Sección 3.5

Límites infinitos y al infinito.

Ejercicio 10

Si $f(x) = 5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 7$, encuentre $\lim_{x\to\infty} h(x)$, si es posible donde:

(a) $h(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{5\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+7}{x}$

Solución.

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = = \lim_{x\to\infty} \frac{5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 7}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(5\mathrm{x} - 3 + \frac{7}{\mathrm{x}}\right) = \infty$$

Si utilizamos los lineamientos para hallar límites de funciones racionales en $\pm\infty$ dados en la pág. 190 vemos que como ***el grado del numerador es mayor que el grado del denominador*** entonces el límite de la función racional ***no existe***.

(b) $h(x) = \frac{f(x)}{x^2} = \frac{5\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+7}{x^2}$

Solución.

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = = \lim_{x\to\infty} \frac{5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 7}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(5 - \frac{3}{\mathrm{x}} + \frac{7}{\mathrm{x}^2}\right) = 5$$

Si utilizamos los lineamientos para hallar límites de funciones racionales en $\pm\infty$ dados en la pág. 190 vemos que como ***el grado del numerador es igual que el grado del denominador*** entonces el límite de la función racional ***es el cociente de los coeficientes principales***.

Ejercicio 10

(c) $h(x) = \frac{f(x)}{x^3} = \frac{5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 7}{x^3}$

Solución.

$$\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{5\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 7}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3} \right) = 0$$

Si utilizamos los lineamientos para hallar límites de funciones racionales en $\pm\infty$ dados en la pág. 190 vemos que como ***el grado del numerador esmenorr que el grado del denominador*** entonces el límite de la función racional ***es 0***.

Ejercicio 22

Encuentre el límite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solución.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

Observación: en la segunda igualdad tenemos en cuenta que para toda $x < 0, x = -|x| = -\sqrt{x^2}$.

Ejercicio 26

Encuentre el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3(x - \cos x)}{x}$$

Solución.

Dado que $-1 \leq \cos x \leq 1$, se concluye que para $x > 0$,

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{x - \cos x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$$

donde $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1$. De manera que, de acuerdo con el teorema del sándwich, se obtiene

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \cos x}{x} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\lim_{x \to \infty} \frac{3(x - \cos x)}{x} = 3}$$

Ejercicio 34

Encuentre el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5}{2}+\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right]$$

Solución.

Como $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$ y la función $f(x)=\ln x$ es continua en $(0,+\infty)$ entonces $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\right)=0$, por consiguiente

$$\mathbf{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{5}{2}+\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right]=\frac{5}{2}}$$

Ejercicio 40

Use una aplicación gráfica para representar gráficamente la función $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2-2}}{2x+1}$ e identifique las asíntotas horizontales.

Solución. Para identificar las asíntotas horizontales analíticamente, debemos determinar $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2-2}}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2-2}}{x}}{\frac{2x+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{\frac{9x^2-2}{x^2}}}{\frac{2x+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{9-\frac{2}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}}$$

$$= -\frac{3}{2}.$$

Aclaraciones: En la segunda igualdad dividimos numerador y denominador entre x. En la tercera igualdad, tenemos en cuenta que para $x < 0$,

$$x = -|x| = -\sqrt{x^2}$$

Luego, $\boldsymbol{y = -\frac{3}{2}}$ es una asíntota horizontal.

Ejercicio 40

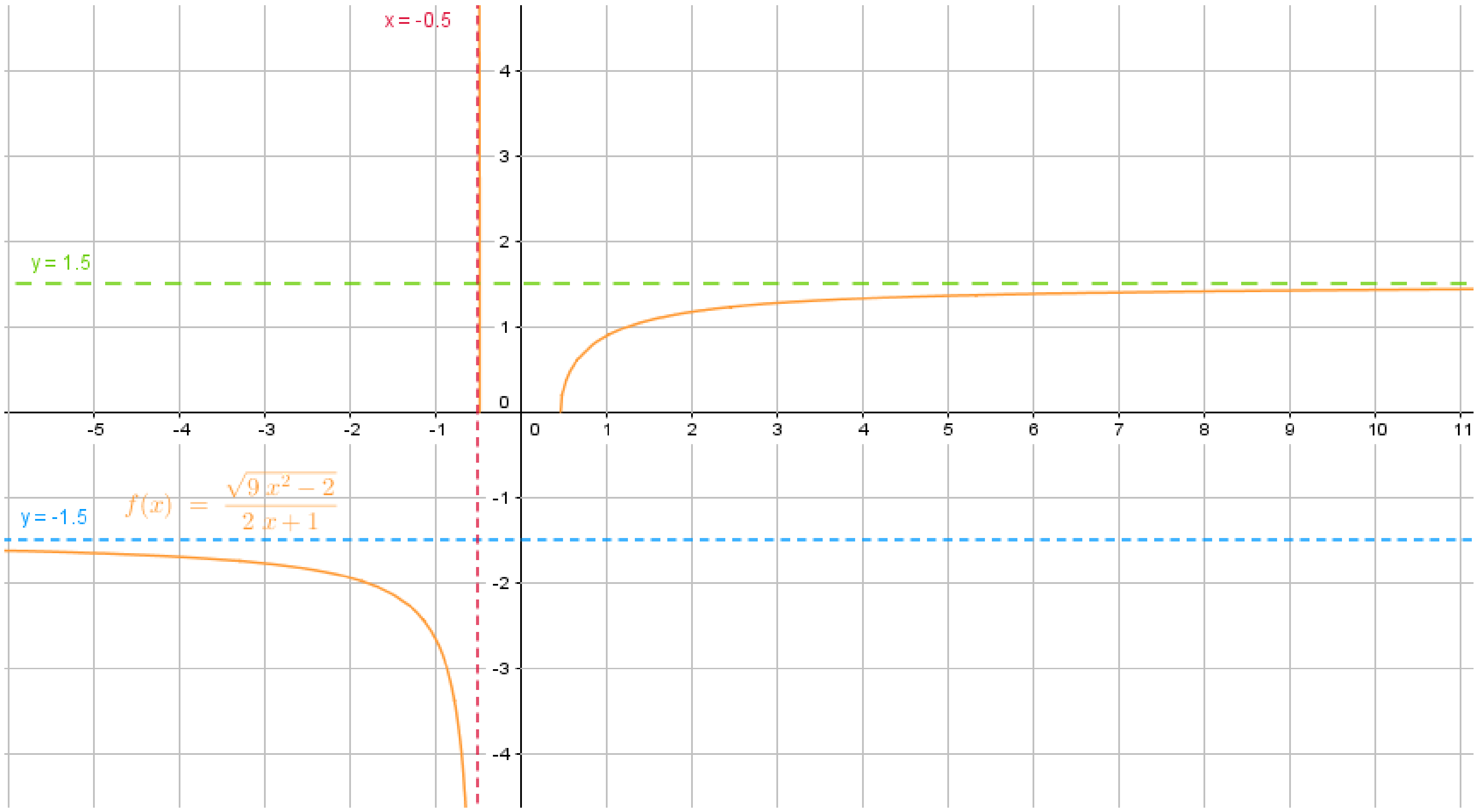
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2-2}}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2-2}}{x}}{\frac{2x+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{\frac{9x^2-2}{x^2}}}{\frac{2x+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9-\frac{2}{x^2}}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{3}{2}.$$

Aclaraciones: En la segunda igualdad dividimos numerador y denominador entre x. En la tercera igualdad, tenemos en cuenta que para $x < 0$,

$$x = |x| = \sqrt{x^2}$$

Luego, $\boldsymbol{y = \frac{3}{2}}$ es una asíntota horizontal.

Ejercicio 40



Ejercicio 46

Encuentre el límite (Sugerencia: considere la expresión como una fracción cuyo denominador es 1 y racionalice el numerador.)Use una aplicación gráfica para comprobar los resultados.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+\sqrt{9x^2-x}\right)$$

Solución.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+\sqrt{9x^2-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3x+\sqrt{9x^2-x}\right)\left(3x-\sqrt{9x^2-x}\right)}{\left(3x-\sqrt{9x^2-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2-(9x^2-x)}{3x-\sqrt{9x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{3x-\sqrt{9x^2-x}}$$

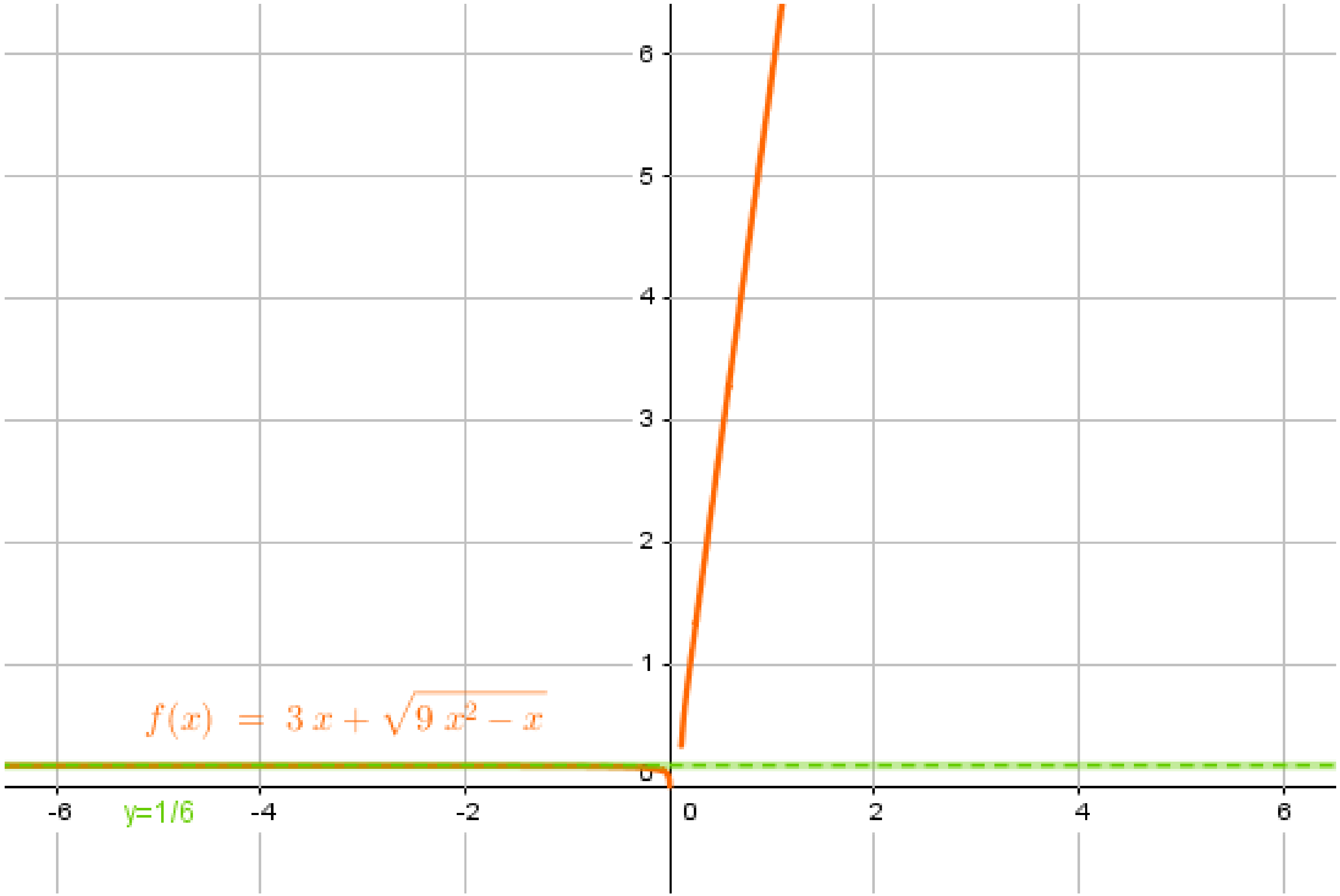
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\frac{3x-\sqrt{9x^2-x}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3+\sqrt{\frac{9x^2-x}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3+\sqrt{9-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{6}$$

Aclaración: En la antepenúltima igualdad tenemos en cuenta que para toda $x<0, x=-|x|=-\sqrt{x^2}$, por tanto $\frac{\sqrt{9x^2-x}}{x}=-\sqrt{\frac{9x^2-x}{x^2}}$

Luego,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+\sqrt{9x^2-x}\right)=\frac{1}{6}$$

Ejercicio 46



Ejercicio 56

Si f es una función continua tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$, encuentre, si es posible, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para cada una de las condiciones especificadas.

(a) La gráfica de f es simétrica respecto al eje y.

Solución. Como f es simétrica respecto al eje y se tiene que f es par, esto es, $f(-x) = f(x)$ y como además f es continua se tiene:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 5}.$$

(b) La gráfica de f es simétrica respecto al origen.

Solución. Como f es simétrica respecto al origen se tiene que f es impar, esto es, $f(-x) = -f(x)$ y como además f es continua se tiene:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to\infty} f(x) = -5.}$$