Respuestas Practica N 9. Algebra Lineal

ISOMORFISMOS

1) a) $\underbrace{\dim R^2}_{2} < \underbrace{\dim R^3}_{3}$ (T no es sobreyectiva)

$Im(T) \neq R^3$ $\boxed{\text{T no es ISO}}$

b) $\underbrace{\dim R^3}_{3} > \underbrace{\dim R^2}_{2}$ (T no es inyectiva)

$N_T = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ $\nu_T = 1$ → no es 1-1 o Inyectiva

$\boxed{\text{T no es ISO}}$

c) $\boxed{\text{T es ISO}}$

d) $\dim R^2 < \dim P_2$ → (no es sobreyectiva)

$Im(T) \neq P_2$ → no es sobre.

$\boxed{\text{T no es ISO}}$

e) Si $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ⇒ A_T tiene al menos una columna Ld. ⇒ $\nu_{A_T} = \nu_T > 0$

T no es inyectivo

$\boxed{\text{T no es ISO}}$

f) $\dim R^2 < \dim R^3$ → T no es sobreyectivo

$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ → $Im(T) = C_{A_T} \neq R^3$

$\boxed{\text{T no es ISO}}$

g) T es ISO $(T: R^{m+1} \to P_m)$

2) a) $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{bmatrix}$ → $\nu_T = 1$ no es inyecti

$\boxed{\text{T no es ISO}}$

b) Si M es invertible $\forall v \in V$ $T(v) = Av$ →

si A es invertible → columna de A generan

a $Im(T)$ y A tiene todas sus columnas

Si $T(v) \to W$ y A invertible $Im(T) = W$

3) a) No es ISO porq' no es inyectivo

$\nu_T = 1$ y $N_T = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

b) Los espacios R_2 y D_2 tienen la misma dimension $\dim R_2 = \dim D_2 = 2$ ⇒

R_2 y D_2 son ISOMORFOS

c) No se contradicen las respuestas del item a y b por q' en dos espacios ISOMORFOS puede existir algunas T.L ISOMORFAS y otras TL no ISOMORFAS.

4)

Si $T(v) = [v]_B$ siendo B una base de V con dimensión n $\Rightarrow$

$\Rightarrow [v]_B \in R^n$ por lo tanto la T.L. se da entre dos espacios ISOMORFOS (= dimensión) y como las $[v]_B$ son únicas $\rightarrow T(v) = [v]_B$ es una TL 1-1 o inyectiva. Por <u>Teorema 2</u> T es IS

5) a) No se puede ya q' $\dim P_2 > \dim D_2$ y una T.L. definida entre estos espacios no puede ser 1-1

b) $T\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ por ejemplo

c) $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ por ejemplo

6) a) Falso (Los espacios son isomorfos) pero pueden tener T.L. no ISO

b) V (Teorema 2) ~~o~~ se exige q los espacios sean ISO para q' la TL. pueda ser ISO

c) V (por Teorema 2)

d) F (Si A_T es cuadrada $\Rightarrow$ los espacios son ISO

e) V $T: V \rightarrow W$ y A_T tiene ~~de~~ orden $\dim W \times \dim V \Rightarrow$ si A_T es cuadrad $\dim W = \dim V$.

f) V Si $m = n$ y $\rho_T = m \rightarrow$ T es SOBRE (Teorema 2) T es ISO

g) V

$M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + a x^3$ No es ISO

$\nu_M = 1$ $\quad N_T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$ M no es inyectiva

) Si son Isomorfos los espacios S y R

$\dim S = \dim R^2 = 2$

a) $Im(T) = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \, / \, a_0 = 0 \}$

b) $r(x) \in Im(T)$ $\quad m(x) \notin Im(T)$

)

d) $T(a x^2 + b x) = 3b x^2 + (a + 2b) x$

(sale de $T(p_1) = A_T \cdot P(1)$)

$p(x) \in P_1 \; / \; T(p(x)) = 2x + x^2 \Rightarrow$

$$\boxed{p(x) = \frac{4}{3} x^2 + \frac{1}{3} x}$$

d) T No es Inyectivo

$\nu_T = 1$ $\quad N_T = \{ (c\, x^2) \}$

e) T No es Sobreyectiva

$\rho_T = 2 \Rightarrow Im(T) \neq P_2$ $\quad Im(T) = gen\{x^2$