UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ÁLGEBRA LINEAL AÑO 2020

APLICACIONES DE LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA 1: ***Un modelo de movimiento de población:***

Se estimaba que el número de personas que vivían en las ciudades de Estados Unidos en el 2000 era de 58 millones y el número de personas que vivían en los alrededores de las ciudades era 142 millones. También se estudió que, por esos años, la probabilidad de que una persona que vivía en una de las ciudades se quedara en esa ciudad o en otra ciudad era 0.96, por lo que la probabilidad de que se desplazara a los alrededores era 0.04. Mientras tanto la probabilidad de que una persona que vivía en los alrededores se cambiara a la ciudad era del 0.01 y la probabilidad de que se quedara en los alrededores era del 0.99.

Por lo tanto tomando 2000 como el año de inicio del sistema y denotando con C_k a la cantidad de personas que en el año k viven en las ciudades de EEUU y con A_k la cantidad de personas que viven en ese año en los alrededores de las ciudades, resulta que el vector $X_k = \begin{pmatrix} C_K \\ A_k \end{pmatrix}$ indica la distribución de la población de EEUU según vivía en las ciudades y en los alrededores transcurridos k años después del 2000 y que

$$X_{k+1} = P\ X_k \quad (10)$$

con $X_0 = \begin{pmatrix} 58 \\ 142 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 0.96 & 0.01 \\ 0.04 & 0.99 \end{pmatrix}$

a) Expresa el sistema dinámico que resulta de (10).

b) Sabiendo que $X_2 = \begin{pmatrix} 56.245 \\ 143.755 \end{pmatrix}$ calcule la población estadounidense que vivía en las ciudades y en los alrededores en el 2003.

c) Sabiendo que los valores propios de P son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=0.95$ y que uno de los vectores propios son, respectivamente, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ¿es posible afirmar que a largo plazo si las probabilidades no cambian por 1 persona que vive en una ciudad de EEUU habrá 4 viviendo en los alrededores?

Solución:

a) La situación planteada es un caso de *sistema dinámico* cuyo estado en el tiempo k está representado por un vector columna X_k y P es la matriz de cambio de estado con

$P = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}99 \end{pmatrix}$.

Se quiere analizar el comportamiento a largo plazo del sistema dinámico definido por

$X_{k+1} = P.X_k$ con k= 0, 1, 2,… y $X_0 = \begin{pmatrix} 58 \\ 142 \end{pmatrix}$

Si

- C_k es la cantidad de personas que en el año k viven en las ciudades de EEUU y
- A_k es la cantidad de personas que viven en ese año en los alrededores de las ciudades,

  entonces $X_k = \begin{pmatrix} C_k \\ A_k \end{pmatrix}$ indica la distribución de la población de EEUU según vivía en las ciudades y en los alrededores transcurridos k años después del 2000.

Luego,

$X_{k+1} = P.X_k$

$\begin{pmatrix} C_{k+1} \\ A_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}99 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} C_k \\ A_k \end{pmatrix}$

Es decir, el sistema dinámico está dado por $\begin{cases} C_{k+1} = 0{,}96.C_k + 0{,}01.A_k \\ A_{k+1} = 0{,}04.C_k + 0{,}99.A_k \end{cases}$

b) Sabiendo que $X_2 = \begin{pmatrix} 56{,}245 \\ 143{,}755 \end{pmatrix}$, se quiere calcular la población estadounidense que vivía en las ciudades y en los alrededores en el 2003.

Dado que el estado inicial del sistema dinámico se considera en el año 2000, entonces en el año 2003, el sistema dinámico corresponde al estado del tiempo k=3. Es decir está representado por el vector X_3

Pero $X_3 = P.X_2$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}96 & 0{,}01 \\ 0{,}04 & 0{,}99 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 56{,}245 \\ 143{,}755 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 55{,}432 \\ 144{,}567 \end{pmatrix}$$

Entonces, en el 2003 vivían en las ciudades de EEUU aproximadamente 55,432 millones de personas y en los alrededores 144,567 millones.

c) Se sabe que los valores propios de P son $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=0.95$ con vectores propios respectivos $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$,

Como el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente en R^2, constituye una base de R^2. Entonces X_k puede escribirse como

$$\boldsymbol{X_k} = c_1.\boldsymbol{v_1} + c_2.\boldsymbol{v_2}$$

Pero, por **(5)**:

$$X_{k+p} = c_1 A^p v_1 + c_2 A^p v_2 + \ldots + c_n A^p v_n = c_1 (\lambda_1)^p v_1 + c_2 (\lambda_2)^p v_2 + \ldots + c_n (\lambda_n)^p v_n \quad \textbf{(5)}$$

$$\boldsymbol{X_{k+p}} = c_1.(\lambda_1)^p.\boldsymbol{v_1} + c_2.(\lambda_2)^p\boldsymbol{v_2}$$

$$= c_1.(1)^p.\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + c_2.0{,}95^p\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Cunado $p \to \infty$, $0{,}95^p \to 0$. Entonces como $1^p = 1$ para todo p:

$\boldsymbol{X_{k+p}} \cong c_1.\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + c_2.0.\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \cong c_1.\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow$ por cada 1 persona en las ciudades hay 4 en los alrededores. Por ende, sí es posible afirmar que, a largo plazo y si las probabilidades no cambian, por 1 persona que vive en una ciudad de EEUU habrá 4 viviendo en los alrededores