FÍSICA I

Notas sobre cinemática: movimiento en una dimensión

FICH – UNL

Version v.2

2021

Prof. Damian Ramajo

CINEMÁTICA – Sistema de referencia

La **cinemática** es el estudio del **movimiento de los cuerpos**, sin importar la causa de dichos movimientos. Es decir, sin importar las fuerzas que los producen.

El **movimiento** implica un **cambio en la posición**, siendo la posición el lugar exacto que ocupa el cuerpo con respecto a un **sistema de referencia**.

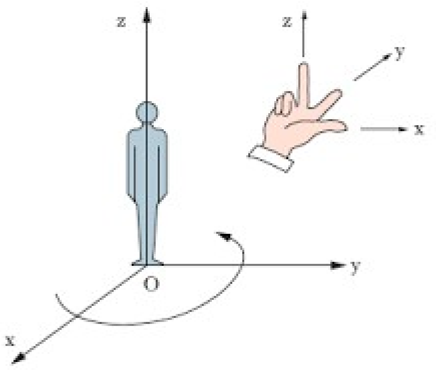
Este **sistema de referencia** puede ser fijo o tener velocidad constante y se denomina estacionario o **inercial**. Tambien puede ser acelerado y en este caso se conoce como **no inercial**. Nosotros nos concentraremos en sistemas inerciales, en los cuales son aplicables las leyes de la dinámica de Newton.

Desde el **sistema de referencia** podrá definirse una **posición.** Si dicha posición **cambia en el tiempo** entonces el cuerpo tendrá movimiento y una **velocidad** asociada. Conociendo dos posiciones luego de un determinado tiempo transcurrido podrá calcularse dicha **velocidad**.

Cuando determinemos que la **velocidad cambia en el tiempo**, entonces diremos que el cuerpo está **acelerado**.

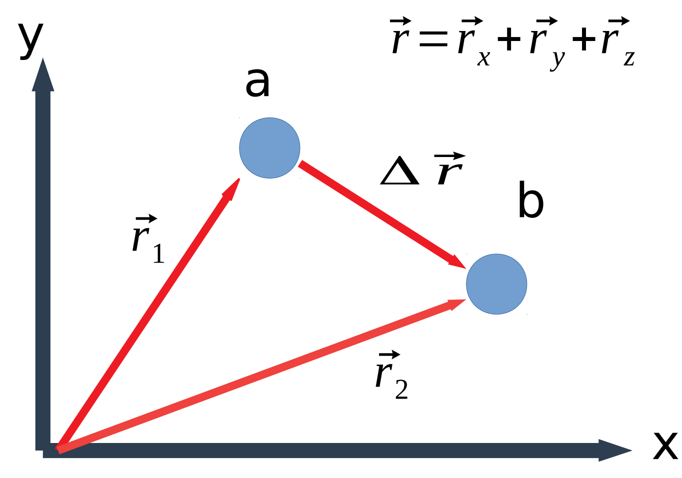
CINEMÁTICA – Sistema de referencia

Pero, todo comienza en el sistema de referencia….
El sistema de referencia es arbitrario, es decir que es definido ad hoc. Pero existen sistemas básicos establecidos. El principal es el cartesiano. Este define tres ejes principales (x,y,z), ortogonales entre si y que siguen un orden dado por la regla de la mano derecha.



A partir del sistema de referencia es posible definir la posición ***r***, la velocidad ***v*** y la aceleración ***a****.* Este sistema de referencia deberá ser el mismo para las tres cantidades.

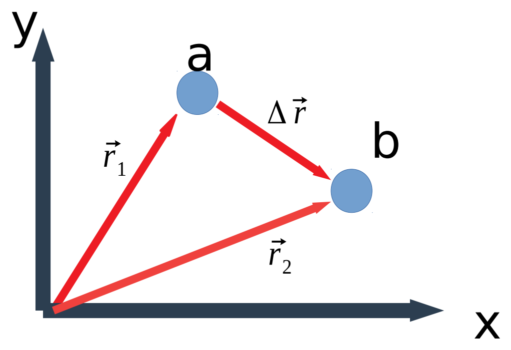
Si un objeto inicialmente en la posición **a** (r_1) pasa a la posición **b** (r_2), entonces existe un desplazamiento Δr.



CINEMÁTICA – Sistema de referencia

r es un **vector**, no un escalar.
Esto implica que la diferencia entre dos posiciones es una resta vectorial:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=(r_{2x}-r_{1x})\hat{i}+(r_{2y}-r_{1y})\hat{j}+(r_{2z}-r_{1z})\hat{k}$$



Es fundamental entender que no es lo mismo hablar de diferencia entre dos posiciones, $\Delta\vec{r}$, que distancia *d* entre dos puntos.

$\Delta\vec{r}$ Refiere a un sistema de referencia. Es la diferencia entre dos vectores y por lo tanto da como resultado otro vector y permite definir inequívocamente dónde está el punto ***b*** respecto al ***a***.

d La distancia d es el módulo de Δr. Es un valor positivo que no da información acerca de donde esta ***b***, solo a que distancia está respecto de ***a***.

CINEMÁTICA- Velocidad

La ***velocidad*** es la variación de la **posición *r*** en el tiempo.

$$\vec{v}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Cuando Δt es "grande" entonces hablamos de **velocidad media**

$$\vec{v}_m=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{\Delta t}$$

La **velocidad media** v_m solo depende de las posiciones final r_2 e inicial r_1. Luego, aunque exista movimiento, la v_m será nula si por ejemplo el cuerpo, luego de moverse regresa al punto de partida ($r_2 = r_1$).

$$\vec{r}_2=\vec{r}_1 \Longrightarrow \vec{v}_m=0$$

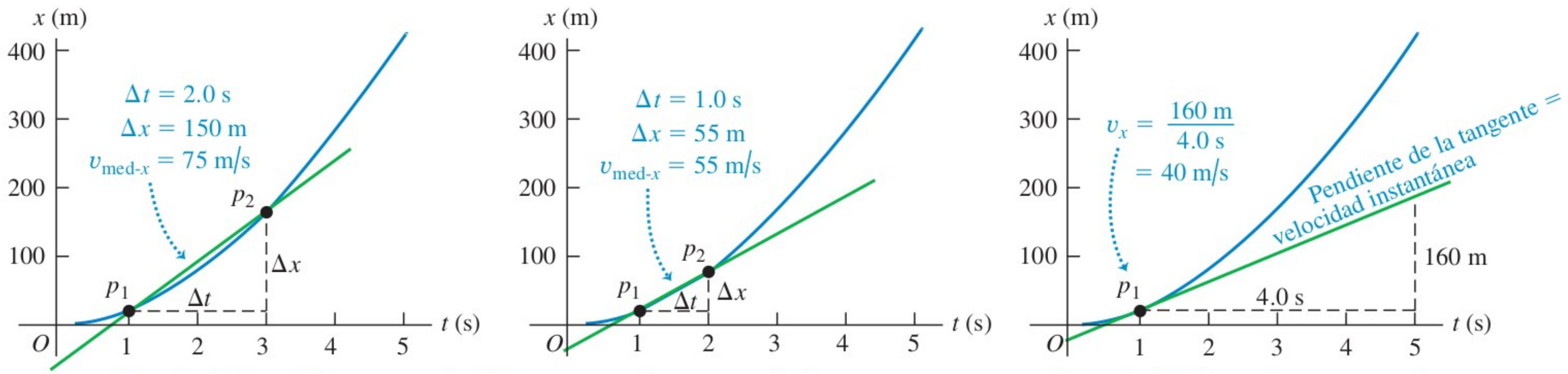
Porque el desplazamiento neto es nulo

Para Δt "pequeños" (en el límite cuando tienden a 0), Δr también será pequeño. Es decir que r_2 será similar a r_1. Luego, la velocidad media se transformará en una **velocidad instantánea** en el entorno de r_1.

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

CINEMÁTICA- Velocidad

Como se muestra en la gráfica, a medida que el intervalo de tiempo Δt se hace menor los puntos P_1 y P_2 se acercan más y más. En el límite, cuando Δt se transforma en un diferencial de tiempo ***dt***, la velocidad media se transforma en la velocidad instantánea en el entorno de P_1.



Cuando la velocidad media $v_{med\text{-}x}$ es calculada en intervalos cada vez más cortos ...

... su valor $v_{med\text{-}x} = \Delta x/\Delta t$ se acerca a la velocidad instantánea.

La velocidad instantánea v_x en un tiempo dado es igual a la pendiente de la tangente a la curva *x*-*t* en ese tiempo.

Para un movimiento sin aceleración la velocidad es constante y por ello la $\boldsymbol{v_m}$ y $\boldsymbol{v}$ son iguales. Por otro lado, en un movimiento acelerado $\boldsymbol{v_m}$ y $\boldsymbol{v}$ pueden ser muy diferentes.

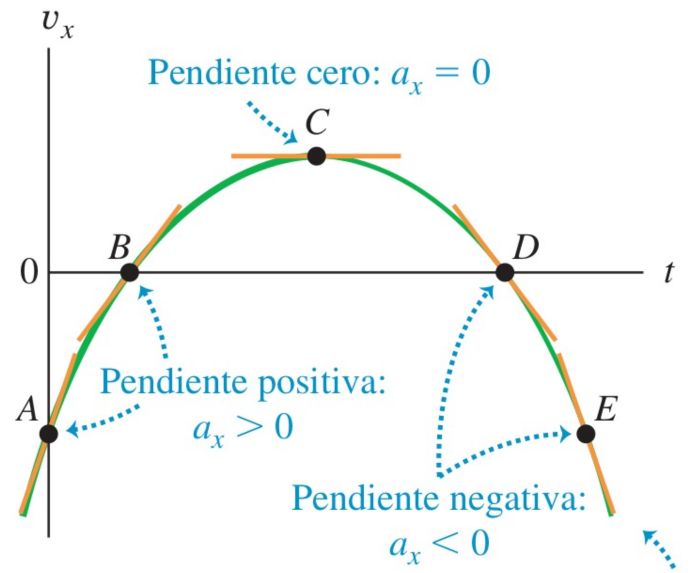
CINEMÁTICA- Aceleración

De igual modo definimos la **aceleración media** y la **aceleración instantánea**

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} \qquad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Al igual que con la $\boldsymbol{v_m}$, la $\boldsymbol{a_m}$ también es nula cuando el cuerpo realiza un movimiento donde su velocidad final $\boldsymbol{v_2}$ es igual a su velocidad inicial $\boldsymbol{v_1}$.

Por ejemplo, en la gráfica de la derecha la aceleración instantánea (recta tangente) solo es nula en el entorno de C.
Cuidado, la aceleración media es nula cuando se calcula entre los puntos B y D, porque en ambos la velocidad es cero, pero no es nula entre A y E ya que es una resta de vectores, no de magnitudes.



CINEMÁTICA- Velocidad

A partir de la definición de aceleración instantánea $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ es posible obtener la velocidad y posición de la partícula

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\rightarrow d\vec{v}=\vec{a}\,dt$$

Integrando en el tiempo

$$\int_{v_0}^{v_1} d\vec{v}=\int_{t_0}^{t_1}\vec{a}\,dt$$

Asumiendo aceleración constante

$$\int_{v_0}^{v_1} d\vec{v}=\vec{a}\int_{t_0}^{t_1}dt$$

***a* sale de la integral porque no depende del tiempo**

$$\int_{v_0}^{v_1} d\vec{v}=v_1-v_0=\vec{a}\int_{t_0}^{t_1}dt=\vec{a}(t_1-t_0)$$

Asumiendo que t_0 es 0 y t_1 es t

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}\,t$$

Ec. (1)

En palabras: La velocidad *v(t) en* un tiempo *t* es igual a la velocidad v_0 en un tiempo anterior ($t_0 = 0$) más el producto de la aceleración ***a*** por el tiempo *t*.

CINEMÁTICA- Posición

Tomando la expresión para la velocidad v(t)

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}_0+\vec{a}\,t \longrightarrow d\vec{r}=(\vec{v}_0+\vec{a}\,t)\,dt$$

Integrando en el tiempo

$$\int_{r_0}^{r_1} d\vec{r}=r_1-r_0=\int_{t_0}^{t_1}(\vec{v}_0+\vec{a}\,t)\,dt=\vec{v}_0\int_{t_0}^{t_1}dt+\int_{t_0}^{t_1}\vec{a}\,t\,dt=\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

Si consideramos que r_0 es la posición a tiempo 0 y r_1 es la posición a tiempo t, luego la posición r(t) estará dada por:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}\,t^2$$

Ec. (3)

Esta ecuación fue hallada a partir de asumir **aceleración constante** y por ello solo es válida en este caso.

En palabras: La posición r*(t)* para un tiempo *t* es igual a la posición inicial r_0 más la velocidad inicial v_0 multiplicada por el tiempo *t*, más un medio de la aceleración ***a*** (constante) multiplicado por el tiempo t al cuadrado.

CINEMÁTICA- Un problema simple

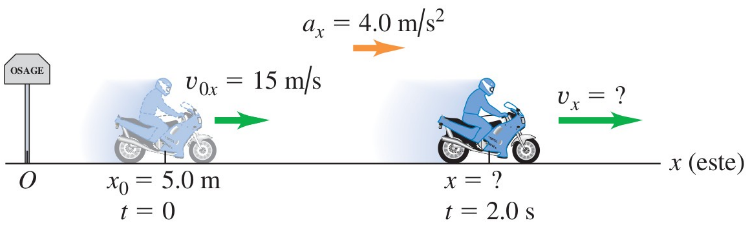
$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Tenemos ahora dos ecuaciones, una para r(t) y otra para v(t). **a** es constante y por lo tanto no requiere una ecuación

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}t$$

Nuestro **sistema de referencia** arbitrario debe ser tal que simplifique el problema.

Tomemos un caso simple como el del motociclista de la figura.
Si elegimos una terna cartesiana donde uno de los tres ejes coincide con el eje de movimiento, entonces el problema se transforma en uno-dimensional. Es decir que: $\vec{r}=x$



La ecuación vectorial se transforma en una ecuación escalar. Luego, tomando el sistema de referencia impuesto por la figura, donde el origen de coordenadas está en el cartel, la ecuación para la posición x(t) queda:

$$x(t)=x_0+\vec{v}_{0x}t+\frac{1}{2}\vec{a}_x t^2$$

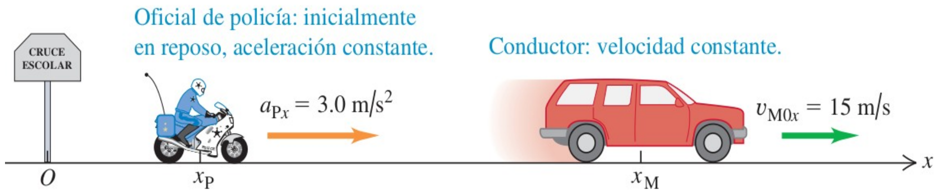
Es decir,

$$x(t)=5.0m+15\frac{m}{s}t+\frac{1}{2}4.0\frac{m}{s^2}t^2$$

Pregunta: ¿Cómo quedará la ecuación si el origen del sistema se corre 5 metros a la derecha?. ¿Se simplificará aun más el problema?

CINEMÁTICA- Un problema simple

Veamos este caso: un automovilista va a velocidad constante y pasa una señal de alto y un policía acelera desde el reposo para alcanzarlo.
Se desea saber dónde y cuando el policía alcanzará al automóvil



Pregunta: ¿qué deberá cumplirse para que el policía alcance al automóvil?
a- Que el policía acelere hasta alcanzar la misma velocidad que el automóvil
b- Que el policía avance hasta tener la misma posición que el automóvil

La respuesta *a* es incorrecta. Para que dos cuerpos se **encuentren** deben ocupar la **misma posición en el espacio al mismo tiempo**. Eso es independiente de la velocidad o aceleración que tengan. Ambos cuerpos podrían moverse a la misma velocidad pero separados una distancia *d* y nunca se encontrarían El problema entonces se resuelve escribiendo las ecuaciones para la posición de cada uno de ellos. La ecuación a aplicar es la siguiente:

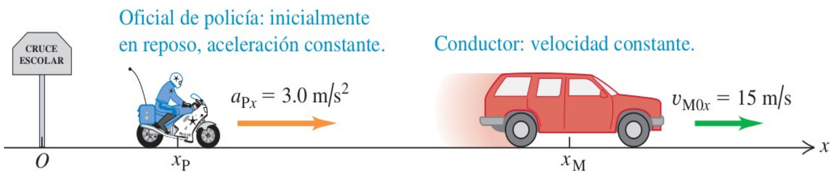
$$x(t)=x_0+v_{0x}t+\frac{1}{2}a_x t^2$$

Esta ecuación deberá ser aplicada a cada cuerpo (automóvil y motocicleta) por separado, pero **usando el mismo sistema de referencia para ambos**.

*Nuevamente, el **sistema de referencia** es arbitrario y podemos plantear varias posibilidades:*

CINEMÁTICA- Un problema simple

Tomamos el sistema propuesto en la figura, poniendo el eje ***x*** hacia la derecha y el origen de coordenadas justo en la posición donde el motociclista arranca. Las ecuaciones para el motociclista y el auto quedan:



Policía $$x_p(t)=0+0t+\frac{1}{2}a_{Px}t^2=\frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Automóvil $$x_M(t)=x_{M0x}+v_{M0x}t$$

Solución: deberemos igualar las dos ecuaciones de posición para un dado tiempo t’. Esto equivale a forzar a las ecuaciones a hacerse iguales en dicho tiempo.

$$x_p(t')=x_M(t')$$

$$\frac{1}{2}\vec{a}_{Px}t'^2=x_{M0x}+v_{M0x}t'$$

Si el policía acelera justo cuando el automóvil pasa por el origen entonces la posición inicial del automóvil (a tiempo 0) será cero. La ecuación queda:

$$\frac{1}{2}\vec{a}_{Px}t'^2=v_{M0x}t'$$

Entonces una solución de la ec. sera $t'_1 = 0$. La otra solución será:

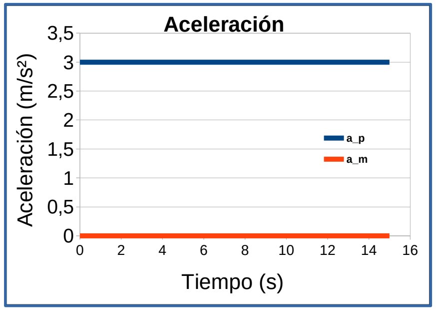
$$t'_2=\frac{2.v_{M0x}}{a_{Px}}=\frac{2.15\frac{m}{s}}{3\frac{m}{s^2}}=10\,s$$

CINEMÁTICA- Gráficas

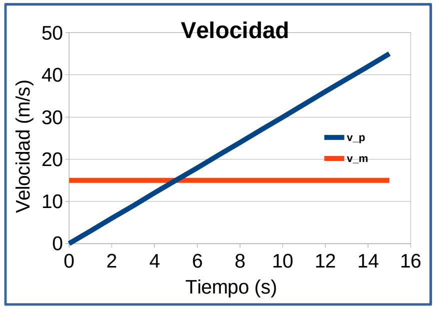
Veamos como se representarán los movimientos en graficas x-t v-t y a-t

Tomemos el caso del ejemplo anterior, donde ambos vehículos están en x=0 en t=0.

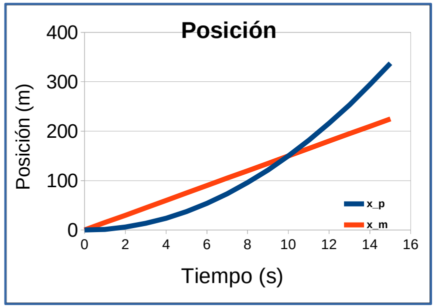
La grafica de la **aceleración** es la más simple ya que solo consideramos aceleración constante. Luego, solo dibujaremos rectas horizontales.



La grafica de la **velocidad** es una recta horizontal cuando la aceleración es nula (linea roja) o inclinada (azul) cuando el móvil está acelerado.



La grafica de la **posición** será una una recta inclinada (roja) cuando la velocidad es constante o una parábola (azul) cuando el móvil está acelerado.



CINEMÁTICA- Volvamos al problema…

Veamos como se representarán los movimientos en graficas x-t v-t y a-t

Cambiemos un poco el ejemplo del policía y el automóvil y pensemos que ahora el policía se demora 5 s en comenzar a acelerar su motocicleta. ¿Como resolveremos ahora el problema?

La forma más sencilla de hacerlo es calcular cuánto habrá avanzado el automóvil durante los 5 s en que el policía permanece detenido y usar este dato como posición inicial x_{M0x} en las ecuaciones anteriores.

$$x_M(t) = x_{M0x} + v_{M0x} t \quad \longrightarrow \quad x_M(t=5\,s) = x_{M0x}' = 0 + 15\frac{m}{s} 5\,s = 75\,m$$

Ahora obtenido x_{M0x}' las ecuaciones quedan:

$$\frac{1}{2}\vec{a}_{Px} t'^2 = x_{M0x}' + v_{M0x} t'$$

Tenemos una ec. de segundo orden completa. t_1'= 0 ya no es una solución del problema. Debemos aplicar la resolvente:

(A = 1.5 m/s², B = -15 m/s, C = -75 m)

$$t_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \begin{matrix} t_1' = -3.66\,s \\ t_2' = 13.66\,s \end{matrix}$$

CINEMÁTICA- Volvamos al problema...

Nota 1: el tiempo obtenido es el tiempo a partir del cual el policía comienza a acelerar, es decir, 5 s luego de que el automóvil ha pasado la señal en el origen de coordenadas.

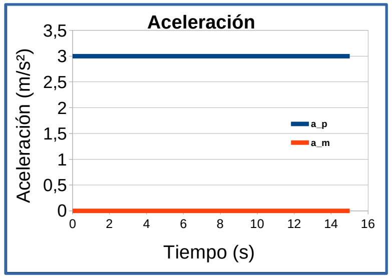
Nota 2: obtuvimos dos tiempos, uno negativo y otro positivo. Un tiempo negativo no parece posible, pero tiene sentido si se piensa que el tiempo es una variable más. En general un tiempo negativo está indicando un momento previo a t = 0 donde los móviles estaban a la misma posición. En este problema en particular ese tiempo existe, pero debería ser t = -5 s y no -3.66 s. La diferencia radica en que para tiempos anteriores a t = 0 la ecuación para la motocicleta es $x_M(t) = 0$, ya que no está acelerando. No obstante, en este problema solo nos quedaremos con el tiempo positivo t_2'.

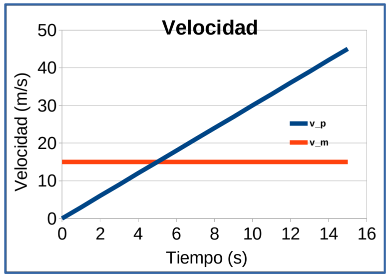
Respuesta: si la pregunta es ¿cuanto demora el policía en alcanzar al automóvil, la respuesta deberá ser que demora 5s + 13.66s = 18.66s.

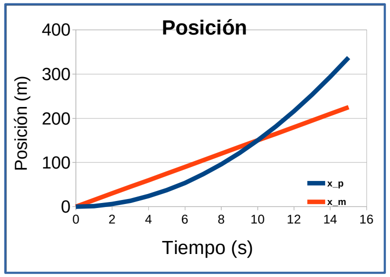
CINEMÁTICA- Más gráficas

Algunos casos …. te proponemos que los resuelvas construyendo una planilla de cálculo

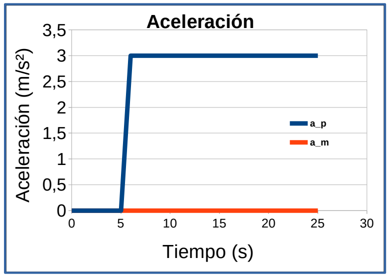
Policía acelera en t = 0 s
Automóvil no acelera
a_P = 3 m/s² . a_M = 0 m/s²
V_{P0} = 0. V_{M0} = 15 m/s

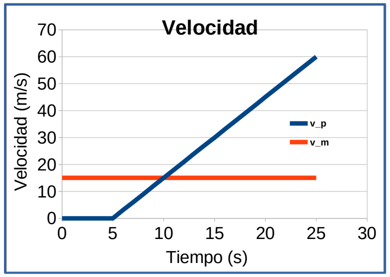


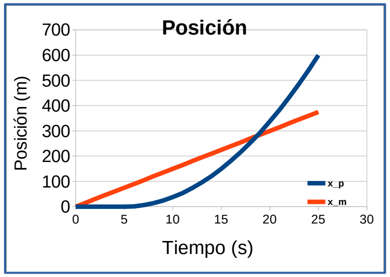




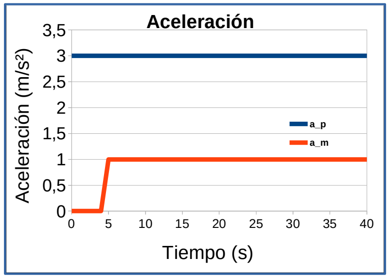
Policía acelera en t =5 s.
Automóvil no acelera
a_P = 3 m/s² . a_M = 0 m/s²
V_{P0} = 0. V_{M0} = 15 m/s

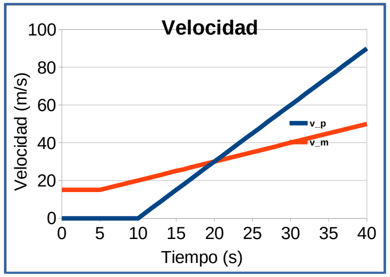


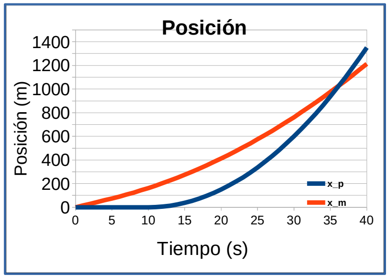




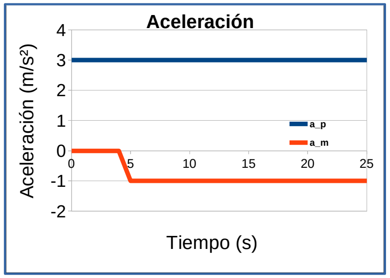
Policía acelera en t =10 s.
Automóvil acelera en t = 5 s
a_P = 3 m/s² . a_M = 1 m/s²
V_{P0} = 0. V_{M0} = 15 m/s

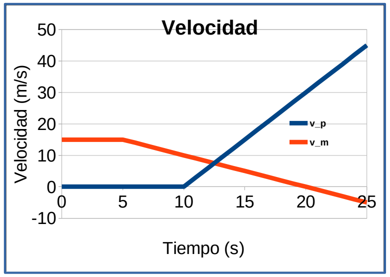


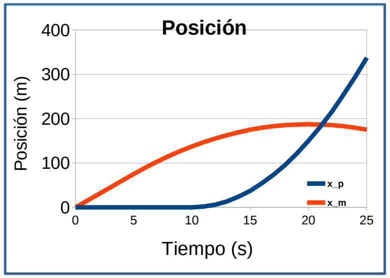




Policía acelera en t =10 s.
Automóvil acelera en t = 5 s
a_P = 3 m/s² . a_M = -1 m/s²
V_{P0} = 0. V_{M0} = 15 m/s







CINEMÁTICA- Velocidad en función de x

En muchos problemas resulta útil poder calcular la variación de la velocidad final de un cuerpo que sufre una aceleración durante un desplazamiento. Esto puede hacerse utilizando las ecuaciones x(t) y v(t) que conocemos pero puede obtenerse una expresión independiente del tiempo del tipo v(x)

Partimos de la ec. v(t) y despejamos el tiempo

$$v=v_0+a\,t \rightarrow t=\frac{v-v_0}{a}$$

Tomamos la ec. x(t) y reemplazamos el tiempo por la expresión anterior

$$x=x_0+v_0\,t+\frac{1}{2}a\,t^2=x_0+v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right)+\frac{1}{2}a_x\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2$$

$$x=x_0+v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right)+\frac{1}{2}a_x\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2$$

Nota: Esta ecuación (v(x)) es muy útil porque permite calcular la velocidad sin conocer el tiempo durante el cual el móvil es acelerado. Debe recordarse que esta ecuación nace de las ec. de v(t) y x(t) obtenidas asumiendo aceleración constante. Por lo tanto la ec. 3 tendrá la misma validez.

Pasamos x_0 a la izquierda y multiplicamos todo por 2a

$$2a(x-x_0)=2a\left(v_0\left(\frac{v-v_0}{a}\right)\right)+2a\left(\frac{1}{2}a_x\left(\frac{v-v_0}{a}\right)^2\right)$$

Simplificamos y despejamos *v*

Ec. (3) $$v^2=v_0^2+2a(x-x_0)=v_0^2+2a\,\Delta x$$

CINEMÁTICA – movimiento vertical

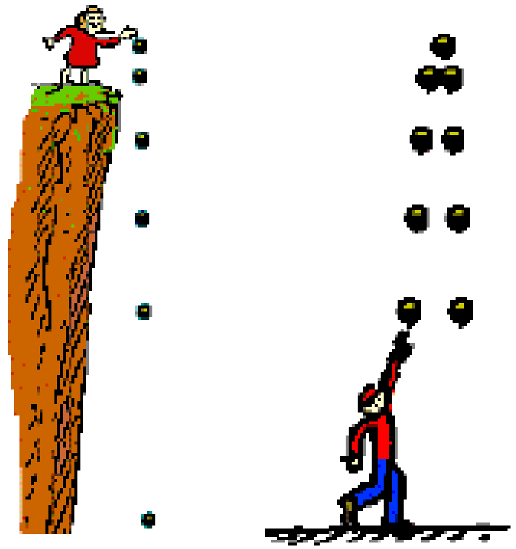
Un caso particular es el **movimiento vertical de caída libre**. En este caso el movimiento es uno-dimensional y la aceleración del móvil es siempre igual a la gravedad.

Las ecuaciones obtenidas para y(t), v(t) y v(y) siguen siendo validas.

$$v_y(t)=v_{y0}+g\,t \qquad y(t)=y_0+v_{y0}\,t-\frac{1}{2}g\,t^2 \qquad v_y^2=v_{y0}^2+2g(y-y_0)$$

Lo primero que debemos hacer es imponer un sistema de referencia, el cual nuevamente es arbitrario.
Sin importar cual sea la elección, la solución del problema deberá ser la misma. Es decir que, el objeto ocupará la misma posición espacial, independientemente de donde esté el origen del sistema coordenado.
Este sistema de referencia definirá la posición inicial del objeto y_0 al definirse el origen del sistema, y también el signo de la velocidad inicial v_{y0} y de la aceleración g.

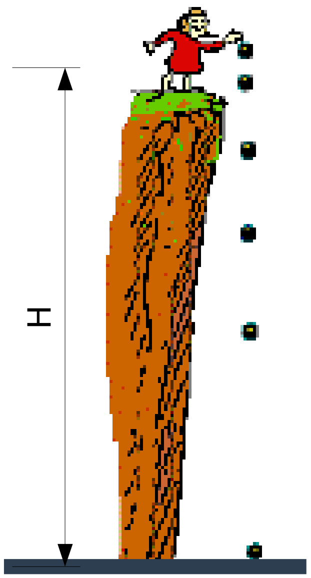
Veamos tres posibilidades.....



CINEMÁTICA – movimiento vertical

Tomemos primero el caso de la caída libre. La mujer suelta (sin velocidad) o arroja (con velocidad) un objeto desde una altura H, La gravedad acelera el objeto imprimiéndole cada vez más velocidad conforme desciende. Lo primero que debemos hacer es imponer un sistema de referencia, el cual nuevamente es arbitrario. Planteamos tres posibilidades:

a- Eje ***y*** vertical hacia arriba con origen en la base de la ladera
b- Eje ***y*** vertical hacia abajo con origen en el punto más alto
c- Eje ***y*** vertical hacia arriba con origen en el punto más alto



Caso a

$$v_y(t)=v_{y0}-g\,t$$

$$y(t)=H+v_{y0}t-\frac{1}{2}g\,t^2$$

$$v_y^2=v_{y0}^2-2g(y-y_0)$$

Caso b

$$v_y(t)=v_{y0}+g\,t$$

$$y(t)=0+v_{y0}t+\frac{1}{2}g\,t^2$$

$$v_y^2=v_{y0}^2+2\,g(y-y_0)$$

Caso c

$$v_y(t)=v_{y0}-g\,t$$

$$y(t)=0+v_{y0}t-\frac{1}{2}g\,t^2$$

$$v_y^2=v_{y0}^2-2g(y-y_0)$$

Si el objeto se deja caer libremente, entonces $v_{y0} = 0$. Por otro lado, si el objeto se arroja hacia arriba v_{y0} sera positivo en los casos *a* y *c* y negativo en el *b*.
Si el objeto se arroja hacia abajo entonces ocurrirá lo contrario.

CINEMÁTICA – movimiento vertical

Pero ¿qué ocurre con la ec. v(y)?, sin importar hacia adonde se arroja el objeto, la velocidad inicial v_{y0} está elevada al cuadrado. Tomemos uno de los casos, digamos el c (*eje y vertical hacia arriba con origen en el punto más alto*) y veamos si las ecuaciones tienen sentido. Supongamos que el objeto es arrojado hacia arriba con una velocidad $v_{yo}>0$.

Caso c

Ec. (1) $v_y(t)=v_{y0}-gt$

Ec. (2) $y(t)=0+v_{y0}t-\frac{1}{2}gt^2$

Ec. (3) $v_y^2=v_{y0}^2-2g(y-y_0)$

La ec. 1 nos dice que la velocidad disminuirá a medida que el objeto asciende producto de la acción de la gravedad.

La ec. 2 nos indica que la coordenada ***y*** crecerá desde 0 (porque el origen está arriba) gracias a la velocidad inicial mientras la gravedad se opone.

La ec. 3 nos dice que el cuadrado de la velocidad irá disminuyendo conforme crece la altura ***y***. Todo parece tener sentido.

Pregunta 1: ¿estas ecuaciones también valen cuando la piedra alcanza su punto más alto y comienza a descender?, o ¿sí la piedra es arrojada hacia abajo?. La respuesta es que sí. Las mismas ecuaciones describirán tanto lo que ocurre por encima del origen como por debajo de este.

Pregunta 2: Entonces, ¿que diferencia hay entre caída libre y tiro vertical?: ninguna.

CINEMÁTICA – movimiento vertical

Resolvamos un ejemplo: se arroja verticalmente una piedra con una rapidez (módulo de la velocidad) de 25 m/s desde una altura de 30 m. Calcule:

a- El tiempo que tardará en llegar a dicha altura.
b- La altura máxima que alcanzará.
c- El tiempo que demorará en llegar al suelo.
d- la velocidad con la que golpeará el suelo.

Para responder a la primera pregunta teniendo en cuenta las tres ecuaciones que tenemos, debemos pensar en cómo podríamos imponer una condición a alguna de esas ecuaciones que permita despejar la altura máxima. La respuesta está en las ec. de la velocidad (ec. 2 y 3), ya que justo cuando el objeto alcance su altura máxima entonces tendrá velocidad nula.

Adoptemos un sistema de referencia como el **a**, es decir con el eje ***y*** apuntando hacia arriba y el origen en la base de la montaña.

Para responder a la **primera pregunta** (tiempo para altura máxima?) utilizamos la ec. 1:

$$v_y(t)=v_{y0}-g\,t$$

Imponiendo la restricción de v_y = 0 en algún tiempo t’ y despejando dicho tiempo

$$t'=\frac{v_{y0}}{g}=\frac{25\,\frac{m}{s}}{9.8\,\frac{m}{s^2}}=2.55\,s$$

CINEMÁTICA – movimiento vertical

La **segunda pregunta** (altura máxima) se responde utilizando el tiempo ***t'*** obtenido en la primera y la ec. 2:

$$y(t) = H + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \longrightarrow \quad \text{Calculamos la posición para t=t'} \quad \longrightarrow \quad y_{max} = y(t') = 30\,m + 25\frac{m}{s} t' - \frac{1}{2} 9.8 \frac{m}{s^2} t'^2 = 61.88\,m$$

La **tercera pregunta (**tiempo que demora la piedra en llegar al suelo), llamémos t_T al tiempo total de vuelo y volvamos a utilizar la ec. 2, pero esta vez imponiendo la posición del suelo (y = 0) para obtener el tiempo t_T:

$$y(t_T) = 0 = 30\,m + 25\frac{m}{s} t_T - \frac{1}{2} 9.8 \frac{m}{s^2} t_T^2$$

Tenemos ahora una ecuación de segundo orden en t_T. Aplicamos la resolvente y obtendremos las dos raíces (A=-4.9 m/s², B = 25 m/s y C = 30 m):

$$t_T = \begin{matrix} t_{T1} = -1.003\,s \\ t_{T2} = 6.105\,s \end{matrix}$$

Nuevamente obtuvimos dos resultados; Uno negativo y otro positivo. Claramente el positivo es el resultado que buscamos. Este tiempo de 6.105 s parece tener sentido ya que previamente habíamos calculado que la piedra demoraba 2.55 s en ascender desde 30 m hasta la altura máxima de 61.88 m. También sabemos que la piedra demorará los mismos 2.55 s en volver a la altura de 30 m, y luego le quedan descender otros 30 m para llegar al suelo.

CINEMÁTICA – movimiento vertical

Pero ¿qué significa el negativo?. -1.003 s es lo que habría que ir hacia atrás en el tiempo si la piedra hubiera sido lanzada desde el suelo y no desde una altura de 30 m. Imaginen que en realidad la piedra fue lanzada desde el suelo con una velocidad inicial V_0 (que no es 25 m/s sino mayor), pero nosotros empezamos a contar el tiempo (t=0) justo cuando la piedra alcanza los 30 m de altura. Entonces, 1.003 s es el tiempo que demoró la piedra en ir desde el suelo hasta los 30 m de altura.

Pasemos a la **cuarta pregunta (¿c**on que velocidad golpea la piedra el suelo?). Para responder esto haremos uso de la ec. 1, la cual nos da la velocidad para cualquier tiempo. Como nosotros ya obtuvimos el tiempo total t_T, entonces solo queda reemplazar:

$$v_y(t=t_T)=v_{y0}-g\,t_T=25\,\frac{m}{s}-9.8\,\frac{m}{s^2}\,6.105\,s=-34.83\,\frac{m}{s}$$

El resultado es negativo y eso es correcto ya que la piedra va hacia abajo, es decir en el sentido negativo del eje y.

Podemos ahora contestar dos preguntas más…..

CINEMÁTICA – movimiento vertical

¿Cuanto demoró la piedra en volver a pasar por el punto de lanzamiento? Es decir y = 30 m.

¿Con que velocidad pasó por dicho punto?

Para la **quinta pregunta**, ya sabemos que la piedra demoró 2.55 s en ascender. Calculemos cuanto demoraría en descender hasta H utilizando la ec. 2 sin cambiar nada:

$$y(t_T) = 30\,m + 25\frac{m}{s}t_T - \frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}t_T^2$$

Imponiendo que $y(t_d) = 30$ m

$$30\,m = 30\,m + 25\frac{m}{s}t_d - \frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}t_d^2 \;\Rightarrow\; 0 = 25\frac{m}{s}t_d - \frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}t_d^2 \;\Rightarrow\; 0 = t_d\left(25\frac{m}{s} - \frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}t_d\right)$$

Sacando factor común t_d

La primera raíz de esta ecuación es $t_{d1} = 0$. Esta solución trivial es correcta ya que la piedra esta en y = 30 m en t = 0. La segunda raíz surge de buscar un t_{d2} que haga cero el argumento del paréntesis:

$$25\frac{m}{s} - \frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}t_{d2} = 0 \;\Rightarrow\; t_{d2} = \frac{2 \times 25\frac{m}{s}}{9.8\frac{m}{s^2}} = 5.1\,s$$

Esto es 2 veces el tiempo calculado para el ascenso!!!!

CINEMÁTICA – movimiento vertical

Ahora si, respondamos ¿Con qué velocidad pasó nuevamente la piedra por H (y = 30 m)?

Usemos la ec. 1 y reemplacemos por el tiempo t_{d2} obtenido previamente:

$$v_y(t=t_{d2})=v_{y0}-g\,t_{d2}=25\frac{m}{s}-9.8\frac{m}{s^2}5.1\,s=-25\frac{m}{s}$$

la misma rapidez con que fue lanzada, pero en sentido contrario!!!!

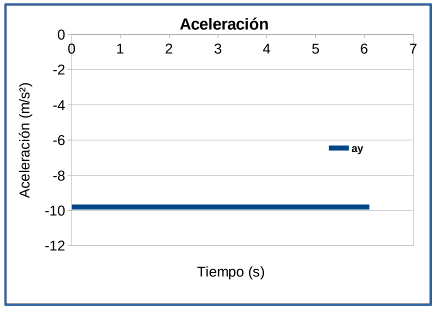
A partir de resolver un ejemplo concreto podemos sacar varias **conclusiones** sobre los problemas de movimiento vertical:

1- Solo dos ecuaciones (Ec. 1 y 2) son suficientes para resolver cualquier problema
2- Las ecuaciones planteadas en el punto inicial permiten describir la totalidad del movimiento (posición y velocidad) durante el ascenso y descenso.
3- El punto de mayor altura se obtiene cuando la velocidad se hace nula
4- Los tiempos de ascenso y descenso son iguales (siempre que se vuelva a la misma altura)
5- El tiempo de vuelo se obtiene reemplazando la altura final en la ec y(t) y despejando.
6- En un tiro vertical, cuando el objeto pasa por una dada altura en ascenso o en descenso su rapidez es la misma. Esto implica que la rapidez con que un objeto vuelve al suelo luego de ser lanzado es la misma, pero con sentido contrario.

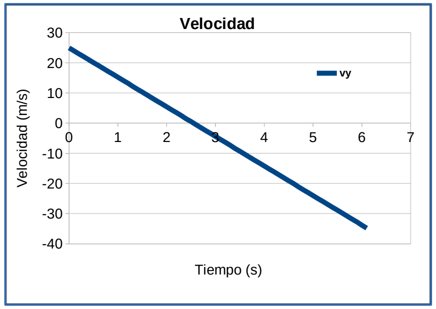
CINEMÁTICA – movimiento vertical

Finalmente, veamos como quedan las gráficas de aceleración, velocidad y posición:

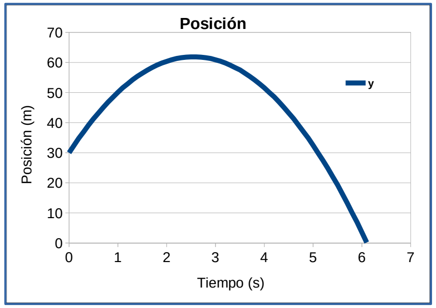
En movimiento de tiro vertical la gráfica de la **aceleración** es siempre igual. ***a*** es constante e igual a ±9.8 m/s². El signo de ***a*** depende de hacia donde apunte el eje ***y***.



La **velocidad** también es una recta con pendiente ±9.8. Esta pendiente será positiva o negativa dependiendo hacia donde apunte el eje ***y***.



La **posición** es siempre una parábola cóncava hacia abajo ya que la aceleración siempre apunta en esa dirección. Notar que el punto más alto de la parábola (correspondiente al de mayor altura) coincide en el tiempo para velocidad nula. También que el valor de la velocidad en cada instante es la pendiente de la recta tangente de la posición.



CINEMÁTICA – Preguntas

P1- ¿Un objeto con aceleración constante puede invertir la dirección en la que se mueve? ¿Puede invertirla dos veces?

P2- ¿En qué condiciones la velocidad media es igual a la velocidad instantánea?

P3- ¿Para un objeto es posible a) frenar mientras su aceleración incrementa en magnitud; b) aumentar su rapidez mientras disminuye su aceleración?

P4- ¿Puede usted tener desplazamiento 0 y velocidad media distinta de 0?

P5- ¿Un vehículo alcanza a otro cuando obtiene lo misma velocidad?

P6- ¿El tiempo de vuelo de un objeto en tiro vertical es siempre el doble del tiempo de ascenso?

P7- ¿Siempre que se lanza un objeto hacia arriba vuelve con la misma rapidez con que se lanzo?

P8- ¿Los movimientos verticales son siempre acelerados?

P9- ¿Las ecuaciones desarrolladas hasta aquí son validas para cualquier aceleración?

P10- ¿Como debería obtener la velocidad y la aceleración si el objeto tiene una aceleración variable en el tiempo?