# Clase teórica de la semana del 28 de marzo.

Mario Garelik

## Sección 13.3 - Longitud de arco en el espacio.

- **Ejercitación propuesta (pág. 727-728):** 1 al 15 // 18.
- Breve introducción.
- Longitud de arco a lo largo de una curva parametrizada en el plano en el espacio.
  - La posibilidad de localizar puntos en la curva como lo hacemos en los ejes.
  - La importancia de la suavidad.
- Fórmula alternativa.
  - Caso particular: si se tiene una función $y = f(x)$ continuamente derivable en un intervalo $[a, b]$, parametrizando, tal como aprendimos en la primer clase, al calcular la longitud del arco de la función en $[a, b]$ se obtiene la conocida formulita vista en Cálculo I. ¡Probalo!
- El parámetro de longitud de arco con un punto base $P(t_0)$:
  - Importante para comprender bien el parámetro longitud de arco: leer detenidamente el parrafito inmediato posterior al desarrollo del ejemplo 1, en pág. 725.
  - $s$= parámetro de longitud de arco. *Parámetro* en el sentido de que cada valor de $s$ determina un punto en la curva C (partiendo del punto base $P(t_0)$.
  - Notar bien que *en la definición* de longitud de arco, los extremos de integración son $a$ y $b$, esto es, los extremos de variación del parámetro $t$, mientras que en el *parámetro* longitud de arco con punto de base $P(t_0)$, los extremos de integración son $t_0$ y $t$.
  - Utilidad para el estudio de giros y torsiones naturales de una curva en el espacio.
  - El parámetro $s$ es muy útil en conceptualizaciones de teoría, pero en la práctica, lo más común es parametrizar en términos del tiempo $t$.
  - No siempre resulta sencillo reparametrizar una curva (ya parametrizada) en términos de $s$. Un caso en el que sí se puede: ejemplo 2 - pág. 725.
- Rapidez de una curva suave: $\dfrac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)|$.
  - Mostrar consistencia con la definición dada de rapidez
  - Independencia de la tasa con la que se mueve una partícula a lo largo de una curva respecto del punto de base $P(t_0)$.
- Vector tangente unitario: $T = \dfrac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}$.

– Cambio del vector posición respecto a la longitud de arco: $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$.

– Mostrar que $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}$. Esto resulta otra visualización del vector $\mathbf{T}$, parametrizado en términos de $s$ y no de $t$.

## Sección 13.4 - Curvatura y vectores normales de una curva.

- **Ejercitación sugerida (pp. 733-734):** 1 al 5 // 7 al 14 // 17 al 22.
- Primero veremos curvatura en $R^2$.
- Qué mide la curvatura $\kappa$ (un pequeño errorcito: notar que en el texto alude a la razón a la que cambia el vector $\mathbf{T}$ y debe decir la magnitud de la razón a la que cambia el vector $\mathbf{T}$)
- Si bien la definición se da en términos del parámetro longitud de arco $s$, las curvas en general se parametrizan por el tiempo $t$, por lo que, en general, calcularemos la curvatura

$$\kappa = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\|$$

- Hasta el momento, hemos trabajado para una $\kappa \in R^2$. Si bien es cierto que la conceptualidad para $R^3$ no varía, hay formulitas específicas para el cálculo de la curvatura en ese espacio (que involucran operaciones propias del mismo, por ejemplo el producto vectorial) que son más eficientes. Se verán al final de la sección 13.5.
- Ejemplos 1 y 2. OJO: en el ejemplo 1, es inapropiado que el vector dirección de la recta se anote con $\mathbf{v}$. Anotarla como $\mathbf{w}$.
- Definición de normal unitario principal $\mathbf{N}$. Interpretación.
  - **Una observación sobre el vector N.** El vector normal unitario principal $\mathbf{N}$ en cada punto *se elige*:
    * En $R^2$, entre dos posibles: en efecto, en cada punto de una curva C, hay dos vectores normales: si $\mathbf{T}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$ es el vector tangente unitario, entonces tanto $\mathbf{N}_1(t) = y(t)\overrightarrow{i} - x(t)\overrightarrow{j}$ como $\mathbf{N}_2(t) = -y(t)\overrightarrow{i} + x(t)\overrightarrow{j}$ son vectores unitarios normales. El vector unitario normal **principal N** es el que apunta hacia el lado cóncavo de la curva (esto es, hacia donde la curva *se dobla*).
    * En $R^3$, en cada punto, tendremos infinitos vectores normales al $\mathbf{T}(t)$. Precisamente, $\mathbf{N}(t)$ será el que apunta en la dirección hacia la que gira una partícula que se desplaza por la trayectyoria $\mathbf{r}(t)$. Se lo obtiene normalizando el vector $\mathbf{T'}(t)$.
- Otra vez, la ineficiencia de definir en términos del parámetro longitud de arco $s$, promueve fórmula para hallar $\mathbf{N}$ en términos de $t$.
- Definición de círculo de curvatura u osculador. Radio de curvatura. Centro de curvatura.
- Ejemplo 4: se calcula todo lo visto.
- Curvatura y $\mathbf{N}$ en $R^3$: todo idéntico a lo hecho para curvas planas.
- Ejemplos 5 (curvatura de la hélice) y 6 (el vector normal unitario a la hélice).

## Sección 12.6 - Cilindros y superficies cuádricas.

- **Ejercitación sugerida (pp. 700):** 1 al 44.
- Breve noción de cilindros. Distintos tipos de superficies cilíndricas.
- Ejemplos en Geogebra.
- Superficies cuádricas.
  - Las ecuaciones de cada tipo.
  - Extensión a centradas (con vértices) en un punto $P(h,k)$.
  - Pasajes: ecuación general $\leftrightarrow$ ecuación canónica.
  - Gráficas.
  - Reconocimiento:
    - A partir de su ecuación.
    - A partir de su gráfica.