CÁLCULO II

INTEGRALES DE SUPERFICIE DE CAMPOS VECTORIALES

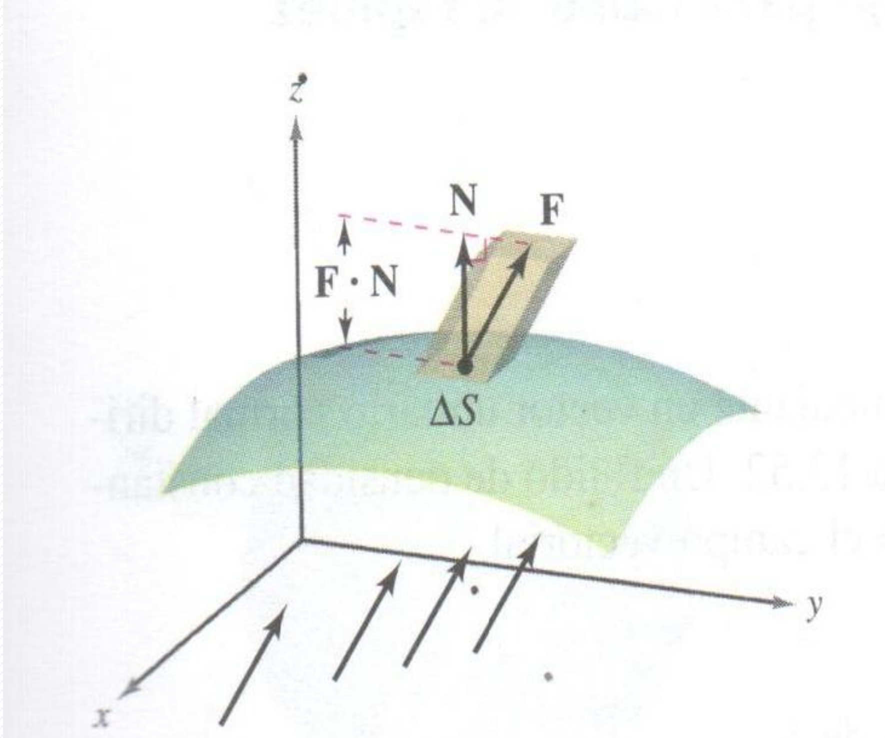
Prof. Ing. Silvia Seluy

INTEGRALES DE FLUJO

Las integrales de flujo representan una de las aplicaciones más importantes de las integrales de superficie de campos vectoriales y definen el flujo de un fluido a través de una superficie S.

Si **F** representa un campo de velocidades de un fluido, la cantidad de fluido que pasa por unidad de tiempo por la Región se aproxima mediante el volumen de la columna de altura F.N

$$\Delta V = (\bar{F}.\bar{N})\Delta S$$



El campo de velocidad **F** indica la dirección del flujo del fluido.

El volumen representa el flujo del campo de velocidades a través de la superficie S, por lo cual la integral de superficie representa el flujo total .

Definición de integral de flujo

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$, donde M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas sobre la superficie S orientada mediante un vector unitario normal $\mathbf{N}$. La **integral de flujo de F a través de** S está dada por

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Nota: Se debe pensar a S como una red de pesca en una corriente.

De la expresión de ***masa*= *densidad*. *Volumen* = (ρ .V)**, si pensamos a la razón de fluido como masa por unidad de tiempo, por unidad de área, tenemos:

$$m = \rho.V \Rightarrow \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{t}} = \frac{\rho.V}{t} \Rightarrow \frac{\rho.V}{t.A} = \frac{\rho.A.l}{t.A} = \frac{\rho.l}{t} = \rho.\vec{v} = \frac{m}{A.t}$$

$$\Rightarrow (\rho.\vec{v}.\vec{N}).A = \frac{m}{t}$$

Donde (ρ.**v.N**)A representa la masa de fluido en la dirección del vector normal por unidad de tiempo.

Y la integral de flujo entonces queda:

$$\boxed{\iint_S (\rho.\vec{F}.\vec{N})dS}$$

Con $\vec{N}dS = \frac{\vec{\nabla}G(x,y,z)}{\left\|\vec{\nabla}G(x,y,z)\right\|}dS = \vec{\nabla}G(x,y,z).dA$ (luego de alguna simplificación)

Ver (Ej. 5) pág. 846

TEOREMA 13.11 Evaluación de una integral de flujo

Sea S una superficie orientada dada por $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy.

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int\!\!\int_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\, dA \quad \text{Orientada hacia arriba}$$

$$\int\!\!\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int\!\!\int_R \mathbf{F} \cdot [g_x(x, y)\mathbf{i} + g_y(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}]\, dA \quad \text{Orientada hacia abajo}$$

En el caso de la primera integral, la superficie está orientada hacia arriba y en el caso de la segunda integral, la superficie está orientada hacia abajo.

INT. DE FLUJO CON S DADA PARAMÉTRICAMENTE

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

Superficie paramétrica

definida sobre una región D del plano uv, la integral de flujo de $\mathbf{F}$ a través de S puede definirse como

$$\int_S\int \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \int_D\int \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}\right) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, dA$$
$$= \int_D\int \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA.$$

Observe la similitud de esta integral con la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds.$$

RESUMEN DE INTEGRALES DE LÍNEA Y SUPERFICIE

Integrales de línea

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

$$= \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, ds$$

Forma escalar

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

$$= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Forma vectorial

Integrales de superficie $[z = g(x, y)]$

$$dS = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA$$

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_R f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA$$

Forma escalar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_R \mathbf{F} \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\, dA$$

Forma vectorial (normal hacia arriba)

Integrales de superficie (forma paramétrica)

$$dS = \|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|\, dA$$

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, dS$$

Forma escalar

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

Forma vectorial