VIDEO 4 DE SEMEJANZA Y DIAGONALIZACION

1. Una TL se puede representar mediante diferentes matrices según las bases elegidas en el espacio de llegada y de salida de la RL. ¿Tienen algo en común estas matrices? Es lo que afirma el Teorema 8.3.3.3.

   Teorema 8.3.3: Sea T: V→V lineal. Entonces todas las matrices asociadas a T son semejantes.

   A raíz de este Teorema es que se definen los VAP de una TL como los VAP de cualquiera de las matrices asociadas a la transformación lineal.

2. Resultados de la Sección 8.4 de Grossman que vamos a utilizar:

   Si A es una matriz simétrica entonces:
   - **Los VAP de A son números reales.**
   - **A es diagonalizable.**

3. **Ejercicio:** Sabiendo que A es una matriz diagonalizable y que el polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$
   i. ¿Cuál es el tamaño de A?
   ii. ¿Cuáles son los VAP de A y la multiplicidad algebraica y geométrica de ellos?
   iii. Calcula el determinante de A.
   iv. ¿Qué puede afirmarse sobre de la nulidad y el rango de A?

   Respuestas:

i. A es de 6x6 porque el grado de su polinomio característico es 6.

ii. Factorizando $p(\lambda)$ resulta p(λ)= $\lambda^4\ (\lambda^2 - 4\lambda - 12) =\ \lambda^4(\lambda - 6)(\lambda + 2)$
Entonces 0, 6 y -2 son los VAP de A porque son las raíces de su polinomio característico. La multiplicidad algebraica y geométrica de λ=0 es cuatro y la λ=6 y λ=2 es uno.

iii. Como A es semejante a una matriz diagonal D y matrices semejantes tienen el mismo determinante y D tiene en su diagonal principal sus valores propios entonces aplicando que el determinante de una matriz diagonal es igual al producto de las componentes de la diagonal principal resulta que

$$\det A = \det D = 0^4 . 6 . (-2) = 0$$

iv. Por el Teorema de Resumen $\nu(A) > 0$ y $\rho(A) < 6$.

4. Una de las aplicaciones de saber que una matriz es diagonalizable es poder calcular, de otro modo, las potencias de dicha matriz.

   Se sabe que si A es diagonalizable existe una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que

$$D = C^{-1}\, A\, C$$

Multiplicando a izquierda por C y por derecha por C^{-1} ambos miembros de la última igualdad resulta

$$C\, D\, C^{-1} = C\, (C^{-1}\, A\, C) C^{-1}$$

Aplicando propiedad asociativa del producto de matrices en el segundo miembro y definición de matriz identidad

$$C\, D\, C^{-1} = (C\, C^{-1}) A\, (C\, C^{-1})$$
$$C\, D\, C^{-1} = A$$

Aplicando la última igualdad para calcular A^k con $k \in N$ y la propiedad asociativa del producto

$$A^k = A.A.A\, \ldots\ldots\ldots.A = (C\, D\, C^{-1}).(C\, D\, C^{-1}).(C\, D\, C^{-1})\ldots\ldots\ldots(C\, D\, C^{-1})$$
$$= C\, D\, (C^{-1}\, C) D\, (C^{-1} C)\, D \ldots\ldots.(C^{-1}\, C) D.C^{-1}$$
$$= C\, D^k\, C^{-1}$$

Hemos obtenido entonces que $A^k = C\, D^k\;\, C^{-1}$

La última ecuación expresa la k-ésima potencia de A en términos de la k-ésima potencia de la matriz diagonal D. Pero calcular D^k es fácil; por ejemplo, si

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

entonces

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}$$

<u>EJEMPLO:</u> Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculando los VAP y VEP de A resulta que:

- la matriz diagonalizante es $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- la matriz diagonal semejante a A es $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Por lo tanto:

$A^{13} = C\, D^{13}\, C^{-1}$ =

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{13} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8190 & 0 & -16382 \\ 8191 & 8192 & 8191 \\ 8191 & 0 & 16383 \end{bmatrix} \quad \Delta$$