Unidad 8 – Representación matricial de una transformación lineal

Matriz asociada a una transformación lineal

Existe una relación importante entre las matrices y las transformaciones lineales. En esta unidad conoceremos aspectos de esta vinculación. Dada cualquier matriz A de mxn, se puede definir una transformación lineal de R^n en R^m como:

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

Dejamos para vos la demostración de que efectivamente la transformación así definida es lineal y comencemos ahora a explorar como asociar una matriz a una transformación lineal.

Vamos a distinguir dos casos posibles con el objeto de facilitar un primer acercamiento a este tópico. Si bien los procedimientos y los conceptos puestos en juego en ambos casos son los mismos, se ha adoptado la decisión de separar las situaciones que pueden presentarse a la hora de construir la matriz asociada a una transformación lineal atendiendo a la transposición didáctica que los docentes debemos hacer a la hora de la enseñanza.

Caso uno: ***$\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R^m}$ con respecto a las bases canónicas de V y W***

Sea T una transformación lineal de R^n en R^m y sean B_1 y B_2 las bases canónicas de R^n y R^m respectivamente, entonces: $B_1 = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ donde $\boldsymbol{e}_j = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$.

Definición 8.1 Se denomina ***matriz asociada a la transformación lineal o representación matricial de $\boldsymbol{T}$: $\boldsymbol{R^n} \rightarrow \boldsymbol{R^m}$*** con respecto a las bases canónicas, a la matriz de mxn cuyas columnas son los transformados de los vectores de la base B_1. A dicha matriz la denotaremos por A_T.

En símbolos:

$$A_T = \begin{bmatrix} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Dicho de otro modo: la primera columna de A_T es el transformado a través de T de $\boldsymbol{e}_1$ (primer vector de B_1), la segunda columna de A_T es el transformado a través de T de $\boldsymbol{e}_2$ (segundo vector de B_1), etc.

Ejemplo 8.1

Encontrar la matriz asociada a $T: R^2 \to R^3 \ / \ T(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix}$.

Consideremos que B_1 es la base canónica de R^2. Entonces $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Calculando los transformados de los vectores de dicha base y haciendo que dichos vectores sean las columnas de la representación matricial de T, se obtiene:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Entonces } A_T = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En el siguiente teorema se explicita como emplear A_T en este primer caso:

Teorema 8.1 Sea $T: R^n \to R^m$ una transformación lineal y sea A_T la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas de R^n y R^m respectivamente. Entonces $\forall \ \boldsymbol{x} \in R^n$ se verifica que:

$$T(\boldsymbol{x}) = A_T \boldsymbol{x}$$

$$\text{Sea } A_T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8.2

Calculamos $T(5{,}8)$ empleando la matriz asociada obtenida en el *ejemplo 8.1* y el teorema recién demostrado:

$$T\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = A_T \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Observación | Hasta aquí la matriz asociada a una transformación lineal $T: R^n \to R^m$ está definida empleando las bases canónicas de dichos espacios. Más adelante veremos cómo se define y se emplea la matriz asociada a T si se consideran otras bases en R^n y R^m.

Teorema 8.2 | Sea $T: R^n \to R^m$ lineal y A_T la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas de R^n y R^m respectivamente entonces:

I. $nu(T) = N_{A_T}$

II. $im(T) = im(A_T)$

III. $v(T) = v(A_T)$

IV. $\rho(T) = \rho(A_T)$

Ejemplo 8.3 | Aplicar al *ejemplo 8.1* los resultados del teorema anterior, sabiendo que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a $T: R^2 \to R^3 \,/\, T(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$ considerando las bases canónicas de R^2 y R^3 respectivamente:

Empleando operaciones elementales en A_T, se obtiene:

$$\underset{A_T}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Como los pivotes en B están en las columnas uno y dos, las correspondientes columnas uno y dos de A_T forman una base del espacio imagen de A_T. Entonces, por el *teorema 8.2*:

$$im\, A_T = gen\{(1,0,1), (0,1,1)\} = im\, T \Rightarrow \rho(A_T) = 2 = \rho(T)$$

Ya que $\rho(A_T) + v(A_T) = n^{\underline{o}}\ columnas\ de\ A_T$, resulta que $v(A_T) = 0$. Entonces $v(T) = v(A_T) = 0$ y por lo tanto $nu(T) = \{\mathbf{0}_{R^2}\} = \{(0,0)\}$.

Observación | Se sabe por el *teorema 6.3* de este apunte que, en toda matriz, se verifica que la suma de la nulidad y el rango es igual a la cantidad de columnas de la misma.

Ahora si T es una transformación lineal definida de R^n en R^m entonces aplicando las igualdades III y IV del *teorema 8.2* y recordando que la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas es de mxn se obtiene que

$$v(T) + \rho(T) = v(A_T) + \rho(A_T) = n = dim\ R^n$$

Veremos en el teorema 8.4 que esta igualdad vuelve a aparecer: ***la suma de la nulidad más el rango de una transformación lineal es igual a la dimensión del espacio de salida de dicha transformación***.

Caso dos: | ***$T: R^n \rightarrow R^m$ con V y W diferentes***

2.1 | $T: V \rightarrow W$ con $V \neq R^n; W = R^m$.
***2.2 | $T: R^n \rightarrow R^m$* considerando bases distintas de las canónicas.**

En 2.1 y 2.2 la definición de la matriz asociada, que seguimos llamando A_T, es la misma.

Definición 8.2 | Si B_1 es la base del espacio de salida de T y B_2 es una base del espacio de llegada de T, se denomina matriz asociada a la transformación lineal T con respectos a las bases B_1 y B_2 a la matriz que tiene por columnas los vectores de coordenadas de las imágenes de los vectores de la B_1 con respecto a la B_2. En símbolos: si $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es la base elegida para el espacio de salida y B_2 es la base elegida para el espacio de llegada:

$$A_T = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ [T(v_1)]_{B_2} & [T(v_2)]_{B_2} & \cdots & [T(v_n)]_{B_2} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{bmatrix}$$

Observación | En la definición precedente se consideró que la dimensión del espacio de salida de T es n, si la dimensión del espacio de llegada de T es m, entonces A_T es una matriz de mxn, tal como en el *caso uno*. Entonces:
- Cantidad de renglones de $A_T =$ dimensión del espacio de llegada de T.
- Cantidad de columnas de $A_T =$ dimensión del espacio de salida de T.

En resumen: para encontrar la matriz asociada a una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ o $T: R^n \rightarrow R^m$ en las bases B_1 (base del espacio de salida) y B_2 (base del espacio de llegada) se sigue el siguiente procedimiento:

Como encontrar una matriz asociada a una transformación lineal*:*

1) Encontrar la imagen a través de la transformación lineal de cada vector de B_1.

2) Determinar el vector de coordenadas de cada imagen con respecto a la base B_2.

3) Colocar los vectores de coordenadas obtenidos en 2) como columnas de la matriz A_T.

Ejemplo 8.4 Encontrar la matriz asociada a la transformación lineal de:
$T: P_2 \to P_1 \ / \ T(ax^2 + bx + c) = (a - b)x - c$

Para determinar la matriz asociada a T se elige B_1 como base canónica de $P_2 = \{x^2, x, 1\}$ y B_2 como base canónica de $P_1 = \{x, 1\}$. Entonces:

$$T(x^2) = T(1x^2 + 0x + 0) = (1 - 0)x - 0 \Rightarrow [T(x^2)]_{B_2} = [x]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = T(0x^2 + 1x + 0) = (0 - 1)x - 0 \Rightarrow [T(x)]_{B_2} = [-x]_{B_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(1) = T(0x^2 + 0x + 1) = (0 - 0)x - 1 \Rightarrow [T(1)]_{B_2} = [-1]_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Como A_T es la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas obtenidos:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observación Tal como se mencionó, A_T es de $2x3$, pues 2 la dimensión del espacio de salida de T y 3 la dimensión del espacio de llegada de T.

Ejemplo 8.5 Hallar la matriz A_T con respecto a la base $B_1 = \{(3,1), (5,2)\}$ de R^2 y $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ de R^3, de $T: R^2 \to R^3 \ / \ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -5x + 13y \\ -7x + 16y \end{bmatrix}$.

Se calcula la imagen de cada vector de B_1:

$$T\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$$

Luego se tiene que obtener el vector de coordenadas de las trasformaciones de los vectores B_1 con respecto a B_2:

$$\left[T\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right]_{B_2} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\\-1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow\left[\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\right]_{B_2} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\\-1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\left[\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\right]_{B_2}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

De modo que:

$$A_T=\begin{bmatrix}\uparrow & \uparrow\\ \left[T\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right]_{B_2} & \left[T\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\right]_{B_2}\\ \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\\-2 & -1\end{bmatrix}$$

es la representación matricial de T con respecto a las bases B_1 y B_2.

Observación | Como puedes observar la matriz asociada a una transformación lineal depende de las bases empleadas en el espacio de salida y de llegada de la transformación, es decir, de lo que venimos denotando B_1 y B_2.

Teorema 8.3 | Sea V un espacio vectorial de dimensión n, W un espacio vectorial de dimensión m y $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Sean B_1 una base para V y B_2 una base para W. Entonces existe una única matriz A_T de mxn tal que $\forall\ \boldsymbol{v} \in V$, se tiene que:

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = A_T\ [\boldsymbol{v}]_{B_1}$$

Ejemplo 8.6 | Continuaremos con los *ejemplos 8.4* y *8.5* analizando como emplear la matriz A_T en el cálculo de imágenes:

a) Calcular $T\big(p(x)\big)$ con T definida en el *ejemplo 8.4* siendo $p(x) = 5x^2 - 2x + 8$:

$$[T(p(x))]_{B_2} = \mathrm{A}_T\ [p(x)]_{B_1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$T(p(x)) = 7 \cdot x - 8 \cdot 1 = 7x - 8$$

b) Calcular $T(\boldsymbol{v})$ para $\boldsymbol{v} = (22{,}8)$ y T definida en el *ejemplo 8.5*:

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 8 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 22 \\ 8 \end{bmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = \mathrm{A}_T\ [\boldsymbol{v}]_{B_1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$T(\boldsymbol{v}) = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ -26 \end{pmatrix}$$

La igualdad del teorema anterior se emplea cuando se quiere calcular la imagen a través de T de algún elemento del espacio de salida, conociendo la matriz asociada a T con respecto a bases conocidas del espacio de salida y del espacio de llegada, pero no se conoce la definición algebraica de la transformación lineal T.

Teorema 8.4 Sean V y W espacios vectoriales tales que $dim\, V = n$, $dim\, W = m$, B_1 es base de V, B_2 es base de W y A_T es la matriz asociada a la transformación lineal $T: V \to W$ con respecto a las bases B_1 y B_2. Entonces se verifica que:

I. $\upsilon(A_T) = \upsilon(T)$
II. $\rho(A_T) = \rho(T)$
III. $\upsilon(T) + \rho(T) = dim\, V$

Ejemplo 8.7 Encontrar la matriz de transición de T, su nulidad y su rango. Siendo T:
$T: P_2 \to P_3 \ / \ T(p(x)) = x\, p(x)$

Se eligen las bases canónicas en los espacios involucrados en T, $B_1 = \{1, x, x^2\}$ y $B_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ y se calculan las imágenes de cada uno de los vectores de B_1 y sus vectores de coordenadas con respecto a B_2 ya que dichos vectores de coordenadas serán las columnas de la matriz buscada A_T:

$$T(1) = x \cdot 1 = x \Rightarrow [T(1)]_{B_2} = [x]_{B_2} = (0,1,0,0)$$

$$T(x) = x \cdot x = x^2 \Rightarrow [T(x)]_{B_2} = [x^2]_{B_2} = (0,0,1,0)$$

$$T(x^2) = x \cdot x^2 = x^3 \Rightarrow [T(x^2)]_{B_2} = [x^3]_{B_2} = (0,0,0,1)$$

Por lo tanto, la matriz asociada a T que se obtiene es:

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando operaciones elementales a dicha matriz, se halla la matriz B:

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_3 \leftrightarrow R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Como B es equivalente a A_T por renglones y B tiene tres pivotes: $\rho(B) = 3$. Por lo que conocemos del tema “Espacios asociados a una matriz”, $\rho(A_T) = \rho(B) = 3$, y por el *teorema 8.2* resulta que $\rho(T) = 3$. Como $\upsilon(T) + \rho(T) = dim\, P_2$, resulta que $\upsilon(T) = 0$.

No es posible, en el *caso dos*, emplear de manera directa el espacio nulo y el espacio imagen de la matriz asociada a la transformación lineal ya que ambos espacios vectoriales estarán conformados por vectores de R^n mientras que el núcleo y la imagen de la trasformación lineal son subespacios del espacio de salida y de llegada de T respectivamente. En el *ejemplo 8.7*, $nu\, T$ debe ser subespacio de P_2 y $im\, T$ de P_3.

Veamos si, aún, podemos continuar usando la matriz B para determinar el núcleo y el espacio imagen de la transformación definida. Los pivotes de B están en la primera, segunda y tercera columna. Traslademonos a la primera, segunda y tercera columna de A_T y analicemos de que elementos de B_2 son vectores de coordenadas esas columnas de A_T:

$(0,1,0,0)$ es el vector de coordenadas del polinomio x con respecto a B_2.
$(0,0,1,0)$ es el vector de coordenadas del polinomio x^2 con respecto a B_2.
$(0,0,0,1)$ es el vector de coordenadas del polinomio x^3 con respecto a B_2.

Entonces: $im\, T = gen\, \{x, x^2, x^3\}$.

Por otro lado, ya que $\upsilon(T) = 0$, resulta que:

$$nu\, T = \left\{0_{P_2}\right\} = \{0x^2 + 0x + 0\}$$

OBSERVACIONES:

1) Es posible determinar una representación matricial asociada a una transformación lineal que sea una matriz diagonal. Esta idea se desarrolla en el *ejemplo 7.3.9* y *teorema 7.3.5* de *Grossman (7ma Ed.).* Esta cátedra decide no ahondar en este procedimiento.

2) Notemos que si T es una transformación lineal de R^n en R^m (Caso 1) o de V en W (Caso 2) y, además, $n = m$ o $dim\, V = dim\, W$ entonces la matriz asociada a T, es decir, A_T es cuadrada. Si esta matriz es invertible, se pueden obtener otras igualdades a partir de dos teoremas de esta Sección:

En el teorema 7.1 se afirma que:	**En el teorema 8.3 se asegura que**
$T(\boldsymbol{x}) = A_T\boldsymbol{x}$	$[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = A_T[\boldsymbol{v}]_{B_1}$
Pre multiplicando miembro a miembro por $\boldsymbol{A_T^{-1}}$ resulta	
$A_T^{-1}T(\boldsymbol{x}) = A_T^{-1}(A_T\boldsymbol{x})$	$A_T^{-1}[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = A_T^{-1}(A_T[\boldsymbol{v}]_{B_1})$
Y aplicando propiedad asociativa del producto de matrices y definición de matriz inversa:	
$A_T^{-1}\, T(\boldsymbol{x}) = (A_T^{-1}A_T)\boldsymbol{x}$ $A_T^{-1}\, T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$	$A_T^{-1}[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = (A_T^{-1}A_T)[\boldsymbol{v}]_{B_1}$ $A_T^{-1}[T(\boldsymbol{v})]_{B_2} = [\boldsymbol{v}]_{B_1}$

Cuadro de resumen: Matriz asociada a una transformación lineal.

	CASO 1	CASO 2
Condiciones	La transformación lineal está definida de R^n en R^m y en cada uno de los dichos espacios vectoriales se emplea la base canónica.	La transformación está definida: - De R^n en R^m con bases distintas de bases canónicas. - Entre dos espacios vectoriales V y W distintos de R^n y R^m respectivamente.
Como construir A_T	A_T es la matriz cuyas columnas son las imágenes de los vectores de la base canónica de R^n.	Sean: $\dim V = n$; $\dim W = m$; B_1 una base de V; B_2 una base de W. Entonces A_T es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de las imágenes de los vectores de B_1 con respecto a B_2. En símbolos la j-ésima columna de A_T es $\left[T\left(\boldsymbol{v}_j\right)\right]_{B_2}$ donde $\boldsymbol{v}_j$ es el j-ésimo vector de B_1.
Como emplear A_T	Para calcular la imagen a través de T de cualquier vector $\boldsymbol{v}$ de R^n, ya que por teorema $\forall\ v \in R^n$ se verifica que: $T(\boldsymbol{v}) = A_T\boldsymbol{v}$	Con A_T en estos casos se calcula el vector de coordenadas de la imagen de cada vector de B_1 respecto a B_2, ya que: $[\boldsymbol{v}]_{B_2} = \mathrm{A}_T\,[\boldsymbol{v}]_{B_1}$
Observaciones	¿Cómo emplear la matriz A_T para la transformación T? - El espacio nulo de A_T es el núcleo de T. - El espacio imagen de A_T es el espacio imagen de T. Como los espacios vectoriales anteriores son iguales, sus dimensiones también y, por lo tanto: $\upsilon(A_T) = \upsilon(T)$ $\rho(A_T) = \rho(T)$	¿Cómo emplear la matriz A_T para la transformación T? Para la transformación T y para la matriz asociada solo son iguales la nulidad y el rango. Recuerda que si una transformación lineal va de un espacio vectorial llamémosle V, en otro espacio vectorial, digamos W, entonces: - $nu\ T$ es un subespacio de V. - $im\ T$ es un subespacio de W.