# Práctica: Larson - Sección 7.3

## Criterio de la integral y de la comparación

Dra. Penélope Cordero

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

# ¿Qué ejercicios de práctica debo hacer?

## Sección 7.3 Criterio de la integral y de la comparación

✓ Ejercicios Propuestos:

- **Pág. 453**: 1 al 29 (sin 16) /// 41 al 70 /// 72 al 76 /// 87 al 90 /// 95 al 102

✓ En este video:

- Ejercicio 11.
- Ejercicio 28.
- Ejercicio 49.
- Ejercicio 59.
- Ejercicio 99.
- Ejercicio 101.
- Ejercicio 15.

## Ejercicio 11 Use el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$$

---

*Solución*: Para aplicar el criterio de la integral, si $a_n = \dfrac{\arctan n}{n^2+1}$, consideramos la función

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^2+1}$$

de modo que $f(n) = a_n$.

Verificamos que se cumplen las condiciones del criterio de la integral:

✓ $f$ es continua para $x \geq 1$ (Por ser cociente de funciones continuas y $x^2+1 \neq 0$).

✓ $f$ es positiva para $x \geq 1$.

Veamos si $f$ es decreciente:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2+1}(x^2+1) - \arctan x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1-2x\arctan x}{(x^2+1)^2}$$

Si $f'(x) = \frac{1-2x\arctan x}{(x^2+1)^2}$ entonces para $x \geq 1$ se tiene que:

$\cdot\ (x^2+1)^2 > 0.$

$\cdot\ 1 < 2x\arctan x \ \Rightarrow\ 1 - 2x\arctan x < 0$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1-2x\arctan x}{(x^2+1)^2} < 0$$

✓ $f$ es decreciente para $x \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx \underset{u=\tan^{-1} x}{=} & \lim_{b\to\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan b} u\ du \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{u^2}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan b} \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2}(\arctan b)^2 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{16}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{b\to\infty} \arctan b\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{16} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{16} \\
&= \frac{3}{32}\pi^2
\end{aligned}$$

Dado que la integral $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ **converge**.

EJERCICIO 28 ENCUENTRE LOS VALORES POSITIVOS DE $p$ PARA LOS QUE LA SERIE CONVERGE.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$$

---

*Solución*: Notar que si consideramos

$$f(x) = x(1+x^2)^p$$

entonces **no** es posible aplicar el *criterio de la integral*, ya que $f$ no es decreciente en $[1, \infty)$ (¡Comprobarlo!).

Si $p$ es un valor positivo, entonces

$$\lim_{n\to\infty} n(1+n^2)^p = \infty$$

Luego, por el *criterio del n-ésimo término para la divergencia* resulta que la serie diverge.

Es decir, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(1+n^2)^p$ **diverge** para todo $p$ positivo.

Ejercicio 49 USE EL CRITERIO DE LA COMPARACIÓN DIRECTA PARA DETERMINAR LA CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE LA SERIE.

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$$

---

*Solución*: Notar que podemos reescribir a la serie de la siguiente manera

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{n^2}$$

Además dado que $e \approx 2,718281...$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$2 < e$$

$$\frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{e}\right)^{n^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = b_n$$

En este caso, $a_n \leq b_n$ para todo $n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ es una serie geométrica de radio $r = \frac{1}{2}$ convergente, ya que $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

A partir del *criterio de comparación directa* la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ es **convergente**.

EJERCICIO 59 UTILICE EL CRITERIO DE COMPARACIÓN EN EL LÍMITE PARA DETERMINAR LA CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE LA SERIE.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+1} \qquad k>2$$

---

*Solución*: A partir de la forma de la serie dada, estableceremos comparación en el límite con la *serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que sabemos que diverge.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{k-1}}{n^k+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k-1}n}{n^k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^k+1} = 1 \quad k>2$$

Teniendo en cuenta que:

✓ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$

✓ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Por el *criterio de comparación en el límite* la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k+1}$ **diverge**.

EJERCICIO 99 SUPONGA QUE $\sum a_n$ Y $\sum b_n$ SON SERIES CUYOS TÉRMINOS SON POSITIVOS. DEMUESTRE QUE SI $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ Y $\sum b_n$ CONVERGE, $\sum a_n$ TAMBIÉN CONVERGE.

---

*Solución*: Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \quad \text{y} \quad \sum b_n \text{ converge.}$$

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$, el cociente $\dfrac{a_n}{b_n}$ se acerca a 0 para $n$ suficientemente grande.

Esto es, existe $N$ natural tal que

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < 1 \quad \text{para } n \geq N.$$

Dado que $b_n > 0$,

$$a_n < b_n \qquad \text{para } n \geq N$$

Luego, teniendo en cuenta el *criterio de comparación directa*, como $\sum b_n$ converge, la serie $\sum a_n$ también resulta **convergente**.

Ejercicio 101 use el resultado del ejercicio 99 para demostrar que cada una de las series siguientes converge.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\pi^n}$$

---

*Solución*: (a) A partir de lo demostrado en el Ejercicio 99, para establecer la convergencia de la serie dada, necesitamos comparar a la serie dada con una serie convergente de modo que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que es una serie $p$ con $p = 2$, es decir, convergente.

En este caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^3} = 0$$

Por lo tanto, como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la serie

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ también es **convergente**.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\pi^n}$ es muy parecida a la serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n}$.

Si consideramos dicha serie geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^n$ es convergente ya que $|r| = \left|\frac{1}{\pi}\right| < 1$.

En este caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}\pi^n}}{\frac{1}{\pi^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi^n}{\sqrt{n}\pi^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Dado que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie geométrica convergente, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\pi^n}$ también resulta **convergente**.

Ejercicio 15 use el criterio de la integral para determinar la convergencia o divergencia de la serie en la que $k$ es un entero positivo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k + c}$$

---

*Solución*: Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x^{k-1}}{x^k + c}$ donde $k$ es un entero positivo.

☞ Veamos qué condiciones necesitamos para aplicar el criterio de la integral:

✓ Si $c \geq 0$ entonces resulta inmediato que, por ser $k$ un entero positivo, $f(x)$ es positiva y continua para $x \geq 1$.

Veamos para qué valores de $c$, $f$ es decreciente en $[1, \infty)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(k-1)x^{k-2}(x^k + c) - x^{k-1}kx^{k-1}}{(x^k + c)^2} \\ &= \frac{(k-1)x^{2k-2} + c(k-1)x^{k-2} - kx^{2k-2}}{(x^k + c)^2} \\ &= \frac{kx^{2k-2} - x^{2k-2} + ckx^{k-2} - cx^{k-2} - kx^{2k-2}}{(x^k + c)^2} \end{aligned}$$

Luego, $f'(x) = \dfrac{x^{k-2}\left(c(k-1) - x^k\right)}{(x^k + c)^2}$.

$$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^{k-2}(c(k-1) - x^k) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c(k-1) - x^k < 0 \quad \Leftrightarrow \quad c < \frac{x^k}{k-1}$$

✓ Si $c < \dfrac{1^k}{k-1} = \dfrac{1}{k-1}$ entonces $f$ es decreciente para $x \geq 1$.

Bajo estas condiciones podemos aplicar el criterio de la integral:

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{x^{k-1}}{x^k + c} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{x^{k-1}}{x^k + c} \underset{u = x^k + c}{=} \lim_{b \to \infty} \int_c^{b^k + c} \frac{1}{u} \frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k} \lim_{b \to \infty} \Big[ \ln |u| \Big]_c^{b^k + c} \\
&= \frac{1}{k} \lim_{b \to \infty} \Big( \ln(b^{k+c}) - \ln c \Big) \qquad \text{si } c \neq 0 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

**Conclusión:** Si $0 < c < \dfrac{1}{k-1}$ entonces podemos aplicar el *criterio de la integral* y concluir que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{n^k + c}$ **diverge**.