Cálculo II

INTEGRALES DOBLES

Prof. Ing. Silvia Seluy

INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES PLANAS RECTANGULARES

- Se subdivide a la región en n rectángulos, los cuales forman una partición de la región R.
  Una suma de Riemann sobre R, quedará formada por :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta x_k \Delta y_k$$

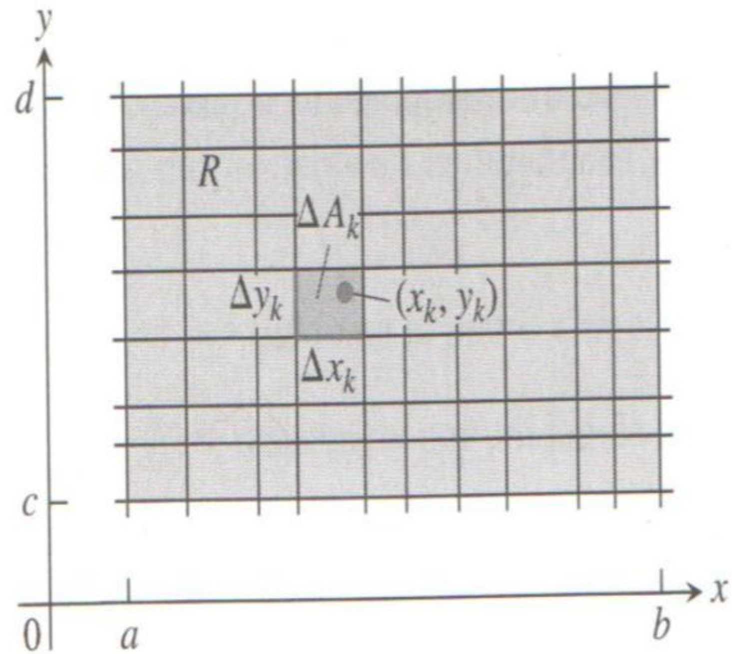


FIGURA 15.1 Cuadrícula rectangular que divide la región R en pequeños rectángulos de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$.

Qué ocurre cuando los anchos y alturas de la partición tienden a 0?

Significa que la diagonal Δd de un Rectángulo disminuye ($\Delta d \to 0$)

$$\Delta d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\|\Delta d\| \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$$ simultáneamente

- La Norma de la partición, es el mayor de los anchos o de los altos en el rectángulo, es lo que indica su valor.
- Ej: $\|P\| = 0{,}2$

Indica que la mayor altura o ancho de los rectángulos en la partición de R, es 0,2.

El límite resultante se expresa como:

$$\boxed{\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta x_k \Delta y_k}$$

Significa que al tender a cero la partición, los rectángulos son más angostos y más bajos por lo cual dentro de la misma región aumentará su cantidad, lo que es equivalente a expresar como:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta x_k \Delta y_k}$$

Teniendo en cuenta que: $\Delta A_k \to 0; \quad n \to \infty; \quad \|P\| \to 0$

- Cuando se obtiene el límite ya no interesan las elecciones hechas para la partición. Se tiene una función *f(x,y) continua en R,* integrable y al límite se lo conoce como **INTEGRAL DOBLE de *f* sobre R**

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA \qquad ó \qquad \iint_R \mathrm{f}(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\ \mathrm{dx}\ \mathrm{dy}}$$

Mediante una integral doble se puede calcular un volumen.

- Sería el caso de *f(x,y)* positiva sobre una región R del plano xy, que representa una región sólida acotada inferiormente por R y arriba por *z=f(x,y)*

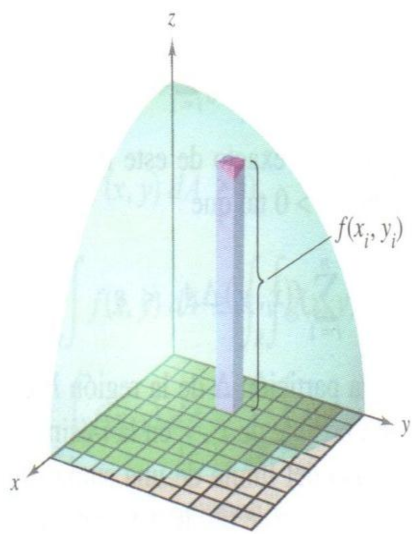
Interpretación del volumen

Cada término de la suma de Riemann $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta x_k \Delta y_k$ es el volumen de una caja rectangular vertical que se aproxima al volumen de la porción del sólido que está sobre la base ΔA_k.

Es decir, se toma una partición interna en R

En cada rectángulo se toma (xi,yi) y se forma un prisma rectangular de altura *f(xi,yi).* En el i-ésimo rectángulo se tiene un área ΔA_i ;en el prisma i, el volumen queda: $f(x_i, y_i)\Delta A_i$ y para los n prismas, por la suma de Riemann, el volumen es:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

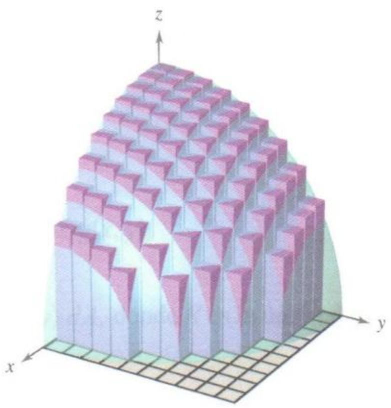


Prisma rectangular que tiene como área de la base ΔA_i y como altura $f(x_i, y_i)$.
Figura 12.10

El volumen del prisma

A medida que en la región el número de subdivisiones tiende a infinito, se aproxima al volumen real del prisma.

Volumen = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i = \iint_R f(x, y)dA$



Volumen aproximado mediante prismas rectangulares.
Figura 12.11

Volumen de una región sólida

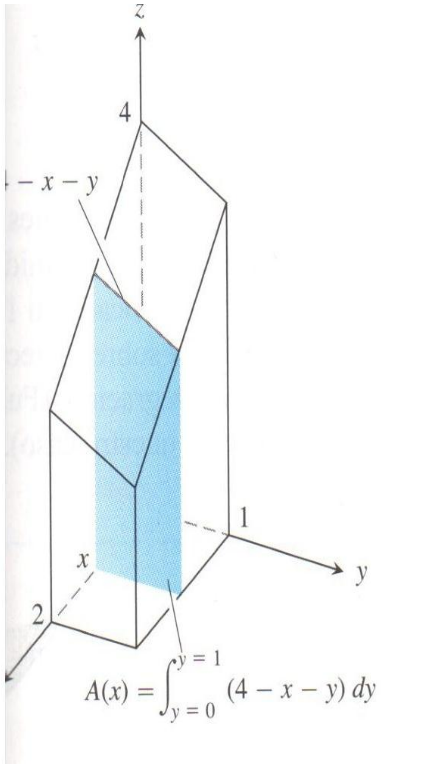
Si f es una función integrable sobre una región R en el plano y $f(x, y) \geq 0$ para toda (x, y) en R, entonces el volumen del sólido que se encuentra sobre la región R y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \int_R\int f(x, y)\, dA.$$

TEOREMA DE FUBINI – Nº 1

Se quiere calcular el volumen bajo el plano z = 4 – x – y, sobre la región R del plano xy, delimitada por:

$$0 \le x \le 2 \qquad\qquad 0 \le y \le 1$$



JRA 15.4 Para obtener el área de la ión transversal $A(x)$, mantenemos a x e integramos con respecto a y.

Si tomamos una rebanada que corte al eje x, <u>el volumen es:</u> $\int_{x=0}^{x=2} A(x)dx$ siendo

$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4-x-y)dy$, A(x): área bajo la curva.

Combinando las ecuaciones:

$$\boxed{Volumen = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} (4-x-y)dy \;\; dx = 5}$$

Volumen calculado para otro rebanado

- Si para calcular el volumen, se hubiese rebanado con planos normales al eje y, quedaría el área A(y) de la sección, en función de y.
- Siendo

$$A(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)dy \ \ dx$$

- Por lo que el volumen queda:

$$Volumen = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)dx \ \ dy = 5$$

Se ha calculado por integrales Iteradas, dando igual resultado pues es el volumen de la misma Región.

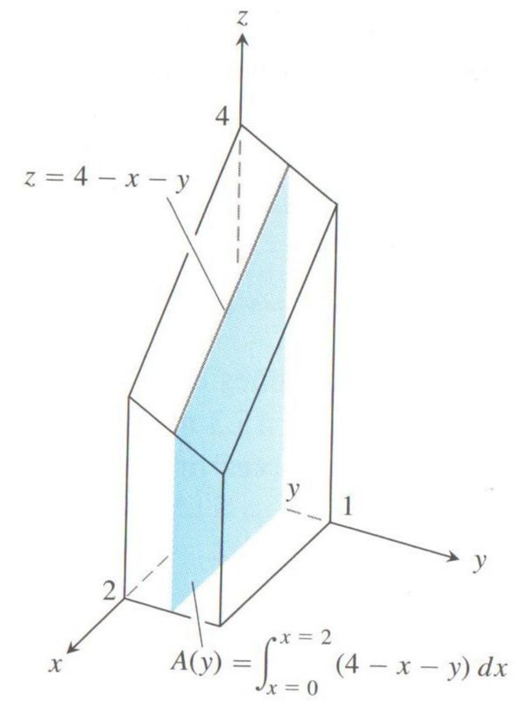


FIGURA 15.5 Para obtener el área de la sección transversal $A(y)$, mantenemos y fija e integramos con respecto a x.

TEOREMA DE FUBINI

Si *f(x,y)* es continua en la región rectangular R: $a \le x \le b$ $c \le y \le d$ entonces:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx}$$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES DOBLES

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y sea c una constante.

1. $\displaystyle\iint_R cf(x, y)\, dA = c\iint_R f(x, y)\, dA$

2. $\displaystyle\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA \pm \iint_R g(x, y)\, dA$

3. $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA \geq 0, \qquad \text{si } f(x, y) \geq 0$

4. $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA \geq \iint_R g(x, y)\, dA, \qquad \text{si } f(x, y) \geq g(x, y)$

5. $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$, donde R es la unión de las dos subregiones R_1 y R_2 que no se sobreponen.

INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES ACOTADAS NO RECTANGULARES

En una región no rectangular, se procede nuevamente a realizar una cuadrícula sobre la región R, determinando celdas rectangulares que no estarán completamente dentro de la región por las características de su frontera curva.

Al hacer la partición se considerarán las celdas que estén completas dentro de la región y tratando de tomar un número grande de celdas para aproximar a la frontera curva con mayor exactitud. A partir de aquí, se procede como en el caso anterior.

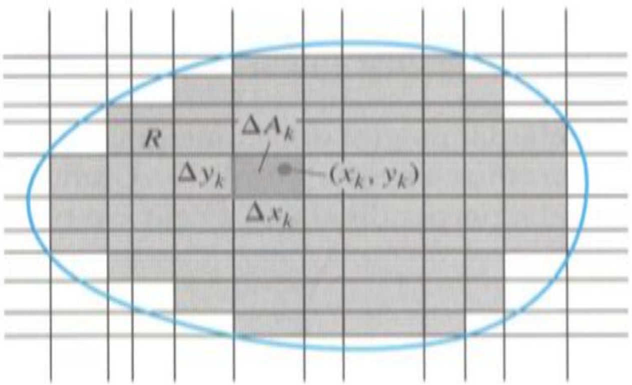


FIGURA 15.6 Una cuadrícula rectangular que divide una región acotada no rectangular en celdas rectangulares.

Es decir, en una partición, se toma un punto interior a una celda k, el valor de la función en (xk,yk) y teniendo en cuenta su Área (Ak) se forma la Suma de Riemann.

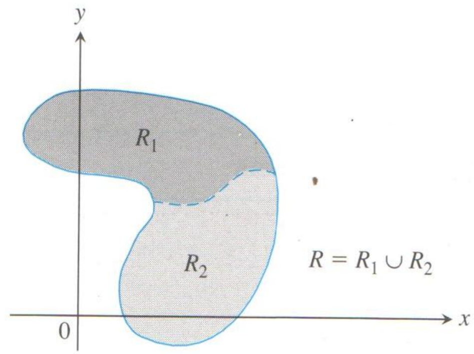
$$\lim_{|P| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta x_k \Delta y_k =$$

$$= \iint_R f(x, y)\, dA \quad = \quad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy$$

Propiedades

- Las integrales dobles de funciones continuas sobre regiones no rectangulares tienen las mismas propiedades algebraicas que las integrales sobre regiones rectangulares.
- La propiedad de aditividad de dominios , establece que una región R se puede descomponer en dos regiones R1 y R2 con fronteras formadas por un número finito de segmentos de recta o de curvas regulares.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$



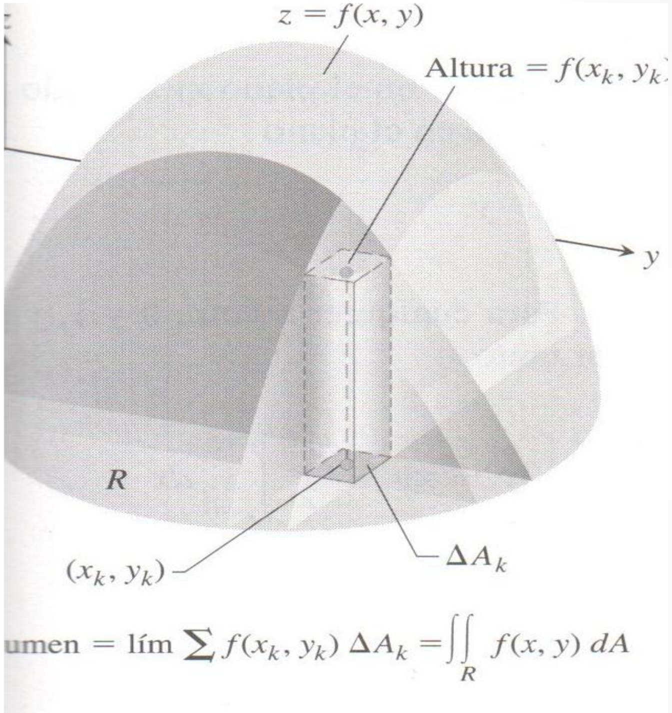
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$$

FIGURA 15.7 La propiedad de aditividad para regiones rectangulares también es válida para regiones acotadas por curvas continuas.

Volumen en región no rectangular

- Sea *f(x,y)* positiva y continua sobre R.

El volumen de la región sólida entre R y la superficie z=f(x,y), es la integral doble:



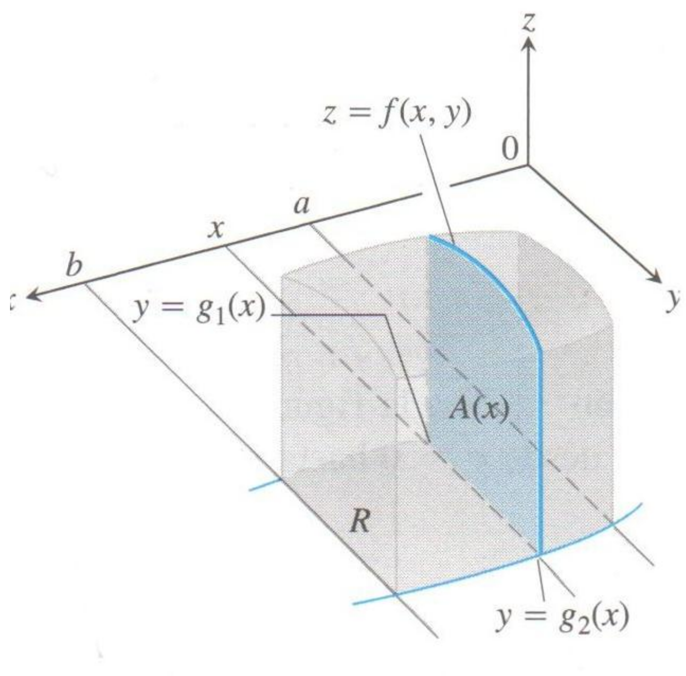
$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

- Si la región es la de la figura acotada por arriba y por abajo por las curvas y = g2(x) , y = g1(x)

y en los lados, por las rectas x = a ; x = b,

se puede calcular el volumen por el método del rebanado:

$$\boxed{Volumen = \int_{a}^{b} A(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g1(x)}^{y=g2(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$



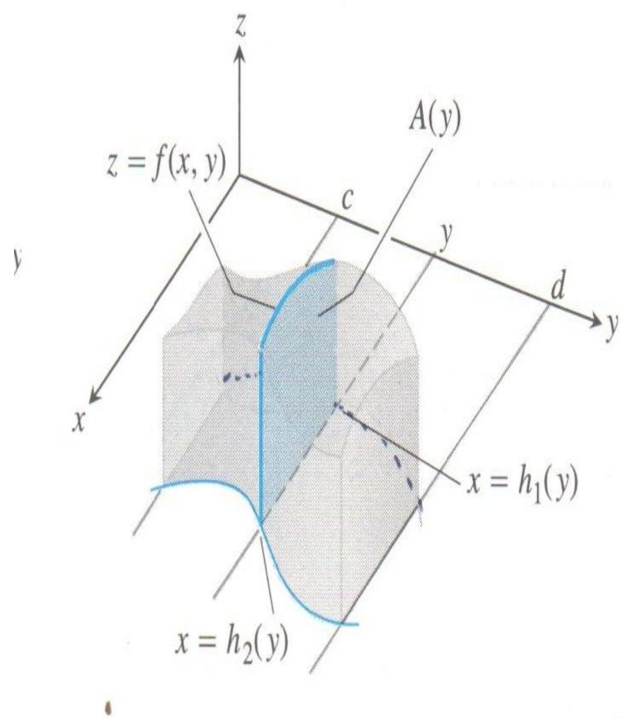
De manera similar, si R es una región acotada por las curvas x=h2(y) y x= h1(y) y las rectas y=c y=d, el volumen calculado

por rebanadas está

dado por la integral

iterada:

$$Volumen = \int_{c}^{d} A(y)dy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=h1(y)}^{x=h2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



TEOREMA 2 Teorema de Fubini (forma más fuerte)

Sea $f(x, y)$ continua en una región R.

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, con g_1 y g_2 continuas en $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, con h_1 y h_2 continuas en $[a, b]$, entonces
[c,d]

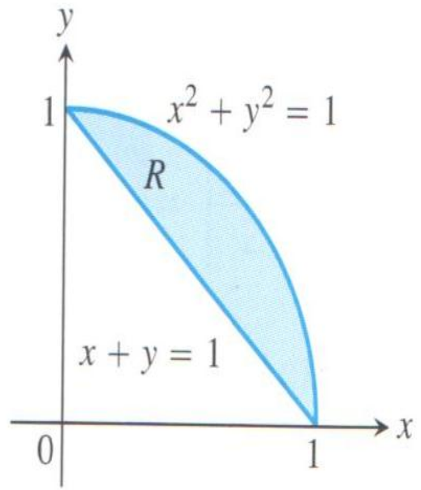
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Cómo determinar los límites de integración

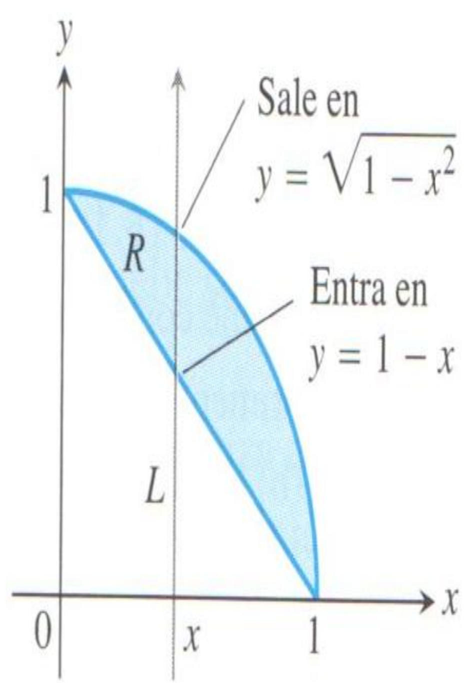
Ahora veremos un procedimiento para determinar los límites de integración, que sirve para muchas regiones en el plano. Las regiones más complicadas, para las que no sirve este procedimiento, con frecuencia pueden separarse en partes para que el procedimiento funcione.

Cuando tenga que evaluar $\iint_R f(x, y)\,dA$, integre primero con respecto a y y luego con respecto a x; haga lo siguiente:

1. *Haga un bosquejo*. Trace la región de integración y marque cada curva que determina la frontera.



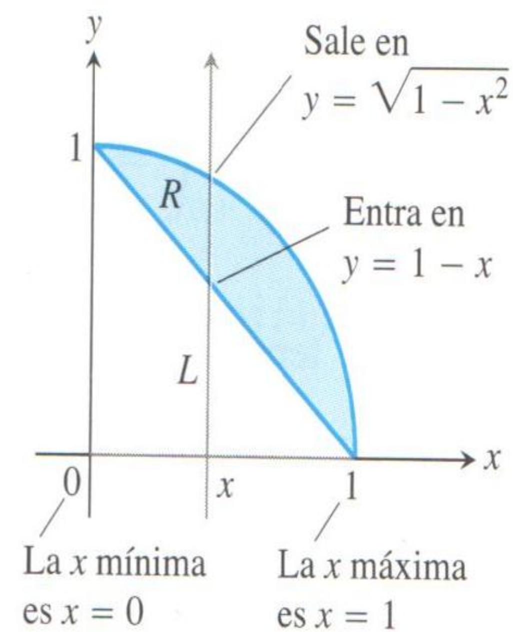
2. *Determine los límites de integración en y.* Imagine una recta vertical L que atraviese a R en la dirección creciente de y. Marque los valores de y donde L entra y sale. Éstos son los límites de integración en y y son por lo general funciones de x (en lugar de constantes).



3. *Determine los límites de integración en x.* Elija los límites en x que incluyan todas las rectas verticales que atraviesen R. La integral que aparece aquí es

$$\iint_R f(x,y)\,dA =$$

$$\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$



Para evaluar la misma integral doble como una integral iterada con el otro orden de integración, en los pasos 2 y 3 usamos rectas horizontales en lugar de verticales. La integral es

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy.$$