Respuestas Práctica N°10: Valores y Vectores propios

1)

c) **Vap**: $\lambda_1 = 2+3i$ $\quad ma = 1$ y $mg = 1$

$\lambda_2 = 2-3i$ $\quad ma = 1$ y $mg = 1$

Vep: $E(\lambda_1 = 2+3i) = gen\left\{\begin{pmatrix} -1-3i \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$; $E(\lambda_2 = (2-3i)) = gen\left\{\begin{pmatrix} -1+3 \\ 5 \end{pmatrix}\right.$

e) **Vap**: $\lambda_1 = -2$ $\quad ma = 2$ y $mg = 2$

$\lambda_2 = 4$ $\quad ma = 1$ y $mg = 1$

Vep: $E(\lambda_1 = -2) = gen\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$; $E(\lambda_2 = 4) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

f) **Vap**: $\lambda_1 = a$ $\quad ma = 4$ y $mg = 2$

$E(\lambda_1 = a) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

g) **Vap**: $\lambda_1 = a$ $\quad ma = 4$ y $mg = 1$

$E(\lambda_1 = a) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

2) a) **Vap**: $\lambda_1 = a$ $\quad ma = 1$ y $mg = 1$

$\lambda_2 = d$ $\quad ma = 1$ y $mg = 1$

b) Si $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vep asociado a $\lambda = d \Rightarrow$ debe verif

que: $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (definición de vap y vep: $Av = d$

6) A_1: $\lambda = 2$ $\quad ma = 4$ y $mg = 4$

A_2: $\lambda = 2$ $\quad ma = 4$ y $mg = 3$

A_3: $\lambda = 2$ $\quad ma = 4$ y $mg = 2$

A_1: $\lambda = 2$ $\quad ma = 4$ y $mg = 1$

7) a) $\beta = -2$ (Si $\lambda = 2$ es vap de A $\Rightarrow |A - 2I| = 0$)

b) vap A: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$

c) vep A:

$E(\lambda_1 = 1) = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; $E(\lambda_2 = 2) = gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $E(\lambda_1 = 3) = gen \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

d) A es invertible por que no tiene ningún vap $= 0$.

8)

a) Si v_1 y v_2 son vep asociados a $\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow Av_1 = \lambda v_1$

$\Rightarrow Av_2 = \lambda v_2$

$A(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2) \Longrightarrow v_1 + v_2$ es vep de A asociado a λ

b) Si v es vep de A asociado a $\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow Av = \lambda v$

$\alpha(Av) = \alpha(\lambda v)$ para $\alpha \in R$

$A(\alpha v) = \lambda(\alpha v) \Rightarrow (\alpha v)$ es vep de A asociado a λ.

c) Si u y v son vep de A asociados a $\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow Au = \lambda u \rightarrow \alpha(Au) = \alpha(\lambda u) \rightarrow A(\alpha u) = \lambda(\alpha u)$

$\Rightarrow Av = \lambda v \rightarrow \beta(Av) = \beta(\lambda v) \rightarrow A(\beta v) = \lambda(\beta v)$

$$\underbrace{A(\alpha u + \beta v) = \lambda(\alpha u + \beta v)}$$

$\Downarrow$

$(\alpha u + \beta v)$ es vep de A asociado a λ

Ejercitación Adicional

9) a) vap de A:

$\lambda_1 = -1,1642\ldots \quad ma = 1 \text{ y } mg = 1$

$\lambda_2 = 1,7728\ldots \quad ma = 1 \text{ y } mg = 1$

$\lambda_3 = 3,39138 \quad ma = 1 \text{ y } mg = 1$

vep de A:

$$E(\lambda_1 = -1,1642) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0,39192\ldots \\ -0,9241\ldots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E(\lambda_2 = 1,7728) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 7,9904\ldots \\ 2,5877\ldots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E(\lambda_3 = 3,39138\ldots) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1,1762\ldots \\ 0,8363\ldots \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

b) vap de A:

$\lambda_1 = 1 \quad ma = 1 \quad mg = 1$

$\lambda_2 = 2 \quad ma = 2 \quad mg = 2$

vep de A:

$$E(\lambda_1 = 1) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \; ; \; E(\lambda_2 = 2) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

10) Si $\lambda = -1$ es un vap de A asociado a $w \Rightarrow$

$\Rightarrow$ debe verificar $A \cdot w = \lambda \cdot w$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$