Ejercicio 1. Una partícula oscila en un movimiento armónico simple a lo largo del eje *x*. Su desplazamiento respecto al origen varia de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$x(t) = 2m\cos(0{,}5\pi\, t + \pi/3)$$

Donde, *t* es el tiempo en segundos y el argumento del coseno es en radianes. Encontrar (a) la amplitud, frecuencia y el período del movimiento. (b) Encontrar la velocidad y aceleración de la partícula para cualquier tiempo. (c) Hallar la velocidad máxima y la aceleración máxima de la partícula. (d) determinar el desplazamiento de la partícula entre *t* = 0 y *t* = 2 s.

(a) La ecuación del movimiento es del tipo:

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \emptyset)$$

Donde **A = 2 m** es la amplitud del movimiento, ω es la frecuencia angular = 0,5π/s. Pero además ω = 2π*f* entonces la frecuencia *f* = ω/2π. Luego,

$$f = \frac{0{,}5\frac{\pi}{s}}{2\pi} = 0{,}25\, s^{-1} \equiv \mathbf{0{,}25\, Hz}$$

El período T = f^{-1} entonces **T = 4 s**.

(b) Conociendo la ecuación de la posición de la partícula respecto al tiempo *x(t)*, para encontrar la velocidad de la misma hay que derivar la posición respecto al tiempo; mientras que la aceleración se obtiene derivando la velocidad respecto al tiempo. Entonces:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \frac{dx(t)}{dt} = -\boldsymbol{A\omega}\,\mathbf{sen}(\boldsymbol{\omega\, t} + \emptyset)$$

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{t}) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\boldsymbol{A\omega^2}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\omega\, t} + \emptyset)$$

(c) Tanto la velocidad máxima como la aceleración máxima se obtienen maximizando las ecuaciones correspondientes. Eso ocurre cuando el seno de la ecuación de velocidad y el coseno de la ecuación de aceleración es 1. En consecuencia, se tiene que:

$$v_{max} = |-A\omega| = 2m\; 0{,}5\,\pi/s = \mathbf{3{,}141\, m/s}$$

$$a_{max} = |-A\omega^2| = 2m\,(0{,}5\,\pi/s)^2 = \mathbf{4{,}935\, m/s^2}$$

(d) El desplazamiento de la partícula se obtiene de evaluar la diferencia de posición a *t* = 2 y a *t* = 0 s. por lo se necesita determinar la posición para cada uno de los tiempos.

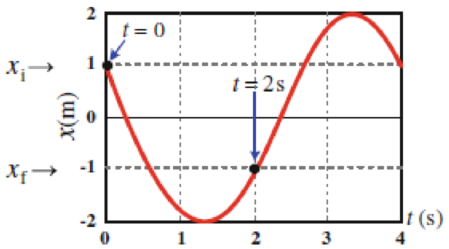
$$x(0\, s) = 2m\cos(0{,}5\pi\,(0\, s) + \pi/3) = 2m\, cos\,(\pi/3) = 1m$$

$$x(2\, s) = 2m\cos(0{,}5\pi\,(2\, s) + \pi/3) = 2m\, cos\,(4\pi/3) = -1m$$

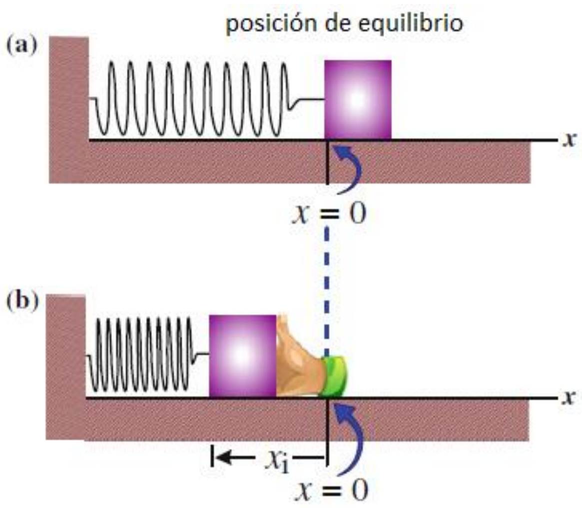
$$\Delta x = x_f - x_i = -1 - 1 = \mathbf{-2m}$$

La partícula se desplazó una distancia de 2 m en el sentido del eje *x* negativo, desde x = 1 a x = -1.

El movimiento de la partícula se puede ver en la siguiente figura:



Ejercicio 2. Un bloque de masa m = 400 g se encuentra fijado a un resorte de constante de fuerza k =10 N/m como se aprecia en la figura (a). El bloque es empujado en contra del resorte desde x = 0 a x_i = -10 cm, y luego se libera para oscilar en una mesa horizontal sin fricción, figura (b). (a) Encontrar la frecuencia angular y el período del sistema bloque-resorte. (b) Hallar la velocidad máxima y la aceleración máxima del mismo. (c) hallar la posición, velocidad y aceleración del bloque para cualquier tiempo. (d) Repetir incisos anteriores si el bloque se proyecta con una velocidad inicial v = -0,5 m/s desde otra posición inicial x_i = +10 cm.



(a) La frecuencia angular ω del sistema bloque resorte corresponde a $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Donde k es la constante del resorte y m la masa del objeto al cual se encuentra fijado, con lo cual se tiene que:

$$\omega = \sqrt{\frac{10\ N/m}{0{,}40\ kg}} = \mathbf{5\ rad/s}$$

Mientras que el período T = 2π/ω entonces: **T = 1,26 s**

(b) La posición se rige por la ecuación

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \emptyset)$$

Donde la amplitud es 10 cm. Luego la velocidad máxima y la aceleración máxima serán las siguientes:

$$v_{max} = |-A\omega| = 0{,}10\ m\ 5\ rad/s = \mathbf{0{,}5\ m/s}$$

$$a_{max} = |-A\omega^2| = 0{,}10\ m\ (5\ rad/s)^2 = \mathbf{2{,}5\ m/s^2}$$

(c) La posición, velocidad y aceleración para cualquier tiempo se obtienen basándose en la expresión de la posición respecto al tiempo.

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \emptyset)$$

Donde ya se conocen la amplitud y la frecuencia angular, pero aún no se sabe el valor del ángulo de fase $\emptyset$. Para hallarlo se debe analizar la posición a t = 0, y determinarlo a partir de allí.

$$x(0\ s) = 0{,}10\ m\cos(5\ rad/s\ (0\ s) + \emptyset) = -0{,}10\ m$$

Con lo cual,

$$\cos(\emptyset) = -1$$

Entonces, $\emptyset$ es un ángulo tal que hace que el coseno sea igual a -1, Luego $\emptyset = \pi$. Pero puede ser otro ángulo que siga la secuencia: π, 3 π, 5 π, …, (2n+1) π.

Entonces se evalúa también la posición en un tiempo T/4 y se observa que la posición del bloque es 0.

$$x((T/4)\ s) = 0{,}10\ m\cos(5\ rad/s\ (T/4\ s) + \emptyset) = 0\ m$$

Con lo cual,

$$\cos(\pi/2 + \emptyset) = 0$$

Entonces, $\emptyset$ es un ángulo tal que hace que el coseno del argumento sea igual 0. Luego:

$$\pi/2 + \emptyset = 3\pi/2 \rightarrow \emptyset = \pi$$

La posición será:

$$\boldsymbol{x(t) = 0{,}10\ m\cos(5\ rad/s\ t + \pi)}$$

La velocidad del bloque será:

$$\boldsymbol{v(t)} = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega\, t + \emptyset) = \boldsymbol{-0{,}50\ m/s\ sen(5\ rad/s\ t + \pi)}$$

La aceleración será:

$$\boldsymbol{a(t)} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega\, t + \emptyset) = \boldsymbol{-2{,}5\ m/s^2\cos(5\ rad/s\ t + \pi)}$$

(d) Ahora la condición inicial del bloque cambia, su posición es x_i = 10 cm y su velocidad es v_i = -0,5 m/s. Las condiciones iniciales permiten establecer que:

$$x(0) = A\cos(\omega\ (0) + \emptyset) = 0{,}10\ m$$

$$v(0) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega\ (0) + \emptyset) = -0{,}50\ m/s$$

Luego, son dos ecuaciones con dos incógnitas (A y ∅) ya que ω es la misma (5 rad/s) y no cambia porque el resorte y el bloque siguen siendo los mismos; por lo tanto, el período T permanece invariante también. Dividimos la expresión de la velocidad sobre la de la posición, entonces:

$$\frac{v(0)}{x(0)} = \frac{-A\omega\, sen\,(\emptyset)}{A\cos(\emptyset)} = \frac{-0{,}50\, m/s}{0{,}10\, m}$$

$$\frac{5{,}0\,(1/s)}{5{,}0\, rad/s} = tg\,\emptyset \;\rightarrow\; \emptyset = \; tg^{-1}\,(1) = \boldsymbol{\pi/4}$$

Una vez determinado el ángulo de fase, se puede hallar el valor de la amplitud A como sigue:

$$x(0) = A\cos(\pi/4) = 0{,}10\, m$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{0{,}10\, m}{\cos(\pi/4)} = \boldsymbol{0{,}141 m}$$

Ahora se puede determinar la velocidad y la aceleración máxima:

$$\boldsymbol{v_{max}} = |-A\omega| = 0{,}141\, m\; 5\, rad/s \;=\; \boldsymbol{0{,}705\, m/s}$$

$$\boldsymbol{a_{max}} = |-A\omega^2| = \; 0{,}141\, m\;(5\, rad/s)^2 \;= \boldsymbol{3{,}525\, m/s^2}$$

Finalmente, las expresiones de la posición, velocidad y aceleración respecto al tiempo serán:

$$\boldsymbol{x(t) = 0{,}141\, m \cos(5\, rad/s\, t + \pi/4)}$$

$$\boldsymbol{v(t) = -0{,}705\, m/s\; sen(5\, rad/s\, t + \pi/4)}$$

$$\boldsymbol{a(t) = -\,3{,}525\, m/s^2 \cos(5\, rad/s\, t + \pi/4)}$$

Ejercicio 3. Una onda armónica viaja a lo largo de una cuerda en la dirección creciente de x y tiene la siguiente forma:

$$y(x,t) = 0{,}4\, sen(0{,}2\, x - 5\, t)$$

Donde todas las constantes numéricas están en unidades del sistema SI. (a) Hallar la amplitud, número de onda, frecuencia angular, y velocidad de la onda. (b) Determinar la longitud de onda, el período y la frecuencia de la onda.

(a) Esta ecuación tiene la forma siguiente:

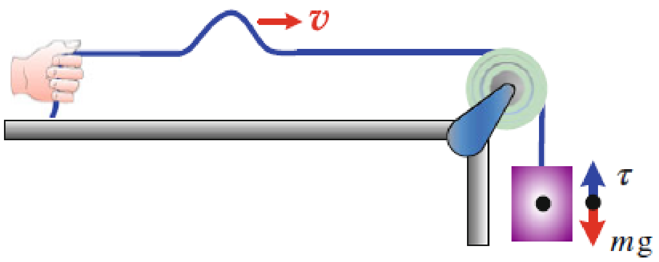
$$y(x,t) = A\, sen(k\, x - \omega\, t + \emptyset\,)$$

De acuerdo a la ecuación del enunciado ∅ es 0, pero además A es la amplitud de la onda, k es el número de onda, y ω es la frecuencia angular.

Luego de acuerdo con la ecuación se tiene que la amplitud **A = 0,4 m**, el número de onda **k = 0,2 rad/m**, la frecuencia angular **ω = 5 rad /s**, la velocidad de la onda es ***v*** = *f λ* = *ω* / *k* = **25 m/s**.

(b) La longitud de onda λ se obtiene utilizando el número de onda k, entonces **λ** = 2π/*k* = **31,41m**. El período **T** es igual a 2π/*ω* = **1,257 s**. Por último, la frecuencia de onda ***f*** es la inversa del período = 1/T = **0,8 Hz**

Ejercicio 4. Una cuerda uniforme tiene una densidad de masa lineal de 0,2 kg/m. La cuerda pasa por una polea sin masa y sin fricción y tiene un bloque de masa m de 4 kg en su extremo opuesto, como se ve en la figura. Encontrar la velocidad a la que vieja el pulso enviado desde un extremo hacia la polea.



La velocidad *v* con la que viaja el impulso generado en la cuerda viene determinado por la expresión:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Donde *F* es la fuerza con que se ejerce tensión en la cuerda y *μ* la densidad lineal de masa de la cuerda. Entonces, se determina primero el valor de la tensión y para ello planteamos sumatoria de fuerza en el sistema bloque cuerda.

$$\sum F_y = \tau - mg = 0 \ \rightarrow \ \tau = mg = 4kg\ 9{,}81\ m/s^2 \ = 39{,}24\ N$$

Luego, como la densidad *μ* = 0,2 kg/m, la velocidad de propagación es:

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{39{,}24\ N}{0{,}2\ kg/m}} = \mathbf{14}\ \boldsymbol{m/s}$$

Ejercicio 5. Una cuerda estirada con una tensión *τ* = 40 N tiene una densidad lineal de masa *μ* = 64 g/m. Una onda viaja sobre la misma con una frecuencia *f* = 120 Hz y una amplitud *A* = 8 mm. (a) Determinar la velocidad de propagación de la onda. (b) ¿Cuál es la tasa de energía que debe ser suministrada por un generador para producir esta onda en la cuerda? (c) Si la cuerda va a transferir energía a una tasa de 500 *W*, ¿cuál será la amplitud de onda requerida si el resto de los parámetros se mantienen igual?

(a) La velocidad de propagación es:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{40\ N}{0{,}064\ kg/m}} = \mathbf{25}\ \boldsymbol{m/s}$$

(b) La tasa de energía equivale a la energía por unidad de tiempo que es la potencia P, con la siguiente expresión:

$$P = 1/2\, A^2\, \omega^2 v\, \mu$$

Entonces resta determinar el valor de la frecuencia angular.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\, 120\, Hz = 754\, rad/s$$

Ahora la potencia será:

$$P = 1/2\;\; (0{,}008\, m)^2\, (754\, rad/s)^2\, 25\, m/s\; 0{,}064 kg/m \;=\; \mathbf{29{,}1\, W}$$

(c) Si la cuerda transfiere energía con una potencia de 500 W manteniendo constante el resto de los parámetros, entonces hay que relacionar las potencias para poder determinar el valor de la amplitud A de la onda. Luego:

$$P = 1/2\, A^2\, \omega^2 v\, \mu \;= 29{,}1\, W$$

$$P' = 1/2\, A'^2\, \omega^2 v\, \mu \;= 500\, W$$

Ahora dividiendo P' sobre P y simplificando los parámetros que se mantienen constantes se tiene que:

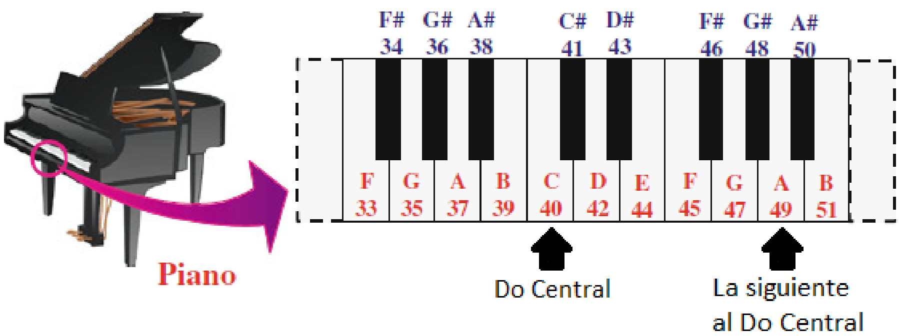
$$\frac{P'}{P} = \frac{A'^2}{A^2} = \frac{500\, W}{29{,}1\, W} = 17{,}18$$

Con lo cual:

$$A' = A\,\sqrt{17{,}18} = 0{,}008 m\,\sqrt{17{,}18} = \mathbf{0{,}033\, m}$$

La amplitud necesaria será de A' = 33 cm.

Ejercicio 6. La tecla *Do* central de un piano (tecla No. 40) tiene una frecuencia fundamental de 262 Hz, y la tecla *La* siguiente de la *Do* central tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz, ver figura. (a) Encontrar las frecuencias de los siguientes dos armónicos de la cuerda *Do*. (b) Las cuerdas de las teclas *La* y *Do* tienen la misma densidad de masa lineal pero la longitud de la cuerda *La* es el 65% de la longitud de la cuerda *Do*. ¿Cuál será la relación de las tensiones τ_{La} / τ_{Do} en las dos cuerdas?



(a) Este es un caso de ondas estacionarias, luego la frecuencia fundamental para la tecla *Do* central es f_1 = 262 Hz, entonces para determinar los siguientes dos armónicos de la cuerda perteneciente a la tecla *Do* central se utiliza la ecuación siguiente:

$$f_n = n\, f_1; \quad n = 1, 2, 3, \ldots..$$

Donde *n* corresponde al número de armónico que interese; en este caso se requiere para el segundo y tercer armónico de la cuerda entonces *n* será igual a 2 para el segundo armónico, e igual a 3 para el tercero. Luego:

$$f_2 = 2\, f_1 = \ 2\,.262\; Hz = \mathbf{524}\; \boldsymbol{Hz}$$

$$f_3 = 3\, f_1 = \ 3\,.262\; Hz = \mathbf{786}\; \boldsymbol{Hz}$$

(b) La expresión para la frecuencia fundamental de cualquier cuerda de longitud L, densidad lineal de masa μ y tensión τ es la siguiente:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

En cada caso, ambas notas tienen frecuencias fundamentales distintas pero su densidad lineal de masa es la misma, además la cuerda *La* tiene una longitud de 65% de la cuerda *Do*. Con esto se puede determinar las relaciones entre las tensiones de cada cuerda.

$$f_{1La} = \frac{1}{2L_{La}}\sqrt{\frac{\tau_{La}}{\mu}} = 440\; Hz$$

$$f_{1Do} = \frac{1}{2L_{Do}}\sqrt{\frac{\tau_{Do}}{\mu}} = 262\; Hz$$

Dividiendo f_{1La} sobre f_{1Do} y reemplazando L_{La} por 0,65 L_{Do}, se tiene que:

$$\frac{f_{1La}}{f_{1Do}} = \frac{1}{0{,}65}\frac{\sqrt{\tau_{La}}}{\sqrt{\tau_{Do}}} = 1{,}68$$

Con lo cual la relación de las tensiones queda como sigue:

$$\frac{1{,}68^2}{1{,}538^2} = \frac{\tau_{La}}{\tau_{Do}} = \mathbf{1{,}19}$$

Ejercicio 7. Una fuente puntual emite ondas de sonido con una potencia de 50 W. (a) Hallar la intensidad de las ondas de sonido a una distancia de 2m de la fuente. (b) Encontrar la distancia a la cual la intensidad del sonido es 10^{-6} W/m^2.

(a) La Fuente puntual emite energía en forma esférica, es decir dentro de un medio isotrópico la onda se propaga a la misma rapidez en cualquier dirección. Luego la intensidad es la relación entre la potencia de la emisión y el área imaginaria de la esfera correspondiente a la localización a una distancia de la fuente. Entonces:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\,\pi\,(r)^2} = \frac{50\; W}{4\,\pi\,(2\; m)^2} = \mathbf{0{,}996}\; \boldsymbol{W/m^2}$$

(b) Aquí, interesa la distancia, luego:

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\,\pi\,(r)^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{50\; W}{4\pi\,.\,10^{-6}\; W/m^2}} = \mathbf{1995}\; \boldsymbol{m}$$

Ejercicio 8. Ecolocalización es una forma de percepción sensorial que utilizan ciertos animales como por ejemplo las ballenas. Estos animales emiten un pulso de sonido, una onda longitudinal, la cual luego de reflejarse en ciertos objetos regresa al animal para indicarle su posición. Las ondas de ecolocalización emitidas por una ballena tienen frecuencias de alrededor 200.000 Hz. (a) Cuál es la longitud de onda de la onda de ecolocalización? (b) Si un obstáculo se encuentra a 100 m de la ballena, ¿A cuánto tiempo luego de ser emitida, la onda reflejada es detectada por la ballena?

(a) Para poder determinar la longitud de esta onda de ecolocalización λ primero es necesario determinar la velocidad con que se propaga esta onda longitudinal en el medio en el que se encuentra. En este caso se puede considerar agua salada, luego la velocidad de propagación será:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Donde B es el módulo de volumen y ρ es la densidad del material. En este caso $B = 2\ 10^{9}$ N/m^2; mientras que la densidad del agua salada $\rho = 1{,}025\ 10^{3}$ kg/m^3. Entonces la velocidad será:

$$v = \sqrt{\frac{2\ 10^9\ N/m^2}{1{,}025\ 10^3\ kg/m^3}} = 1396{,}8\ m/s$$

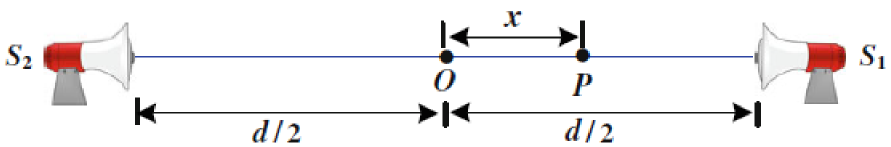
Finalmente, ahora se puede estimar la longitud de la onda:

$$v = f\,\lambda \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1396{,}8\ m/s}{200000\ Hz} = \mathbf{0{,}00698\ m} \approx \mathbf{7\ mm}$$

(b) Si la velocidad con que se propaga la onda en el medio v es conocida, y además se conoce la distancia d entre el objeto y el animal, el tiempo que demora la onda en ir y regresar al animal será el siguiente:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2\ (100\ m)}{1396{,}8\ m/s} = \mathbf{0{,}143\ s}$$

Ejercicio 9. Dos parlantes idénticos S_1 y S_2, están ubicados a una distancia horizontal d = 2 m entre ellos. Cada uno emite ondas sonoras de longitud de onda λ = 80 cm producidas por el mismo oscilador, ver figura debajo. Un oyente se encuentra originalmente en el punto O, a mitad de distancia entre los parlantes. El oyente se mueve hasta el punto P, que se encuentra a una distancia x de O, y alcanza el primer mínimo de interferencia de sonido. Hallar x.



El primer mínimo de interferencia sucede cuando ambas ondas interfieren destructivamente, en consecuencia, la distancia que recorre la onda que sale de S_2 y llega a P (D2), y la distancia que recorre la onda que sale de S_1 y llega a P (D1), su diferencia (D2 -D1) debe ser igual a ½ λ. Luego:

$$D2 = d/2\ + x$$

$$D1 = d/2\ - x$$

$$D2 - D1 = (d/2\ + x)\ - (d/2 - x)\ = 2x\ = 1/2\,\lambda$$

$$x = 1/4\,\lambda\ = \frac{80\ cm}{4}\ = \mathbf{20\ cm}$$

Referencias:

- Giancoli, D. C. (2005). Physics: principles with applications Sixth Edition.
- Radi, H. A., & Rasmussen, J. O. (2012). *Principles of physics: for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media.