Ejercicio 1

Dada la siguiente ecuación que modela la transferencia de calor en una barra:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + G(x) = 0; \quad \forall\, x \in [0,\ 1];\ k = 2; \quad G(x) = 100 * (1 - x)$$

$$T = 10|_{x=0}; \quad -k\frac{\partial T}{\partial x} = 1|_{x=1}$$

Determinar el valor de la temperatura en cada nodo, considerando una malla equiespaciada con Δx=0.25. Resolver el problema sin utilizar nodos ficticios, manteniendo un error de 2^{do} orden en todas las aproximaciones utilizadas.

Dado que tengo una condición de Neumman, se agrega una incógnita a mi sistema de ecuaciones (el valor de la temperatura en el borde x = 1). Dado que no se utilizan nodos ficticios, se debe aproximar utilizanndo una derivada hacia atrás de 3 puntos (cant. puntos(?) - orden derivada(1) = orden de error(2) -> 2+1 = 3).

Utilizo entonces la condición de borde para generar la ecuación extra que necesito en mi sistema para calcular la incógnita del borde:

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = 1$$

$$T(x_{i-1}) = T_i - hT_i' + \frac{h^2}{2}T_i'' + \mathcal{E}(h^3) \qquad h=0,25$$

$$T(x_{i-2}) = T_i - 2hT_i' + \frac{4h^2}{2}T_i'' + \mathcal{E}(h^3)$$

$$T_i' \approx aT_i + b\left[T_i - hT_i' + \frac{h^2}{2}T_i''\right] + c\left[T_i - 2hT_i' + \frac{4h^2}{2}T_i''\right]$$

$T_i \rightarrow a + b + c = 0$ (1)

$T_i' \rightarrow -b - 2c = \frac{1}{h}$ (2)

$T_i'' \rightarrow \frac{1}{2}b + 2c = 0$ (3)

de (3) $\rightarrow c = \frac{-1}{4}b$ Reemplazo en (2) $-b + \frac{1}{2}b = \frac{1}{h} \Rightarrow b = \frac{-2}{h}$

Reemplazo en (1) $a - \frac{2}{h} + \frac{1}{2h} = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2h}$ $\quad c = \frac{1}{2h}$

$\boxed{a=6 \quad b=-4 \quad c=2}$

Si usas el código de taylorDF ya te da los coeficientes en función de h

El -k lo aplico en el vector F, lo pasé dividiendo, está bien el signo, va - en la condición de borde nomás

Ahora si, escribo la matriz K para resolver el problema, utilizando la discretización centrada de 3 puntos para los nodos internos, y la discretización hacia atrás de tres puntos de la primera derivada para el nodo 5

$\Delta x^2 = 0{,}0625$ $\quad G(x) = 100*(1-x)$

$k=2$ $\quad G(0{,}25)=75$ $\quad G(0.5)=50$ $\quad G(0{,}75)=25$

$T_0 = 10$ $\quad \bar{q} = 1$

$$k = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x^2 Q_1}{k} + T_0 \\ \frac{\Delta x^2 Q_2}{k} \\ \frac{\Delta x^2 Q_3}{k} \\ \frac{\bar{q}}{-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}344 \\ 1{,}5625 \\ 0{,}7813 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$$

El sistema a resolver queda:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12{,}344 \\ 1{,}5625 \\ 0{,}7813 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Agregando la condicion Dirichlet, la matriz queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \underset{c}{2} & \underset{b}{-4} & \underset{a}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ \frac{\Delta x^2 Q_1}{k} \\ \frac{\Delta x^2 Q_2}{k} \\ \frac{\Delta x^2 Q_3}{k} \\ \frac{\bar{q}}{-k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2{,}344 \\ 1{,}5625 \\ 0{,}7813 \\ -0{,}5 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{T = \begin{bmatrix} 10 \\ 10{,}301 \\ 8{,}258 \\ 4{,}652 \\ 0{,}2657 \end{bmatrix}}$$