

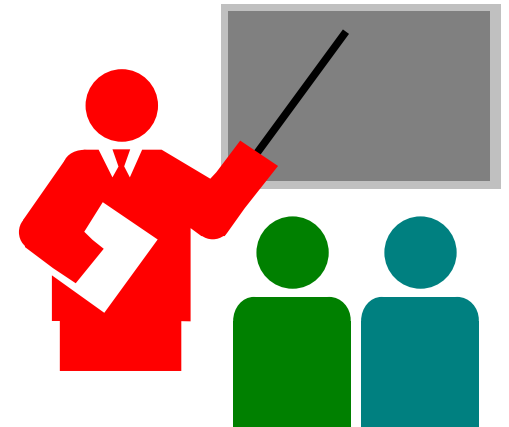
Análisis de Fourier

DFT/FFT



Temas a tratar

- Introducción
- Series de Fourier
- Transformada continua de Fourier
- Propiedades y transformada inversa
- Transformada discreta de Fourier
- Alias de muestreo en el dominio de la frecuencia
- Algoritmos de cálculo.



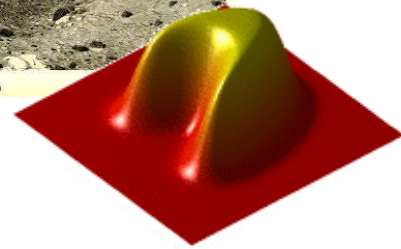
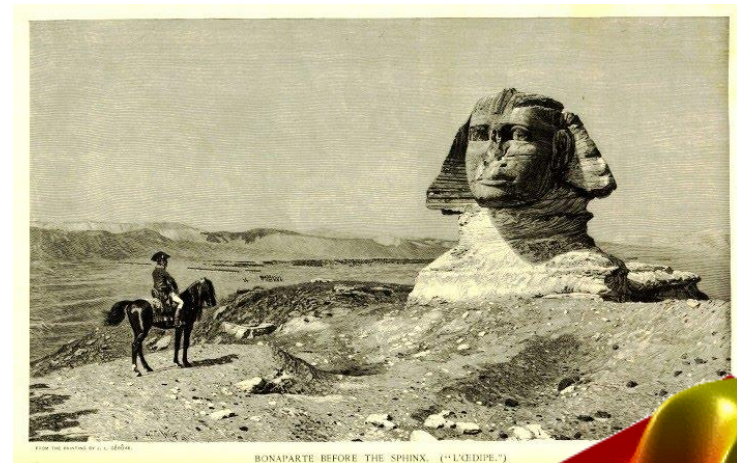
“Análisis” en frecuencias

- La luz del sol puede descomponerse en un espectro de colores.
- El sonido puede descomponerse en señales de frecuencias puras.
- Este análisis puede extenderse también a una amplia variedad de señales analógicas o digitales.

Un poco de historia...



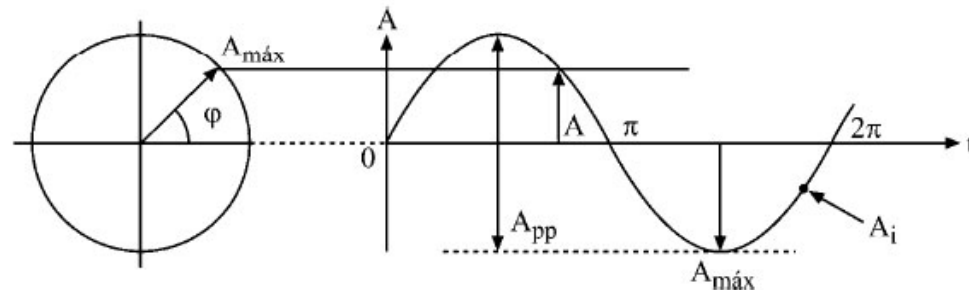
- En 1807 Fourier estudiaba el fenómeno de la conducción del calor en un cuerpo.
- Le interesaba en particular el problema de la difusión del calor en los cañones...



Un poco de historia...



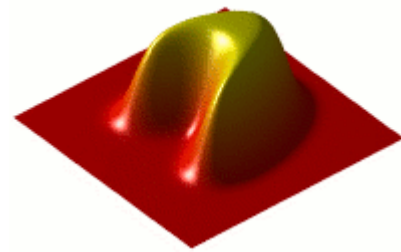
- Sabía que:
 - **una cuerda puede vibrar de varios modos, pero todos armónicos** (la relación entre sus frecuencias es un número fraccionario, *Euler 1748*).
 - las **proyecciones de un vector rotativo** con velocidad angular fija sobre los ejes x e y **dan el coseno y el seno** del ángulo correspondiente.



Un poco de historia...



- La nota producida por una cuerda vendrá determinada por la longitud (L), la tensión (T), la densidad (d) y la sección (S).
 - Así, si disponemos de una cuerda muy tensa y fina, obtendremos una nota aguda;
 - y por el contrario, si la cuerda está poco tensa y es gruesa, la nota será grave.

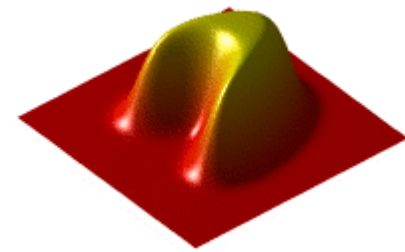
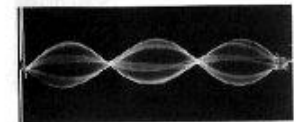
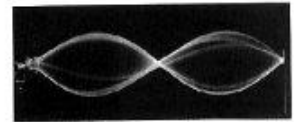
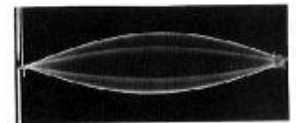
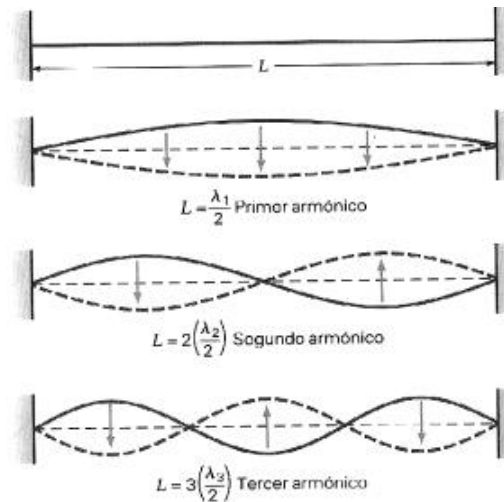


Un poco de historia...



- La frecuencia se puede encontrar a partir de la fórmula:

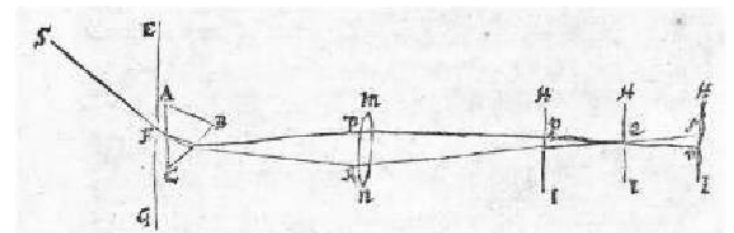
$$f = \frac{1}{2 \cdot L} \sqrt{\frac{T}{d \cdot S}}$$



Un poco de historia...



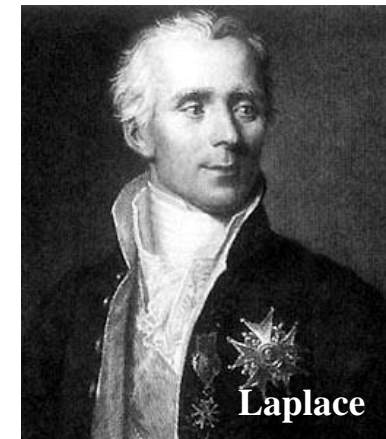
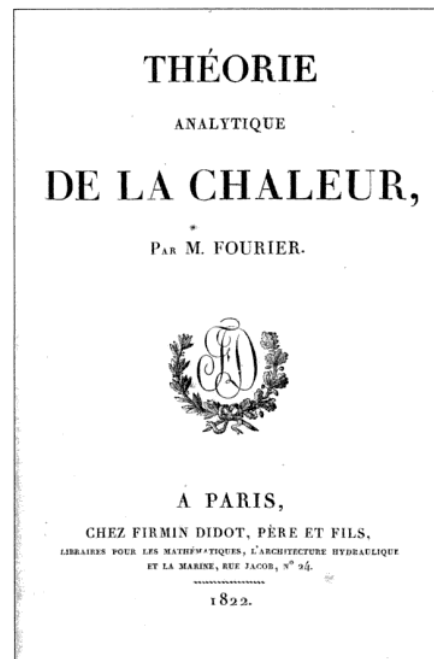
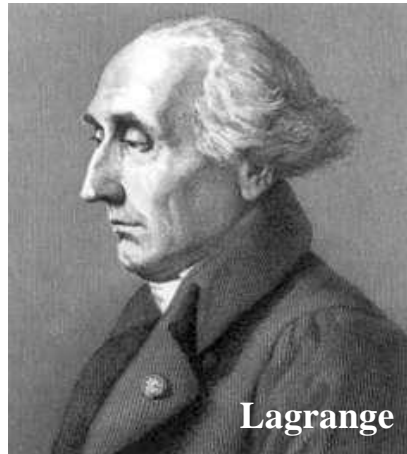
- Con estos conceptos Fourier elaboró su teoría:
 - Sumando funciones armónicas de diferente amplitud y fase podemos construir cualquier función periódica (y la uso para resolver la ecuación del calor).
 - El conjunto de estas armónicas forma el **espectro** (por “*spectrum*”, Newton 1670).



Un poco de historia...

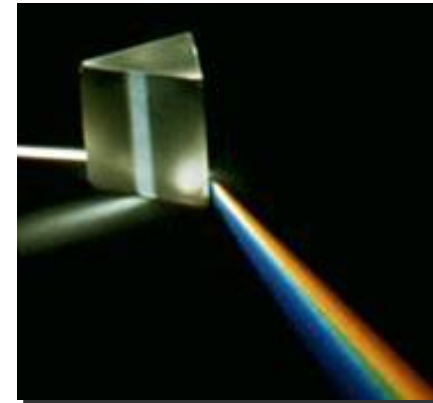


- Su trabajo fue publicado recién en 1822:



¿Qué es el Análisis de Fourier...?

- Análisis:
 - Consiste en aislar los componentes del sistema que tienen una forma compleja para tratar de comprender mejor su naturaleza u origen.



¿Qué es el Análisis de Fourier...?

- Se dedica al estudio de señales: periódicas o no periódicas, continuas o discretas, en el dominio del tiempo, o de cualquier otra variable unidimensional, bidimensional o multidimensional.
- En sus versiones más avanzadas estudia: procesos estocásticos, funciones de distribución, y topologías complejas, pero sus fundamentos siguen siendo muy simples.

¿Qué es el Análisis de Fourier...?

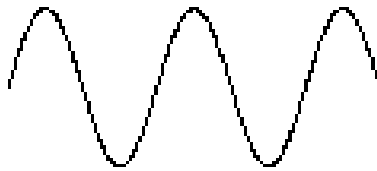
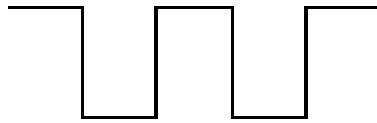
Las señales pueden ser tan variadas como:

- La población de un país a lo largo de los siglos.
- La altura de las mareas en su ciclo mensual.
- La irradiación de una antena, en función del ángulo.
- La forma de onda de la vocal /A/ del francés.
- La iluminación en cada punto de una imagen de TV.
- Las espigas de un electroencefalograma (EEG).
- las rugosidades en el perfil de un terreno.
- las variaciones de resistividad eléctrica, mientras se explora el perfil de un pozo de petróleo.

Transformada de Fourier

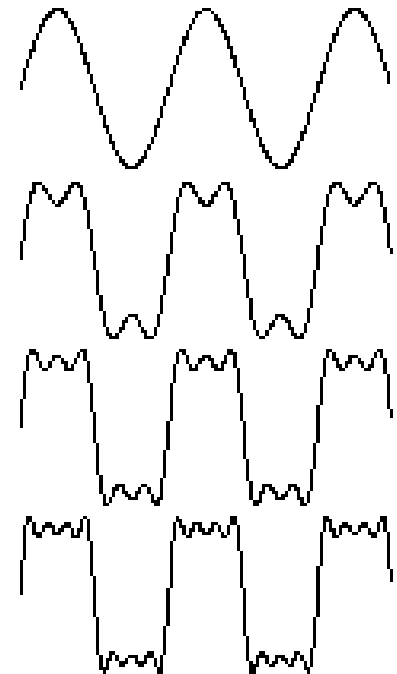
- La TF es una representación de una función en el dominio de la frecuencia:
 - Contiene exactamente la misma información que la señal original
 - Sólo difiere en la manera en que se presenta

Por ejemplo:



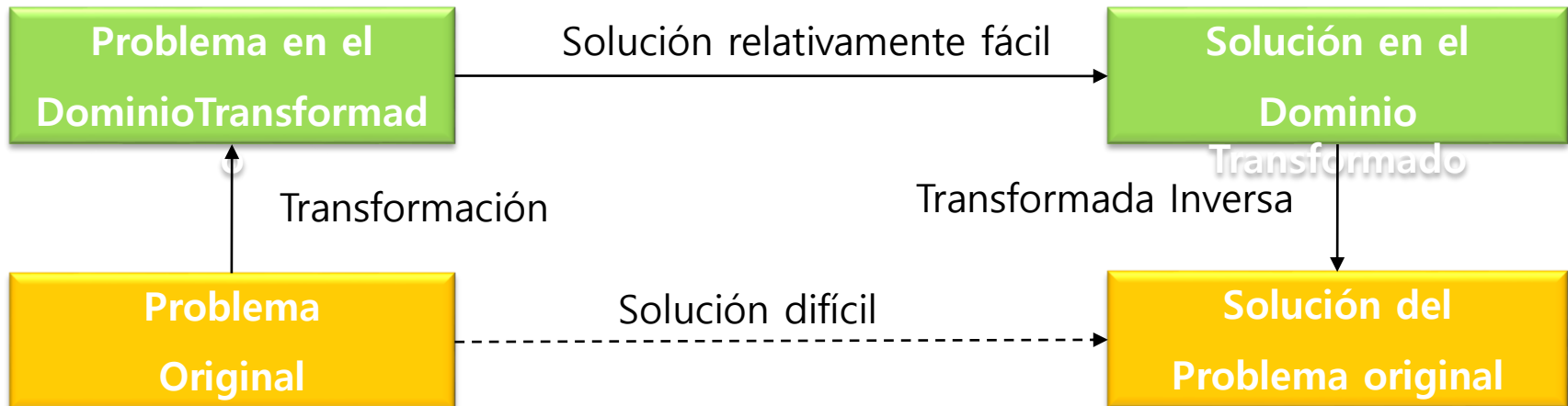
Una onda cuadrada puede obtenerse sumando:

- la fundamental
- menos $\frac{1}{3}$ de la 3er armónica...
- más $\frac{1}{5}$ de la 5ta armónica...
- menos $\frac{1}{7}$ de la 7ma armónica....



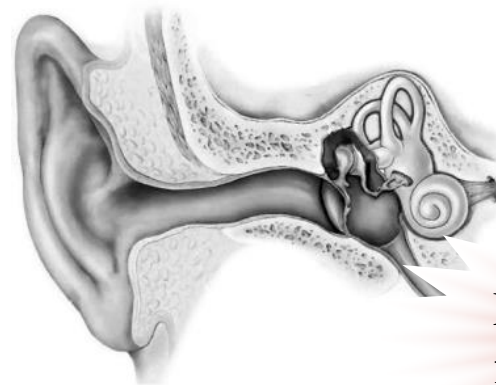
Solución de Problemas

- Un problema que es difícil de resolver en sus "coordenadas" (dominio t) originales, a menudo, es más sencillo de resolver al transformarlo al dominio f .
- Después, la transformada inversa nos devuelve la solución en el espacio original.



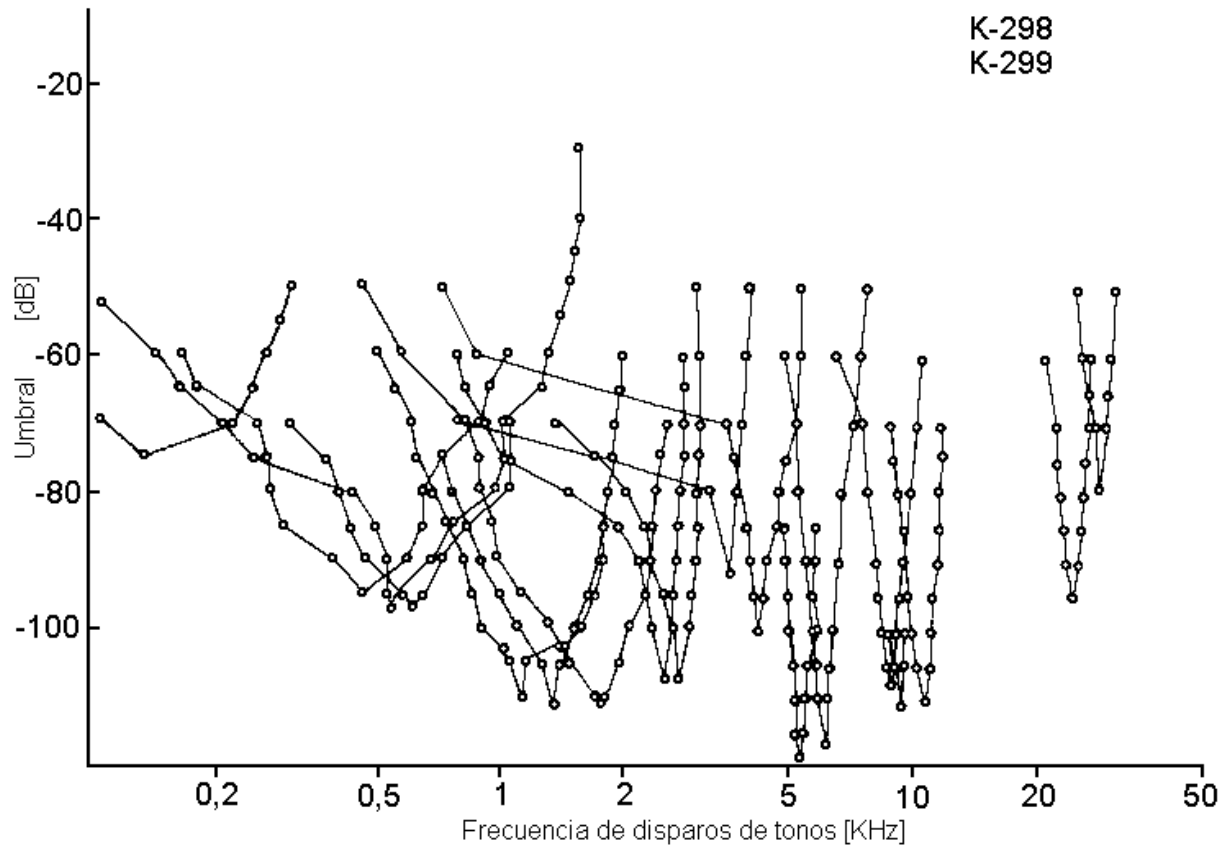
El piano como “analizador” espectral:

- Abrir la tapa del piano y presionar el pedal que controla la intensidad.
- Aplaudir fuerte sobre el piano.
- Se verán y oirán las cuerdas vibrando como eco al sonido del aplauso.
- Las cuerdas que vibran muestran las componentes de frecuencia.
- La cantidad de vibración muestra la amplitud de cada una.
- Cada cuerda actúa como un resonador sintonizado cuidadosamente.



Nuestro oído
funciona “así”

El oído como analizador espectral



- Curvas de sintonía de las fibras del nervio auditivo

Tiempo vs Frecuencia

- Entender la relación entre tiempo y frecuencia es útil:
 - Algunas señales se visualizan mejor en la frecuencia.
 - Algunas señales se visualizan mejor en el tiempo.
 - Esto tiene que ver con la forma en que se presenta la información en cada dominio.
- Ejemplo:
 - Una onda senoidal utiliza “muchas” información para definirse adecuadamente en el tiempo, pero no en la frecuencia.

Volvamos sobre los espacios...

Volviendo sobre espacios...

- Para representar un vector \mathbf{f} en un espacio de n dimensiones generado por el conjunto $\{\mathbf{v}_i\}$, $i = 1..n$ puede usarse la siguiente combinación lineal:
- $\mathbf{f} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$
- Si efectuamos el producto interno por \mathbf{v}_i en ambos miembros:
- $\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i + c_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \dots + c_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i + c_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \dots + c_n \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i$$

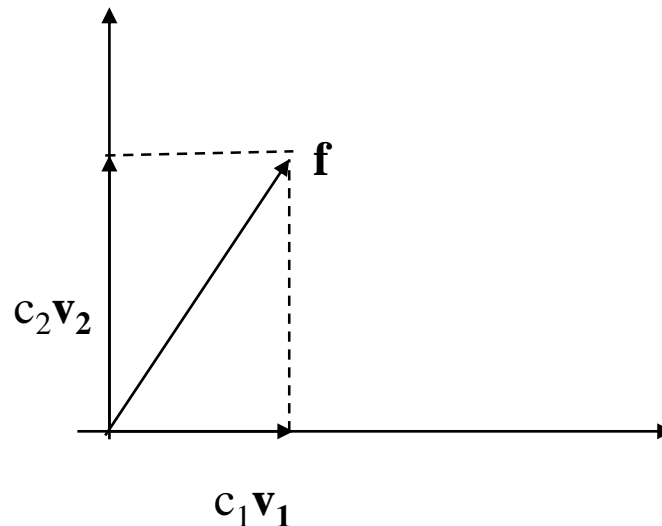
- Si el conjunto de generadores es ortogonal

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i = c_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$$

- de donde $c_i = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i / (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$

Entonces, los coeficientes c_i que permiten expresar a \mathbf{f} en función de una base ortogonal de vectores serán:

$$c_i = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i} = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|^2}$$



Qué ocurre si $\{\mathbf{v}_i\}$ no genera el espacio en que está contenido \mathbf{f} ?

- Entonces la suma vectorial anterior es sólo una aproximación a \mathbf{f} , y lleva implícito un error.
- ¿De qué manera se pueden seleccionar adecuadamente los c_i para reducir el error de aproximación?

Vamos a considerar el espacio de las señales
definidas en $[t_1, t_2]$

- Supongamos que queremos representar a la
función $f(t)$ en términos de un conjunto $\{\phi_i\}_{i=1,\dots,N}$
que es ortogonal en $[t_1, t_2]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ k_i, & i = j \end{cases}$$

Si expresamos la combinación lineal

$$f(t) \sim c_1 \phi_1(t) + c_2 \phi_2(t) + \dots + c_N \phi_N(t)$$

podemos hallar los coeficientes que
minimicen el ECM

$$ECM = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t) - \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(t) \right)^2 dt$$

Los c_i que cumplen tal condición son los *coeficientes generalizados de Fourier*:

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t) dt}$$

Si las funciones $\phi_i(t)$ son complejas se obtienen los coeficientes:

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_i^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_i^*(t) dt}$$

Si el conjunto $\{\phi_i(t)\}$ es ortonormal

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

Si el conjunto $\{\phi_i(t)\}$ es ortonormal

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$c_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_i^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_i^*(t) dt}$$

1

Si el conjunto $\{\phi_i(t)\}$ es ortonormal

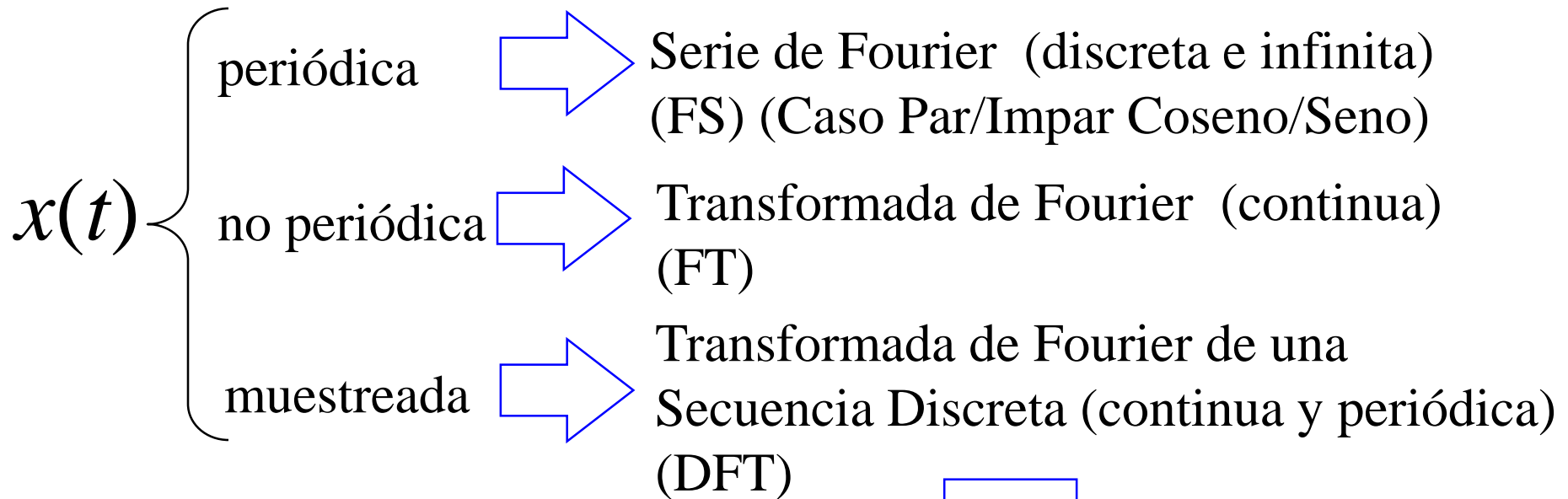
$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$c_i = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_i^*(t) dt$$

La familia de Fourier

Funciones de Fourier

- Senos y cosenos con frecuencias discretas
 - Series seno y coseno
- Exponenciales complejos con frecuencia discreta
 - Series de Fourier
- Exponenciales complejos continuos
 - Transformada continua de Fourier
- Exponenciales complejos discretos
 - Transformada discreta de Fourier



¿Y si $x(t)$ es aleatoria?

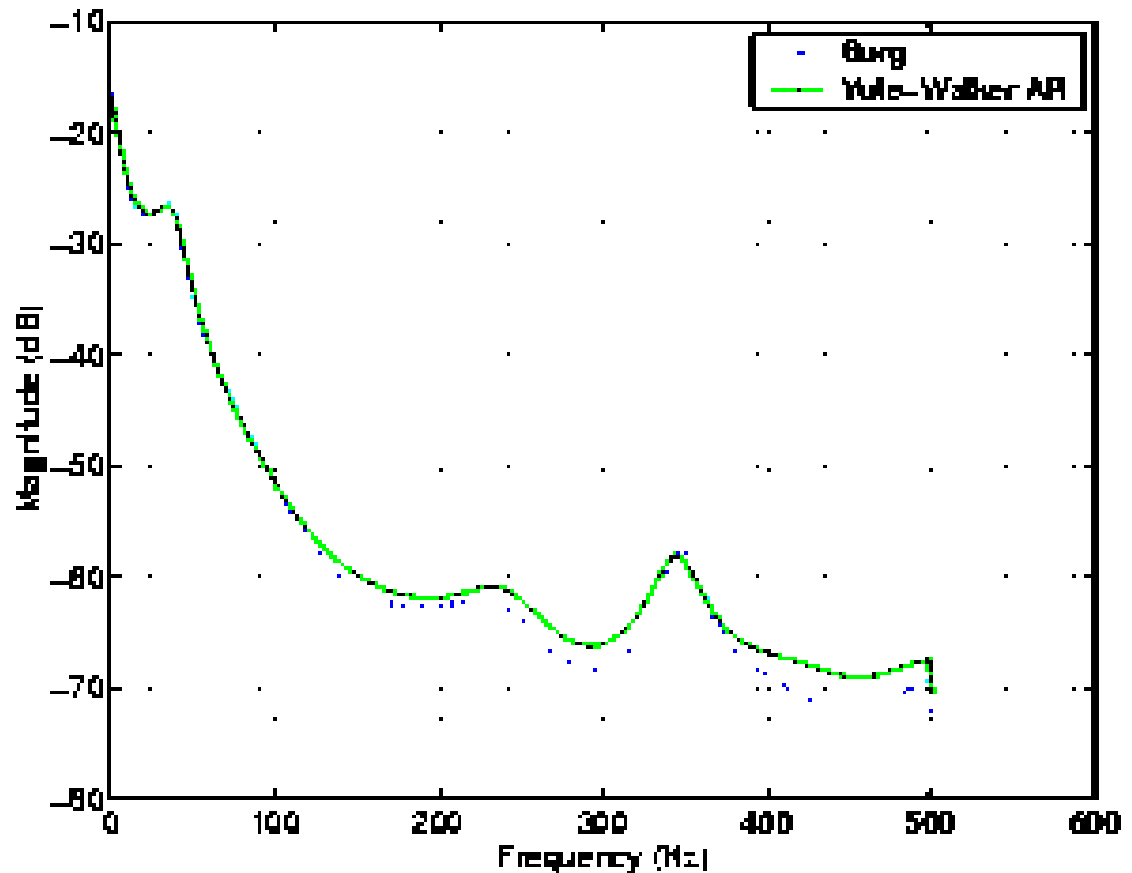
Estimación Espectral

Transformada Discreta de Fourier (DFT) (discreta y finita)

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

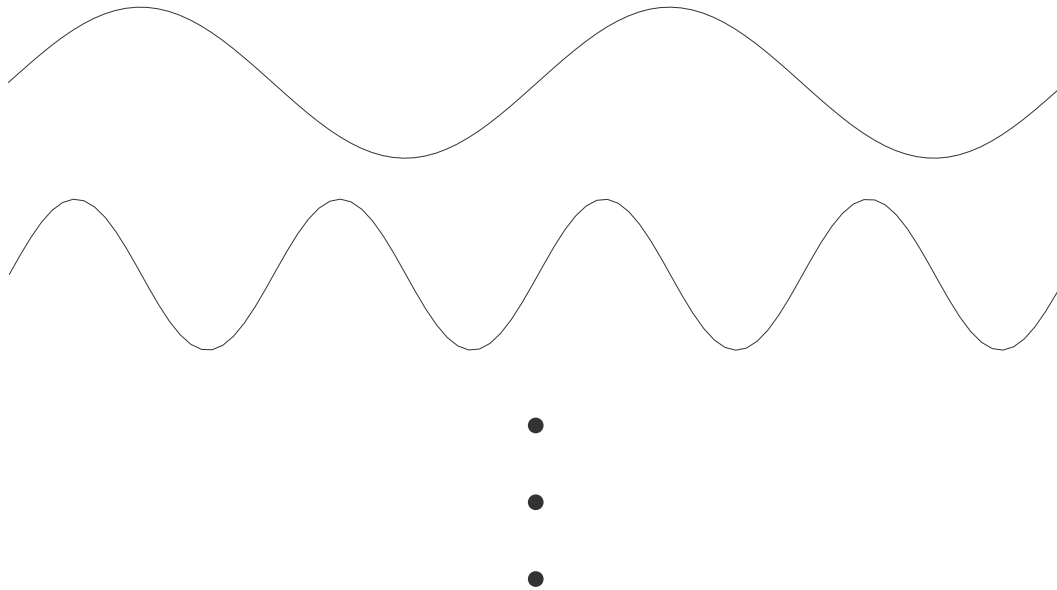
Estimación espectral

- Si $x(t)$ es aleatoria no puedo conocer exactamente su espectro, debo estimarlo.
- Métodos:
 - No paramétricos
 - Paramétricos
 - Subespacio



Series seno: base

$$\varphi_n(t) = \sin(2\pi n f_0 t)$$



Series seno: transformación

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

Series seno: inversa

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(2\pi n f_0 t)$$

Series coseno:

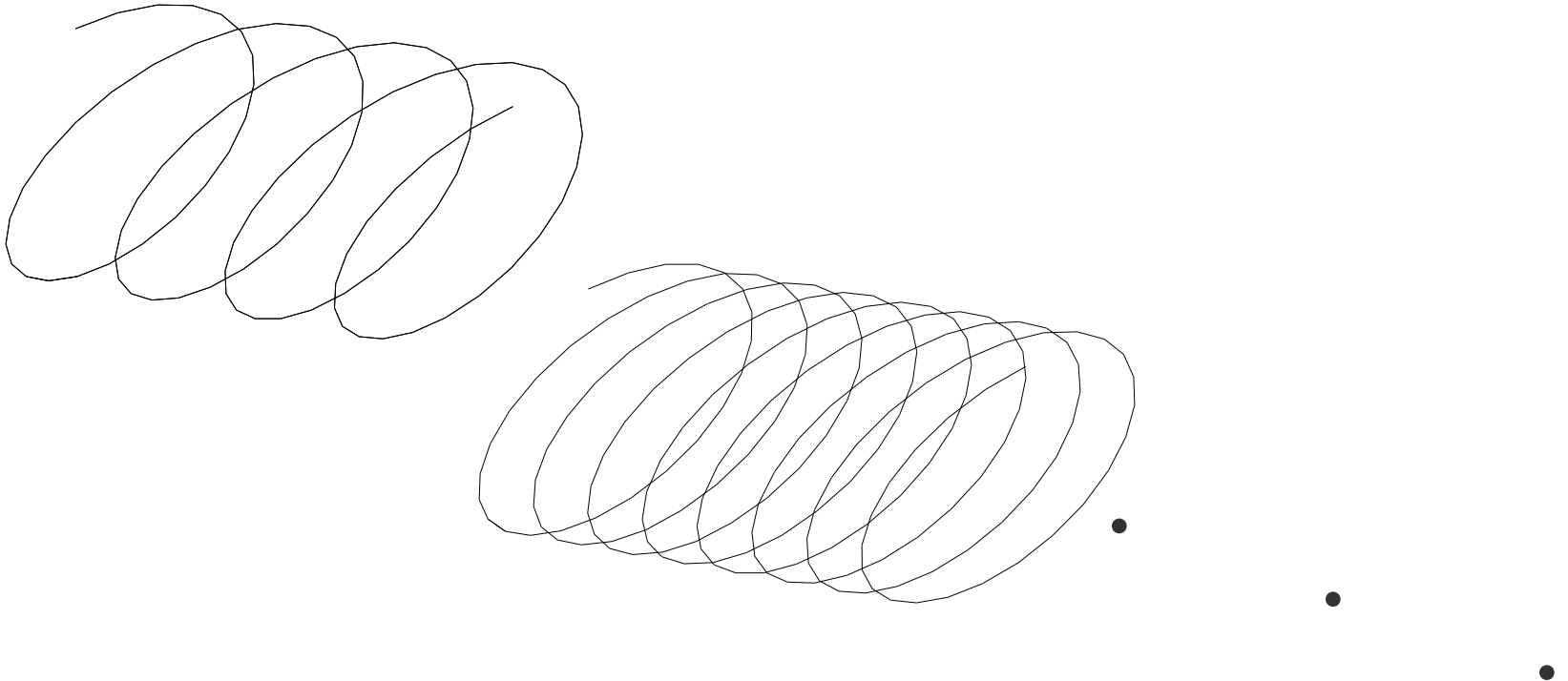
$$\varphi_n(t) = \cos(2\pi n f_0 t)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(2\pi n f_0 t)$$

Series de Fourier: base

$$\varphi_n(t) = e^{j2\pi n f_0 t}$$



Serie de Fourier

$$\text{Si } x(t) = x(t+T) \quad \forall t$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi kt / T) + b_k \sin(2\pi kt / T)]$$

donde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos(2\pi kt / T) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin(2\pi kt / T) dt \quad k = 1, 2, \dots$$

Serie de Fourier

$$\frac{1}{T} = f_0$$

$$2\pi f_0 = \omega_0$$

$$\text{Si } x(t) = x(t+T) \quad \forall t$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi kt / T) + b_k \sin(2\pi kt / T)]$$

donde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos(2\pi kt / T) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin(2\pi kt / T) dt \quad k = 1, 2, \dots$$

Serie de Fourier

La forma compleja de la serie de Fourier es

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{(-j2k\pi t/T)} dt$$

Ecuación de Análisis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(j2k\pi t/T)} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

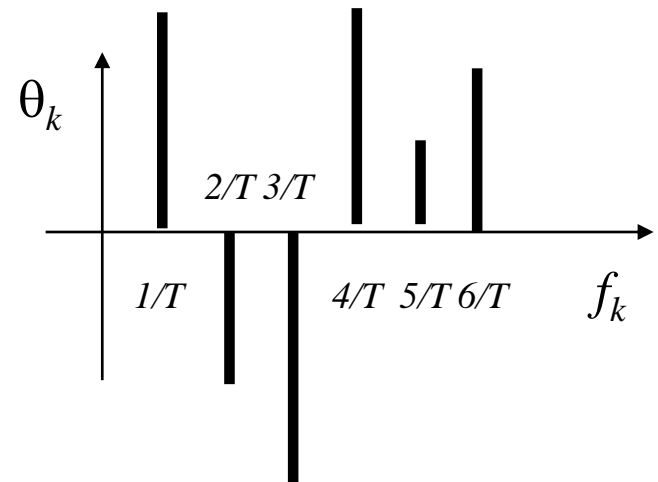
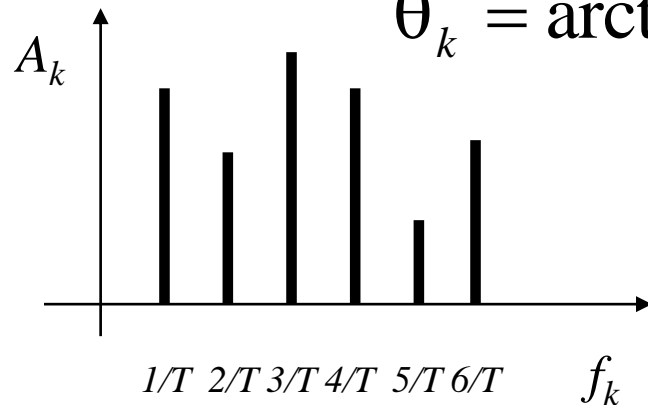
Ecuación de Síntesis

Serie de Fourier

$x(t)$ puede expresarse como una suma de armónicos de la frecuencia fundamental $1/T$

$$A_k = (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}$$

$$\theta_k = \text{arctg}(-b_k / a_k)$$

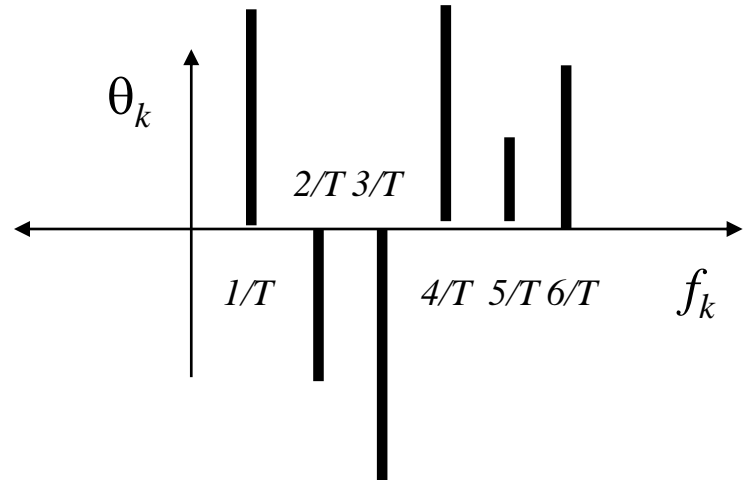
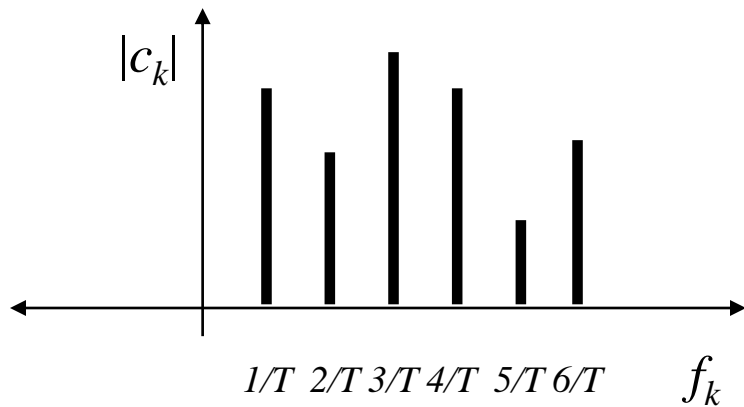


Espectro de una señal periódica

Espectro de Magnitud

(Discretos)

Espectro de Fase



De la Serie de Fourier a la Transformada de Fourier

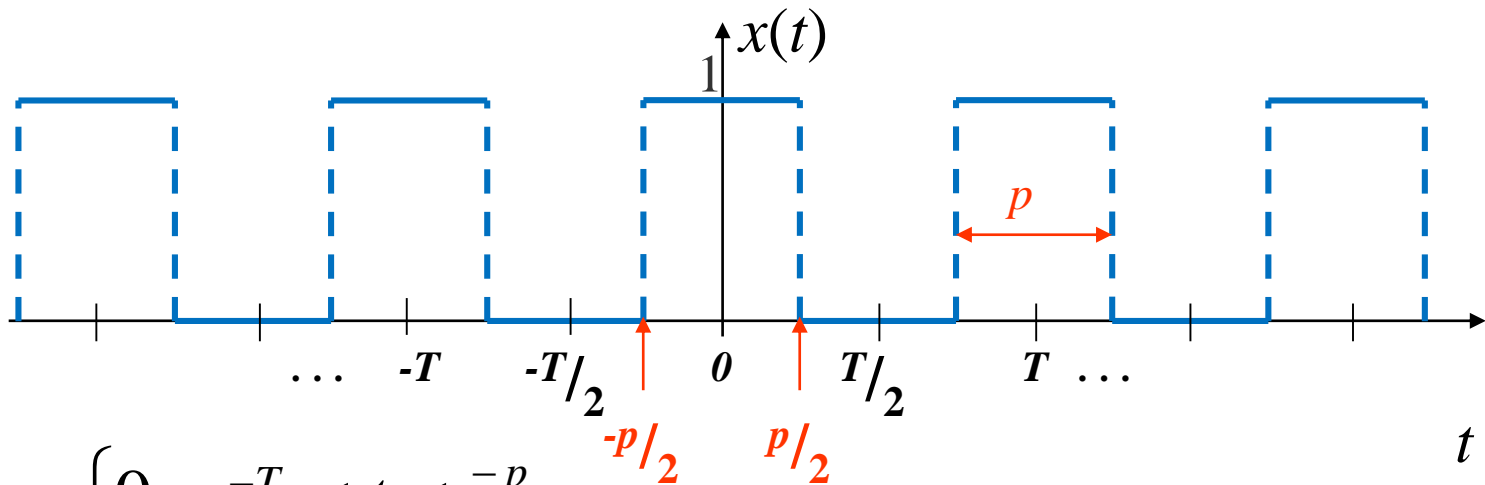
- La SF nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de *funciones periódicas* $x(t)$.
- ¿Es posible extender las SF para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de *funciones no periódicas*?

¿Qué ocurre cuando $T \rightarrow \infty$?

¿ó $f_0 \rightarrow 0$?

Consideremos la función periódica:

- Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T :



$$x(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{p}{2} \\ 1 & -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

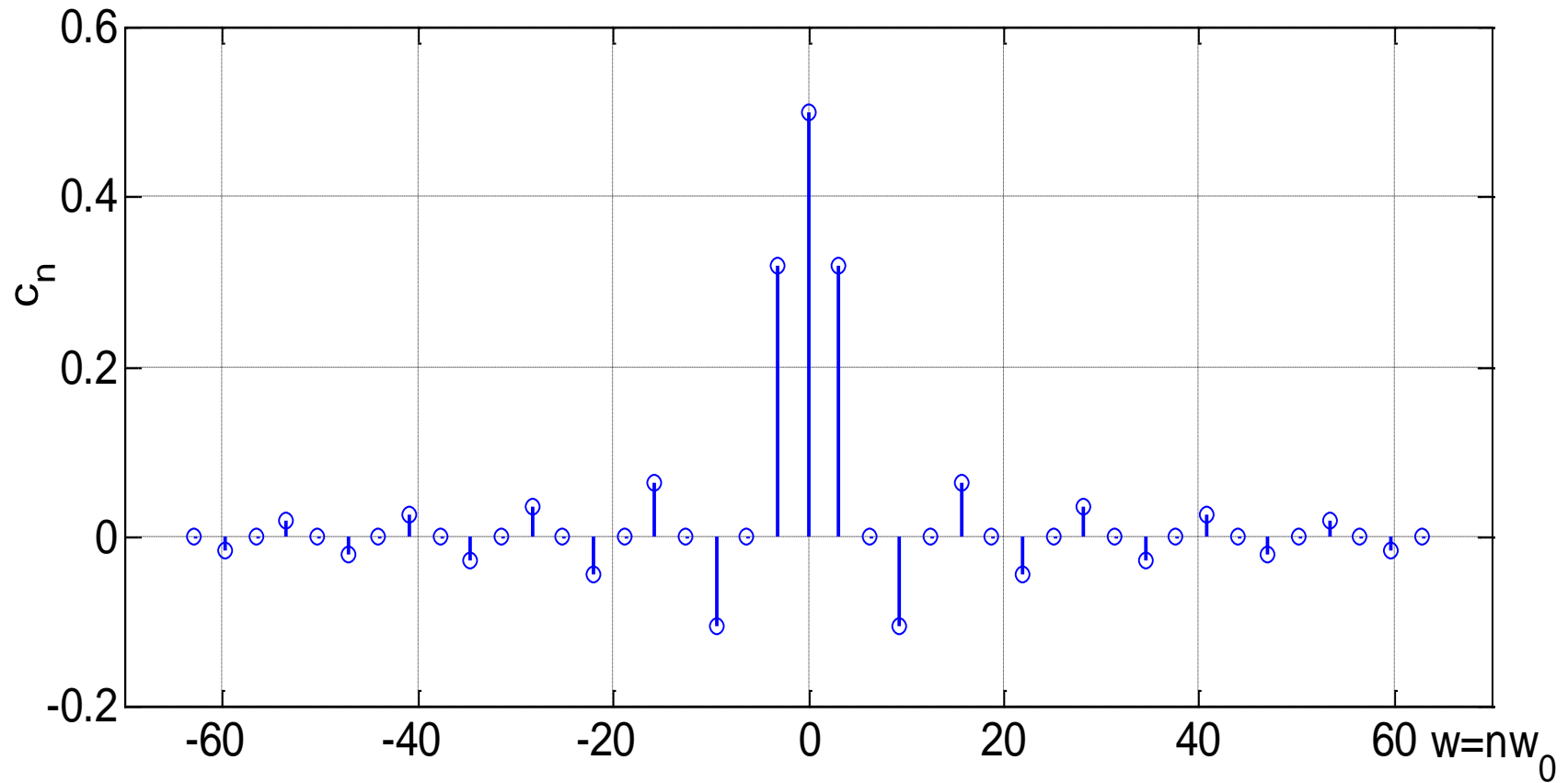
Haciendo las cuentas...

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier son (en este caso todos reales):

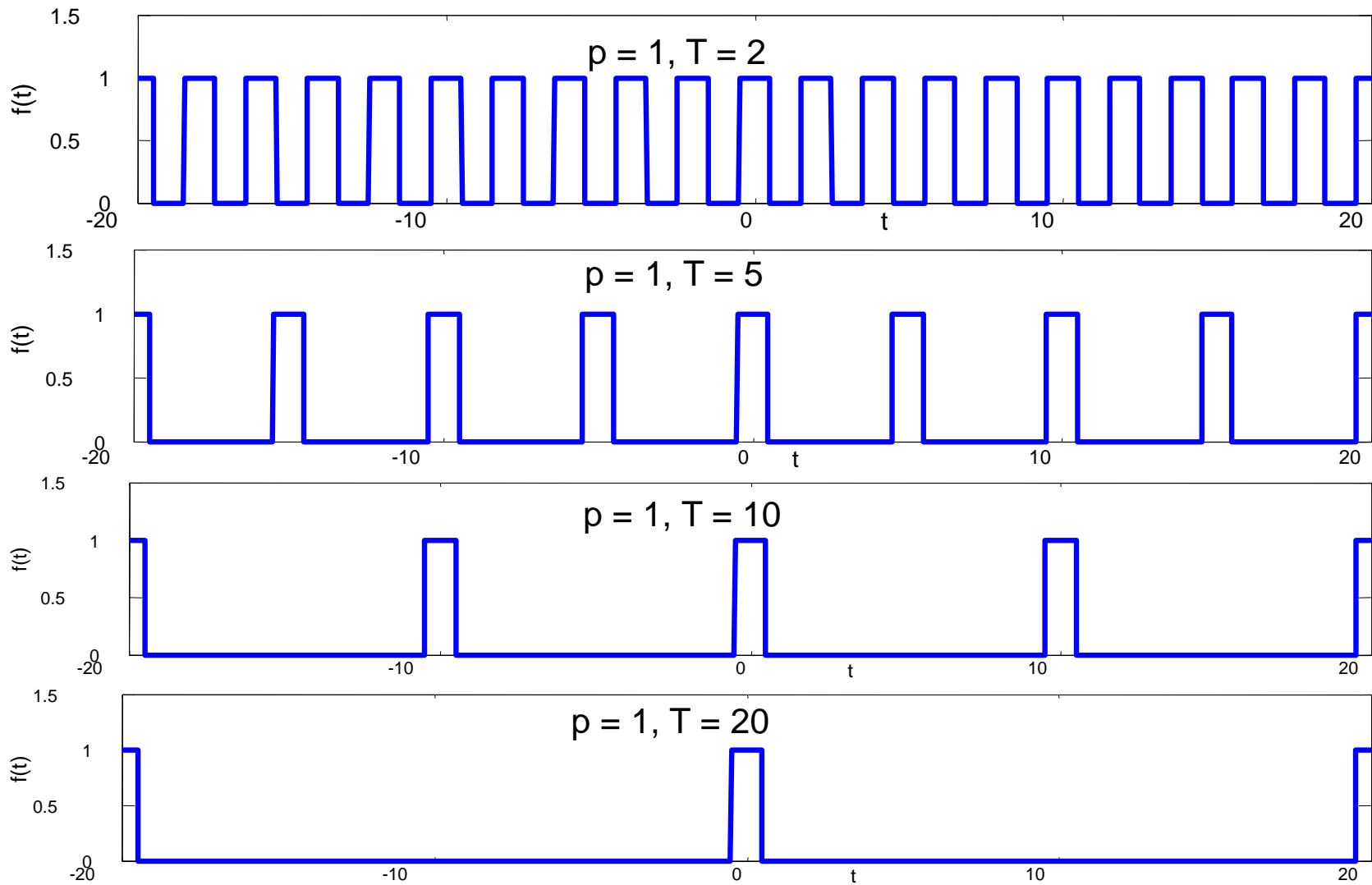
$$c_n = \left(\frac{p}{T} \right) \frac{\text{sen}(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra $\omega = n\omega_0$.

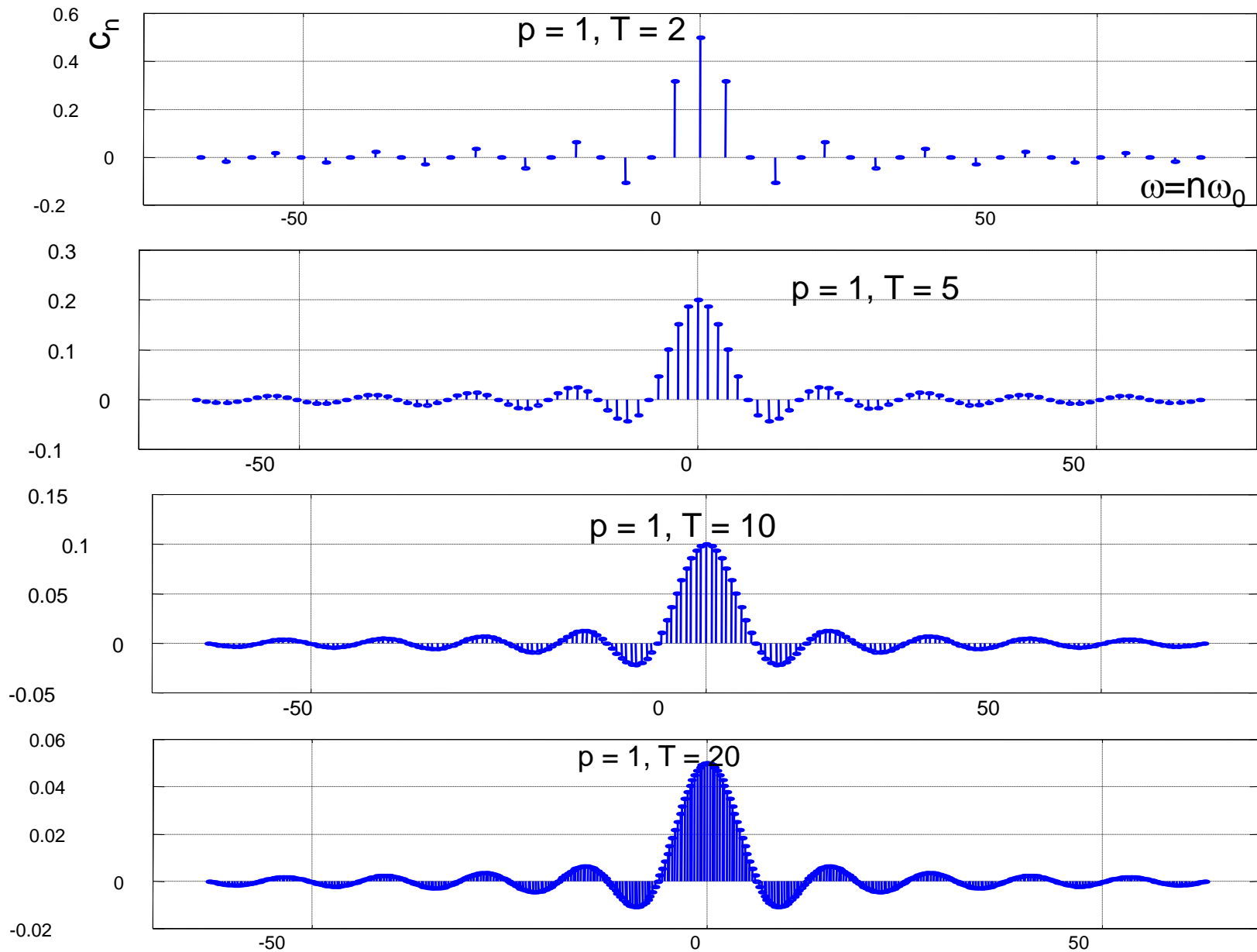
Espectro del tren de pulsos para $p = 1$, $T = 2$



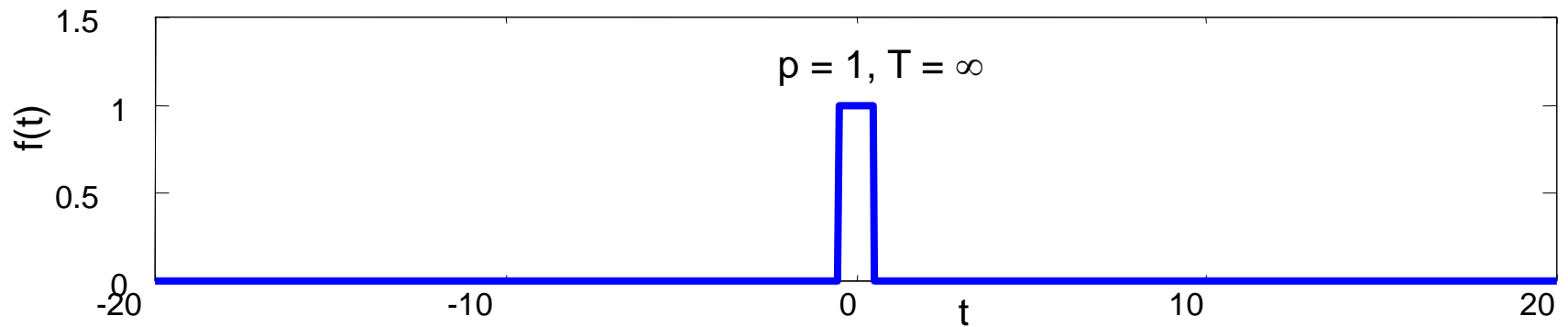
Si el periodo del tren de pulsos aumenta...



...el espectro se "densifica".

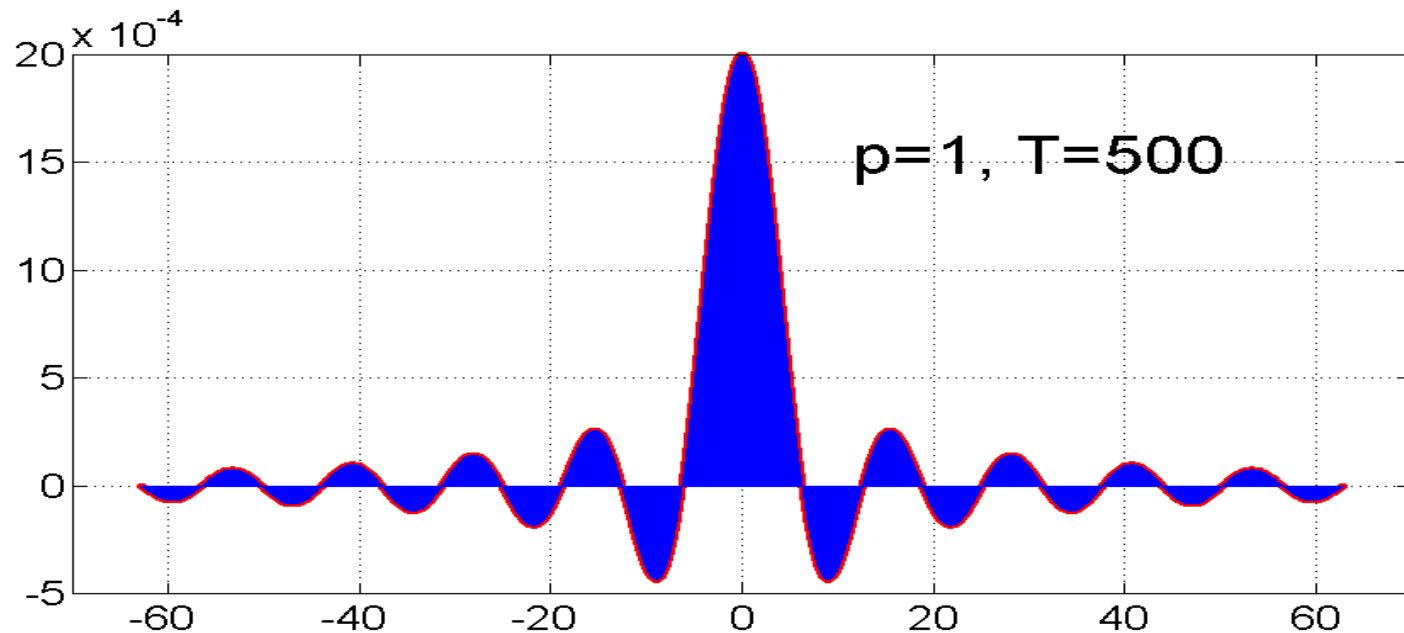


En el límite cuando $T \rightarrow \infty$, la función deja de ser periódica:



¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

Si se hace T muy grande ($T \rightarrow \infty$), el espectro se vuelve "*continuo*":



Transformada de Fourier

$$T \rightarrow \infty$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2k\pi/T} dt$$

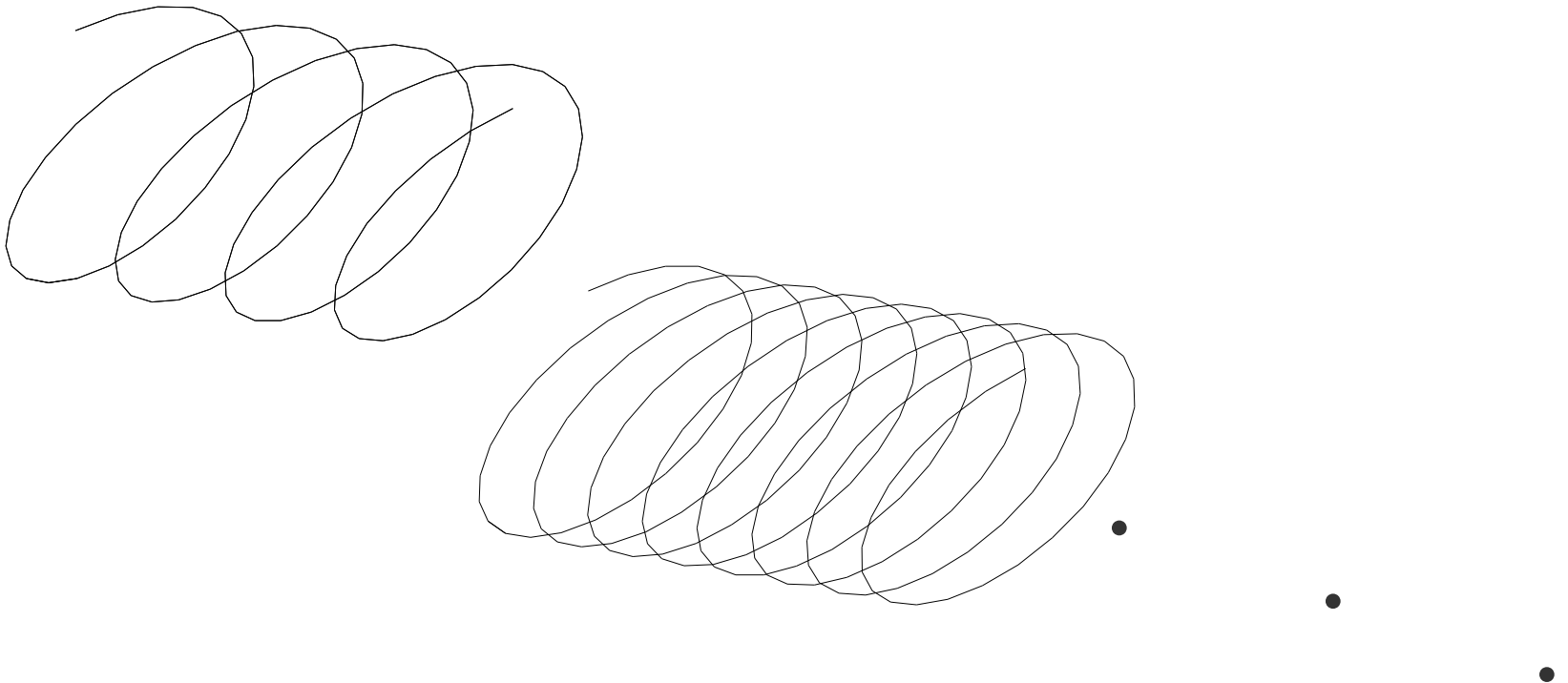
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{(j2k\pi/T)t}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Transformada continua de Fourier: base

$$\varphi(t, f) = e^{j2\pi f t}$$



Propiedades de la Transformada de Fourier

En general la TF es un complejo:

$$X(f) = R(f) + j I(f) = |X(f)| e^{j\theta(f)}$$

donde:

- $R(f)$ es la parte real de la TF
- $I(f)$ es la parte imaginaria
- $|X(f)|$ es la amplitud o espectro de Fourier de $x(t)$
- $\theta(f)$ es el ángulo de fase de la TF

$$|X(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$$
$$\theta(f) = \tan^{-1}[I(f) / R(f)]$$

Existencia de la FT

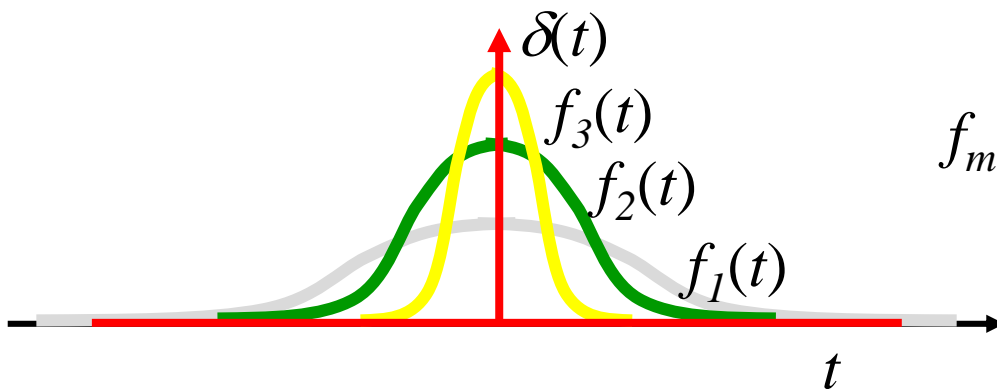
$$\exists X(f) \text{ si } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

Es decir, si la señal es de *energía finita*

Las señales transitorias cumplen con esa condición

Existencia de la FT

- Las señales periódicas $(-\infty, \infty)$ no cumplen con esa condición.
- Se requiere la utilización de *funciones generalizadas* o *teoría de distribuciones*.



$$f_m(t) = m \exp[-(mt)^2]/\sqrt{\pi}$$

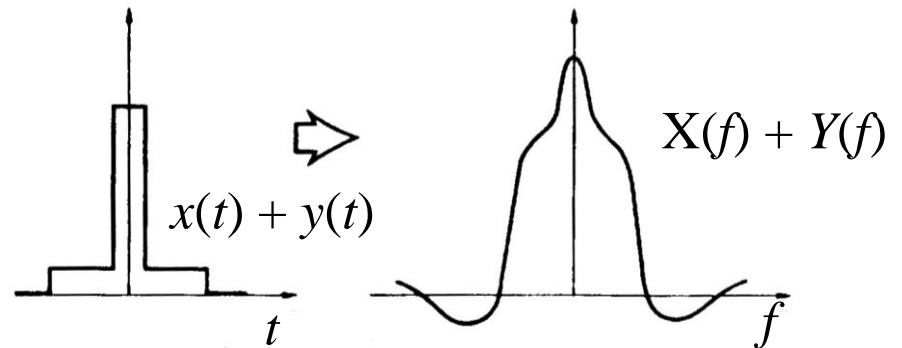
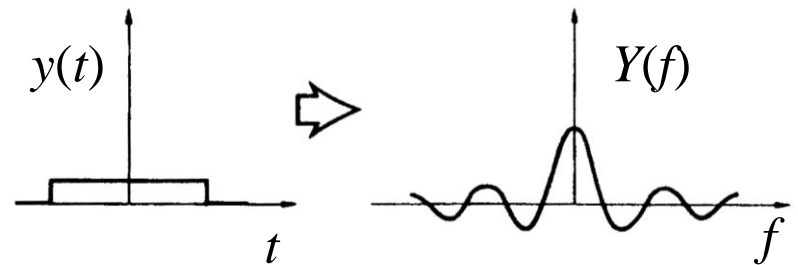
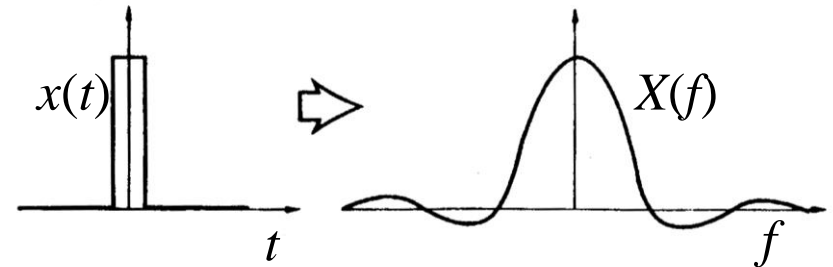
Linealidad

- Si $x(t)$ y $y(t)$ tienen transformadas de Fourier $X(f)$ y $Y(f)$, entonces:

$$a x(t) + b y(t) \quad \Longleftrightarrow \quad a X(f) + b Y(f)$$

Linealidad

$$F\{ax(t) + by(t)\} = aF\{x(t)\} + bF\{y(t)\}$$



Simetría (Dualidad)

- Si $x(t)$ y $X(f)$ son un par de transformadas de Fourier, entonces:

$$X(t) \quad \longleftrightarrow \quad x(-f)$$

Desplazamiento Temporal (retardo)

- Si $x(t)$ está desplazada un valor t_o , entonces:

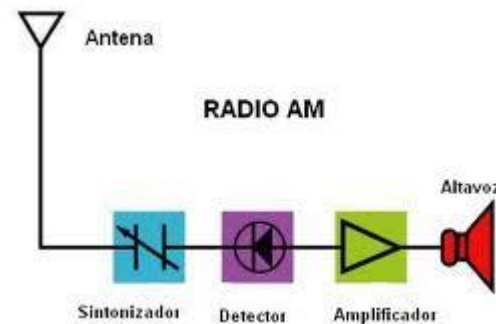
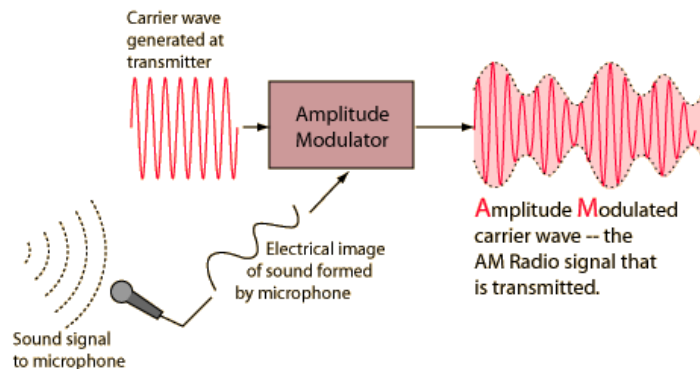
$$x(t - t_o) \quad \Leftrightarrow \quad X(f)e^{-j2\pi f t_o}$$

el desplazamiento temporal no afecta la magnitud de la TF

Desplazamiento Frecuencial (modulación)

- Si $X(f)$ está desplazada un valor f_0 , entonces:

$$X(f - f_0) \longleftrightarrow x(t) e^{j2\pi f_0 t}$$



Escala Temporal

- Si $X(f)$ es la transformada de $x(t)$, entonces:

$$x(k t) \quad \Longleftrightarrow \quad 1/k X(f/k)$$

Escala Frecuencial

- Si $X(f)$ es la transformada de $x(t)$, entonces:

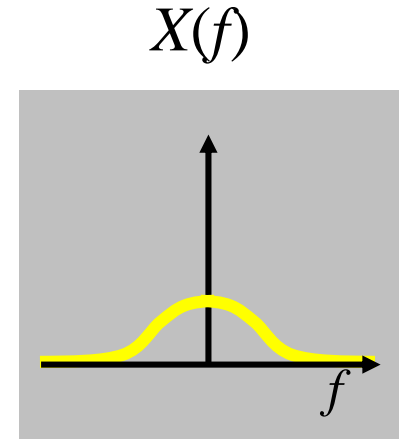
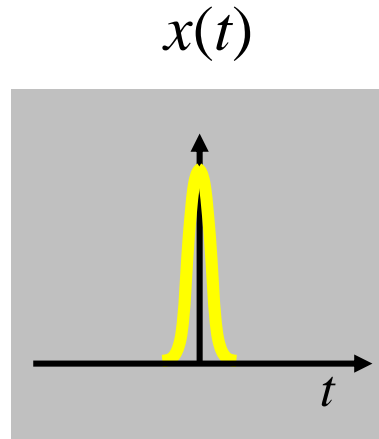
$$X(kf) \iff \frac{1}{|k|} x(t/k)$$

Efecto de la propiedad de escalado

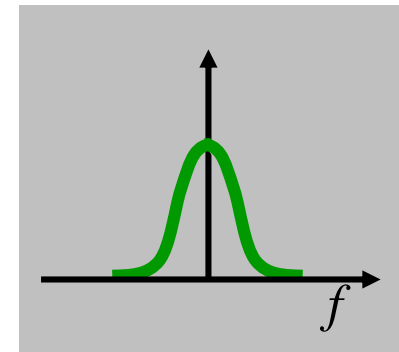
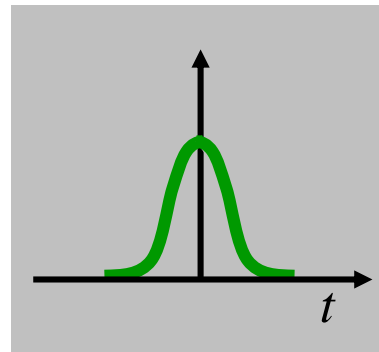
Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.

Esta es la esencia del principio de incertidumbre en mecánica cuántica.

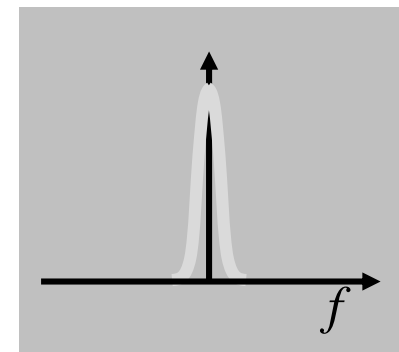
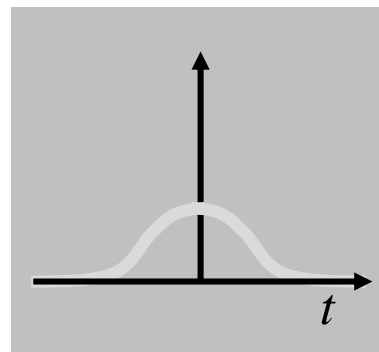
Pulso corto



Pulso medio



Pulso largo



Funciones pares

- Si $x_p(t)$ es una función par, la FT de $x_p(t)$ será par y real:

$$x_p(t) \quad \Leftrightarrow \quad R_p(f)$$

Funciones impares

- Si $x_i(t)$ es una función impar, la FT de $x_i(t)$ será impar e imaginaria pura:

$$x_i(t) \quad \diamond \quad I_i(f)$$

Convolución en el tiempo

$$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f)$$

Convolución en la frecuencia

$$x(t)y(t) \Leftrightarrow X(f) * Y(f)$$

No se cumple para la DFT

De la FT a la DFT

¿Qué ocurre ahora cuando
discretizamos?:

$$t \cong nT \qquad f \cong kF$$

$$n = 1 \cdots N,$$

$$k = 1 \cdots N,$$

(simplificando un poco...)

Transformada discreta de Fourier: transformación

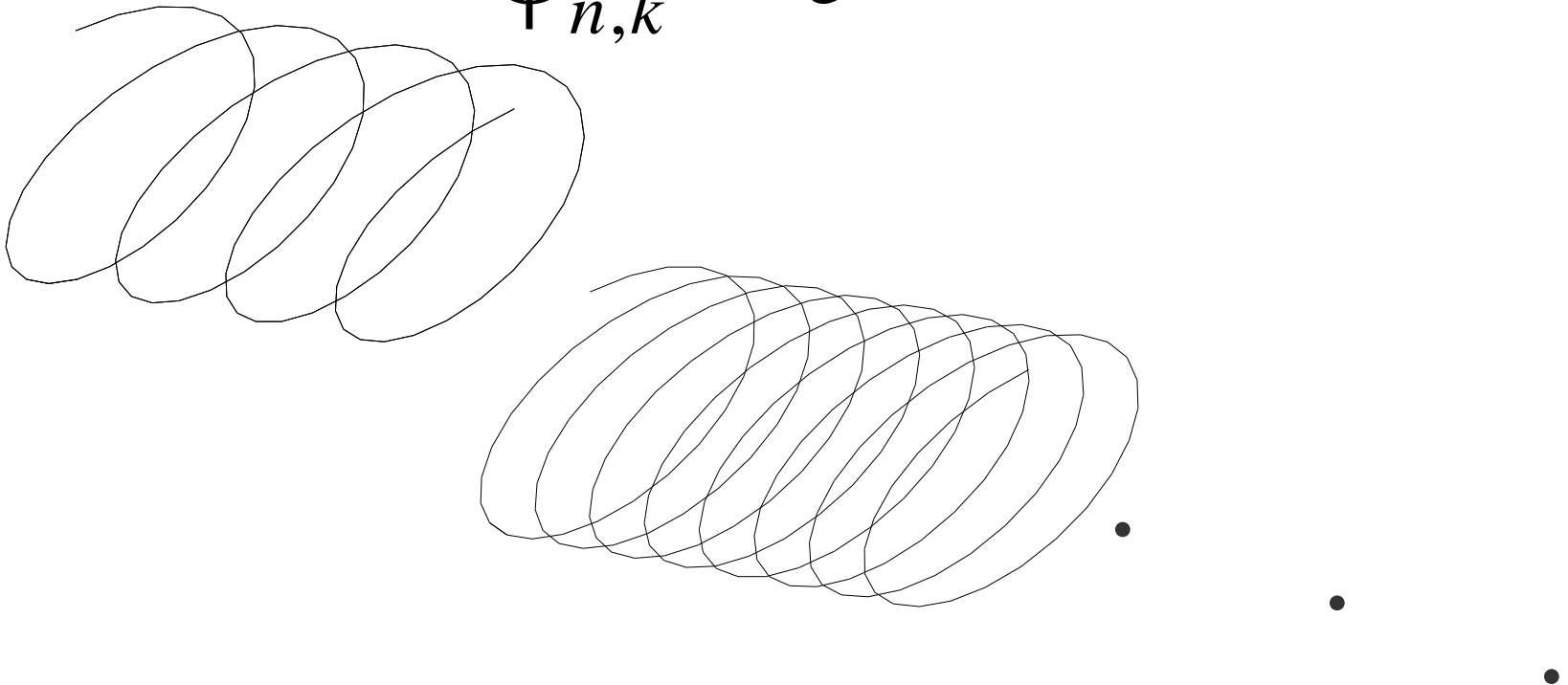
$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}$$

Transformada discreta de Fourier: inversa

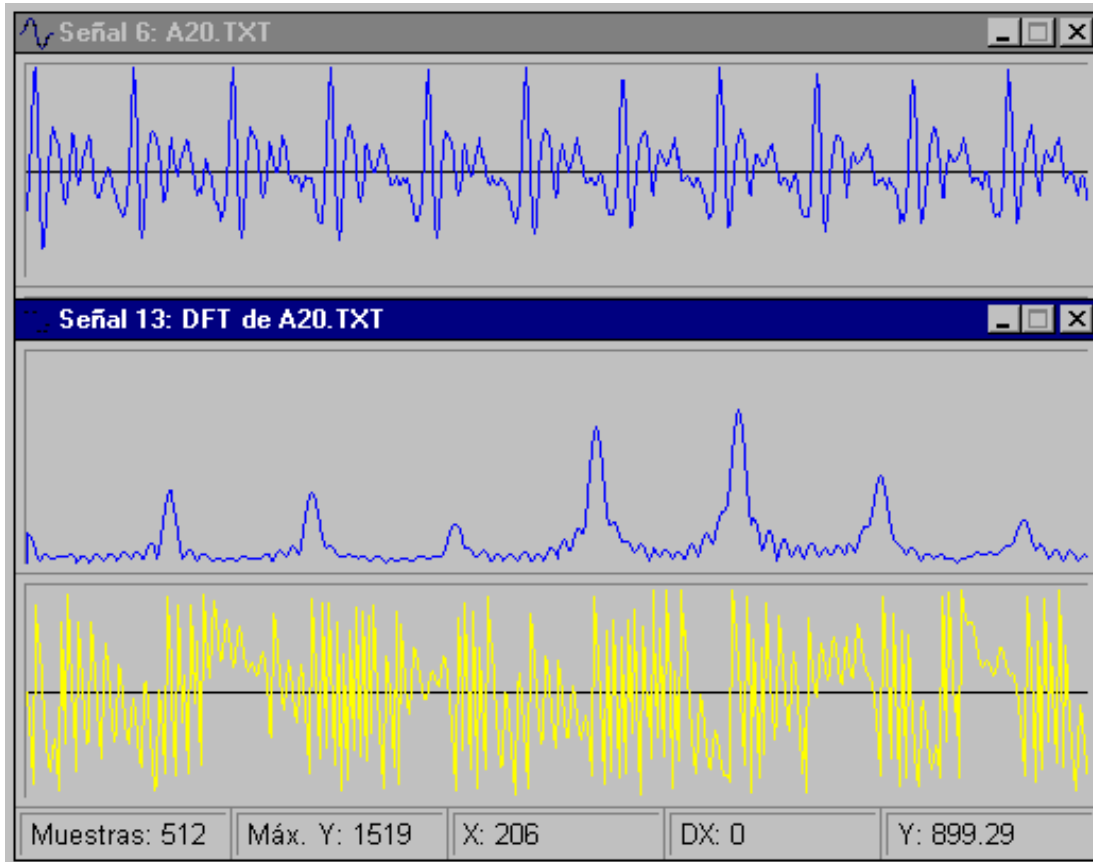
$$x_n = \sum_{k=1}^N X_k e^{j \frac{2\pi nk}{N}}$$

Transformada discreta de Fourier: base

$$\varphi_{n,k} = e^{j \frac{2\pi nk}{N}}$$

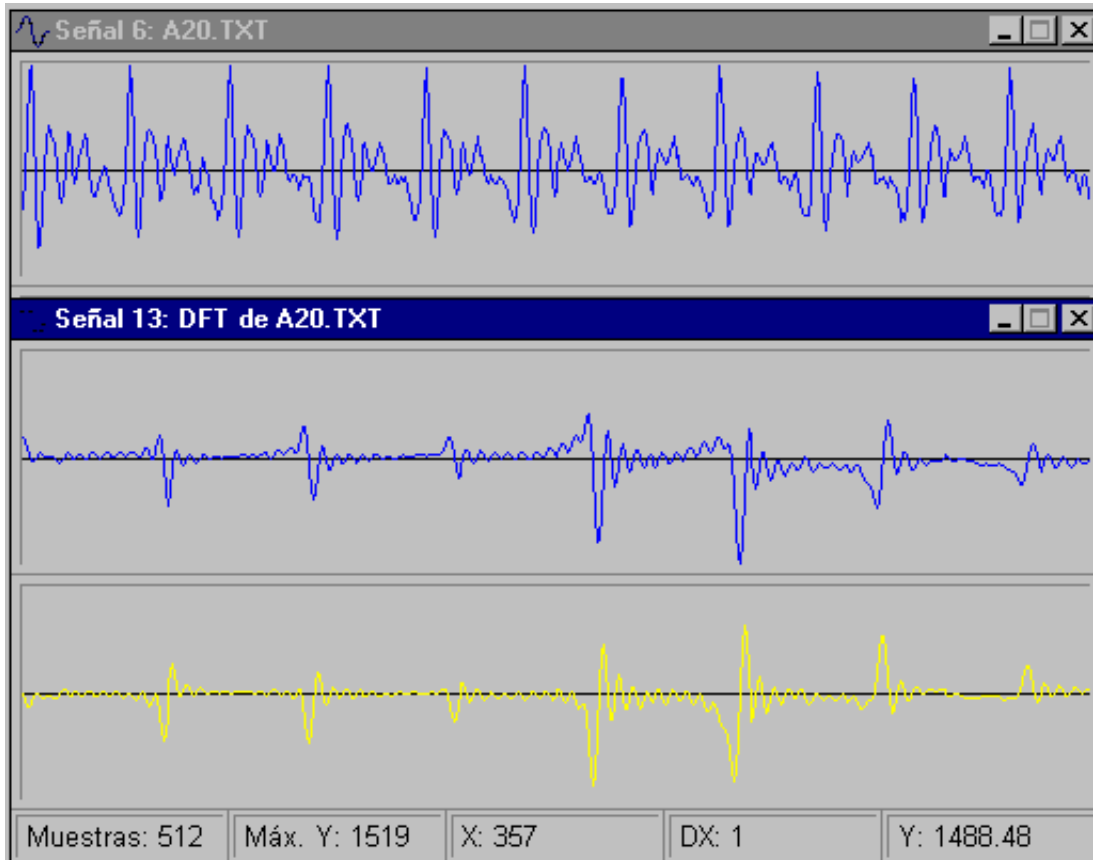


Ejemplo: SigTeach...



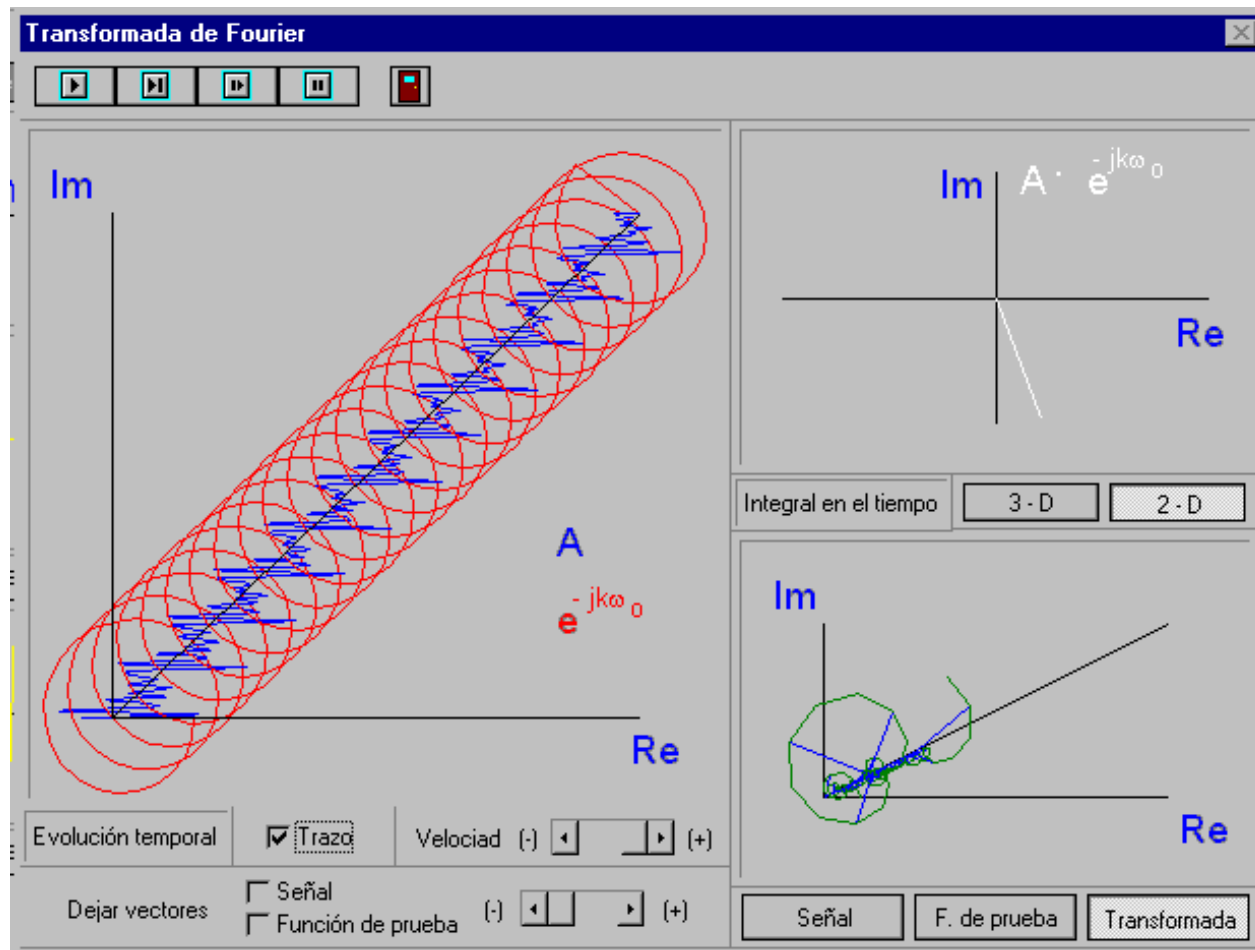
- Magnitud y fase de la DFT de una señal de voz (/a/)

Ejemplo: SigTeach...



- Parte Real e Imaginaria de la DFT de una señal de voz (/a/)

Ejemplo: SigTeach...



- Otra forma de verlo...

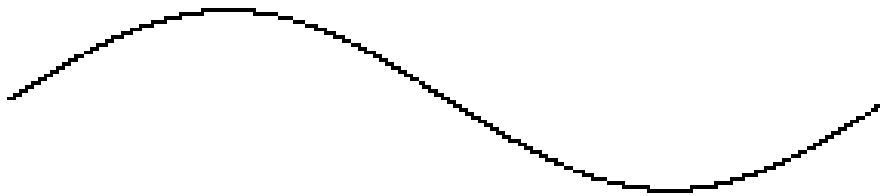
Algunas observaciones...

- Para poder realmente calcular la DFT en la práctica debemos pasar de la señal analógica a una digital
- Esto parece relativamente sencillo, pero no debemos olvidar que en general perdemos información.
- La señal original “sufrir” 3 transformaciones:
 - Muestreo (variable independiente)
 - Ventaneo (variable independiente)
 - Cuantización (variable dependiente)

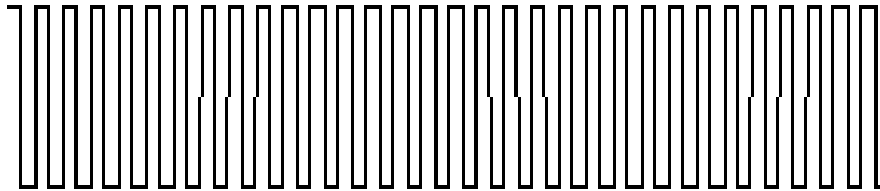
Algunas observaciones...

- Muestreo:
 - Solo medimos a intervalos prefijados por lo cual perdemos los cambios rápidos.
 - Dependemos de la fiabilidad del reloj del sistema.
- Ventaneo:
 - Solo medimos durante un intervalo finito de tiempo por lo cual perdemos los cambios más lentos.
 - La forma de esta ventana también afecta el resultado.

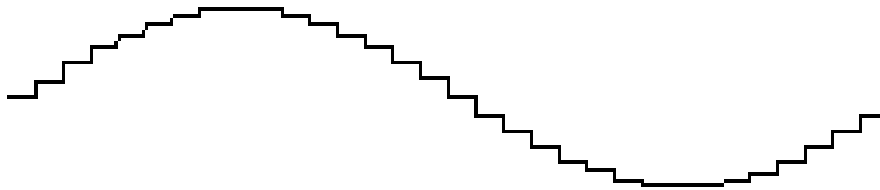
Algunas observaciones...



- Una señal continua

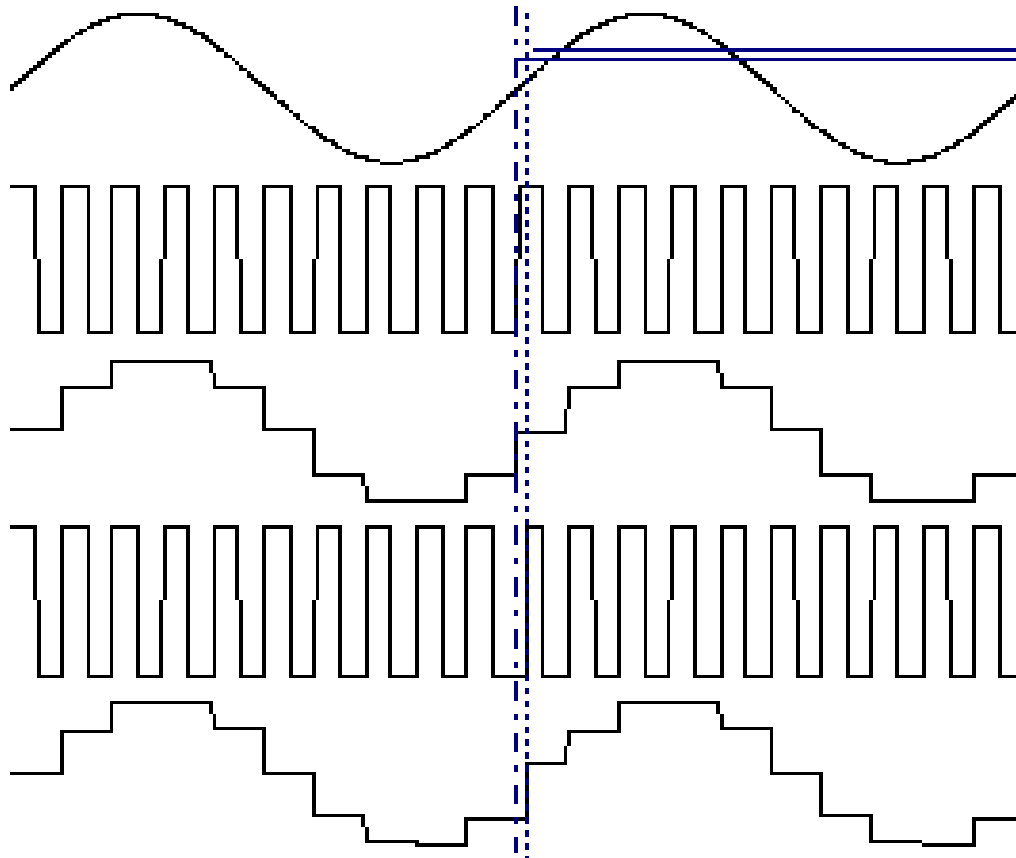


- ...medida contra un reloj...



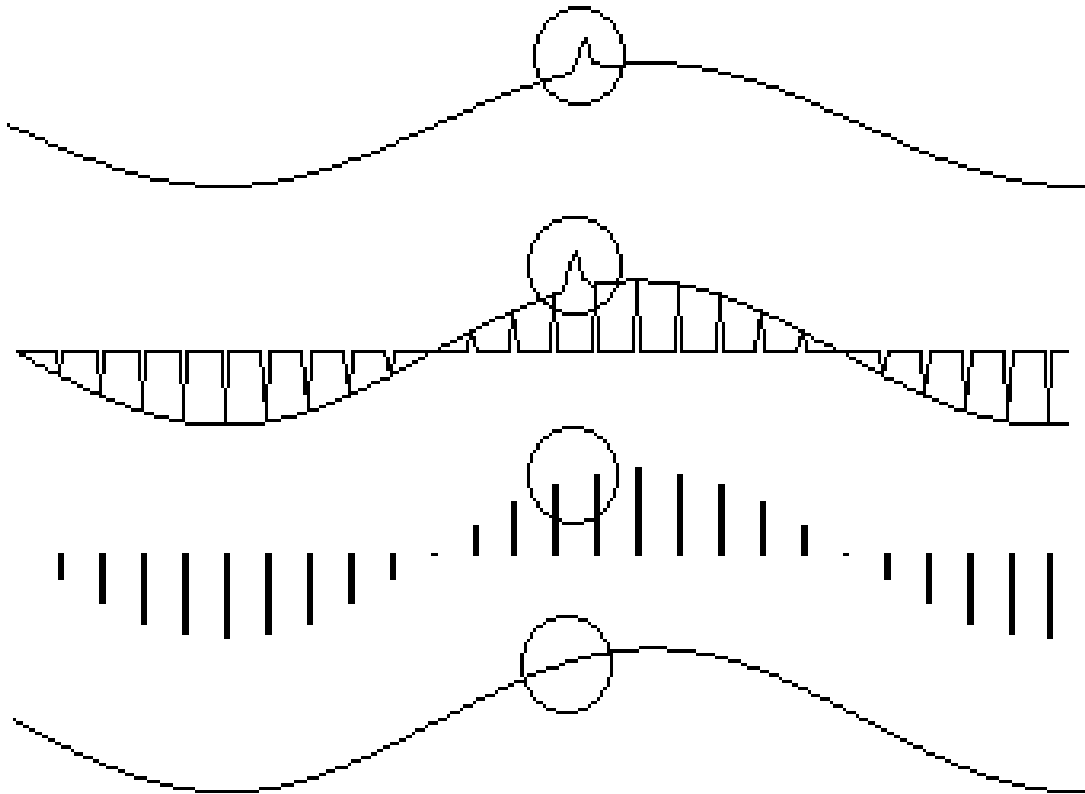
- ...mantiene su valor entre cada pulso del reloj...

Algunas observaciones...



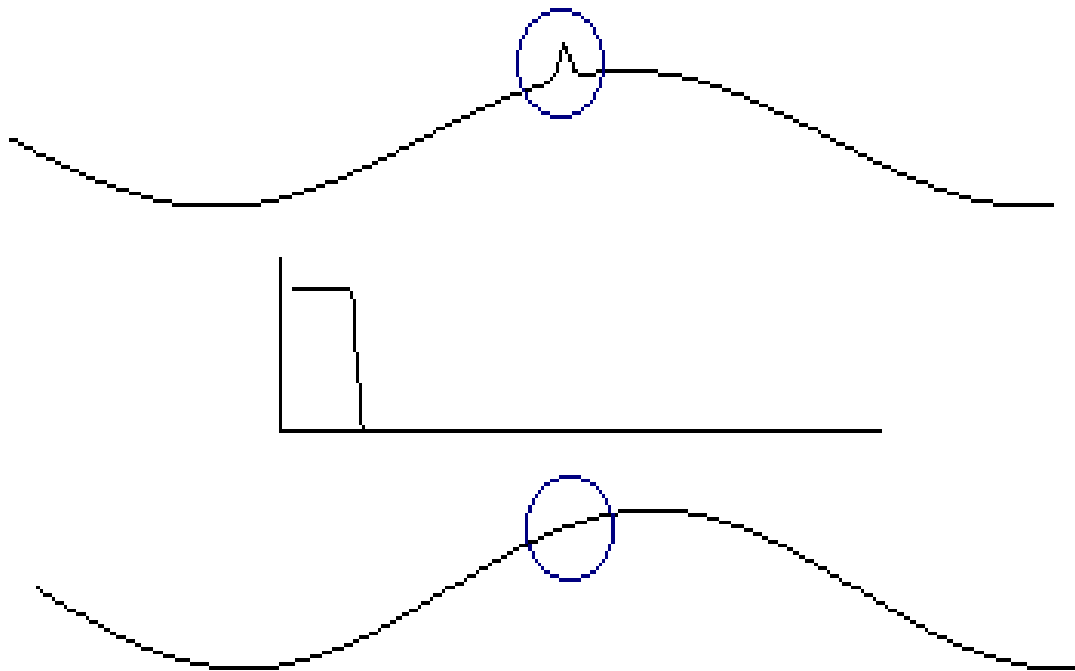
- Un reloj preciso...
- conduce a valores precisos.
- Un error en el reloj...
- ... se traduce en error en los valores.

Algunas observaciones...



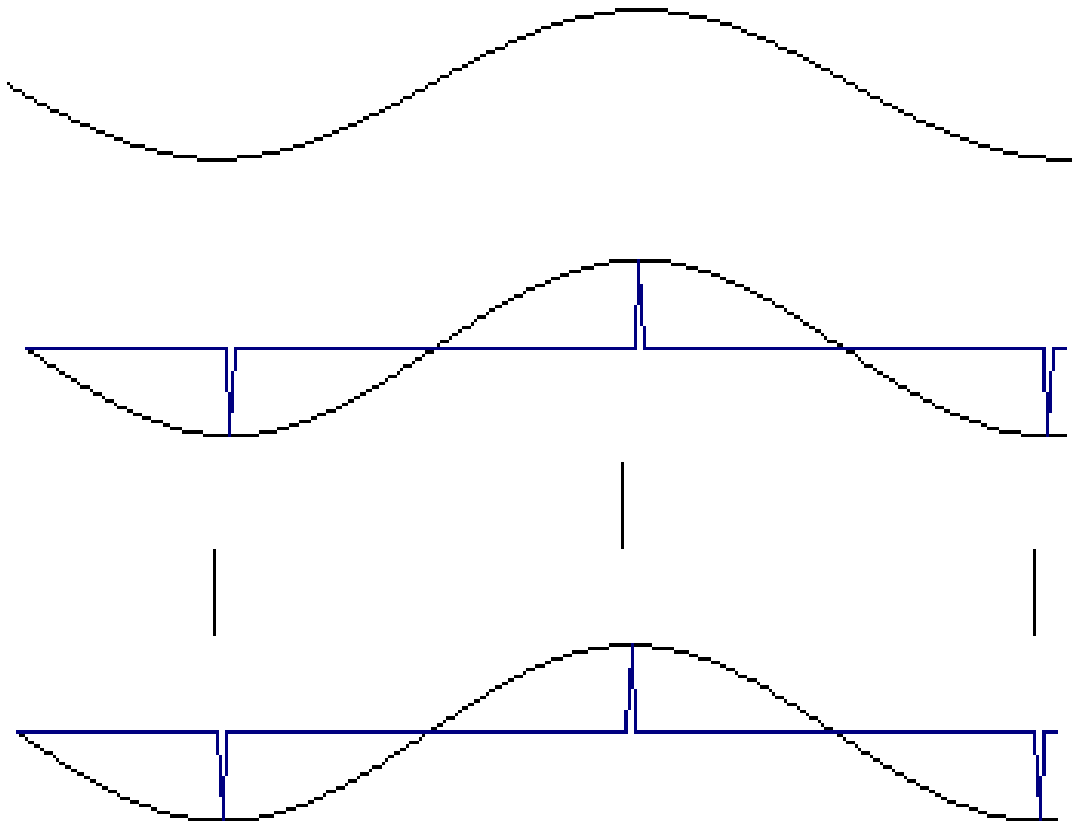
- Una “evento” de la señal...
- que ocurre entre muestras...
- parece como...
- si no hubiese estado allí

Algunas observaciones...



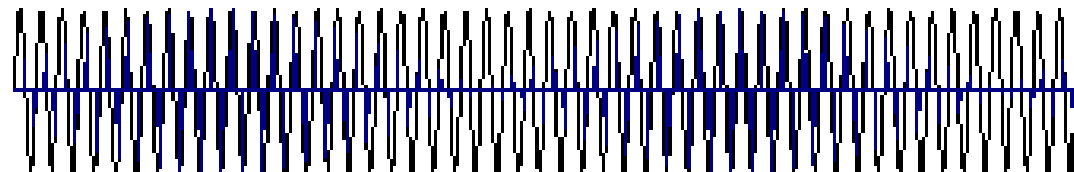
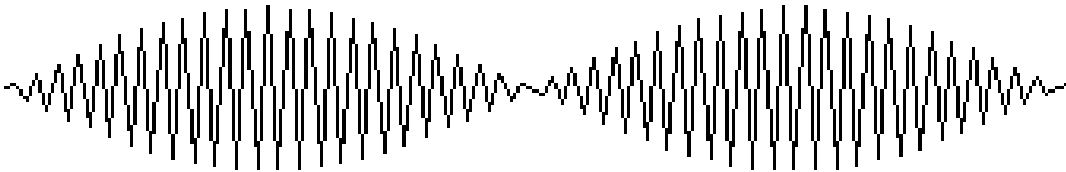
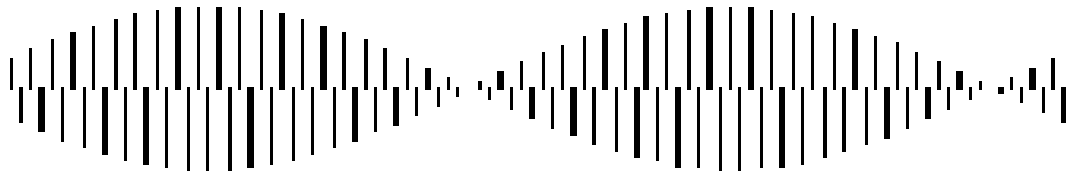
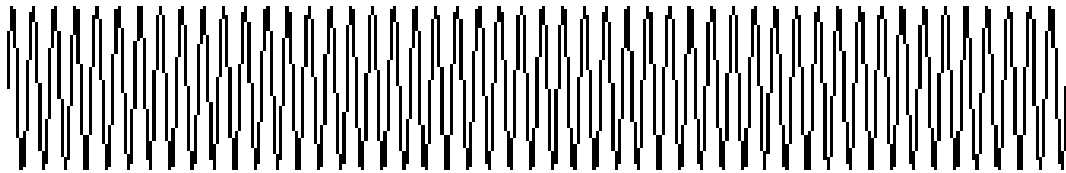
- Las componentes de alta frecuencia...
- ...pasadas por un filtro pasa bajos...
- ...desaparecen

Algunas observaciones...



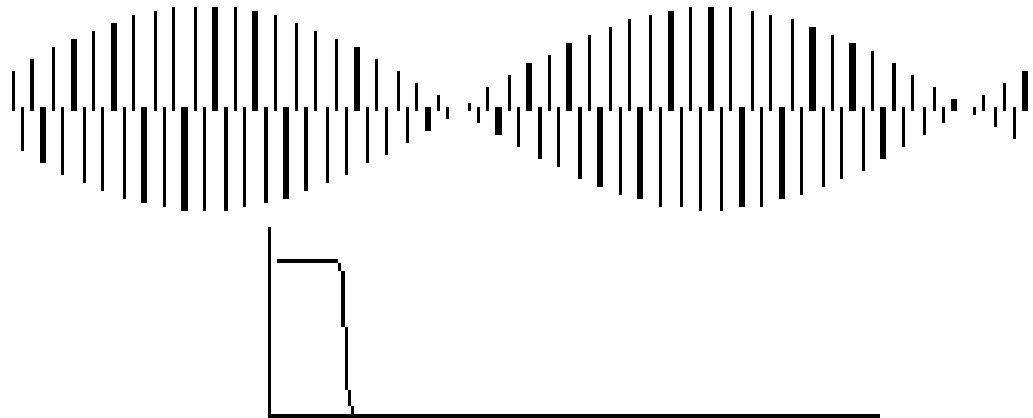
- Una señal periódica...
- muestreada dos veces por ciclo...
- tiene suficiente información como...
- para ser reconstruida

Algunas observaciones...

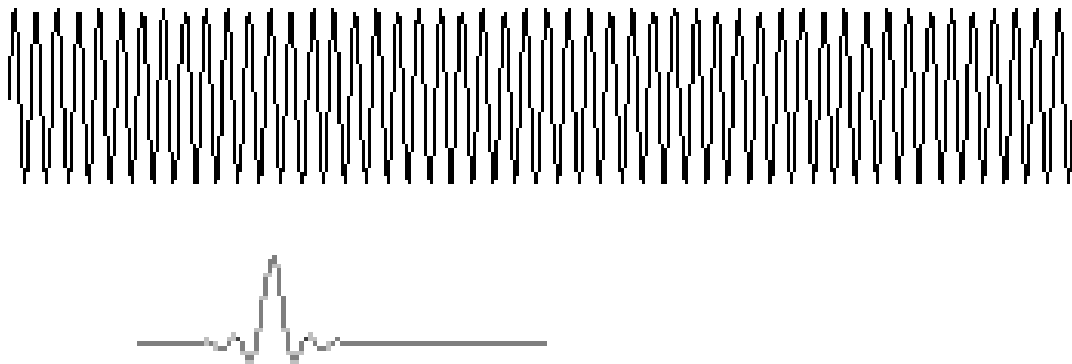


- Una señal de alta frecuencia...
- ...muestreada suficientemente rápido...
- ...puede verse todavía mal...
- ...pero puede ser reconstruida.

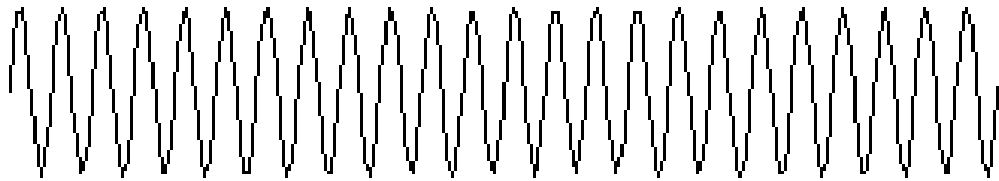
Algunas observaciones...



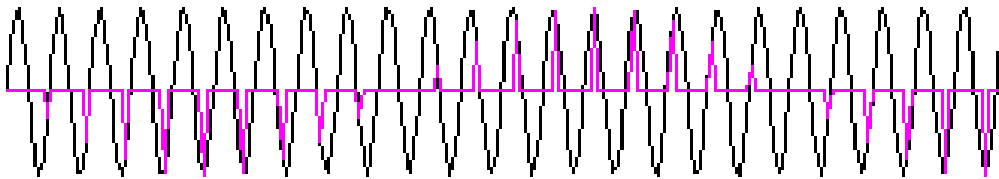
- Una señal muestreada...
- ...debe ser procesada por un filtro pasa-bajos...
- ...para reconstruir la señal original.
- La respuesta al impulso del filtro debe ser una sincrónica.



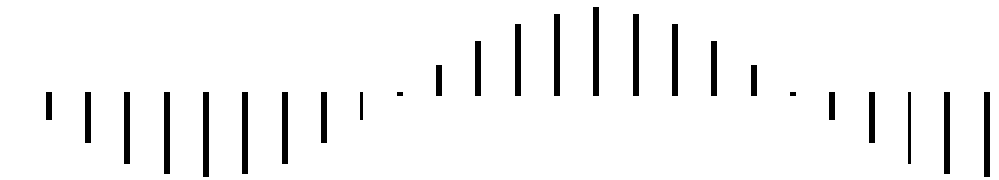
Algunas observaciones...



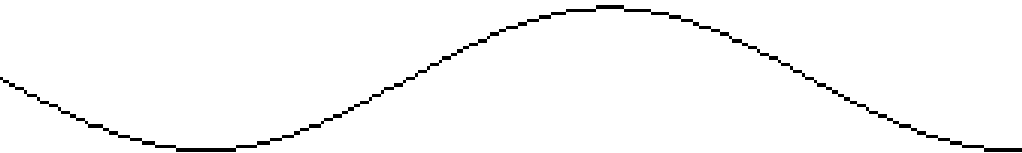
- Una señal de alta frecuencia...



- muestreada a una tasa muy baja...



- parece como...

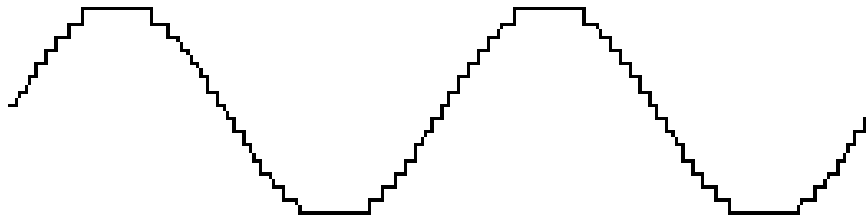
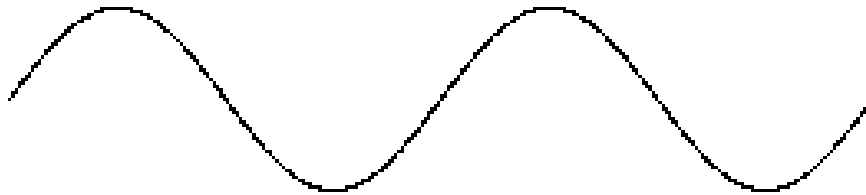


- una señal de menor frecuencia.

Algunas observaciones...

- Cuantización:
 - La precisión está limitada al número de bits disponible.
 - Depende también del rango dinámico de la señal.
 - Los errores introducidos en el proceso son no lineales y dependientes de la señal.
 - También pueden cometerse errores aritméticos dentro del procesador debido a la precisión.

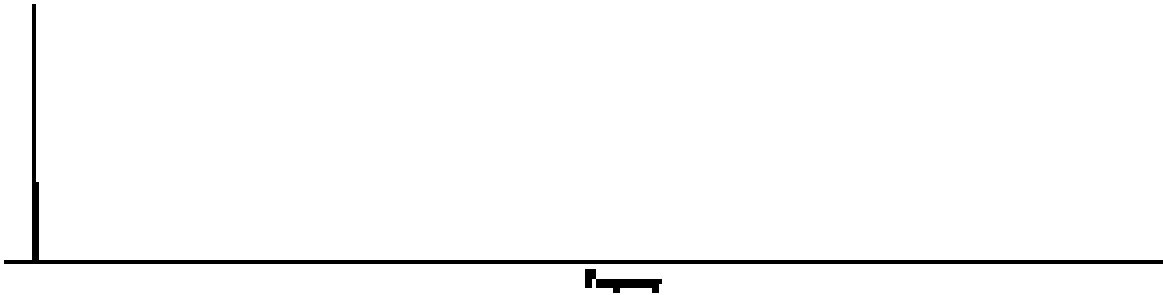
Algunas observaciones...



Ruido de cuantización ($\pm \frac{1}{2}$ LSB)

- La precisión limitada en la cuantización...
- ...conduce a errores...
- ... que dependen de la señal

Algunas observaciones...



- Por ello el espectro de un tono puro...



- ...se ensucia cuando lo cuantizamos.

Algunas observaciones...

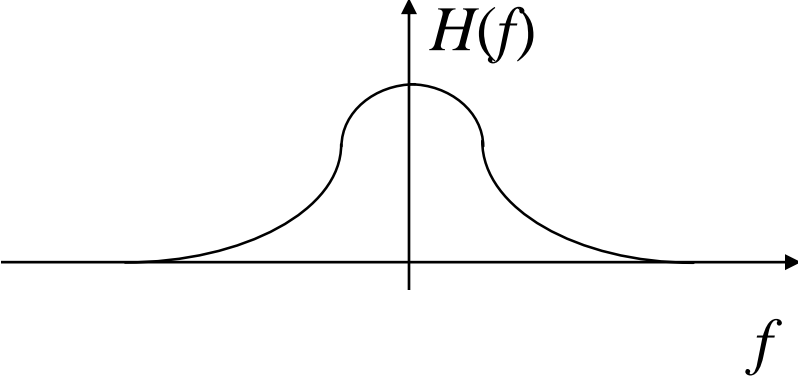
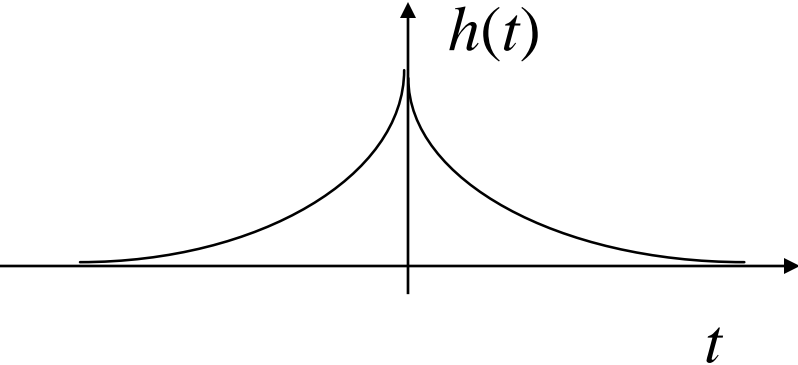
- Ya no podemos movernos libremente entre el dominio frecuencial y temporal sin perder información:
 - Debido a los errores producidos en los cálculos por la precisión, o a que hay información que no podemos medir o calcular.

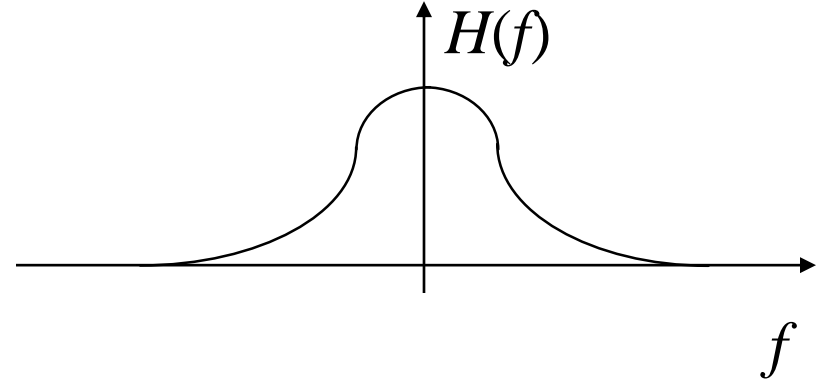
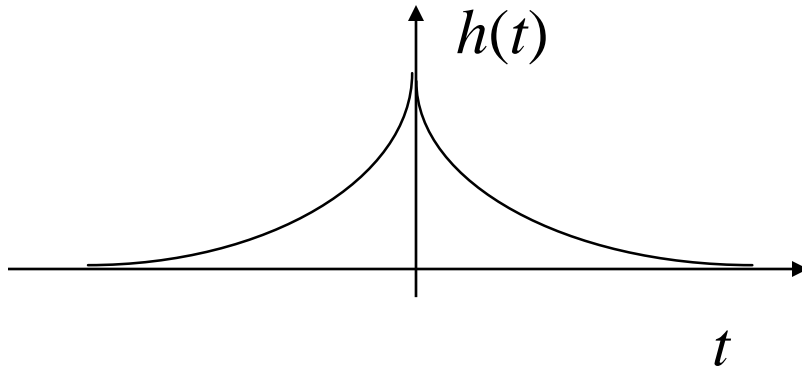
Algunas observaciones...

- Como resumen:
 - Debemos tener bien claros todos estos efectos y tratar de minimizarlos al máximo, en función de los recursos disponibles.

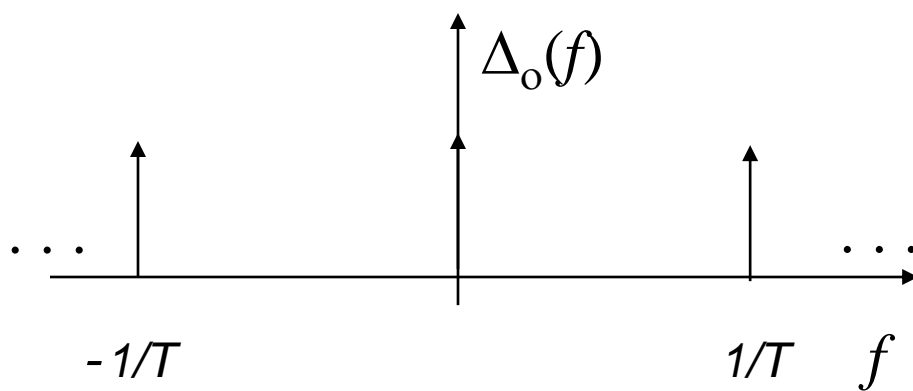
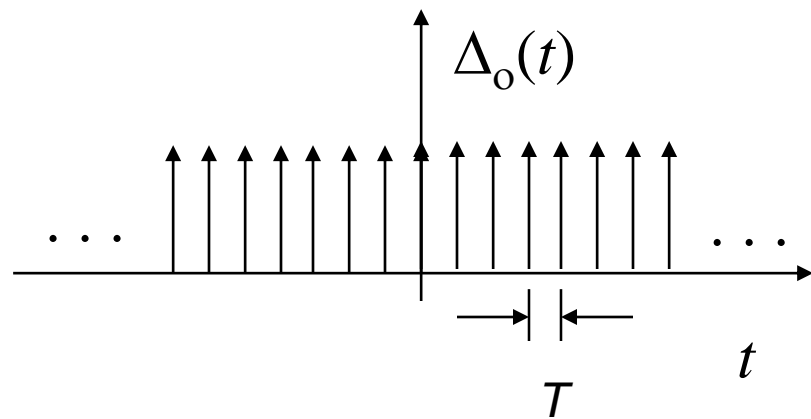
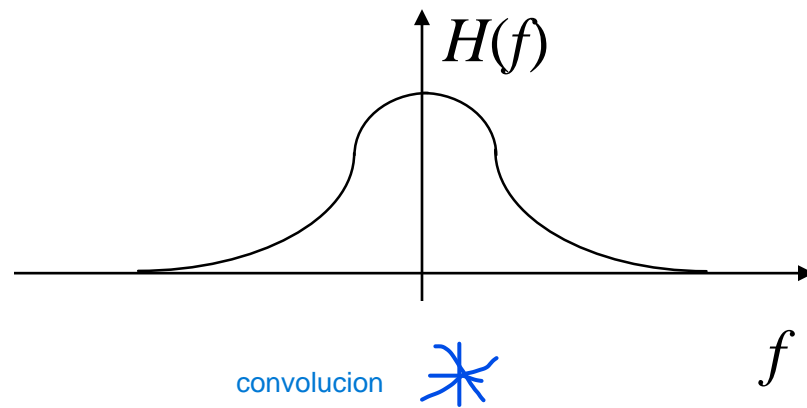
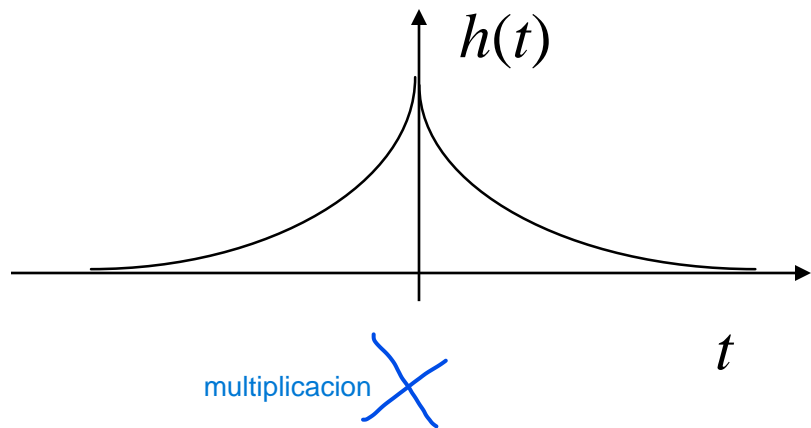
Transformada Discreta de Fourier DFT

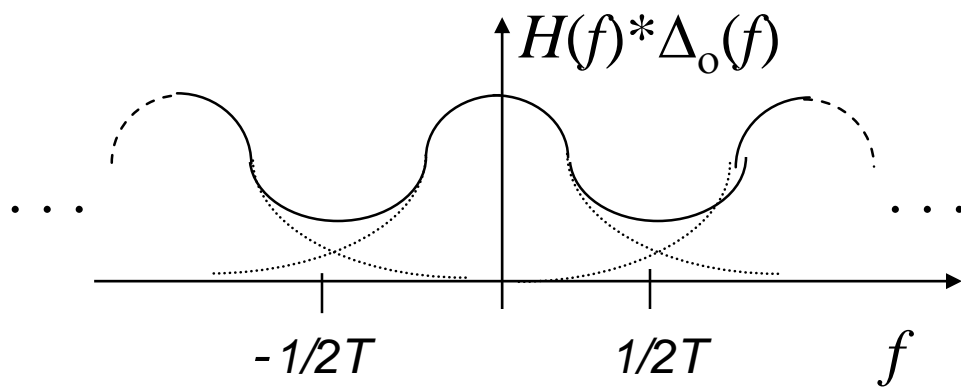
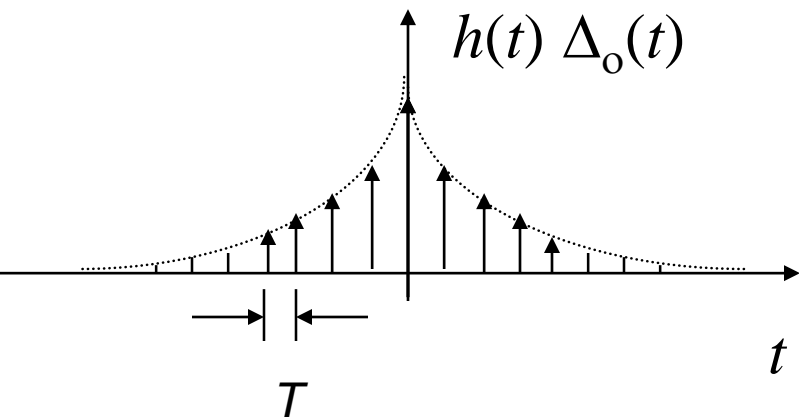
Desarrollo Intuitivo

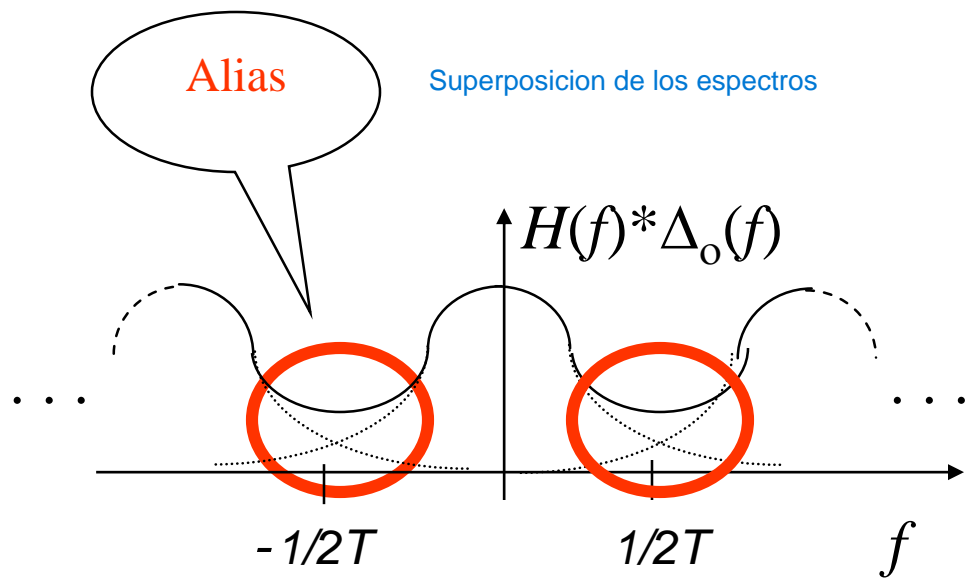
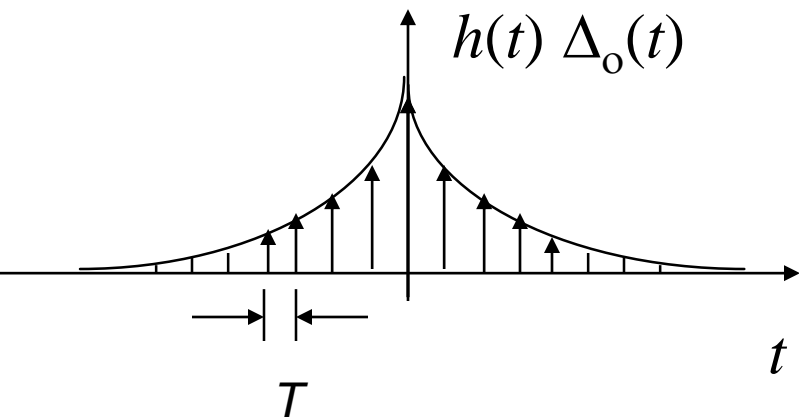


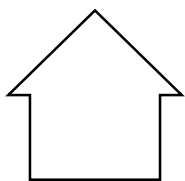
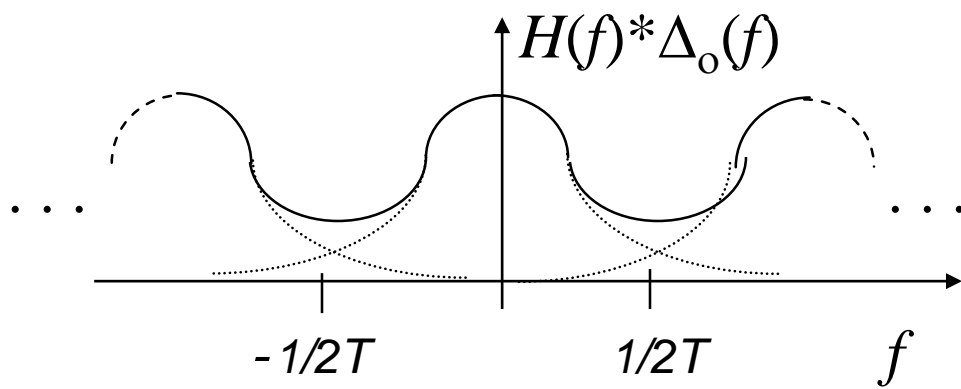
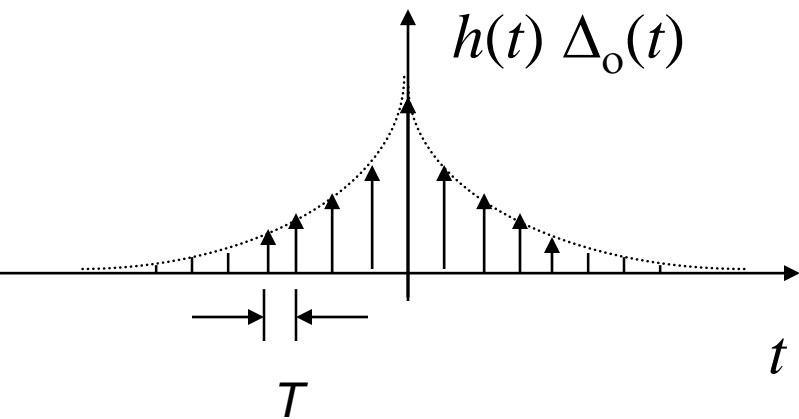


- Buscamos modificar el dominio de la variable tiempo y el de la variable frecuencia para obtener secuencias en ambos dominios aptas de tratarse mediante procesamiento digital.

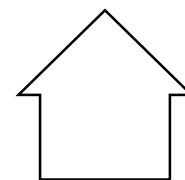
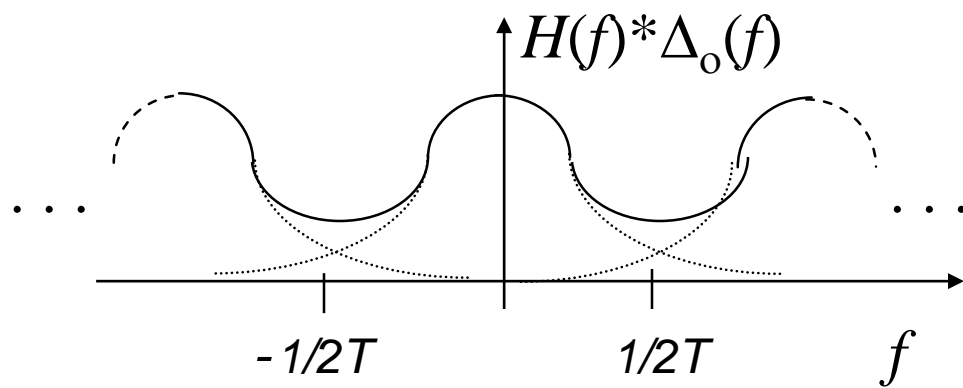
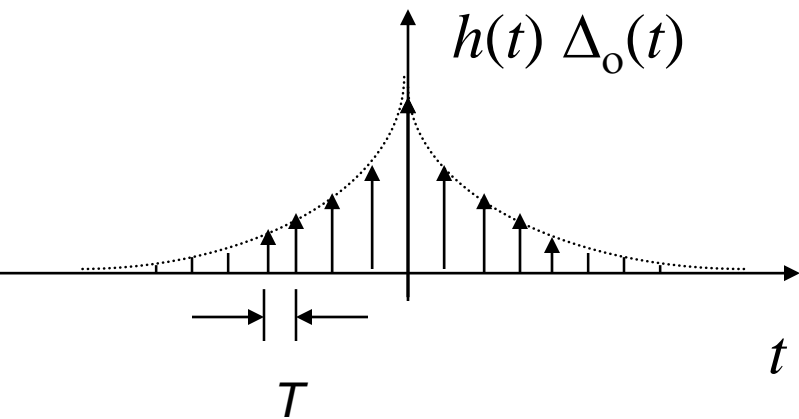




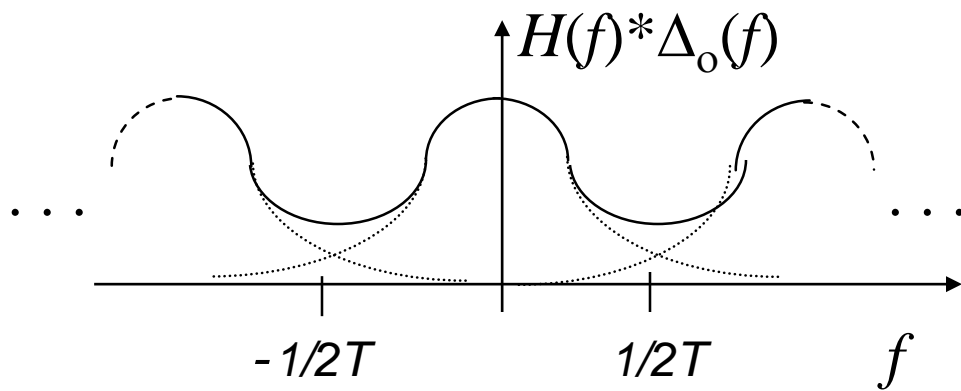
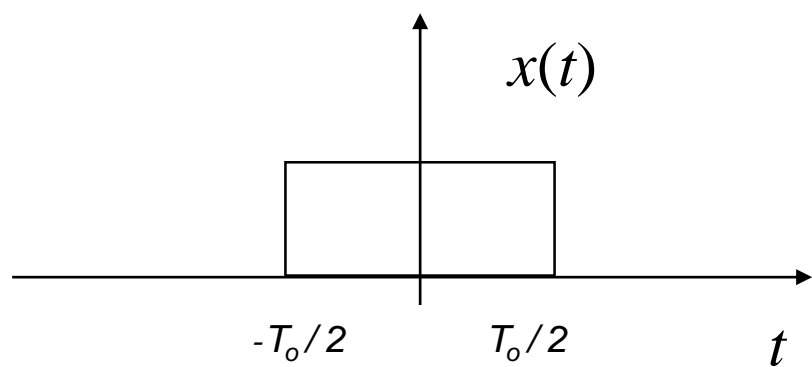
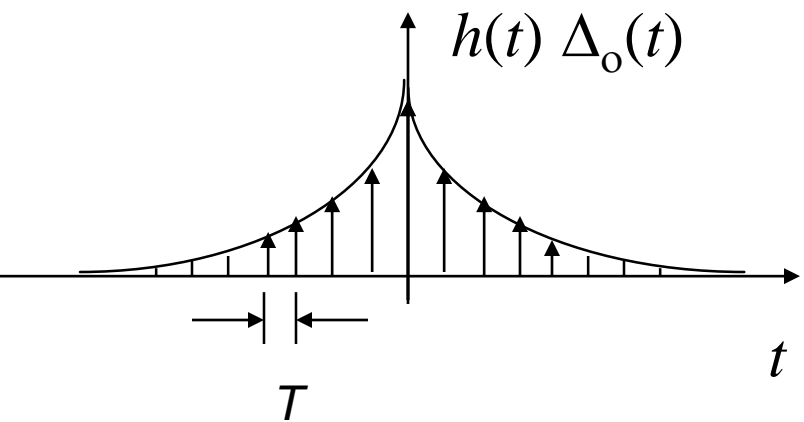


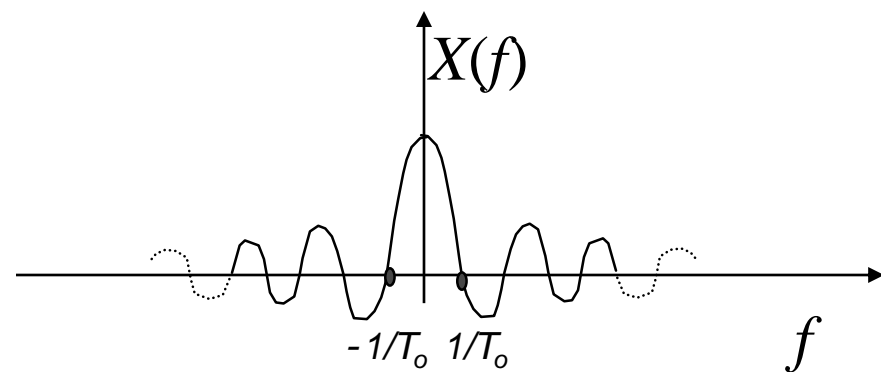
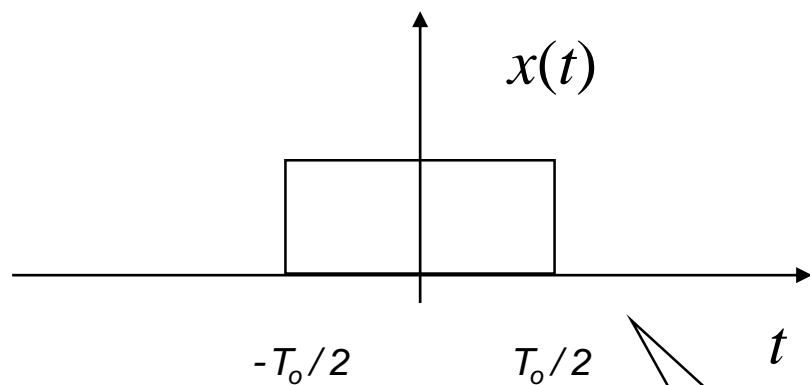
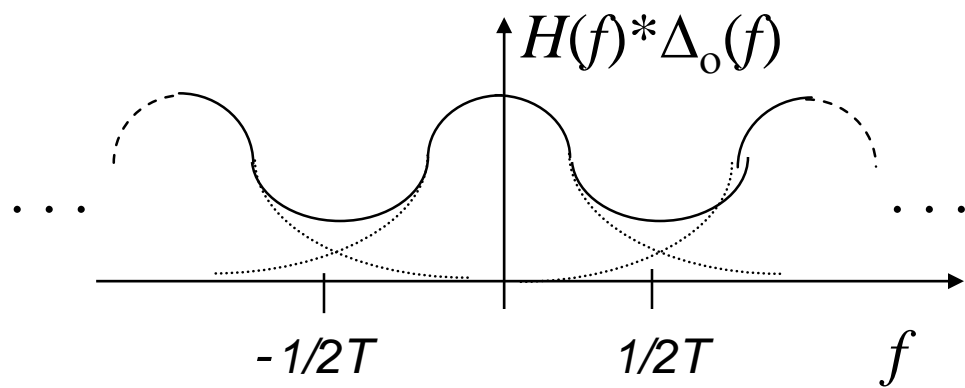
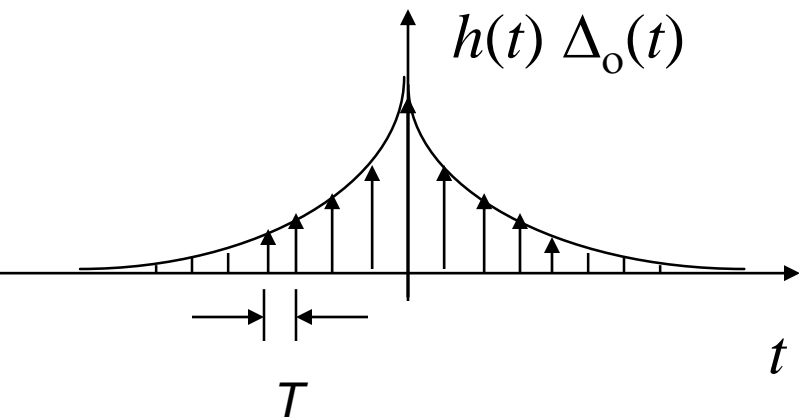


Infinitas muestras



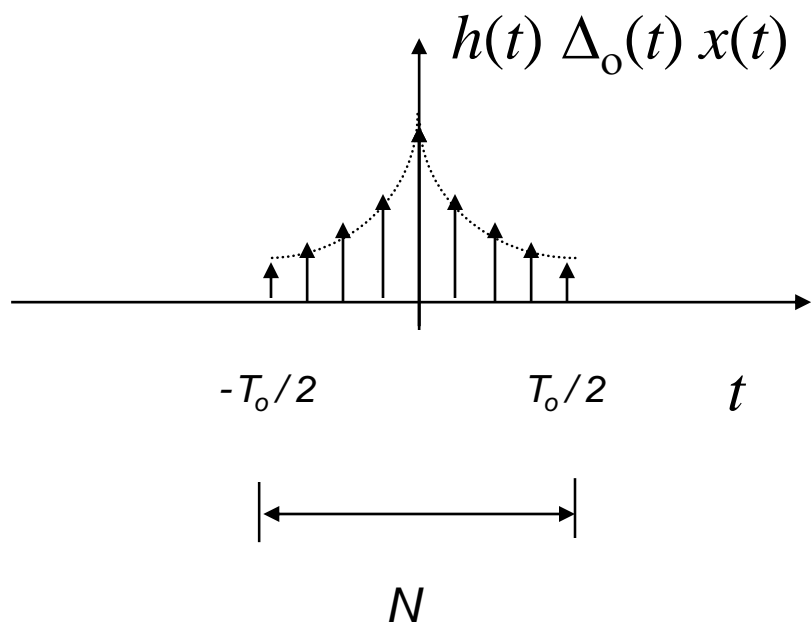
espectro continuo

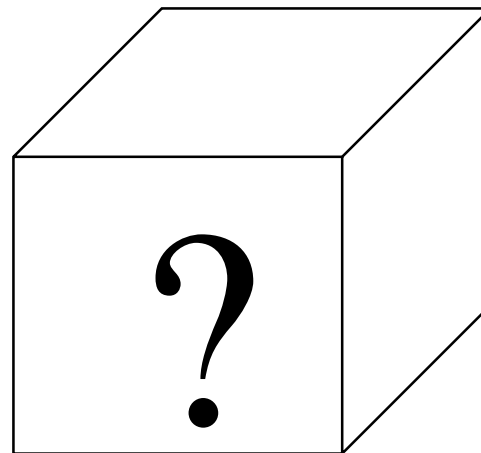
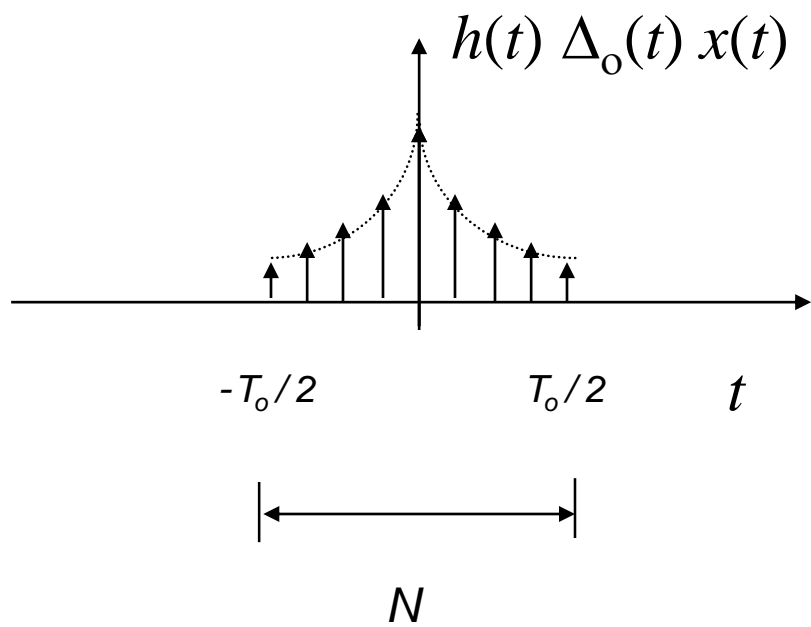


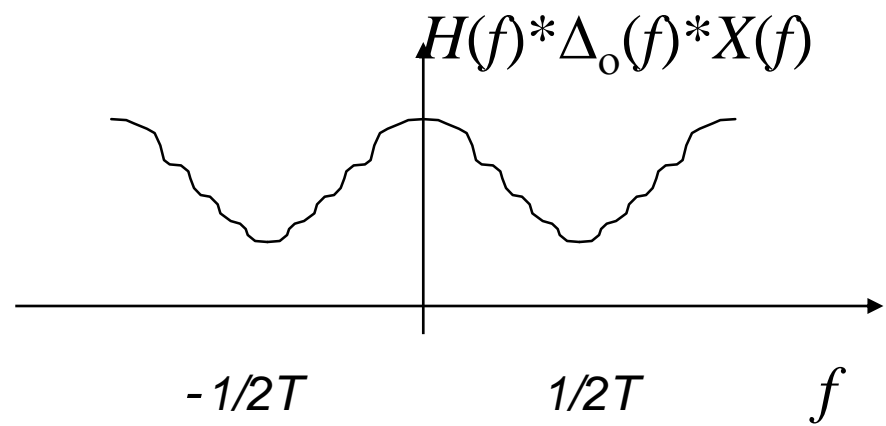
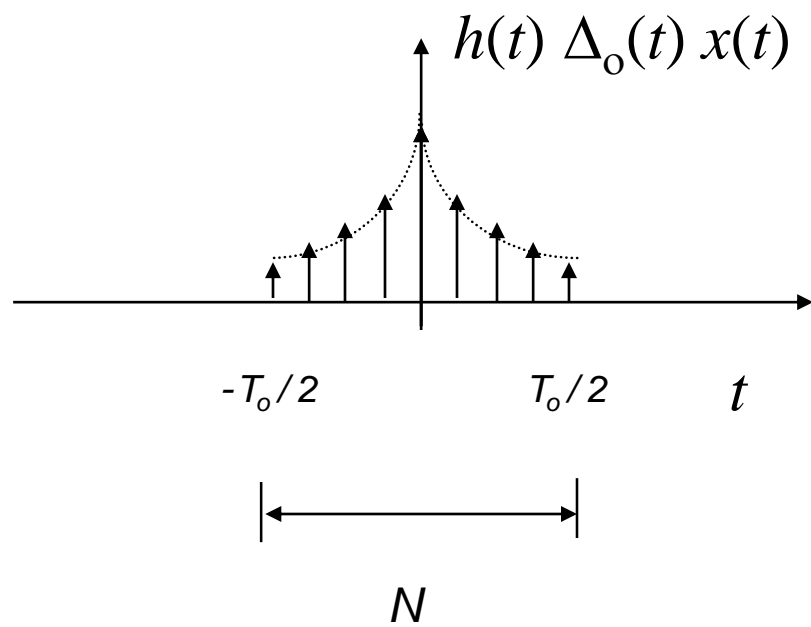


Multiplicamos por la ventana
para obtener N muestras

Ventaneo



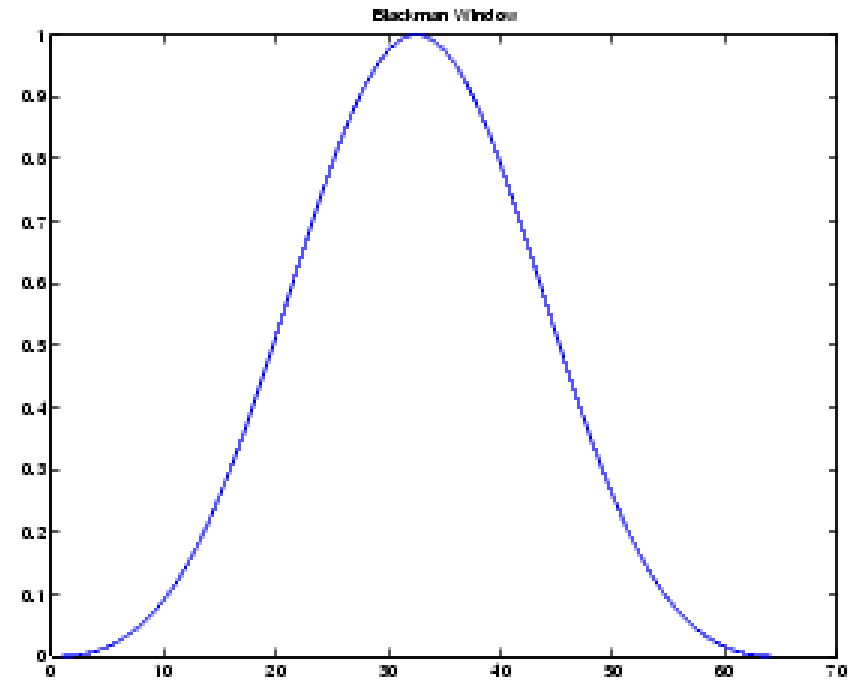
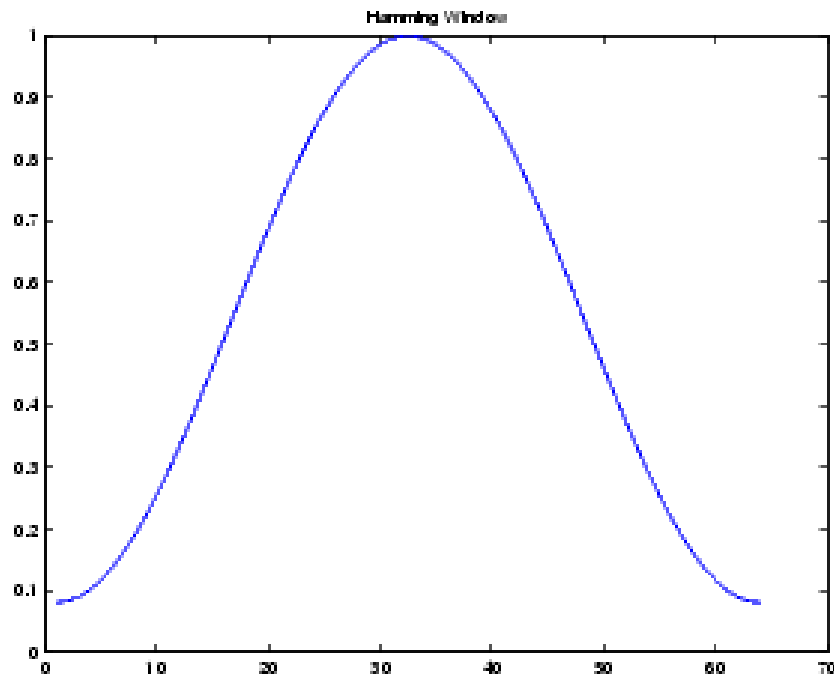


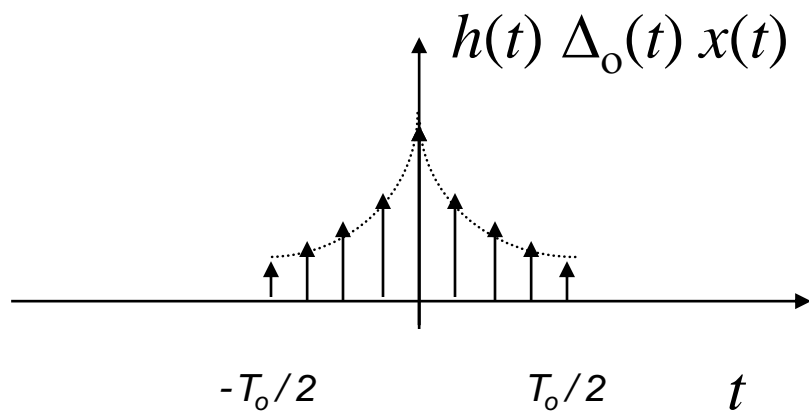


Ventanas: Hamming y Blackman

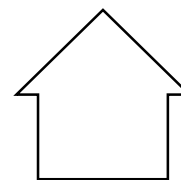
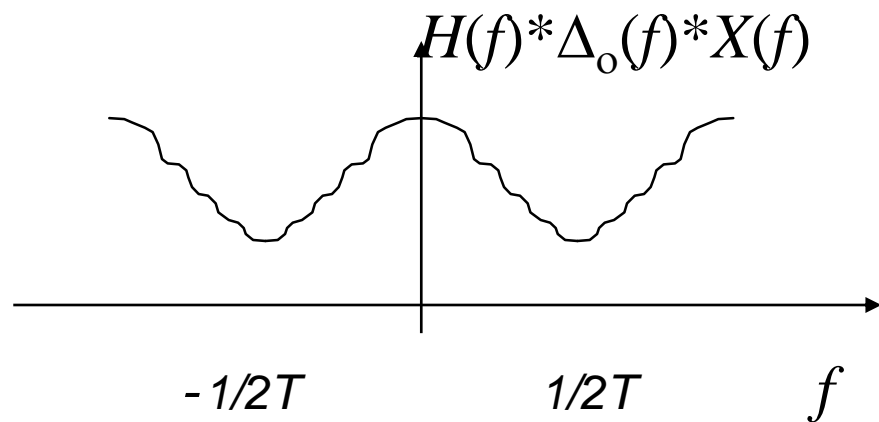
$$w[k+1] = 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{k}{n-1}\right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$w[k+1] = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{k}{n-1}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{k}{n-1}\right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

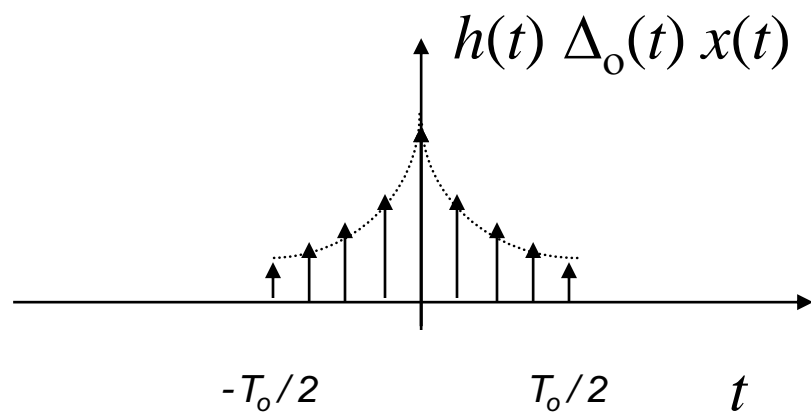




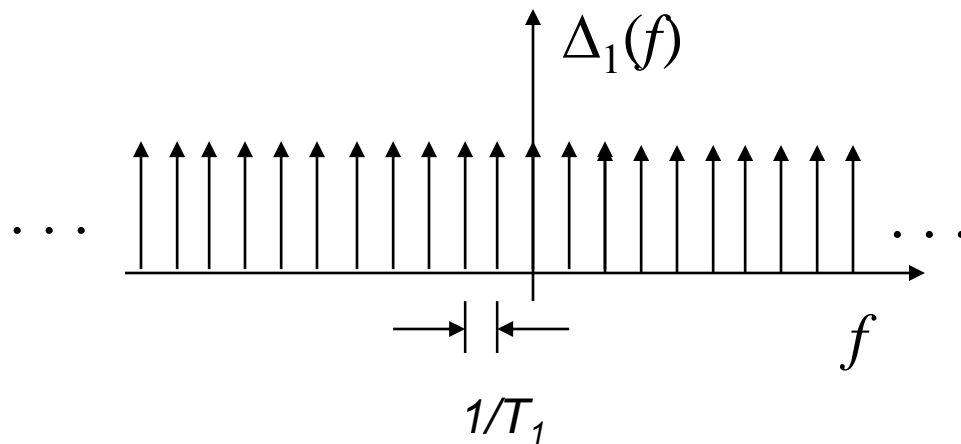
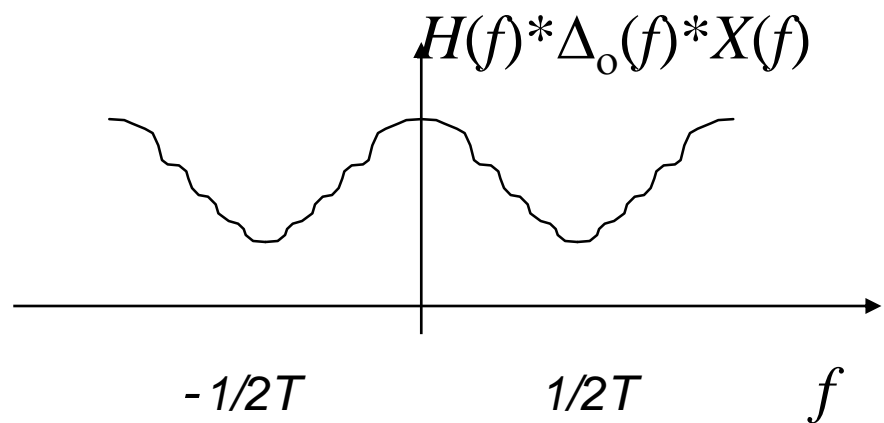
N

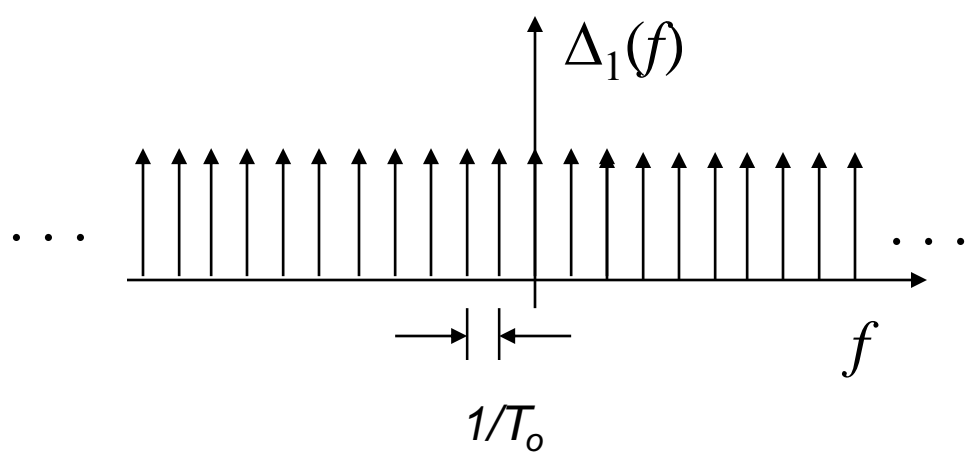
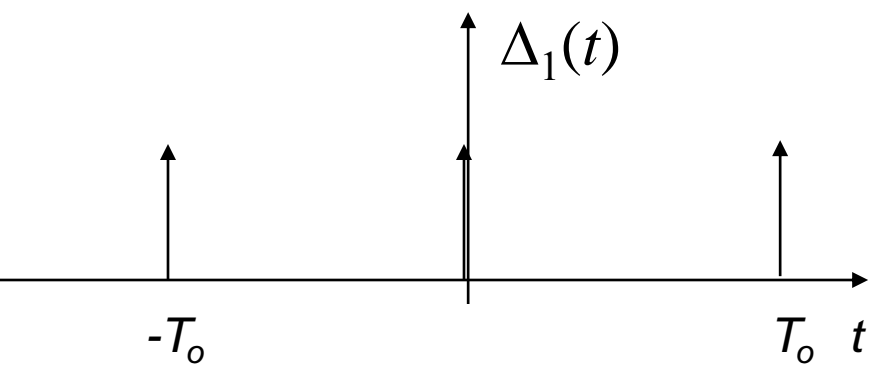
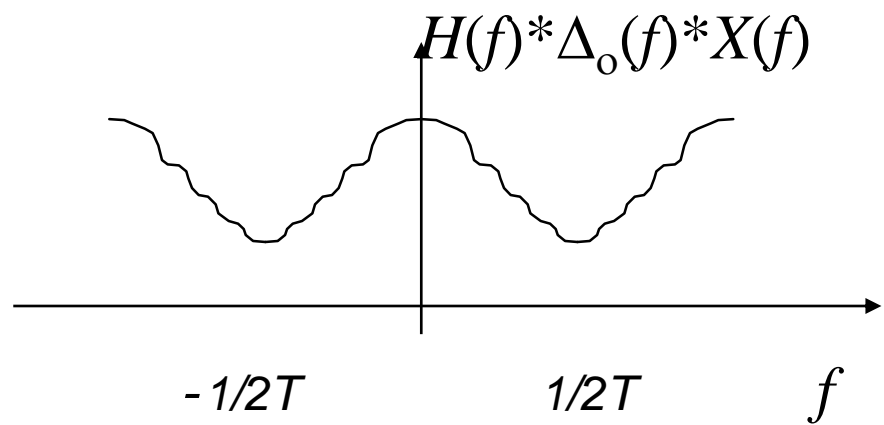
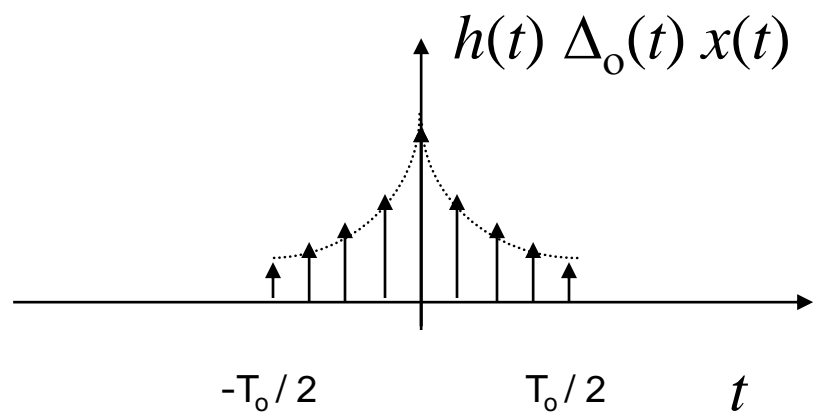


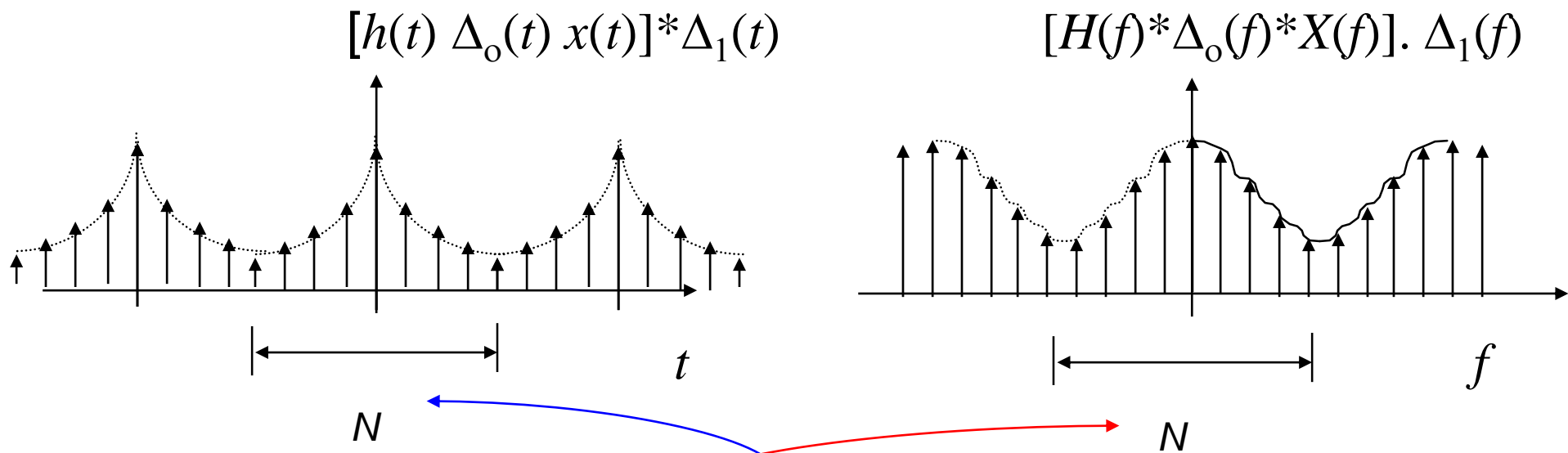
sigue continuo



$\Delta_1(t)$







$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}$$

$$n, k = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

Transformada Rápida de Fourier FFT

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}$$

Si consideramos que $W = e^{-j2\pi/N}$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk}$$

$n=0, 1, 2, 3, \dots, N-1$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}$$

Esta expresión define un sistema de N ecuaciones.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{nk}$$

Si $N = 4$

$$X(0) = x(0)W^0 + x(1)W^0 + x(2)W^0 + x(3)W^0$$

$$X(1) = x(0)W^0 + x(1)W^1 + x(2)W^2 + x(3)W^3$$

$$X(2) = x(0)W^0 + x(1)W^2 + x(2)W^4 + x(3)W^6$$

$$X(3) = x(0)W^0 + x(1)W^3 + x(2)W^6 + x(3)W^9$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)W^{nk}$$

Que es lo mismo que

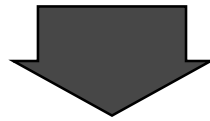
$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x(n)W^{nk}$$

Que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Como W es complejo y $x(n)$ puede serlo, son necesarias **N^2 multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ sumas complejas** para realizar este cálculo.



$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Como $W^{nk} = W^{(nk \bmod N)}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Como $W^{nk} = W^{(nk \bmod N)}$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Es posible factorizar la matriz \mathbf{W} de modo que

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Observación: Se intercambiaron los renglones 2 y 3 de X

Podemos tomar un vector intermediario

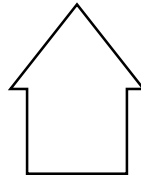
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

Podemos tomar un vector intermediario

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

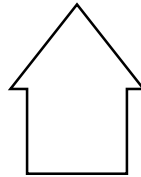
donde $x_1(0)$ puede calcularse como $x_1(0) = x(0) + W^0 x(2)$

$$x_1(0) = x(0) + W^0 x(2)$$



Una multiplicación y una suma complejas

$$x_1(2) = x(0) + W^2 x(2)$$



Una multiplicación y una suma complejas

$$x_1(2) = x(0) + W^2 x(2)$$

donde además se verifica que $W^0 = -W^2$
por lo que

$$x_1(2) = x(0) - W^0 x(2)$$

pero el segundo término **ya fue calculado** para hallar $x_1(0)$



$$x_1(2) = x(0) - W^0 x(2)$$

por lo cual estamos ahorrando una multiplicación compleja

Análogamente $x_1(3)$ también puede calcularse con sólo **una** suma y **ninguna** multiplicación adicional.

Por lo que el vector intermediario x_1 puede calcularse con cuatro sumas y dos multiplicaciones

Volviendo al cálculo inicial tenemos

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix}$$

Donde, por un razonamiento análogo, puede realizarse la operación con cuatro sumas y 2 multiplicaciones

- En total hemos empleado 4 multiplicaciones y 8 sumas complejas
- El cálculo realizado en la forma primitiva hubiese requerido 16 multiplicaciones y 12 sumas complejas

- Para $N = 2^\gamma$ el algoritmo de la FFT es simplemente un procedimiento para factorizar una matriz $N \times N$ en γ matrices que minimizan el número de productos y sumas complejas

FFT

- $N\gamma/2$ multiplicaciones complejas
- $N\gamma$ sumas complejas

DFT

- N^2 multiplicaciones complejas
- $N(N-1)$ sumas complejas

FFT

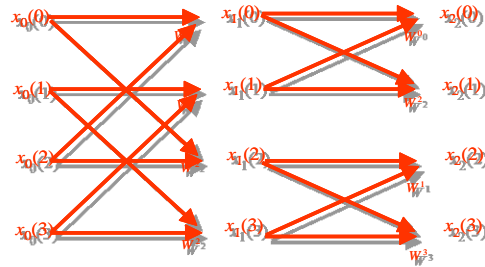
- $N\gamma/2$ multiplicaciones complejas
- $N\gamma$ sumas complejas

DFT

- N^2 multiplicaciones complejas
- $N(N-1)$ sumas complejas

Si $N=1024$ y asumimos que el tiempo de cómputo es proporcional al número de multiplicaciones, la relación de velocidades es de

200 a 1

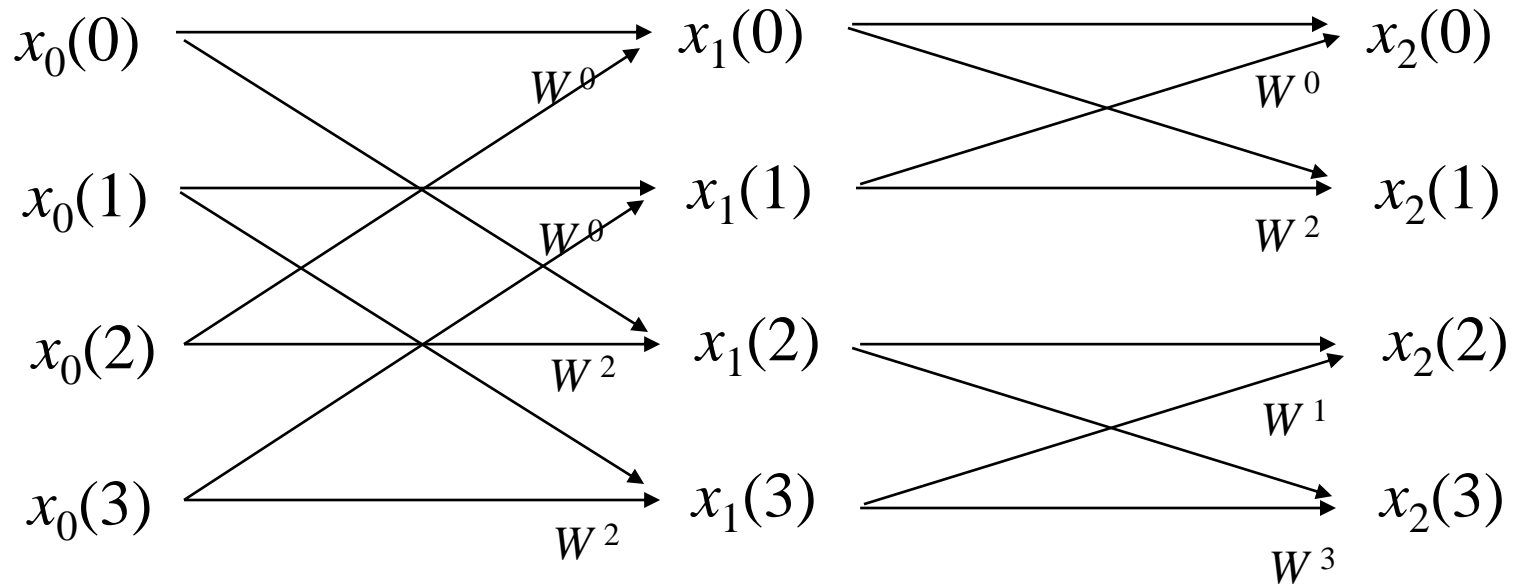


Diagramas “mariposa”

Revisando la factorización ...

Gráfico de flujo de la FFT

$$N = 4$$



Diagramas “mariposa”

Gráfico de flujo de la FFT

$$N = 4$$

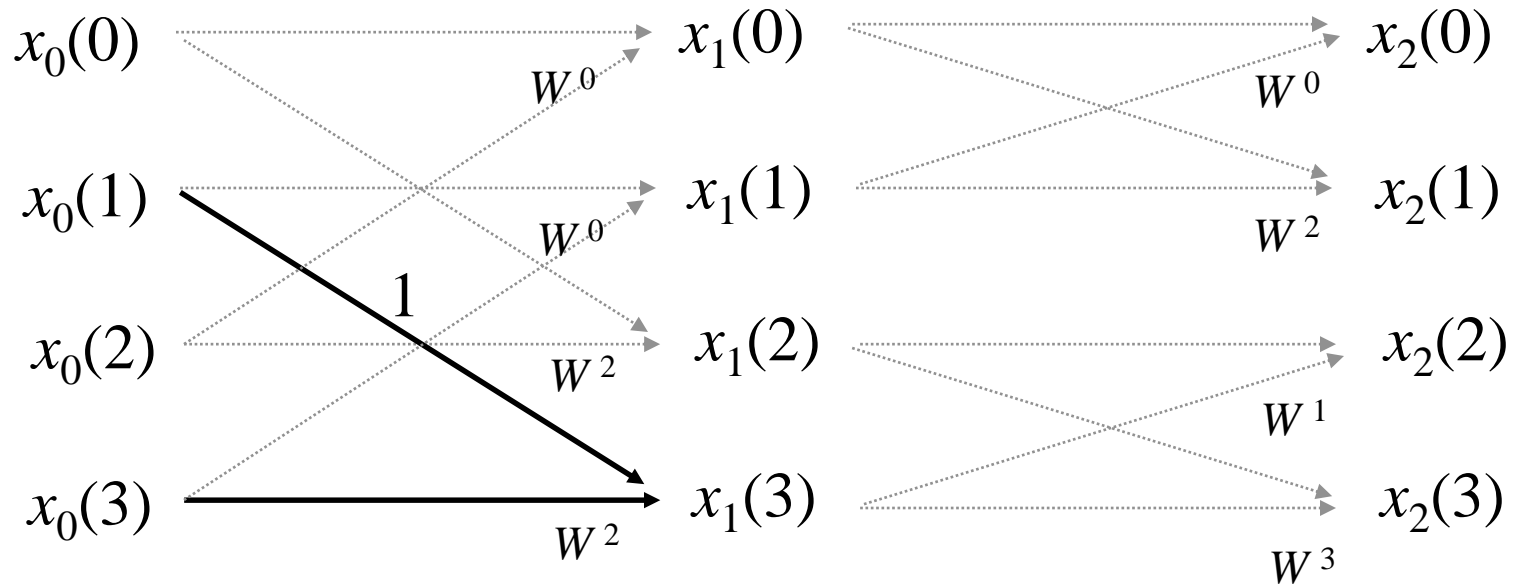


Gráfico de flujo de la FFT

$$N = 4$$

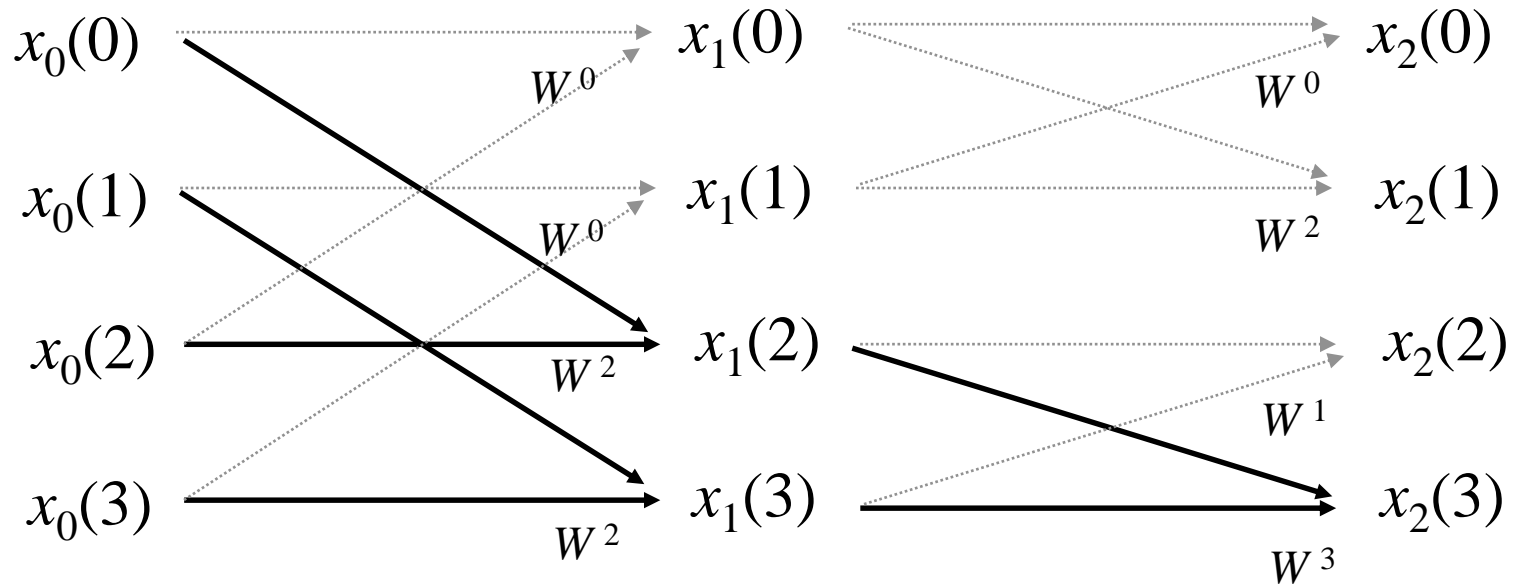
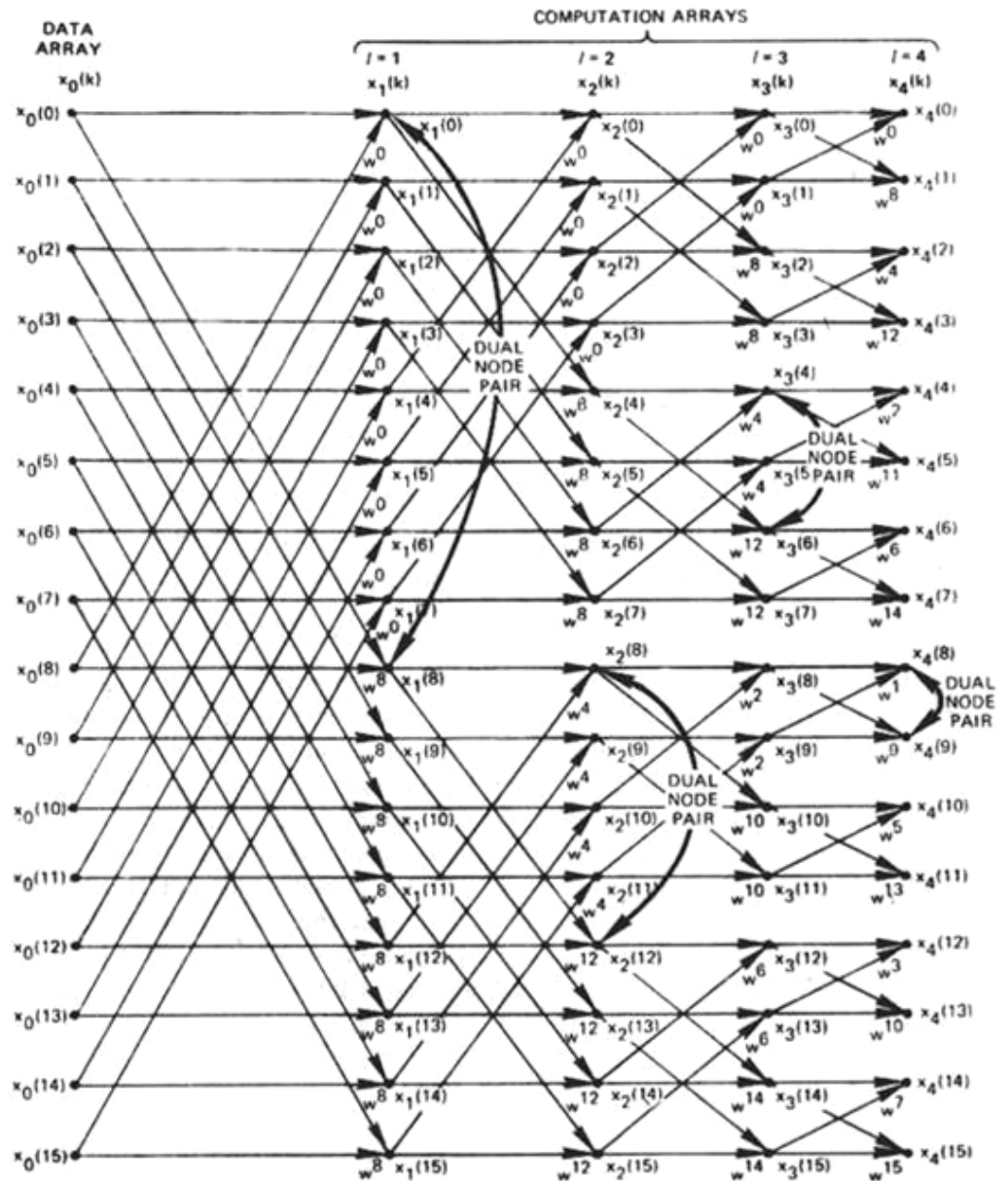
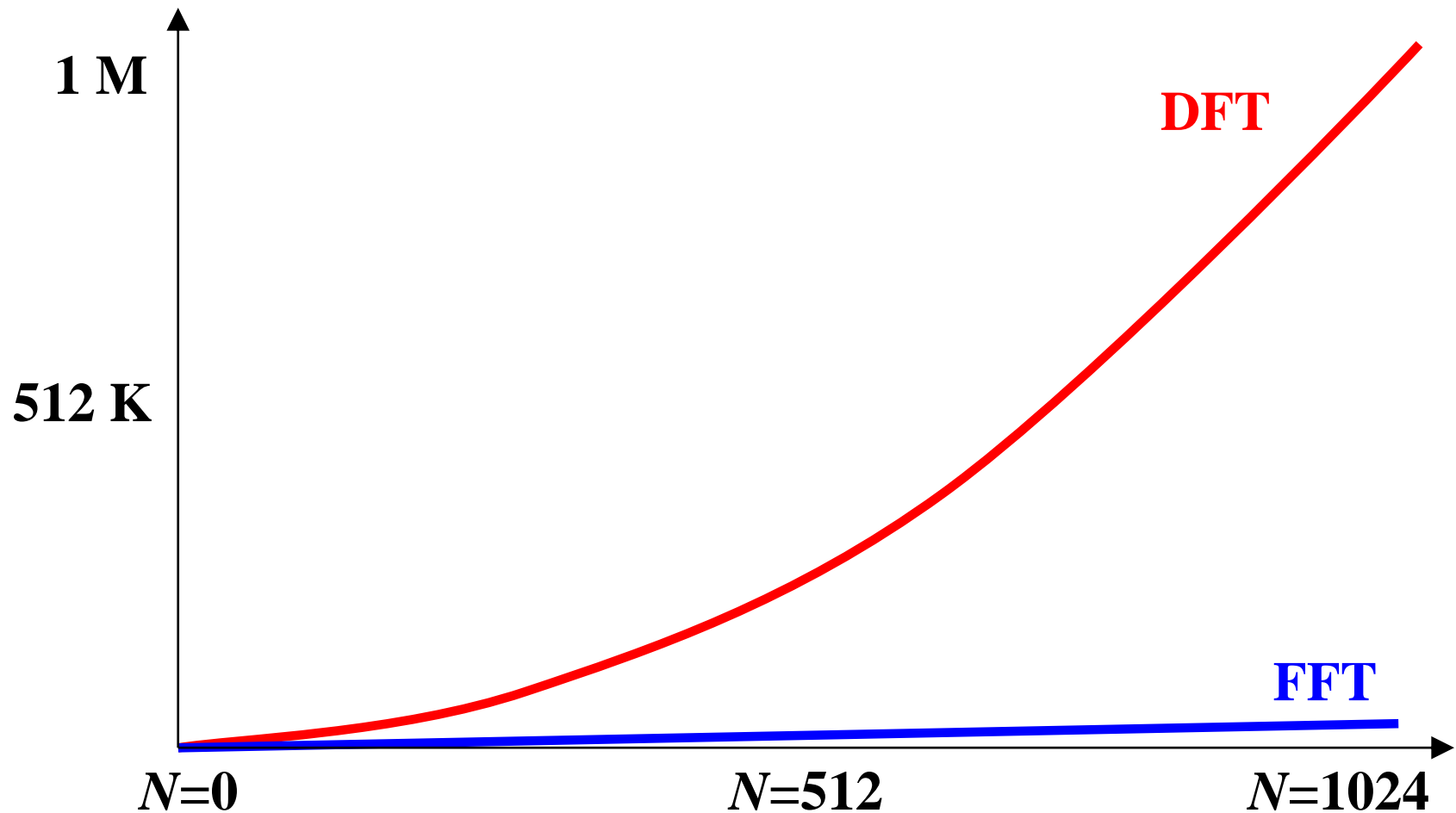


Gráfico de flujo de la FFT

$N = 16$



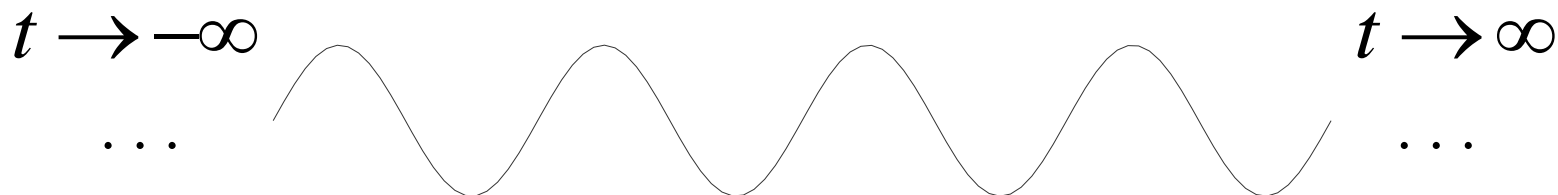
Multiplicaciones FFT vs. DFT



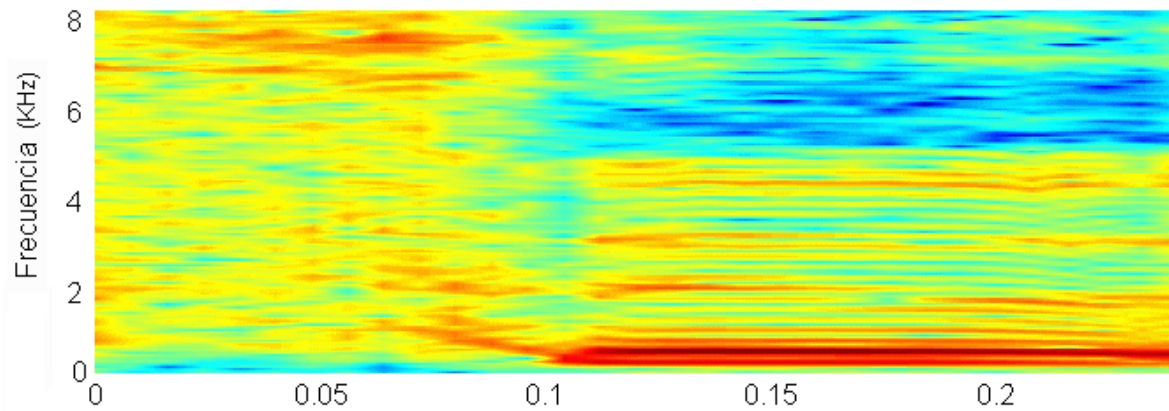
Introducción al Análisis Tiempo- Frecuencia

¿Problemas con señales no estacionarias o transitorias...?

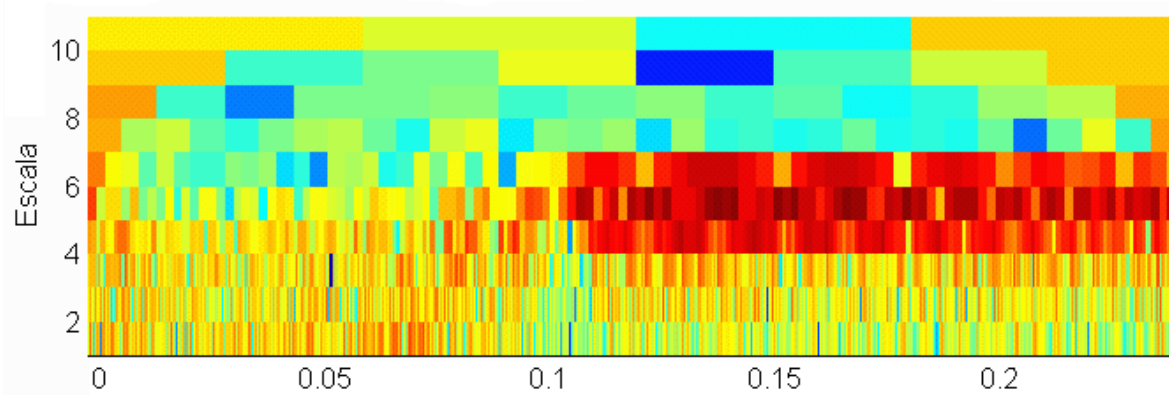
- La familia de Fourier está “diseñada” para analizar señales cuyo “comportamiento” o propiedades no varíen en el tiempo...



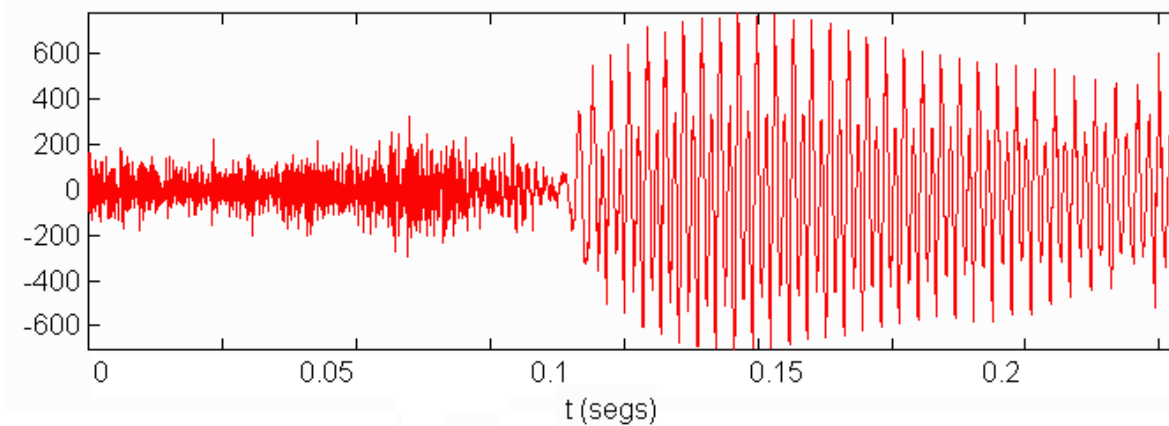
- Se requiere otra “base” que permita realizar este análisis...



Espectrograma



Escalograma

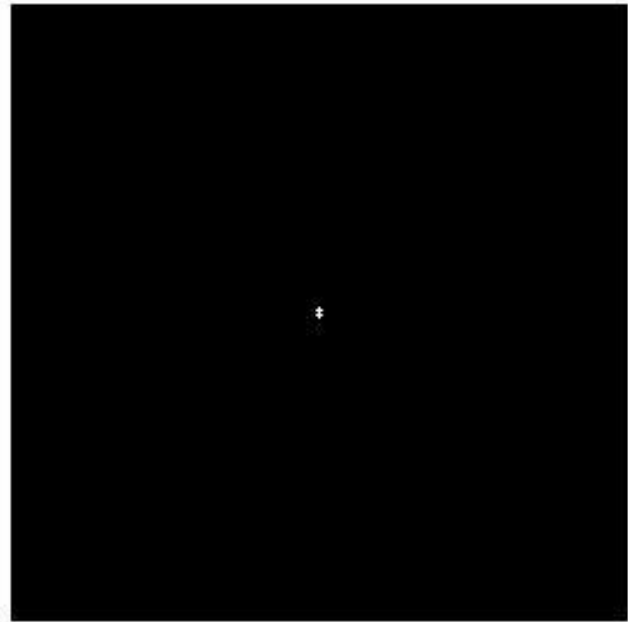


Sonograma

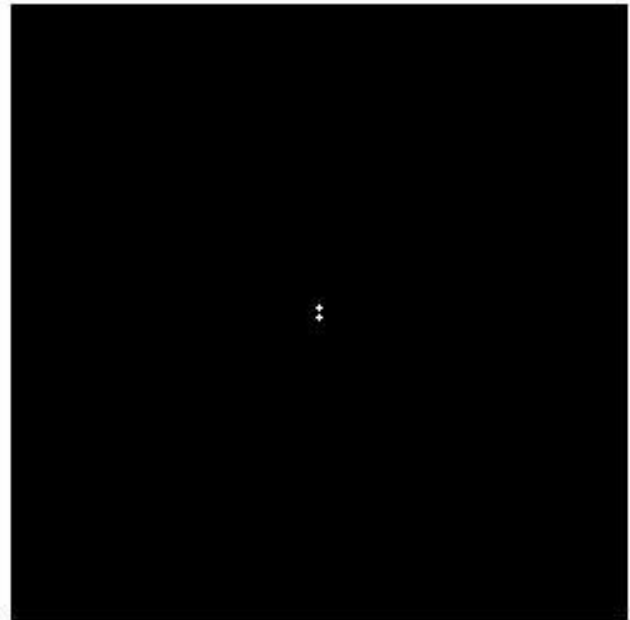
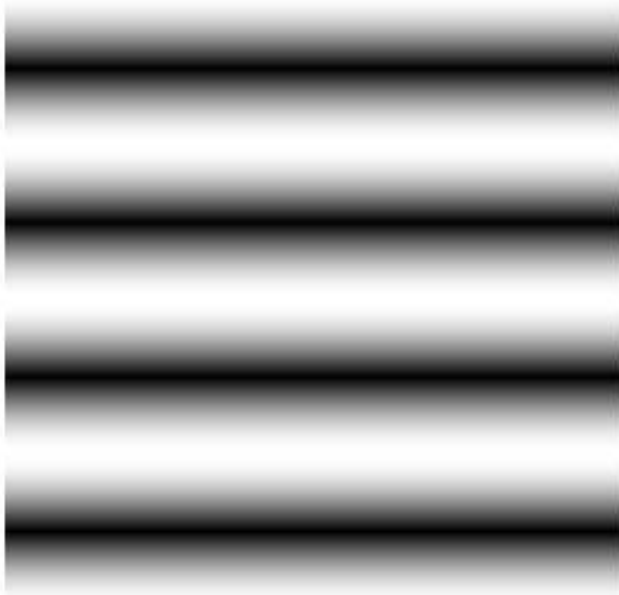
Análisis de Fourier en Imágenes

Transformada de Fourier en 2D

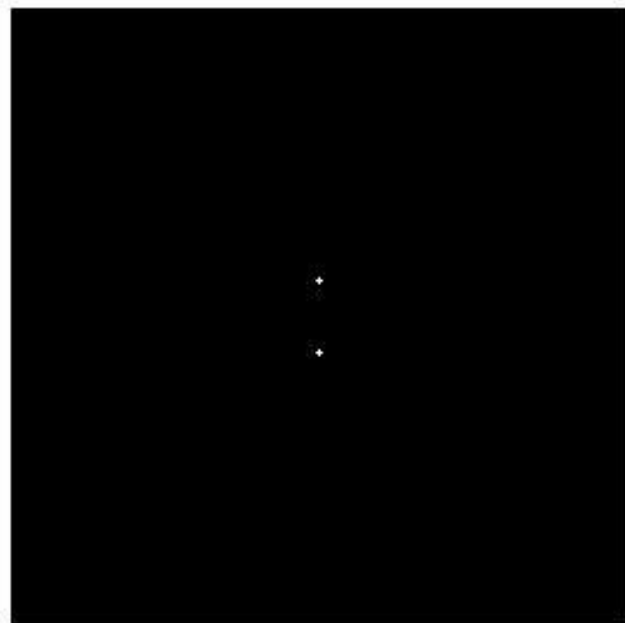
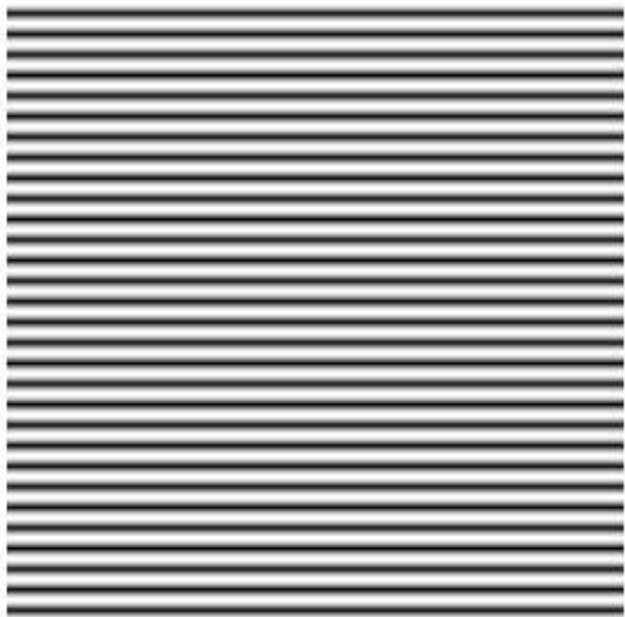
$$\sin(y) = \sin(1y)$$



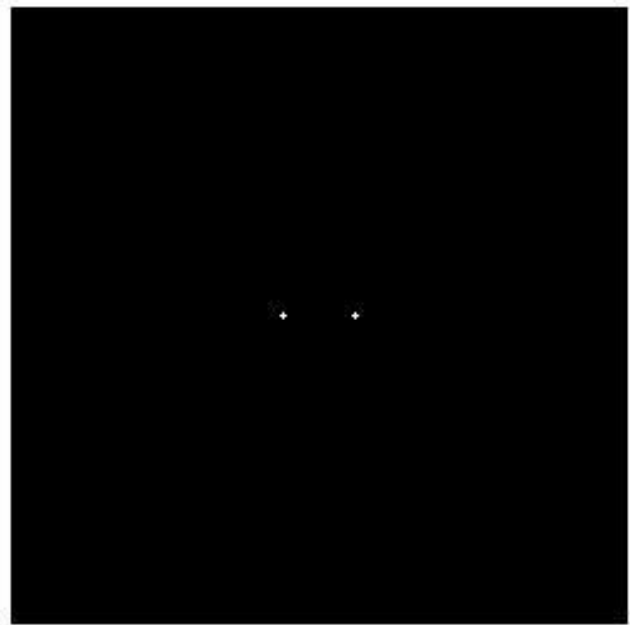
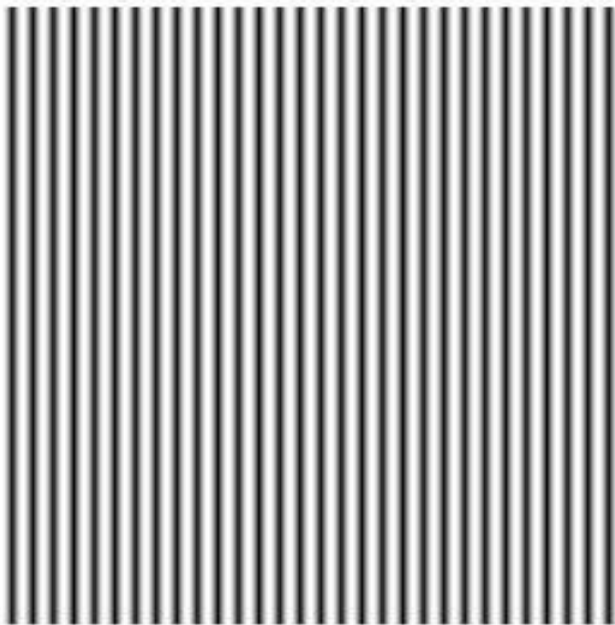
$\sin(2y)$



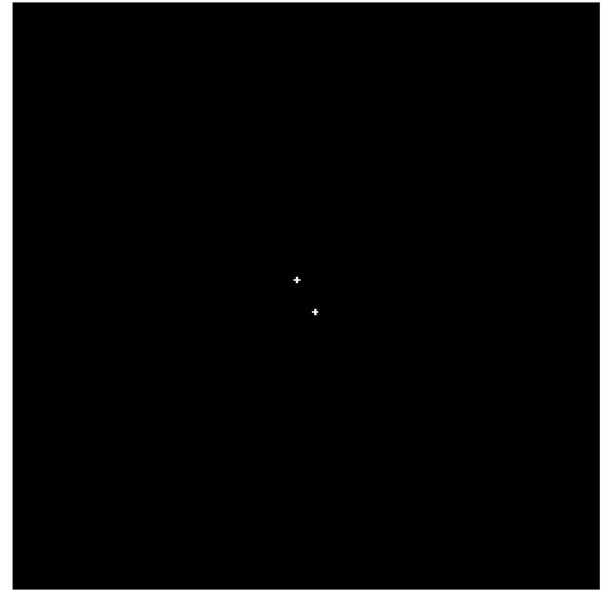
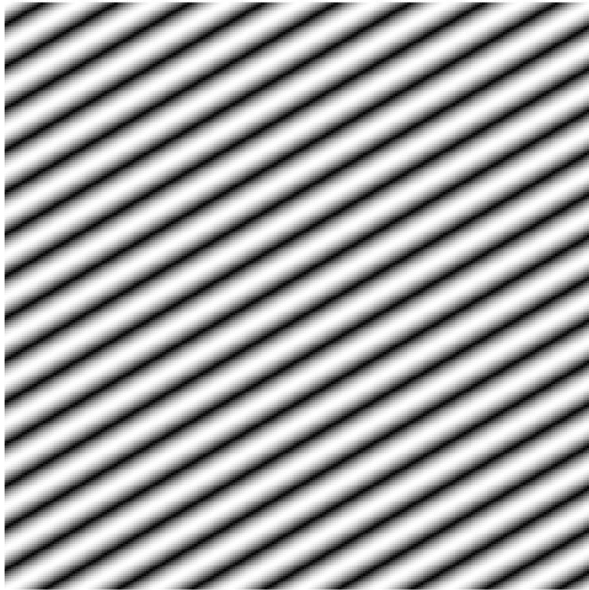
$\sin(15y)$



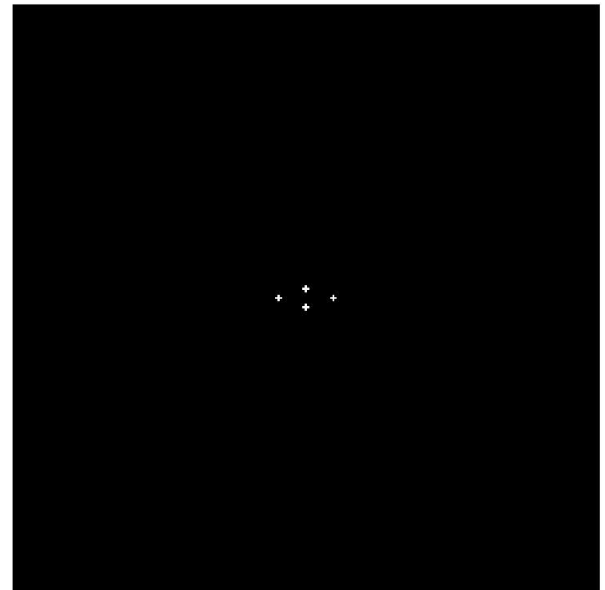
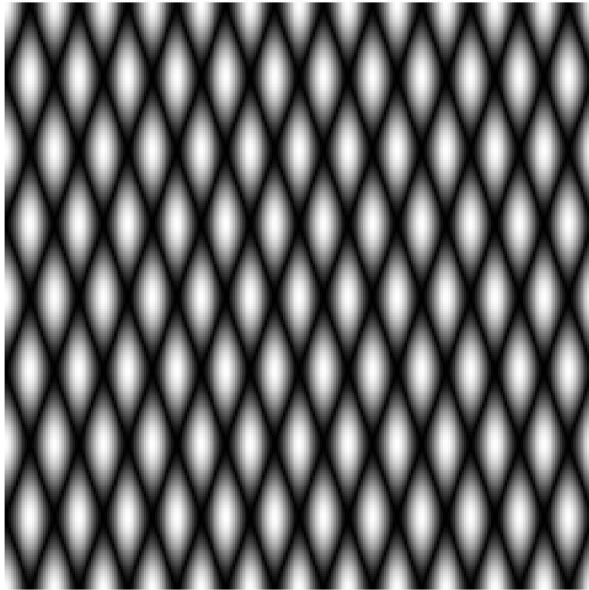
$$\text{sen}(15x)$$



$$\text{sen}(3.5x + 7y)$$

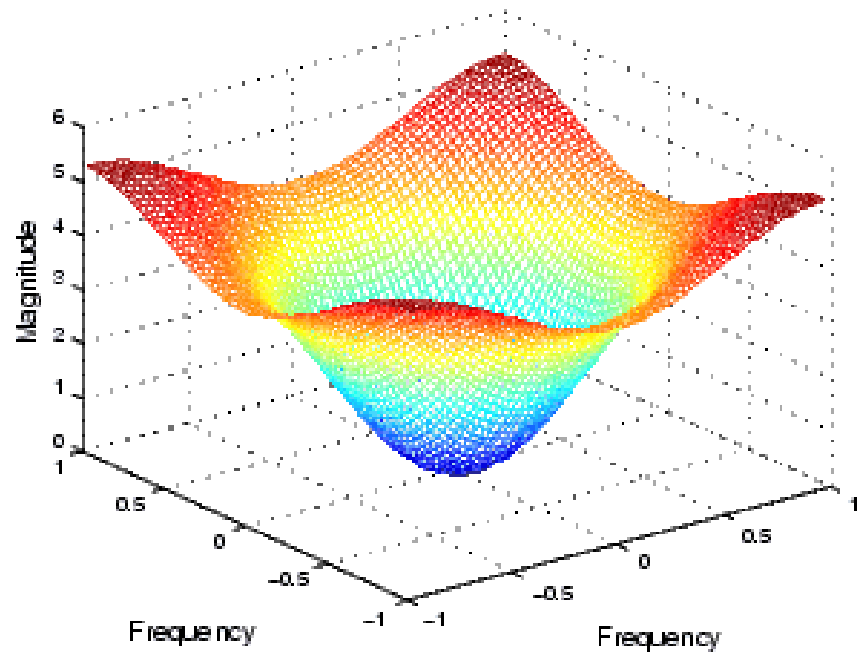
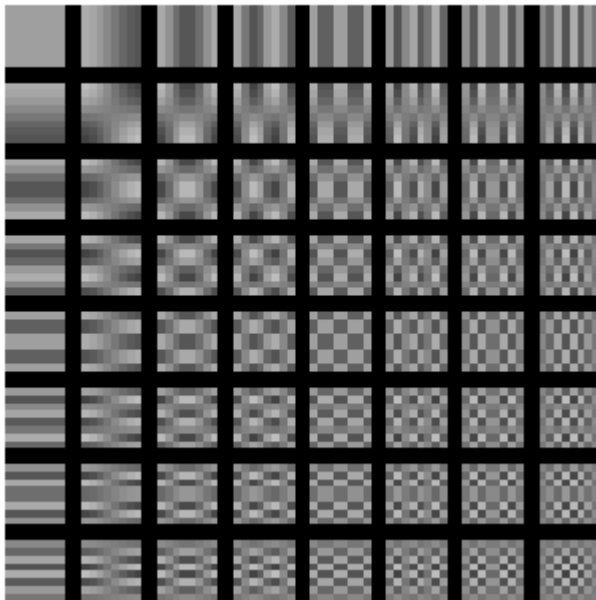


$$\sin(12x) + \sin(4y)$$

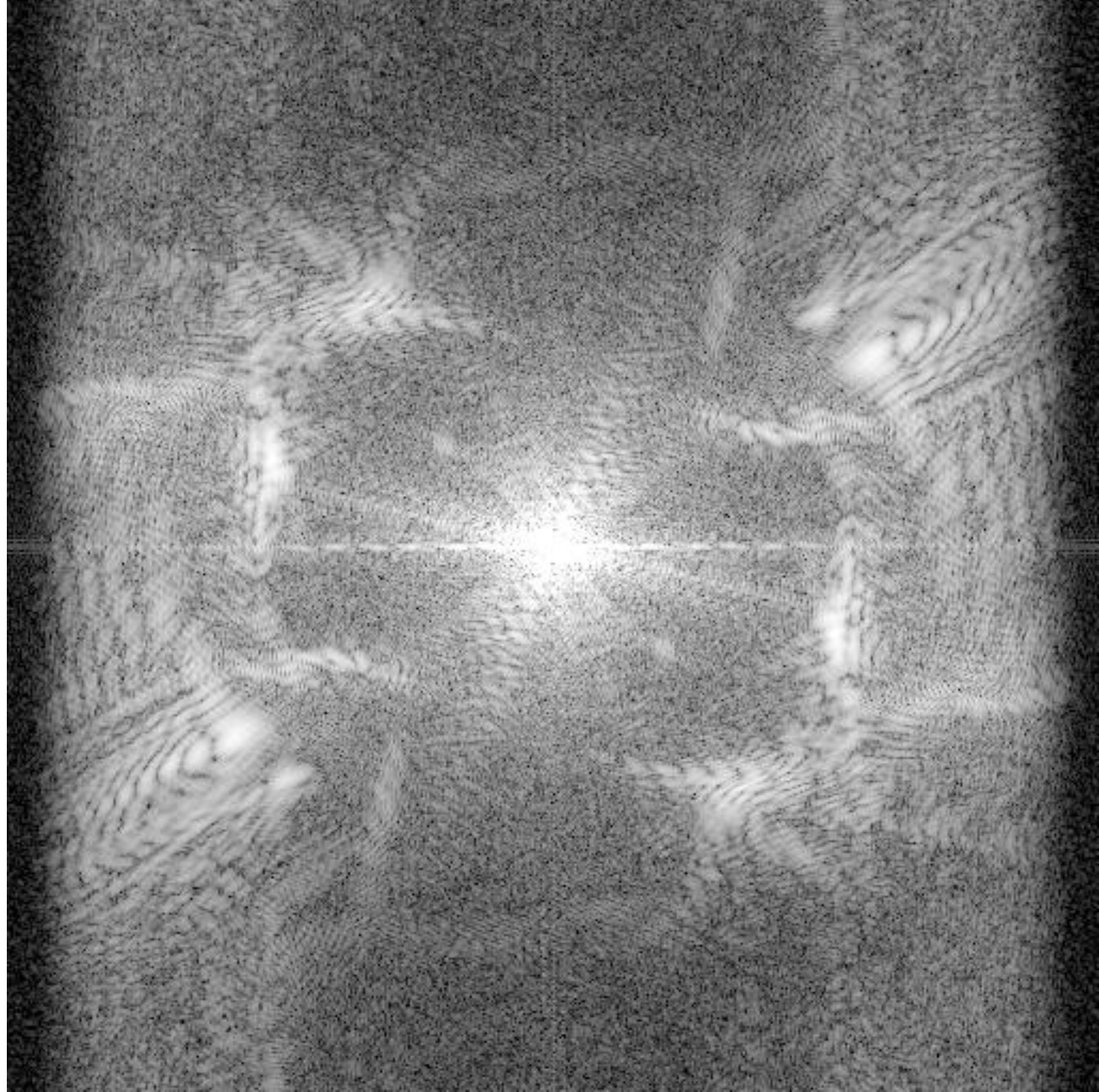


Fourier Bidimensional

- Ahora la base es:





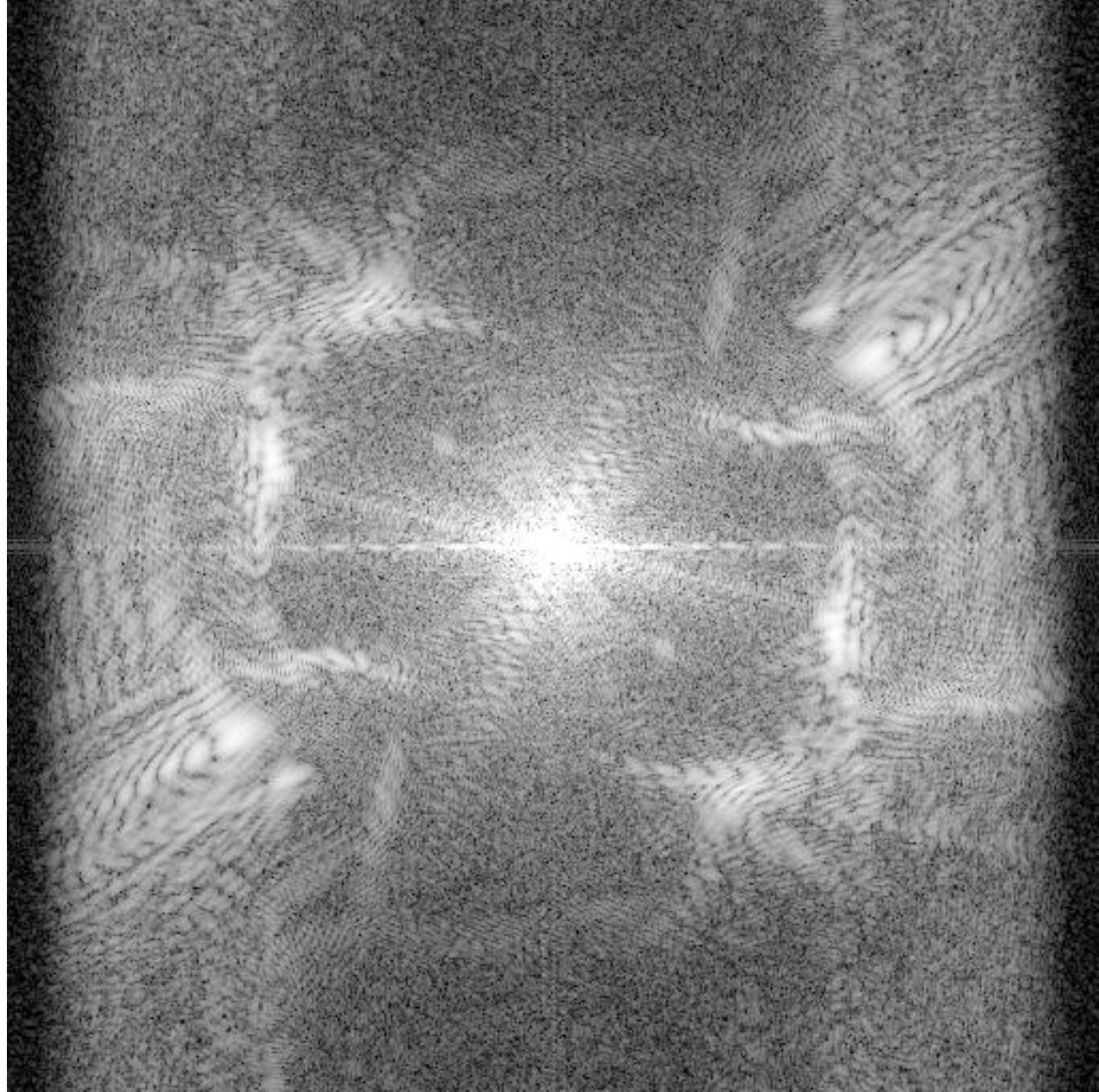


Ejemplo: Compresión 2D

Para almacenar o transmitir.

Submuestreo,
en el espacio de la imagen.

Filtrado,
en el espacio de frecuencias.











Bibliografía recomendada

- Brigham: 2.1 a 2.3, 5.1, 5.3, 5.4, 6.1 a 6.3, 6.5
- Oppenheim, A. V. and R. W. Schafer, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice-Hall, 1989, p. 611-619.
- Cooley, J. W. and J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*, Vol. 19, April 1965, pp. 297-301.
- Duhamel, P. and M. Vetterli, "Fast Fourier Transforms: A Tutorial Review and a State of the Art," *Signal Processing*, Vol. 19, April 1990, pp. 259-299.