

2. Se pasa de la ecuación diferencial que gobierna el problema a una expresión equivalente en forma integral por el MRP

$$\int_{\Omega} W_i A(\hat{\phi}) dx + \int_{\Gamma} \bar{W}_i B(\hat{\phi}) dx = 0 \quad (2.44)$$

3. Sustituyendo la aproximación de la incógnita en la expresión integral anterior se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

La solución del sistema anterior proporciona los valores de los parámetros a_i que definen la expresión aproximada de la función incógnita ϕ .

Es importante que las funciones utilizables en la aproximación sean derivables e integrables.

2.5 CONDICIÓN DE INTEGRABILIDAD

Para que la derivada m -ésima de una función cualquiera $f(x)$ sea integrable, es necesario que sean continuas las $m - 1$ primeras derivadas. En otras palabras, la integral $\int_{\Omega} \frac{d^m f(x)}{dx^m} dx$ será posible de calcular, si la derivada $\frac{d^{m-1} f(x)}{dx^{m-1}}$ es continua.

El ejemplo de la Figura 2.9 aclara esta propiedad. En la dicha figura se presenta una función lineal $f(x)$. Su integral existe en el intervalo $[0, x_i + 1]$ y está dada por el área encerrada por la misma y el eje de las abscisas. En la Figura 2.9b se dibuja su primera derivada $f'(x)$, que también es integrable (la integral es la suma del área de dos rectángulos), aunque no es una función continua. En la Figura 2.9c se representa $f''(x)$. Esta ya no es integrable, por cuanto la derivada que le precede $f'(x)$ es discontinua, de acuerdo con el criterio arriba enmarcado.

En general se dice que una función tiene continuidad de clase C^m (o más sencillamente, tiene continuidad C^m), si es continua la función y sus m primeras derivadas. Así continuidad C^1 indica que la función y su primera derivada es continua, continuidad C^0 indica que simplemente la función es continua, etc. Una continuidad C^{-1} indica que la propia función es discontinua.

2.6 FORMA DÉBIL DEL MÉTODO DE RESIDUOS PONDERADOS

Consideremos de nuevo la ecuación de Poisson en 1D

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + Q = 0$$

Con las condiciones de contorno

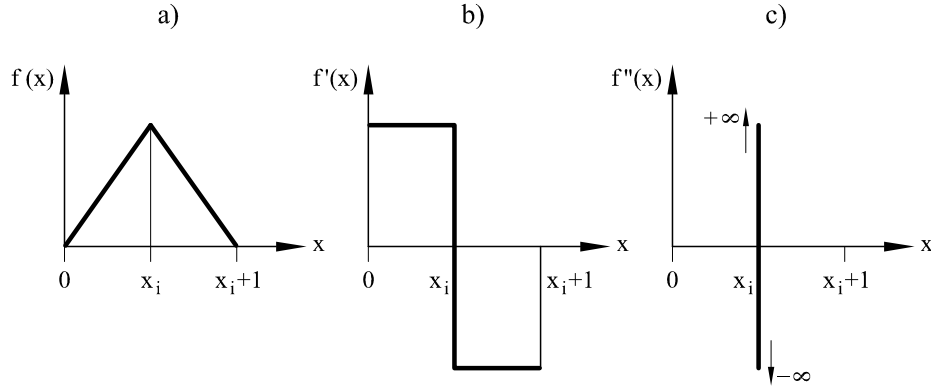


Figura 2.9: Integral de una función lineal y sus dos primeras derivadas

$$\begin{aligned} \phi - \bar{\phi} &= 0 \quad \text{en } x = 0 \\ k \frac{d\phi}{dx} + \bar{q} &= 0 \quad \text{en } x = l \end{aligned}$$

La forma integral se obtiene multiplicando las ecuaciones anteriores por funciones de peso e integrando sobre el dominio. Así

$$\int_0^l W \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + Q \right] dx + \left[\bar{W} \left(k \frac{d\phi}{dx} + \bar{q} \right) \right]_l = 0$$

De la expresión integral anterior se observa claramente que:

- ϕ aparece derivada dos veces. Esto exige continuidad C^1 para esta variable y, por consiguiente, las funciones de forma deben cumplir también este requisito.
- k aparece derivada una vez. Esto exige que k sea continua (continuidad C^0), lo cual es un claro inconveniente en problemas en los que el dominio de análisis contenga varios materiales con propiedades diferentes.
- W no está afectada de derivada alguna, lo que no impone ningún requisito de continuidad sobre ella. Es decir, la función de peso W puede ser discontinua. Los requisitos anteriores son claramente *asimétricos* con respecto a ϕ y W . Así, mientras se exige la continuidad de la primera derivada de ϕ , a W no se le exige continuidad alguna. Por otra parte, esta asimetría se traduce generalmente en formas *no simétricas* del sistema de ecuaciones algebraicas resultante de la discretización.

Las funciones ϕ y W tienen requisitos de continuidad diferentes.

Este “problema” puede solventarse mediante una integración por partes del término en derivadas segundas en la primera integral anterior. Así, recordando la regla de integración por partes

$$\int_0^l u dv = [uv]_0^l - \int_0^l v du$$

y aplicando la misma al término en que aparece ϕ en la primera integral de la expresión del MRP con $u = W$ y $v = k \frac{d\phi}{dx}$, se tiene

$$\int_0^l W \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) dx = \left[W k \frac{d\phi}{dx} \right]_0^l - \int_0^l \frac{dW}{dx} k \frac{d\phi}{dx} dx \quad (2.45)$$

Sustituyendo esta expresión en la forma integral del MRP se obtiene

$$\boxed{-\int_0^l \frac{dW}{dx} k \frac{d\phi}{dx} dx + \int_0^l W Q dx + \left[W k \frac{d\phi}{dx} \right]_0^l + \left[\bar{W} \left(k \frac{d\phi}{dx} + \bar{q} \right) \right]_l = 0} \quad (2.46)$$

La forma débil proporciona una expresión simétrica para las derivadas de ϕ y W y permite la discontinuidad del coeficiente de difusividad κ .

Se observa que han cambiado drásticamente los requisitos de continuidad para ϕ , W y k . Así, ahora tanto ϕ como W aparecen derivadas una vez y, por consiguiente, ambas requieren continuidad C^0 . Por otra parte, desaparece la derivada sobre k que puede ser ahora una función discontinua. Estos importantes cambios se resumen en la tabla siguiente.

Requisitos de continuidad		
	Forma integral original	Forma integral débil
ϕ	C	C^0
W	C^{-1}	C^0
k	C^0	C^{-1}

Tabla 2.1: Requisitos de continuidad para ϕ , W y k en las formas integrales original y débil

Recordemos que continuidad C^{-1} indica que la propia función puede ser discontinua.

La expresión arriba mencionada recibe el nombre de forma integral *débil* (o *forma débil*). El nombre proviene del hecho de que se ha restringido el campo de selección de la función W , ya que la forma débil exige funciones de peso continuas, mientras que la forma integral original permite cualquier tipo de función de peso.

2.6.1 Condición de contorno natural

Escojamos por conveniencia $\bar{W} = -W$ en la forma débil. Tras simplificar y reorganizar los términos de (2.46) se llega a

$$\int_0^l \frac{dW}{dx} k \frac{d\phi}{dx} dx = \int_0^l W Q dx - \left[W k \frac{d\phi}{dx} \right]_0^l - [W \bar{q}]_l \quad (2.47)$$

Recordando que $q = -k \frac{d\phi}{dx}$ se obtiene la expresión

$$\boxed{\int_0^l \frac{dW}{dx} k \frac{d\phi}{dx} dx = \int_0^l W Q dx + [Wq]_0 - [W\bar{q}]_l} \quad (2.48)$$

La ecuación anterior merece varios comentarios:

1. La variable ϕ ha desaparecido del contorno donde el flujo de calor está prescrito ($x = l$).
2. Si se prescribe el flujo en $x = l$ a un valor nulo ($\bar{q} = 0$), desaparece también en la forma débil (2.48) toda referencia a la condición de contorno de flujo nulo (condición de Neumann). Por ello la condición de flujo nulo recibe el nombre genérico de condición de contorno *natural*.
3. q_0 es el flujo que entra en el dominio por el extremo donde está prescrito el valor de ϕ en ($x = 0$). En terminología de cálculo de estructuras, q_0 es la “reacción” en $x = 0$ correspondiente al valor prescrito de la incógnita. El valor de q_0 puede calcularse “a posteriori”, una vez conocida la solución aproximada para ϕ en todo el dominio.

La forma débil del MRP con $W = -\bar{W}$ simplifica el tratamiento de las condiciones de contorno de Neumann.

2.6.2 Discretización de la forma débil

La forma integral débil será en lo sucesivo el punto de partida para obtener las ecuaciones de la discretización. Así sustituyendo la aproximación de ϕ definida por

$$\phi \cong \hat{\phi} = \sum_{j=1}^n N_j a_j$$

en la forma débil (2.48) y escogiendo n funciones de peso W_i , $i = 1, 2, \dots, n$ se obtiene

$$\boxed{\int_0^l \frac{dW_i}{dx} k \sum_{j=1}^n \frac{dN_j}{dx} a_j dx = \int_0^l W_i Q dx + [W_i q]_{x=0} - [W_i \bar{q}]_{x=l}} \quad (2.49)$$

$i = 1, 2, \dots \quad n$

La forma débil del MRP es el punto de partida de las ecuaciones de la aproximación en el MEF.

Dando los sucesivos valores a i , se obtiene el sistema de n ecuaciones siguiente
Para $i = 1$

$$\int_0^l \frac{dW_1}{dx} k \left(\frac{dN_1}{dx} a_1 + \frac{dN_2}{dx} a_1 + \dots + \frac{dN_n}{dx} a_n \right) dx = \int_0^l W_1 Q dx + (W_1 q)_0 - (W_1 \bar{q})_l \quad (2.50)$$

Para $i = 2$

$$\int_0^l \frac{dW_2}{dx} k \left(\frac{dN_1}{dx} a_1 + \frac{dN_2}{dx} a_2 + \dots + \frac{dN_n}{dx} a_n \right) dx = \int_0^l W_2 Q dx + (W_2 q)_0 - (W_2 \bar{q})_l$$

Para $i = n$

$$\int_0^l \frac{dW_n}{dx} k \left(\frac{dN_1}{dx} a_1 + \frac{dN_2}{dx} a_2 + \dots + \frac{dN_n}{dx} a_n \right) dx = \int_0^l W_n Q dx + (W_n q)_0 - (W_n \bar{q})_l$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

donde cada término K_{ij} y f_i tiene la siguiente expresión genérica

$$K_{ij} = \int_0^l \frac{dW_i}{dx} k \frac{dN_j}{dx} dx \quad (2.51)$$

$$f_i = \int_0^l W_i Q dx + (W_i q)_0 - (W_i \bar{q})_l$$

Según la elección que se haga de $W_{(x)}$, se obtendrá el Método de Colocación Puntual, de Subdominios, de Galerkin etc. En particular, escogiendo $W_i = N_i$ (Método de Galerkin), se obtiene

$$\boxed{\begin{aligned} K_{ij} &= \int_0^l \frac{dN_i}{dx} k \frac{dN_j}{dx} dx \\ f_i &= \int_0^l N_i Q dx + (N_i q)_0 - (N_i \bar{q})_l \end{aligned}} \quad (2.52)$$

La forma débil del MRP de Galerkin conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas *simétricas*.

Es fácil advertir que la matriz \mathbf{K} es en este caso *simétrica*, con las evidentes ventajas que ello reporta. La obtención de una matriz de rigidez simétrica es una de las propiedades de la denominada “forma débil de Galerkin”.

Se remarca de nuevo que la expresión de f_i contiene el flujo q_0 en el contorno donde la variable está prescrita. Dicho flujo se desconoce “a priori” y es una “reacción” que puede calcularse “a posteriori” una vez que se han encontrado todos los valores de los parámetros a_i incógnitas.

Ejemplo 2.4 *Solución de la ecuación de Poisson 1D mediante la forma débil de Galerkin y una aproximación polinómica*

Solución

Consideremos la ecuación de Poisson siguiente

2.9 EL MEF EN PROBLEMAS DE POISSON UNIDIMENSIONALES

En este apartado se introducirá el Método de los Elementos Finitos en su aplicación a problemas unidimensionales de Poisson.

Consideremos una discretización del dominio de análisis (en este caso un dominio unidimensional) en subdominios no intersectantes entre sí, a los que denominaremos elementos finitos (Figura 2.10).

Entre las múltiples opciones para aproximar la función incógnita ϕ *escogemos la más sencilla, utilizando funciones polinómicas definidas localmente para cada elemento*, como

$$\phi(x) \simeq \hat{\phi}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad (2.64)$$

donde n es el número de puntos del elemento donde se supone conocido el valor aproximado de ϕ . Dichos puntos se denominan *nodos*. Por otra parte, a_0, a_1, \dots, a_n son constantes que dependen *únicamente* de los valores de ϕ en los nodos. En la práctica es más usual escribir la expresión anterior como

$$\hat{\phi}(x) = N_1^{(e)}(x)\phi_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x)\phi_2^{(e)} + \dots + N_n^{(e)}(x)\phi_n^{(e)} = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(x)\phi_i^{(e)} \quad (2.65)$$

donde $N_1^{(e)}(x), \dots, N_n^{(e)}(x)$ son las funciones de interpolación polinómicas definidas en el dominio del elemento (denominadas *funciones de forma*) y $\phi_i^{(e)}$ es el valor de ϕ en el nodo i . La función de forma $N_i^{(e)}(x)$ interpola dentro del elemento únicamente los desplazamientos correspondientes al nodo i y por ello se denomina *función de forma del nodo i* . Es fácil intuir que cada función de forma $N_i^{(e)}(x)$ vale la unidad en el nodo i y cero en el resto de los nodos. En apartados posteriores se ampliarán estos conceptos.

La sustitución de la expresión aproximada de $\phi(x)$ para cada elemento en la expresión integral del MRP permite, tras un sencillo proceso matemático, obtener las ecuaciones algebraicas de equilibrio del problema discretizado en función de los valores de ϕ en los nodos de la malla de elementos finitos. Dichas ecuaciones pueden escribirse en la forma matricial siguiente

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (2.66)$$

con

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix}; \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

siendo N el número total de nodos de la malla de elementos finitos.

El MEF combina el MRP con aproximaciones polinómicas locales dentro de cada elemento.

Por analogía con el cálculo matricial de estructuras de barras, \mathbf{K} se denomina matriz de rigidez de la malla de elementos finitos, y \mathbf{a} y \mathbf{f} vectores de incógnitas nodales y de flujos nodales equivalentes, respectivamente. Tanto \mathbf{K} como \mathbf{f} pueden obtenerse a partir de las contribuciones individuales de cada elemento, como ocurría en el análisis matricial de estructuras de barras. La solución del sistema de ecuaciones anterior proporciona los valores de ϕ en los nodos a partir de los que pueden encontrarse los gradientes y los flujos en el interior de cada elemento.

Para ilustrar todos estos conceptos estudiaremos en los apartados siguientes la solución de un problema de Poisson unidimensional, tal como la propagación del calor en una barra de sección constante mediante dos mallas de uno y dos elementos finitos unidimensionales de dos nodos, respectivamente.

2.9.1 Discretización del dominio. Definición “local” de las funciones de forma

La aproximación de la incógnita $\phi(x)$ se escribe localmente en el interior de cada elemento por medio de polinomios que dependen de los valores de la propia incógnita en una serie de puntos del elemento denominados nodos.

Definiremos ahora la variación de la función incógnita dentro de cada elemento. Supongamos una división de la barra bajo estudio en elementos finitos unidimensionales dentro de los cuales se define la aproximación de la función incógnita. Para ello, aislando un elemento genérico (Figura 2.11), podemos expresar la variable $\phi(x)$ en su interior mediante el polinomio lineal siguiente

$$\phi^{(e)}(x) \cong \hat{\phi}^{(e)}(x) = \sum_{i=0}^1 \alpha_i x^i = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (2.68)$$

Escogiendo los nodos extremos como puntos “base” y teniendo en cuenta que la función verdadera y la aproximante toman el mismo valor en dichos puntos, se tiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{(e)}(x_1) &= \phi_1^{(e)} = \alpha_0 + \alpha_1 x_1^{(e)} \\ \hat{\phi}^{(e)}(x_2) &= \phi_2^{(e)} = \alpha_0 + \alpha_1 x_2^{(e)} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Resolviendo se obtiene

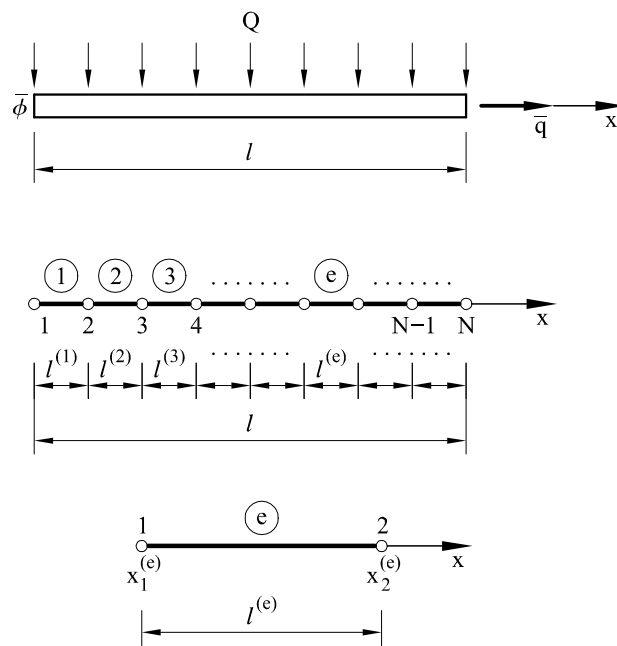
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \phi_1^{(e)} - \frac{\phi_2^{(e)} - \phi_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} x_1^{(e)} \\ \alpha_1 &= \frac{\phi_2^{(e)} - \phi_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} \end{aligned}$$

En un elemento unidimensional de clase C^0 con n nodos las funciones de forma son polinomios de grado $n - 1$.

Sustituyendo se puede escribir la aproximación lineal de la incógnita por

$$\hat{\phi}^{(e)}(x) = \left(\phi_1^{(e)} - \frac{\phi_2^{(e)} - \phi_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} x_1^{(e)} \right) + \left(\frac{\phi_2^{(e)} - \phi_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} \right) x$$

Tras sacar factor común a $\phi_1^{(e)}$ y $\phi_2^{(e)}$, queda



$x_1^{(e)}, x_2^{(e)}$: Genéricamente, significan abscisas del 1^{er} y 2^{do} nodo del elemento (e) , respectivamente

Figura 2.10: Discretización de una barra en elementos finitos unidimensionales de dos nodos

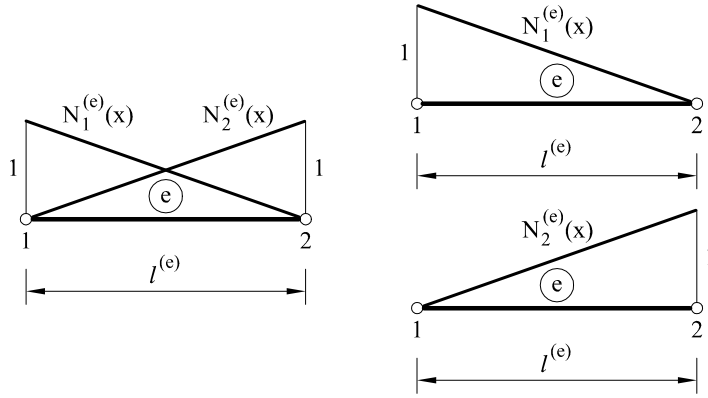


Figura 2.11: Funciones de forma lineales del elemento finito unidimensional de dos nodos

$$\hat{\phi}^{(e)}(x) = \underbrace{\frac{x_2^{(e)} - x}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}}_{N_1^{(e)}(x)} \phi_1^{(e)} + \underbrace{\frac{x - x_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}}}_{N_2^{(e)}(x)} \phi_2^{(e)} \quad (2.70)$$

$$= N_1^{(e)}(x) \phi_1^{(e)} + N_2^{(e)}(x) \phi_2^{(e)} = \sum_{i=1}^2 N_i^{(e)}(x) \phi_i^{(e)}$$

De donde se deduce la expresión de las funciones de forma $N_i^{(e)}$ como

$$\begin{aligned} N_1^{(e)}(x) &= \frac{x_2^{(e)} - x}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} = \frac{x_2^{(e)} - x}{l^{(e)}} \\ N_2^{(e)}(x) &= \frac{x - x_1^{(e)}}{x_2^{(e)} - x_1^{(e)}} = \frac{x - x_1^{(e)}}{l^{(e)}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Nótese que para

$$x = x_1^{(e)} \rightarrow \begin{cases} N_1^{(e)}(x_1) = 1 \\ N_2^{(e)}(x_1) = 0 \end{cases} \quad x = x_2^{(e)} \rightarrow \begin{cases} N_1^{(e)}(x_2) = 0 \\ N_2^{(e)}(x_2) = 1 \end{cases}$$

Lo anterior confirma la propiedad de que la función de forma de un nodo toma el valor unidad en dicho nodo y cero en los otros nodos.

La representación gráfica de las funciones de forma del elemento unidimensional de dos nodos se muestra en la Figura 2.11.

La interpolación anterior permite determinar el valor que toma la función incógnita en cualquier punto del elemento en función de los valores nodales $\phi_1^{(e)}$ y $\phi_2^{(e)}$, que pasan a ser las incógnitas fundamentales del problema.

Extendiendo esta técnica a todos los elementos, se obtendrá una aproximación lineal por intervalos. En el caso excepcional de que $\hat{\phi}(x)$ aproxime

Sólo en muy contadas ocasiones la solución aproximada coincide con la exacta en los nodos.

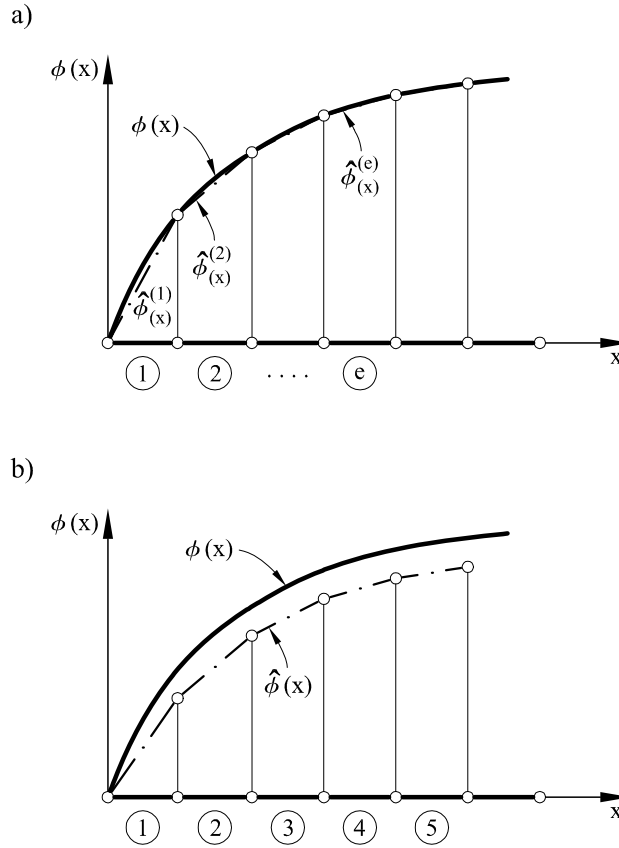


Figura 2.12: Aproximación de la solución por elementos finitos. a) Aproximación exacta nodalmente; b) Solución aproximada

exactamente a $\phi(x)$ se tendrá la situación de la Figura 2.12a. En el límite, la poligonal coincidirá con la curva. Pero, como generalmente ello no ocurrirá, la situación más común será la graficada en la Figura 2.12b, donde se puede apreciar que el error respecto a la solución exacta se manifiesta, fundamentalmente, en el hecho de que:

1. En los nodos no se obtendrá el valor exacto de la función buscada.
2. En el interior de los elementos no se obtendrá la variación exacta de la solución.

2.9.2 Obtención del sistema de ecuaciones algebraicas. Solución de la ecuación de Poisson 1D con un elemento de dos nodos

Retomemos el problema de la barra de la Figura 2.8. Las ecuaciones que definen el problema de transmisión de calor por conducción en la barra son

$$A(\phi) = \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) + Q = 0 \quad 0 \leq x \leq l$$

$$B(\phi): \begin{cases} \phi - \bar{\phi} = 0 & x = 0 \\ k \frac{d\phi}{dx} + \bar{q} = 0 & x = l \end{cases}$$

La solución analítica de este problema (para k constante) se obtiene como sigue

$$k \frac{d\phi}{dx} = -Qx + A$$

$$\phi = -\frac{Q}{2k}x^2 + \frac{Ax}{k} + B$$

De las condiciones de contorno se deduce

$$B = \bar{\phi}$$

$$k \frac{d\phi}{dx} \Big|_l = -Ql + A$$

$$A = -Ql - \bar{q}$$

Sustituyendo, se obtiene

$$\phi = -\frac{Q}{2k}x^2 + (Ql - \bar{q})\frac{x}{k} + \bar{\phi} \quad (2.72)$$

La forma integral débil se escribe como

$$\int_0^l \frac{dW_i}{dx} k \frac{d\hat{\phi}}{dx} dx = \int_0^l W_i Q dx + W_i q \Big|_{x=0} - W_i \bar{q} \Big|_{x=l} \quad (2.73)$$

Pasemos a resolver el problema con el MEF utilizando un solo elemento de dos nodos (Figura 2.13). La aproximación de la temperatura puede escribirse como

$$\hat{\phi}(x) = N_1(x)\phi_1 + N_2(x)\phi_2 \quad (2.74)$$

Las ecuaciones de discretización se obtienen sustituyendo la aproximación del MEF en la forma débil del MRP.

en la que se ha omitido el superíndice e por tratarse de un solo elemento.

Recordamos que ϕ_1 y ϕ_2 son las temperaturas, en los nodos 1 y 2, respectivamente. Derivando la interpolación anterior, se tiene

$$\frac{d\hat{\phi}(x)}{dx} = \frac{dN_1(x)}{dx}\phi_1 + \frac{dN_2(x)}{dx}\phi_2 \quad (2.75)$$

Sustituyendo (2.74) en la forma débil (2.73) y aplicando Galerkin ($W_i = N_i$), se obtiene

$$\int_0^l \frac{dN_i}{dx} k \left[\frac{dN_1}{dx}\phi_1 + \frac{dN_2}{dx}\phi_2 \right] dx = \int_0^l N_i(x) Q dx + [N_i(x)q]_0 - [N_i(x)\bar{q}]_l, \quad i = 1, 2$$

Para $i = 1$

$$\int_0^l \frac{dN_1}{dx} k \left[\frac{dN_1}{dx}\phi_1 + \frac{dN_2}{dx}\phi_2 \right] dx = \int_0^l N_1 Q dx + q_0$$

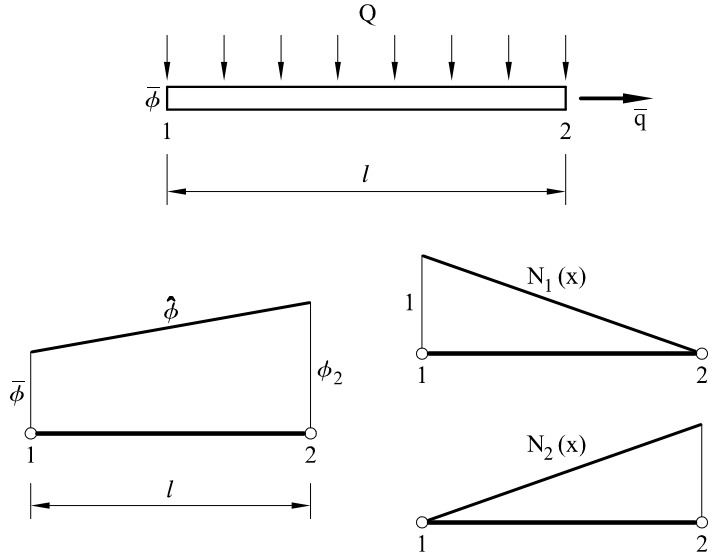


Figura 2.13: Solución 1D del Figura 2.8 utilizando un solo elemento unidimensional de dos nodos

por cuanto

$$\begin{aligned} N_1(0) &= 1 \\ N_1(l) &= 0 \end{aligned}$$

Para $i = 2$

$$\int_0^l \frac{dN_2}{dx} k \left[\frac{dN_1}{dx} \phi_1 + \frac{dN_2}{dx} \phi_2 \right] dx = \int_0^l N_2 Q dx - \bar{q}$$

por cuanto

$$\begin{aligned} N_2(0) &= 0 \\ N_2(l) &= 1 \end{aligned}$$

Las ecuaciones integrales anteriores definen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se pueden expresar en la tradicional forma matricial

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

donde los elementos de la matriz de rigidez son

$$K_{ij} = \int_0^l \frac{dN_i}{dx} k \frac{dN_j}{dx} dx$$

Del mismo modo, para el vector de fuerzas nodales equivalente

Es muy sencillo identificar los coeficientes de la matriz de rigidez y del vector de flujos nodales a partir de la expresión discretizada del MRP.

$$f_1 = \int_0^l N_1 Q dx + q_0$$

$$f_2 = \int_0^l N_2 Q dx - \bar{q}$$

Particularicemos las expresiones anteriores para el caso del elemento de dos nodos. Es inmediato deducir que

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{-1}{l^{(e)}}, \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{l^{(e)}}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} K_{11}^{(e)} &= K_{22}^{(e)} = \frac{k}{l} \\ K_{21}^{(e)} &= K_{12}^{(e)} = \frac{-k}{l} \\ f_1 &= \frac{Ql}{2} + q_0 \\ f_2 &= \frac{Ql}{2} - \bar{q} \end{aligned}$$

La solución del MEF en los nodos coincide en este caso con la exacta. Esta es una excepción que no es extrapolable a otros casos.

El sistema de ecuaciones a resolver es

$$\frac{k}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Ql}{2} + q_0 \\ \frac{Ql}{2} - \bar{q} \end{Bmatrix}, \quad \phi_1 = \bar{\phi} \quad (2.76)$$

La solución aproximada en este sencillo caso es

$$\phi_2 = \frac{Ql^2}{2k} - \frac{\bar{q}l}{k} + \bar{\phi} \quad (2.77)$$

Puede comprobarse que el valor de ϕ_2 coincide con la solución analítica, aunque la variación lineal dentro del único elemento difiere sustancialmente de la variación cuadrática “exacta” (ver ec. (2.72)).

El flujo “reacción” q_0 se obtiene sustituyendo el valor de ϕ_2 en la primera ecuación, lo que proporciona

$$q_0 = \bar{q} - Ql \quad (2.78)$$

Obsérvese que el flujo “reacción” satisface la ecuación de balance de flujos global. Es decir

$$\underbrace{(q_0 + Ql)}_{\text{flujo que entra}} - \underbrace{\bar{q}}_{\text{flujo que sale}} = 0$$

2.9.3 Solución de la ecuación de Poisson 1D con dos elementos de dos nodos

Observemos la discretización en dos elementos de la Figura 2.14. Es fácil deducir que la aproximación de ϕ sobre toda la barra puede escribirse como

$$\phi \simeq \hat{\phi} = N_1\phi_1 + N_2\phi_2 + N_3\phi_3 \quad (2.79)$$

En la ecuación anterior N_i son las funciones de forma *globales*. De la Figura 2.14 se desprende que

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} N_1 &= N_1^{(1)} \\ N_1 &= 0 \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} 0 &\leq x \leq l/2 \\ l/2 &< x \leq l \end{aligned} \\ \left. \begin{aligned} N_2 &= N_2^{(1)} \\ N_2 &= N_1^{(2)} \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} 0 &\leq x \leq l/2 \\ l/2 &< x \leq l \end{aligned} \\ \left. \begin{aligned} N_3 &= 0 \\ N_3 &= N_2^{(2)} \end{aligned} \right\} & \begin{aligned} 0 &\leq x < l/2 \\ l/2 &\leq x \leq l \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Las funciones de forma globales coinciden con las locales dentro de cada elemento.

Es decir, cada función de forma N_i global toma la expresión de la función de forma local correspondiente $N_j^{(e)}$ dentro cada elemento. Obsérvese que la función de forma global de un nodo toma el valor unidad en el nodo y cero en el resto de los nodos de la malla. Por ello, el dominio de influencia de la función de forma global de un nodo se extiende únicamente a los elementos que rodean a dicho nodo.

La forma integral débil discretizada se escribe ahora como

$$\int_0^l \frac{dN_i}{dx} k \left[\frac{dN_1}{dx} \phi_1 + \frac{dN_2}{dx} \phi_2 + \frac{dN_3}{dx} \phi_3 \right] dx = \int_0^l N_i Q dx + [N_i q]_0 - [N_i \bar{q}]_l$$

$i = 1, 2, 3$ en numeración “global”

(2.81)

Particularicemos dicha expresión para los diferentes valores de i

$$i = 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{l/2} \frac{dN_1^{(1)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx} \phi_1 + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \phi_2 \right] dx &= \int_0^{l/2} N_1^{(1)} Q dx + [N_1 q]_0 - [N_1 \bar{q}]_l = \\ &= \underbrace{\int_0^{l/2} N_1^{(1)} Q dx}_{f_1^{(1)}} + q_0 \end{aligned} \quad (2.82a)$$

La matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes se obtienen ensamblando las contribuciones elementales. El proceso de ensamblaje es idéntico al del análisis matricial de estructuras de barras.

Adviértase que no tiene sentido agregar $\frac{dN_3}{dx} \phi_3$ dentro del corchete del primer miembro, dado que la función de forma N_3 es nula dentro del primer elemento ($0 \leq x < l/2$).

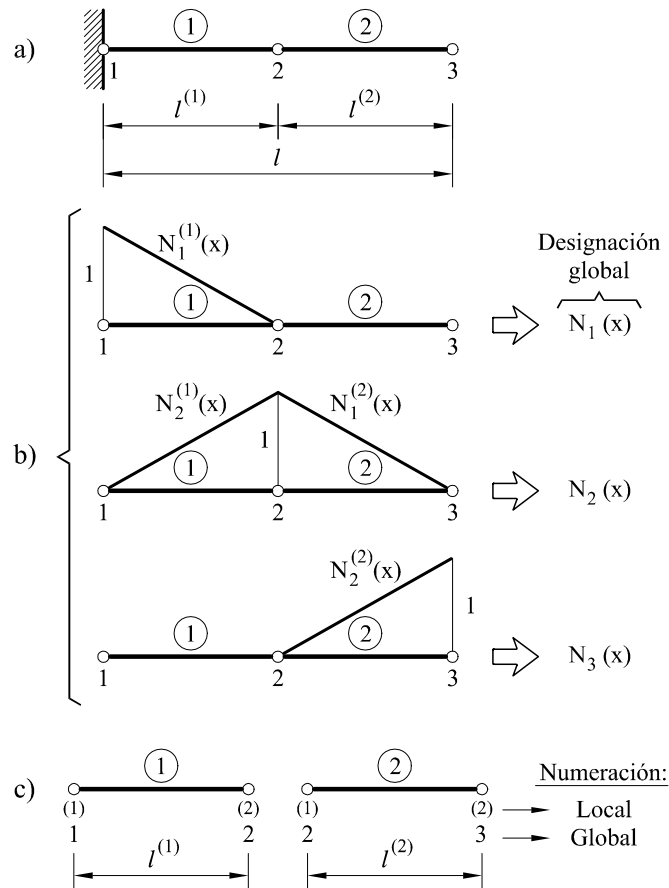


Figura 2.14: Discretización de una barra con dos elementos unidimensionales de dos nodos. Numeración local y global

Por otra parte, en la obtención del segundo miembro de (2.82a) se ha tenido en cuenta que $N_1 = 1$ en $x = 0$ y $N_1 = 0$ en $x = l$.

$i = 2$

$$\begin{aligned} & \int_0^{l/2} \frac{dN_2^{(1)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx} \phi_1 + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \phi_2 \right] dx + \int_{l/2}^l \frac{dN_1^{(1)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(2)}}{dx} \phi_2 + \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \phi_3 \right] dx = \\ & = \underbrace{\int_0^{l/2} N_2^{(1)} Q dx}_{f_2^{(1)}} + \underbrace{\int_{l/2}^l N_1^{(2)} Q dx}_{f_1^{(2)}} \end{aligned} \quad (2.82b)$$

Obsérvese que los términos de contorno son nulos, pues $N_2 = 0$ en $x = 0$ y $x = l$.

$i = 3$

$$\begin{aligned} & \int_{l/2}^l \frac{dN_2^{(2)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(2)}}{dx} \phi_2 + \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \phi_3 \right] dx = \int_{l/2}^l N_2^{(2)} Q dx + \\ & + [N_3 q]_0 - [N_3 \bar{q}]_l = \underbrace{\int_{l/2}^l N_2^{(2)} Q dx}_{f_2^{(2)}} - \bar{q} \end{aligned} \quad (2.82c)$$

Las expresiones (2.82) anteriores pueden escribirse en la forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} \\ 0 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_1 = \bar{\phi} \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} + q_0 \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} - \bar{q} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

con

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \frac{dN_i^{(e)}}{dx} k \frac{dN_j^{(e)}}{dx} dx$$

$$f_i^{(e)} = \int_{l^{(e)}} N_i^{(e)} Q dx$$

Como se puede observar, la matriz global \mathbf{K} surge del ensamblaje de las matrices asociadas a cada elemento $\mathbf{K}^{(e)}$, de forma idéntica al proceso de ensamblaje en el cálculo matricial de estructuras de barra.

Nótese la disposición de los términos \mathbf{K} en “banda”. En el ancho final de la banda tiene decisiva importancia el orden de la numeración global de los nodos.

Los componentes del vector de fuerzas nodales equivalentes se obtienen ensamblando las contribuciones elementales. Adviértase que en los nodos extremos 1 y 3 se añade la componente de “fuerza” global correspondiente a los

flujos de calor en dichos nodos. Como siempre, el signo más en q indica que el flujo de calor “entra” en el cuerpo, mientras que el signo negativo expresa que se pierde calor hacia el exterior.

Se remarca de nuevo la coincidencia del proceso de ensamblaje anterior con el de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales en análisis matricial de estructuras de barras.

Se deducen a continuación las expresiones de los términos de \mathbf{K} y \mathbf{f} para el elemento de dos nodos.

$$\begin{aligned}\frac{dN_1^{(e)}(x)}{dx} &= -\frac{1}{l^{(e)}} \\ \frac{dN_2^{(e)}(x)}{dx} &= \frac{1}{l^{(e)}}\end{aligned}$$

Sustituyendo las dos últimas ecuaciones en la expresión de $K_{ij}^{(e)}$, se obtiene

$$K_{11}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \left(-\frac{1}{l^{(e)}}\right) \left(-\frac{1}{l^{(e)}}\right) k dx = \left(\frac{k}{l}\right)^{(e)} = K_{22}^{(e)}$$

donde se ha supuesto k variable de un elemento a otro, y

$$K_{12}^{(e)} = K_{21}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \left(-\frac{1}{l^{(e)}}\right) k \left(\frac{1}{l^{(e)}}\right) dx = -\left(\frac{k}{l}\right)^{(e)}$$

Suponiendo una distribución uniforme de Q sobre toda la barra se tiene

$$\begin{aligned}f_1^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} \frac{x_2^{(e)} - x}{l^{(e)}} Q dx = \int_{l^{(e)}} \frac{x_2^{(e)}}{l^{(e)}} Q dx - \int_{l^{(e)}} \frac{x}{l^{(e)}} Q dx = \\ &= Q[x]_0^{l^{(e)}} - \frac{Q}{l^{(e)}} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{l^{(e)}} = \frac{Ql^{(e)}}{2} \\ f_2^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} \frac{x - x_1^{(e)}}{l^{(e)}} dx = \frac{Q}{l^{(e)}} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{l^{(e)}} = \frac{Ql^{(e)}}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión matricial resultante es

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k}{l}\right)^{(1)} & \left(-\frac{k}{l}\right)^{(1)} & 0 \\ \left(-\frac{k}{l}\right)^{(1)} & \left(\frac{k}{l}\right)^{(1)} + \left(\frac{k}{l}\right)^{(2)} & \left(-\frac{k}{l}\right)^{(2)} \\ 0 & -\left(\frac{k}{l}\right)^{(2)} & \left(\frac{k}{l}\right)^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Ql^{(1)}}{2} + q_0 \\ \frac{Ql^{(1)}}{2} + \frac{Ql^{(2)}}{2} \\ \frac{Ql^{(2)}}{2} - \bar{q} \end{Bmatrix}$$

Si $k = \text{cte}$ y $l^{(e)} = l/2$

$$\frac{2k}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Ql}{4} + q_0 \\ \frac{Ql}{2} \\ \frac{Ql}{4} - \bar{q} \end{Bmatrix}, \quad \phi_1 = \bar{\phi}$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \frac{Ql^2}{2k} - \frac{\bar{q}l}{k} + \bar{\phi} \\ \phi_2 &= \frac{3Ql^2}{8k} - \frac{\bar{q}l}{2k} + \bar{\phi} \\ \phi_0 &= \bar{q} - Ql \end{aligned} \quad (2.83)$$

Puede comprobarse que la solución para ϕ_2 y ϕ_3 coincide de nuevo con la exacta (ec. (2.72)). Por otra parte, como en el caso de un solo elemento, se obtiene de $q_0 = \bar{q} - Ql$ que equilibra la suma total de flujos de calor.

2.10 GENERALIZACIÓN DE LA SOLUCIÓN CON VARIOS ELEMENTOS DE DOS NODOS

A modo de síntesis, los pasos a seguir para la solución del problema de Poisson 1D con elementos finitos de dos nodos son:

1. Obtener de la matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(e)}$ y el vector de flujos $\mathbf{f}^{(e)}$ de cada elemento.

En elementos de dos nodos las expresiones son

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} \frac{dN_i^{(e)}(x)}{dx} k \frac{dN_j^{(e)}(x)}{dx} dx = (-1)^{i+j} \left(\frac{k}{l} \right)^{(e)} \\ f_i^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} N_i^{(e)} Q dx = \frac{(Ql)^{(e)}}{2} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Nótese que $\mathbf{K}^{(e)}$ tiene tantas filas y columnas como grados de libertad posee el elemento. Recuérdese que en este caso se está trabajando con elementos de 1 grado de libertad por nodo.

2. Ensamblar la matriz de rigidez global \mathbf{K} y el vector de flujos nodales equivalentes global \mathbf{f} , a partir de las contribuciones de los elementos. Si se utiliza una malla de n elementos de 2 nodos, la ecuación matricial resultante tiene la expresión siguiente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & & & & \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & & & \\ & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(3)} & & & \\ \mathbf{O} & & & & & \\ & & & & K_{12}^{(n-1)} + K_{11}^{(n)} & K_{12}^{(n)} \\ & & & & K_{21}^{(n)} & K_{22}^{(n)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \vdots \\ \phi_n \\ \phi_{n+1} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} + q_0 \\ f_2^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} + f_1^{(3)} \\ \vdots \\ f_2^{(n-1)} + f_1^{(n)} \\ f_2^{(n)} - \bar{q} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{f}}$$

El proceso de ensamblaje anterior es *idéntico* al utilizado para ensamblar las matrices y vectores en el análisis de sistemas discretos por técnicas matriciales (Capítulo 1).

Capítulo 3

ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES AVANZADOS

3.1 INTRODUCCIÓN

El sencillo problema de modelar el comportamiento de una barra bajo fuerzas axiales mediante elementos unidimensionales de dos nodos estudiado en el capítulo anterior es sumamente instructivo porque, en esencia, resume las etapas básicas a seguir en el análisis de toda estructura por el método de los elementos finitos. Quedan no obstante en el aire una serie de cuestiones tales como: ¿Es factible la utilización de elementos unidimensionales con funciones de forma de mayor grado? ¿Cuáles son las ventajas de estos elementos con respecto a la utilización del sencillo elemento de dos nodos estudiado en el capítulo anterior? ¿Es posible garantizar que refinando progresivamente la malla, la solución converja al valor exacto? o ¿Qué factores afectan al error de la solución? Estas y otras preguntas similares surgirán de forma casi inmediata al lector que se inicia en la utilización del método de elementos finitos. En este capítulo abordaremos dichas cuestiones aunque, como veremos, no existen respuestas definitivas para algunas de ellas y tendremos que limitarnos a ofrecer criterios orientativos que faciliten la utilización práctica del método. De nuevo para mayor sencillez nos referiremos siempre que sea posible al problema de Poisson unidimensional que permitirá presentar de forma clara conclusiones de validez general para otros casos más complejos.

La organización del capítulo esquemáticamente es la siguiente: En primer lugar, se presenta la obtención general de funciones de forma de los elementos unidimensionales válidos para el problema Poisson unidimensional. Dichas funciones de forma serán de gran utilidad para obtener las de elementos más complejos en dos y tres dimensiones. A continuación se tratan los conceptos de elemento isoparamétrico e integración numérica, ambos esenciales para el desarrollo de elementos finitos de órdenes superiores. Finalmente se estudian los requisitos para la convergencia de la solución y los tipos de errores más

En este capítulo se responde a diversas cuestiones básicas sobre la aproximación del MEF.

usuales que afectan a la misma.

3.2 ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES DE CLASE C^0 . ELEMENTOS LAGRANGIANOS

En un elemento unidimensional, la aproximación polinómica de una variable $\phi(x)$ puede escribirse en forma general como

$$\phi(x) = \alpha_o + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + s$$

donde α_o , α_1 , etc., son constantes.

Tomando un polinomio de primer grado, se tiene

$$\phi(x) = \alpha_o + \alpha_1 x$$

Las funciones de forma coinciden con polinomios de Lagrange en los elementos lagrangianos.

Para evitar tener que resolver un sistema de ecuaciones para obtener las funciones de forma de elementos unidimensionales de clase C^0 se puede hacer uso de las propiedades de los polinomios de Lagrange. Dichos polinomios toman un determinado valor en un punto y cero en un conjunto de puntos prefijados [R2]. Por consiguiente, normalizando dicho valor a la unidad y haciendo coincidir los puntos con la posición de los nodos, las funciones de forma coinciden precisamente con los polinomios de Lagrange, por lo que a estos elementos se les denomina *lagrangianos*.

La función de forma del nodo i de un elemento lagrangiano unidimensional de n nodos se obtiene directamente por la expresión general

$$N_i(x)^{(e)} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \quad (3.1)$$

o, más sencillamente, por

$$N_i(x)^{(e)} = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad (3.2)$$

En esta práctica se expresarán las funciones de forma en el sistema de coordenadas natural.

Así, por ejemplo, para un elemento de dos nodos se encuentra de nuevo

$$\begin{aligned} N_1^{(e)} &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x}{l^{(e)}} \\ N_2^{(e)} &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{l^{(e)}} \end{aligned}$$

Por conveniencia introduciremos el *sistema de coordenadas natural o normalizado* basado en la variable ξ que se define como (Figura 3.1)

$$\xi = 2 \frac{x - x_c}{l^{(e)}} \quad (3.3)$$

siendo x_c la coordenada del centro del elemento, de manera que

- $\xi = -1$ en el extremo izquierdo del elemento

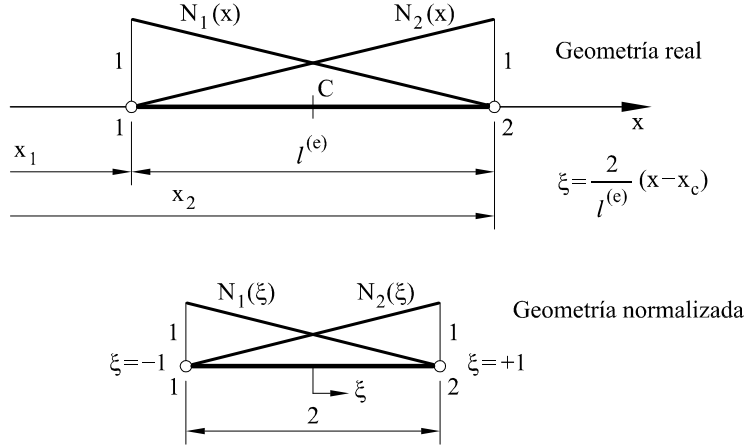


Figura 3.1: Definición del sistema de coordenadas natural ξ . Geometrías real y normalizada del elemento

- $\xi = 0$ en el punto central del elemento
- $\xi = 1$ en el extremo derecho del elemento

La ecuación anterior transforma la *geometría real* del elemento en una *geometría normalizada* en la que la longitud del elemento es 2. Podemos ahora expresar las funciones de forma en esta nueva geometría e independizar así la obtención de las mismas de la geometría real del elemento, lo cual es de gran interés práctico. La expresión general de $N_i(\xi)$ puede escribirse como

$$N_i(\xi)^{(e)} = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left(\frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad (3.4)$$

Por tanto, para un elemento lagrangiano de dos nodos con $\xi_1 = -1$ y $\xi_2 = +1$, se deduce

$$\begin{aligned} N_1^{(e)} &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2} (1 - \xi) \\ N_2^{(e)} &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2} (1 + \xi) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Es inmediato ver que sustituyendo el valor de ξ se recupera la expresión cartesiana de las funciones de forma. Para un elemento cuadrático de tres nodos con $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = +1$ (Figura 3.2) las funciones de forma se obtienen por

$$\begin{aligned} N_1^{(e)} &= \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{1}{2} \xi (\xi - 1) \\ N_2^{(e)} &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = (1 + \xi)(1 - \xi) \\ N_3^{(e)} &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)} = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

La utilización de coordenadas normalizadas permite independizar las expresiones de las funciones de forma de la geometría del elemento.

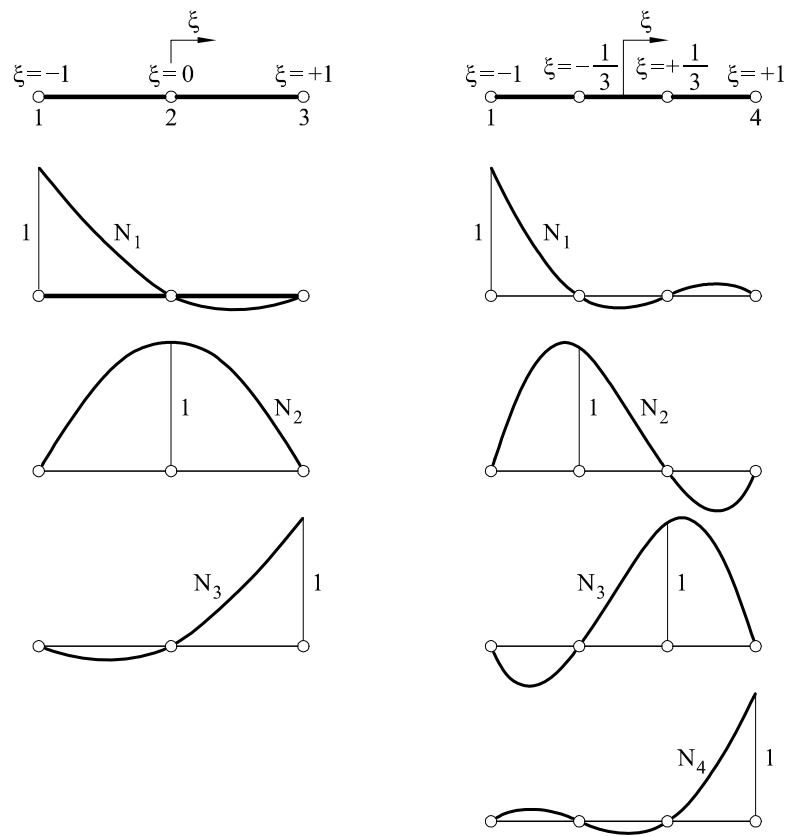


Figura 3.2: Elementos unidimensionales cuadrático y cúbico de clase C^0

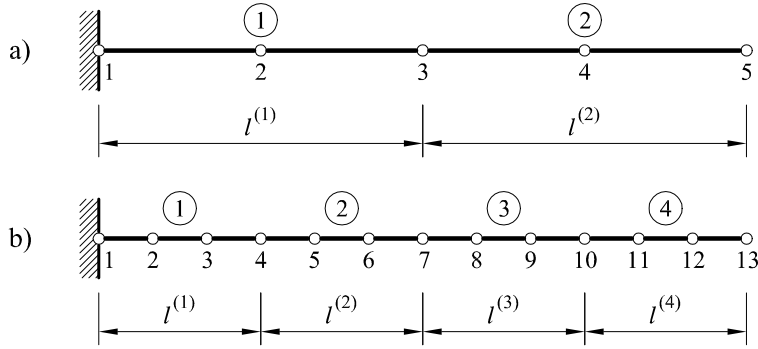


Figura 3.3: Discretización de una barra con: a) dos elementos de tres nodos; b) cuatro elementos de cuatro nodos

Finalmente, para un elemento cúbico de cuatro nodos 1, 2, 3 y 4 con $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = -1/3$, $\xi_3 = 1/3$ y $\xi_4 = 1$ (Figura 3.2), las funciones de forma son

$$\begin{aligned}
 N_1^{(e)} &= \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)} = -\frac{9}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1) \\
 N_2^{(e)} &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)} = \frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1) \\
 N_3^{(e)} &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4)}{(\xi_3 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)} = -\frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - 1) \\
 N_4^{(e)} &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_4 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3)} = \frac{9}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

La expresión cartesiana de las funciones de forma anteriores se obtiene inmediatamente haciendo uso de la transformación entre ξ y x . No obstante, esta operación no es necesaria y de hecho es de poco interés práctico.

Proponemos al lector que obtenga por sí mismo la expresión de las funciones de forma de otros elementos unidimensionales lagrangianos de órdenes superiores.

Ejemplo 3.1 *Solución de la ecuación de Poisson 1D con dos elementos de tres nodos*

Solución

A modo de ejemplo se repetirá la solución del problema de la Figura 2.14 utilizando dos elementos cuadráticos de tres nodos (Figura 3.3a).

La aproximación global puede expresarse en este caso por

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^5 N_i \phi_i = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 + N_4 \phi_4 + N_5 \phi_5$$

El proceso de discretización sigue los pasos explicados en el capítulo anterior para el elemento unidimensional de dos nodos (Apartado 2.9).

En la Figura 3.4 se dibujan las funciones de forma asociadas a cada uno de los cinco nodos del dominio.

La distinción entre funciones globales y locales se muestra en la Figura 3.4. La aproximación de la incógnita dentro de cada elemento se escribe como

$$\hat{\phi}^{(e)} = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)} \phi_i^{(e)} = N_1^{(e)} \phi_1^{(e)} + N_2^{(e)} \phi_2^{(e)} + N_3^{(e)} \phi_3^{(e)}$$

Obsérvese que la relación entre numeración nodal local y global se deduce

$$\begin{aligned} \phi_1^{(1)} &\equiv \phi_1, & \phi_2^{(1)} &\equiv \phi_2, & \phi_3^{(1)} &\equiv \phi_3 \\ \phi_1^{(2)} &\equiv \phi_3, & \phi_2^{(2)} &\equiv \phi_4, & \phi_3^{(2)} &\equiv \phi_5 \end{aligned}$$

Aplicando el MRP de Galerkin se llega a la ecuación siguiente

$$\int_{\Omega} \frac{dN_i}{dx} k \left[\sum_{j=1}^5 \frac{dN_j}{dx} \phi_j \right] dx = \int_{\Omega} N_i Q dx + [N_i q]_0 - [N_i \bar{q}]_l; \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

Desarrollaremos dicha ecuación para los diferentes valores de

$$i = 1$$

$$\int_0^{l/2} \frac{dN_1^{(1)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx} \phi_1 + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \phi_2 + \frac{dN_3^{(1)}}{dx} \phi_3 \right] dx = \int_0^{l/2} N_1^{(1)} Q dx + q_0$$

$$i = 2$$

$$\int_0^{l/2} \frac{dN_2^{(1)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx} \phi_1 + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \phi_2 + \frac{dN_3^{(1)}}{dx} \phi_3 \right] dx = \int_0^{l/2} N_2^{(1)} Q dx$$

$$i = 3$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{l/2} \frac{dN_3^{(1)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(1)}}{dx} \phi_1 + \frac{dN_2^{(1)}}{dx} \phi_2 + \frac{dN_3^{(1)}}{dx} \phi_3 \right] dx + \\ &+ \int_{l/2}^l \frac{dN_1^{(2)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(2)}}{dx} \phi_3 + \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \phi_4 + \frac{dN_3^{(2)}}{dx} \phi_5 \right] dx = \\ &= \int_0^{l/2} N_3^{(1)} Q dx + \int_{l/2}^l N_1^{(2)} Q dx \end{aligned}$$

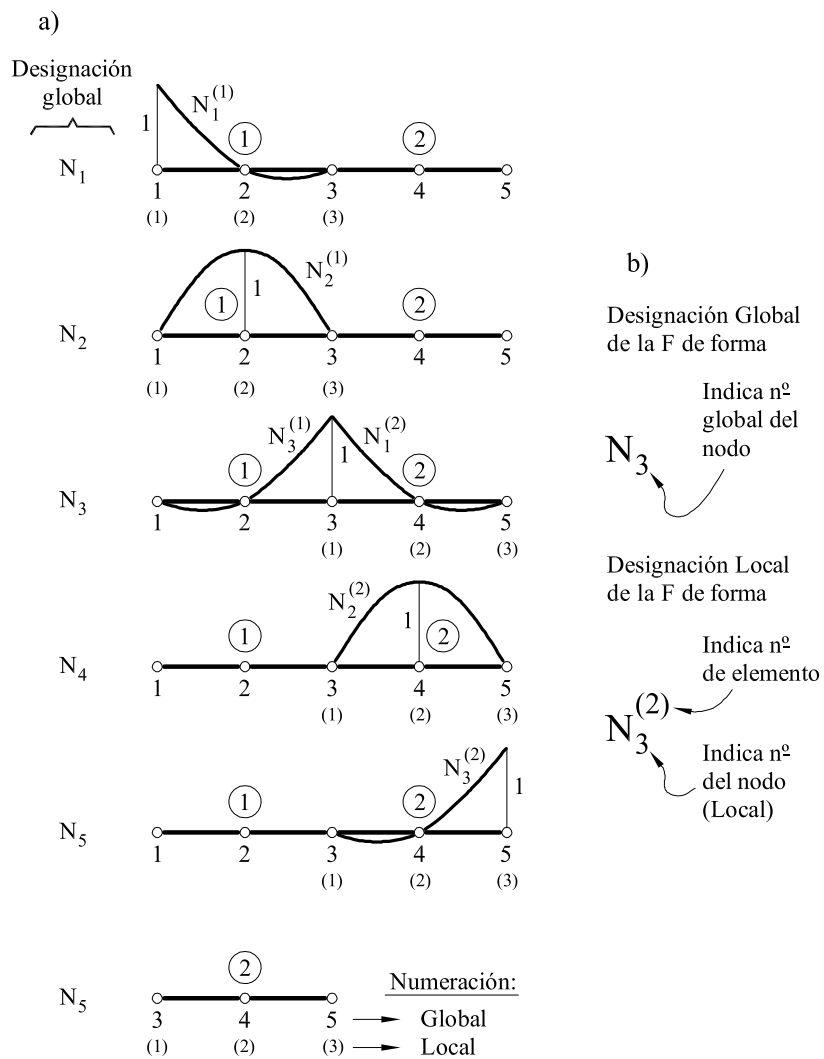


Figura 3.4: Funciones de forma globales y locales para la discretización de una barra con dos elementos unidimensionales cuadráticos de tres nodos.

$$i = 4$$

$$\int_{l/2}^l \frac{dN_2^{(2)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(2)}}{dx} \phi_3 + \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \phi_4 + \frac{dN_3^{(2)}}{dx} \phi_5 \right] dx = \int_{l/2}^l N_2^{(2)} Q dx$$

$$i = 5$$

$$\int_{l/2}^l \frac{dN_3^{(2)}}{dx} k \left[\frac{dN_1^{(2)}}{dx} \phi_3 + \frac{dN_2^{(2)}}{dx} \phi_4 + \frac{dN_3^{(2)}}{dx} \phi_5 \right] dx = \int_{l/2}^l N_3^{(2)} Q dx - \bar{q}$$

De nuevo las expresiones globales de \mathbf{K} y \mathbf{f} se obtienen ensamblando las contribuciones elementales.

En forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & & \\ & K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\ & & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ \mathbf{0} & & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1^{(1)} + q_0 \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} + f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} - \bar{q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}}, \quad \phi_1 = \bar{\phi}$$

Se observa que las expresiones de \mathbf{K} y \mathbf{f} pueden obtenerse ensamblando en la forma usual las contribuciones elementales dadas por

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} & K_{13}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} & K_{23}^{(e)} \\ K_{31}^{(e)} & K_{32}^{(e)} & K_{33}^{(e)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}^{(e)} = \begin{bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \\ f_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

Por otra parte, las expresiones de $K_{ij}^{(e)}$ y $f_i^{(e)}$ coinciden con las obtenidas en un apartado anterior, así

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \frac{dN_i^{(e)}}{dx} k \frac{dN_j^{(e)}}{dx} dx \quad \text{y} \quad f_i^{(e)} = \int_{l^{(e)}} N_i Q dx + \left((N_i q)_0 - (N_i q)_l \right)$$

Para un problema concreto las expresiones de $K_{ij}^{(e)}$ y $f_i^{(e)}$ son universales para cualquier elemento.

Se deja al lector la solución final de este problema. Se comprobará que la solución coincide con la exacta en los nodos y dentro de cada elemento, dado que se utilizan funciones de aproximación cuadráticas que coinciden con la forma de la solución exacta.

3.3 FORMULACIÓN ISOPARAMÉTRICA E INTEGRACIÓN NUMÉRICA

En este apartado y en el siguiente se introducirán dos importantes conceptos sin los cuales es prácticamente imposible que el método de los elementos finitos se hubiese desarrollado hasta los niveles en que hoy se encuentra.

El primer concepto es el de *formulación paramétrica*. La idea es interpolar la geometría del elemento a partir de las coordenadas de una serie de puntos conocidos. Dicha interpolación es esencial para poder encontrar una relación general entre las coordenadas naturales y las cartesianas.

El segundo concepto es el de *integración numérica*. En la mayor parte de los casos prácticos el cálculo analítico de las integrales del elemento es inabordable y la integración numérica es la única opción para evaluarlas de forma precisa y sencilla.

En este apartado y en el siguiente desarrollaremos las técnicas anteriores en su aplicación a elementos unidimensionales de clase C^0 . Advertimos que sus ventajas no se apreciarán totalmente hasta que no estudiemos problemas más complicados en los que intervengan elementos bi o tridimensionales.

La formulación isoparamétrica y la integración numérica permiten utilizar de forma sistemática elementos complejos.

3.3.1 Concepto de interpolación paramétrica

Recordemos que para un elemento lineal de dos nodos la variable ϕ en un punto del elemento se expresa dentro del elemento por

$$\hat{\phi}(\xi) = N_1^{(e)}(\xi)\phi_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\xi)\phi_2^{(e)} \quad (3.8)$$

Obsérvese que hemos adoptado la expresión normalizada de las funciones de forma. Salvo en contadas excepciones ésta será la manera usual de proceder.

Por otra parte, el gradiente g se obtiene dentro de un elemento por

$$g = \frac{d\hat{\phi}}{dx} = \frac{dN_1^{(e)}(\xi)}{d\xi} \phi_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}(\xi)}{d\xi} \phi_2^{(e)} \quad (3.9)$$

Por tanto, para el cálculo del gradiente necesitamos conocer la derivada de $N_i^{(e)}$ con respecto a la coordenada cartesiana x . Este cálculo es inmediato si las funciones de forma se expresan en función de x . No obstante, como hemos indicado, en general esto no será así debido a la utilización del sistema de coordenadas naturales.

Así, pues, la evaluación de dichas derivadas implica las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1^{(e)}(\xi)}{dx} &= \frac{dN_1^{(e)}(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \frac{d\xi}{dx} = - \frac{1}{2} \frac{d\xi}{dx} \\ \frac{dN_2^{(e)}(\xi)}{dx} &= \frac{dN_2^{(e)}(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\xi}{dx} \end{aligned} \quad (3.10)$$

con lo que la expresión del gradiente se escribe como

La interpolación paramétrica facilita el cálculo de las derivadas cartesianas de las funciones de forma expresadas en coordenadas normalizadas.

$$g = -\frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) \phi_1^{(e)} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right) \phi_2^{(e)} \quad (3.11)$$

Para completar el cálculo de g hay que evaluar $\frac{d\xi}{dx}$, lo que exige conocer una relación explícita entre x y ξ .

Dicha relación puede obtenerse mediante una interpolación paramétrica de la geometría del elemento. Así, si se conocen las coordenadas x_1, x_2, \dots, x_m de m puntos cualesquiera del elemento, se puede calcular la coordenada de cualquier punto del mismo interpolando los valores de las coordenadas conocidas. Dicha interpolación puede escribirse en la forma

$$x = \hat{N}_1^{(e)}(\xi)x_1 + \hat{N}_2^{(e)}(\xi)x_2 + \dots + \hat{N}_m^{(e)}(\xi)x_m \quad (3.12)$$

La interpolación de la geometría del elemento requiere conocer las coordenadas de una serie de puntos, que pueden coincidir o no con los nodos.

Se deduce de lo anterior que $\hat{N}_i(\xi)$ son *funciones de interpolación de geometría* que satisfacen los mismos requisitos que las funciones de forma utilizadas para interpolar el campo de desplazamientos, es decir, $\hat{N}_i(\xi)$ debe tomar el valor unidad en el punto i y cero en el resto de los $m - 1$ puntos. Por tanto, las funciones $\hat{N}_i(\xi)$ se obtienen en base al número de puntos escogido para la interpolación de la geometría.

Obsérvese que la ecuación anterior proporciona directamente la relación entre las coordenadas x y ξ buscada. Dicha ecuación puede también interpretarse como la transformación de coordenadas $\xi \rightarrow x$ de manera que a cada punto del espacio normalizado $[-1,1]$ le corresponde otro del espacio cartesiano $[x_1, x_2]$. Es fundamental que dicha transformación sea biunívoca, lo que en general depende de la geometría del elemento. Más adelante volveremos a tratar este tema.

Ejemplo 3.2 Interpolación paramétrica de una función cúbica

Solución

Consideremos la función $y = x^3 - 2x^2 - x + 4$ dibujada en la Figura 3.5. Dicha función puede representar, por ejemplo, el contorno de un elemento curvo. Supongamos que conocemos los valores de la función en tres abscisas $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$. Así

$$y(x_1) = 4 \quad ; \quad y(x_2) = 2 \quad ; \quad y(x_3) = 2$$

Vamos a interpolar dicha función partiendo de las coordenadas de dichos tres puntos utilizando un elemento cuadrático de tres nodos. La relación entre las coordenadas x, y con ξ se expresa para dicho elemento por

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)}(\xi)x_i = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)x_1 + (1-\xi^2)x_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)x_3 = 1 + \xi$$

$$y = \sum_{i=1}^3 N_i^{(e)}(\xi)y_i = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)y_1 + (1-\xi^2)y_2 + \frac{1}{2}\xi(1+\xi)y_3 = \xi(\xi-1) + 2$$

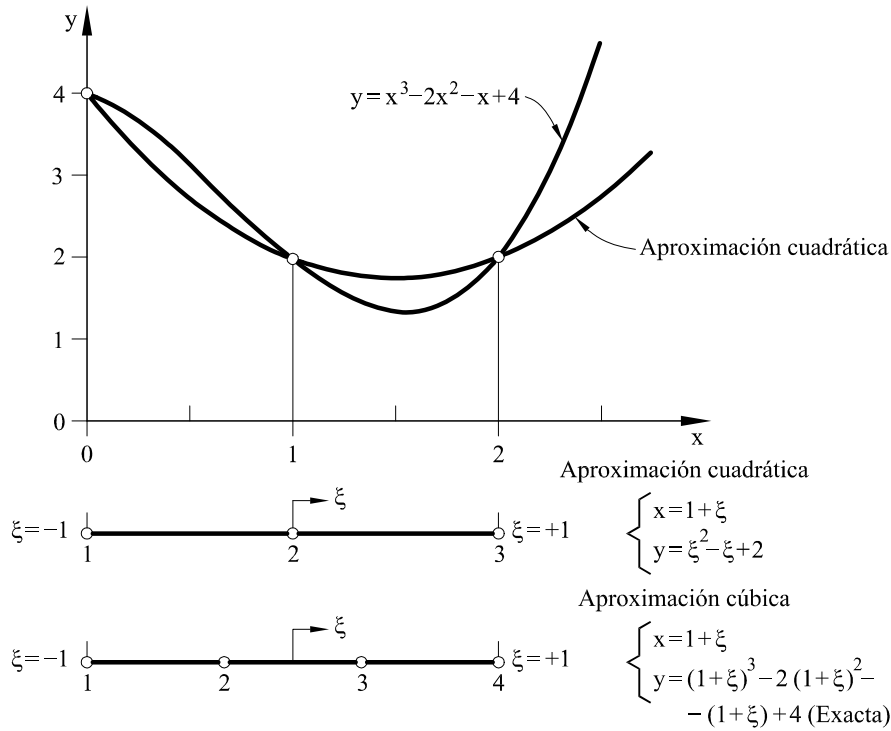


Figura 3.5: Ejemplo de interpolación paramétrica de un polinomio cúbico

Para obtener la expresión $y = f(x)$ basta sustituir el valor de ξ de la primera de estas dos ecuaciones en la segunda.

En la Figura 3.5 se muestra la función aproximada, observándose que tiene un cierto error en relación a la función exacta. Por otra parte, dicho error es mucho mayor fuera del intervalo en el que hemos seleccionado los tres puntos $[0, 2]$.

Procedamos ahora a utilizar una aproximación cúbica a partir de los valores de las coordenadas conocidas de cuatro puntos $x_1 = 0$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 4/3$, y $x_4 = 2.0$, con $y(x_1) = 4$, $y(x_2) = 74/27$, $y(x_3) = 40/27$ y $y(x_4) = 2$, respectivamente. Para ello, tomamos un elemento cúbico de cuatro nodos para el que puede escribirse

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i^{(e)}(\xi) x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i^{(e)}(\xi) y_i$$

donde las N_i son las funciones de forma cúbicas. Es fácil comprobar que en este caso se obtiene, tras operar

$$x = 1 + \xi \quad ; \quad y = (1 + \xi)^3 - 2(1 + \xi)^2 - (1 + \xi) + 4$$

Así, pues, como era de esperar, la aproximación cúbica escogida reproduce exactamente la función original, siendo el error de aproximación nulo en este caso.

Hay que distinguir entre los puntos utilizados para interpolar la geometría y los utilizados para interpolar la incógnita. En los elementos isoparamétricos ambos conjuntos de puntos coinciden.

De este ejemplo se deduce que a menos que utilicemos una aproximación geométrica correcta se producirán errores de aproximación de geometría que conviene evitar o, como mal menor, minimizar.

Vemos, pues, que en un elemento hay que considerar dos clases de puntos. Los que se utilizan para interpolar el campo de desplazamientos (nodos), que definen las funciones de forma N_i , y los que se utilizan para interpolar la geometría del elemento, que definen las funciones de interpolación de la geometría \hat{N}_i . Dichos puntos pueden ser o no coincidentes según las características del problema. Es decir, geometrías complejas pueden requerir utilizar polinomios de alto grado para aproximarlas razonablemente, mientras que en el caso de que la geometría sea sencilla, puede bastar con una sencilla interpolación geométrica lineal, todo ello independientemente de la interpolación utilizada para los desplazamientos.

Según lo anterior, si m es mayor que el número de nodos del elemento, las funciones de geometría \hat{N}_i serán polinomios de mayor grado que las funciones de forma N_i utilizadas para interpolar los desplazamientos, y la formulación recibe entonces el nombre de *superparamétrica*. Si m coincide con el número de nodos $N_i \equiv \hat{N}_i$ la formulación se denomina *isoparamétrica*. En el caso de que el número de puntos de geometría m sea menor que el de nodos se dice que la formulación es *subparamétrica*.

En la práctica es usual utilizar la formulación isoparamétrica. No obstante, conviene tener claros los conceptos anteriores ya que en determinadas situaciones de geometría excesivamente compleja (o sencilla) puede interesar hacer uso de las otras dos opciones.

La idea de interpolar los desplazamientos y las coordenadas del elemento con las mismas funciones de forma es original de Taig [T1,2], quien la utilizó para desarrollar elementos cuadriláteros de cuatro nodos. Posteriormente, Irons [I2,3] extendió estas ideas para obtener elementos de órdenes superiores.

3.3.2 Formulación isoparamétrica del elemento de dos nodos

Expresaremos la geometría del elemento en función de las coordenadas de los dos nodos como

$$x(\xi) = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \quad (3.13)$$

donde N_1 y N_2 son precisamente las mismas funciones de forma lineales utilizadas para describir la aproximación de la incógnita.

La ecuación anterior proporciona automáticamente $\frac{dx}{d\xi}$ como

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dN_1^{(e)}}{d\xi}x_1 + \frac{dN_2^{(e)}}{d\xi}x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{l^{(e)}}{2}$$

con lo que

$$dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \quad \text{y} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \quad (3.14)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior se deduce

En un elemento isoparamétrico la geometría se aproxima en función de las coordenadas de los nodos.

$$\frac{dN_1^{(e)}}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{dN_1^{(e)}}{d\xi} = - \frac{1}{l^{(e)}}$$

$$\frac{dN_2^{(e)}}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \frac{dN_2^{(e)}}{d\xi} = \frac{1}{l^{(e)}}$$

Resultado que, por otra parte, ya conocíamos. Hay que resaltar que en este caso particular pueden obtenerse estas expresiones de una manera más sencilla. No obstante, hemos preferido seguir aquí un procedimiento más sistemático que facilitará la comprensión del desarrollo de elementos isoparamétricos más complejos.

La matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes se pueden expresar ahora en el sistema normalizado como

$$\begin{aligned} K_{ij}^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} \frac{dN_i^{(e)}}{dx} k \frac{dN_j^{(e)}}{dx} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dN_i^{(e)}}{d\xi} k \frac{dN_j^{(e)}}{d\xi} \frac{2}{l^{(e)}} d\xi = (-1)^{i+j} \left(\frac{k}{l} \right)^{(e)} \\ f_i^{(e)} &= \int_{l^{(e)}} N_i^{(e)} Q dx = \int_{-1}^{+1} N_i^{(e)} Q \frac{l^{(e)}}{2} d\xi = \frac{Q l^{(e)}}{2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Obviamente, para deducir la expresión de $f_i^{(e)}$ hemos supuesto que Q es constante sobre el elemento. Las expresiones de $K_{ij}^{(e)}$ y $f_i^{(e)}$ coinciden como era de esperar con las obtenidas en el capítulo anterior.

3.3.3 Formulación isoparamétrica del elemento cuadrático de tres nodos

Estudiaremos ahora el elemento de tres nodos con funciones de forma polinómicas de segundo grado. La aproximación se expresa por

$$\phi = N_1^{(e)}(\xi)\phi_1^{(e)} + N_2^{(e)}(\xi)\phi_2^{(e)} + N_3^{(e)}(\xi)\phi_3^{(e)} \quad (3.16)$$

En la formulación isoparamétrica la coordenada x de un punto cualquiera del elemento se escribe como

$$x = N_1^{(e)}(\xi)x_1 + N_2^{(e)}(\xi)x_2 + N_3^{(e)}(\xi)x_3 \quad (3.17)$$

El gradiente dentro del elemento se obtiene por

$$g = \frac{d\phi}{dx} = \sum_{i=1}^3 \frac{dN_i^{(e)}}{dx} \phi_i = \left[\frac{dN_1^{(e)}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \frac{dN_2^{(e)}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \frac{dN_3^{(e)}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Por otra parte, de las expresiones de N_i se deduce

$$\frac{dN_1^{(e)}}{d\xi} = \xi - \frac{1}{2} ; \quad \frac{dN_2^{(e)}}{d\xi} = -2\xi ; \quad \frac{dN_3^{(e)}}{d\xi} = \xi + \frac{1}{2}$$

Las expresiones de $\mathbf{K}^{(e)}$ y $\mathbf{f}^{(e)}$ en el elemento de dos nodos coinciden con las obtenidas en el capítulo anterior.

En el elemento isoparamétrico cuadrático la geometría se define por la posición de los tres nodos.

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{dN_1^{(e)}}{d\xi} x_1 + \frac{dN_2^{(e)}}{d\xi} x_2 + \frac{dN_3^{(e)}}{d\xi} x_3 = (\xi - \frac{1}{2}) x_1 - \\ &- 2\xi x_2 + (\xi + \frac{1}{2}) x_3 = \frac{l^{(e)}}{2} + \xi (x_1 + x_3 - 2x_2) = j^{(e)} \end{aligned} \quad (3.19)$$

y

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{j^{(e)}} \quad (3.20)$$

La expresión anterior proporciona la relación entre dx y $d\xi$ en función de las coordenadas de los tres nodos del elemento. Es interesante advertir que en el caso (por otra parte usual) de que el nodo intermedio esté situado en el centro del elemento, se tiene

$$j^{(e)} = \frac{l^{(e)}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}} \quad (3.21)$$

La derivada $\frac{dx}{d\xi}$ es igual a $\frac{l^{(e)}}{2}$ en elementos lineales y en elementos cuadráticos en que el nodo intermedio esté situado en el centro del elemento.

y, por consiguiente

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{l^{(e)}}{2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{l^{(e)}}{2} d\xi \quad (3.22)$$

La matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales del elemento se obtienen de forma idéntica a lo explicado anteriormente para el elemento de dos nodos.

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \frac{dN_i}{dx} k \frac{dN_j}{dx} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{dN_i}{d\xi} k \frac{dN_j}{d\xi} \frac{1}{j^{(e)}} d\xi \quad (3.23)$$

$$f_i^{(e)} = \int_{l^{(e)}} N_i Q dx = \int_{-1}^{+1} N_i Q j^{(e)} d\xi$$

Las expresiones de $\mathbf{K}^{(e)}$ y $\mathbf{f}^{(e)}$ en el elemento de tres nodos tienen una expresión analítica sencilla, si el nodo intermedio está en el centro del elemento y k y Q son constantes.

Suponiendo el nodo intermedio centrado en el elemento $j^{(e)} = l^{(e)}/2$ y aceptando que k y Q son constantes sobre el elemento se obtiene, tras operar

$$\mathbf{K}^{(e)} = \left(\frac{k}{6l}\right)^{(e)} \begin{bmatrix} 14 & -16 & 2 \\ -16 & 32 & -16 \\ 2 & -16 & 14 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{f}^{(e)} = \frac{(Q)^{(e)}}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

de donde se deduce que el nodo central absorbe cuatro veces más flujo que los nodos extremos, lo que no es un resultado evidente a priori y que, sin embargo, se obtiene de forma “natural” por aplicación de los sencillos conceptos de equilibrio en forma integral.

Evidentemente, para una posición arbitraria del nodo intermedio las expresiones de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales serían diferentes. De hecho, en dicho caso los términos de la matriz K_{ij} contienen funciones racionales, como se deduce de la expresión general de $j^{(e)}$, y la integración directa de la matriz \mathbf{K} no es tan inmediata.

ación isopara-
esencial en ele-
y tridimension-

La formulación isoparamétrica de elementos unidimensionales de órdenes superiores sigue exactamente los mismos pasos explicados aquí para los elementos lineal y cuadrático. No obstante, se resalta que a medida que el orden del elemento aumenta se incrementa también la dificultad del cálculo de las integrales del elemento. Dicha dificultad se puede sortear de una manera sencilla y elegante haciendo uso de la integración numérica como se explica en el apartado siguiente.

3.4 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Hemos visto que pese a la gran simplicidad de los elementos unidimensionales, el cálculo analítico de las integrales del elemento puede resultar laborioso. En particular, si se usa una formulación isoparamétrica que conduzca a expresiones racionales en los coeficientes de $K_{ij}^{(e)}$ o $f_i^{(e)}$. De hecho, en la mayor parte de los elementos bi o tridimensionales isoparamétricos el cálculo directo de dichas integrales es inabordable, salvo en raras excepciones, y es imprescindible hacer uso de la integración numérica.

Entrar en detalle en todos los fundamentos matemáticos relacionados con la integración numérica se sale de los objetivos de estos apuntes. A efectos de simplificar ideas presentaremos aquí únicamente la *integración numérica de Gauss-Legendre* [R2], por ser éste el procedimiento más popular y utilizado en relación con el método de los elementos finitos. En este apartado estudiaremos únicamente las ideas básicas de dicha regla de integración en su aplicación unidimensional, dejando para capítulos posteriores la extensión de la misma a dos y tres dimensiones.

Supongamos una función $f(\xi)$ para la que se desea calcular la integral en el intervalo $[-1, +1]$, es decir

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \quad (3.25)$$

La regla de integración o cuadratura de Gauss-Legendre expresa el valor de dicha integral como suma de los productos de los valores del integrando en una serie de puntos conocidos en el interior del intervalo por unos coeficientes (pesos) determinados. Es decir, para una *cuadratura de orden p* se tiene que

$$I_p = \sum_{i=1}^p f(\xi_i) W_i \quad (3.26)$$

donde W_i es el peso correspondiente al punto de integración i , y p el número de dichos puntos. Es interesante destacar *que la cuadratura de Gauss-Legendre de orden n integra exactamente un polinomio de grado $2n - 1$ o menor* [R2]. Por otra parte, el error en el cálculo aproximado de una integral es de orden $O(\Delta^{2n})$, donde Δ es la distancia entre los puntos de integración. En la Tabla 3.1 se muestran las coordenadas ξ_i y los pesos W_i para las ocho primeras cuadraturas de Gauss-Legendre.

La integración numérica es esencial para la programación en ordenador del cálculo de integrales.

n	$\pm\xi_i$	W_i
1	0,0	2,0
2	0,5773502692	1,0
3	0,774596697 0,0	0,5555555556 0,8888888889
4	0,8611363116 0,3399810436	0,3478548451 0,6521451549
5	0,9061798459 0,5384693101 0,0	0,2369268851 0,4786286705 0,5688888889
6	0,9324695142 0,6612093865 0,2386191861	0,1713244924 0,3607615730 0,4679139346
7	0,9491079123 0,7415311856 0,4058451514 0,0	0,1294849662 0,2797053915 0,3818300505 0,4179591837
8	0,9602898565 0,7966664774 0,5255324099 0,1834346425	0,1012285363 0,2223810345 0,3137066459 0,3626837834

Tabla 3.1: Coordenadas y pesos de la cuadratura de Gauss-Legendre

Obsérvese que los puntos de integración están todos expresados en el espacio normalizado $-1 \leq \xi \leq 1$, lo que resulta de gran utilidad para el cálculo de las matrices del elemento referidas a las coordenadas naturales. La popularidad de la cuadratura de Gauss-Legendre se debe a que utiliza el mínimo número de puntos de integración para conseguir un error determinado en el cálculo de la integral. Por consiguiente, minimiza el número de veces que hay que calcular el valor de la función a integrar. Evidentemente existen otras reglas de integración numérica utilizables y el lector interesado en profundizar en este tema puede encontrar información detallada en [R1,2] y [P13].

Ejemplo 3.3 *Aplicaciones de las cuadraturas de Gauss-Legendre*

Solución

Sea el polinomio de cuarto grado

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

La integral exacta de $f(x)$ entre los límites $-1 \leq x \leq 1$ es

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x)dx = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = 3,0666$$

Cuadratura de Gauss-Legendre de primer orden:

$$p = 1 \quad , \quad x_1 = 0 \quad , \quad W_1 = 2 \quad ; \quad I = W_1 f(x_1) = 2$$

- *Cuadratura de segundo orden:*

$$p = 2 \quad \left\{ \begin{array}{ll} x_1 = -0,57735 & , \quad W_1 = 1 \\ x_2 = +0,57735 & , \quad W_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$I = W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) = 0,67464 + 2,21424 = 2,8888$$

- *Cuadratura de tercer orden:*

$$p = 3 \quad \left\{ \begin{array}{lll} x_1 = -0,77459 & , & W_1 = 0,5555 \\ x_2 = -0,0 & , & W_2 = 0,8888 \\ x_3 = +0,77459 & , & W_3 = 0,5555 \end{array} \right.$$

$$I = W_1 f(x_1) + W_2 f(x_2) + W_3 f(x_3) = 0,7204 \times 0,5555 +$$

$$+ 1,0 \times 0,8888 + 3,19931 \times 0,5555 = 3,0666 \quad \textbf{Valor exacto}$$

Vemos que para la integración exacta de un polinomio de grado 4 necesitamos 3 puntos de integración, lo que concuerda con la regla mencionada.

3.5 CÁLCULO DE LAS MATRICES Y VECTORES DE UN ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO UNIDIMENSIONAL PARA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON

Presentaremos las etapas necesarias para el cálculo de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas nodales equivalentes de un elemento unidimensional isoparamétrico de n nodos para la solución de la ecuación de Poisson. Las etapas se han ordenado de manera que se facilite al máximo la programación de todas las operaciones.

Las etapas para formular un elemento unidimensional isoparamétrico son las mismas que para la formulación de elementos bi y tridimensionales.

3.5.1 Interpolación de la incógnita

La variable ϕ en el interior del elemento se expresa por

$$\phi \simeq \hat{\phi} = N_1^{(e)} \phi_1^{(e)} + N_2^{(e)} \phi_2^{(e)} + \dots + N_n^{(e)} \phi_n^{(e)} =$$

$$= \sum_{i=1}^n N_i^{(e)} \phi_i^{(e)} = [N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, \dots, N_n^{(e)}] \left\{ \begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{array} \right\}^{(e)} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (3.27)$$

3.5.2 Interpolación de la geometría

En la formulación isoparamétrica la coordenada x de un punto del elemento se calcula por

$$x = N_1^{(e)} x_1 + N_2^{(e)} x_2 + \dots + N_n^{(e)} x_n = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)} x_i \quad (3.28)$$

3.5.3 Interpolación del gradiente

El gradiente de ϕ se expresa en función de las variables nodales por

$$g = \frac{d\phi}{dx} = \frac{dN_1^{(e)}}{dx} \phi_1^{(e)} + \frac{dN_2^{(e)}}{dx} \phi_2^{(e)} + \dots + \frac{dN_n^{(e)}}{dx} \phi_n^{(e)} = \sum_{i=1}^n \frac{dN_i^{(e)}}{dx} \phi_i^{(e)} \quad (3.29)$$

Por otra parte, las derivadas cartesianas de las funciones de forma se obtienen por

$$\frac{dN_i^{(e)}}{dx} = \frac{dN_i^{(e)}}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \quad (3.30)$$

Todas las operaciones esenciales se efectúan en el espacio isoparamétrico y luego se transforman al espacio cartesiano.

De la interpolación de la geometría se deduce

$$\frac{dx}{d\xi} = \sum_{i=1}^n \frac{dN_i^{(e)}}{d\xi} x_i = j^{(e)} \quad (3.31)$$

Por consiguiente

$$dx = j^{(e)} d\xi \quad ; \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{j^{(e)}} \quad (3.32)$$

y

$$\frac{dN_i^{(e)}}{dx} = \frac{1}{j^{(e)}} \frac{dN_i^{(e)}}{d\xi} \quad (3.33)$$

Es interesante advertir que $j^{(e)}$ es la relación entre los diferenciales de longitud de los dos sistemas de coordenadas x y ξ pudiendo interpretarse como el determinante del jacobiano de la transformación $x \rightarrow \xi$, y que precisamente por ser un problema unidimensional coincide con $\frac{dx}{d\xi}$. En capítulos posteriores veremos cómo en problemas bi y tridimensionales el jacobiano es una matriz 2×2 y 3×3 , respectivamente, cuyo determinante expresa la relación entre los diferenciales de área (en $2D$) y volumen (en $3D$) en cada uno de los sistemas cartesiano y natural.

3.5.4 Cálculo del flujo

El flujo se obtiene en función de ϕ por

$$q = -kg = -k \frac{d\hat{\phi}}{dx} = -k \sum_{i=1}^n \frac{dN_i^{(e)}}{dx} \phi_i^{(e)}$$

3.5.5 Matriz de rigidez del elemento

Siguiendo el mismo proceso a partir del MRP que para los elementos de dos y tres nodos se obtiene

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{l^{(e)}} \frac{dN_i^{(e)}}{dx} k \frac{dN_j^{(e)}}{dx} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{j^{(e)}} \frac{dN_i^{(e)}}{d\xi} k \frac{dN_j^{(e)}}{d\xi} d\xi \quad (3.35)$$

La mayor o menor sencillez de dicha integral depende de la expresión de las funciones de forma y de $j^{(e)}$. En general, el cálculo de $K_{ij}^{(e)}$ se efectúa por integración numérica con la cuadratura de Gauss-Legendre adecuada al grado de los polinomios que intervienen en el integrando. Así, utilizando una cuadratura de orden p

$$K_{ij}^{(e)} = \sum_{m=1}^p \left[\frac{1}{j^{(e)}} \frac{dN_i^{(e)}}{d\xi} k \frac{dN_j^{(e)}}{d\xi} \right]_{\xi_m} W_m \quad (3.36)$$

3.5.6 Vector de fuerzas nodales equivalentes

Para un flujo repartido de intensidad $Q(x)$ se obtiene

$$f_i^{(e)} = \int_{l^{(e)}} N_i^{(e)} Q dx = \int_{-1}^{+1} N_i^{(e)} Q j^{(e)} d\xi \quad (3.37)$$

De nuevo, para el cálculo de la integral anterior es útil emplear integración numérica, pudiendo escribirse en general

$$f_i^{(e)} = \sum_{m=1}^p [N_i^{(e)} Q j^{(e)}]_{\xi_m} W_m \quad (3.38)$$

Ejemplo 3.4 Calcular el coeficiente $K_{11}^{(e)}$ de la matriz de rigidez del elemento unidimensional de tres nodos de Poisson utilizando una formulación isoparamétrica e integración numérica

Solución

El coeficiente $K_{11}^{(e)}$ buscado se obtiene por

$$K_{11}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{j^{(e)}} \frac{dN_1^{(e)}}{d\xi} k \frac{dN_1^{(e)}}{d\xi} d\xi$$

Las integrales sobre el elemento se calculan en el espacio isoparamétrico normalizado.

Las expresiones de $K_{ij}^{(e)}$ y $f_i^{(e)}$ se obtienen por suma de los valores del integrando en los puntos de integración por los pesos correspondientes a la cuadratura utilizada.

Por otra parte, la expresión de la función de forma N_1 del elemento de tres nodos es

$$N_1^{(e)} = \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi \quad \text{y} \quad \frac{dN_1^{(e)}}{d\xi} = \xi - \frac{1}{2}$$

y suponiendo que el nodo 2 está centrado en el elemento, $j^{(e)} = \frac{l^{(e)}}{2}$.

Sustituyendo las expresiones de $\frac{dN_1}{d\xi}$ y $j^{(e)}$ en la de $K_{11}^{(e)}$ se obtiene

$$K_{11}^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \frac{2k}{l^{(e)}} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 d\xi$$

Dado que el integrando es una función cuadrática en ξ , utilizaremos para el cálculo exacto de $K_{11}^{(e)}$ una cuadratura de Gauss-Legendre de 2 puntos. Así

$$\begin{aligned} K_{11}^{(e)} &= \sum_{m=1}^2 \left[\frac{2k}{l^{(e)}} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \right]_{\xi_m} W_n = \left[\frac{2k}{l^{(e)}} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \right]_{\xi=-\frac{\sqrt{3}}{3}} + \\ &+ \left[\frac{2k}{l^{(e)}} \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \right]_{\xi=\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{7}{3} \left(\frac{k}{l}\right)^{(e)} \end{aligned}$$

De igual forma se obtendría el resto de los coeficientes de $\mathbf{K}^{(e)}$

3.6 ORGANIZACIÓN BÁSICA DE UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS PARA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON 1D

En el apartado anterior se han detallado las etapas fundamentales para el cálculo de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas nodales equivalentes de un elemento finito isoparamétrico para solución de la ecuación de Poisson 1D. Las etapas allí presentadas, aunque particularizadas para un elemento unidimensional, son completamente generales y se repetirán de manera idéntica en el estudio de otros elementos isoparamétricos en dos y tres dimensiones, como veremos en capítulos sucesivos. Así, pues, dichas etapas resumen las operaciones que deben programarse en ordenador para la utilización práctica de elementos isoparamétricos. Por tanto, es interesante dar aquí unas pinceladas de la estructura básica de un programa de elementos finitos, ya que, en definitiva, disponemos de todos los ingredientes necesarios para ello.

En la Figura 3.6 se muestra el diagrama de flujo principal de un programa de elementos finitos. La primera subrutina es la lectura de datos geométricos y mecánicos del programa a analizar (subrutina DATOS). Tras ello se calcula para cada elemento la matriz de rigidez (subrutina RIGIDEZ) y el vector de flujos nodales equivalentes (subrutina CARGAS), lo que para el elemento

La organización de un programa de elementos finitos es muy similar a la de un programa de cálculo matricial de estructuras.

de barra implica organizar el cálculo de las etapas descritas. El paso siguiente es ensamblar y resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio global para obtener las incógnitas nodales (subrutina SOLUCIÓN), para finalmente calcular las gradientes y flujos en cada elemento (subrutina FLUJO). Obsérvese la analogía de las etapas anteriores con el de un programa de cálculo matricial de estructuras de barras [L3] [H5].

3.7 SELECCIÓN DEL TIPO DE ELEMENTO

Una de las primeras decisiones en el cálculo de una estructura por elementos finitos es seleccionar el elemento que se va a utilizar para el análisis. Esta es una decisión importante y en ningún caso inmediata, puesto que, como hemos visto para el sencillo problema unidimensional, existen varios tipos de elementos utilizables todos ellos con diferentes grados de precisión.

Quizás habría que comenzar diciendo que la selección de un determinado elemento es una decisión totalmente personal del calculista que tiene que pronunciarse en base a: 1) las características propias del problema a analizar; 2) los tipos de elementos, programas de cálculo y capacidad de ordenador disponibles; y 3) la experiencia acumulada en la solución de problemas similares por el método de los elementos finitos.

No obstante estos planteamientos tan generales, existen unas mínimas normas que pueden tenerse en cuenta a la hora de seleccionar un elemento finito. Dichas normas son:

1. En caso de que se tenga una cierta idea de la forma polinómica de la solución, conviene utilizar elementos con funciones de forma del mismo grado que la solución conocida. Esto no sólo favorece la obtención de la solución exacta en los nodos, sino también garantiza que la variación de los desplazamientos en el interior de cada elemento es la correcta. Desafortunadamente, esta situación no ocurre en la mayor parte de los casos de interés práctico.
2. En zonas donde se intuya que pueden existir gradientes elevados es más adecuado utilizar elementos de mayor orden. Por el contrario, en zonas donde dicha variación sea más uniforme puede obtenerse una buena aproximación con elementos menos precisos.
3. Dadas las crecientes posibilidades de rapidez de cálculo y de capacidad de almacenamiento de los ordenadores actuales, se recomienda utilizar elementos finitos sencillos (pocos nodos) frente a elementos más complejos (muchos nodos).

Es evidente que los elementos más sencillos tienen una capacidad menor de aproximar soluciones en las que el campo de desplazamientos “exacto” sea una función polinómica de alto grado. Por consiguiente, para obtener una buena aproximación en dichos casos será necesario utilizar un mayor número

La selección de un elemento u otro se basa fundamentalmente en la experiencia del usuario.

La tendencia actual es utilizar elementos sencillos de orden de aproximación bajo.

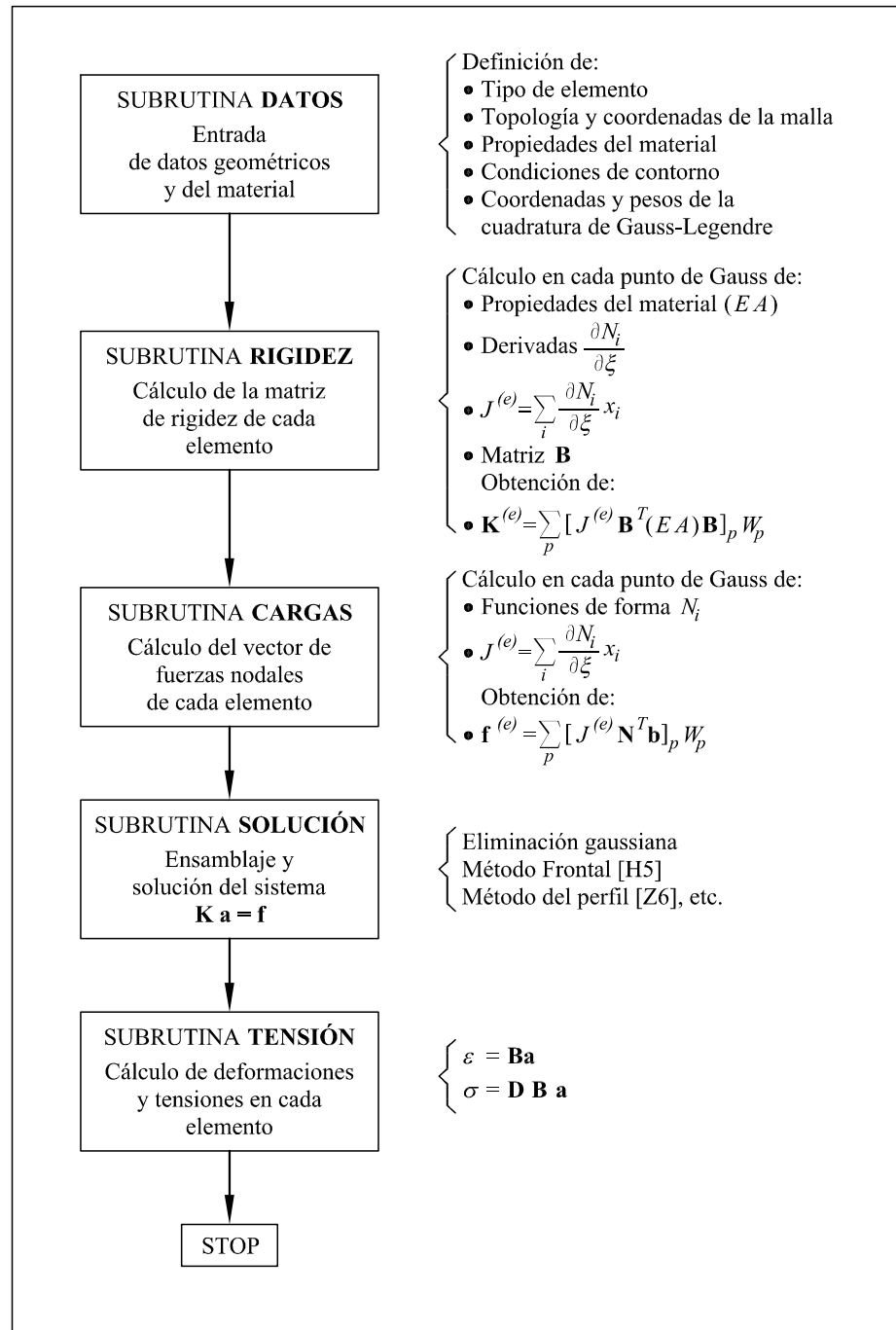


Figura 3.6: Diagrama de flujo principal de un programa de elementos finitos para análisis del problema de Poisson 1D

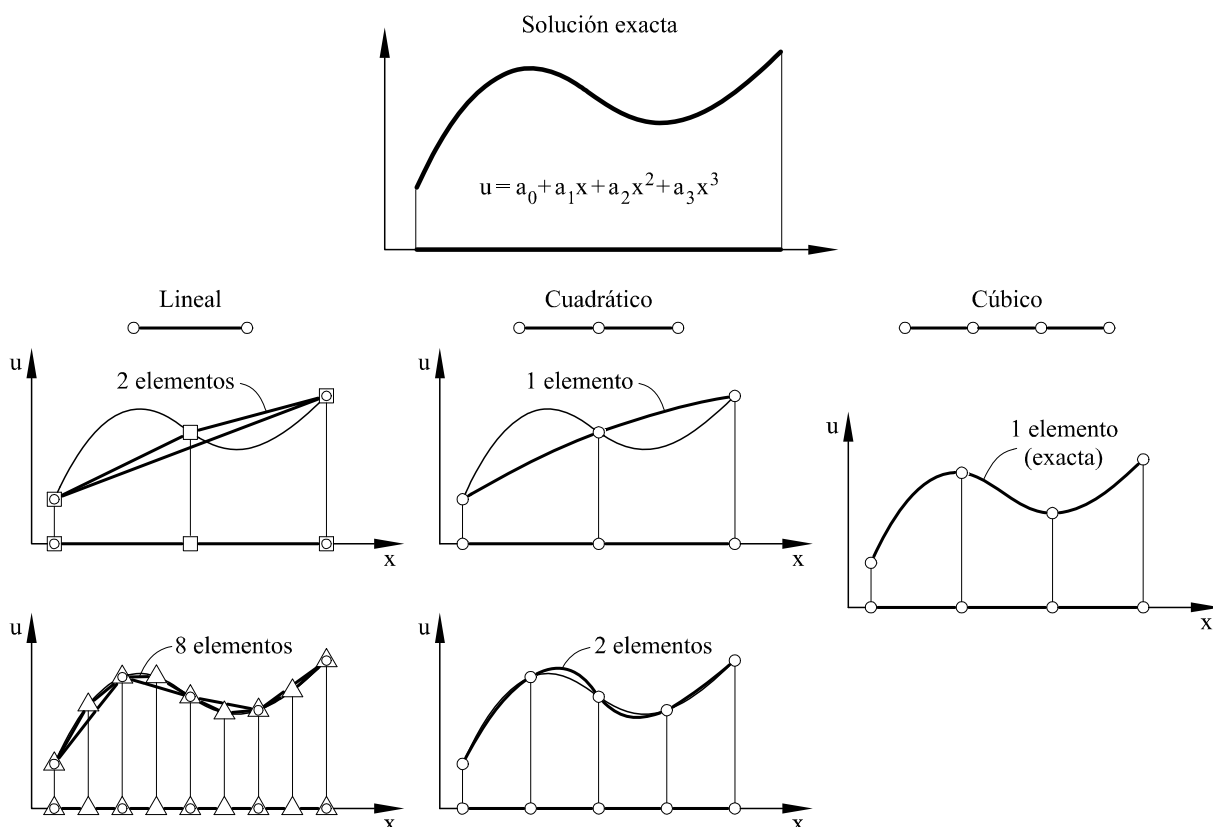


Figura 3.7: Ejemplo de aproximación de una solución cúbica con diferentes tipos de elementos finitos. Para mayor sencillez se ha supuesto que en todos los casos la aproximación es exacta en los nodos

de elementos que si se emplearan directamente elementos de órdenes superiores. Una representación simbólica de esta situación se describe en la Figura 3.7. Obviamente, para representar con precisión la solución de tercer grado de dicha figura con elementos lineales de dos nodos necesitamos un gran número de elementos, mientras que utilizando un solo elemento cúbico de cuatro nodos la aproximación es exacta. Sin embargo, la mayor sencillez de los elementos de menor orden hace que el cálculo de las matrices del elemento sea más económico que en el caso de elementos más complejos. Esto justifica la competitividad de los primeros, aún utilizándose en mayor número, puesto que los problemas asociados al mayor número de variables son cada vez menos importantes, dado el creciente avance en velocidad de los computadores. La disyuntiva surge al tener que escoger un elemento de entre dos de órdenes similares. En este caso es claramente la experiencia del calculista la que decide, aunque, como regla práctica, en caso de duda se recomienda utilizar siempre el elemento más sencillo.

3.8 REQUISITOS PARA LA CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN

La aproximación de elementos finitos debe satisfacer ciertas condiciones que garanticen que a medida que se utilicen más elementos, la solución se aproxime más a la exacta. En la práctica, debido a condiciones externas al propio análisis, tales como la falta de tiempo o aspectos económicos, generalmente se suelen efectuar uno o como máximo dos análisis con dos mallas diferentes. No obstante, es importante estar seguros de que, dadas las condiciones ideales de tiempo y capacidad de ordenador, seríamos capaces de aproximar suficientemente la solución exacta mediante refinamientos sucesivos de la malla.

Es importante que un elemento satisfaga los requisitos que garanticen que la solución converge al refinar la malla.

Dentro de este contexto las condiciones esenciales para la convergencia de la solución de elementos finitos son las siguientes:

Condición de continuidad

La aproximación de ϕ debe ser continua *en el interior* de cada elemento.

Esta evidente condición se satisface automáticamente al utilizar aproximaciones polinómicas. Por consiguiente, en la práctica no hay que preocuparse de ella.

Condición de derivabilidad

Es obvio que la aproximación polinómica escogida debe ser derivable al menos hasta el orden de las derivadas que aparecen en las integrales del problema. En caso contrario, nunca se podrían reproducir con la aproximación de elementos finitos todos los términos de dichas integrales.

Así, por ejemplo, en el problema unidimensional estudiado en los apartados anteriores la forma integral débil no contiene derivadas de orden mayor al primero, lo que exige simplemente que las funciones de forma sean, al menos, polinomios de primer grado.

Condición de integrabilidad

Las funciones de forma deben ser derivables e integrables para poder calcular las expresiones de $K_{ij}^{(e)}$ y $f_i^{(e)}$.

Lógicamente, las funciones de forma deben ser tales que las integrales de la forma débil tengan función primitiva. Para explicar esta condición consideremos el sencillo ejemplo de la Figura 3.8 donde se ha representado una función lineal continua $f(x)$ y sus dos primeras derivadas. Vemos que la integral de $f(x)$ en el intervalo considerado existe y es igual al área rayada de la figura. Asimismo, existe la integral de su primera derivada $f'(x)$ pese a que no es una función continua. Finalmente, vemos que la derivada segunda $f''(x)$ tiene puntos singulares, fruto de la discontinuidad de $f'(x)$ y no es integrable. Por consiguiente, la regla general que se deduce de este sencillo ejemplo es la siguiente: la derivada de orden m de una función es integrable si son continuas sus $m - 1$ primeras derivadas.

Así, pues, trasladando lo anterior al problema de elementos finitos diremos que si en la forma débil aparecen derivadas de la incógnita de orden m ,

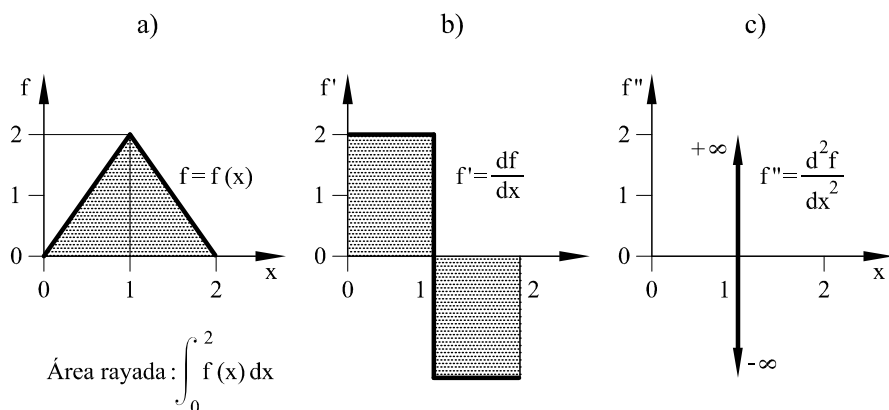


Figura 3.8: Ejemplo de condición de integrabilidad de una función y sus derivadas

las funciones de forma utilizadas para aproximar la incógnita, deben tener continuidad de clase C^{m-1} .

Como ejemplo consideremos el sencillo problema unidimensional estudiado en apartados anteriores. Hemos visto que en las integrales aparecen únicamente derivadas de primer grado de ϕ , por tanto, de acuerdo con lo anterior, basta con que ϕ sea simplemente continuo (continuidad de clase C^0). Dicha continuidad está garantizada en el interior del elemento al escoger funciones de forma polinómicas, y, entre elementos, al venir definido unívocamente ϕ por un único valor en los nodos. Por consiguiente, la continuidad de la variable está totalmente garantizada.

Esta condición es de gran importancia y hay que tenerla muy en cuenta a la hora de escoger las funciones de forma para cada problema.

Criterio de la parcela

En la búsqueda de criterios sencillos para predecir la convergencia o divergencia de un elemento, Irons [15,7] estableció un procedimiento basado en un razonamiento de tipo físico e intuitivo que prácticamente se ha establecido como el más adecuado y utilizado en la práctica para los fines citados. Es por ello que vale la pena incluirlo dentro de este apartado.

El método recibe el nombre de *criterio de la parcela* y se basa en seleccionar un conjunto, o parcela, de elementos y aplicar en los nodos del *contorno* de la parcela valores de ϕ prescritos correspondientes a una solución conocida en toda ella. Se dice entonces que el elemento satisface el criterio de la parcela, lo que garantiza su convergencia si la solución obtenida para ϕ y sus gradientes en el interior de la parcela coincide con la que se deduciría analíticamente del campo de ϕ conocido [T4].

Esta sencilla y lógica prueba, fácil de aplicar en la mayoría de los casos, no se cumple sin embargo para algunos elementos, lo que según está comprobado los descalifica, en principio, para su utilización práctica.

Del criterio de la parcela se desprenden dos importantes condiciones para

El criterio de la parcela es condición necesaria y suficiente para la convergencia de un elemento.

la convergencia del elemento.

Condición de gradiente constante

A medida que la malla de elementos finitos se refina las condiciones dentro de cada elemento se aproximarán más a las de un estado de gradiente constante. Obviamente, todo elemento debe ser capaz de reproducir dicho estado para garantizar la convergencia en el límite.

Esta condición correspondería a la aplicación del criterio de la parcela con un campo de ϕ prescrito que produzca un estado de gradiente constante.

Condición de gradiente nulo

Al someter a un elemento, o una parcela de elementos, a un campo de ϕ prescrito en su contorno correspondientes a un valor de ϕ constante en todo el dominio sólido, debe obtenerse un estado de gradiente y flujo nulo en su interior; si no fuera así, dicho elemento puede no ser adecuado para reproducir estados de gradientes más complejos. Adviértase que éste es un caso particular del anterior para un gradiente constante igual a cero.

La condición de gradiente nulo para un elemento aislado se satisface siempre y cuando la suma de las funciones de forma en cualquier punto del elemento valga la unidad.

En efecto, supongamos el sencillo elemento de dos nodos ya estudiado, y apliquemos valores iguales $\bar{\phi}$ a los dos nodos del elemento. En el interior del elemento se tendrá

$$\phi = N_1 \bar{\phi} + N_2 \bar{\phi} = (N_1 + N_2) \bar{\phi}$$

Por consiguiente, para que $\bar{\phi}$ coincida con ϕ en todo el elemento se ha de cumplir $N_1 + N_2 = 1$, que es la condición buscada.

Aclaremos el criterio de la parcela con un par de sencillos ejemplos.

Ejemplo 3.5 *Consideremos la malla de elementos finitos de la Figura 3.9. Todos los elementos tienen la misma longitud y propiedades del material. Aplicar el criterio de la parcela a la zona de la malla indicada compuesta por tres elementos de dos nodos*

Solución

Caso a: Solución de gradiente constante

Supondremos conocida la solución $\phi = l + x$ que proporciona un estado de gradiente en toda la malla e igual a $g = \frac{d\phi}{dx} = 1$. En los extremos de la parcela escogida se tienen los siguientes movimientos prescritos:

$$\begin{aligned}\phi_3 &= l + 3l = 4l \\ \phi_6 &= l + 6l = 7l\end{aligned}$$

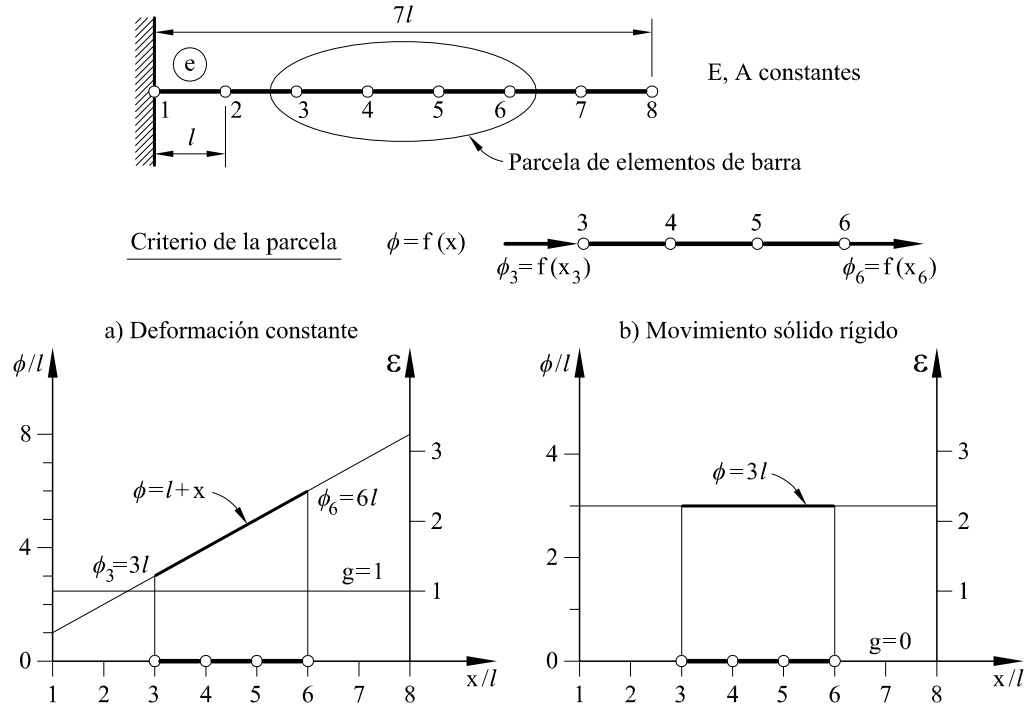


Figura 3.9: Ejemplo de cumplimiento del criterio de parcela en elementos de barra de dos nodos

Resolveremos el problema de elementos finitos de encontrar ϕ_4 y ϕ_5 en la parcela conocidos ϕ_3 y ϕ_6 . El sistema de ecuaciones a resolver es

$$K \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_3 \\ 0 \\ 0 \\ R_6 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \phi_3 = 4l \\ \phi_6 = 7l \end{matrix}$$

del que se obtiene $\phi_4 = 5l$ y $\phi_5 = 6l$ que coinciden con los valores exactos correspondientes al campo de ϕ prescrito. Asimismo, se puede comprobar fácilmente que

$$\begin{aligned} g^{(3)} &= -\frac{1}{l}\phi_3 + \frac{1}{l}\phi_4 = 1 \\ g^{(4)} &= -\frac{1}{l}\phi_4 + \frac{1}{l}\phi_5 = 1 \\ g^{(5)} &= -\frac{1}{l}\phi_5 + \frac{1}{l}\phi_6 = 1 \end{aligned}$$

lo que corresponde con la solución esperada. Así, pues, el elemento satisface el criterio de la parcela.

Caso b: Solución de gradiente nulo

Un caso particular del anterior es el de campo de ϕ prescrito correspondiente a un valor de ϕ constante, con gradiente nulo en toda la malla.

Estudiando el comportamiento de la parcela de elementos para $\phi = 3l$, lo que equivale a resolver el sistema de ecuaciones del caso (a) con $\phi_3 = \phi_6 = 3l$, se obtiene $\phi_4 = \phi_5 = 3l$ con lo que el gradiente es nulo en toda la parcela y la solución coincide de nuevo con la prevista.

3.9 OTROS REQUISITOS DESEABLES PARA LA APROXIMACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

Estudiaremos otros requisitos que sería bueno que satisficiera la aproximación de elementos finitos. Dichos requisitos no son estrictamente “condiciones necesarias” para la convergencia. No obstante, su cumplimiento es siempre deseable ya que en caso contrario pueden encontrarse situaciones en que se deteriore la convergencia o la precisión de la solución.

Condición de compatibilidad

La continuidad de clase C^0 exige que la aproximación sea *continua entre elementos*. Por consiguiente, no deben existir saltos entre los valores de las variables a lo largo de los lados o caras comunes entre elementos. Los elementos que satisfacen esta condición se denominan *compatibles* o *conformes*. Está demostrado que si se utiliza integración exacta para todas las matrices y vectores, los elementos conformes convergen siempre desde soluciones más rígidas que la “exacta” [C15].

Un elemento incompatible puede ser utilizable en la práctica si satisface el criterio de la parcela.

La condición de compatibilidad se satisface *normalmente* si se cumple el requisito de continuidad de la función aproximada en los nodos, lo que está garantizado al utilizar funciones de forma polinómicas con valor unidad en un nodo y cero en el resto. Esto puede no cumplirse en algunos casos como, por ejemplo, en algunos elementos de placa delgada basados en la teoría de Kirchhoff y entonces los elementos son *incompatibles* o *no conformes*. Estos elementos pueden, sin embargo, ser válidos y converger a la solución correcta si al refinar progresivamente la malla desaparece la incompatibilidad y se consigue que el elemento reproduzca un estado de deformación constante.

Curiosamente, los elementos incompatibles son a veces más competitivos. Esto es debido a que las discontinuidades mencionadas tienden a flexibilizar la solución, lo que equilibra el efecto de rigidez intrínseco a la aproximación polinómica de elementos finitos, obteniéndose a veces resultados sorprendentemente buenos con mallas groseras. No obstante, éste es un efecto poco predecible y además impide conocer a priori si la solución es por exceso o por defecto ya que no es posible garantizar que la aproximación de elementos finitos es más “rígida” que la exacta, lo que sí se cumple en elementos compatibles.

En resumen, para garantizar la convergencia debe satisfacerse la condición de compatibilidad al *ir refinando progresivamente la malla*. Por tanto, el

incumplimiento de dicha condición en una malla grosera no implica que la solución no sea válida y que la convergencia no sea alcanzable.

Condición de polinomio completo

Para explicar esta condición de manera sencilla recordemos que la solución polinómica de elementos finitos equivale a aproximar un cierto número de términos del desarrollo en serie de Taylor de la solución exacta, que en el entorno del punto x_i se expresa por

$$\phi(x) = \phi(x_i) + \frac{1}{1!} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)_i (x - x_i) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\phi}{dx^2} \right)_i (x - x_i)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n\phi}{dx^n} \right)_i (x - x_i)^n$$

Por otra parte, la aproximación de elementos finitos proporciona una solución de la forma

$$\bar{\phi}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

Los términos del polinomio completo en N_i garantizan el orden de la aproximación.

Es evidente que $\bar{\phi}(x)$ aproximará hasta el término m -ésimo del desarrollo de Taylor de $\phi(x)$ siempre y cuando la expresión de $\bar{\phi}(x)$ contenga todos los términos del polinomio de grado m (polinomio completo de grado m). En dicho caso, el error de la aproximación de elementos finitos es del orden del primer término que se desprecia en el desarrollo de Taylor de $\phi(x)$, y a partir de dicho error pueden deducirse formas de extrapolación de la solución.

Se deduce de lo anterior que la aproximación de elementos finitos depende del polinomio completo de mayor grado contenido en las funciones de forma. Así la aproximación será óptima si todos sus términos forman un polinomio completo y no lo será en caso contrario, ocurriendo entonces que los términos adicionales a los del polinomio completo introducen variables que no contribuyen de manera significativa a una mayor aproximación del elemento.

Ejemplo 3.6 Polinomios y aproximaciones completas e incompletas

Solución

1. Polinomio completo de grado 2. Aproximación completa de grado 2.

$$\begin{aligned} 1D : \quad \bar{\phi}(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 \\ 2D : \quad \bar{\phi}(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \end{aligned}$$

2. Polinomio completo de primer grado. Aproximación incompleta de tercer grado.

$$\begin{aligned} 1D : \quad \bar{\phi}(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^3 \\ 2D : \quad \bar{\phi}(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5x^3 \end{aligned}$$

Para deducir los términos que intervienen en un polinomio completo de más de una variable es útil hacer uso del *triángulo de Pascal* [R2]. En un capítulo posterior volveremos a referirnos a este tema al hablar de funciones de forma de elementos bidimensionales.

En conclusión, es deseable que las funciones de forma del elemento sean polinomios completos y, en caso de que esto no sea factible, como sucede con frecuencia, que el número de términos adicionales a los del polinomio completo sea el menor posible. Hay que señalar que el hecho de que la aproximación escogida sea incompleta no impide la convergencia.

3.9.1 Condición de estabilidad

La matriz de rigidez de un elemento debe tener un rango correcto. Recordemos que el rango de una matriz es igual al número de valores propios no nulos que contiene [R2]. El rango correcto de la matriz de rigidez de un elemento aislado y sin vinculaciones externas debe ser igual al número de valores propios no nulos del elemento. Una vez prescritos los valores de la incógnita en los contornos, el elemento se considera “estable” en cuanto a la posibilidad de adoptar formas de mecanismo, también denominadas modos de energía nula. La estabilidad del elemento está generalmente garantizada si la matriz de rigidez del elemento se evalúa de forma correcta. No obstante, en la práctica sucede con frecuencia que debido a la evaluación inexacta de algunos términos de dicha matriz, por ejemplo por utilización de técnicas de integración reducida (ver capítulos posteriores), se introducen en el elemento valores propios nulos adicionales que dan lugar a “mecanismos” internos y soluciones espúreas. Dichos mecanismos no son deseables y un elemento “óptimo” debería estar libre de ellos.

Errores en el cálculo de la matriz de rigidez pueden conducir a soluciones inestables.

La existencia de autovalores espúreos no siempre es motivo de exclusión de un elemento, ya que, en algunos casos, los mecanismos a que dan lugar no son propagables entre dos o más elementos, lo que garantiza el buen comportamiento del elemento en una malla. Por tanto, si se detectan mecanismos espúreos en un elemento antes de decidir sobre la exclusión del mismo deben efectuarse más comprobaciones sobre el grado de propagación de la solución espúrea en una malla.

3.9.2 Condición de invarianza

Un elemento no debe tener direcciones preferentes. Es decir, los elementos deben poseer lo que se denomina “invarianza geométrica”, también conocida con el nombre de isotropía geométrica o espacial.

La no invarianza se manifiesta si al variar de dirección el elemento en el espacio en que está definido, manteniendo constante con relación al elemento el estado de solicitaciones, se obtienen resultados diferentes. En general, un elemento es invariante si todas las incógnitas se interpolan con los mismos términos polinómicos y a su vez la aproximación es insensible al cambio de una coordenada por otra.

La no invarianza es claramente un defecto del elemento, pero no es un condicionante para su convergencia. La invarianza de un elemento está garantizada si sus funciones de forma son polinomios completos. En general, los elementos pueden hacerse invariantes de una manera sencilla utilizando una formulación isoparamétrica [C15].

3.10 CONSIDERACIONES SOBRE COMPATIBILIDAD Y EQUILIBRIO DE LA SOLUCIÓN

No debemos olvidar que la solución de elementos finitos es aproximada y, por consiguiente, en general no satisface los requisitos de equilibrio y compatibilidad que serían exigibles a la solución exacta. Así, al efectuar un análisis por elementos finitos encontraremos usualmente (aunque según el tipo de elemento puede haber excepciones) que:

1. *La solución es compatible dentro de los elementos.* Esto está garantizado siempre que la aproximación escogida para el campo incógnita sea continua (lo que se cumple utilizando funciones de forma polinómicas).
2. *La solución puede ser o no ser compatible a lo largo de los contornos interelementales.* Hemos visto en el apartado anterior que la compatibilidad entre elementos sólo es exigible en el límite de refinamiento de la malla. Por consiguiente, son aceptables soluciones incompatibles e incluso en algunos casos pueden mejorar los resultados como se ha explicado.
3. *La compatibilidad se satisface siempre en los nodos,* debido a que son los puntos de conexión entre elementos y donde exigimos que se satisfaga la continuidad de las variables y el equilibrio.
4. *El equilibrio de flujos se satisface siempre en los nodos.* Las ecuaciones matriciales de la estructura satisfacen el equilibrio en todos los nodos. Por consiguiente, la solución aproximada es tal que la suma de flujos en cada nodo es nula ($\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{f} = 0$).
5. *Normalmente no existe equilibrio de flujos entre elementos,* Los flujos en los nodos de cada elemento se obtienen directamente a partir de los valores nodales de ϕ , o por extrapolación de los valores en los puntos de Gauss de cada elemento. Por consiguiente, los flujos en un nodo común a varios elementos toman valores diferentes según sea el elemento a partir del cual se calculan. Es, por tanto, usual realizar un alisado del campo de flujos posterior al análisis, evaluando, por ejemplo, el valor medio de los valores nodales de los flujos (Figura 3.10). Por otra parte, puede observarse que si se calculan los flujos en los bordes libres, sus valores no son cero, aunque deben ser sensiblemente inferiores a los de los flujos en el interior de la malla. Esta falta de equilibrio de los flujos es consecuencia de la formulación utilizada, donde la continuidad se exige a la variable

Los elementos finitos son “conservativos” en los nodos. Es decir, el equilibrio de flujos se satisface en cada nodo.

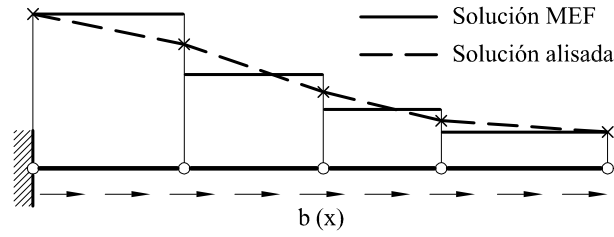


Figura 3.10: Ejemplo de alisado de flujos en elementos de barra por obtención de valores medios nodales

ϕ , pudiendo ser discontinuas sus primeras derivadas (gradientes) y, por consiguiente, los flujos. Por tanto, la existencia de dicha discontinuidad no viola las condiciones para la convergencia y los desequilibrios mencionados se corrigen generalmente al refinar progresivamente la malla.

6. *Los flujos no están en equilibrio en el interior del elemento.* La solución de elementos finitos se obtiene a partir de una aproximación de la forma integral débil, por tanto, las ecuaciones diferenciales de balance [T6] se satisfacen generalmente de forma aproximada. Una excepción a dicha regla son los elementos basados en campos de desplazamientos lineales, como el elemento de dos nodos, o los elementos triangular de tres nodos y tetraédrico de cuatro que se estudiarán en capítulos posteriores. En todos estos elementos el campo de gradientes y flujos es constante y, por consiguiente, las ecuaciones de balance en las que intervienen las primeras derivadas de los flujos se satisfacen de manera automática. De nuevo, esta falta de equilibrio interno se suele corregir al refinar la malla y no es un condicionante para la convergencia de la solución.

Los flujos son discontinuos entre elementos y deben alisarse para obtener una solución nodal continua.

3.11 CONDICIONES PARA LA CONVERGENCIA DE LOS ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

Los elementos isoparamétricos se basan en la aproximación de su geometría por un campo polinómico, y por consiguiente continuo, que contiene precisamente los mismos términos que el utilizado para la aproximación de ϕ . Así, pues, el requisito de continuidad del campo geométrico se satisface de manera automática. Demostraremos seguidamente que los elementos isoparamétricos cumplen el criterio de la parcela.

Prescribamos el campo de ϕ

$$\phi = a_1 + a_2 x$$

sobre una malla de elementos lineales. Los desplazamientos de los nodos de un elemento valdrían entonces

$$\phi_i = a_1 + a_2 x_i \quad ; \quad i = 1, 2$$

En el interior del elemento $\phi = \sum_{i=1}^2 N_i \phi_i^{(e)}$ y haciendo uso de los valores de ϕ prescritos

$$\phi = \sum_{i=1}^2 N_i^{(e)} (a_1 + a_2 x_i) = a_1 \sum_{i=1}^2 N_i^{(e)} + a_2 \sum_{i=1}^2 N_i^{(e)} x_i$$

Por definición de elemento isoparamétrico

$$x = \sum_{i=1}^2 N_i^{(e)} x_i$$

Se deduce por tanto que para que el campo de desplazamientos del elemento coincida con el prescrito en la malla se ha de cumplir

$$\sum_{i=1}^2 N_i^{(e)} = 1$$

para cualquier valor de la coordenada natural ξ entre -1 y $+1$. Obsérvese que esta condición es idéntica a la obtenida en el apartado anterior para satisfacer la condición de gradiente nulo en un elemento cualquiera. Se deduce, por tanto, que en elementos isoparamétricos dicha condición tiene un carácter más general ya que es el requisito para que el elemento satisfaga el criterio de la parcela

Hay que señalar, asimismo, que la definición de las funciones de forma en coordenadas naturales no altera la condición de compatibilidad de los valores de ϕ entre contornos comunes, ya que sobre dichos contornos la variación polinómica de ϕ es la misma para los dos elementos que comparten el contorno, y asimismo son iguales los valores de los valores nodales ϕ_i . Finalmente, es útil destacar que los elementos isoparamétricos son invariantes debido a la utilización de las coordenadas naturales para el cálculo de la matriz de rigidez.

3.12 TIPOS DE ERROR EN LA SOLUCION DE ELEMENTOS FINITOS

Debido al carácter de la aproximación de elementos finitos la solución está afectada por diversas fuentes de error. Analizaremos a continuación los tipos de error más usuales.

3.12.1 Error de discretización

Este error es inherente al carácter polinómico de la aproximación de elementos finitos. El error asociado a dicha aproximación puede estimarse comparando el polinomio completo de mayor grado contenido en las funciones de forma con el desarrollo en serie de Taylor de la solución exacta. Es fácil deducir que dicho error es del orden del primer término del desarrollo de Taylor no incluido en el polinomio completo mencionado. Strang y Fix [S14] proponen la siguiente expresión general para evaluar dicho error en problemas unidimensionales

El error de discretización se corrige utilizando mallas más finas.

$$e(\text{error}) = \phi_{\text{aprox}} - \phi_{\text{exacta}} \leq Ch^{p+1} \text{Max} \left| \frac{\partial^{p+1} \phi_{\text{exacta}}}{\partial x^{p+1}} \right| \quad (3.63)$$

donde el símbolo Max representa el máximo valor de la derivada sobre todo el elemento, C es una constante que depende del tipo de elemento, h su dimensión máxima (ej. la longitud en elementos de barra) y p el grado del mayor polinomio completo contenido en las funciones de forma.

De (3.63) se deduce que siempre que la constante C y la derivada de orden $n + 1$ de la solución estén acotadas, la convergencia de la solución está garantizada, puesto que el error tiende a cero cuando lo hace el tamaño del elemento.

Si aplicamos los conceptos anteriores al elemento de Poisson unidimensional se tiene que para mallas uniformemente espaciadas

$$e \propto h^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (3.64)$$

De (3.64) se desprende que para este elemento el error es proporcional al gradiente de deformaciones (o tensiones). Por consiguiente, debemos utilizar un criterio ingenieril para seleccionar tamaños de elementos menores en zonas donde se esperen mayores gradientes de deformaciones (o concentración de tensiones). Por el contrario, en zonas donde se intuyan campos uniformes de deformaciones pueden utilizarse elementos mayores.

La estimación del error es esencial para detectar las zonas donde debe refinarse la malla para mejorar la solución.

Si no se desea variar el tamaño de los elementos, puede reducirse el error añadiendo términos polinómicos de mayor grado a las funciones de forma de manera que se incremente el exponente p de (3.63).

Estos dos métodos para disminuir el error basados en refinar progresivamente la malla y en incrementar el grado de las funciones de forma se denominan en la literatura métodos h y p , respectivamente.

Los comentarios anteriores se referían al caso de una malla uniforme. El efecto de utilizar elementos de distintos tamaños ha sido estudiado para el caso de una barra discretizada en elementos lineales de dos tamaños diferentes y sometida a una carga axial. Puede demostrarse que el error en el cumplimiento de la ecuación diferencial en el nodo j debido a la aproximación de elementos finitos es

$$e = -\frac{h}{3} (1-a) \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_j + \frac{h^2}{12} \left(\frac{1+a^3}{1+a} \right) \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} (x_j) + \dots \quad (3.65)$$

donde h es el tamaño de un elemento y ah el tamaño del elemento adyacente (Figura 3.11). Se deduce de (3.65) que para una malla uniforme ($a \simeq 1$) el error es de orden h^2 , mientras que si se utilizan elementos de tamaños muy diferentes ($a \neq 1$) se obtiene un mayor error de orden h . Ello sugiere que es conveniente que los cambios en la geometría de los elementos sean graduales y que debe evitarse colocar un elemento pequeño contiguo a uno grande.

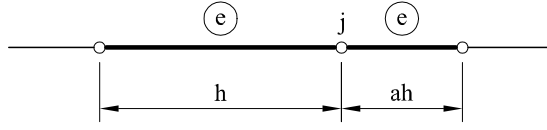


Figura 3.11: Elementos de barra adyacentes de diferente tamaño

En capítulos posteriores se estudiarán problemas en dos y tres dimensiones donde son válidos los conceptos sobre el error presentados para una dimensión. Así, en dos dimensiones es preciso hacer uso del desarrollo en serie de Taylor en el entorno de un punto (x, y)

$$u(x+h, y+k) = u(x, y) + \left[h \frac{\partial u}{\partial x} + k \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \underbrace{+ \frac{1}{2!} \left[h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]}_{\text{término subrayado}} + \dots \quad (3.66)$$

donde u es la solución exacta y h y k son una medida del tamaño del elemento en las direcciones x e y .

Puede demostrarse que en elementos bidimensionales lineales, como el triángulo de 3 nodos (ver Capítulo 5), el error es proporcional al término subrayado del segundo miembro de la ec. (3.66) [S14]. De nuevo puede encontrarse que las segundas derivadas de dicho término están relacionadas directamente con los gradientes de las deformaciones (de las tensiones). Así, si las deformaciones son constantes el error es muy pequeño o cero.

Es interesante comentar que el término de error puede expresarse en función del cociente $\left(\frac{k}{h}\right)$. Dicho cociente es una medida de las dimensiones relativas del elemento y se conoce con el nombre de *relación de forma*. Para un elemento equilátero dicho cociente debería ser próximo a la unidad. Sin embargo, para un elemento triangular largo sería grande. Generalmente es mejor mantener la relación de forma próxima a la unidad.

3.12.2 Error de aproximación de la geometría

Es usual que los contornos de una estructura bi o tridimensional sean curvos. En algunos casos es posible que la ecuación de dichos contornos sea expresable por funciones polinómicas, lo que permite su reproducción exacta utilizando una formulación paramétrica de la geometría adecuada. Por el contrario, en muchos otros casos las funciones de interpolación de la geometría no pueden aproximar exactamente ésta (como sucede al utilizar elementos isoparamétricos de orden bajo en geometrías complejas). Asimismo, en ocasiones los contornos de la estructura no son reproducibles de forma exacta por funciones polinómicas, o, lo que es frecuente, puede que ni siquiera se conozca una expresión analítica de la geometría, disponiéndose únicamente de las coordenadas de una serie de puntos aislados del contorno. En todos estos casos siempre se comete un error al aproximar la geometría de la estructura. Es evidente que dicho error puede disminuirse refinando la malla

La utilización de elementos isoparamétricos puede introducir errores en la aproximación de geometrías complejas.

en los contornos, o bien haciendo uso de funciones de interpolación de geometría progresivamente de mayor grado mediante la utilización de elementos superparamétricos. En la práctica, es usual llegar a un compromiso entre esas dos opciones y, salvo en circunstancias muy excepcionales, se recomienda utilizar elementos isoparamétricos sencillos en un número suficiente para poder aceptar como razonable el error de aproximación de geometría, por otra parte prácticamente inevitable, salvo en estructuras con contornos lineales en las que la aproximación geométrica siempre es exacta.

3.12.3 Error en el cálculo de las integrales del elemento

Hemos visto que, incluso para los sencillos elementos unidimensionales, el cálculo analítico de las integrales del elemento puede revestir cierta dificultad y se recomienda utilizar integración numérica. Esto implica que si queremos calcular exactamente dichas integrales tenemos que escoger el orden de integración numérica adecuado. En caso contrario se comete un error al evaluar por defecto las mencionadas integrales. De hecho, en la mayor parte de los casos, dichas integrales contienen términos racionales debido a la transformación de las coordenadas naturales a cartesianas y el cálculo exacto de las mismas por las cuadraturas usuales, como la de Gauss-Legendre, es imposible. En dichas situaciones, intentar aproximar el valor exacto de la integral puede significar la utilización de un gran número de puntos de integración, lo que encarece sensiblemente el cálculo. Por consiguiente, es normal aceptar un margen de error en el cálculo numérico de las integrales del elemento.

Es importante utilizar una cuadratura de integración que garantice la ausencia de mecanismos y una solución estable.

Paradójicamente, dicho error puede ser beneficioso en muchas ocasiones. Ello se debe al hecho de que al sub-evaluar la matriz de rigidez del elemento se está indirectamente aumentando su flexibilidad. Dicho efecto se contrapone al de “rigidización artificial” de la estructura introducido por la aproximación del campo de desplazamientos y generalmente también por la de la geometría. Puede decirse, por tanto, que el *error en la evaluación de la matriz de rigidez del elemento tiende a cancelar los errores de discretización*, lo que explica que, en ocasiones, con mallas groseras puedan encontrarse soluciones excelentes. En capítulos posteriores veremos como en algunos problemas particulares de vigas, placas y láminas, es incluso necesario efectuar una integración inexacta de algunos términos de la matriz de rigidez para aumentar su flexibilidad y equilibrar la excesiva rigidización que producen los términos debidos al esfuerzo cortante cuando el espesor de la estructura disminuye.

3.12.4 Errores en la solución del sistema de ecuaciones

Hay que modificar la matriz \mathbf{K} si se detecta un mal condicionamiento del sistema de ecuaciones global.

Durante la solución del sistema global de ecuaciones algebraicas resultante de la aproximación de elementos finitos por un método directo (eliminación Gaussiana, Choleski, Frontal, etc.), pueden aparecer tres tipos de errores característicos: errores por *mal condicionamiento* de las ecuaciones, *errores de truncamiento* y *errores de redondeo* [R5].

Se dice que el sistema de ecuaciones $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$ está mal condicionado si

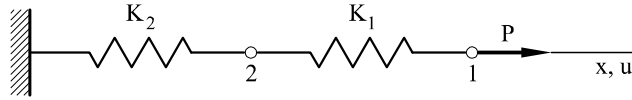


Figura 3.12: Estructura de dos grados de libertad

pequeños cambios en los coeficientes de \mathbf{K} o de \mathbf{f} dan lugar a grandes variaciones en el vector solución \mathbf{a} . La principal causa del mal condicionamiento se debe a la existencia de un elemento o grupo de elementos de gran rigidez conectados a otro u otros elementos de baja rigidez. Esto origina que, a menos que el ordenador pueda retener un número suficiente de dígitos significativos, el comportamiento de la estructura queda artificialmente alterado de manera que la matriz de rigidez se convierte en singular o cuasi-singular.

Por consiguiente, el mal condicionamiento no implica necesariamente un error en la solución. Esto último depende fundamentalmente de la capacidad de retención de dígitos significativos del ordenador. En otras palabras, de los *errores de truncamiento* y de *redondeo* que se cometan durante la solución del sistema de ecuaciones y que en definitiva son los responsables del error total en la solución.

El *error de truncamiento* es el más importante. Si un ordenador utiliza d dígitos para representar un número en precisión sencilla sólo podrá almacenar los d primeros dígitos de cada coeficiente de \mathbf{K} o \mathbf{f} . Es posible por tanto que al truncar un coeficiente se prescinda de información esencial para obtener la solución correcta, que queda totalmente alterada.

El *error de redondeo* es debido al ajuste que automáticamente realiza el ordenador del último dígito de un número durante el cálculo. La experiencia demuestra que este error es menos importante que el de truncamiento. No obstante, deben tratar de evitarse errores de redondeo innecesarios, tales como los asociados a algunas constantes, como el valor del número π , o las coordenadas y pesos de los puntos de integración numérica que deben utilizarse con el máximo número de dígitos que el computador pueda almacenar.

Ejemplo 3.7 *Estudiar la influencia del error de truncamiento en la solución del problema de la Figura 3.12.*

Solución

La matriz de rigidez de la estructura anterior y su inversa son

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 + K_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} & \frac{1}{K_2} \\ \frac{1}{K_2} & \frac{1}{K_2} \end{bmatrix}$$

Si $K_1 \gg K_2$, K_1 domina \mathbf{K} , pero K_2 domina \mathbf{K}^{-1} y por consiguiente el valor de los desplazamientos. El cálculo de \mathbf{K}^{-1} sólo es correcto si los coeficientes de \mathbf{K} se evalúan de manera que K_2 no se pierda en el proceso. Así, si por ejemplo $K_1 = 50$ y $K_2 = 0,0023$ el ordenador debe

retener al menos seis dígitos y K_1 debe representarse como 50,0000 de manera que se retenga el último dígito de K_2 en la suma $K_1 + K_2$. Si, por ejemplo, sólo se retienen cuatro dígitos $K_1 + K_2$ daría 50,00 y \mathbf{K} sería singular. Este problema está *mal condicionado* pues la solución es sensible a los cambios (truncamiento) en el sexto dígito del coeficiente $K_1 + K_2$.

Por otra parte, si se utiliza eliminación Gaussiana para la solución del sistema $\mathbf{K}\mathbf{a}=\mathbf{f}$, la eliminación del desplazamiento u_1 cambia el último coeficiente diagonal a $(K_1 + K_2) - K_1$. Vemos por tanto que la información para una solución correcta puede perderse si $K_1 \gg K_2$.

Una forma obvia de reducir los errores de truncamiento y, por consiguiente, de mejorar la aproximación de la solución es utilizar doble precisión a lo largo de *todo el proceso* de cálculo. Esto implica calcular los coeficientes de las diferentes matrices que intervienen en el análisis y resolver el sistema de ecuaciones en doble precisión.

Un indicador de la sensibilidad del sistema de ecuaciones $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$ a errores en su solución (por truncamiento y redondeo) puede obtenerse a partir del número de condición de la matriz de rigidez \mathbf{K} . Así, puede demostrarse [B4] que una primera estimación del número de dígitos significativos s que se obtienen de forma exacta en el proceso de solución es

$$s \approx t - \log_{10}[\text{cond}(\mathbf{K})] \quad (3.67)$$

donde t es el máximo número de dígitos que el computador puede almacenar con precisión y $\text{cond}(\mathbf{K})$ es el número de condición de la matriz de rigidez que se define como

$$\text{cond}(\mathbf{K}) \simeq \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (3.68)$$

siendo λ_{\max} y λ_{\min} los valores propios mayor y menor de \mathbf{K} respectivamente. Aunque la ec.(3.67) es sólo aproximada indica claramente que al crecer el número de condición de \mathbf{K} decrece la precisión obtenible en la solución del sistema, o, dicho en otras palabras, los errores de solución aumentan con el número de condición de la matriz de rigidez. Interesa, por consiguiente, que dicho número sea lo más bajo posible, lo que puede conseguirse mediante un adecuado proceso de escala de los coeficientes de \mathbf{K} [B4], [R2], [R6].

3.12.5 Errores asociados a la ecuación constitutiva

No podemos finalizar este repaso de las fuentes más usuales de error en el análisis por el método de elementos finitos sin mencionar los posibles errores asociados a una mala definición de la ecuación constitutiva. La importancia de una correcta evaluación de los coeficientes significativos de la ecuación constitutiva es obvia. De hecho, en un material homogéneo e isótropo los valores de la incógnita ϕ son directamente proporcionales al coeficiente de conductividad K , aunque los flujos no se ven afectados por el mismo. Si la estructura es de

Los errores en la ecuación constitutiva afectan directamente y de forma casi proporcional a la precisión de la solución del MEF.

material ortótropo o anisótropo, o está formada por materiales con diferentes propiedades, la variable y los flujos dependen de los valores del coeficiente de conductividad. Por consiguiente, una incorrecta estimación de los parámetros del material puede producir errores en los resultados de orden muy superior a la suma de todos los posibles errores mencionados anteriormente. Así, pues, pese a que la obtención de las propiedades mecánicas de los materiales puede considerarse como una etapa anterior a la del análisis, la gran influencia de sus valores en los resultados justifica su inclusión en este apartado como otra posible causa de error, que debe tratarse de evitar por los responsables del cálculo.

