FÍSICA I

Notas sobre cinemática 2D: Tiro parabólico, movimiento circular y velocidad relativa

Version v.2

FICH – UNL

2021

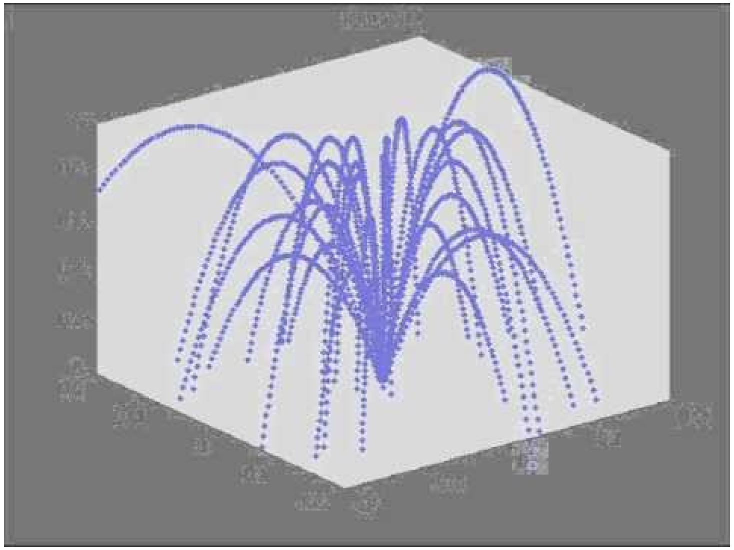
Prof. Damian Ramajo

CINEMÁTICA

Las ecuaciones de cinemática en 2 y 3 dimensiones no son muy diferentes de lo visto en 1D.

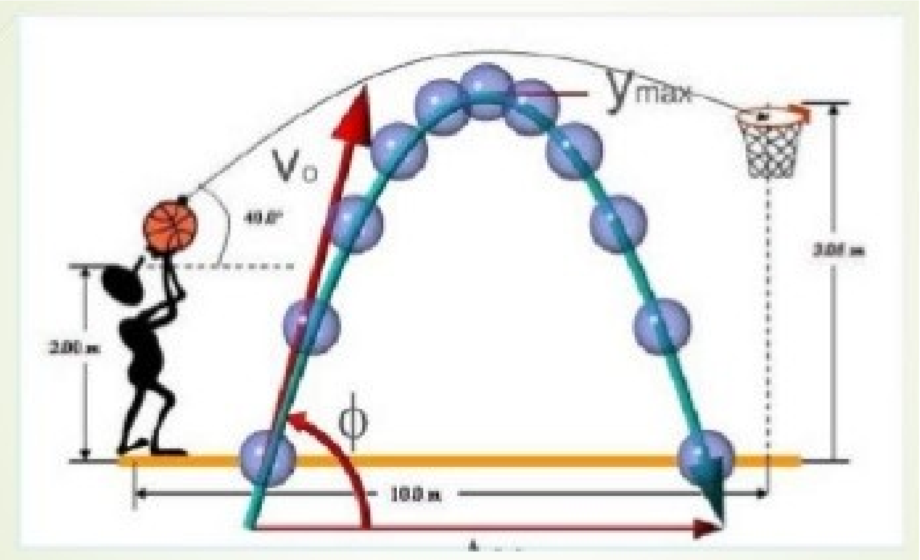
Aunque los movimientos ocurran en el espacio 3D, muchas veces estos se pueden reducir a lo que ocurre en un plano 2 dimensional.

Si tomamos por ejemplo el lanzamiento parabólico en una dirección arbitraria, este ocurre tanto en dos dimensiones sobre la superficie y en la tercera dimensión en la altura. Sin embargo, puede pensarse al movimiento como ocurriendo en un plano vertical en la dirección del lanzamiento.
Es decir, cualquier de las trayectorias marcadas en la figura ocurren sobre un único plano vertical donde el movimiento es 2D



CINEMÁTICA – Tiro parabólico

Concentremos la atención en el movimiento parabólico. Este ocurre cuando se arroja un objeto con una velocidad inicial V_0 y un ángulo Ø.La única aceleración es la de la gravedad y apunta siempre en la misma dirección, independientemente de la trayectoria del objeto. Esto determina que las ecuaciones que gobiernan el movimiento sean siempre similares y que se **desacoplen**.

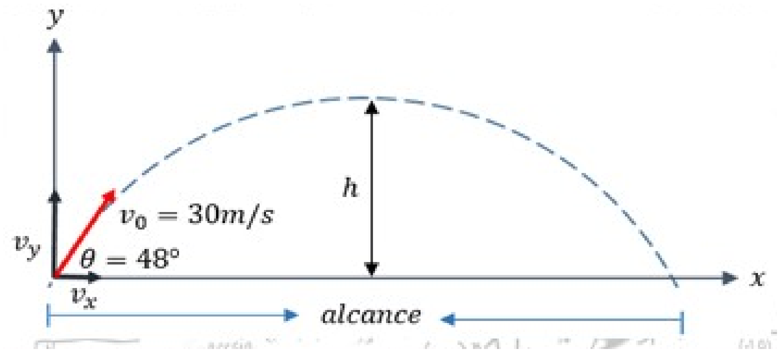


¿desacoplen?. Veamos las ecuaciones antes de volver sobre esto …

CINEMÁTICA – Tiro parabólico

Pensemos en lo que sabemos de cinemática 1D y en las ecuaciones de posición y velocidad que desarrollamos:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad \vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{a}t$$



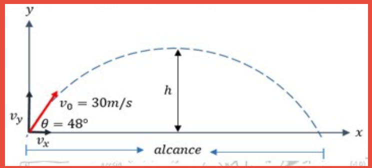
Y en la tercera ecuacion donde nos independizamos del tiempo:

$$v^2=v_0^2+2a(x-x_0)=v_0^2+2a\Delta x$$

Esas ecuaciones tenían una única restricción, que la aceleración debe ser constante. Esa condición acá tambien se cumple y por ello todas estas ecuaciones son válidas.

Pensemos ahora en escribir las dos primeras ecuaciones r(t) y v(t) para los ejes *x* e *y*. Es decir, pasemos de su forma vectorial a su forma escalar:

CINEMÁTICA – Tiro parabólico



Eje *x* (horizontal)

$$x(t)=x_0+v_{0x}t+\frac{1}{2}a_x t^2 \longrightarrow x(t)=x_0+v_{0x}t$$

Pero, $a_x = 0$

$$v_x(t)=v_{0x}+a_x t \longrightarrow v_x(t)=v_{x0}$$

Eje *y* (vertical apuntando hacia arriba)

$$y(t)=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}a_y t^2 \longrightarrow y(t)=y_0+v_{0y}t-\frac{1}{2}g t^2$$

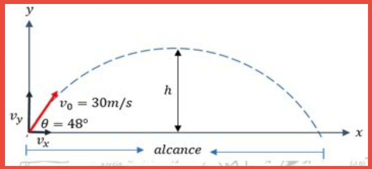
$a_y = -g$

$$v_y(t)=v_{0y}+a_y t \longrightarrow v_y(t)=v_{0y}-g t$$

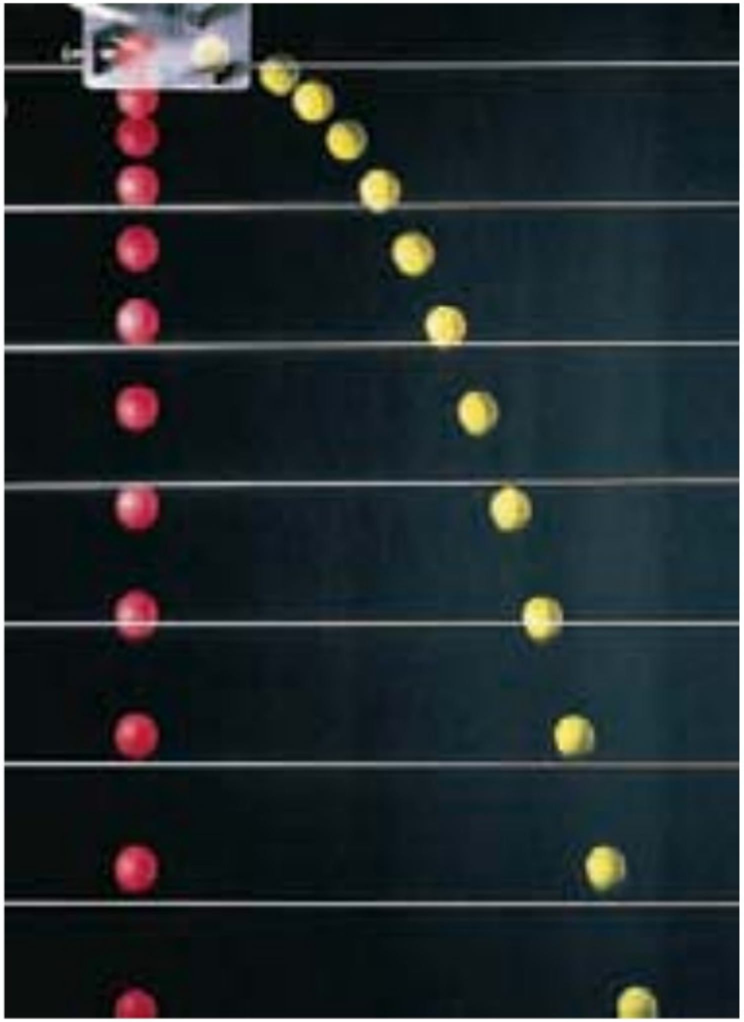
$$v_y^2=v_{0y}^2-2g(y-y_0)$$

Notar que los signos de las ecuaciones de y y v_y corresponden a un eje y hacia arriba

CINEMÁTICA – Tiro parabólico

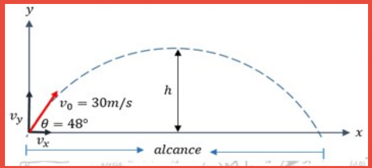


Las ecuaciones en *x* e *y* estan desacopladas. Es decir que ni *x* aparece en *y(t)* ni *y* aparece en *x(t)*.
Este desacople es mostrado en la figura de la derecha: allí se ven fotografias de dos pelotas en movimiento. La roja fue soltada (sin velocidad inicial) y cae libre en forma vertical. Al mismo tiempo la amarilla fue arrojada con velocidad inicial solo en la dirección horizontal. Al comparar las trayectorias se observa que el desplazamiento de ambas en el eje vertical es exactamente igual, sin importar la velocidad que tenga la pelota amarilla en el otro eje.



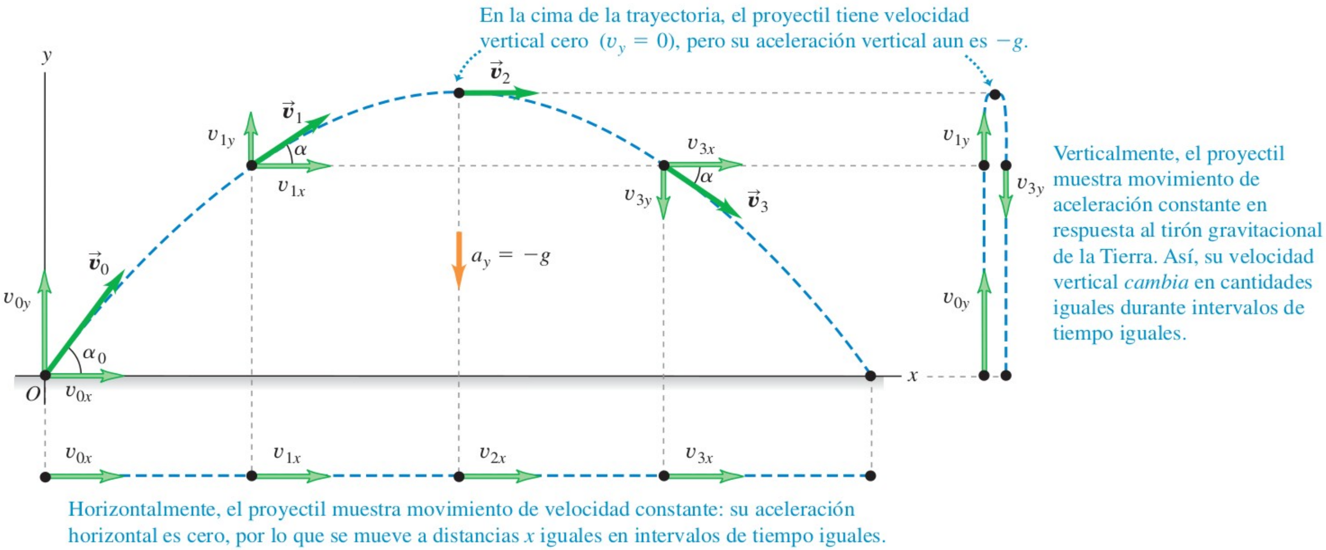
Tarea: tomen dos pelotas iguales (de tenis o similares) y hayan esta experiencia en sus casas arrojando una a lo largo de la mesa y dejando caer la otra cuando la primera llega al borde. Graben con sus celulares y luego comparen las trayectorias. Muchos celulares permitan grabar en cámara lenta, lo cual hará más interesante la experiencia.

CINEMÁTICA – Tiro parabólico



Analicemos lo que ocurre con la velocidad de un proyectil que se dispara inicialmente con v_0 y un ángulo α_0. Lo primero que hacemos es descomponer esta velocidad en sus componentes v_{0x} y v_{0y}.

$$v_x(t) = v_{0x} \qquad v_y(t) = v_{0y} - g\,t$$

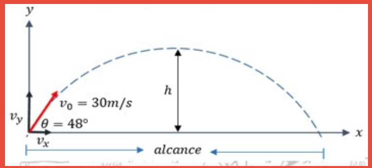


Las ecuaciones nos dicen que $v_x(t)$ es siempre igual a la v_{0x} (ya que no hay aceleración en x). Por eso el vector v_x es siempre igual en todos los puntos del a parábola.

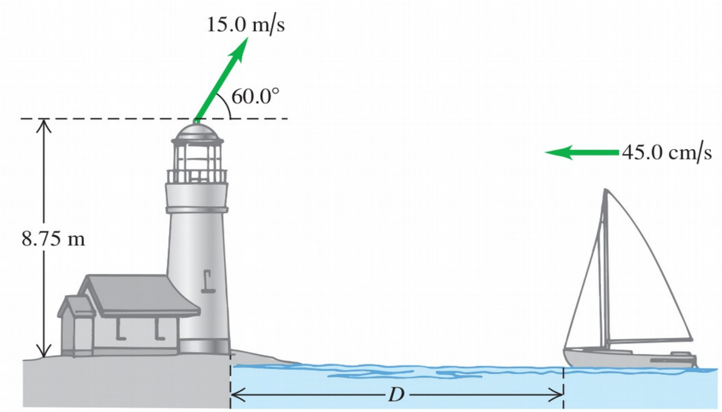
$v_y(t)$ sí cambia porque existe aceleración *g*. v_y disminuye a medida que nos acercamos al punto más alto de la parábola hasta hacerse nula. Luego comienza a aumentar en la dirección contraria.

Como vimos al analizar tiro vertical 1D, la velocidad con la que el objeto regresa al suelo es igual a la velocidad con la que fue lanzado, pero la componente vertical ha invertido su dirección.

CINEMÁTICA – Tiro parabólico



Problema: se desea lanzar una boya (B) a un velero (V) que se acerca a la costa a una velocidad v_v. El ángulo de disparo es de 60°, la velocidad de 15 m/s y la boya se dispara desde una torre de 8.75 m. La boya debe caer justo delante del velero.
Calcule: la distancia *D* a la que debe estar el velero justo cuando se hace el disparo si el velero tiene velocidad v_v = 45 cm/s.



Solución: comencemos por definir un sistema de referencia. Cualquier opción es válida, pero puede que algunas opciones sean más ventajosas. Elijamos poner los ejes en la base de la torre, con el eje *y* hacia arriba y el *x* hacia la derecha. Dado que el punto donde caerá la boya está bien definido, ya que el lanzamiento terminará en el agua, y se conocen todos los datos del lanzamiento, es posible calcular la trayectoria de la boya independientemente de la del velero. Por ahora solo plateamos las ecuaciones para la boya (B):

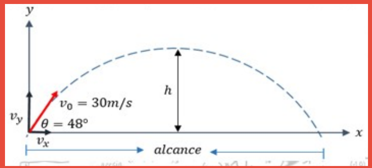
$$x_B(t) = 0 + 15\frac{m}{s}\cos(60°)\,t$$

$$y(t) = 8.75\,m + 15\frac{m}{s}sen(60°)\,t - \frac{1}{2}9.8\frac{m}{s^2}t^2$$

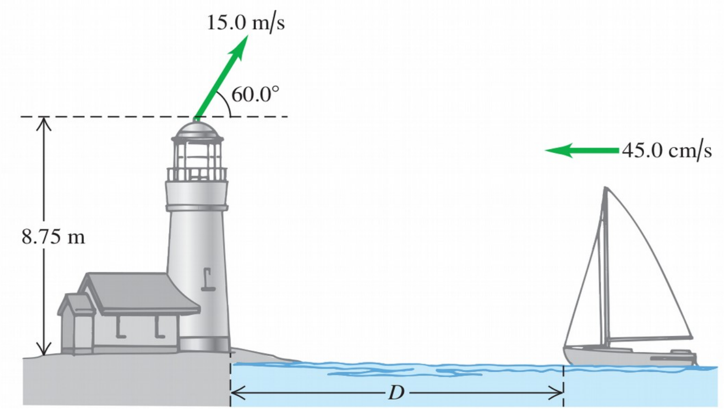
$$x_B(t) = 7.5\frac{m}{s}t$$

$$y(t) = 8.75\,m + 13\frac{m}{s}t - 4.9\frac{m}{s^2}t^2$$

CINEMÁTICA – Tiro parabólico



Ahora imponemos la posición final en la ecuación *y(t)* y despejamos el tiempo total t_T que dura el disparo:



$$y(t) = 8.75\,m + 13\frac{m}{s}t - 4.9\frac{m}{s^2}t^2$$

$$0 = 8.75\,m + 13\frac{m}{s}t_T - 4.9\frac{m}{s^2}t_T^2$$

Nos queda una ecuación cuadrática, la cual resolvemos aplicando la resolvente (A=-4.9 m/s², B=13 m/s, C=8.75 m)

$$t_T = \begin{matrix} t_{T1} = -0.55\,s \\ t_{T2} = 3.21\,s \end{matrix}$$

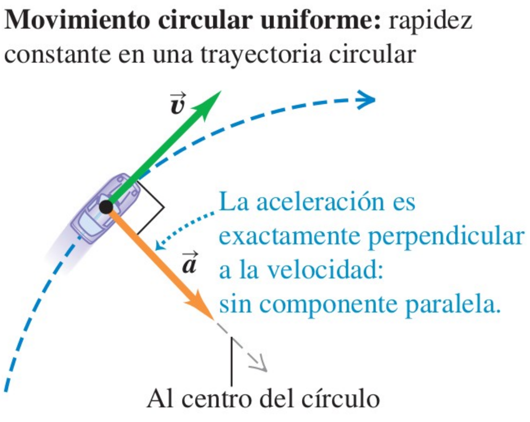
Nos quedamos con el resultado positivo de 3.21 s. Con este tiempo podemos ahora calcular a qué distancia horizontal caerá la boya:

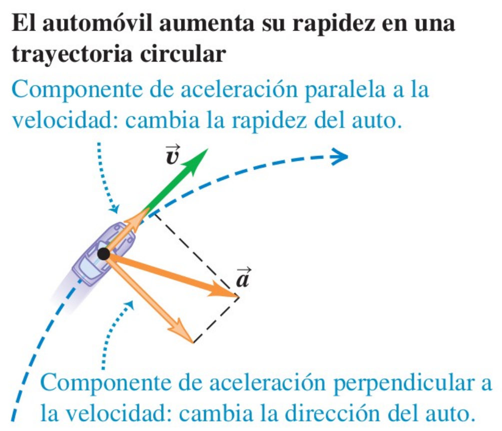
$$x_B(t_{T2}) = 7.5\frac{m}{s}t_{T2} = 24.1\,m$$

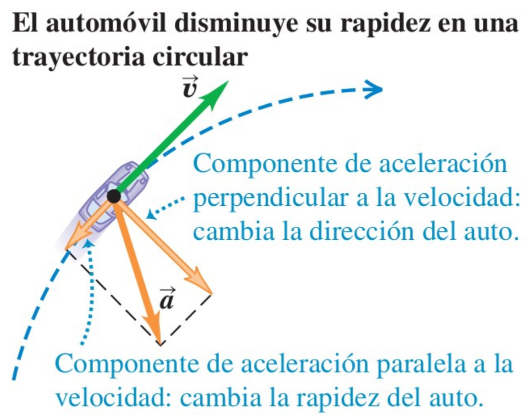
Ahora, para encontrar la distancia D a la que debe estar el velero justo cuando se dispara la boya, debemos tomar el tiempo t_{T2} y calcular cuanto más a la derecha debe estar el velero del punto donde caerá la boya en *t=0*:

$$D = x_B(t_{T2}) + v_v t_{T2} = 24.1\,m + 0.45\frac{m}{s}3.21\,s = 25.54\,m$$

Movimiento circular





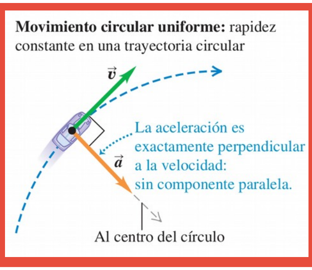


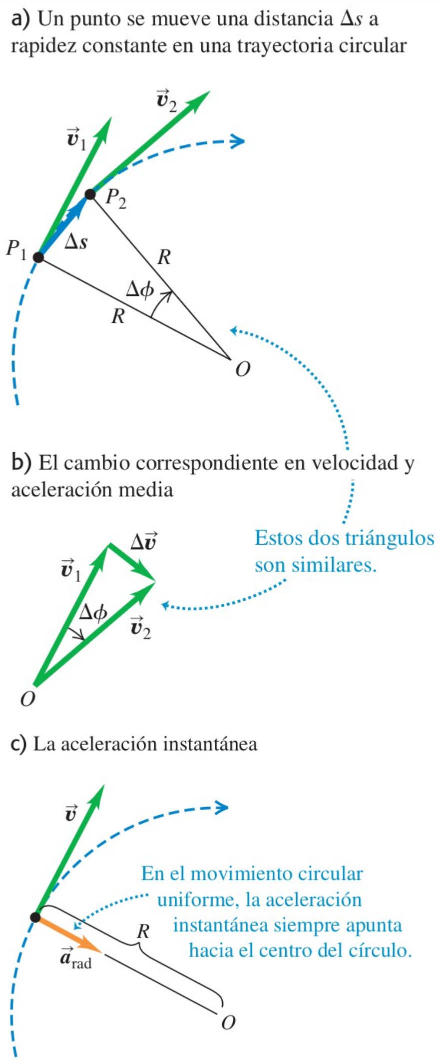
Un movimiento circular SIEMPRE es un movimiento acelerado ya que el cambio en el vector velocidad por el solo hecho de que esta modificando su dirección (no su magnitud) implica un cambio en la velocidad. Esta aceleración se denomina radial o **centrípeta.** Esta aceleración siempre apuntará hacia el centro de la curva

Si además el vector velocidad esta cambiando de magnitud (el auto cambia su rapidez) entonces tendra también una **aceleración tangencial**. Esta aceleración siempre apuntará tangente a la curva

La **aceleración total** será la suma vectorial de la **centrípeta** y la **tangencial**

Movimiento circular uniforme





El caso mas simple es cuando la rapidez del movil no cambia. En este caso, para calcular el valor de la aceleración radial o centrípeta calculamos el cambio vectorial de la velocidad en un dado intervalo de tiempo.

Por similitud de triangulos podemos decir que: $\frac{|(\Delta v)|}{v_1}=\frac{\Delta S}{R}$

Y despejando: $|(\Delta v)|=\frac{v_1}{R}\Delta S$

Dividiendo ambos miembros por Δt obtenemos la definición de aceleración media

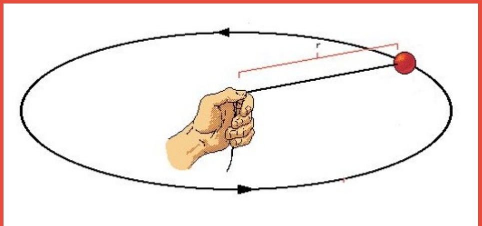
$$a_{med}=\frac{|(\Delta v)|}{\Delta t}=\frac{v_1}{R}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Tomando límite cuando Δt tiende a cero $a_c=\frac{v}{R}\lim_{\Delta t - 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{v}{R}\frac{dS}{dt}=\frac{v^2}{R}$

$$\boxed{a_c=\frac{v^2}{R}}$$

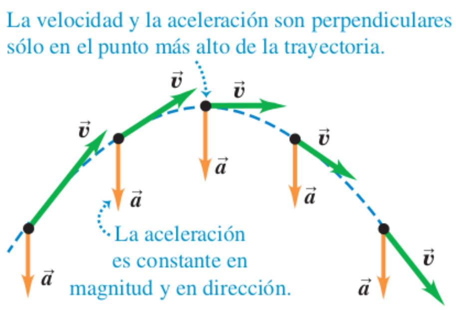
Esta es una ecuación escalar. No nos da el vector aceleración sino su módulo, pero su dirección será siempre apuntando al centro de rotación.

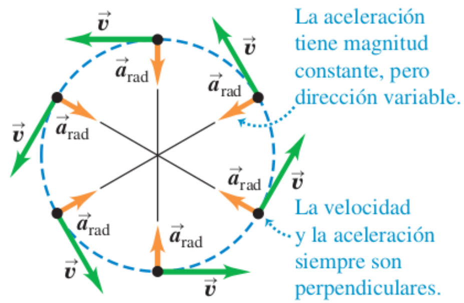
Movimiento circular uniforme



En el caso del proyectil la unica aceleración está dada por la gravedad y siempre apunta hacia abajo (veremos despues que cuando se trata de un planeta la aceleración si es centrípeta). Entonces la trayectoria es una parábola, no una circunferencia

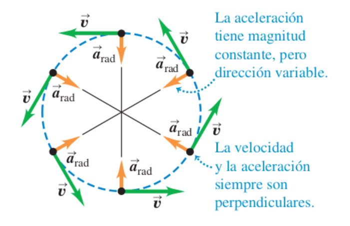
En el caso del moviemiento circular (en este caso horizontal ya que la gravedad no interviene) la aceleración apunta hacia el centro. Este podría ser el caso de una piedra atada a una cuerda que es girada por la mano en un plano horizontal





La aceleración centrípeta siempre actua perpendicular a la trayectoria y en definitiva al vector velocidad. Por ello esta aceleración no produce cambio en la rapidez del movimiento, solo en su dirección.

Movimiento circular uniforme



Dado que la rapidez de la velocidad es la distancia recorrida en un dado tiempo, si consideramos el giro completo de un objeto con rapidez constante, podemos relacionar el rádio de la curva, su rapidez y el tiempo o **periodo** que demora en girar:

Giro completo $v = \dfrac{2\pi R}{\Delta t} = \dfrac{2\pi R}{T}$

Giro parcial $v = \dfrac{\Delta \theta R}{\Delta t}$

Ejemplo 3.11 Aceleración centrípeta en un camino curvo

Un automóvil deportivo Aston Martin V8 Vantage tiene una "aceleración lateral" de $0.96g$, que es $(0.96)(9.8\ \text{m/s}^2) = 9.4\ \text{m/s}^2$. Ésta es la aceleración centrípeta máxima que puede lograr el auto sin salirse de la trayectoria circular derrapando. Si el auto viaja a 40 m/s (cerca de 89 mi/h o 144 km/h), ¿cuál es el radio mínimo de curva que puede describir? (Suponga que no hay peralte.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que el coche se mueve en una curva —es decir, un arco de círculo— con rapidez constante, podemos aplicar las ideas del movimiento circular uniforme.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (3.28) para obtener la incógnita R (el radio de la curva) en términos de la aceleración centrípeta dada a_{rad} y la rapidez v.

EJECUTAR: Nos dan a_{rad} y v, así que despejamos R de la ecuación (3.28):

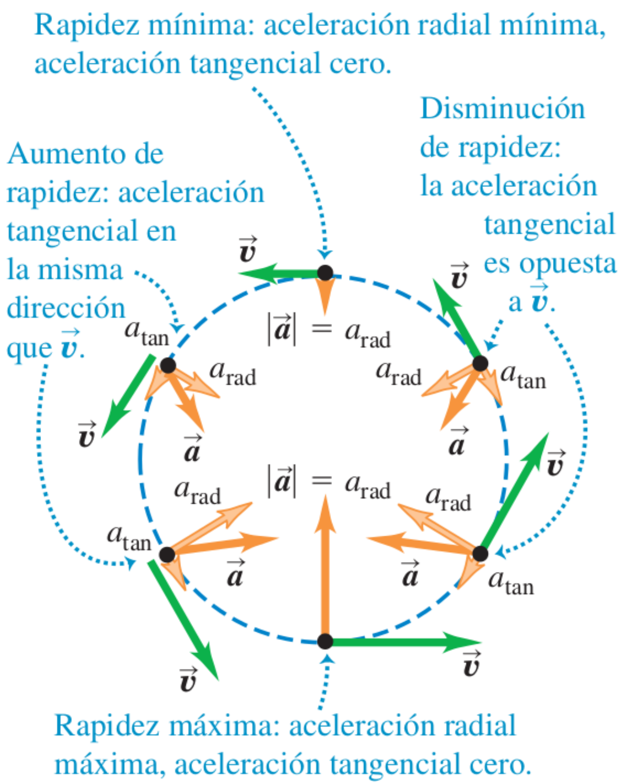
$$R = \frac{v^2}{a_{rad}} = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{9.4\ \text{m/s}^2} = 170\ \text{m (aprox. 560 ft)}$$

EVALUAR: Nuestro resultado muestra que el radio de giro requerido R es proporcional al *cuadrado* de la rapidez. Por lo tanto, incluso una reducción pequeña en la rapidez puede reducir R considerablemente. Por ejemplo, si v disminuye en un 20% (de 40 a 32 m/s), R disminuirá en un 36% (de 170 m a 109 m).

Otra forma de reducir el radio requerido es *peraltar* la curva. Investigaremos esta opción en el capítulo 5.

Movimiento circular no uniforme

Cuando el giro se produce con variación de la rapidez del movil decimos que se trata de un movimiento circular no uniforme. En la figura podemos ver tanto la aceleración radial a_c que ya conocemos como la tangencial a_{tan}.



$$a_{tan} = \frac{d|(v)|}{dt}$$

No hay una expresión para a_{tan}, solo la definición general de aceleración que ya conocemos.

a_c y a_{tan} son perpendiculares entre si. Luego, la aceleración total o resultante de a_c y a_{tan} se calcula por Pitágoras

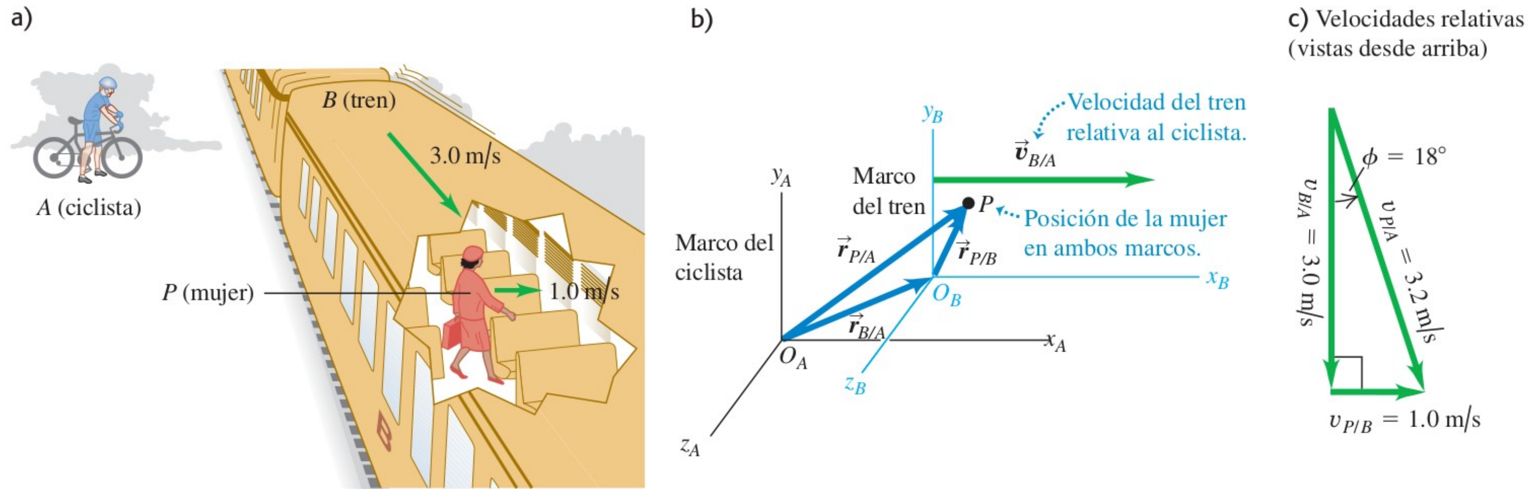
$$a_T = \sqrt{a_c^2 + a_{tan}^2}$$

Velocidad relativa

En general, si dos observadores miden la velocidad de un cuerpo, obtienen diferentes resultados si un observador se mueve en relación con el otro. La velocidad que un observador dado percibe es la velocidad relativa a él, o simplemente velocidad relativa.
La velocidad absoluta de un objeto (tomada con referencia a un punto fijo como el piso) es la suma de la velocidad de un sistema movil más la velocidad del objeto respecto a ese sistema movil. En formulas es:

$$\vec{v}_{ab} = \vec{v}_{sis} + \vec{v}_{rel}$$

Esta es una expresión vectorial y como tal requiere los cuidados necesarios para resolverla sin errores. El primero es que requiere un sistema de referencia fijo. Veamos un ejemplo



Velocidad relativa

Ejemplo 3.14 Vuelo con viento cruzado

La brújula de un avión indica que va al norte, y su velocímetro indica que vuela a 240 km/h. Si hay un viento de 100 km/h de oeste a este, ¿cuál es la velocidad del avión relativa a la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de un problema de velocidad en dos dimensiones (hacia el norte y hacia el este), así que tenemos un problema de velocidad relativa usando vectores.

PLANTEAR: Nos dan la magnitud y dirección de la velocidad del avión (P) relativa al aire (A), así como la magnitud y dirección de la velocidad del viento, que es la velocidad del aire (A) con respecto a la Tierra (E):

$$\vec{v}_{P/A} = 240\ \text{km/h} \qquad \text{al norte}$$
$$\vec{v}_{A/E} = 100\ \text{km/h} \qquad \text{al este}$$

Nuestras incógnitas son la magnitud y dirección de la velocidad del avión (P) relativa a la Tierra (E), $\vec{v}_{P/E}$. Así, que las calcularemos usando la ecuación (3.36).

EJECUTAR: Usando la ecuación (3.36), tenemos

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

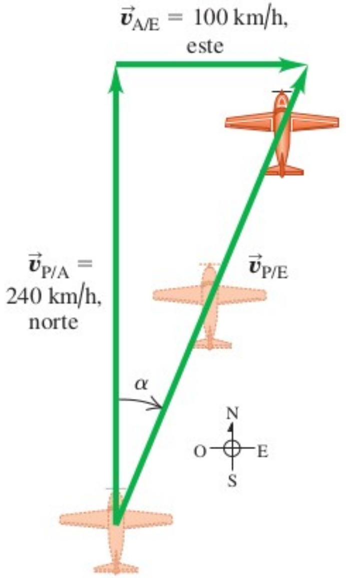
Las tres velocidades relativas y su relación se muestran en la figura 3.35; las incógnitas son la rapidez $v_{P/E}$ y el ángulo α. Del diagrama obtenemos

$$v_{P/E} = \sqrt{(240\ \text{km/h})^2 + (100\ \text{km/h})^2} = 260\ \text{km/h}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{100\ \text{km/h}}{240\ \text{km/h}}\right) = 23°\ \text{E del N}$$

EVALUAR: El viento lateral aumenta la rapidez del avión relativa al suelo, pero al precio de desviarlo de su curso.

3.35 El avión apunta al norte, pero el viento sopla al este, dando la velocidad resultante $\vec{v}_{P/E}$ relativa a la Tierra.



Velocidad relativa

Ejemplo 3.15 Corrección por viento cruzado

En el ejemplo 3.14, ¿qué rumbo debería tomar el piloto para viajar al norte? ¿Cuál será su velocidad relativa a la tierra? (Suponga que su rapidez con respecto al aire y la velocidad del viento son las del ejemplo 3.14.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 3.14, éste es un problema de velocidad relativa con vectores.

PLANTEAR: La figura 3.36 ilustra la situación. Ahí, los vectores se acomodaron según la ecuación vectorial de velocidad relativa, ecuación (3.36):

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

Como muestra la figura 3.36, el piloto apunta la nariz del avión con un ángulo β hacia el viento para compensar su efecto. Este ángulo, que nos da la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ (la velocidad del avión relativa al aire), es una de nuestras incógnitas. La otra es la rapidez del avión sobre el suelo, que es la magnitud del vector $\vec{v}_{P/E}$ (la velocidad del avión relativa a la Tierra). Veamos las cantidades que conocemos y las que desconocemos:

$\vec{v}_{P/E}$ = magnitud desconocida	al norte
$\vec{v}_{P/A} = 240\ \text{km/h}$	dirección desconocida
$\vec{v}_{A/E} = 100\ \text{km/h}$	al este

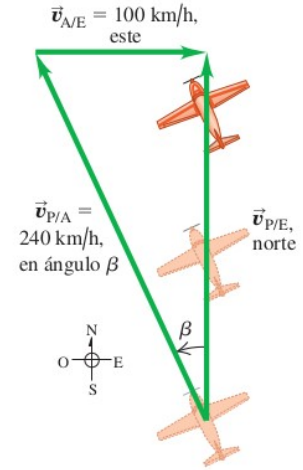
Podemos calcular las incógnitas empleando la figura 3.36 y trigonometría.

EJECUTAR: Por el diagrama, la rapidez $v_{P/E}$ y el ángulo β están dados por

$$v_{P/E} = \sqrt{(240\ \text{km/h})^2 - (100\ \text{km/h})^2} = 218\ \text{km/h}^2$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{100\ \text{km/h}}{240\ \text{km/h}}\right) = 25°$$

3.36 El piloto debe apuntar el avión en la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ para viajar al norte relativo a la Tierra.



El piloto debería dirigirse 25° al oeste del norte, y su rapidez con respecto al suelo será entonces de 218 km/h.

EVALUAR: Observe que había dos incógnitas —la magnitud de un vector y la dirección de un vector— tanto en este ejemplo como en el ejemplo 3.14. La diferencia es que, en el ejemplo 3.14, la magnitud y dirección se referían al *mismo* vector ($\vec{v}_{P/E}$), mientras que en este ejemplo se refieren a vectores *distintos* ($\vec{v}_{P/E}$ y $\vec{v}_{P/A}$).

No es sorpresa que un viento de frente reduzca la rapidez de un avión relativa al suelo. Lo que este ejemplo demuestra es que un *viento cruzado* también frena los aviones: es una triste realidad de la industria aeronáutica.