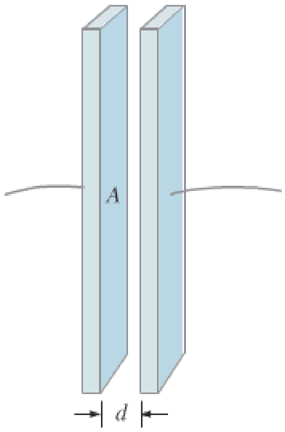
Capítulo 24: CAPACITANCIA Y DIELÉCTRICOS

Ejercicio 1. (a) Calcular la capacitancia C de un capacitor de placas paralelas como se muestra en la figura debajo, cuyas placas son de 20 cm x 3 cm y se encuentran separadas por una distancia d = 1,0 mm en aire. (b) Cuál será la carga en cada placa si se conecta a una batería de 12 V. (c) Cuál es el campo eléctrico E entre ambas placas. (d) Estimar el área de las placas necesaria para poder generar una capacitancia de 1 F, utilizando la misma distancia d.



El campo eléctrico E entre placas paralelas se dirige desde la placa positiva (+) hacia la negativa (-) y tiene una magnitud de:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

El valor de σ equivale a la cantidad de carga Q, que se almacena en cada placa cuando existe una diferencia de potencial V, dividido por su área A, entonces se puede expresar de la siguiente forma:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\,\epsilon_0}$$

Además, el capo eléctrico E se relaciona con la diferencia de potencial y la separación entre placas de la siguiente forma:

$$E = \frac{V}{d}$$

La capacitancia C se define como la capacidad del capacitor de almacenar una carga Q ante una diferencia de potencial V dada, luego si se igualan las expresiones del campo eléctrico y se despeja la capacitancia se llega a una expresión para placas paralelas que depende exclusivamente de parámetros geométricos del capacitor y del medio que existe entre sus placas:

$$E = \frac{Q}{A\,\epsilon_0} = \frac{V}{d}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A\,\epsilon_0}{d}$$

(a) Luego la capacitancia C es igual a:

$$C = \frac{A\,\epsilon_0}{d} = \frac{0{,}2\,m\,.\,0{,}03\,m\,.\,\epsilon_0}{0{,}001\,m} = \mathbf{5,31^{-11}\,F \equiv 53,1\,pF}$$

(b) Conociendo la capacitancia y la diferencia de potencial, entonces se puede obtener la carga en cada placa Q:

$$Q = C\,V = 53{,}1\,pF\,.\,12V = \mathbf{6,372^{-10}\,C}$$

(c) También se puede conocer el campo eléctrico entre placas:

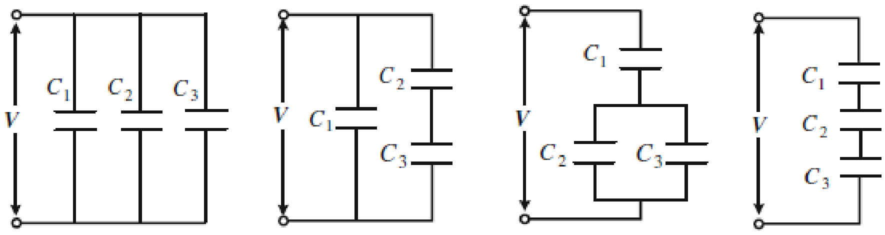
$$E = \frac{V}{d} = \frac{12\,V}{0{,}001\,m} = \mathbf{12000\,V/m}$$

(d) En el caso hipotético que un capacitor de placas planas tuviera una capacitancia de 1 F manteniendo su espaciamiento d entre placas, el área necesaria seria:

$$A = \frac{d\,C}{\epsilon_0} = \frac{0{,}001\,m\,.\,1\,F}{\epsilon_0} = \mathbf{1{,}129}^{\ \mathbf{8}}\,\boldsymbol{m^2}$$

Este resultado constituye un área extremadamente grande, lo que por un lado da una idea del valor de 1 F de capacitancia, pero, por otro lado, capacitores con altas capacitancia difícilmente puedan ser capacitores de placas planas paralelas.

Ejercicio 2. Tres capacitores C_1 de 6μF, C_2 de 4μF y C_3 de 12μF se encuentran conectados de 4 formas diferentes como se muestran en la figura. En todas las configuraciones la diferencia de potencial V de la batería es de 22 V. ¿Cuántos *Coulombs* de carga se transfieren desde la batería a cada combinación?



(a) (b) (c) (d)

En cada una de las combinaciones mostradas los capacitores se disponen de manera diferente y por lo tanto para poder estimar el valor de la carga que mueve la batería hacia los capacitores, primero hay que hallar la capacidad equivalente en cada caso.

En el caso (a) los tres capacitores se ubican en paralelo, mientras que el caso (d) presenta todos en serie y los casos (b) y (c) tienen condiciones intermedias con capacitores en serie y en paralelo.

La capacidad equivalente C_{eq} cuando los capacitores se ubican en paralelo es la siguiente:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

Mientras que cuando se ubican en serie la fórmula es la siguiente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

(a) la capacitancia equivalente es:

$$C_{eq} = 6\mu\text{F} + 4\mu\text{F} + 12\ \mu\text{F} = 22\ \mu\text{F}$$

Una vez obtenida la capacitancia equivalente se puede hallar cuál es el valor de la carga en cada una de las placas del capacitor.

$$Q = C_{eq}\,V = 22\ \mu\text{F}\,.\,22V = \ \mathbf{4{,}84}^{\ \mathbf{-4}}\,\boldsymbol{C} \equiv \mathbf{484}\ \mu\boldsymbol{C}$$

(d) la capacitancia equivalente es:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6\mu\text{F}} + \frac{1}{4\mu\text{F}} + \frac{1}{12\mu\text{F}}\right)^{-1} = \ 2\ \mu\text{F}$$

$$Q = C_{eq}\,V = 2\ \mu\text{F}\,.\,22V = \ \mathbf{4{,}4}^{\ \mathbf{-5}}\,\boldsymbol{C}\ \equiv \mathbf{44}\ \mu\boldsymbol{C}$$

(b) la capacitancia equivalente surge de considerar a los capacitores 2 y 3 en serie y que a su vez se encuentran en paralelo con el capacitor 1, luego se tiene que:

$$C_{eq2-3} = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4\mu\mathrm{F}} + \frac{1}{12\mu\mathrm{F}}\right)^{-1} = 3\ \mu\mathrm{F}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_{eq2-3} = 6\mu\mathrm{F} + 3\mu\mathrm{F} = 9\mu\mathrm{F}$$

$$Q = C_{eq}\, V = 9\ \mu\mathrm{F} \,.\, 22V = \mathbf{1{,}98}\ ^{\mathbf{-4}}\ \boldsymbol{C}\ \equiv \mathbf{198}\ \mu\boldsymbol{C}$$

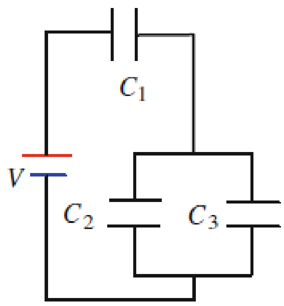
(c) la capacitancia equivalente surge de considerar a los capacitores 2 y 3 en paralelo y que a su vez se encuentran en serie con el capacitor 1, luego se tiene que:

$$C_{eq2-3} = C_2 + C_3 = 4\mu\mathrm{F} + 12\mu\mathrm{F} = 16\mu\mathrm{F}$$

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{eq2-3}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6\mu\mathrm{F}} + \frac{1}{16\mu\mathrm{F}}\right)^{-1} = 4{,}364\ \mu\mathrm{F}$$

$$Q = C_{eq}\, V = 4{,}364\ \mu\mathrm{F} \,.\, 22V = \mathbf{9{,}60}\ ^{\mathbf{-5}}\ \boldsymbol{C}\ \equiv \mathbf{96}\ \mu\boldsymbol{C}$$

Ejercicio 3. Cuando tres capacitores C_1 de 2μF, C_2 de 1μF y C_3 de 4μF se encuentran conectados a una fuente que genera una diferencia de potencial V como se muestra en la figura debajo, la carga Q_2 correspondiente al capacitor C_2 es de 10 μC. (a) Hallar las cargas Q_1 y Q_3 correspondiente a C_1 y C_3. (b) Determinar el valor de V.



(a) El valor de la carga Q_2 en C_2 nos permite determinar cuánto es la diferencia de potencial que existe en la rama donde se encuentra dicho capacitor. Además, esa diferencia de potencial será la misma para la rama donde se encuentra el capacitor C_3, ya que ambos capacitores se encuentran en paralelo y por lo tanto la caída de potencial por cualquiera de las dos ramas de esa combinación debe ser la misma. Entonces, la caída de potencial en C2 será:

$$V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{10\ \mu\mathrm{C}}{1\mu\mathrm{F}} = 10\ V = V_3$$

Esa caída de potencial ahora permite poder hallar el valor de Q_3:

$$Q_3 = C_3 \,.\, V_3 = 4\ \mu\mathrm{F} \,.\, 10V = \mathbf{40\ \mu}\boldsymbol{C}$$

Hallando la capacitancia equivalente entre los capacitores C_2 y C_3 en paralelo, y con el valor de caída de potencial calculado, nos permitirá hallar el valor de la carga que tendría C_{eq}, ese valor de carga será el mismo valor de carga que hay en el capacitor C_1, es decir Q_1.

$$C_{eq2-3} = C_2 + C_3 = 1\mu\mathrm{F} + 4\mu\mathrm{F} = 5\mu\mathrm{F}$$

$$Q_{23} = C_{eq2-3} \,.\, V_3 = 5\ \mu\mathrm{F} \,.\, 10V = 50\ \mu C = Q_1$$

$$Q_1 = \mathbf{50\ \mu}\boldsymbol{C}$$

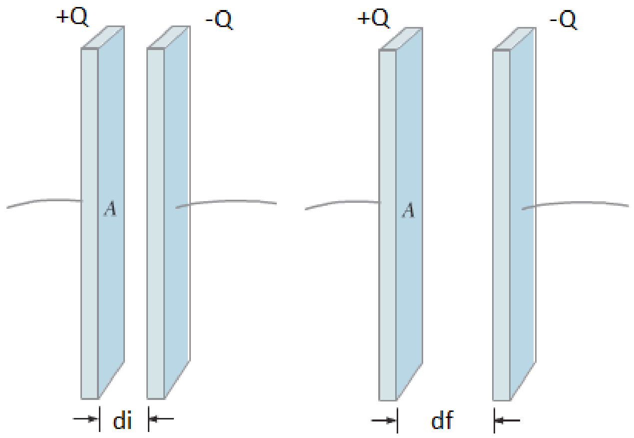
(b) Una vez halladas la carga Q_1, con el valor de capacitancia de C_1 se determina la caída de potencial que existe cuando atraviesa el capacitor 1. La caída de potencial total será V igual a la suma de las caídas de potencial cuando atraviesa C_1 (V_1) más la caída de potencial cuando atraviesa los dos capacitores en paralelo C_2 y C_3 ($V_2 = V_3$).

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{50\ \mu\text{C}}{2\mu\text{F}} = 25\ V$$

Finalmente, la caída de potencial total será:

$$V = V_1 + V_3 = 25V + 10\text{V} = \mathbf{35V}$$

Ejercicio 4. Un capacitor de placas paralelas de área A = 0,014 m^2, que tiene una carga Q = 4μC en cada una de sus placas, luego es desconectado de la batería atrapando la carga. Las dos placas inicialmente se encuentran separadas una distancia d_i = 3 mm, como se muestra en la figura debajo. Si se decide separar las placas una distancia adicional de 1,5 mm. (a) ¿Cuánto es el cambio en la energía almacenada en el capacitor? (b) ¿Cuánto será el cambio en la densidad de energía?



Las condiciones geométricas del capacitor permiten estimar cuál es el valor de la capacitancia del mismo inicialmente, y también cuál será el valor de la capacitancia una vez que se aumente la separación de las placas. El valor de la capacitancia C y el de la carga Q permitirá establecer cuál es la energía almacenada en cada caso, utilizando la función correspondiente:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\,V^2}{2} = \frac{Q\,V}{2}$$

(a) Inicialmente la separación entre las placas es de 3 mm, luego la capacitancia C es:

$$C_i = \frac{A\,\epsilon_0}{d_i} = \frac{0{,}014\ m^2.\epsilon_0}{0{,}003\ m} = 4{,}13^{-11}\,F \equiv 41{,}3\ pF$$

La energía inicial es:

$$U_i = \frac{Q^2}{2C_i} = \frac{(4\mu\text{C})^2}{2\,.\,4{,}13^{-11}\,F} = 0{,}194\ J$$

Luego la separación entre las placas se incrementa 1,5 mm, es decir que la distancia total será de 4,5 mm y hay que recalcular la capacitancia C:

$$C_f = \frac{A\,\epsilon_0}{d_f} = \frac{0{,}014\ m^2.\epsilon_0}{0{,}0045\ m} = 2{,}753^{-11}\,F \equiv 27{,}53\ pF$$

El valor de C disminuyó ya que se aumentó la separación entre placas, luego la energía final será:

$$U_f = \frac{Q^2}{2C_f} = \frac{(4\mu\mathrm{C})^2}{2\,.\,2{,}753^{\,-11}\,F} = 0{,}291\,J$$

Finalmente, el cambio en la energía en el capacitor será la diferencia entre la energía final y la inicial.

$$\Delta U = U_f - U_i = 0{,}291\,J - 0{,}194\,J = \mathbf{0{,}097\,J}$$

Claramente la energía potencial eléctrica debe aumentar al aumentar la separación entre placas, porque hay que realizar trabajo cuando alejo una placa de la otra, puesto que ambas placas tienden a atraerse.

(b) La densidad de energía u_e se define como la energía potencial por unidad de volumen, luego se debe determinar su valor para el caso inicial y para el caso final y ver su variación.

$$u_e = \frac{U}{A\,.\,d}$$

Inicialmente:

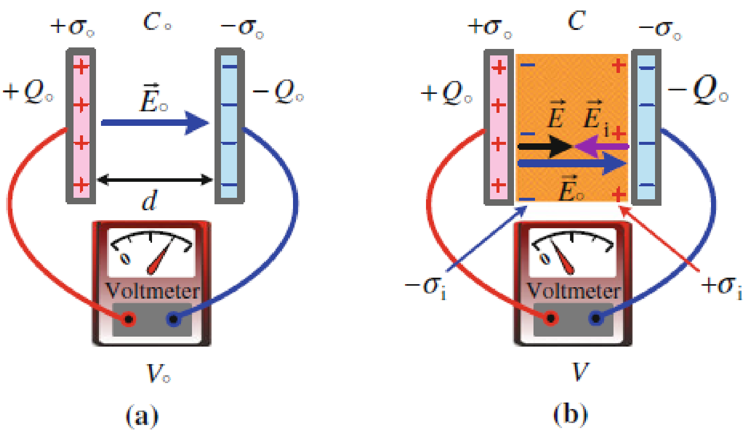
$$u_e = \frac{U_i}{A\,.\,d_i} = \frac{0{,}194\,J}{0{,}014\,m^2\ \ 0{,}003\,m} = 4619\,J/m^3$$

Para el caso final:

$$u_e = \frac{U_f}{A\,.\,d_f} = \frac{0{,}291\,J}{0{,}014\,m^2\ \ 0{,}0045\,m} = 4619\,J/m^3$$

El cambio en la densidad de energía es nulo, porque si bien el volumen aumenta al aumentar la separación entre las placas del capacitor, la capacitancia del mismo disminuye en la misma proporción. Esto hace que aumente la energía almacenada en la misma proporción que el volumen y por lo tanto la densidad de energía permanece constante e invariante.

Ejercicio 5. Un capacitor de placas paralelas tiene un área A = 0,2 m^2 y una separación entre placas d = 10 mm, ver figura (a). La diferencia de potencial original entre las placas es V_0 = 300 V que decrece a V = 100 V cuando una lámina de dieléctrico se ubica entre ambas placas, ver figura (b). (a) ¿Calcular la capacitancia C_0, la magnitud de la carga Q_0, y la magnitud del campo eléctrico E_0? (b) ¿Calcular la capacitancia final C y la constante del dieléctrico κ? (c) Encontrar la magnitud de la densidad de carga inducida σ_i, el campo eléctrico inducido E_i, y el campo eléctrico final E.



La acción que provoca la utilización de un dieléctrico es la de aumentar la capacitancia del capacitor de C_0 a C. Esto ocurre porque el potencial original disminuye cuando se intercala un objeto que tiene una constante dieléctrica κ > 1 distinta del vacío, cuya constante κ_0 es 1. Pero la cantidad de carga en cada placa del capacitor Q_0 permanece invariante.

Luego de acuerdo a la relación:

$$C = \frac{Q_0}{V} \rightarrow si\ V = \frac{V_0}{\kappa} \rightarrow C = \frac{Q_0}{V_0/\kappa} = \kappa . \frac{Q_0}{V_0} = \kappa . C_0$$

En este caso la capacitancia aumenta en una proporción igual a la constante del dieléctrico.

(a) La capacitancia original C_0, así como la carga Q_0 y el campo eléctrico E_0 se obtienen de la siguiente forma:

$$C_0 = \frac{A\,\epsilon_0}{d} = \frac{0{,}2\ m^2 . \epsilon_0}{0{,}01\ m} = 1{,}77^{-10}\ F \equiv \mathbf{177\ pF}$$

$$Q_0 = C_0 . V_0 = 177\ \text{pF} . 300V = 5{,}31^{-8}\ F \equiv \mathbf{53{,}1\ nC}$$

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{300\ V}{0{,}01\ m} = \mathbf{30000\ V/m}$$

(b) Si el potencial se reduce de 300 V a 100 V, entonces de ahí podemos estimar el valor de la constante del dieléctrico κ mediante la siguiente expresión:

$$V = \frac{V_0}{\kappa} \rightarrow \quad \kappa = \frac{V_0}{V} = \frac{300\ V}{100\ V} = \mathbf{3}$$

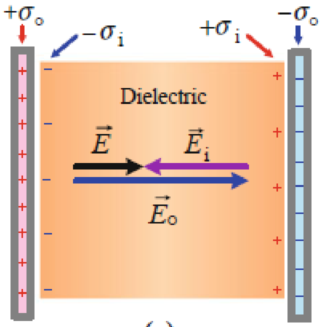
La capacitancia C del capacitor ahora se verá incrementada por el dieléctrico, luego será:

$$C \ = \ \kappa . C_0 = 3 . 177pF = 5{,}31^{-10}\ F \ \equiv \mathbf{531\ pF}$$

También se podría haber llegado al mismo valor sin conocer el valor de la constante del dieléctrico, pero conociendo la carga Q_0 en cada placa y la diferencia de potencial que produce el dieléctrico, de esta forma:

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{53{,}1\ nC}{100\ V} = 531\ pF$$

(c) Las cargas ubicadas al azar en el dieléctrico se polarizan y se orientan parcialmente debido a la presencia del campo eléctrico E_0 y σ_0. Esta polarización genera un campo eléctrico inducido E_i y una densidad de carga inducida σ_i en cada placa, como se puede apreciar en la figura (c).



(c)

La fórmula para la densidad de carga inducida por el dieléctrico es la siguiente:

$$\sigma_i = \frac{\kappa - 1}{\kappa} . \sigma_0$$

Entonces:

$$\sigma_i = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{Q_0}{A} = \frac{2\ (53{,}1\ nC)}{3\ (0{,}2\ m^2)} = 1{,}77^{-7}\ C/m^2 \equiv \mathbf{177\ nC/m^2}$$

Mientras que el campo eléctrico inducido E_i, que tiene signo contrario al campo E_0, se obtiene por diferencia entre E_0 y E. Entonces, se tiene que:

$$E_i = E_0 - E$$

El valor de E se obtiene de dividir la diferencia de potencial generada por el dieléctrico y el distanciamiento de las placas del capacitor, de igual forma podemos expresar el campo E. Luego la expresión quedaría así:

$$E_i = \frac{V_0 - V}{d} = \frac{300\,V - 100\,V}{0{,}01\,m} = \mathbf{20000\,V/m}$$

Donde el campo E equivale a **10000 V / m**.

<u>Referencias</u>:

- Giancoli, D. C. (2005). Physics: principles with applications Sixth Edition.
- Radi, H. A., & Rasmussen, J. O. (2012). *Principles of physics: for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media.