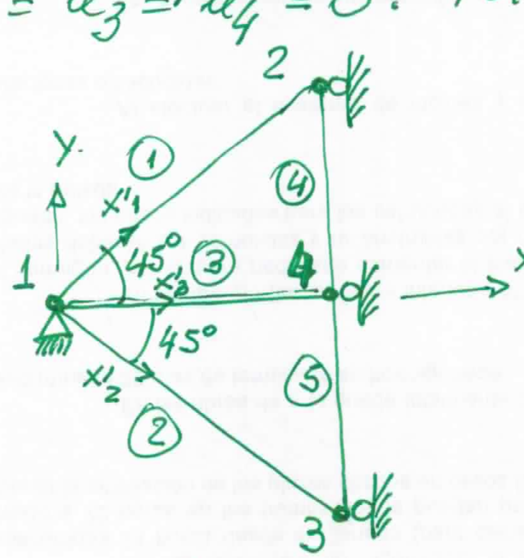
SOLUCION EJERCICIO DE BARRAS

EX. PARCIAL 24/11/23

Deacuerdo con las características del problema planteado y considerando que reúne las condiciones de simetría tanto en geometría, cargas y restricciones. usaremos un plano de simetría. Dicho plano es vertical. perpendicular a la armadura plana que pasa por los nodos 2, 3 y 4. Es un plano reflectante donde la geometría, la carga, el material y las condiciones de contorno idénticas ocurren en los ubicaciones correspondientes en lados opuestos de este plano

Ej. para la carga "2P" en el nodo 4 se debe aplicar la mitad de la misma. Para los elementos que están en este plano (barras ④ y ⑤) se debe utilizar la mitad del area, porque es su geometría. Para los nodos de ese plano (2, 3 y 4) la componente normal al desplazamiento se debe fijar en cero $\Rightarrow u_2 = u_3 = u_4 = 0$. Por lo tanto:



SOLUCION: Generamos una tabla con los ángulos para cada elemento de barra. Por ejemplo para la barra ①, asumiendo que x' va desde el nodo ① al ②, tendremos un ángulo de $\theta = 45°$ medido desde el eje global X al eje local x' de la barra ①

El sistema total con simetría tiene 4 nodos, con 8 componentes globales de desplazamiento. Si tenemos en cuenta esto, la matriz global $\underline{\underline{K}}$ deberá ser de 8x8. Al considerar las condiciones de contorno la misma se verá reducida.—

Elem. barra.	θ	C	S	C^2	S^2	SC	L	Rig.
1	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$\sqrt{2}L$	$\sqrt{2}AE$
2	315°	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$\sqrt{2}L$	$\sqrt{2}AE$
3	0	1	0	1	0	0	L	AE
4	90	0	1	0	1	0	L	AE
5	90	0	1	0	1	0	L	AE

Armamos las matrices por barras para un sistema 2D

$$K^{(1)} = \frac{\sqrt{2}AE}{\sqrt{2}L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1/2 & -1/2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array}$$

$$K^{(2)} = \frac{\sqrt{2}AE}{\sqrt{2}L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}$$

$$K^{(3)} = \frac{AE}{L} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}$$

$$K^{(4)} = \frac{AE}{L} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_2 & v_2 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{array} \end{array}$$

se toma como Area $A/2$ porque está en el plano de simetría

Idem al ④

$$K^{(5)} = \frac{AE}{L} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{c} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

→ También se podría haber tomado $\theta = 270$ pero la matriz sería

$$\frac{AE}{L} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} u_4 \\ v_4 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \end{array}$$

iría de 4 a 3 es idéntica

Las condiciones de contorno serían:

① $\boxed{u_1 = 0 \;;\; v_1 = 0}$ $\boxed{u_2 = u_3 = u_4 = 0}$ ②

Las incógnitas v_2, v_3 y v_4?

De la matriz global cancelaremos las filas y columnas correspondientes a esos valores de desplazamientos nulos (cond. esenciales)

① por restricción ② por simetría ⇒

Las ecuaciones en forma matricial resultante será:

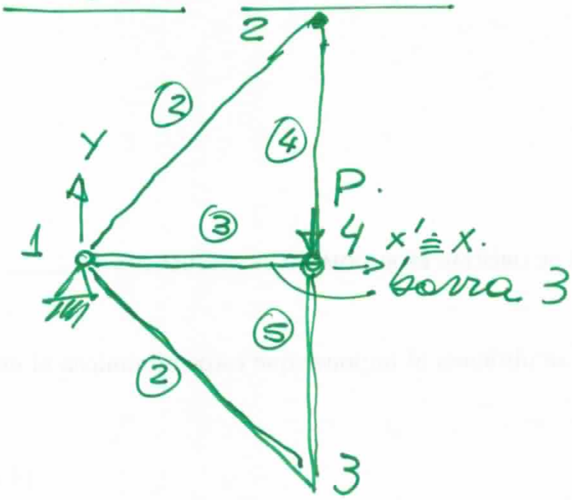
$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

resolviéndolo $\boxed{v_2 = \frac{-PL}{AE} \quad v_3 = \frac{-PL}{AE} \quad v_4 = \frac{-2PL}{AE}}$

SOLUCION.

Punto 1 del ejercicio

2) CALCULO TENSION BARRA 3.



$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix} d' \qquad d' = T^* d$$

$$\underset{2\times1}{d'} = \underset{2\times4}{\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}} \underset{4\times1}{d}$$

$$\sigma = \underbrace{\frac{E}{L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix} T^*}_{C'} d$$

$$\sigma = C'd \quad y \quad \underset{1\times4}{C'} = \frac{E}{L}\underset{1\times2}{\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}}\underset{2\times4}{\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow C' = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-c & -s & c & s\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-c & -s & c & s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

en nuestro caso $\theta^{(3)} = 0 \qquad c = 1 \qquad s = 0$

$$\Rightarrow C' = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u_4 = 0 \\ v_4 = \dfrac{-2PL}{AE} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow C' = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{2PL}{AE} \end{Bmatrix} = 0$$

No tracciona ni comprime.

CALCULO TENSION BARRA 2

para la barra ② $\theta = 315°$

$C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $S = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ long ② $= \sqrt{2}\,L$. $\Rightarrow u_1 = 0$ $v_1 = 0$ $u_3 = 0$

$$\sigma^{(2)} = \frac{E}{\sqrt{2}\,L}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \;+\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \frac{\sqrt{2}}{2} \;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma^{(2)} = \frac{E}{\sqrt{2}\,L}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \frac{\sqrt{2}}{2} \;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{PL}{AE} \end{Bmatrix}.$$

$$\sigma = \cancel{\frac{E}{\sqrt{2}\,L}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,\cancel{\frac{PL}{AE}} = \frac{P}{2A}$$ (tracciona).

Nota $$\sigma^{(4)} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{PL}{AE} \\ 0 \\ -\frac{2PL}{AE} \end{Bmatrix}.$$

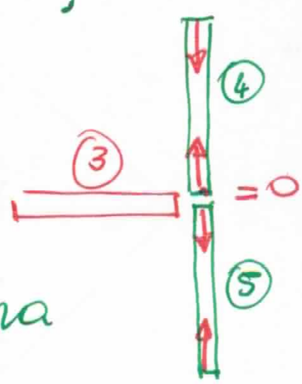
$$\sigma^{(4)} = \frac{E}{L}\left[\frac{PL}{AE} - \frac{2PL}{AE}\right] = -\frac{P\cancel{L}}{A\cancel{E}}\,\frac{\cancel{E}}{\cancel{L}} = -\frac{P}{A}.$$

$$\boxed{\sigma^{(4)} = -\frac{P}{A}}$$ Comprime.

$$\sigma^{(5)} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{PL}{AE} \\ 0 \\ -\frac{2PL}{AE} \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\sigma^{(5)} = -\frac{P}{A}}$$ Comprime

Explicación porque la barra 3 no tracciona ni comprime.-



CALCULO CON LA CARGA DISTRIBUIDA

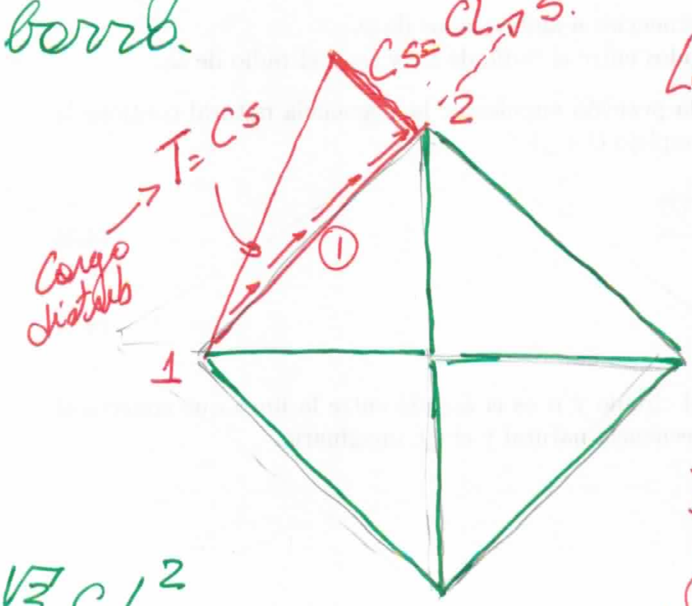
Lo primero que se debe responder es que como la carga no es simetrica respecto al plano de la armadura anterior el sistema no se puede calcular por simetría y se debe calcular completo con las 8 barras.-

Como tengo 5 nodos, mi matriz global será de 10 x 10.

Para calcular el vector carga debemos calcular la distribución equivalente en los nodos de la barra ① que tiene la carga distribuida triangular.-

El calculo es muy sencillo para este caso y no hace falta calcular las integrales. (Lo vemos en la teoría)

Primero elijo s como la coordenada paramétrica de la barra.



Longitud barra 1 $\sqrt{2}\,L$.

$$F = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,L)(CL) = \frac{\sqrt{2}}{2} C L^2$$

Fuerza total.

Como es triangular $\frac{1}{3}$ va al nodo ① y $\frac{2}{3}$ al nodo ② demostrado en la teoría

$$\Rightarrow F_{1s} = \frac{\sqrt{2}}{6} C L^2$$

$$F_{2s} = \frac{2\sqrt{2}}{6} C L^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} C L^2$$

Luego lo repartimos en X y en Y. ⇒ $\theta = 45$

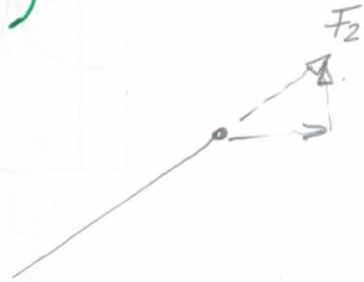
$$\Rightarrow \quad F_{1x} = \frac{\sqrt{2}}{6} C L^2 \cos 45 \qquad F_{2x} = \frac{\sqrt{2}}{3} C L^2 \cos 45$$

$$F_{1y} = \frac{\sqrt{2}}{6} C L^2 \operatorname{sen} 45 \qquad F_{2y} = \frac{\sqrt{2}}{3} C L^2 \operatorname{sen} 45$$

$$F_{1x} = \frac{\sqrt{2}}{6} C L^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{C L^2}{6} \qquad F_{2x} = \frac{\sqrt{2}}{3} C L^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{C L^2}{3}$$

$$F_{1y} = \frac{\sqrt{2}}{6} C L^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{C L^2}{6} \qquad F_{2y} = \frac{\sqrt{2}}{3} C L^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{C L^2}{3}$$

⇒ el vector de carga será (global)



$$F = \begin{bmatrix} +\frac{C L^2}{6} \\ +\frac{C L^2}{6} \\ +\frac{C L^2}{3} \\ +\frac{C L^2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

——— x ———