

Cálculo II

Clase 1

11.6

Secciones cónicas

Las curvas estudiadas se llaman *secciones cónicas* porque se forman cortando un cono doble con un plano (el plano NO pasa por el origen)

Aclaraciones:

Equidistante: se dice que un punto es equidistante de un conjunto de figuras si las distancias entre ese punto y cada figura del conjunto son iguales

Directriz: es una línea que determina las condiciones de generación de otra línea

Parábola

Resultado de seccionar el cono con un plano oblicuo (el plano sale por la boca superior)

Definición: Una parábola es un conjunto de puntos (o lugar geométrico) en un plano que equidistan de un punto fijo dado (foco de la parábola) y una recta fija dada (directriz).

Ec. Parábola con directriz paralela al eje x: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

Acotaciones:

- .) El vértice de la parábola es el punto (h, k)
- .) La directriz será la recta $y = k - p$
- .) El foco es el punto $(h, k + p)$
- .) p es la distancia del foco (y la directriz) al vértice
si $p > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba (U)
si $p < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo (n)

Ec. Parábola con directriz paralela al eje y: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

Acotaciones:

- .) El vértice de la parábola es el punto (h, k)
- .) La directriz será la recta $x = h - p$
- .) El foco es el punto $(h + p, k)$
- .) p es la distancia del foco (y la directriz) al vértice
si $p > 0$ la parábola abre sus ramas hacia la derecha (C)
si $p < 0$ la parábola abre sus ramas hacia la izquierda (D)

ACOTACIONES GENERALES:

- .) La directriz es paralela al eje que representa la variable al cuadrado.

- .) El eje de simetría es paralelo al eje cuya variable representativa sea lineal (grado 1).
- .) Gráficamente, p incide en el grado de abertura de la parábola.
- .) Caso degenerado: si $p = 0$, la parábola degenera en su eje de simetría y el foco está sobre la directriz
- .) Caso particular: ECUACIONES CANÓNICAS

$$\rightarrow x^2 = 4py$$

$$\rightarrow y^2 = 4px$$

Cuando el vértice está en el origen $[(h, k) = (0, 0)]^$

*Ecuación de la directriz será: $x = p$

$$y = p$$

Elipse

Resultado de seccionar el cono (si tiene base elíptica) con un plano horizontal

Definición: Una elipse es el conjunto de puntos (o lugar geométrico) que cumplen con la condición de que la suma de sus dos distancias a dos puntos fijos llamados focos se mantiene constante.

- La recta que pasa por los focos de una elipse es el *eje focal*.
- El punto que está en el eje a la mitad de la distancia de los focos es el *centro*.
- Los puntos donde el eje focal y la elipse se cruzan son los *vértices* de la elipse.

Ec. de la elipse con el eje focal en el eje x:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Acotaciones:

.) El centro de la elipse es el punto (h, k)

.) Los focos son los puntos: $F_1(h - c, k)$

$$F_2(h + c, k)$$

Siendo c la distancia desde el centro a cualquiera de los focos

.) Los vértices son los puntos: $V_1(h - a, k)$

$$V_2(h + a, k)$$

Siendo a la distancia desde el centro hasta cualquiera de los vértices

Ec. de la elipse con el eje focal en el eje y:
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Acotaciones:

.) El centro de la elipse es el punto (h, k)

.) Los focos son los puntos: $F_1(h, k - c)$

$$F_2(h, k + c)$$

Siendo c la distancia desde el centro a cualquiera de los focos

.) Los vértices son los puntos: $V_1(h, k - a)$

$$V_2(h, k + a)$$

Siendo a la distancia desde el centro hasta cualquiera de los vértices

ACOTACIONES GENERALES:

.) Eje focal: $\text{dist}(F_1; F_2) = 2c$

.) El eje focal será paralelo al eje donde a esté debajo de su variante representativa

.) a^2 representa la distancia del eje mayor, siendo esta el fragmento de eje contenido dentro de la elipse entre ambos vértices

.) b^2 representa la distancia del eje menor, siendo este la distancia del eje \perp al eje mayor contenido dentro de la elipse

.) $a = \text{dist}(\text{centro}; V) = \text{longitud del semieje mayor}$

.) $b = \text{longitud del semieje menor}$

.) $a > b$

.) $c^2 = a^2 - b^2$ (pitágoras)

A partir de la propiedad de los triángulos:

$$|F_1 F_2| < |F_1 P| + |P + a| \Rightarrow c < a$$

.) Caso particular: ECUACIONES CANÓNICAS

$$\rightarrow \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Cuando el vértice está en el origen $[(h, k) = (0, 0)]^$

-----esto no lo vimos en la clase de este año-----

.) CASO DEGENERADO: Circunferencia: resultado de seccionar un cono circular con un plano horizontal

$$\bullet \text{ Ec: } (x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$$

Es un caso degenerado de elipse para cuando los dos focos **coinciden**

$$- F_1 = F_2 \rightarrow (c = 0) \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow a = b$$

El semieje mayor = el semieje menor

.) **e (excentricidad)**: es lo que mide el achatamiento de la elipse

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{si } e \rightarrow 1: \text{ la elipse es más ovalada}$$

si $e \rightarrow 0$: la elipse es más redonda

Si $c = 0$, $e = 0$ y la elipse es una circunferencia

Si $e = \frac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow c = a \rightarrow (V_1 = F_1 \text{ y } V_2 = F_2)$ y se degenera en una recta que va de vértice a vértice

Hipérbola

Resultado de seccionar un cono con un plano vertical

Definición: La hipérbola es el conjunto de los puntos del plano (o lugar geométrico) cuya *diferencia* de la distancia a dos puntos fijos llamados *focos* se mantiene constante.

La recta que pasa por los focos de una hipérbola es el *eje focal*. El punto que está en el eje focal a la mitad de distancia entre los focos es el *centro* de la hipérbola. Los puntos donde el eje focal y la hipérbola se cruzan son los *vértices*.

Ec. de la hipérbola con el eje focal en el eje x: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

.) Vértices: $V_1(h - a, k)$ Focos: $F_1(h - c, k)$
 $V_2(h + a, k)$ $F_2(h + c, k)$

Ec. de la hipérbola con el eje focal en el eje y: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

.) Vértices: $V_1(h, k - a)$ Focos: $F_1(h, k - c)$
 $V_2(h, k + a)$ $F_2(h, k + c)$

ACOTACIONES:

.) Los parámetros representan lo mismo que los de la elipse, pero ahora:

- $c^2 = a^2 + b^2$ (pitágoras)
- $c > a$

.) El eje focal es paralelo al eje cuya variable representativa es POSITIVA.

.) $e = \frac{c}{a} > 1$ → nos define el grado de las hojas de la hipérbola

.) *Caso particular:* ECUACIONES CANÓNICAS:

- $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$
- $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

.) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 0$ → NO ES UNA HIPÉRBOLA

.) Las asíntotas que delimitan las ramas de la hipérbola están dadas por las rectas:

$$\rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x \quad \text{ó} \quad x = \pm \frac{b}{a}y$$

Cónicas degeneradas (casos donde el plano pasa por el origen):

- Si seccionó el origen con un plano horizontal, me queda un punto
- Si seccionó con un plano oblicuo que pasa por el origen, me queda una recta
- si seccionó con un plano vertical que pasa por el origen, me queda una cruz (dos rectas que se intersectan en el origen)

Utilidad de la excentricidad

- $e = \frac{c}{a} = 0$ (circunferencia)
- $e = \frac{c}{a} < 1$ (elipse)
- $e = \frac{c}{a} = 1$ (parábola)
- $e = \frac{c}{a} > 1$ (hipérbola)

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Tiene como objetivo reconocer qué ocurre con las cónicas por la mera observación de una ecuación (reconocer de qué cónica se trata y en qué caso particular estamos)

$$\bullet \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A, C, D, E \text{ y } F \in R)$$

Consideraciones:

.) $B = 0$ ($B = \text{coef. } xy \rightarrow Bxy$ *término rectangular*)

Si $B \neq 0$, la cónica está rotada (no entra en este curso)

- $A.C > 0$ (elipse)

Además, si $A = C$ hablamos específicamente de una *circunferencia*

- $A.C < 0$ (hipérbola)
- $A.C = 0$ (parábola)

Método de completar cuadrados

Este método se basa en sumar y resta un mismo término para poder armar un binomio cuadrado

$$\bullet \quad x^2 + bx = c$$

Si tengo en claro quien es b , el término que se sumará y restará

será: $(\frac{b}{2})^2$

$$\rightarrow x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 = (x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$$

En caso de poseer una ecuación de segundo grado completa (incluyendo los términos y), se separarán las x de un lado y las y del otro y se seguirá el mismo procedimiento con ambas

11.1

Parametrización

Se presenta otra manera de describir una curva al expresar las coordenadas x e y como funciones de una tercera variable t

Definición: Si x e y están dadas como funciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ en un intervalo I de valores t , entonces el conjunto de puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por estas ecuaciones es una *curva paramétrica* y las ecuaciones son *ecuaciones paramétricas* de la curva.

La variable t es un *parámetro* de la curva y su dominio I es el *intervalo del parámetro*. Si I es un intervalo cerrado $a \leq t \leq b$, el punto $(f(a), g(a))$ es el *punto inicial* de la curva, y $(f(b), g(b))$ es el *punto final*.

NOTA: para decir que se ha **parametrizado** la curva, debemos contar si o si con no solo las ecuaciones, sino también el intervalo. Estos tres constituyen la parametrización.

Clase 2

13.1

Funciones vectoriales: son funciones que tienen como dominio un subconjunto probablemente propio (o no) de números reales pero como rango o conjunto imagen algún subconjunto de R^2 o R^3 . Generalmente, estas funciones están asociadas a objetos que describen una trayectoria o movimiento en el plano R^2 o R^3 .

Cuando una partícula se mueve en el espacio durante un intervalo de tiempo I , visualizamos las coordenadas de la partícula como funciones definidas en I :

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad t \in I$$

Los puntos $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in I$, forman la curva en el espacio que llamamos la trayectoria de la partícula. Las ecuaciones y el intervalo de la ecuación *parametrizan* a la curva.

Una curva en el espacio se representa en forma vectorial.

$$r(t) = OP^{\rightarrow} = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

El vector de la **posición** de la partícula $P(f(t), g(t), h(t))$ en el tiempo t es el **vector de posición** de la partícula. Las funciones f , g y h son las **funciones componentes** (los componentes) del vector posición. Consideramos la trayectoria de la partícula como la **curva trazada por r** durante el intervalo de tiempo I .

Límites:

Definición: Sea $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ una función vectorial con dominio D , y L un vector. Decimos que r tiene *Límite* L cuando t se aproxima a t_0 y se escribe:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall t \in D \quad |r(t) - L| < \varepsilon \Rightarrow 0 < |t - t_0| < \delta$$

El cálculo del límite es componente a componente

Si $L = L_1i + L_2j + L_3k$, entonces se puede demostrar que $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = L$

precisamente cuando:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = L_3$$

Continuidad:

Definición: Una función vectorial $r(t)$ es *continua* en un punto $t = t_0$ de su dominio, si $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$. La función es *continua* si es

continua en cada punto de su dominio (si y sólo si cada una de sus funciones componentes son continuas en tal punto).

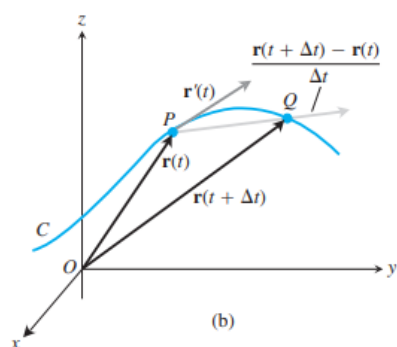
Derivabilidad:

Si $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ es el vector de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio y que f, g y h son funciones derivables de t . Entonces, la diferencia entre las posiciones de la partícula en el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$ es:

$$\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$$

Definición: La función vectorial $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ es derivable en t si f, g y h son derivables en t . La derivada es la función vectorial $r'(t) = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}i + \frac{dg}{dt}j + \frac{dh}{dt}k$

Conforme el incremento del tiempo se haga cada vez más chico, el vector Δr va a ir girando (fijado en el punto P) y va a tener como posición límite una posición tangente a la trayectoria.



Significado geométrico de la definición de derivada:

Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, el punto Q se aproxima al punto P a lo largo de la curva C . En el límite, el vector $\frac{PQ}{\Delta t}$ se convierte en el vector tangente $r'(t)$

La derivada mide, ahora en términos de trayectoria, la tasa de cambio de la posición respecto del tiempo (velocidad)

*Al ser $\Delta r > 0$, la dirección de $r'(t)$ será la misma que la de la trayectoria, si fuera $\Delta r < 0$, iría hacia el otro lado y si $\Delta t < 0$ le da la vuelta y nuevamente, la derivada apunta en la dirección de la trayectoria.

Curva suave: la curva trazada por una parametrización $r(t)$ va a ser suave (regular) cuando $r'(t)$ es continua y $r'(t) \neq \phi$ (vector nulo), es decir, si f, g y h tienen primeras derivadas continuas y éstas no se anulan en forma simultánea.

En términos de velocidad, esto significa que la partícula siempre estuvo en constante movimiento y no invierte su dirección (no existe la dirección de movimiento cuando la partícula se detiene)

- Si $\exists_{t_0} \in I / r'(t_0) = \phi$ significa que en ese punto hay un punto anguloso

¡La curva es suave si admite al menos una parametrización suave!

Definiciones: Si r es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces:

- $v(t) = \frac{dr}{dt}$ es el vector velocidad de la partícula, tangente a la curva.
- para cualquier tiempo t , la dirección de v es la dirección del movimiento, denotado como el vector unitario $\frac{v}{|v|}$
- la magnitud de v es la rapidez de la partícula
- $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$, cuando existe, es el vector aceleración de la partícula

Reglas para derivar funciones vectoriales: sean u y v funciones vectoriales diferenciables de t , C un vector constante, c un escalar y f una función escalar derivable:

1. $\frac{d}{dt}C = 0$ (función constante)
2. $\frac{d}{dt}[cu(t)] = cu'(t)$
 $\frac{d}{dt}[f(t)u(t)] = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$ (múltiplos escalares)
3. $\frac{d}{dt}[u(t) + v(t)] = u'(t) + v'(t)$
4. $\frac{d}{dt}[u(t) - v(t)] = u'(t) - v'(t)$
5. $\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ (regla del producto punto)
6. $\frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$ (regla del producto cruz)
7. $\frac{d}{dt}[u(f(t))] = f'(t)u'(f(t))$ (regla de la cadena)

Funciones vectoriales de magnitud constante

Si r es una función vectorial derivable de t de longitud constante, entonces $r \cdot \frac{dr}{dt} = 0$

13.2

Integrales de funciones vectoriales

Definición: La *integral definida* de r con respecto a t es el conjunto de todas las antiderivadas de r , denotado por $\int r(t) dt$. Si R es cualquier antiderivada de r , entonces $\int r(t) dt = R(t) + C$

Si los componentes de $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ son integrables en $[a, b]$, entonces también lo es r , y la *integral definida* de r de a a b es

$$\int_a^b r(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) i + \left(\int_a^b g(t) dt \right) j + \left(\int_a^b h(t) dt \right) k$$

Clase 3

13.3

Una de las características de las curvas suaves en el espacio y en el plano es que se puede medir su longitud. Esto permite localizar cualquier punto a partir de un punto llamado “*punto base*”, este punto actúa de inicio (referencia) para todas las mediciones

Definición: La *longitud* de una curva suave $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, $a \leq t \leq b$, recorrida exactamente una vez cuando t va desde $t = a$

hasta $t = b$, es $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$

Fórmula para longitud de un arco: $L = \int_a^b |v(t)| dt$

Parámetro de longitud:

Si seleccionamos un punto base $P(t_0)$ en una curva suave parametrizada por t , cada valor de t determina un punto en la curva y una “*distancia dirigida*”

- Si $t > t_0 \Rightarrow s(t) = \text{dist}(P(t_0), P(t))$
- Si $t < t_0 \Rightarrow s(t) = -\text{dist}(P(t_0), P(t))$

Cada valor de s determina un punto en la curva, y esto parametriza dicha curva con respecto a s .

Llamamos a s un *parámetro de longitud de arco* de la curva. El valor del parámetro se incrementa en la dirección en la que crece t .

Definición: *Parámetro de longitud de arco con un punto base $P(t_0)$*

$$s(t) = \int_{t_0}^t |v(\tau)| d\tau$$

NOTA: es posible pasar a parametrizar una curva (parametrizada en función de t) en términos de la longitud de arco, no es muy común ni fácil.

Rapidez de la longitud de arco

Cómo C es una curva suave, $v(t)$ es continua y se asegura que existe la integral $s(t) = \int_{t_0}^t |v(\tau)| d\tau$, el 2º teorema fundamental del cálculo nos dice que s es una función derivable de t con derivada $\frac{ds}{dt} = |v(t)|$

. Esta ecuación quiere decir que la rapidez con la que una partícula se mueve respecto del tiempo es el concepto de rapidez y que en ésta no participe el punto de base quiere decir que la velocidad que lleva la partícula en su trayectoria es independiente de este.

Vector tangente unitario: $T = \frac{v}{|v|}$

Marca la dirección del movimiento en cada instante t .

. El cambio de la función posición respecto al parámetro longitud de arco está dado por el vector tangente unitario

$$\frac{dr}{dt} = v(t) \text{ (tasa de variación de la posición respecto al tiempo)}$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{dr}{ds} = v(t) \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{dr}{ds} = v(t) \frac{1}{ds/dt}$$

$$\frac{dr}{ds} = v(t) \frac{1}{|v(t)|} \Rightarrow \frac{dr}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|} = T$$

13.4

Curvatura de una curva plana

Puesto que T es un vector unitario, su longitud es constante (1) y solo cambia su dirección cuando la partícula se desplaza a lo largo de la curva.

La *curvatura* es la magnitud de la tasa/razón de cambio de la dirección de $T(t)$ respecto de la longitud de arco.

Definición: si T es el vector tangente unitario de una curva

suave, la función de *curvatura* de la curva es: $\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|$

Si $\left| \frac{dT}{ds} \right|$ es grande, T gira rápidamente y la curvatura es grande, y si $\left| \frac{dT}{ds} \right|$ es cercana a 0, T gira lentamente y la curvatura es menor.

La curvatura nunca puede ser negativa

Fórmula para el cálculo de la curvatura:

Si $r(t)$ es una curva suave, entonces la curvatura es:

$$\kappa = \frac{1}{|v|} \left| \frac{dT}{dt} \right|$$

donde $T = \frac{v}{|v|}$ es el vector tangente unitario.

Vector normal unitario: en un punto donde $\kappa \neq 0$, el vector normal unitario principal de una curva suave en el plano es:

$$N = \frac{1}{\kappa} \frac{dT}{ds}$$

Fórmula para calcular N:

Si $r(t)$ es una curva suave, entonces el vector normal unitario principal es:

$$N = \frac{dT/dt}{|dT/dt|}$$

donde $T = \frac{v}{|v|}$ es el vector tangente unitario.

Círculo de Curvaturas Planas:

El **círculo de curvatura** o **círculo osculador** en un punto P de una curva plana donde $\kappa \neq 0$ es el círculo en el plano de la curva que:

1. Es tangente a la curva en P (tiene la misma recta tangente que la curva)
2. Tiene la misma curvatura que tiene la curva en P .
3. Está del lado cóncavo o interno de la curva.

Por esto, el círculo de curvatura será mejor aproximación que una línea recta.

$$C = P + \rho N$$

C = centro de curvatura

P = el punto donde nos paramos

ρN = me muevo una distancia ρ en dirección al vector normal

El **radio de curvatura** de la curva en P es el radio del círculo de curvatura, el cual, de acuerdo con el ejemplo 2, es

$$\text{Radio de curvatura} = \rho = \frac{1}{\kappa}$$

12.6

Cilindros: Un *cilindro* es una superficie que se genera con el movimiento de una línea recta paralela fija dada a lo largo de una curva plana dada.

Superficie en R^3 que se genera a partir de una curva plana dada (curva generatriz) y haciendo recorrer de manera \perp a ella una recta por toda su trayectoria

NOTA: si una de las variables en la ecuación de la curva generatriz está libre (ósea, vale 0), el cilindro será paralelo al eje representativo de esa variable.

Superficies cuádricas: Una *superficie cuádrica* es la gráfica en el espacio de una ecuación de segundo grado en x , y y z .

Ec general: $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz = E$

Si se agregan los términos lineales que faltan, se hace el completamiento de cuadrados y se obtiene una cuadrática que no esté centrada en el origen

NOTA: Error de Thomas: $(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz = E)$, de esta ecuación se obtiene una gráfica que está centrada en un punto que tiene 1° y 2° coordenada 0, pero en la tercera coordenada no es 0 porque aparece el término lineal de z .

Las superficies cuádricas básicas son los *elipsoides*, los *paraboloides*, los *conos elípticos* y los *hiperboloides*.

Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

.) Corta los ejes coordenados en $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$, *en este caso, no dan las coordenadas de los focos*

.) El mayor entre a^2 , b^2 y c^2 indica cómo se posiciona el elipsoide.

.) El elipsoide recibe este nombre ya que si se toman las trazas (intersecciones de la superficie cuádrica con los planos xy , xz y zy) con los planos coordenados (o planos paralelos a estos), no son otra cosa que elipses

Paraboloides hiperbólico: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$, $c > 0$

.) Una de las trazas es una parábola

.) Para el caso $z = 0$ (plano xy), las trazas son las asíntotas de la hipérbola, y la traza con el plano $z = c$, nos da una hipérbola que tiene el eje focal sobre el eje y

Paraboloides elíptica: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$, $c > 0$

Cono elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

Hiperboloides de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hiperboloide de dos hoja: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Clase 4

13.5

El marco TNB

El vector *binormal* de una curva en el espacio es $B = T \times N$, un vector unitario ortogonal a T y N .

B , T y N definen un nuevo marco de referencia vectorial de mano derecha (de vectores unitarios mutuamente ortogonales) conocido como *marco de Frenet* o *marco TNB*

Ahora, en cada punto de la trayectoria tenemos un conjunto de vectores que brindan información importante sobre esta.

T = brinda información sobre la dirección de la trayectoria

N = marca la dirección en que la curva de la trayectoria se dobla

B = marca la dirección en que la curva tiende a desplazarse hacia arriba de manera perpendicular del plano osculador (TN)

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Cuando una partícula está acelerada, por lo general se desea saber qué parte de la aceleración actúa en la dirección del movimiento (en la dirección de la tangencial T)

Definición: Si el vector aceleración se escribe como $a = a_T T + a_N N$ entonces:

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|v| \quad \text{y} \quad a_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa|v|^2$$

son los componentes escalares *tangencial* y *normal* de la aceleración.

Interpretación geométrica:

.) a_T = nos dice cuánto de la aceleración es paralelo a la dirección del movimiento de la curva

.) a_N = nos mide cuánto de la aceleración es perpendicular al movimiento de la curva ($N \perp T$)

Interpretación física: el v no es necesariamente unitario, de instante en instante cambia de dirección y magnitud, entonces la a_T está viendo la tasa de cambio de la magnitud de $v \left(\frac{d}{dt}|v|\right)$ consecuentemente, la componente normal de $a (a_N)$ mide la tasa de cambio de la dirección de $v (\kappa|v|)^2$

Fórmula para calcular el componente normal de la aceleración:

$$a_N = \sqrt{|a|^2 - (a_T)^2}$$

Torsión

Definición: Sea $B = T \times N$. La función de torsión de una curva suave es $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$

La torsión puede ser positiva, negativa o nula

Planos determinados por T, N y B:

TN = plano osculador

NB = plano normal

BT = plano rectificador

Interpretación en término de TNB: ahora, la curvatura mide, en cada punto P que se mueve a lo largo de una trayectoria, cómo va girando el plano normal. Análogamente, la torsión es la razón de cambio a la cual el plano osculador gira alrededor de T cuando P se mueve a lo largo de la curva (la torsión mide cuánto se tuerce la curva).

Fórmula para calcular τ : $\tau = \frac{(\text{matriz formada por los componentes de la 1ª, 2ª y 3ª derivada de } r(t))}{(|v \times a|)^2}$

14.1

"Funciones de variable vectorial y valor real"

$f: R^n \rightarrow R$ *suelen llamarse campos vectoriales*

R^n = campos: porque tiene variables vectoriales ($n = 1, 2, 3, \dots, n$)

R = escalares: porque toman valores reales

f = es una asignación o correspondencia que hay entre los elementos de una región en R^n que le asigna a cada punto del conjunto D un único escalar en R ($D \subseteq R^n \rightarrow R$)

Definiciones: Sea D un conjunto de n -adas de números reales (x_1, x_2, \dots, x_n) . Una *función de valores reales* f en D es una regla que asigna un único número real (individual) $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a cada elemento de D . El conjunto D es el **dominio** de la función. El conjunto de valores w asignados por f es el **rango** de la función. El símbolo w es la **variable dependiente** de f , y se dice que f es una función de n **variables independientes** x_1 a x_n . También se llama a las x_j **variables de entrada** de la función y a w la variable de **salida de la función**.

Gráfica de una función: $\{(x; y); f(x; y)\} f: R^2 \rightarrow R$

Aclaración: no tiene sentido hablar de $f: R^3 \rightarrow R$ ya que el rango es identificable a partir de la ley de formación

Superficie: $z = f(x; y)$

Dominios y rangos:

Para definir una función de más de una variable, se excluye las entradas que conducen a números complejos o a la división entre cero. Se dice entonces que el **dominio** de una función es el conjunto más grande para el cual la regla que la define genera números reales, a menos que el dominio esté indicado de manera *explícita* (lo anterior mencionado era la manera *implícita*). El **rango** consiste en el conjunto de valores de salida para la variable dependiente.

Funciones de dos variables

Las regiones en el plano pueden tener puntos interiores y puntos frontera.

Definiciones:

PUNTO INTERIOR: Un punto (x_0, y_0) en una región (conjunto) R del plano xy es un *punto interior* de R si es el centro de un disco de radio positivo que se encuentra completamente en R

.) Sea $R \subset R^2$, un punto P_0 es interior a R si $\exists r > 0 / \text{Disc}(P_0; r) \subset R$ y $|P - P_0| < r$ siendo $P \in \text{Disc}(P_0; r)$

PUNTO FRONTERA: Un punto (x_0, y_0) es un *punto frontera* de R si todos los discos con centro (x_0, y_0) contienen puntos que están fuera de R , así como puntos que están dentro de R (El punto frontera no tiene que pertenecer a R)

NOTA: las mismas definiciones valen tanto para R^2 como para R^3 , pero en este caso en vez de un disco, nos referimos a una *esfera*:

Definición: Un punto (x_0, y_0, z_0) en una región R del espacio es un *punto interior* de R si es el centro de una bola sólida que está completamente dentro de R y un punto (x_0, y_0, z_0) es un *punto frontera* de R si la esfera con centro en (x_0, y_0, z_0) tiene puntos que están fuera de R y puntos que están en R .

El *interior* de R es el conjunto de puntos interiores de R . La *frontera* de R es el conjunto de puntos frontera de R .

Una región es **abierta** si consta sólo de puntos interiores. Una región es **cerrada** si contiene todos sus puntos frontera.

Definiciones: Una región en el plano está **acotada** si está dentro de un disco de radio fijo. Una región es **no acotada** si carece de fronteras.

Gráficas, curvas de nivel y contornos

Hay dos maneras de dibujar los valores de una función $f(x,y)$:

1. Trazar y etiquetar las curvas en el dominio donde f asume un valor constante.
2. Dibujar la superficie $z = f(x,y)$ en el espacio.

Definiciones: El conjunto de p de f . La gráfica de f también se llama *superficie* $z = f(x,y)$

La curva en el espacio donde el plano $z = c$ corta a una superficie $z = f(x,y)$ está formada por los puntos que representan el valor de la función $f(x,y) = c$. Esta curva se llama *curva de contorno* $f(x,y) = c$ para distinguirla de la curva de nivel $f(x,y) = c$.

En el espacio, los puntos donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x,y,z) = c$ forman una superficie en el dominio de la función

Definición: El conjunto de puntos (x,y,z) en el espacio donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x,y,z) = c$, es una *superficie de nivel* de f .

*Las superficies de nivel son la generalización del concepto de curvas de nivel llevado a R^3 *

NOTA: una función como $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ NO es graficable (R^4 no se puede graficar), pero si a esta función la intersectamos con un $w = \text{constante}$, pasaremos a tener una *superficie de nivel* (ya no una curva), ya que estaríamos en el dominio de la función que sería en R^3 .

14.2

Límites y continuidad en dimensiones superiores

Definición de límite:

Decimos que una función $f(x,y)$ tiende al **límite** L cuando (x,y) tiende a (x_0, y_0) y escribimos :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para todo (x,y) en el dominio de f ,

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Definición de continuidad:

Una función $f(x,y)$ es continua en el punto (x_0, y_0) si:

- f está definida en (x_0, y_0)
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$ existe
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Una función es continua si es continua en todos los puntos del dominio.

Criterio de dos trayectorias para demostrar la inexistencia de un límite:

Si una función $f(x,y)$ tiene límites diferentes a lo largo de dos trayectorias distintas en el dominio de f cuando (x,y) tiende a (x_0, y_0) entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$ no existe

- El hecho que las aproximaciones por líneas rectas a (x_0, y_0) tengan el mismo límite no implica que exista límite en (x_0, y_0) .

Clase 5

14.3

Derivadas parciales

Definiciones: .) La derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a x en el punto (x_0, y_0) es

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$, si el límite existe, donde tomamos a la variable y como constante.

.) La derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a y en el punto (x_0, y_0) es

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$, si el límite existe, donde tomamos a la variable x como constante.

Derivadas parciales y continuidad

El hecho de que una función en un punto tenga derivadas parciales, no significa que en ese punto sea continua

Derivadas parciales de 2° orden

Al derivar dos veces una función $f(x,y)$, generamos sus derivadas de segundo orden.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0) \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0) \right] &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x_0, y_0) = f_{yy}(x_0, y_0) & \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0) \right] &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Teorema de Clairaut

Si $f(x, y)$ y sus derivadas parciales f_x , f_y , f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene a un punto (x_0, y_0) y todas son continuas en (x_0, y_0) , entonces $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

Diferenciabilidad

Con dos o más variables se trata de la idea de incremento, no se puede calcular el incremento real de manera exacta, por lo que lo aproximamos usando el diferencial

Teorema 3: teorema del incremento

Si f_x y f_y de $f(x, y)$ están definidas en una región abierta R que contiene a un punto (x_0, y_0) y son continuas en dicho punto, entonces el cambio $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ en el valor de f que resulta del movimiento de (x_0, y_0) a otro punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ en R satisface la ecuación $\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ en la cual $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando Δx y $\Delta y \rightarrow 0$

Este teorema brinda condiciones suficientes para la diferenciabilidad en un punto

Definición: Una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable en (x_0, y_0)** si

$f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ existen y si Δz satisface la ecuación

$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ en la cual cada $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando

Δx y $\Delta y \rightarrow 0$. Se dice que f es **diferenciable** si es derivable en todos los puntos de su dominio, y se dice que su gráfica es una

superficie suave.

Corolario del teorema 3: si las derivadas parciales f_x y f_y de una función $f(x, y)$ son continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en cada punto de R

Teorema 4: Si una función $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces f es continua en (x_0, y_0) .

14.4

Teorema 5: Regla de la cadena

Si $w = f(x, y)$ es derivable y si $x = x(t)$, $y = y(t)$ son funciones derivables de t , entonces la composición $w = f(x(t), y(t))$ es una función derivable de t y

$$\frac{dw}{dt} = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t),$$

o bien,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

*Con el teorema 6 (para tres variables) se aplica de la misma manera agregando el tercer término $\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$ para una función

$w = f(x, y, z)^*$

Teorema 8: derivación implícita: Sea $F(x, y)$ derivable y que la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como una función derivable de x .

Entonces en cualquier punto donde $F \neq 0$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

NOTA: este modelo de cálculo se basa en el teorema de la regla de la cadena.

Extensión a tres variables: siendo $F(x, y, z) = 0$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

14.5

Derivada direccional

Si $f(x, y)$ es derivable, entonces la razón de cambio de f con respecto a t cuando este crece a lo largo de una curva derivable $x = g(t)$, $y = h(t)$ es $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$. Esta tasa de cambios se ve afectada por la dirección de la curva que considere.

Ahora, se cambia dicha curva y se considera una línea recta, a la cual se parametriza en términos de longitud de arco, medido desde un punto base P_0 y en la dirección de un vector unitario.

Esta línea recta nos indica la tasa de variación de f respecto a la *distancia* desde el punto base y en la dirección del vector

Definición: La derivada de f en $P_0(x_0, y_0)$ en la dirección del vector unitario $u = u_1i + u_2j$ es el número

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + s \cdot u_1, y_0 + s \cdot u_2) - f(x_0, y_0)}{s} \text{ siempre que el límite exista}$$

Caso particular:

$$\therefore \text{ Si } u = i \rightarrow \left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$$

.) Si $u = j \rightarrow \left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$

Las derivadas parciales de f respecto de x e y , son casos particulares de derivadas direccionales en dos direcciones determinadas

Interpretación de la derivada direccional

La ecuación $z = f(x, y)$ representa la superficie S en el espacio. Si $z_0 = f(x_0, y_0)$, entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está en S . El plano vertical (plano único) que pasa por P y $P(x_0, y_0, z_0)$ paralelo a u interseca a S en la curva C . La tasa de cambio de f en la dirección de u es la pendiente de la tangente de C en P .

*Ahora se puede calcular la tasa de cambio de f en cualquier dirección de u *

Fórmula eficiente para el cálculo de la derivada direccional

Sea la recta $x = x_0 + s \cdot u_1$, $y = y_0 + s \cdot u_2$, que pasa por $P_0(x_0, y_0)$, parametrizada con el parámetro longitud de arco que crece en la dirección del vector unitario $u = u_1 i + u_2 j$. Por regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} u_2 \\ &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} j\right] \cdot [u_1 i + u_2 j] \end{aligned}$$

Definición: El *vector gradiente* de $f(x, y)$ en un punto $P_0(x_0, y_0)$ es el vector $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$ que se obtiene al calcular las derivadas parciales de f en el punto P_0

Teorema 9, La derivada direccional es un producto punto: Si $f(x, y)$ es derivable en una región abierta que contiene a $P_0(x_0, y_0)$, entonces

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u, P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot u$$

Propiedades de la derivada direccional

• $D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f| \cos \theta$ •

1. La función f crece más rápidamente cuando $\cos(\theta) = 1$ o cuando $\theta = 0$ y u es en la dirección de ∇f . Es decir, en cada punto P de su dominio, f crece más rápidamente en la dirección del vector gradiente ∇f en P . La derivada en esta dirección es $D_u f = |\nabla f| \cos(0) = |\nabla f|$
2. De manera similar, f decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. La derivada en esta dirección es $D_u f = |\nabla f| \cos(\pi) = -|\nabla f|$

3. Cualquier dirección de \mathbf{u} ortogonal a un gradiente de $\nabla f \neq 0$ es una dirección de cambio nulo en f porque en este caso θ es igual a $\frac{\pi}{2}$ y $D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos(\frac{\pi}{2}) = |\nabla f| \cdot 0 = 0$

Posición y dirección respecto al vector gradiente

Si una función derivable $f(x, y)$ tiene valor constante c a lo largo de una curva suave $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ (curva de nivel), entonces

$$f(x(t), y(t)) = c \quad (f[\mathbf{r}(t)] = c)$$

Al derivar con respecto a t :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) = 0 \quad (\text{regla de la cadena})$$

$$\bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} \right) = 0$$

\therefore En todos los puntos (x_0, y_0) del dominio de una función derivable

$f(x, y)$, el gradiente de f es normal al vector tangente $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ (y por lo tanto, también a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0))

Ecuación de la recta de dicha tangente:

$$L\{Q(x, y)/PQ \perp \nabla f(P)\}, \quad (x - x_0, y - y_0) \perp (f_x P, f_y P)$$

$$\bullet L: f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) = 0$$

Clase 6

14.6

Planos tangentes y rectas normales

Si $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ es una curva suave sobre una superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ de una función derivable f , entonces

$f(x(t), y(t), z(t)) = c$. Al derivar respecto a t :

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{d}{dt} (c) \quad (\text{se aplica regla de la cadena})$$

$$\bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \right) = 0$$

\therefore en todos los puntos a lo largo de la curva, ∇f es ortogonal al vector velocidad de la curva

Todos los vectores de velocidad de P_0 son ortogonales a ∇f en P_0 , de manera que todas las rectas tangentes a la curva formen un plano que pasa por P_0 normal a ∇f (plano tangente a la superficie de nivel)

Definición: El *plano tangente*, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ de una función derivable f es el plano que pasa por P_0 normal a $\nabla f|_{P_0}$

La *recta normal* a la superficie de nivel en P_0 es la recta que pasa por P_0 paralela a $\nabla f|_{P_0}$

Ambos tienen las siguientes ecuaciones:

Plano tangente a $f(x, y, z) = c$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0$$

Recta normal a $f(x, y, z) = c$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x = x_0 + t f_x(P_0) \quad y = y_0 + t f_y(P_0) \quad z = z_0 + t f_z(P_0)$$

Plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

El plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ de una función derivable f en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Estimación de cambio en f en la dirección de u

Para calcular el cambio en el valor de una función derivable f cuando nos movemos una pequeña distancia ds desde un punto P_0 en una dirección particular u , se usa la fórmula:

$$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot u) ds \quad *ds = \text{incremento en la distancia}$$

Herramientas de aproximación: Linealización

Definición: La *linealización* de una función $f(x, y)$ en un punto (x_0, y_0)

donde f es derivable es la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

La aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ es la *aproximación lineal estándar* de f en (x_0, y_0)

El error en la aproximación lineal estándar

Si f tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene un rectángulo R con centro en (x_0, y_0) y si M es una cota superior para los valores de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ y $|f_{xy}|$ de R , entonces el error $E(x, y)$ en que se incurre al sustituir $f(x, y)$ en R para su linealización satisface la igualdad

$$|E(x, y)| \leq \frac{1}{2} M (|x - x_0| + |y - y_0|)^2 \quad E = f(x, y) - L(x, y)$$

Diferencial y diferencial total

Definición: si nos movemos de (x_0, y_0) a un punto cercano

$(x_0 + dx, y_0 + dy)$, el cambio resultante

$$\bullet df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

en la aproximación lineal de f se llama *diferencial total de f*

*Nos permite aproximar el cambio real

$$\Delta f \approx \Delta L \quad (\text{aproximamos el cambio de } f \text{ a través del cambio de } L)$$

$$\diamond L(x, y) = f(x_0, y_0) + \underset{\Delta x}{f_x(x_0, y_0)(x - x_0)} + \underset{\Delta y}{f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

$$L(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

—

$$L(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$$

$$\Delta L = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

$\Delta L \approx df(x_0, y_0) \rightarrow$ diferencial es la parte del plano que no contempla el valor en el punto

NOTA: para obtener el porcentaje del tamaño del cambio que se produjo se divide el error por el total (por lo que será un valor relativo)

Clase 7

14.7

Funciones de varias continuas en cerrados y acotados alcanzan allí sus valores extremos absolutos (Weierstrass)

Definición: Sea que $f(x, y)$ esté definida en una región R que contiene el punto (a, b) . Entonces:

1. $f(a, b)$ es un valor **máximo local** de f si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b)

$P(a, b)$ es máximo relativo de f si $\exists D(P; r)/f(a, b) \geq f(x, y) \forall (x, y) \in D$

2. $f(a, b)$ es un valor **mínimo local** de f si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en (a, b)

$P(a, b)$ es mínimo relativo de f si $\exists D(P; r)/f(a, b) \leq f(x, y) \forall (x, y) \in D$

Teorema 10, criterio de la primera derivada para extremos locales

Si $f(x, y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior (a, b) de su dominio, y si las primeras derivadas parciales existen allí, entonces $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

OBSERVACIONES:

- Que $\frac{\partial f}{\partial x/y} = 0$ es condición necesaria pero NO suficiente (un punto en donde las D.D P.P estén anuladas no significa que sea extremo)
- El contrarrecíproco dice que en el punto donde las D.D P.P no se anulen, entonces NO hay recíproco

DEMOSTRACIÓN: Sea $g(x) = f(x, b)$, usando $y = b$ se fija un plano en el eje y en el punto b , al tomar y constante en ese plano $f(x, y)$ se obtiene una curva que solo depende de x . $g(x)$ será la curva que interseca la superficie $f(x, y)$ con el plano $y = b$ y es de una sola variable.

- .) Al ser $P(a, b)$ extremo local de f
- g tiene un extremo relativo en $x = a$
 - por Fermat, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$

Sea $h(x) = f(a, y)$

- h tiene un extremo relativo en $x = a$
- Por Fermat $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

CONSIDERACIONES: Si f derivable en (a, b) y sea

$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$ la ecuación del plano tangente.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$, entonces $z = f(a, b)$ (una constante)
 \rightarrow el plano z es horizontal en ese punto

Si no es derivable, no hay plano tangente

Punto crítico: Un punto interior del dominio de una función $f(x, y)$ donde tanto f_x como f_y se anulan, o donde alguna de éstas no existen, es un *punto crítico* de f .

Punto de silla: Una función derivable $f(x, y)$ tiene un *punto de silla* en un punto crítico (a, b) si en cada disco abierto con centro (a, b) existen puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) > f(a, b)$, y puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) < f(a, b)$. El punto correspondiente $(a, b, f(a, b))$ sobre la superficie $z = f(x, y)$ se llama punto de silla de la superficie

*Los puntos que anulan la derivada primera pero que sin embargo no dan lugar a un extremo local se llaman *puntos de silla**

Criterio de la segunda derivada para extremos locales (teorema 11)

Suponga que $f(x, y)$ y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en un disco con centro en (a, b) , y que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.

Entonces:

1. f tiene un *máximo local* en (a, b) , si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ y $f_{xx} < 0$ en (a, b)
2. f tiene un *mínimo local* en (a, b) , si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ y $f_{xx} > 0$ en (a, b)
3. f tiene un *punto de silla* en (a, b) , si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en (a, b)

4. El criterio *no es concluyente* en (a, b) , si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ en (a, b)

En este caso, debemos encontrar otra manera de determinar el comportamiento de f en (a, b)

La expresión $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ se conoce como **discriminante** o **Hessiano** de f , se puede calcular como el determinante:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

14.8

Multiplicadores de Lagrange:

Este método dice que los valores extremos de una función $f(x, y, z)$, cuyas variables están sujetas a una restricción $g(x, y, z) = 0$, se encuentran sobre la superficie $g = 0$ en los puntos donde:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

para algún escalar λ (llamado multiplicador de Lagrange).

Teorema del gradiente ortogonal (teorema 12)

Suponga que $f(x, y, z)$ es derivable en una región cuyo interior contiene una curva suave $C: r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$. Si P_0 es un punto de C donde f tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre C , entonces ∇f es ortogonal a C en P_0

DEMOSTRACIÓN: los valores de f en C están dados por la composición $f(g(t), h(t), z(t))$, cuya derivada respecto a t es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \nabla f \cdot v$$

En cualquier punto P_0 donde f tiene un mínimo o un máximo local

relativo a sus valores sobre la curva $\frac{df}{dt} = 0$, entonces

$$\nabla f \cdot v = 0$$

Corolario del teorema 12: En los puntos de una curva suave

$r(t) = x(t)i + y(t)j$, donde una función derivable $f(x, y)$ asume sus máximos y mínimos locales en relación con sus valores en la curva,

$$\nabla f \cdot v = 0, \text{ donde } v = \frac{dr}{dt}$$

Método de los multiplicadores de Lagrange:

Sea $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$ son derivables y que $\nabla g \neq 0$ cuando $g(x, y, z) = 0$. Para determinar los valores máximos y mínimos locales de f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (si ésta existe), se obtienen los valores de x, y, z y λ que satisfacen en forma simultánea las ecuaciones

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{y} \quad g(x, y, z) = 0$$

Mario: Si $g(x, y, z)$ es continuamente diferenciable en Ω (una región omega) $\subset D = \text{dom}$ (y $\nabla g \neq 0$) de una $f(x, y, z)$ derivable.

Si P_0 es un extremo local de $f(x, y, z)$ sujeto a la ligadura $g(x, y, z) = 0$ (superficie de nivel), entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$

DEMOSTRACIÓN: Si $P_0 \in S$ es un extremo local de $f \rightarrow f$ alcanza un extremo local en $P_0 \forall C \subset S / P_0 \in C$ (alcanza un extremo local sobre todas las curvas incluidas en la superficie S que pasa por ese punto)

- Por el teorema del gradiente ortogonal $\nabla f(P_0) \perp v$ (el gradiente es ortogonal al vector velocidad de todas las curvas derivables de S que pasan por P_0)
- Por otra parte, $\nabla g \perp S$ en P_0 (el gradiente es el vector normal al plano tangente a S)
 $\rightarrow \nabla g \perp v$ en $P_0 \forall v$ de $C \subset S$

Entonces: $\nabla f(P_0) // \nabla g(P_0)$ (existe un número λ que sea la constante de paralelismo).

Desde el punto de vista geométrico, el método de los multiplicadores de Lagrange busca encontrar los puntos en los cuales los gradientes de la f a optimizar y la restricción son paralelos, ya que allí encontraremos extremos locales.

Cálculo II

Clase 8

15.1

Integrales dobles

Se considera una función $f(x, y)$ definida en una región rectangular R
 $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$

R se particiona en pequeños rectángulos usando una red de rectas paralelas a los ejes x e y . Las rectas lo dividen en n partes rectangulares.

Al ancho de cada rectángulito R_k es Δx_k , y la altura Δy_k y dentro del rectángulo se define un punto (x_k, y_k)

El área del k -ésimo rectángulo será $\Delta A_k = \Delta x_k * \Delta y_k$

La norma de la partición de R (llamada P_1) será $\|P_1\| := \max\{\Delta x_k, \Delta y_k\}$

.) $\|P\| \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta A_k \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$

Suma de Riemann: $S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$

Luego, al hacer infinitos refinamientos de la partición, obtenemos nuevas particiones: una partición P_2 será un refinamiento de P_1 si $P_1 \supset P_2$ (P_2 es un superconjunto de P_1 , o sea, que contiene los mismos puntos más otros) se considera el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_R f(x, y) dA$ (si dicho límite existe)

Una función es integrable sobre un rectángulo cuando existe el límite de la suma de Riemann de la función definida sobre dicho rectángulo

- Función continua \rightarrow cond. suf para ser integrable sobre un rectángulo (si hay un n° finito de curvas suaves en las cuales la función tiene discontinuidades de salto finito, todavía puede ser integrable)

Teorema 1: Teorema de Fubini (primera forma)

Si $f(x, y)$ es continua en la región rectangular $R: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$,

entonces:
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

15.2

Integrales dobles sobre regiones generales

Una vez particionamos una región R , ΔA_k es el área del k -ésimo rectángulo y sumamos cada rectángulo del 1 hasta el n

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$$

Cuando la norma de la partición tiende a 0, el ancho y altura de cada rectángulo también tiende a 0, y su número se tiende a infinito, y si el límite existe, se denota *integral doble* de $f(x, y)$

$$\lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R f(x, y) dA$$

Volúmenes:

Si $f(x, y)$ es positiva y continua sobre R , se define el volumen de la región sólida entre R y la superficie $z = f(x, y)$ como $\iint_R f(x, y) dA$

Si R está acotada por arriba y por abajo por las curvas $y = g_2(x)$ y $y = g_1(x)$ y a los lados por las rectas $x = a$ y $x = b$, entonces:

$$A(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) dy \text{ y luego:}$$

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{*Región de tipo 1*}$$

1*

$$V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \quad \text{*Región de tipo 2*}$$

2*

*Una integral doble podrá ser interpretada como volumen si el signo del integrando es no negativo $\forall (x, y) \in R$

Teorema 2: Teorema de Fubini (forma más fuerte)

Sea $f(x, y)$ continua en una región R

1) Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en (a, b) , entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

2) Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en (c, d) , entonces:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

15.3 Áreas por doble integración

Si $f(x, y) = 1$, las sumas de Riemann se reducen a

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k = \sum_{k=1}^n \Delta A_k$$

$$\rightarrow \lim_{||P|| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \iint_R dA$$

Definición: el área de una región plana cerrada y acotada R es

$$A = \iint_R dA$$

Valor promedio de f sobre R: $\frac{1}{\text{Área de } R} \iint_R f \, dA$

Teorema del valor medio: si $f(x, y)$ es una función continua en una región R cerrada, acotada y conexa, existe en R al menos un punto (x^*, y^*) tal que $f(x^*, y^*) \text{área de } R = \iint_R f(x, y) \, dA$

Interpretación geométrica: en la región R va a existir un punto (x_k, y_k) que va a generar en ese subrectángulo una cajita cuyo volumen va a ser igual al volumen del cuerpo real bajo la superficie

Clase 9

15.4 Integrales dobles en coordenadas polares

Sea $f(r, \theta)$ una función definida sobre una región R acotada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y por las curvas continuas $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$.

Entonces R está dentro de una región con forma de abanico Q , definido por las desigualdades $0 \leq r \leq a$ y $\alpha \leq \theta \leq \beta$

Numerando los rectángulos polares que están dentro de R , y siendo (r_k, θ_k) cualquier punto en el rectángulo polar cuya área es ΔA_k , se

forma la suma $S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k) \Delta A_k$ y si f es continua, la suma tiende al límite cuando refinamos la rejilla para hacer que Δr y $\Delta \theta$ tiendan a 0. El límite se conoce como la integral doble de f sobre R

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_R f(r, \theta) \, dA$$

Para evaluar este límite, se debe escribir la suma S_n para que exprese ΔA_k en términos de Δr y $\Delta \theta$ (se toma r_k como el promedio de los arcos internos y externos que acotan ΔA_k)

Radio del arco interno: $r_k - \frac{\Delta r}{2}$

Radio del arco externo: $r_k + \frac{\Delta r}{2}$

$A = \frac{1}{2} \theta \cdot r^2$ (área de un sector en forma de cuña de radio)

Radio interno: $\frac{1}{2} (r_k - \frac{\Delta r}{2})^2 \Delta \theta$

Radio exterior: $\frac{1}{2} (r_k + \frac{\Delta r}{2})^2 \Delta \theta$

$\Delta A_k = \text{radio exterior} - \text{radio interior}$

$$= \frac{\Delta \theta}{2} (2r_k \Delta r) = r_k \Delta r \Delta \theta$$

Si se combina esto con la suma de Riemann: $S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r \Delta \theta$

Cuando $n \rightarrow \infty$ y los valores de Δr y $\Delta \theta$ tienden a 0, la suma converge a la integral doble $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iint_R f(r, \theta) r dr d\theta$

y por Fubini: $\iint_R f(r, \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$

Determinación de los límites de integración:

- 1) *Elaborar un bosquejo y marcar las curvas frontera*
- 2) *Determinar los límites de integración en r :* imaginar un rayo L que parte del origen y atraviesa R . Los límites de integración de r será los valores donde L entra y sale de R
- 3) *Determinar los límites de integración en θ :* obtener los valores mínimos y máximos de θ que acotan a R

Área en coordenadas polares

El área de una región cerrada y acotada R en el plano de coordenadas polares es $A = \iint_R r dr d\theta$

Cambios de integrales cartesianas a integrales polares:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (x^2 + y^2 = r^2)$$

15.5 Integrales triples en coordenadas rectangulares

$f: R^3 \rightarrow R$

$$\bullet S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$$

Ahora los elementos de la partición van a ser cajitas

Cuando $\|P\| \rightarrow 0$ y el número de cajas n tiende a ∞ , las sumas S_n tienden a un límite, el cual será la integral triple de f sobre una región cerrada D

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \iiint_D f(x, y, z) dV \quad \circ \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_n = \iiint_D f(x, y, z) = dx dy dz$$

Definición: el volumen de una región cerrada D y acotada en el espacio es $V = \iiint_D dV$

Límites de integración de integrales triples:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} F(x, y, z) dz dy dx \quad (\text{vale Fubini})$$

Valor medio: $\frac{1}{\text{Volumen } D} \iiint_D f(x, y, z) dV$

Clase 10

15.7 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

Coordenadas cilíndricas

Definición: Las *coordenadas cilíndricas* representan un punto P en el espacio mediante ternas en coordenadas (r, θ, z) donde

- 1) r y θ son las coordenadas polares de la proyección vertical de P sobre el plano xy
- 2) z es la coordenada vertical rectangular

*Se les llama cilíndricas ya que el punto se determina por la intersección de un semiplano (inicia en z), un plano (horizontal, que nos da la tercer coordenada) y un *cilindro* de radio r^*

Ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangular y las cilíndricas:

$$\begin{array}{lll} x = r \cos \theta & y = r \sin \theta & z = z \\ x^2 + y^2 = r^2 & \tan \theta = \frac{y}{x} & \end{array}$$

Construcción:

Ahora las particiones son cuñas cilíndricas

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(r_k, \theta_k, z_k) r_k \Delta r_k \Delta \theta_k \Delta z_k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \iiint_D f dV = \iiint_D f dz r dr d\theta$$

Método de integración:

- 1) *Bosquejo:* trazar la región D junto con su proyección R sobre el plano xy , marcar las superficies y curvas que acotan D y R
- 2) *Lim. integración para z :* trazar una recta M paralela al eje z , que pase por un punto (r, θ) de R . M entra a D en $z = g_1(r, \theta)$ y sale en $g_2(r, \theta)$
- 3) *Lim. integración para r :* trazar un rayo L desde el origen que pase por (r, θ) . El rayo entra a R en $r = h_1(\theta)$ y sale en $r = h_2(\theta)$
- 4) *Lim. integración para θ :* cuando L barre a R , el ángulo θ que forma con el semieje positivo x va desde $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$

$$\iiint_D f(r, \theta, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{g_1(r, \theta)}^{g_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz r dr d\theta$$

Coordenadas esféricas

Definición: las coordenadas esféricas representan un punto P en el espacio mediante la terna ordenada (ρ, ϕ, θ) en la que:

1. ρ es la distancia de P al origen (se asocia con la longitud)
2. ϕ es el ángulo que OP^{\rightarrow} forma con el semieje positivo z ($0 \leq \phi \leq \pi$) (se asocia con la latitud de un punto P)
3. θ es el ángulo de las coordenadas cilíndricas ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) (se asocia con el meridiano)

¿Qué significa que sean constantes?

- $\rho = a \rightarrow$ describe una esfera de radio a
- $\theta = \theta_0 \rightarrow$ describe un semiplano que arranca en el eje z
- $\phi = \phi_0 \rightarrow$ describe un cono: $0 < \phi < \pi/2$ cono abre hacia arriba
 $\pi/2 < \phi < \pi$ cono abre hacia abajo
 Si $\phi = \pi/2 \rightarrow$ degenera en el plano xy

Ecuaciones que relacionan las coordenadas esféricas con las coordenadas cartesianas y cilíndricas:

$$r = \rho \sin \phi, \quad x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$z = \rho \cos \phi, \quad y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Método de integración

- 1) *Bosquejo:* trazar región D con su proyección R sobre el plano xy y marcar las superficies que acotan a D
- 2) *Lim. integración en ρ :* trazar un rayo M desde el origen hacia D formando un ángulo ϕ con el semieje positivo z . Trazar la proyección de M sobre el plano xy . El rayo L forma un ángulo θ con el semieje positivo x . Al crecer r , M entra D en $r = g_1(\phi, \theta)$ y sale en $r = g_2(\phi, \theta)$
- 3) *Lim. integración en ϕ :* para cualquier θ dado, el ángulo ϕ que M forma con el eje z va desde $\phi = \phi_{\min}$ hasta $\phi = \phi_{\max}$
- 4) *Lim. integración en θ :* El rayo L barre R cuando θ va de α a β

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta) = dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_{\min}}^{\phi_{\max}} \int_{g_1(\phi, \theta)}^{g_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

15.1 (Zill)

Integrales de línea

Definición: Integrales de línea

Sea f una función de dos variables x y y definida en una región del plano que contiene una curva suave C , consideramos 3 sumas de Riemann

1. La integral de línea de f con respecto a x a lo largo de A a B

$$\text{es } \int_C f(x, y) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta x_k$$

2. La integral de línea de f con respecto a y a lo largo de A a B

$$\text{es } \int_C f(x, y) dy = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta y_k$$

3. La integral de línea de f con respecto a la longitud de arco s

$$\text{a lo largo de } A \text{ a } B \text{ es } \int_C f(x, y) ds = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \Delta s_k$$

Interpretación geométrica:

La integral \int_C mide el área de la cortina que cae y adopta la forma de la curva.

Evaluación de integrales de línea

• C parametrizada

Siendo $C: r(t) = x(t)i + y(t)j$, $r'(t) \neq$ vector nulo, $x'(t)$ y $y'(t)$ continuas, $dx = x'(t) dt$ y $dy = y'(t) dt$

$$\text{.) } \int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

$$\text{.) } \int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt$$

$$\text{.) } \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$*S(t) = \int_a^t |v(\tau)| dt$$

$$s'(t) = |v(t)|$$

• $C: y = g(x)$ (forma explícita)

Sea $x i + g(x)j$, $x \in (a, b)$

$$\text{.) } \int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x, g(x)) dx$$

$$\text{.) } \int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x, g(x)) g'(x) dx$$

$$\text{.) } \int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx$$

Propiedades

1. Si C es suave a trozos: $C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds$$

2. Orientación positiva de C

Cuando C está parametrizada se dice que tiene orientación positiva cuando es recorrida en la dirección en la que el parámetro t crece

$$3. \int_{-C} f ds = - \int_C f ds$$

4. Una integral de línea es independiente de la parametrización de la curva C siempre que a C se le dé la misma orientación por medio de todos los conjuntos de ecuaciones paramétricas que definen la curva

5. Notación: $\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$

Clase 11

15.2

Campos vectoriales

$F: R^3(R^2) \rightarrow R^3(R^2)$ tienen como dominio e imagen vectores de la misma dimensión

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

* P, Q, R son campos escalares ($R^3 \rightarrow R$)

Conexión con integrales de línea

Si el campo $F(x, y)$ está definido sobre una curva $C: r(t) = x(t)i + y(t)j$ ($a \leq t \leq b$) entonces:

$$\frac{dr}{dt} = x'(t)i + y'(t)j = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j$$

y la diferencial de $r(t)$ es $dr = \frac{dr}{dt}dt = dx i + dy j$

Puesto que $F(x, y) * dr = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ la integral de línea de

$$F(x, y, z) \text{ a lo largo de una curva } C: r(t) \text{ es } \int_C P dx + Q dy + R dz = \int_C F dr$$

$$(\text{forma compacta}) \text{ y } \int_C F dr = \int_a^b F(r(t)) * r'(t) dt$$

Trabajo

El trabajo que realiza una fuerza para mover un objeto una determinada distancia está dado por $W = F d$

Ahora, el trabajo que realiza un campo vectorial es la fuerza aplicada a lo largo de una curva que varía en magnitud y dirección.

El trabajo sobre una curva no se puede calcular (ya que la distancia no es lineal) por lo que se particiona la curva y se

calcula el trabajo a cada subarco para luego sumar: $W = \sum_{k=1}^n W_k$

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n W_k \text{ donde } W_k = F(x_k^*(t); y_k^*(t)) \Delta r_k$$

* Δr_k es lineal, por lo que lo uso para aproximar d

*Cuanto más se particiona, mejor es la aproximación

$$\sum_{k=1}^n W_k = \sum_{k=1}^n F(x_k^*(t); y_k^*(t)) \Delta r_k \quad \Rightarrow \quad W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(x_k^*(t); y_k^*(t)) \Delta r_k$$

Si dicho límite existe, entonces $W = \int_C F dr$

Definición: el trabajo realizado por una fuerza F que varía en magnitud y dirección para desplazar un objeto sobre una

trayectoria está dado por $W = \int_C F dr$

$$\bullet \quad T = \frac{dr}{ds} \Rightarrow dr = T ds$$

$$\therefore W = \int_C F T ds = \text{comp}_T F ds$$

Esto quiere decir que el trabajo efectuado por F a lo largo de C se debe por completo a la componente tangencial de F

Acotaciones:

Si C es una curva cerrada, no se habla de trabajo, sino de *circulación* (medida de cómo va circulando o rotando un fluido)

$$\text{circulación} = \int_C F dr \rightarrow < 0 \quad (\text{rota a favor de las agujas del reloj})$$

$$\rightarrow > 0 \quad (\text{rota en sentido contrahorario})$$

$$\rightarrow = 0 \quad (\text{no se mueve en absoluto})$$

Este último se debe al caso en donde F es perpendicular a T para todo (x, y) sobre C

Campo vectorial gradiente: sea f un campo escalar definido en $\Omega \subseteq R^2$ (o R^3): $\nabla f(x, y) = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j$

Campo vectorial conservativo: F es un campo vectorial conservativo en Ω si existe una función potencial ϕ definida en Ω tal que $F = \nabla \phi \quad \forall (x, y) \in \Omega$ (extensible a R^3)

15.3 Independencia de la trayectoria

Definición: $\int_C F dr$ es independiente de la trayectoria cuando $\forall C_1 \neq C_2$

(que unen los puntos A y B): $\int_{C_1} F dr = \int_{C_2} F dr$

Supuestos fundamentales:

- F es un campo vectorial continuo
- Las derivadas de sus componentes son continuas en Ω
- $C \in \Omega$ por completo

Teorema fundamental de las integrales de línea (15.3.1)

Si la curva $C: r(t) = x(t)i + y(t)j$ con $t \in (a, b)$ en una región abierta R del plano xy es suave (o S.A.T) y $F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ es un campo vectorial conservativo en R y ϕ es una función potencial para F ,

$$\text{entonces } \int_C F dr = \int_C \nabla \phi dr = \phi(B) - \phi(A)$$

- $A = (x(a), y(a))$
- $B = (x(b), y(b))$

Demostración:

$$\begin{aligned} \int_C F dr &= \int_{t=a}^{t=b} [\phi_x, \phi_y][x'(t), y'(t)] && \text{(regla de la cadena)} \\ [\phi_x, \phi_y] &= \nabla \phi = F = [P, Q] \\ &= \int_{t=a}^{t=b} [\phi_x x'(t) + \phi_y y'(t)] dt = \int_a^b \phi'(t) dt = \phi(b) - \phi(a) \end{aligned}$$

Terminología:

- Una región es conexa cuando todo par de puntos se pueden unir por una curva dentro de la misma región
- Una región es simplemente conexa cuando una curva es estrangulable a un punto que quede dentro de la región
- Una región con agujeros, es múltiplemente conexa

Teorema 15.3.2: Sea R una región abierta y conexa:

$$\int_C F dr \text{ es I.T} \Leftrightarrow F \text{ es C.V.C}$$

*El recíproco es trivial para T.F.I.L

Demo: $\int_C F dr$ es I.T, ¿ ϕ ?

$$\phi(x, y) = \int_C P dx + Q dy \quad * \nabla \phi = F = [P, Q] \quad (\phi_x = P \text{ y } \phi_y = Q)$$

$$1) \frac{\partial \phi}{\partial x} = P$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{C_1} P dx + Q dy + \int_{C_2} P dx + Q dy \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{C_1} P dx + Q dy \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{C_2} P dx + Q dy \right) \quad \text{donde } dx(\text{en } C_1) = 0, dy(\text{en } C_2) = 0$$

$$= 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{C_2} P dx = P$$

$$2) \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{C_3} P dx + Q dy + \int_{C_4} P dx + Q dy \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{C_3} P dx + Q dy \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{C_4} P dx + Q dy \right) \quad \text{donde } dx(\text{en } C_4) = 0, dy(\text{en } C_3) = 0 \\
&= 0 + \frac{\partial}{\partial y} \int_{C_4} Q dy = Q
\end{aligned}$$

Teorema 15.3.3: $\int_C F dr$ es I.T $\Leftrightarrow \int_C F dr = 0 \forall C$ cerrada

Sea C cerrada, tengo que probar que $\int_C F dr = 0$

Sean A y B puntos frontera $\in C$

Sean C_1 y $C_2 / C = C_1 \cup (-C_2)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \int_C F dr &= \int_{C_1 \cup (-C_2)} F dr = \int_{C_1} F dr + \int_{-C_2} F dr \\
&= \int_{C_1} F dr - \int_{C_2} F dr
\end{aligned}$$

Por I.T son iguales y la resta dará 0

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad \int_{C_1} F dr &= \int_{C_2} F dr \quad (?) \\
&= \int_{C_1} F dr - \int_{C_1} F dr = 0 \quad (?) \\
\int_{C_1} F dr - \int_{C_2} F dr &= \int_{C_1} F dr + \int_{-C_2} F dr \\
&= \int_C F dr = 0 \\
&\rightarrow C = C_1 \cup (-C_2) \quad (C \text{ cerrada})
\end{aligned}$$

Teorema 15.3.4: Condición suficiente y necesaria para ser C.V.C

Sea $F(x,y)$ un campo vectorial conservativo en una región abierta R y que sus componentes son continuas y tienen d.d p.p continuas, entonces:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x,y) \text{ en } R$$

$$* \text{En } R^3: \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Inversamente, también es cierto que R debe ser simplemente conexa

Demo:

$$F \text{ es C.V.C} \rightarrow \exists \phi / \phi_x = P \text{ y } \phi_y = Q \quad (\text{y } \phi_{xy} = P_y, \phi_{yx} = Q_y)$$

Clase 12

15.4

Aclaraciones: se dice que una curva cerrada SIMPLE (no se corta a sí misma, cerrada, suave (o SAT) que encierra una región R está *orientada positivamente* si una persona que eventualmente camina sobre su contorno para dar vuelta 1 vez su trayectoria, SIEMPRE deja la región encerrada a su izquierda.

Teorema de Green

Sea C una curva cerrada, simple suave por partes, con orientación positiva que limita una región R simplemente conexa. Si P , Q , P_y y Q_x son continuas sobre R , entonces

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R (Q_x - P_y) dA$$

Demostración parcial: siempre supone una curva que es frontera de una región R que sea de tipo I y tipo II.

- R : (I) $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$
(II) $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$

$$\begin{aligned} (I) \quad - \iint_R P_y dA &= - \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} P_y dy \right) dx \\ &= - \int_a^b [P(x; g_2(x)) - P(x; g_1(x))] dx \\ &= \int_a^b P(x; g_1(x)) dx - \int_a^b P(x; g_2(x)) dx \\ &= \int_a^b P(x; g_1(x)) dx + \int_a^b P(x; g_2(x)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_C P(x, y) dx \\ (II) \quad \iint_R Q_x dA &= \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} Q_x dx \right) dy \\ &= \int_c^d [Q(h_2(y); y) - Q(h_1(y); y)] dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y); y) dy + \int_d^c Q(h_1(y); y) dy \\ &= \int_C Q(x, y) dy \end{aligned}$$

Sumando (I) y (II) miembro a miembro: $\iint_R (Q_x - P_y) dA = \int_C P dx + Q dy$

NOTA 1: extensión de Green a regiones múltiplemente conexas

$$C = C_1 \cup C_2$$

$$\iint_R (Q_x - P_y) dA = \iint_{R_1} (Q_x - P_y) dA + \iint_{R_2} (Q_x - P_y) dA$$

$$= \oint_{\text{frontera } R_1} P dx + Q dy + \oint_{\text{frontera } R_2} P dx + Q dy$$

$$C = C_1 \cup C_2 = \oint_C P dx + Q dy \quad (\text{se compensan por el sentido}) \quad \int_{\rightarrow} = - \int_{\leftarrow}$$

NOTA 2: Si $Q_x = P_y \quad \forall (x, y) \in R$ (s. conexa) $\Rightarrow F$ es conservativo

\Leftrightarrow es la condición nec. y suf. p/ser C.V.C (teorema 15.3.4)

$$\therefore 0 = \iint_R = \int_C \Leftrightarrow F = c.v.c$$

Para el recíproco del teorema 15.3.4 no es necesario que R sea simplemente conexa, pero si lo pide para que sea demostrable fácilmente con la aplicación del teorema de Green

NOTA 3: COROLARIO: si junto las hipótesis de Green y además se cumple que $Q_x = P_y \quad \forall (x, y) \in R / \iint_R (Q_x - P_y) dA = 0$ entonces:

$$0 = \iint_R (Q_x - P_y) dA = \int_C P dx + Q dy$$

$$0 = \int_{C_1} (P dx + Q dy) + \int_{-C_2} (P dx + Q dy)$$

$$0 = \int_{C_1} - \int_{C_2} \quad \therefore \int_{C_1} P dx + Q dy = \int_{C_2} P dx + Q dy$$

15.5 Superficies paramétricas y áreas

Superficies paramétricas: un conjunto de tres funciones de dos variables $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$; $z = z(u, v)$, se llaman *ecuaciones paramétricas*. Las variables u y v son *parámetros* y el conjunto de puntos (x, y, z) en el espacio tridimensional definido por las ecuaciones paramétricas se llama *superficie paramétrica*

Clase 12

15.6 Integrales sobre superficies

Dom \rightarrow una superficie (S) y la sombra que se proyecta en el "piso" será una región R

Se aproxima el área de cada parche de la superficie a través del límite de la suma de Riemann de cada partición (y a mayor la partición, mayor la aproximación)

$\Delta S_k = \text{área } S_k$ (parche) la aproximo con el plano tangente

$$\Delta S_k \simeq \Delta T_k = \left\| r_u \times r_v \right\|$$

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*; y_k^*; z_k^*) \Delta S_k$$

Definición: sea f una función de tres variables x, y y z definida en una región del espacio que contiene a una superficie S . Entonces la *integral de superficie* de f sobre S es

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*; y_k^*; z_k^*) \Delta S_k$$

EVALUACIÓN: $\iint_S f ds$

1) Si S está denotada de forma paramétrica:

Sea S una superficie paramétrica suave definida por la ecuación vectorial $r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k$ donde (u, v) varía sobre la región R del parámetro en el plano uv , y sea $f(x, y, z)$ continua sobre S

. Entonces: $\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_R f(x(u, v); y(u, v); z(u, v)) ds$
donde $ds = |r_u \times r_v| du dv$

2) Si S está denotada de forma explícita ($z = g(x, y)$):

$$\iint_S f(x, y, z) ds = \iint_R f(x; y; g(x, y)) ds$$

$$\text{donde } ds = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} dx dy$$

Tener en consideración: $z = g(x, y) \rightarrow R_{xy}$
 $y = h(x, z) \rightarrow R_{xz}$
 $x = p(y, z) \rightarrow R_{yz}$

Deducción de ds :

$$z = g(x, y) = g(u, v)$$

- $r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = x_u i + y_u j + z_u k$; $r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = x_v i + y_v j + z_v k$
- $r_u = \langle 1, 0, g_u \rangle$; $r_v = \langle 0, 1, g_v \rangle$
- $r_u \times r_v = \langle -g_u, -g_v, 1 \rangle \Rightarrow |r_u \times r_v| = \sqrt{1 + g_u^2 + g_v^2}$

Interpretación geométrica:

Solo tiene interpretación cuando el integrando es igual a 1, en ese caso $\iint_S f ds = \text{área de la superficie}$

Superficie orientada: toda superficie que admite al menos un campo vectorial normal continuo y unitario que sea ortogonal a dicha superficie.

*Si una superficie suave está definida implícitamente por

$$h(x, y, z) = 0$$

entonces la normal unitaria a la superficie es $n = \frac{\nabla h}{|\nabla h|}$

Orientación: una superficie puede tener dos orientaciones:

- Hacia arriba: $h = z - g(x, y)$
- Hacia abajo: $h = g(x, y) - z$

En cuanto a superficies cerradas, estas pueden estar orientadas hacia afuera o hacia adentro

- Un campo vectorial n define una orientación hacia afuera, mientras que $n_1 = -n$ define una orientación hacia adentro.

Integrales de superficie de campos vectoriales:

Sea $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ un campo vectorial de velocidades de un fluido.

El fluido que fluye a través de un elemento de área superficial ΔS por unidad de tiempo se aproxima por medio de

$$(\text{altura}) - (\text{área de la base}) = (\text{comp}_n F) \Delta S = (F \cdot n) \Delta S$$

Definición: El volumen total del fluido que pasa a través de S por unidad de tiempo recibe el nombre de **flujo de F a través de S** y está dado por $\iint_S (F \cdot n) dS$

*En el caso de una S cerrada, si n es la normal exterior (interior), entonces produce el volumen del fluido que fluye hacia afuera (hacia dentro) a través de S por unidad de tiempo.

15.7 Rotacional y divergencia

Definición 15.7.1: El rotacional de un campo vectorial

$F = Pi + Qj + Rk$ es el campo vectorial

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k = (\nabla \times F)$$

Teorema 15.7.1: sea $F = Pi + Qj + Rk$ un campo vectorial donde P , Q y R son continuas y tienen d.d p.p continuas en alguna región abierta del espacio tridimensional, entonces el campo vectorial F es conservativo si y sólo si $\text{rot } F = \Phi$ (vector nulo)

Demostración: F es conservativo $\Leftrightarrow P_y = Q_x$

$$\begin{aligned} R_x &= P_z \\ Q_z &= R_y \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \text{rot } F = \Phi$$

Propiedad: siendo $F = \nabla \phi$, entonces por Clairaut:

$$\text{rot } F = \langle \phi_{zy} - \phi_{yz} ; \phi_{xz} - \phi_{zx} ; \phi_{yx} - \phi_{xy} \rangle = \Phi$$

Definición 15.7.2: La divergencia de un campo vectorial

$$F = Pi + Qj + Rk \text{ es la función escalar } \text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Flujo lateral izquierdo: $\simeq \Delta S \cdot F n$

donde $\Delta S = \Delta x \Delta z$ y $n = -j$

$$= \langle P(x, y, z); Q(x, y, z); R(x, y, z) \rangle \cdot (-j) \Delta x \Delta z = -Q(x, y, z) \Delta x \Delta z$$

Flujo lateral derecho: $\simeq \Delta S \cdot F n$

donde $\Delta S = \Delta x \Delta z$ y $n = j$

$$= \langle P(x, y + \Delta y, z); Q(x, y + \Delta y, z); R(x, y + \Delta y, z) \rangle \cdot (j) \Delta x \Delta z = Q(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z$$

Si sumamos ambos flujos miembro a miembro $\simeq \frac{Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)}{\Delta y} \Delta x \Delta y \Delta z$

Flujo techo: $\simeq F \cdot k \Delta x \Delta y$

donde $\Delta x \Delta z = \text{área del techo}$

$$\begin{aligned} &= \langle P(x, y, z + \Delta z); Q(x, y, z + \Delta z); R(x, y, z + \Delta z) \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle \Delta x \Delta y \\ &= R(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Flujo techo: $\simeq -R(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y \simeq \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta z \Delta y$

Si sumamos ambos flujos $= \frac{R(x, y, z + \Delta z)}{\Delta z} \Delta x \Delta z \Delta y$

Flujo frente y fondo: $\simeq \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) \Delta x \Delta z \Delta y$

Flujo total: $(\text{div } F) \Delta x \Delta z \Delta y = (\text{div } F) \Delta V \Rightarrow \frac{F_{\text{total}}}{V(\text{volumen})} = \text{div } F$

Interpretaciones físicas:

$\text{rot } F$ da una medida de la tendencia del fluido a girar un molinito en torno a su eje vertical.

- *Fluido no rotacional (nulo)* = no giran las paletas al introducirlo en el fluido
- *Fluido rotacional (no nulo)* = las paletas que si giran a causa del movimiento del fluido
- *Divergencia negativa:* sumidero
- *Divergencia positiva:* fuente

Clase 13

15.8 Teorema de Stokes

Forma vectorial del teorema de Green:

Sea $F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j + 0k$ un campo vectorial bidimensional, entonces:

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \langle 0, 0, Q_x - P_y \rangle$$

$$(\text{rot } F)k = Q_x - P_y$$

y por el teorema de Green:

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_R (\text{rot } F)k dA \quad \} \text{ forma de Green vectorial}$$

1° forma: Forma tangencial de green o circulación

Definición (teorema 15.8.1): Sea S una superficie suave por partes orientada hacia arriba (sobre una R_{xy}) acotada por una curva C cerrada simple suave (S.A.T) orientada positivamente (que sea frontera de S) y sea $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ un campo vectorial para el cual P , Q y R son continuas y tienen d.d p.p continuas en una región abierta del espacio tridimensional que contiene a S , entonces:

$$\oint_C F dr = \iint_S (\text{rot } F) \cdot n dS$$

donde n es una normal unitaria a S en la dirección de la orientación de S

Acotaciones: *la orientación positiva de la curva C se hereda de la superficie S

*No importa la superficie, si dos S poseen la misma curva C de frontera, su integral dará lo mismo

$$\bullet \int_C F dr = 0 \Leftrightarrow \text{el campo es C.V.C} \Leftrightarrow P_y = Q_x \Leftrightarrow \text{rot } F = 0$$

$$P_z = R_x$$

$$Q_z = R_y$$

Interpretación física:

$$\begin{aligned} \oint_C F dr &= \iint_S (\text{rot } F) \cdot n dS \simeq \iint_S \text{rot } F(P_0) n(P_0) ds \\ &\simeq \text{rot } F(P_0) n(P_0) \iint_S ds \quad (\iint_S ds = \text{área}) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_C F dr \simeq \text{rot } F(P_0) n(P_0) \text{área}$$

$$\frac{1}{\text{área}} \int_C F dr \simeq \text{rot } F(P_0) n(P_0)$$

El rotacional=circulación por unidad de área

$$*\frac{1}{\text{área}} \int_C F dr\} = \text{esto será máximo cuando el ángulo entre } \text{rot } F(P_0) \text{ y } n(P_0)$$

me da 0, el eje del molino debe quedar en la misma dirección que $\text{rot } F(P_0) n(P_0)$ (el rotacional del fluido) y las paletas se moverán rapidísimo

*y si el eje se posiciona perpendicular al rotacional, entonces el molino estará quieto

15.9 Teorema de la divergencia

Definición (teorema 15.9.1): Sea D una región acotada en el espacio tridimensional con una frontera suave por partes S que está

orientada hacia afuera y sea $F(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$ un campo vectorial donde P , Q y R son continuas y tienen d.d p.p continuas en una región tridimensional que contiene a D . Entonces:

$$\iint_S (F \cdot n) dS = \iiint_D (\operatorname{div} F) dV$$

donde n es una normal hacia fuera para S .

\therefore flujo hacia afuera = integral triple de la divergencia

Interpretación física:

Por divergencia: $\iint_S (F \cdot n) dS = \iiint_D (\operatorname{div} F) dV$

- $\bullet \operatorname{div} F(P) \simeq \operatorname{div} F(P_0)$

$$\simeq \operatorname{div} F(P_0) \iiint_{D_r} dV$$

$$\iint_S (F \cdot n) dS \simeq \operatorname{div} F(P_0) V_r \quad \left(\iiint_{D_r} dV = V_r \right)$$

$$\frac{1}{\text{volumen}} \iint_S (F \cdot n) dS \simeq \operatorname{div} F(P_0)$$

La divergencia del campo vectorial de fluidos mide la cantidad de flujo a través de S (hacia afuera) por unidad de volumen

Las interpretaciones físicas de stokes y divergencia justifican lo visto en la sección 15.7