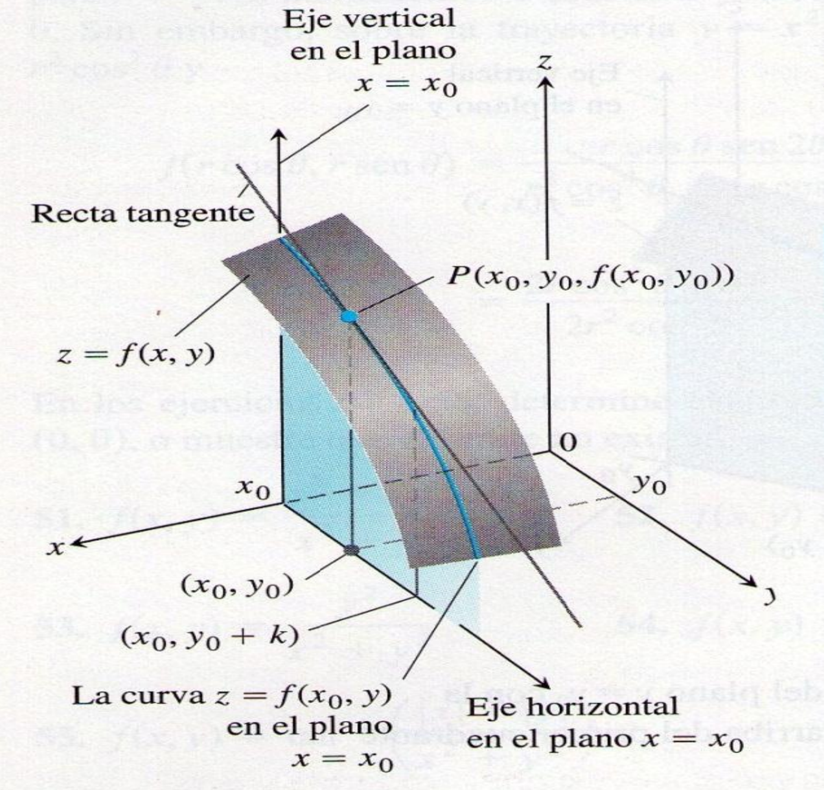


FIGURA 14.14 La intersección del plano $x = x_0$ con la superficie $z = f(x, y)$, vista desde arriba del primer cuadrante del plano xy.

DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

<u>**Se define**</u> derivada parcial de f(x,y) con respecto a y:

$$\boxed{f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

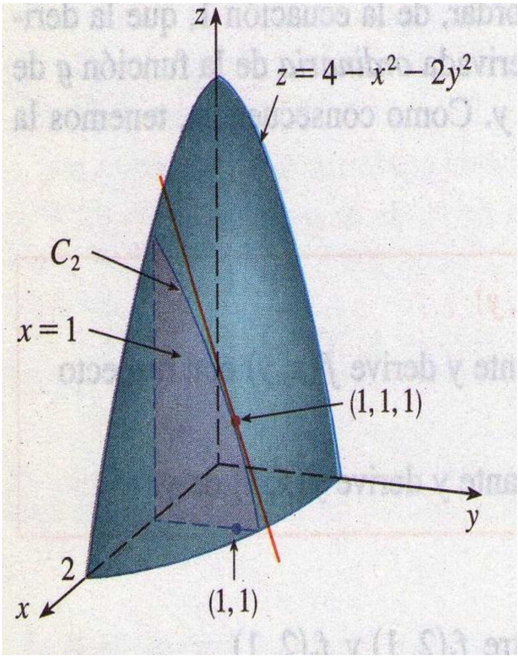
Siempre que el límite exista.

<u>**Se interpreta**</u> geométricamente, que la derivada parcial es la pendiente de la recta tangente a la curva *z=f(xo,y)* en P(xo,yo,f(xo,yo)) formada por la intersección del plano x = xo y la superficie *z=f(x,y)*.

EJEMPLO, CONTINUACIÓN

Si hacemos la otra derivada:

$f_y\,(x,y)$ = -4y ; $f_y\,(1,1)$ = -4.

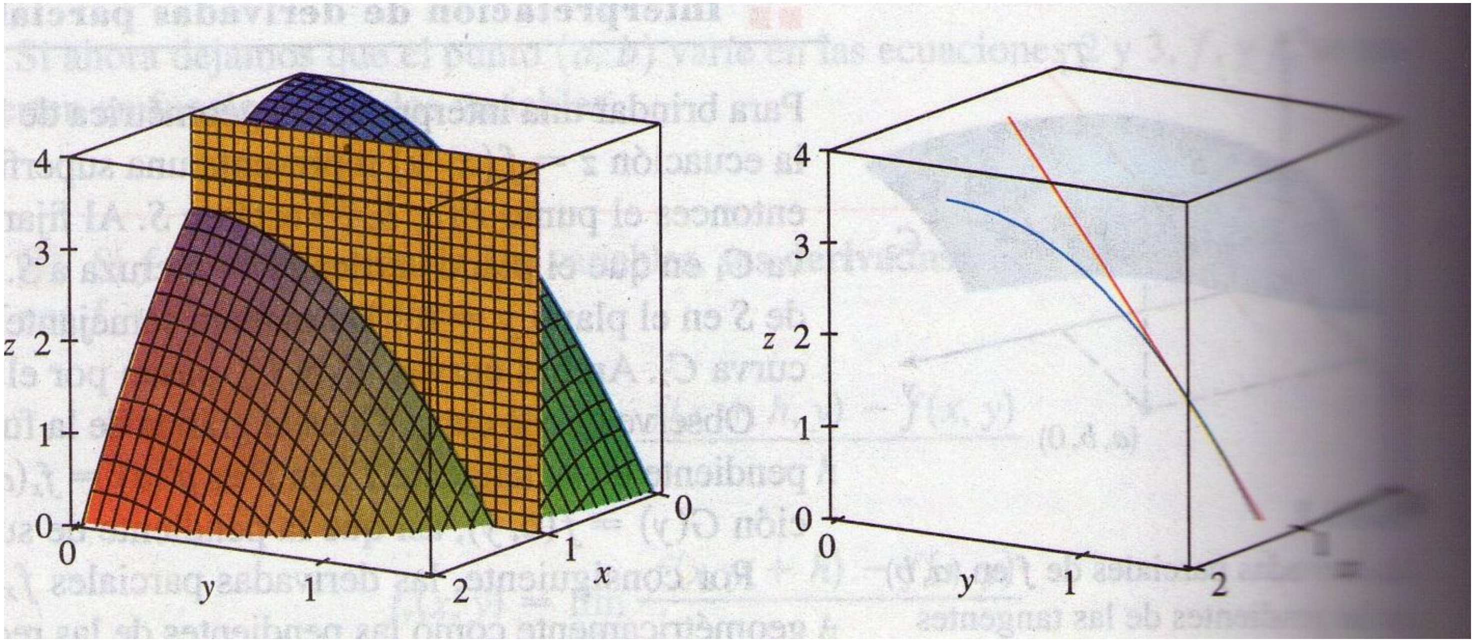


Se forma ahora la curva C_2 como la intercepción del plano x = 1 con el Paraboloide delimitando la parábola

$$z = 3 - 2y^2$$

La pendiente de la tangente a C_2 en el punto P(1,1,1) es $f_y\,(1,1)$ = -4.

- Similar al caso anterior, se puede observar el gráfico obtenido por computadora donde se aprecia el plano que intercepta a la superficie, delimitando a la curva C_2 mencionada.



DERIVACIÓN PARCIAL IMPLÍCITA

Analice el ejemplo 4 del libro Thomas, Cálculo de varias variables, pág. 988.

El procedimiento es como derivar implícitamente una función de una variable, pero desde el momento que aquí tratamos con más de una variable, la derivación se realiza "parcialmente", lo cual significa que para una función de dos variables independientes, si derivamos con respecto a una de ellas, la otra variable actúa como constante.

DERIVADAS PARCIALES Y CONTINUIDAD

El tratamiento que se le da a este tema, difiere un poco del que se le daba en una variable.

Al trabajar con varias variables, el hecho que una función $z = f(x,y)$ pueda tener derivadas parciales en un punto, con respecto a cada una de sus variables, x e y, no significa que la función sea continua en dicho punto.

En una variable, en cambio, la existencia de una derivada implica continuidad de la función.

Para verificar el hecho que ocurre en varias variables, examine el ejemplo 8, del libro de George Thomas, en página 990.

DERIVADAS PARCIALES Y CONTINUIDAD

Se debe recordar que la existencia de las derivadas parciales no alcanza para garantizar la continuidad de la función.

La existencia de las derivadas parciales, sólo depende del comportamiento de la función a lo largo de un segmento de recta (en las direcciones de los ejes coordenados, es decir, en dos direcciones) mientras que la continuidad, depende del comportamiento de la función en todas las direcciones

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

- Así como en una derivada ordinaria podemos hacer el proceso varias veces, ocurre lo mismo con las derivadas parciales.

Podemos tener para *z* = *f (x,y)*:

- Derivadas de primer orden: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

- Derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

- Las dos últimas se conocen como derivadas mixtas.

TEOREMA DE CLAIRAUT O DE LAS DERIVADAS CRUZADAS

- Si la función *f(x,y)* y sus derivadas parciales primeras y segundas mixtas, están definidas en una región abierta que contiene a un punto (a,b) y todas son continuas en (a,b), entonces se verifica que las derivadas mixtas, también llamadas derivadas cruzadas, son iguales.

- Simbólicamente:

$$\boxed{f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)}$$

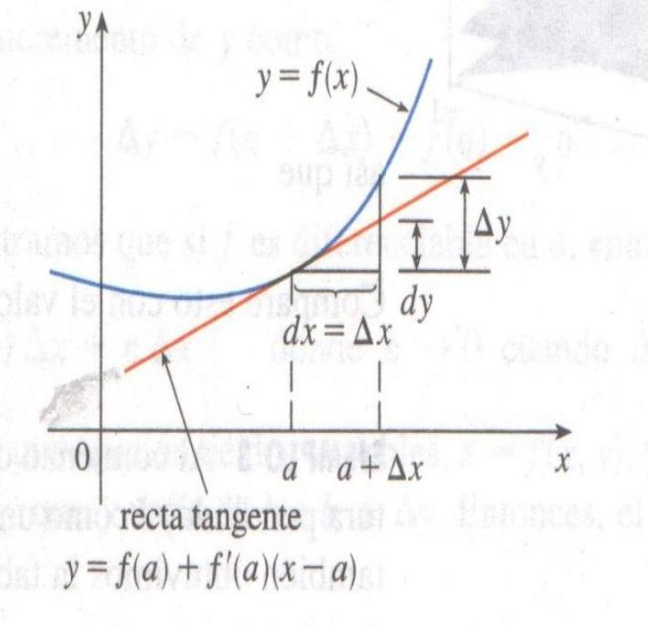
Igualdad que no se debe a la simetría sino a la continuidad de las derivadas, lo cual permite realizar las derivadas en cualquier orden.

DIFERENCIABILIDAD DE UNA FUNCIÓN

- El concepto de diferenciabilidad visto en una función de una variable, está dado por:

$$dy = f'(x)dx$$

$$\Delta y = dy + \xi$$



Siendo ξ el error de aproximar la recta a la curva y = f(x).

Δy: representa el cambio en la altura de la curva.

dy : representa el cambio en la altura de la recta tg cuando x varía una cantidad igual dx = Δx

EN EL CASO DE Z= *F*(X,Y)

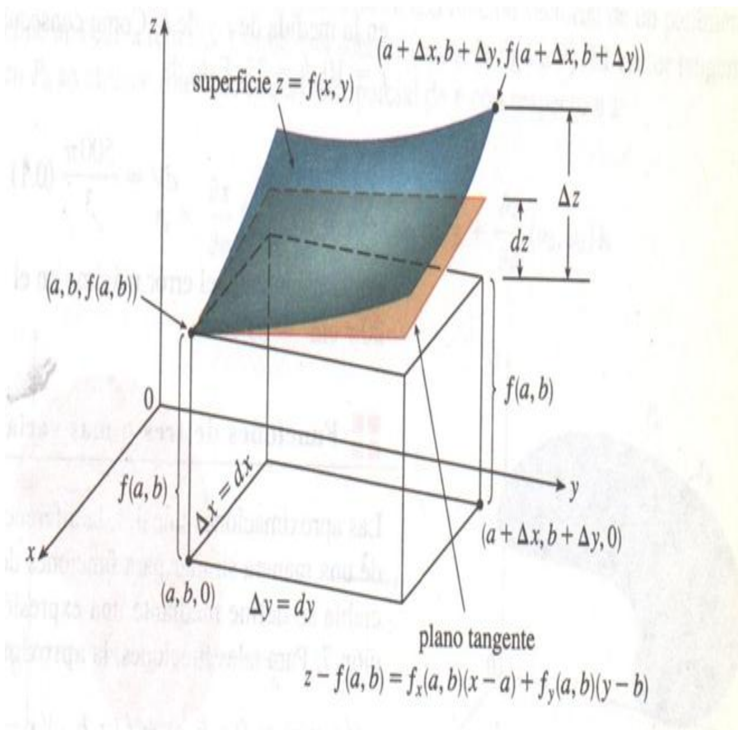
- Para una función de dos variables, se define dx, dy como variables independientes; se les puede dar cualquier valor.
- Se define entonces, la diferencial total, dz, como:

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

Si dx: Δx = x-a y dy:Δy = y-b,

$$z - f(a,b) = f_x(x,y)(x-a) + f_y(x,y)(y-b)$$

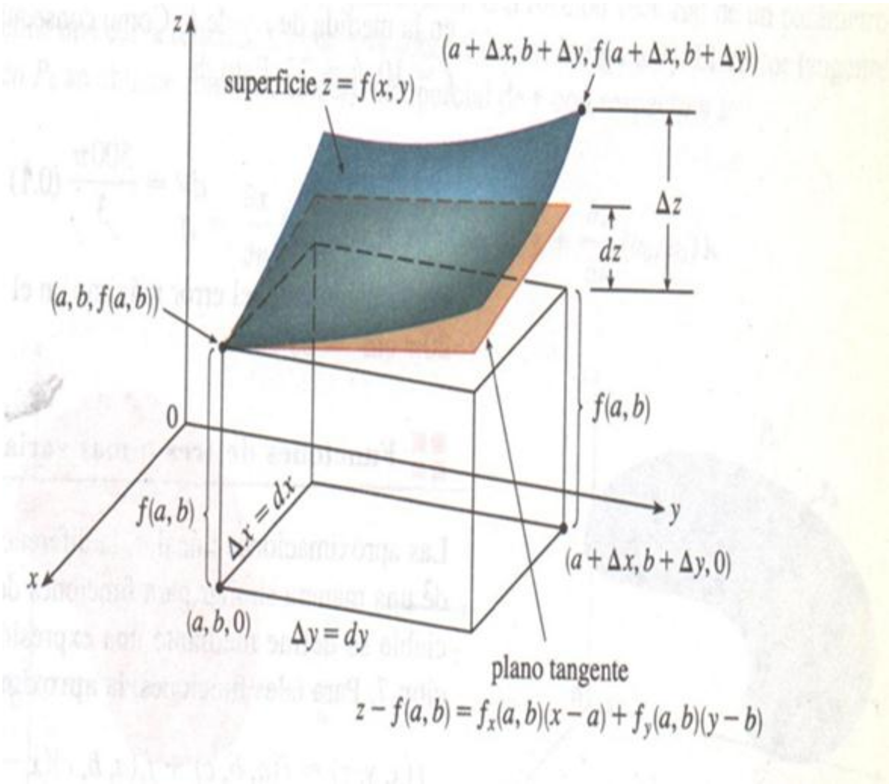
$$z = f_x(x,y)(x-a) + f_y(x,y)(y-b) + f(a,b)$$



- Puede apreciarse que el dz representa el cambio de altura del plano tangente, en tanto que Δz representa el cambio de altura de la superficie

  $z = f(x,y)$ cuando (x,y) cambia de

  (a,b) al valor de $(a+\Delta x,\ b+\Delta y)$



FUNCIÓN DIFERENCIABLE

En el estudio de varias variables, se habla de función diferenciable cuando una función tiene derivadas parciales y son continuas.

Por lo tanto, se puede decir que:

diferenciabilidad implica continuidad

Siempre que la función debe tener derivadas parciales y éstas, deben ser continuas.