TEMA 2

INTEGRALES DE LINEA

CURVAS PARAMETRIZADAS

Curvas parametrizadas. Definición

Sea I un intervalo de IR. Una curva en IR^3 es una aplicación continua definida en la forma:

$$\begin{aligned} C: I &\rightarrow IR^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

donde t recibe el nombre de parámetro.

Curvas regulares

Una curva es regular si x'(t), y'(t), z'(t) son funciones continuas en I y no simultáneamente nulas. Una curva es regular a trozos si puede expresarse como union finita de curvas regulares.

Curvas cerradas

Si I = [a, b], los puntos A = (x(a), y(a), z(a)) y B = (x(b), y(b), z(b)) reciben el nombre de extremos de la curva. Si A = B la curva es cerrada.

Vector tangente

El vector tangente a la curva C: t → (x (t), y (t), z (t)) en el punto de parámetro $t = t_0$, $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$, es $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$.
La recta tangente a la curva en ese punto será:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

Observación

Todas las definiciones vistas para curvas en IR^3 sirven para curvas en IR^2 : basta considerar z = 0.

Métodos básicos de parametrización de curvas en el plano

Una curva en el plano viene expresada habitualmente en una de las formas siguientes:

- Explícita $y = f(x)$
- Implícita $f(x, y) = 0$
- Paramétrica $\left.\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\right\} \quad t \in I$

(1) Para parametrizar una curva expresada en forma explícita basta hacer:

$$\left.\begin{matrix} x = t \\ y = f(t) \end{matrix}\right\}$$

(2) La parametrización de curvas expresadas en forma implícita requiere de métodos particulares según cada tipo. Veamos los casos más frecuentes:

- Segmento de extremos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$

$$(x, y) = (1 - t)(a_1, a_2) + t(b_1, b_2) \qquad t \in [0, 1]$$

- Circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r

Implícita: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\,\mathrm{sen}\,t \end{matrix}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$

- Elipse de centro (x_0, y_0) y semiejes a, b

Implícita: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Paramétrica: $\left.\begin{matrix} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,t \end{matrix}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$

Métodos básicos de parametrización de curvas en el espacio

En el caso frecuente en que la curva venga dada como intersección de dos superficies en forma implícita:

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Los pasos a seguir para su parametrización pueden resumirse así:

- Se aisla, si es posible, una variable de una ecuación y se sustituye en la otra (por ejemplo, $z = \bar{f}(x, y)$)
- Se parametriza en el plano coordenado la curva plana que es la proyección de la curva C.
- Se parametriza la variable aislada.

En el supuesto de que pueda aislarse z, la parametrización de C resultaría:

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = \bar{f}(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Longitud de una curva

Dada la curva regular

$$C: \begin{array}{ccc} [a, b] & \rightarrow & IR^3 \\ t & \rightarrow & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

La longitud s del arco de curva C entre los puntos de parámetros a y b resulta ser:

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\ dt$$

Función longitud del arco

Se define como:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}\ du \qquad a \leq t \leq b$$

Curvas parametrizadas por el arco

Por definición, una curva está parametrizada por el arco sí y solo sí:

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2 = 1$$

Propiedad

C está parametrizada por el arco $\Leftrightarrow$ $s(t) = t - a$

INTEGRAL DE LINEA DE CAMPOS ESCALARES

Definición

$$\text{Sea } F: \begin{array}{l} \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR} \\ (x, y) \to F(x, y) \end{array} \quad \text{un campo escalar continuo.}$$

Sea C una curva acotada contenida en el dominio de F y parametrizada por el arco:

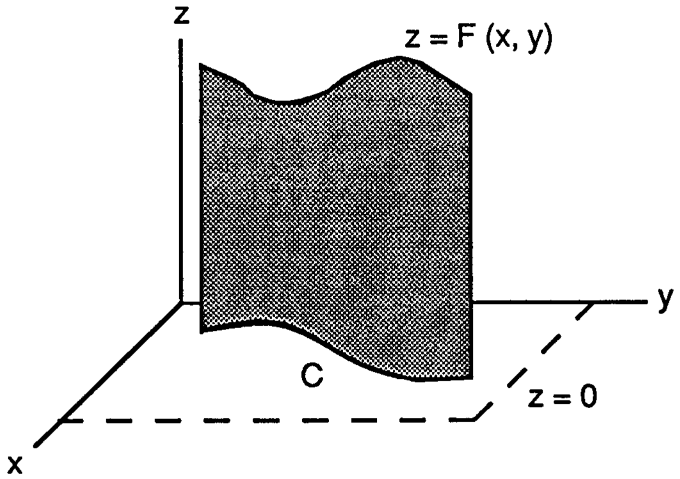
$$C: \begin{array}{l} [a, b] \to \mathrm{IR}^2 \\ s \quad \to (x(s), y(s)) \end{array}$$

Definimos la integral del campo escalar F a lo largo de la curva C como:

$$\int_C F(x, y)\, ds := \int_a^b F(x(s), y(s))\, ds$$

Interpretación geométrica

Si $F(x, y) \geq 0$ sobre los puntos de C, la integral anterior puede interpretarse como el área lateral de la porción de superficie cilíndrica recta que tiene como base en $z = 0$ la curva C y como altura $z = F(x, y)$ para los $(x, y) \in C$.



Observación

Para el caso en que la curva C: $[t_0, t_1] \to IR^2$ sea regular pero no esté parametrizada por el arco tenemos:

$$\int_C F(x, y)\, ds = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Análogamente, si la curva C: $[t_0, t_1] \to IR^3$ es regular y está contenida en el dominio de un campo escalar continuo F: $IR^3 \to IR$, entonces:

$$\int_C F(x, y, z)\, ds = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

Propiedades

(1) $\int_C [F(x, y, z) + G(x, y, z)]\, ds = \int_C F(x, y, z)\, ds + \int_C G(x, y, z)\, ds$

(2) $\int_C k F(x, y, z)\, ds = k \int_C F(x, y, z)\, ds \qquad k \in IR$

(3) $\int_C F(x, y, z)\, ds = \int_{C_1} F(x, y, z)\, ds + \int_{C_2} F(x, y, z)\, ds \qquad C = C_1 \cup C_2$

(4) La integral de línea de un campo escalar es independiente de la parametrización escogida para la trayectoria de integración.

INTEGRAL DE LINEA DE CAMPOS VECTORIALES

Definición

Sea $F : IR^3 \to IR^3$ un campo vectorial continuo definido sobre los puntos de una curva C de IR^3 acotada y regular. Definimos la integral de línea del campo vectorial F a lo largo de la curva C como la integral de linea sobre C del campo escalar $F \cdot T$ siendo T el vector tangente unitario en cada punto de C.

$$\int_C F \cdot T \ ds$$

Si la curva C viene parametrizada en la forma:

$$\begin{array}{lll} C: & [t_0, t_1] & \to IR^3 \\ & t & \to r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

tendremos las notaciones habituales:

$$\int_C F \cdot T \ ds = \int_C F(x, y, z) \cdot T(x, y, z) \, ds = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), y(t), z(t)) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) \, dt$$

$$\int_C F \cdot T ds = \int_C F \cdot dr = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

siendo $F = (F_1, F_2, F_3)$, F_1, F_2, F_3 funciones componentes del campo F.

Propiedades

(1) $\int_C (F + G) \cdot dr = \int_C F \cdot dr + \int_C G \cdot dr$ F, G campos vectoriales

(2) $\int_C (k F) \cdot dr = k \int_C F \cdot dr$ $k \in IR$

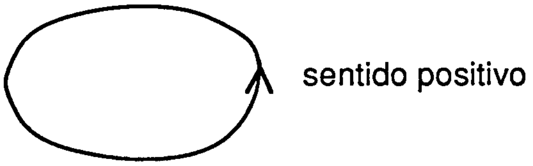
(3) $\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr$ $C = C_1 \cup C_2$

(4) El valor de la integral de línea de un campo vectorial es, salvo el signo, independiente de la parametrización escogida para la trayectoria.

Orientación de curvas

(1) Curvas abiertas. El sentido en que se recorre la curva nos ha de ser dado ordenando sus extremos.

(2) Curvas cerradas. Entendemos como sentido positivo aquel que para valores crecientes del parámetro se recorre la curva dejando la región acotada a la izquierda.



El sentido negativo es el contrario al positivo.

El trabajo como integral de línea

Sea F (x, y, z) un campo de fuerzas continuo en $\mathbb{R}^3$, definido sobre los puntos de una curva acotada C.

El trabajo W realizado por dicho campo a lo largo de la trayectoria C resulta ser:

$$W = \int_C F \cdot dr$$

TEOREMA DE GREEN

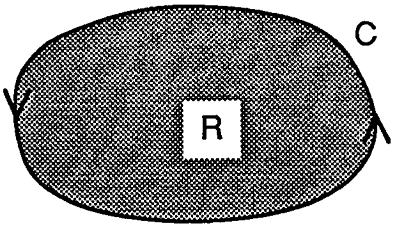
Este teorema establece una relación entre la integral de línea de un campo vectorial y la integral doble

Teorema de Green en el plano

Sean P, Q : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones continuas con $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ continuas en una región R del plano que sea el interior de una curva plana C, cerrada, simple y regular a trozos. Entonces:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_C P\, dx + Q\, dy$$

donde C se entiende recorrida en sentido positivo.



$\partial R = C$

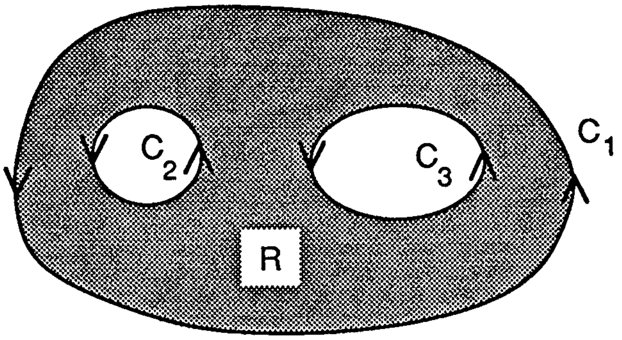
Teorema de Green generalizado

Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ curvas cerradas, simples y regulares a trozos tales que C_2, $C_3, \ldots, C_n$ están contenidas en el interior de C_1 y no se intersecan dos a dos.

Sean $P, Q : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$ funciones continuas con $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$ continuas en la región R que sea el interior de la curva C_1 una vez eliminados los interiores de $C_2, \ldots, C_n$. Entonces:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{C_1} P\, dx + Q\, dy - \sum_{k=2}^{n} \int_{C_k} P\, dx + Q\, dy$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se entienden recorridas en sentido positivo.



INDEPENDENCIA DEL CAMINO PARA INTEGRALES DE LINEA

Integrales independientes de la trayectoria

Sea C curva que une los puntos A y B. Si el valor de la integral

$$\int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

es el mismo para cualquier curva C que una A con B, se dice que la integral anterior es independiente de la trayectoria.

Diferencial exacta

Una expresión diferencial de la forma:

$$F_1(x, y, z)\,dx + F_2(x, y, z)\,dy + F_3(x, y, z)\,dz \qquad (*)$$

es una diferencial exacta si existe una función $\phi : IR^3 \to IR$ tal que:

$$\frac{\partial \phi (x, y, z)}{\partial x} = F_1(x, y, z) \qquad \frac{\partial \phi (x, y, z)}{\partial y} = F_2(x, y, z) \qquad \frac{\partial \phi (x, y, z)}{\partial z} = F_3(x, y, z)$$

es decir, que la expresión diferencial (*) es la diferencial total de la función ϕ :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,dz = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

Análogamente para el caso de dos variables:

Una expresión diferencial de la forma $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ es una diferencial exacta si existe una función

$$\phi : IR^2 \to IR \quad \text{tal que} \quad \frac{\partial \phi (x, y)}{\partial x} = P(x, y) \qquad \frac{\partial \phi (x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$$

es decir:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy = P\,dx + Q\,dy$$

Campo conservativo. Función potencial

El campo vectorial $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ recibe el nombre de conservativo si $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ es una diferencial exacta.
En tal caso, la función ϕ definida anteriormente recibe el nombre de función potencial del campo F.

Teorema fundamental de las integrales de línea

(a) $F_1(x, y, z)\,dx + F_2(x, y, z)\,dy + F_3(x, y, z)\,dz$ es una diferencial exacta si y sólo si:

$$\int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$$

depende sólo de los puntos extremos de la trayectoria.

(b) Si $\phi : IR^3 \to IR$ es tal que $d\phi = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$ y A, B son los extremos de la trayectoria C, entonces:

$$\int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \phi(B) - \phi(A)$$

Principio de conservación de la energía mecánica

Sea $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo de fuerzas continuo definido en un abierto conexo y sea ϕ una función potencial de F.

Por el teorema fundamental, el trabajo W realizado por el campo al mover una partícula desde un punto A a otro B siguiendo un camino C regular a trozos contenido en el dominio de F será:

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \phi(B) - \phi(A)$$

Si parametrizamos C en la forma
$$\begin{aligned} r : [a, b] &\to IR^3 \\ t &\to r(t) \end{aligned}$$

y aplicamos la 2ª Ley de Newton $F(r(t)) = m\, r''(t)$ será:

$$W = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt = \int_a^b m\, r''(t) \cdot r'(t) = \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt}(r'(t) \cdot r'(t))\, dt$$

si $r'(t) = v(t)$ velocidad en el valor de parámetro t, tendremos:

$$W = \frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} \| v(t) \|^2 dt = \frac{1}{2} m (\| v(b) \|^2 - \| v(a) \|^2)$$

igualando ambas expresiones del trabajo obtenemos la formulación del principio de conservación:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \phi(A) = \frac{1}{2} m v_B^2 - \phi(B)$$

El miembro de la izquierda representa la energía mecánica en el punto A y el de la derecha en el punto B; $1/2\ m\ v^2$ recibe el nombre de energía cinética y $-\phi$ de energía potencial.

Si en la expresión anterior hacemos variar uno de los puntos concluimos que la energía mecánica se mantiene constante en todo punto, afirmación que expresa el principio de conservación de la energía mecánica.

La nomenclatura de campo conservativo proviene de esta propiedad. Para los campos conservativos, el trabajo realizado para desplazar una partícula de un punto a otro es independiente de la trayectoria. Si la trayectoria es cerrada el trabajo es nulo.

Teorema

El siguiente enunciado resume las propiedades y las definiciones formuladas hasta el momento.

Sea $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ un campo vectorial continuo definido en un abierto conexo. Son equivalentes:

(1) F es un campo conservativo.

(2) $F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$ es una diferencial exacta.

(3) Existe $\phi : IR^3 \rightarrow IR$ tal que $F = \nabla\phi$; F es un gradiente.

(4) La integral de linea $\int_C F \cdot dr$ es independiente de la trayectoria C contenida en el dominio de F.

(5) La integral de linea $\int_C F \cdot dr = 0$ para toda curva cerrada C contenida en el dominio de F.

Rotacional de un campo vectorial

Sea el campo vectorial $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

Definimos el campo rotacional de F como:

$$\text{rot}\, F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} , \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} , \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

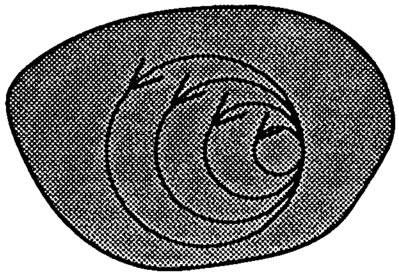
Formalmente, puede calcularse mediante la siguiente regla:

$$\text{rot}\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

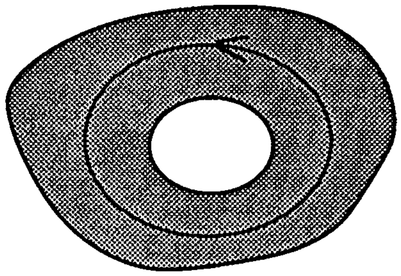
Región simplemente conexa

Una región conexa se dice que es simplemente conexa si toda curva cerrada puede reducirse continuamente hasta cualquier punto de la misma, sin salirse de la región.

Intuitivamente, se refiere a regiones conexas sin agujeros.



Región simplemente conexa



Región no simplemente conexa

Teorema

Sea F (x, y, z) un campo vectorial continuo con derivadas parciales de primer orden continuas en un cierto dominio de IR^3.

(a) Si $\int_C F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ es independiente de la trayectoria, entonces:

$$\text{rot } F = 0$$

(b) Si rot F = 0 y el dominio es simplemente conexo, entonces, la integral anterior es independiente de la trayectoria.

Observación

Para el caso de un campo vectorial en IR^2, F (x, y) = (P (x, y), Q (x, y)), la condición rot F = 0 del teorema anterior se reduce a:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

TEMA 2. PROBLEMAS

2.1 Encontrar una representación paramétrica para las siguientes curvas:

(a) Recta que pasa por los puntos A = (2,0,4) y B = (1,0,6)

(b) Segmento que une los puntos A = (2,0,4) y B = (1,0,6)

(c) Circunferencia de centro (5, -7) y radio 3

(d) Curva de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ z=e^x \end{array}\right\}$

(e) Curva de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 3x^2+4y^2=1 \\ z=x^2 \end{array}\right\}$

2.2 Encontrar una representación paramétrica de la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el plano $y+z=a$.

2.3 Representar gráficamente las curvas cuya expresión paramétrica es la siguiente:

(a) $\left.\begin{array}{l} x(t)=t^3-4t \\ y(t)=t^2-4 \end{array}\right\}$ $t\in IR$

(b) $\left.\begin{array}{l} x(t)=a\cos t \\ y(t)=a\,\text{sen}\,t \\ z(t)=bt \end{array}\right\}$ $t\in IR$; hélice de paso $2\pi b$

2.4 Calcular la longitud de un arco de la cicloide:

$$\left.\begin{array}{l} x(t)=a(t-\text{sen}\,t) \\ y(t)=a(1-\cos t) \end{array}\right\}$$

2.5 Calcular las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C xy\,ds$ C contorno del cuadrado $|x| + |y| = 1$

(b) $\int_C \frac{ds}{x^2 + y^2 + 4}$ C segmento que une (0,0) con (1,2)

(c) $\int_C (x + y)\,ds$ C lazo derecho de la lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$

(d) $\int_C y^2 ds$ C arco de la cicloide $\left.\begin{array}{l} x = t - \text{sen}\, t \\ y = 1 - \cos t \end{array}\right\} t \in [0, 2\pi]$

(e) $\int_C (x^2 + y^2)\,ds$ C arco de espiral $r = ae^{m\theta}$ $(m > 0)$

para valores del ángulo θ desde 0 hasta $-\infty$

2.6 Calcular las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C xy^3 ds$ C segmento que une (-1,-2,0) con (1,2,3)

(b) $\int_C (3x^2 + 3y^2)\,ds$ C intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

con el plano $z = 0$

(c) $\int_C x^2\,ds$ C intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

con el plano $x + y + z = 0$

2.7 Calcular el área lateral de la porción de cilindro parabólico $y = x^2$ limitado por los planos $z = 2x$, $z = 0$, $y = 1$.

2.8 Calcular el área de la superficie lateral del cilindro parabólico $y = 3x^2/8$, limitado por los planos $z = 0$, $z = x$, $y = 6$.

2.9 Calcular el área de la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ limitado por los planos $z = 2 - x - y$, $z = 0$, $y = 0$.

2.10 Consideremos un muelle en forma de hélice de ecuaciones $x = a \cos t$, $y = a\,\text{sen}\, t$, $z = bt$, $t \in [0, 6\pi]$, siendo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su función de densidad lineal.

(a) Calcular la masa del muelle.

(b) Calcular el momento de inercia del muelle respecto al eje OZ.

2.11 Calcular las coordenadas del centro de masas del muelle del problema 2.10.

2.12 Calcular la masa de un alambre que tiene la forma de la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z = 0$, si la función de densidad lineal es $f(x, y, z) = x^2$

2.13 Calcular las integrales de línea de los campos vectoriales que se indican sobre las correspondientes trayectorias C:

(a) $F(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$

C porción de la parábola $y = x^2$ desde $(-1,1)$ hasta $(1,1)$

(b) $F(x, y) = (2a - y, x)$

C arco de cicloide $\left.\begin{array}{l} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$

(c) $F(x, y) = \left(\dfrac{x + y}{x^2 + y^2}, \dfrac{-x + y}{x^2 + y^2} \right)$

C circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

(d) $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$

C segmento que une los puntos $(1, 0, 2)$ y $(3, 4, 1)$.

(e) $F(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, x^2)$

C curva $\{ (x(t), y(t), z(t)) \,/\, x(t) = t^2,\ y(t) = 2t,\ z(t) = 4t^3,\ t \in [0,1] \}$

2.14 Calcular la integral $\int_C F \cdot dr$ siendo el campo $F(x, y, z) = (x^2y, x - z, xyz)$ y la trayectoria C cada una de las siguientes:

(a) porción de parábola $y = x^2$ en $z = 2$, desde $(0, 0, 2)$ hasta $(1, 1, 2)$.

(b) segmento de recta $y = x$ en $z = 2$, desde (0, 0, 2) hasta (1, 1, 2).

2.15 Comprobar que la integral de línea de un campo vectorial no depende (salvo el signo) de la parametrización escogida para la curva, calculando:

$$\int_C F \cdot dr \quad \text{desde } (0,0) \text{ hasta } (1,1) \text{ para } F(x,y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$$

y las parametrizaciones de C:

$$\left.\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t^3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t^{3/2} \end{array}\right\}$$

2.16 Calcular las siguientes integrales de línea de campos vectoriales:

(a) $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz \qquad C = \{ x + y = 2 \} \cap \{ x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y) \}$

(b) $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz \qquad C = \{ z = xy \} \cap \{ x^2 + y^2 = 1 \}$

(c) $\int_C x^2y^2dx + xy^2dy$ C curva cerrada limitada por $x = y^2$ y $x = 1$

(d) $\int_C z\,dx \qquad C = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0 \} \cap \{ x^2 + y^2 = x \}$

2.17 Calcular la integral $\int_C (2xy + z^3)\,dx + x^2dy + 3xz^2dz$ siendo C la curva intersección del primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $z = 1/2$.

2.18 Calcular la integral $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ siendo C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $y + z = a$.

2.19 Dado el campo de fuerzas en el espacio $F(x, y, z) = (yz, xz, x(y + 1))$, calcular el trabajo que realiza F al mover una partícula a lo largo de la frontera del triángulo de vértices (0,0,0), (1,1,1) y (-1,1,-1), en este orden.

2.20 Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$ al desplazar una partícula a lo largo de la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el cilindro $x^2 + y^2 = x$, para $z \geq 0$.

2.21 Calcular la integral $\int_C y^2 dx + x\,dy$ siendo C cada una de las curvas

(a) cuadrado de vértices (0,0), (2,0), (2,2) y (0,2).

(b) circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas.

(c) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

2.22 Comprobar el teorema de Green calculando la integral:

$$\int_C y \operatorname{sen} x\,dx + (x + y - 1)\,dy$$

siendo C la curva formada por las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ entre los dos primeros puntos de corte positivos.

2.23 Empleando el teorema de Green, calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula a lo largo de la frontera de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

2.24 Sea R una región conexa del plano cuya frontera es una curva C cerrada, simple y regular a trozos. Demostrar que el área de R viene dada por las siguientes expresiones:

$$\text{Area}(R) = \int_C x\,dy = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$$

2.25 Comprobar el teorema de Green en el cálculo de la integral de linea a lo largo de la trayectoria C del campo $F(x, y) = (x^3 - x^2y, xy^2)$, siendo C el contorno de la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y exterior a $x^2 + y^2 = 4$.

2.26 Calcular las siguientes integrales de línea sobre las trayectorias que se indican:

(a) $\int_C (5 - xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$ C frontera de $[0,1] \times [0,1]$

(b) $\int_C (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy$ C elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

(c) $\int_C -xy^2dx + x^2y\,dy$ C frontera de la región del primer cuadrante limitada por $y = 1 - x^2$

(d) $\int_C x^2y^2dx + (x^2 + \text{sen } y)\,dy$ C frontera de la región limitada por las gráficas de $y = \frac{1}{2}x^2$ y $x = \frac{1}{2}y^2$

2.27 Calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x, y) = (y \cos x, 2x - 1)$ sobre la curva del plano determinada por $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ y las gráficas de las curvas $y = \cos x$, $y = \text{tg } x$ entre $x = 0$ y el primer punto de corte positivo.

2.28 Comprobar si las siguientes formas diferenciales son exactas y, en caso afirmativo, calcular una función potencial del campo vectorial correspondiente.

(a) $2xy\,dx + (x^2 + 3y^2)\,dy$

(b) $3x^2\,dx + x^3y\,dy$

(c) $\frac{x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy$

(d) $\frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$

(e) $(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1)\,dx + (x^2z - 4xy)\,dy + (x^2y + 2xz - 2)\,dz$

(f) $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

(g) $(y\,dx + x\,dy)\cos xy + dz$

2.29 Calcular las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C x\,dy + y\,dx$ C frontera de $[0, 1] \times [0, 1]$

(b) $\int_C \frac{dx + dy}{x + y}$

C porción de parábola $y = x^2$ entre $(1/2, 1/4)$ y $(1,1)$

(c) $\int_C \frac{yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{xyz}$

C camino del primer octante desde $(1,1,1)$ hasta $(2, 2, 1/4)$

(d) $\int_{(2,0,0)}^{(1,2,3)} x\,dx + y\,dy + z\,dz$

(e) $\int_{(0,1,\pi/2)}^{(\pi,0,\pi/2)} \cos x\,dx + \text{sen}\, z\,dz$

2.30 Calcular $\int_C \frac{2x}{x^2 - y^2}\,dx + \frac{-2y}{x^2 - y^2}\,dy$

para cada una de las siguientes trayectorias C:

(a) $x^2 + y^2 = 1$

(b) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$

(c) $y = x^2 - 1$ desde $(-1,0)$ hasta $(1,0)$

(d) $x = y^2 + 1$ desde $(2,-1)$ hasta $(2,1)$

2.31 Calcular $\int_C x\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,dx + y\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\,dy$

para cada una de las siguientes trayectorias C:

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(b) $y = x$ desde $(-1,-1)$ hasta $(1,1)$

(c) $2x^2 + y^2 = 4$

2.32 Calcular $\int_C \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy$

para cada una de las siguientes trayectorias C:

(a) $y = 2x - 1$ desde $(0,-1)$ hasta $(1,1)$

(b) $x^2 + y^2 = 1$

2.33 Dado el campo vectorial de IR^2, $F(x, y) = \left(\frac{ax}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{y-a}{x^2 + (y-1)^2} \right)$ para $(x, y) \neq (0,1)$

(a) Calcular el valor del parámetro $a \in IR$ para que F sea conservativo.

(b) Para ese valor del parámetro buscar una función potencial del campo F.

(c) Calcular $\int_C F \cdot dr$ si C es la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$

(d) Calcular $\int_C F \cdot dr$ si C es la porción de parábola $x = y^2$ desde (1,-1) hasta (4,2).

2.34 Dado el campo $F: IR^2 \to IR^2$ definido en la forma $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$

(a) Calcular dos funciones potenciales de F con diferente dominio.

(b) Calcular $\int_C F \cdot dr$ para las trayectorias C siguientes:

$(x-2)^2 + y^2 = 1, \qquad (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

c) Calcular $\int_C F \cdot dr$ siendo C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

2.35 De un campo de fuerzas en el plano se sabe que en cada punto la fuerza está dirigida hacia el origen de coordenadas y su magnitud es proporcional a la distancia al origen.

(a) Calcular el trabajo que realiza el campo al desplazar una partícula sobre la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y en sentido antihorario.

(b) ¿ Es conservativo ese campo de fuerzas ? En caso afirmativo, calcular su energía potencial.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DEL TEMA 2

2.1 Encontrar una representación paramétrica para las siguientes curvas:

(a) Recta que pasa por los puntos A = (2,0,4) y B = (1,0,6)

vector AB: $$AB = B - A = (1,0,6) - (2,0,4) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Puntos de la recta: $$(x,y,z) = (2,0,4) + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 0 \\ z = 4 + 2t \end{array}\right\} \quad t \in \mathrm{IR}$$

(b) Segmento que une los puntos A = (2,0,4) y B = (1,0,6)

Puntos del segmento AB: $(x,y,z) = (1-t)\,(2,0,4) + t\,(1,0,6)$, $t \in [0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 0 \\ z = 4 + 2t \end{array}\right\} \quad t \in [0,1]$$

Si $t = 0$ obtenemos (2,0,4); si $t = 1$ obtenemos (1,0,6)

(c) Circunferencia de centro (5, -7) y radio 3

$$\left.\begin{array}{l} x = 5 + 3\cos t \\ y = -7 + 3\,\mathrm{sen}\, t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$$

(d) Curva de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ z = e^x \end{array}\right\}$

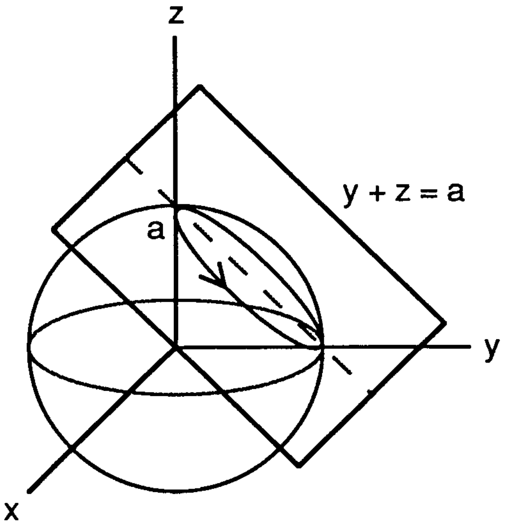
$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \mathrm{sen}\, t \\ z = e^{\cos t} \end{array}\right\} \quad t \in \mathrm{IR}$$

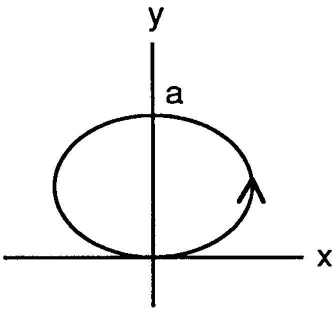
(e) Curva de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} 3x^2+4y^2=1 \\ z=x^2 \end{array}\right\}$

$$3x^2+4y^2=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2}{1/3}+\frac{y^2}{1/4}=1 \quad \text{elipse de semiejes } \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ y } \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos t \\ y=\frac{1}{2}\,\text{sen}\, t \\ z=\frac{1}{3}\cos^2 t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

2.2 Encontrar una representación paramétrica de la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el plano $y+z=a$.





Buscamos la proyección de la curva intersección sobre el plano $z = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y+z=a \end{array}\right\} \qquad z=a-y$$

$$x^2+y^2+(a-y)^2=a^2 \qquad\qquad x^2+2y^2-2ay=0$$

completando cuadrados: $x^2+2\,(y-a/2)^2=a^2/2$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}+\frac{(y-a/2)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1$$

elipse centrada en (0, a/2) de semiejes $\frac{\sqrt{2}}{2}$ a, $\frac{a}{2}$

parametrización de la curva en z = 0 : $\left.\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a \cos t \\ y = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\, \text{sen}\, t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$

parametrización de la curva en IR^3 con z = a - y :

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a \cos t \\ y = \frac{a}{2}\, (1 + \text{sen}\, t) \\ z = \frac{a}{2}\, (1 - \text{sen}\, t) \end{array}\right\} \quad t \in [\, 0, 2\pi]$$

2.3 Representar gráficamente las curvas cuya expresión paramétrica es la siguiente:

(a) $\left.\begin{array}{l} x (t) = t^3 - 4t \\ y (t) = t^2 - 4 \end{array}\right\} \quad t \in IR$

Es simétrica respecto al eje OY, ya que: $\left.\begin{array}{l} x (-t) = -x (t) \\ y (-t) = y (t) \end{array}\right\}$

Corte con OY: x (t) = 0, $t^3 - 4t = 0$, t = -2, 0, 2

Puntos: (0,0), (0,-4), (0,0)

Corte con OX: y (t) = 0, $t^2 - 4 = 0$, t = -2, 2

Puntos: (0,0), (0,0)

Estudio de las derivadas: $x'(t) = 3t^2 - 4$

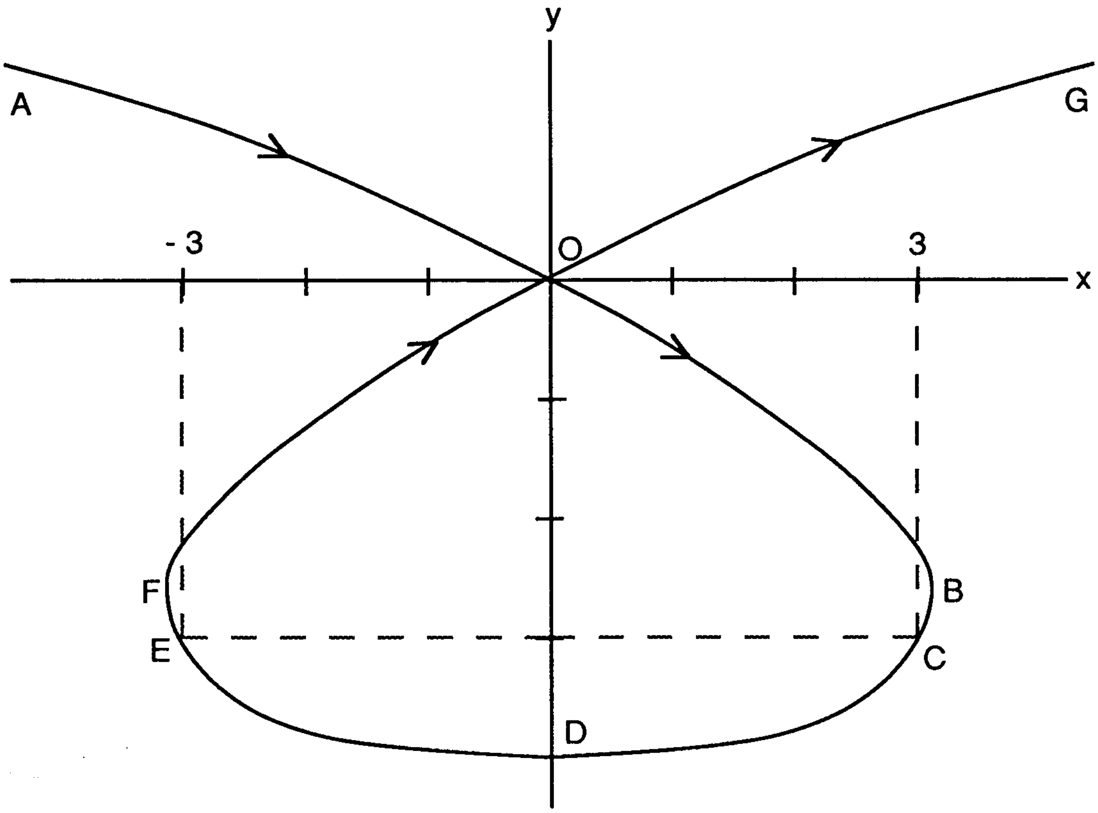
$y'(t) = 2t$

Ceros de las derivadas: $x'(t) = 0$, $t = \frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$y'(t) = 0$, $t = 0$

Tomando como valores del parámetro los ceros de las derivadas así como puntos intermedios escogidos arbitrariamente y estudiando el comportamiento en $-\infty$ y $+\infty$ construimos la siguiente tabla:

Puntos	A	O	B	C	D	E	F	O	G
t	$-\infty$	- 2	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	- 1	0	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$+\infty$
x'	$+\infty$	+	0	-	-	-	0	+	$+\infty$
y'	$-\infty$	-	-	-	0	+	+	+	$+\infty$
arco	↘	↘	↓	↙	←	↖	↑	↗	↗
x	$-\infty$	0	$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	3	0	- 3	$\frac{-16\sqrt{3}}{9}$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	- 8 / 3	- 3	- 4	- 3	- 8 / 3	0	$+\infty$



O = (0, 0) es el único punto doble de esta curva.

(b)

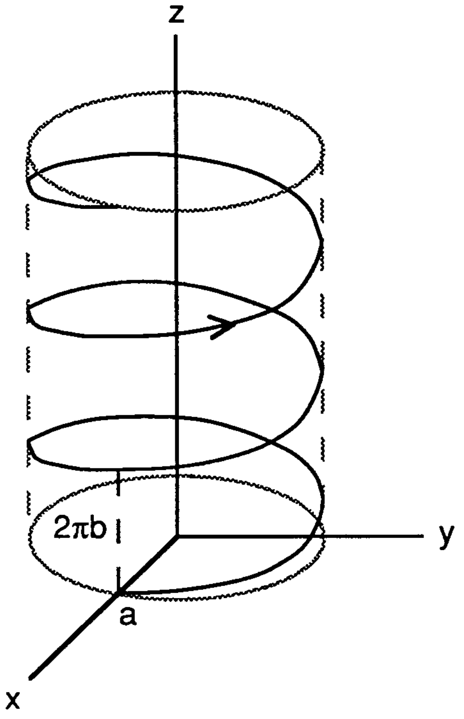
$$\left.\begin{array}{l} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a \operatorname{sen} t \\ z(t) = b\,t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}\,; \quad \text{hélice de paso } 2\pi b$$

Se cumple que $[\, x(t) \,]^2 + [\, y(t) \,]^2 = a^2$, es decir, esta curva está sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$

$z'(t) = b$; el crecimiento de z es constante para $t \in \mathbb{R}$.

Además: $(\, x(t + 2\pi), y(t + 2\pi), z(t + 2\pi) \,) = (\, x(t), y(t), z(t) + 2\pi b \,)$

La igualdad anterior nos indica que esta hélice tiene paso $2\pi b$.



$t = 0 \rightarrow (a, 0, 0)$

$t = 2\pi \rightarrow (a, 0, 2\pi b)$

2.4 Calcular la longitud de un arco de la cicloide:

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = a\,(t - \operatorname{sen} t) \\ y(t) = a\,(1 - \cos t) \end{array}\right\}$$

La cicloide está definida para todo $t \in \mathbb{R}$,

$(\, x(t + 2\pi),\ y(t + 2\pi) \,) = (\, a(t + 2\pi - \operatorname{sen} t), a(1 - \cos t) \,) = (\, x(t) + 2\pi a, y(t) \,)$

y (t) es una función periódica de periodo 2π, mientras que x (t) cumple que al incrementar el parámetro en 2π se obtiene el mismo valor que en t pero desplazado $2\pi a$, por este motivo la curva tiene forma similar en franjas verticales de anchura $2\pi a$, bastando estudiar su comportamiento para valores del parámetro $t \in [0, 2\pi]$.

Corte con OY: $x(t) = 0$, $a(t - \operatorname{sen} t) = 0$, $t = \operatorname{sen} t$, $t = 0$

Punto: (0, 0)

Corte con OX : $y(t) = 0$, $a(1-\cos t) = 0$, $\cos t = 1$, $t = 0, 2\pi$

Puntos: $(0,0)$, $(2\pi a, 0)$

Estudio de las derivadas: $x'(t) = a(1 - \cos t)$

$y'(t) = a \operatorname{sen} t$

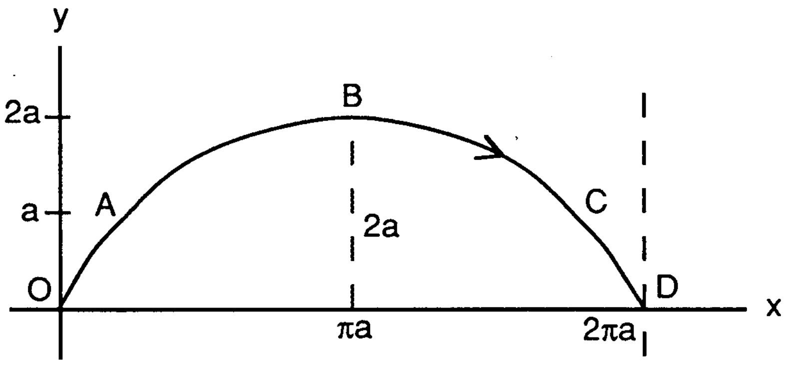
Ceros de las derivadas: $x'(t) = 0$, $\cos t = 1$, $t = 0, 2\pi$

$y'(t) = 0$, $\operatorname{sen} t = 0$, $t = 0, \pi, 2\pi$

Tomamos los ceros de las derivadas $0, \pi, 2\pi$ y valores intermedios $\pi/2$, $3\pi/2$ para formar la siguiente tabla:

Puntos	O	A	B	C	D
t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x'	0	a	$2a$	a	0
y'	0	a	0	$-a$	0
arco	P.R.	↗	→	↘	P.R.
x	0	$(\pi/2-1)a$	πa	$(3\pi/2+1)a$	$2\pi a$
y	0	a	$2a$	a	0

P.R. = Punto de retroceso.



Un arco de cicloide se obtiene para valores del parámetro $t \in [0, 2\pi]$:

$$\text{longitud de un arco} = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt =$$

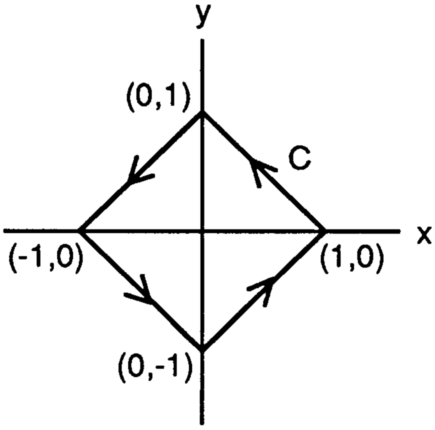
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{[a\,(1 - \cos t)]^2 + [a \operatorname{sen} t]^2}\, dt = \sqrt{2}\, a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\, a \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt = 2a \left[\frac{-\cos t/2}{1/2} \right]_0^{2\pi} = 8a$$

Nota: Una cicloide es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio a cuando rueda sin resbalar sobre el eje OX.

2.5 Calcular las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C xy\, ds$ C contorno del cuadrado $|x| + |y| = 1$



Camino: $| x | + | y | = 1$

Primer cuadrante:	$x + y = 1$	$(x, y) = (1 - t, t)$	$t \in [0,1]$
Segundo cuadrante:	$-x + y = 1$	$(x, y) = (-t, 1 - t)$	$t \in [0,1]$
Tercer cuadrante:	$-x - y = 1$	$(x, y) = (t - 1, -t)$	$t \in [0,1]$
Cuarto cuadrante:	$x - y = 1$	$(x, y) = (t, t - 1)$	$t \in [0,1]$

En todos los casos $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{2}$

$$\int_C xy\, ds = \int_0^1 (1 - t)\, t \sqrt{2}\, dt + \int_0^1 (-t)\,(1 - t) \sqrt{2}\, dt +$$

$$+\int_0^1 (t-1)(-t)\sqrt{2}\ dt + \int_0^1 t(t-1)\sqrt{2}\ dt = 0$$

(b) $\int_C \frac{ds}{x^2+y^2+4}$ C segmento que une (0,0) con (1,2)

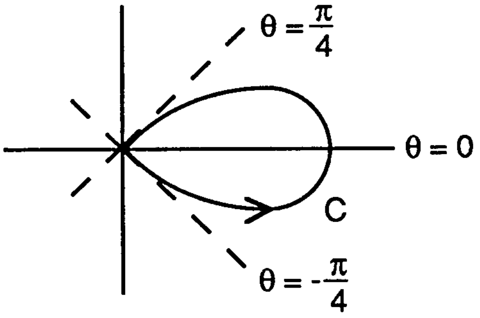
Parametrización de C: $(x, y) = (1 - t)(0,0) + t(1,2)$

$(x, y) = (t, 2t) \quad t \in [0, 1]$

$\sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{5}$

$$\int_C \frac{1}{x^2+y^2+4}\ ds = \int_0^1 \frac{1}{5t^2+4}\sqrt{5}\ dt = \frac{1}{2}\ \text{arctg}\ \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(c) $\int_C (x+y)\ ds$ C lazo derecho de la lemniscata $r^2 = a^2\cos 2\theta$



Lazo derecho:

$r = a\sqrt{\cos 2\theta}$

$-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

Parametrización de C:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta = a\sqrt{\cos 2\theta}\ \cos\theta \\ y = r\ \text{sen}\ \theta = a\sqrt{\cos 2\theta}\ \text{sen}\ \theta \end{array}\right\} \quad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$

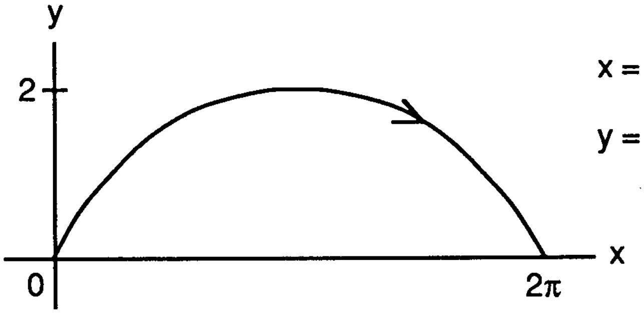
$$\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$$

$$\int_C (x+y)\ ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\theta}\ (\cos\theta + \text{sen}\ \theta)\ \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\ d\theta =$$

$$= a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \sqrt{2}\, a^2$$

(d) $\int_C y^2 ds$ C arco de la cicloide $\left.\begin{array}{l} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{array}\right\} \; t \in [0, 2\pi]$

La obtención de la gráfica de una cicloide está descrita en el problema 2.4



$\left.\begin{array}{l} x = t - \operatorname{sen} t \\ y = 1 - \cos t \end{array}\right\} \; t \in [0, 2\pi]$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2} = \sqrt{2}\, \sqrt{1 - \cos t}$$

$$\int_C y^2 ds = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \sqrt{2}\, \sqrt{1 - \cos t}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{1 - \cos t}\,)^5 dt =$$

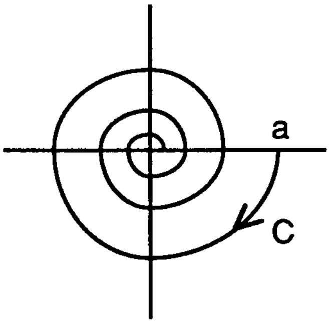
$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}\, \operatorname{sen} t/2)^5 dt = 8 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^5 \frac{t}{2}\, dt = \left\{ \begin{array}{c} t = 2u \\ dt = 2\, du \end{array} \right\} =$$

$$= 16 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^5 u\, du = 16 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 u)^2 \operatorname{sen} u\, du =$$

$$= 16 \left[-\cos u - \frac{1}{5} \cos^5 u + \frac{2}{3} \cos^3 u \right]_0^{\pi} = \frac{256}{15}$$

(e) $\int_C (x^2 + y^2)\, ds$ C arco de espiral $r = ae^{m\theta}$ $(m > 0)$

para valores del ángulo θ desde 0 hasta $-\infty$



En polares, tomando θ como parámetro:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta = a e^{m\theta}\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = a e^{m\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}$$

θ decrece de 0 hasta $-\infty$

Al ser $r = a\,e^{m\theta}$, el radio r (distancia al origen) decrece y tiende asintóticamente a 0 a medida que θ toma valores negativos.

$$\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} = a e^{m\theta}\sqrt{m^2+1}$$

$$\int_C (x^2+y^2)\,ds = \int_0^{-\infty} a^2 e^{2m\theta}\, a e^{m\theta}\sqrt{m^2+1}\;d\theta =$$

$$= a^3\sqrt{m^2+1}\lim_{A\to-\infty}\int_0^A e^{3m\theta}\,d\theta = \frac{a^3\sqrt{m^2+1}}{3m}\lim_{A\to-\infty}\Big[e^{3m\theta}\Big]_0^A =$$

$$= \frac{a^3\sqrt{m^2+1}}{3m}\left[\lim_{A\to-\infty} e^{3mA} - 1\right] = \frac{-a^3\sqrt{m^2+1}}{3m}$$

2.6 Calcular las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C xy^3 ds$ C segmento que une (-1,-2,0) con (1,2,3)

Parametrización de C: $(x, y, z) = (1 - t)(-1,-2,0) + t\,(1,2,3), \quad t \in [0,1]$

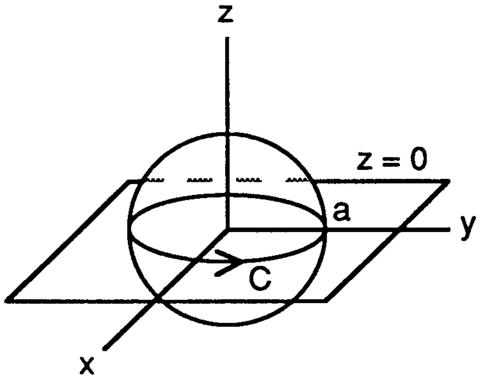
$(x, y, z) = (-1+ 2t, -2 + 4t, 3t), \quad t \in [0,1]$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{29}$$

$$\int_C xy^3 ds = \int_0^1 (-1 + 2t)(-2 + 4t)^3\sqrt{29}\;dt =$$

$$= \sqrt{29}\int_0^1 2^3(-1 + 2t)^4 dt = \frac{4\sqrt{29}}{5}\Big[(-1 + 2t)\Big]_0^1 = \frac{8\sqrt{29}}{5}$$

(b) $\int_C (3x^2 + 3y^2)\, ds$ C intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con el plano $z = 0$



C ≡ circunferencia de radio a en z = 0

curva intersección $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = 0 \end{array}\right\} \; x^2 + y^2 = a^2$

Parametrización: $\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = a \,\text{sen}\, t \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{(-a \,\text{sen}\, t)^2 + (a\cos t)^2 + 0} = a$$

$$\int_C (3\,x^2 + 3\,y^2)\, ds = \int_0^{2\pi} 3\,(a^2\cos^2 t + a^2 \text{sen}^2 t)\, a\, dt = 3\,a^3 \int_0^{2\pi} dt = 6a^3\pi$$

(c) $\int_C x^2\, ds$ C intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 0$

Para parametrizar la curva C buscamos la proyección de ésta sobre el plano $z = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \quad z = -x - y$$

de donde $2x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$

Para eliminar el término cruzado 2xy lo agrupamos con uno cuadrático y completamos cuadrados.

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{4}\, y^2 + y^2 - \frac{1}{4}\, y^2 = \frac{1}{2}$$

$$(x+\frac{1}{2}\,y)^2+\frac{3}{4}\,y^2=\frac{1}{2}$$

$$\frac{(x+1/2\,y)^2}{1/2}+\frac{y^2}{2/3}=1$$

Obtenemos una elipse cuyos ejes de simetría no son paralelos a los ejes coordenados, sino que está girada respecto a éstos.

$$\left.\begin{array}{r} x+\frac{1}{2}\,y=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t \\ y=\frac{\sqrt{6}}{3}\,\text{sen}\,t \end{array}\right\}\quad t\in[0,2\pi]$$

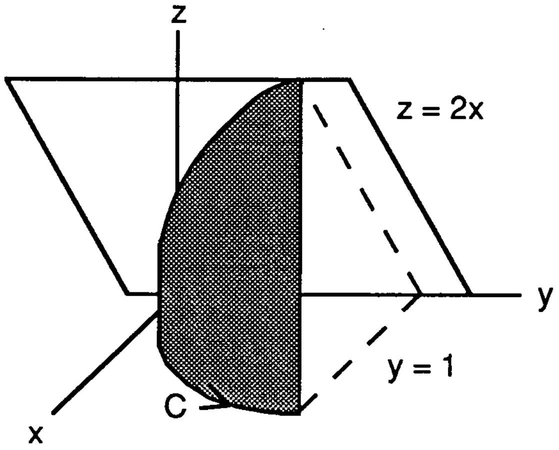
despejando:

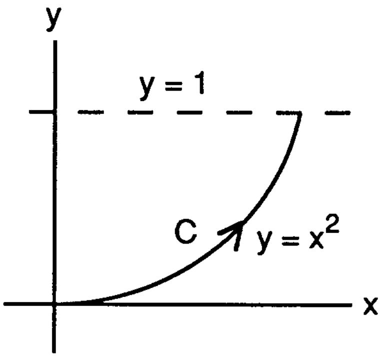
$$z=-x-y\quad\rightarrow\quad \left.\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{6}}{6}\,\text{sen}\,t \\ y=\frac{\sqrt{6}}{3}\,\text{sen}\,t \\ z=\frac{-\sqrt{2}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{6}}{6}\,\text{sen}\,t \end{array}\right\}\quad t\in[0,2\pi]$$

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=1$$

$$\int_C x^2\,ds=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{6}\,\text{sen}^2\,t-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos t\,\text{sen}\,t\right)1\,dt=\frac{2}{3}\pi$$

2.7 Calcular el área lateral de la porción de cilindro parabólico $y = x^2$ limitado por los planos $z = 2x$, $z = 0$, $y = 1$.





Función a integrar $z = 2x$, pues da la altura de la porción de superfície cuya área se busca.

Trayectoria sobre la que se integra: $y = x^2$

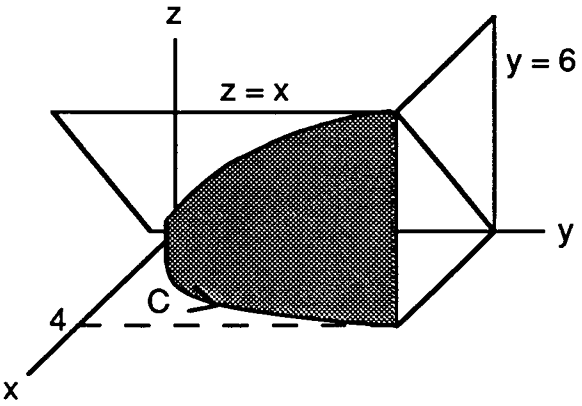
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \quad (x, y) = (1, 1) \quad \text{en} \quad x \geq 0$$

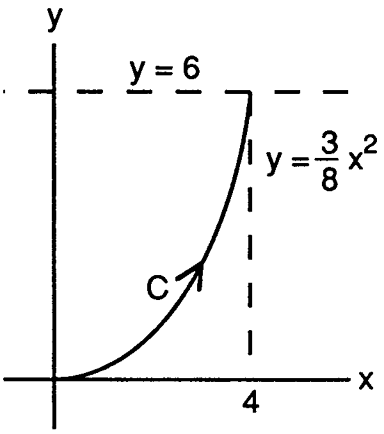
Parametrización de C: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \end{array}\right\} \quad t \in [0, 1]$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{1 + 4t^2}$$

$$\text{Area lateral} = \int_C 2x\, ds = \int_0^1 2t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \frac{1}{6}\,(5\sqrt{5} - 1)$$

2.8 Calcular el área de la superficie lateral del cilindro parabólico $y = 3x^2/8$, limitado por los planos $z = 0$, $z = x$, $y = 6$.





La función a integrar sobre la trayectoria C es: $z = x$.

La trayectoria C es la parábola $y = 3/8\, x^2$ en $z = 0$.

Para determinar los extremos de C intersecamos con los planos dados en el enunciado:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{8}x^2 \\ y = 6 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x^2 = 16 \quad \rightarrow \quad x = +4 \qquad (x \geq 0)$$

$$(x, y) = (4, 6)$$

$$\left.\begin{array}{l} z = x \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad x = 0 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} y = \frac{3}{8}x^2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \quad (x, y) = (0, 0)$$

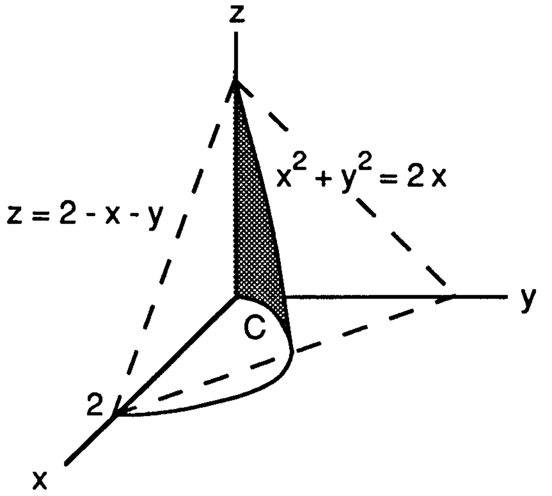
La parametización de C será:

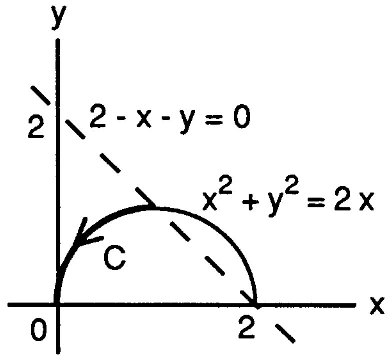
$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{3}{8}t^2 \end{array}\right\} \quad t \in [0, 4] \,; \qquad \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{\sqrt{16 + 9\,t^2}}{4}$$

$$\text{Area lateral} = \int_C x\,ds = \int_0^4 t\,\frac{\sqrt{16+9\,t^2}}{4}\,dt = \frac{1}{72}\int_0^4 18\,t\,\sqrt{16+9\,t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{108}\left[\,(16 + 9\,t^2\,)^{3/2}\,\right]_0^4 = \frac{16}{27}\,(\,10\sqrt{10}\,-1\,)$$

2.9 Calcular el área de la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ limitado por los planos $z = 2 - x - y$, $z = 0$, $y = 0$.





El cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ interseca el plano $z = 0$ por una circunferencia de igual ecuación:

$$x^2 + y^2 = 2x \;\rightarrow\; (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

circunferencia de centro (1, 0) y radio 1. Esta es la trayectoria C sobre la que hemos de integrar; para saber entre qué puntos, buscaremos las intersecciones con los planos que delimitan la figura, que serán rectas en $z = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} z = 2 - x - y \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad 2 - x - y = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2x \\ 2 - x - y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad \begin{array}{l} (x, y) = (2, 0) \\ (x, y) = (1, 1) \end{array}$$

el punto que nos interesa es (1, 1).

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=2x \\ y=0 \end{array}\right\} \quad (x, y) = (0, 0)$$

La trayectoria de integración C es la circunferencia $(x-1)^2+y^2 = 1$ desde (1, 1) hasta (0, 0). Parametrización:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \cos t \\ y = \quad \operatorname{sen} t \end{array}\right\} \quad t \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi], \qquad \sqrt{x'^2 + y'^2} = 1$$

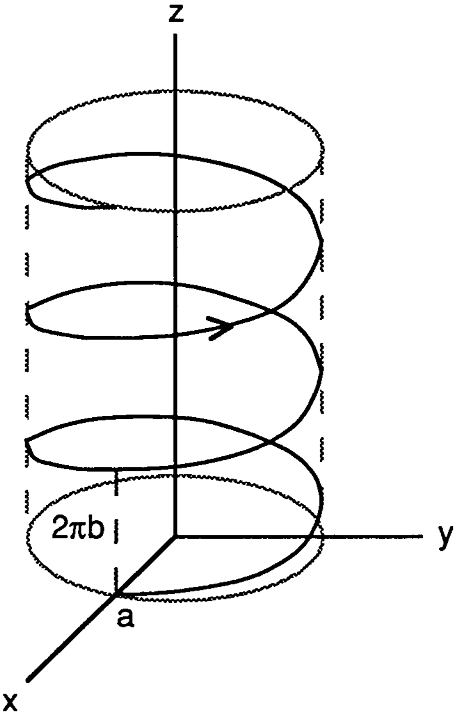
Función a integrar sobre C: $z = 2 - x - y$

$$\text{Area lateral} = \int_C (2 - x - y)\, ds = \int_{\pi/2}^{\pi} [2 - (1 + \cos t) - \operatorname{sen} t]\; 1\, dt =$$

$$= [\, t - \operatorname{sen} t + \cos t\,]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

2.10 Consideremos un muelle en forma de hélice de ecuaciones $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, $t \in [0, 6\pi]$, siendo $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ su función de densidad lineal.

(a) Calcular la masa del muelle.



$$\left.\begin{array}{l} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \\ z = b\,t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 6\pi]$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Masa} = \int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds = \int_0^{6\pi} [\,(a\cos t)^2+(a\,\text{sen}\,t)^2+(bt)^2\,]\,\sqrt{a^2+b^2}\;dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\int_0^{6\pi} (\,a^2+b^2t^2\,)\,dt = 6\,\pi\sqrt{a^2+b^2}\;(a^2+12\,\pi^2\,b^2)$$

(b) Calcular el momento de inercia del muelle respecto al eje OZ.

$$I_r = \int_C d^2\,(x,y,z)\;\;f\,(x,y,z)\,ds$$

El momento de incercia respecto a una recta r es la integral anterior donde d (x, y, z) representa la distancia de (x, y, z) a la recta y f (x, y, z) la función de densidad. En nuestro caso al ser r el eje OZ será:

$$I_z = \int_C (x^2+y^2)\;\;f\,(x,y,z)\,ds = \int_C (x^2+y^2)\,(x^2+y^2+z^2)\,ds =$$

$$= \int_0^{6\pi} a^2\,(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\;\;dt = a^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{6\pi}(a^2+b^2t^2)\,dt =$$

$$= 6\pi\,a^2\sqrt{a^2+b^2}\;\;(a^2+12\,\pi^2\,b^2)$$

2.11 Calcular las coordenadas del centro de masas del muelle del problema 2.10.

Designando por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ las coordenadas del centro de masas, se tendrá:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C x\;\;f\,(x,y,z)\,ds = \frac{1}{M}\int_C x\;\;(x^2+y^2+z^2)\,ds$$

M = masa del muelle, f (x, y, z) = función de densidad.

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_0^{6\pi} a\;\cos t\;\;(a^2+b^2t^2\,)\sqrt{a^2+b^2}\;\;dt =$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{M}\int_0^{6\pi}(a^2\cos t + b^2t^2\cos t\,)\,dt =$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{M}\left[a^2 \,\text{sen}\, t + b^2(t^2 \,\text{sen}\, t + 2t\cos t - 2\,\text{sen}\, t)\right]_0^{6\pi} =$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{M}\, 12\pi b^2 = \frac{12\pi a b^2\sqrt{a^2+b^2}}{6\pi\sqrt{a^2+b^2}\,(a^2+12\pi^2 b^2)} = \frac{2ab^2}{a^2+12\pi^2 b^2}$$

Análogamente:

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_C y\ f(x,y,z)\,ds = \frac{1}{M}\int_C y\,(x^2+y^2+z^2)\,ds$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\int_0^{6\pi} a\ \text{sen}\, t\ (a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\ dt =$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{M}\left[-a^2\cos t + b^2(-t^2\cos t + 2t\,\text{sen}\, t + 2\cos t)\right]_0^{6\pi} =$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{M}\,(-36\pi^2 b^2) = \frac{-36\pi^2 a b^2\sqrt{a^2+b^2}}{6\pi\sqrt{a^2+b^2}\,(a^2+12\pi^2 b^2)} =$$

$$= \frac{-6\pi a b^2}{a^2+12\pi^2 b^2}$$

Por último:

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_C z\ f(x,y,z)\,ds = \frac{1}{M}\int_C z\,(x^2+y^2+z^2)\,ds$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M}\int_0^{6\pi} b\,t\,(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\ dt = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{M}\int_0^{6\pi}(a^2t+b^2t^3)\,dt =$$

$$= \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{M}\,(18\pi^2a^2+324\pi^4b^2) = \frac{18\pi^2 b\sqrt{a^2+b^2}\,(a^2+18\pi^2b^2)}{6\pi\sqrt{a^2+b^2}\,(a^2+12\pi^2b^2)} =$$

$$= \frac{3\pi b\,(a^2+18\pi^2b^2)}{a^2+12\pi^2b^2}$$

Por lo tanto, las coordenadas del centro de masas son:

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{2\,a\,b^2}{a^2 + 12\pi^2\,b^2}, \frac{-\,6\pi\,a\,b^2}{a^2 + 12\pi^2\,b^2}, \frac{3\pi\,b\,(a^2 + 18\,\pi^2\,b^2)}{a^2 + 12\pi^2\,b^2} \right)$$

2.12 Calcular la masa de un alambre que tiene la forma de la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z = 0$, si la función de densidad lineal es $f(x, y, z) = x^2$

$$\text{Masa} = \int_C x^2\,ds$$

C se obtiene como la intersección de las superfícies:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{y} \quad x + y + z = 0$$

Se trata, por lo tanto, de un problema cuya resolución es análoga a la del problema 2.6 (c); entonces:

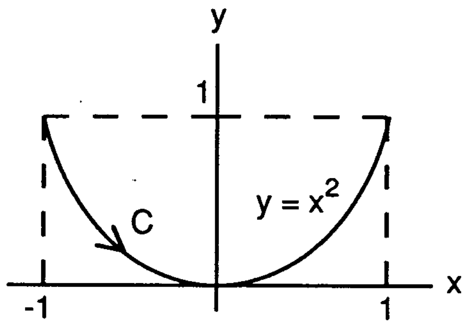
$$\text{Masa} = \int_C x^2\,ds = \frac{2}{3}\pi$$

Así, aquella integral puede interpretarse como el cálculo de la masa de un alambre cuya forma es la trayectoria C, si su función de densidad lineal es $f(x, y, z) = x^2$.

2.13 Calcular las integrales de línea de los campos vectoriales que se indican sobre las correspondientes trayectorias C:

(a) $F(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$

C porción de la parábola $y = x^2$ desde (-1,1) hasta (1,1)



Parametrización de C:

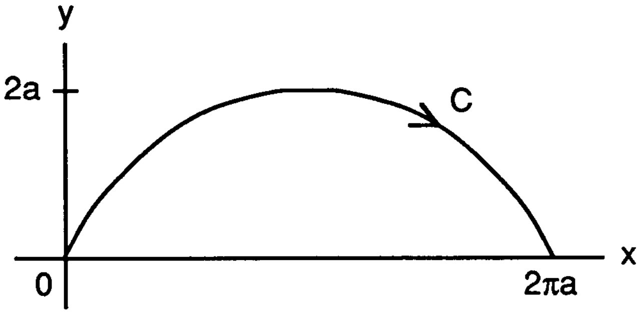
$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \end{aligned}\right\} \quad t \in [-1, 1]$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3, t^4 - 2t^3) \cdot (1, 2t)\,dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4)\, dt = \frac{-14}{15}$$

(b) $F(x, y) = (2a - y, x)$

C arco de cicloide $\left.\begin{array}{r} x = a (t - \operatorname{sen} t) \\ y = a (1 - \cos t) \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$



Parametrización de C:

$$\left.\begin{array}{r} x = a (t - \operatorname{sen} t) \\ y = a (1 - \cos t) \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$$

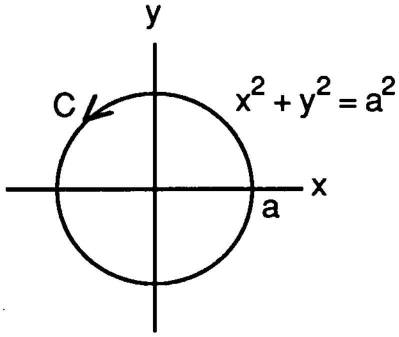
$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = a (1 - \cos t) \\ y'(t) = a \operatorname{sen} t \end{array}\right\}$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (2a - a (1 - \cos t),\ a (t - \operatorname{sen} t)) \cdot (a (1 - \cos t),\ a \operatorname{sen} t)\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} t \operatorname{sen} t\, dt = a^2 \left[- t \cos t + \operatorname{sen} t \right]_0^{2\pi} = - 2\pi a^2$$

(c) $F(x, y) = \left(\frac{x + y}{x^2 + y^2}, \frac{-x + y}{x^2 + y^2} \right)$

C circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$



Parametrización de C:

$$\left.\begin{array}{r} x = a \cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a(\cos t + \operatorname{sen} t)}{a^2}, \frac{a(-\cos t + \operatorname{sen} t)}{a^2} \right) . (-a \operatorname{sen} t,\ a \cos t)\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1)\, dt = -2\pi$$

(d) $F(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$

C segmento que une los puntos (1, 0, 2) y (3, 4, 1).

Parametrización de C, segmento entre (1, 0, 2) y (3, 4, 1):

$(x, y, z) = (1 - t)(1, 0, 2) + t(3, 4, 1) \qquad t \in [0, 1]$

$(x, y, z) = (1 + 2t, 4t, 2 - t) \qquad t \in [0, 1]$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^1 (2(1 + 2t)4t,\ (1 + 2t)^2 + 2 - t,\ 4t) \cdot (2, 4, -1)\, dt =$$

$$= \int_0^1 (48t^2 + 24t + 12)\, dt = 40$$

(e) $F(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, x^2)$

C curva $\{ (x(t), y(t), z(t)) \,/\, x(t) = t^2,\ y(t) = 2t,\ z(t) = 4t^3,\ t \in [0,1] \}$

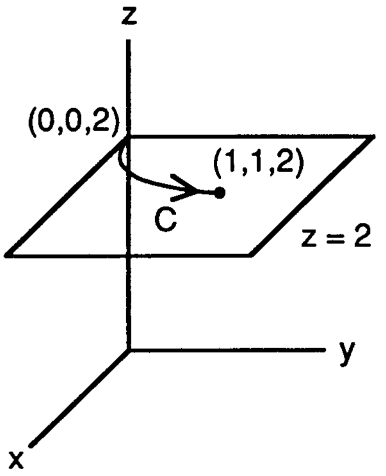
$$\int_C F \cdot dr = \int_C (y^2 - z^2)\, dx + 2yz\, dy + x^2\, dz =$$

$$= \int_0^1 [\ (4t^2 - 16t^6)\, 2t\ +\ (2\ 2t\ 4t^3)\, 2\ +\ t^4\ 12t^2\ ]\, dt =$$

$$= \int_0^1 (8t^3 - 32t^7 + 32t^4 + 12t^6)\, dt = \frac{214}{35}$$

2.14 Calcular la integral $\int_C F \cdot dr$ siendo el campo $F(x, y, z) = (x^2 y, x - z, xyz)$ y la trayectoria C cada una de las siguientes:

(a) porción de parábola $y = x^2$ en $z = 2$, desde (0, 0, 2) hasta (1, 1, 2).



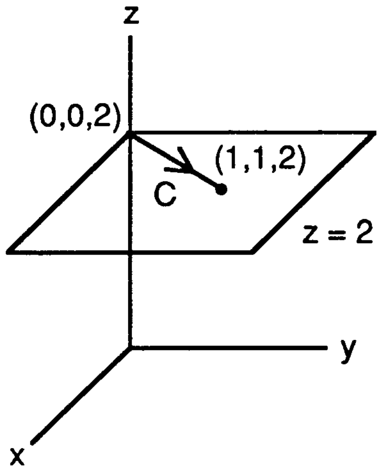
Parametrización de C:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 \\ z = 2 \end{array}\right\} \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C x^2y\,dx + (x - z)\,dy + xyz\,dz =$$

$$= \int_0^1 (t^2\ t^2\ 1 + (t - 2)\,2t + t\ \ t^2\,2 \cdot 0\,)\,dt = \int_0^1 (t^4 + 2t^2 - 4t\,)\,dt = \frac{-17}{15}$$

(b) segmento de recta y = x en z = 2, desde (0, 0, 2) hasta (1, 1, 2).



Parametrización de C:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 2 \end{array}\right\} \quad t \in [0, 1]$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C x^2y\,dx + (\,x - z)\,dy + xyz\,dz =$$

$$= \int_0^1 (\,t^3\,1 + (t - 2)\ 1 + 2t^2 \cdot 0\,)\,dt = \int_0^1 (\,t^3 + t - 2\,)\,dt = \frac{-5}{4}$$

2.15 Comprobar que la integral de línea de un campo vectorial no depende (salvo el signo) de la parametrización escogida para la curva, calculando:

$\int_C F \cdot dr$ desde (0,0) hasta (1,1) para $F(x, y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$

y las parametrizaciones de C:

$$\left.\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t^3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t^{3/2} \end{array}\right\}$$

Para la primera parametrización de C:

$$\left.\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t^3 \end{array}\right\} \quad t \in [0,1] \qquad \left.\begin{array}{l} x' = 2t \\ y' = 3t^2 \end{array}\right\}$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \sqrt{y}\, dx + (x^3 + y)\, dy = \int_0^1 [\, t^{3/2}\, 2t + (t^6 + t^3)\, 3t^2 \,]\, dt =$$

$$= \int_0^1 (2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5)\, dt = \frac{59}{42}$$

Para la segunda parametrización de C:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t^{3/2} \end{array}\right\} \quad t \in [0,1] \qquad \left.\begin{array}{l} x' = 1 \\ y' = \frac{3}{2}\, t^{1/2} \end{array}\right\}$$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \sqrt{y}\, dx + (x^3 + y)\, dy = \int_0^1 [\, t^{3/4}\, 1 + (t^3 + t^{3/2})\, \frac{3}{2}\, t^{1/2} \,]\, dt =$$

$$= \int_0^1 (t^{3/4} + \frac{3}{2}\, t^{7/2} + \frac{3}{2}\, t^2)\, dt = \frac{59}{42}$$

En ambos casos la curva que se describe es $y = x^{3/2}$, es decir:

$y = x\sqrt{x}$ con la determinación positiva de la raiz.

2.16 Calcular las siguientes integrales de línea de campos vectoriales:

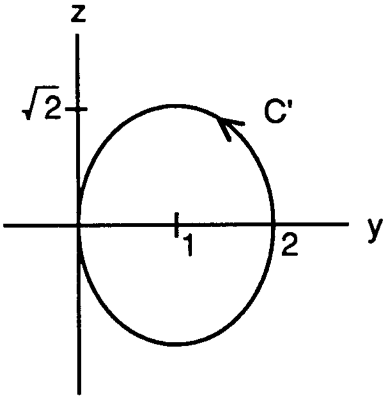
(a) $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz \qquad C = \{ x + y = 2 \} \cap \{ x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y) \}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\,(x + y) \quad \rightarrow \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2$$

es una esfera de centro (1,1,0) y radio $\sqrt{2}$

Proyectamos la curva en el plano zy:

$$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = 2\,(x + y) \\ x = 2 - y \end{matrix}\right\} \rightarrow \; y^2 - 2y + \frac{1}{2} z^2 = 0$$



$$(y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$$

C' elipse de centro (1,0)

y semiejes 1, $\sqrt{2}$

Parametrización de C: $\left.\begin{matrix} x = 1 - \cos t \\ y = 1 + \cos t \\ z = \sqrt{2}\ \operatorname{sen} t \end{matrix}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\,(1 + \cos t) \operatorname{sen} t + \sqrt{2} \operatorname{sen} t\,(- \operatorname{sen} t) + (1 - \cos t)\,\sqrt{2}\ \cos t\,]\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t + \sqrt{2}\ \cos t + \operatorname{sen} t \cos t\ - \sqrt{2}\ )\,dt = - 2\sqrt{2}\ \pi$$

(b) $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz \qquad C = \{\,z = xy\,\} \cap \{\,x^2 + y^2 = 1\}$

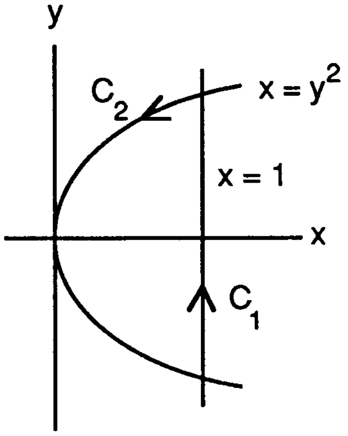
Parametrización de C: $\left.\begin{matrix} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = \cos t\ \operatorname{sen} t \end{matrix}\right\} \quad t \in [\,0, 2\pi\,]$

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\,\text{sen}\,t\,(-\,\text{sen}\,t) + \cos t\,\text{sen}\,t\cos t + \cos t\,(-\,\text{sen}^2 t + \cos^2 t)\,]\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\,-\,\text{sen}^2 t + \cos^2 t\,\text{sen}\,t - \text{sen}^2 t\cos t + (1 - \text{sen}^2 t)\cos t\,]\,dt = -\pi$$

(c) $\int_C x^2y^2dx + xy^2dy$ C curva cerrada limitada por $x = y^2$ y $x = 1$



Puntos de intersección de C_1 con C_2

$$\left.\begin{array}{l} x = y^2 \\ x = 1 \end{array}\right\} \quad y = 1, -1 \;; \quad (1, 1),\ (1, -1)$$

Parametrización de C_1: $(x, y) = (1 - t)\,(1, -1) + t\,(1, 1)$ $t \in [0, 1]$

$(x, y) = (1, -1 + 2t)$ $t \in [0, 1]$

$$\int_{C_1} x^2y^2\,dx + xy^2\,dy = \int_0^1 1\,(-1 + 2t)^2\,2\,dt = \frac{2}{3}$$

Parametrización de C_2: $\left.\begin{array}{l} x = (1 - 2t)^2 \\ y = 1 - 2t \end{array}\right\}$ $t \in [\,0, 1]$

$$\int_{C_2} x^2y^2\,dx + xy^2\,dy = \int_0^1 [\,(1 - 2t)^6\,(-\,4\,(1 - 2t)\,) + (1 - 2t)^4\,(-2\,)\,]\,dt =$$

$$= \int_0^1 [\,-\,4\,(1 - 2t)^7 - 2\,(1 - 2t)^4\,]\,dt = \left[\,\frac{1}{4}(1 - 2t)^8 + \frac{1}{5}(1 - 2t)^5\right]_0^1 = \frac{-2}{5}$$

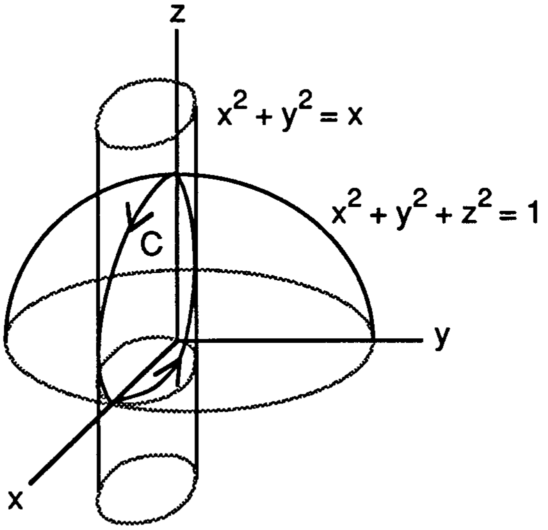
por lo tanto:

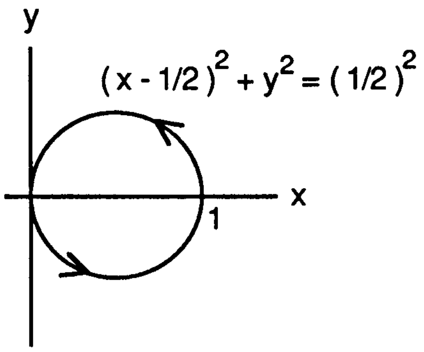
$$\int_C x^2y^2\,dx + xy^2\,dy = \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} \right) x^2y^2\,dx + xy^2\,dy = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

(d) $\int_C z\,dx$ $\qquad C = \{ x^2+y^2+z^2 = 1,\ \ z \geq 0 \} \cap \{ x^2+y^2 = x \}$

Completando cuadrados en $x^2 + y^2 = x$ queda:

$$(x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2 \qquad \text{cilindro circular recto}$$





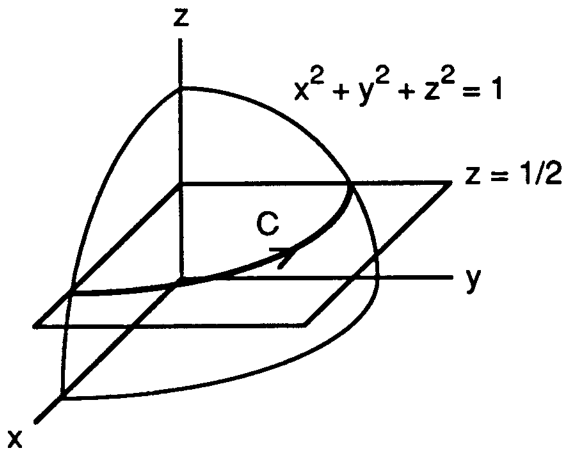
La curva intersección C resulta ser:

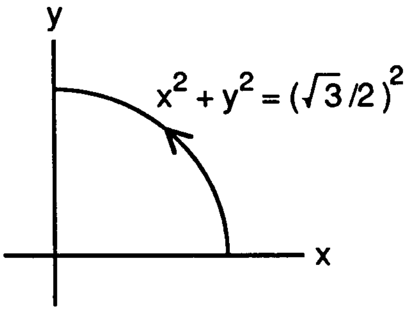
$$\left. \begin{array}{l} (x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2 \\ z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{array} \right\} \qquad \left. \begin{array}{l} x = 1/2 + 1/2 \cos t \\ y = \quad 1/2 \,\text{sen}\, t \\ z = +\sqrt{\dfrac{1 - \cos t}{2}} \end{array} \right\} \quad t \in [0, 2\pi]$$

entonces:

$$\int_C z\,dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\; \frac{-1}{2}\, \text{sen}\, t\, dt = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{(1 - \cos t)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

2.17 Calcular la integral $\int_C (2xy + z^3)\,dx + x^2dy + 3xz^2dz$ siendo C la curva intersección del primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $z = 1/2$.





$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=1/2 \end{array}\right\} \quad x^2+y^2=(\sqrt{3}/2)^2 \quad \text{en} \quad z=1/2$$

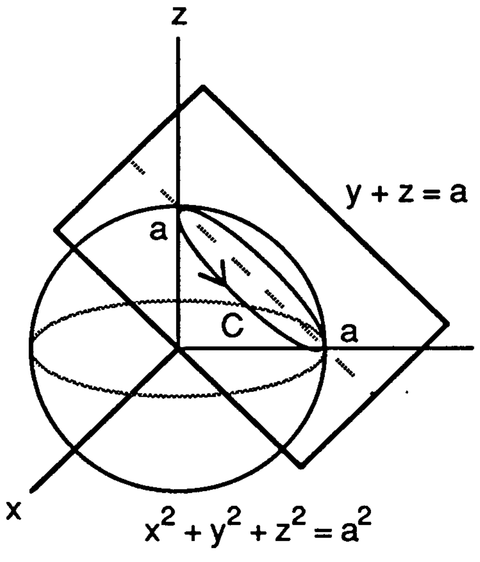
$$\text{Parametrización de C:} \quad \left.\begin{array}{l} x=\sqrt{3}/2\cos t \\ y=\sqrt{3}/2\,\text{sen}\,t \\ z=1/2 \end{array}\right\} \quad t\in[0,\pi/2]$$

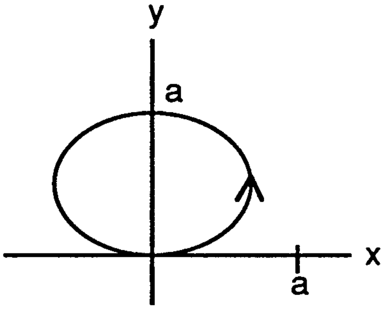
$$\int_C (2xy+z^3)\,dx+x^2\,dy+3xz^2\,dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,t+\frac{1}{8})\,\frac{-\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,t+\frac{3}{4}\cos^2 t\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t+0]\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\,\frac{-3\sqrt{3}}{4}\,\text{sen}^2 t\,\cos t-\frac{\sqrt{3}}{16}\,\text{sen}\,t+\frac{3\sqrt{3}}{8}(1-\text{sen}^2 t)\cos t\,]\,dt = \frac{-\sqrt{3}}{16}$$

2.18 Calcular la integral $\int_C y\,dx+z\,dy+x\,dz$ siendo C la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ con el plano $y+z=a$.





Proyección de la curva C en el plano z = 0:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y + z = a \end{array}\right\} \quad z = a - y \quad \rightarrow \quad x^2 + 2y^2 - 2ay = 0$$

completando cuadrados: $x^2 + 2\,(y - a/2)^2 = a^2/2$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{2}/2\,a)^2} + \frac{(y - a/2)^2}{(a/2)^2} = 1$$ elipse de centro (0, a/2) y semiejes $\sqrt{2}/2\,a$, a/2.

Parametrización de C:

$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{2}/2\;a\cos t \\ y = a/2 + a/2\,\text{sen}\,t \\ z = a/2 - a/2\,\text{sen}\,t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$$

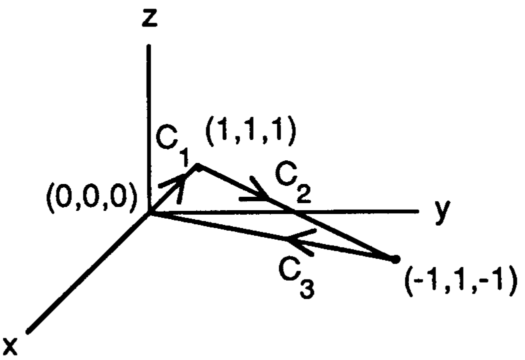
entonces:

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^{2\pi} [\,\frac{a}{2}(1 + \text{sen}\,t)\frac{-\sqrt{2}}{2}a\,\text{sen}\,t +$$

$$+\frac{a}{2}(1 - \text{sen}\,t)\frac{a}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}a\cos t\frac{-a}{2}\cos t\,]\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{2\pi} [-\sqrt{2}\,\text{sen}\,t - \sqrt{2}\,\text{sen}^2 t + \cos t - \text{sen}\,t\cos t - \sqrt{2}\cos^2 t\,]\,dt = \frac{-\sqrt{2}}{2}\pi a^2$$

2.19 Dado el campo de fuerzas en el espacio F (x, y, z) = (yz, xz, x (y + 1)), calcular el trabajo que realiza F al mover una partícula a lo largo de la frontera del triángulo de vértices (0,0,0), (1,1,1) y (-1,1,-1), en este orden.



Parametrización de C_1: $(x, y, z) = (t, t, t)$ $t \in [0, 1]$

$$W_1 = \int_{C_1} yz\,dx + xz\,dy + x\,(y + 1)\,dz = \int_0^1 (3t^2 + t)\,dt = \frac{3}{2}$$

Parametrización de C_2: $(x, y, z) = (1 - 2t, 1, 1 - 2t)$ $t \in [0, 1]$

$$W_2 = \int_{C_2} yz\,dx + xz\,dy + x\,(y + 1)\,dz = \int_0^1 -6\,(1 - 2t)\,dt = 0$$

Parametrización de C_3: $(x, y, z) = (-1 + t, 1 - t, -1 + t)$ $t \in [0, 1]$

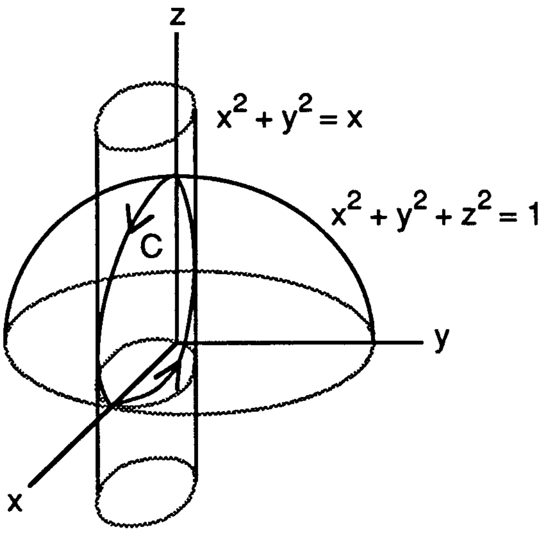
$$W_3 = \int_{C_3} yz\,dx + xz\,dy + x\,(y+1)\,dz = \int_0^1 (-4 + 7t - 3t^2)\,dt = \frac{-3}{2}$$

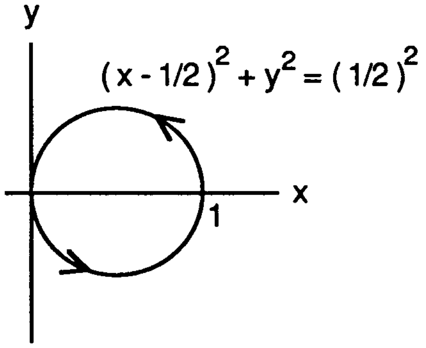
$$\text{Trabajo:} = W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{3}{2} + 0 - \frac{3}{2} = 0$$

2.20 Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$ al desplazar una partícula a lo largo de la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el cilindro $x^2 + y^2 = x$, para $z \geq 0$.

Completando cuadrados en $x^2 + y^2 = x$ queda:

$$(x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2 \qquad \text{cilindro circular recto}$$





La curva intersección C resulta ser:

$$\left.\begin{array}{l}(x-1/2)^2+y^2=(1/2)^2\\ z=+\sqrt{1-x^2-y^2}\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}x=1/2+1/2\cos t\\ y=\qquad 1/2\,\text{sen}\,t\\ z=+\sqrt{\dfrac{1-\cos t}{2}}\end{array}\right\} \quad t\in[0,2\pi]$$

entonces:

$$W=\int_C F\cdot dr=\int_0^{2\pi}\left(1/4\,\text{sen}^2 t,\ 1/2\,(1-\cos t),\ 1/4\,(1+\cos t)^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-1/2\,\text{sen}\,t,\ 1/2\cos t,\ \sqrt{2}/4\,\frac{\text{sen}\,t}{\sqrt{1-\cos t}}\right)dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)\,(-\,\text{sen}\,t)\,dt+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(\cos t-\frac{1}{2}\,(1+\cos 2t)\right)dt+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{16}\int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos t)^2}{\sqrt{1-\cos t}}\,\text{sen}\,t\,dt=$$

$$=0+\frac{1}{4}\,(-\pi)+0=\frac{-\pi}{4}$$

teniendo en cuenta que una primitiva para la 3ª integral es:

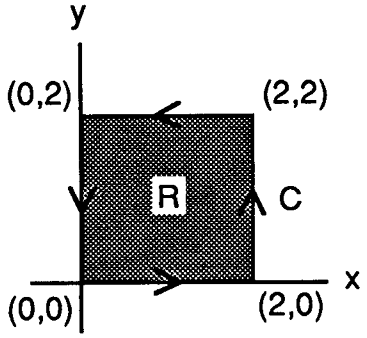
$$\int\frac{(1+\cos t)^2}{\sqrt{1-\cos t}}\,\text{sen}\,t\,dt=\left\{\begin{array}{l}1-\cos t=u\\ \text{sen}\,t\,dt=du\end{array}\right\}=\int\frac{(2-u)^2}{\sqrt{u}}\,du=$$

$$= \int (4u^{-1/2} + u^{3/2} - 4u^{1/2})\, du =$$

$$= 8\sqrt{1-\cos t} + \frac{2}{5}\sqrt{(1-\cos t)^5} - \frac{8}{3}\sqrt{(1-\cos t)^3}$$

2.21 Calcular la integral $\int_C y^2dx + x\,dy$ siendo C cada una de las curvas

(a) cuadrado de vértices (0,0), (2,0), (2,2) y (0,2).



Recinto R con frontera C:

$0 \le x \le 2$

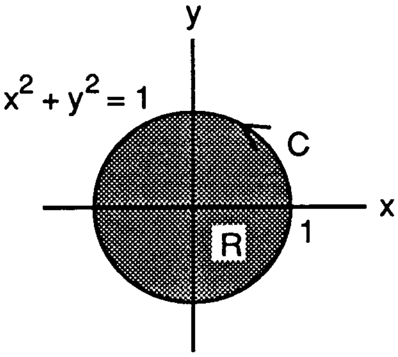
$0 \le y \le 2$

Por el teorema de Green:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad \partial R = C$$

$$\int_C y^2\,dx + x\,dy = \iint_R (1-2y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^2 (1-2y)\,dy\,dx = -4$$

(b) circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas.



Recinto R con frontera C:

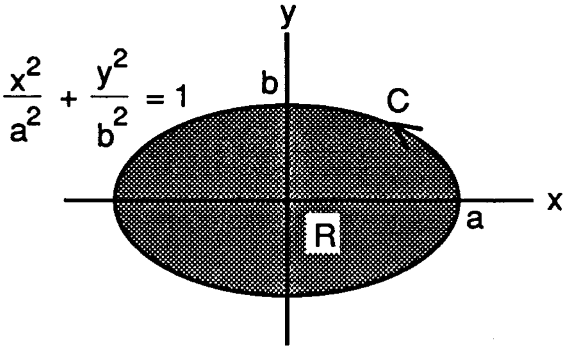
$-1 \le x \le 1$

$-\sqrt{1-x^2} \le y \le +\sqrt{1-x^2}$

$$\int_C y^2\,dx + x\,dy = \iint_R (1-2y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} (1-2y)\,dy\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 \left[y - y^2 \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \pi$$

(c) elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Recinto R con frontera C:

$$-b \le y \le b$$

$$\frac{-a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \le x \le \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

En coordenadas elípticas: $\left.\begin{array}{l} x = a\, r \cos\theta \\ y = b\, r \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{array}$

$$J(r,\theta) = a\, b\, r$$

$$\int_C y^2 dx + x\, dy = \iint_R (1 - 2y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - 2\, b\, r \operatorname{sen}\theta)\; a\, b\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= a\, b \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{2}{3}\, b\, r^3 \operatorname{sen}\theta \right]_0^1 d\theta = a\, b\, \pi$$

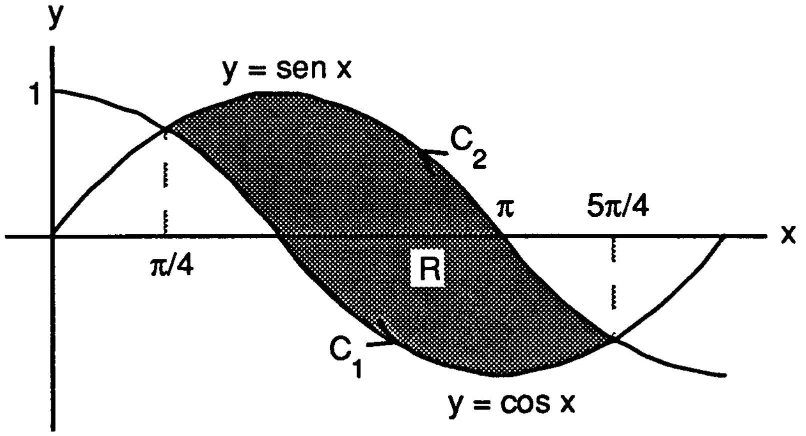
2.22 Comprobar el teorema de Green calculando la integral:

$$\int_C y \operatorname{sen} x\, dx + (x + y - 1)\, dy$$

siendo C la curva formada por las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ entre los dos primeros puntos de corte positivos.

Los dos primeros puntos de corte se calculan en: $\operatorname{sen} x = \cos x$

$$\operatorname{tg} x = 1;\quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.\quad \text{Si } k = 0,\ x = \frac{\pi}{4};\quad \text{si } k = 1,\ x = \frac{5\pi}{4}$$



Recinto R con frontera C: $\begin{array}{c} \pi/4 \leq x \leq 5\pi/4 \\ \cos x \leq y \leq \operatorname{sen} x \end{array}$

Para comprobar la formula de Green

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad \partial R = C$$

calcularemos en primer lugar la integral doble:

$$\iint_R (1 - \operatorname{sen} x)\,dx\,dy = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} (1 - \operatorname{sen} x)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (1 - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx =$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(\operatorname{sen} x - \cos x - \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \operatorname{sen} x \cos x \right) dx = 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$$

Hacemos ahora el cálculo directo de la integral de línea:

Parametrización de C_1: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = \cos t \end{array}\right\}$ $t \in [\pi/4, 5\pi/4]$ $\left.\begin{array}{l} x' = 1 \\ y' = -\operatorname{sen} t \end{array}\right\}$

$$\int_{C_1} y \operatorname{sen} x\,dx + (x + y - 1)\,dy = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\cos t \operatorname{sen} t + (t + \cos t - 1)(-\operatorname{sen} t)]\,dt =$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (-t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t)\,dt = [t \cos t - \operatorname{sen} t - \cos t]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$

Parametrización de C_2: $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = \operatorname{sen} t \end{array}\right\}$ $t \in [\pi/4, 5\pi/4]$ $\left.\begin{array}{l} x' = 1 \\ y' = \cos t \end{array}\right\}$

Tomamos sentido contrario; entonces:

$$\int_{C_2} y\,\text{sen}\,x\,dx + (x+y-1)\,dy = -\int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\,\text{sen}\,t\ \ \text{sen}\,t + (\,t + \text{sen}\,t\ -1)\cos t\,]\,dt =$$

$$= \int_{5\pi/4}^{\pi/4} (\,\text{sen}^2 t + t\cos t + \text{sen}\,t\cos t - \cos t\,)\,dt =$$

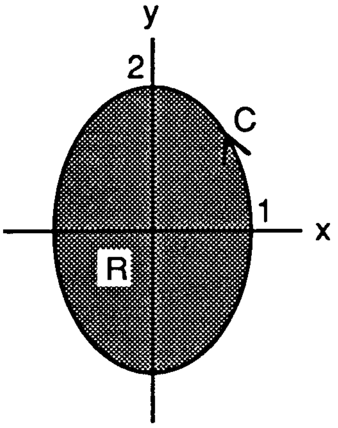
$$= \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\text{sen}\,2t + t\,\text{sen}\,t + \cos t + \frac{1}{2}\text{sen}^2 t - \text{sen}\,t\right]_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-\pi}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$$

sumando ambas integrales de línea obtenemos:

$$\int_C y\,\text{sen}\,x\,dx + (x+y-1)\,dy = 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}$$

2.23 Empleando el teorema de Green, calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas F (x, y) = (y + 3x , 2y - x) al mover una partícula a lo largo de la frontera de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$.

Elipse $\quad 4x^2 + y^2 = 4 \qquad x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$



Coordenadas elípticas:

$$\left.\begin{array}{l} x = \ \ r\cos\theta \\ y = 2\,r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$$

$$J\,(r,\theta) = 2\,r$$

Recinto R con frontera C:

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le r \le 1$$

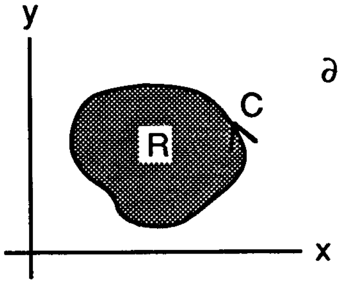
$$\text{Trabajo} = W = \int_C F\cdot dr = \int_C (\,y + 3x\,)\,dx + (\,2y - x\,)\,dy$$

por el teorema de Green:

$$W = \iint_R -2\,dx\,dy = -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 2\,r\,dr\,d\theta = -4\pi$$

2.24 Sea R una región conexa del plano cuya frontera es una curva C cerrada, simple y regular a trozos. Demostrar que el área de R viene dada por las siguientes expresiones:

$$\text{Area (R)} = \int_C x\,dy = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy$$



$\partial R = C$

Sabemos que $\quad \text{Area (R)} = \iint_R 1\ dx\,dy$

El teorema de Green afirma que:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \qquad \partial R = C$$

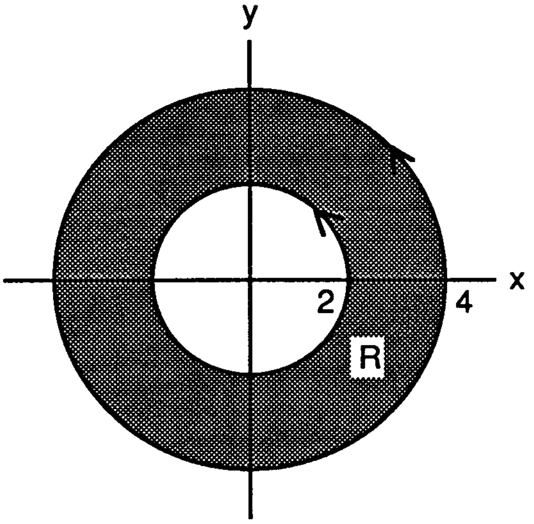
así pues:

$$\int_C x\,dy = \iint_R (1 - 0)\,dx\,dy = \iint_R 1\,dx\,dy = \text{Area (R)}$$

$$\frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\iint_R (1 - (-1))\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_R 2\,dx\,dy = \text{Area (R)}$$

2.25 Comprobar el teorema de Green en el cálculo de la integral de línea a lo largo de la trayectoria C del campo F (x, y) = ($x^3 - x^2y$, xy^2), siendo C el contorno de la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y exterior a $x^2 + y^2 = 4$.

Se trata de comprobar la expresión del teorema de Green generalizado, para el siguiente recinto:



Fronteras:

C_1: $x^2+y^2=4^2$

C_2: $x^2+y^2=2^2$

La curva C_2 es interior a la curva C_1. En este caso:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{C_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

Calculamos, en primer lugar, la integral doble sobre R:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R (y^2+x^2)\, dx\, dy = (^*)$$

ya que $P = x^3 - x^2y$ y $Q = x\,y^2$

En polares $\left.\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{matrix}\right\}$ $J(r,\theta) = r$, el recinto R viene dado por: $\begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 2 \le r \le 4 \end{matrix}$

entonces:

$$(^*) = \int_0^{2\pi}\int_2^4 r^2\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_2^4 = 120\,\pi$$

Para efectuar la comprobación calculamos ahora las integrales de línea.

Parametrización de C_1: $\left.\begin{matrix} x = 4\cos t \\ y = 4\,\mathrm{sen}\,t \end{matrix}\right\}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\left.\begin{matrix} x' = -4\,\mathrm{sen}\,t \\ y' = \ \ 4\cos t \end{matrix}\right\}$

Parametrización de C_2: $\left.\begin{matrix} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,t \end{matrix}\right\}$ $t \in [0, 2\pi]$ $\left.\begin{matrix} x' = -2\,\mathrm{sen}\,t \\ y' = \ \ 2\cos t \end{matrix}\right\}$

$$\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [(64 \cos^3 t - 64 \cos^2 t \operatorname{sen} t) (-4 \operatorname{sen} t) + 64 \cos t \operatorname{sen}^2 t \;\; 4 \cos t] \, dt \; -$$

$$- \int_0^{2\pi} [(8 \cos^3 t - 8 \cos^2 t \operatorname{sen} t) (-2 \operatorname{sen} t) + 8 \cos t \operatorname{sen}^2 t \;\; 2 \cos t] \, dt =$$

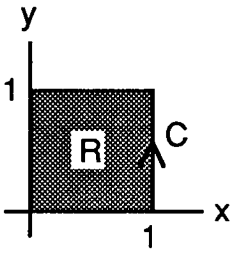
$$= \int_0^{2\pi} (- 240 \cos^3 t \operatorname{sen} t + 480 \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t) \, dt =$$

$$= 240 \left[\frac{\cos^4 t}{4} \right]_0^{2\pi} + 480 \int_0^{2\pi} [\frac{1 + \cos 2t}{2} - (\frac{1 + \cos 2t}{2})^2] \, dt =$$

$$= 0 + 480 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (1 - \cos 4t) \, dt = 120 \pi$$

2.26 Calcular las siguientes integrales de línea sobre las trayectorias que se indican:

(a) $\int_C (5 - xy - y^2) \, dx + (x^2 - 2xy) \, dy$ C frontera de $[0,1] \times [0,1]$



Recinto R con frontera C:

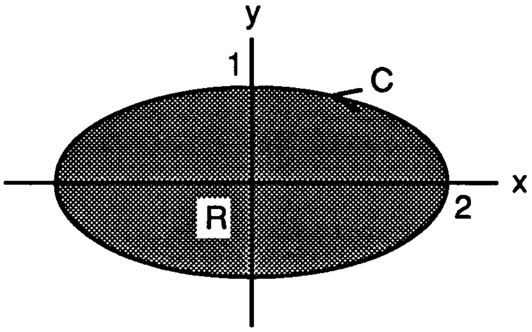
$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq y \leq 1$

$$\int_C (5 - xy - y^2) \, dx + (x^2 - 2xy) \, dy = \iint_R [2x - 2y - (- x - 2y)] \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 3x \, dy \, dx = \frac{3}{2}$$

(b) $\int_C (2x - y) \, dx + (x + 3y) \, dy$ C elipse $x^2 + 4y^2 = 4$



Elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

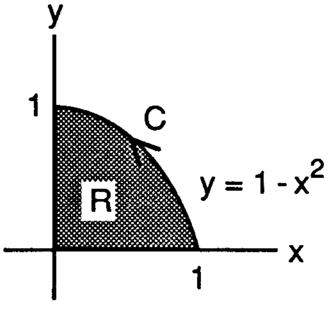
$$\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$$

En coordenadas elípticas $\left.\begin{array}{l} x = 2\,r\cos\theta \\ y = \;\;\, r \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\}$ $J(r, \theta) = 2\,r$

el recinto R con frontera C se describe como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{array}$

$$\int_C (2x - y)\,dx + (x + 3y)\,dy = \iint_R 2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 4\,r\,dr\,d\theta = 4\pi$$

(c) $\int_C - xy^2 dx + x^2 y\,dy$ C frontera de la región del primer cuadrante limitada por $y = 1 - x^2$



Recinto R con frontera C:

$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le 1 - x^2$

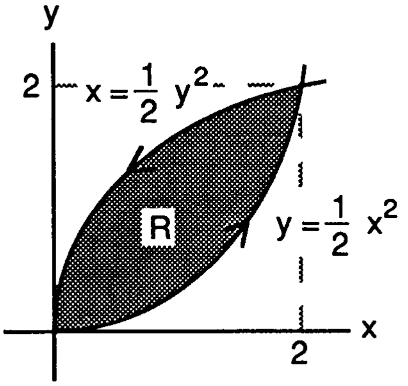
$$\int_C - xy^2\,dx + x^2 y\,dy = \iint_R 4\,xy\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x^2} 4\,xy\,dy\,dx = \frac{1}{3}$$

(d) $\int_C x^2y^2 dx + (x^2 + \operatorname{sen} y)\,dy$ C frontera de la región limitada por las gráficas de $y = \frac{1}{2}x^2$ y $x = \frac{1}{2}y^2$

Puntos de intersección de las curvas:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}\, x^2 \\ x = \frac{1}{2}\, y^2 \end{array}\right\} \quad y = \frac{1}{8}\, y^4 \;; \quad y^4 - 8y = 0 \;; \quad y\,(y^3 - 8) = 0 \;; \quad y = 0\,,\; y = 2$$

Puntos: (0, 0), (2, 2)



Recinto R con frontera C:

$$0 \le x \le 2$$

$$\frac{1}{2}\, x^2 \le y \le \sqrt{2x}$$

$$\int_C x^2y^2\, dx + (x^2 + \text{sen } y)\, dy \;=\; \int_0^2 \int_{1/2\,x^2}^{\sqrt{2x}} (2x - 2x^2y)\, dy\, dx \;=$$

$$= \int_0^2 (\,2\sqrt{2}\; x^{3/2} - 3x^3 + \frac{1}{4}\, x^6)\, dx \;=\; \frac{-36}{35}$$

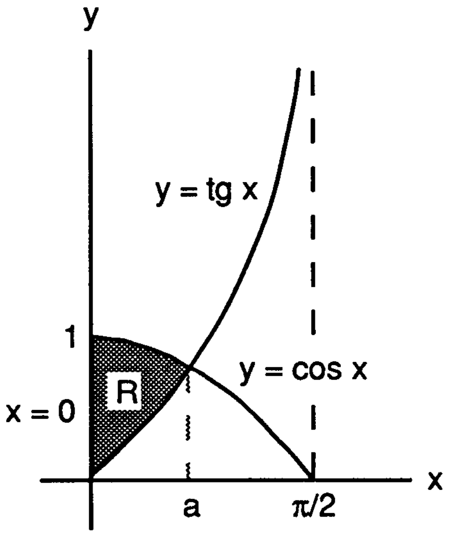
2.27 Calcular la integral de línea del campo vectorial F (x, y) = (y cos x, 2x - 1) sobre la curva del plano determinada por $x = 0$, $0 \le y \le 1$ y las gráficas de las curvas $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$ entre $x = 0$ y el primer punto de corte positivo.

Primer punto de corte positivo entre $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$:

$$\cos x = \text{tg}\, x \;; \quad \cos^2 x = \text{sen}\, x \;; \quad \text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 1 = 0$$

$$\text{sen}\, x \;=\; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\;,\; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

Tomamos $\text{sen}\, x \;=\; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ y llamamos $a = \text{arcsen}\; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$



Recinto R con frontera C:

$$0 \leq x \leq a$$

$$\text{tg}\, x \leq y \leq \cos x$$

Por el teorema de Green:

$$\int_C y \cos x \, dx + (2x - 1)\, dy = \int_0^a \int_{\text{tg}\, x}^{\cos x} (2 - \cos x)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^a (2 \cos x - 2\, \text{tg}\, x - \cos^2 x + \text{sen}\, x)\, dx =$$

$$= \left[2\, \text{sen}\, x + 2 \ln |\cos x| - \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \text{sen}\, 2x - \cos x \right]_0^a =$$

$$= 2 \frac{\sqrt{5} - 1}{2} + 2 \ln \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2} - \frac{1}{2} \text{arcsen} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2} - \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2} + 1 =$$

$$= \sqrt{5} + \ln \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{1}{2} \text{arcsen} \frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{\sqrt{5} + 3}{8} \sqrt{2\sqrt{5} - 2}$$

ya que si $a = \text{arcsen} \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ entonces $\text{sen}\, a = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $\cos a = \dfrac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2}$

2.28 Comprobar si las siguientes formas diferenciales son exactas y, en caso afirmativo, calcular una función potencial del campo vectorial correspondiente.

(a) $2xy\, dx + (x^2 + 3y^2)\, dy$

$P(x, y) = 2xy, \quad Q(x, y) = x^2 + 3y^2 \qquad \partial P/\partial y = 2x = \partial Q/\partial x$

es una diferencial exacta. Buscamos una función potencial $\phi(x, y)$ tal que: $\partial\phi/\partial x = 2xy, \quad \partial\phi/\partial y = x^2 + 3y^2$

$$\phi(x, y) = \int 2xy\,dx + C(y) = x^2y + C(y)$$

$$\partial\phi/\partial y = x^2 + C'(y) = x^2 + 3y^2 \quad \rightarrow \quad C'(y) = 3y^2, \quad C(y) = y^3$$

Función potencial: $\phi(x, y) = x^2y + y^3$

(b) $3x^2\,dx + x^3y\,dy$

$$\left.\begin{array}{ll} P(x, y) = 3x^2 & \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ Q(x, y) = x^3y & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2y \end{array}\right\} \quad \text{No es una diferencial exacta}$$

(c) $\dfrac{x}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{y}{x^2+y^2}\,dy$

$$P(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad Q(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Se cumple que: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$; es una diferencial exacta.

Buscamos $\phi(x, y)$ tal que $\partial\phi/\partial x = P, \quad \partial\phi/\partial y = Q$.

$$\phi(x, y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + C(y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad C'(y) = 0\,; \quad C(y) = 0$$

Función potencial: $\phi(x, y) = 1/2 \ln(x^2 + y^2) \qquad (x, y) \neq (0, 0)$

(d) $\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \qquad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Se cumple que: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; es una diferencial exacta.

Buscamos $\phi(x,y)$ tal que $\partial\phi/\partial x = P$, $\partial\phi/\partial y = Q$.

$$\phi(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + C(y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \to \quad C'(y) = 0, \quad C(y) = 0$$

Función potencial: $\phi(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} \qquad y \neq 0$

(e) $(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1)\,dx + (x^2z - 4xy)\,dy + (x^2y + 2xz - 2)\,dz$

$F_1(x,y,z) = 2xyz + z^2 - 2y^2 + 1$

$F_2(x,y,z) = x^2z - 4xy$

$F_3(x,y,z) = x^2y + 2xz - 2$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (0,0,0) = 0$$

es una diferencial exacta.

Buscamos $\phi(x,y,z)$ tal que $\partial\phi/\partial x = F_1$, $\partial\phi/\partial y = F_2$, $\partial\phi/\partial z = F_3$.

$$\phi(x,y,z) = \int (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1)\,dx + C(y,z)$$

$$\phi = x^2yz + z^2x - 2y^2x + x + C(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2z - 4yx + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = F_2 = x^2z - 4yx$$

$$\frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 0 \quad \text{entonces} \quad C(y,z) = C(z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = x^2y + 2zx + C'(z) = F_3 = x^2y + 2xz - 2$$

$$C'(z) = -2 \qquad \text{tomamos} \qquad C(z) = -2z$$

Función potencial: $\phi(x, y, z) = x^2yz + z^2x - 2y^2x + x - 2z$

(f) $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

$$F_1(x, y, z) = yz, \quad F_2(x, y, z) = xz, \quad F_3(x, y, z) = xy$$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (0, 0, 0) = 0$$

es una diferencial exacta.

Buscamos $\phi(x, y, z)$ tal que $\partial\phi/\partial x = F_1$, $\partial\phi/\partial y = F_2$, $\partial\phi/\partial z = F_3$.

$$\phi(x, y, z) = \int yz\,dx + C(y, z) = xyz + C(y, z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = xz + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = xz \rightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 0\,; \quad C(y, z) = C(z)$$

$$\text{luego} \qquad \phi = xyz + C(z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = xy + C'(y) = xy \rightarrow C'(y) = 0\,; \quad C(y) = 0$$

Función potencial: $\phi(x, y, z) = xyz$

(g) $(y\,dx + x\,dy)\cos xy + dz$

$$(y\,dx + x\,dy)\cos xy + dz = y\cos(xy)\,dx + x\cos(xy)\,dy + dz$$

$$F_1(x, y, z) = y\cos(xy), \quad F_2(x, y, z) = x\cos(xy), \quad F_3(x, y, z) = 1.$$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (0, 0, 0) = 0$$

es una diferencial exacta.

Buscamos $\phi(x, y, z)$ tal que $\partial\phi/\partial x = F_1$, $\partial\phi/\partial y = F_2$, $\partial\phi/\partial z = F_3$.

$$\phi(x, y, z) = \int y\cos(xy)\,dx + C(y, z) = \text{sen}(xy) + C(y, z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x\cos(xy) + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = x\cos(xy) \rightarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 0\,;\quad C(y,z) = C(z)$$

$$\text{luego} \qquad \phi = \operatorname{sen}(xy) + C(z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = C'(z) = 1 \quad \rightarrow \quad C'(z) = 1;\quad C(z) = z$$

Función potencial: $\phi(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy) + z$

2.29 Calcular las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C x\,dy + y\,dx$ C frontera de $[0, 1] \times [0, 1]$

$x\,dy + y\,dx$ es una diferencial exacta.

$P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x$; $\partial Q/\partial x = 1 = \partial P/\partial y$

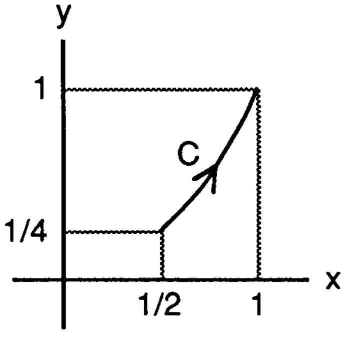
Así pues, la integral

$$\int_C x\,dy + y\,dx$$

es independiente de la trayectoria y al tratarse de una curva cerrada contenida en el dominio del campo (P, Q) , que es IR^2, su valor será 0.

(b) $\int_C \frac{dx + dy}{x + y}$

C porción de parábola $y = x^2$ entre (1/2, 1/4) y (1,1)



C: $y = x^2$

$$\frac{1}{x+y}\,dx + \frac{1}{x+y}\,dy \quad \text{es una diferencial exacta, } x + y \neq 0.$$

$$P(x, y) = \frac{1}{x+y}\,,\quad Q(x, y) = \frac{1}{x+y}\,;\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Función potencial:

$$\phi(x, y) = \int \frac{1}{x+y}\,dx + C(y) = \ln|x+y| + C(y)$$

$$\partial\phi/\partial y = \frac{1}{x+y} + C'(y) \quad \rightarrow \quad C'(y) = 0\,; \quad C(y) = 0$$

$$\phi(x, y) = \ln|x+y|$$

entonces:

$$\int_C \frac{1}{x+y}\,dx + \frac{1}{x+y}\,dy = \left[\ln|x+y|\right]_{(1/2,1/4)}^{(1,1)} = \ln 2 - \ln\frac{3}{4} = \ln\frac{8}{3}$$

(c) $\displaystyle\int_C \frac{yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{xyz}$

C camino del primer octante desde (1,1,1) hasta (2, 2, 1/4)

El campo a integrar es:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{yz}{xyz}, \frac{zx}{xyz}, \frac{xy}{xyz}\right) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \qquad x, y, z \neq 0$$

cumpliendo rot F = 0 en el primer octante de $\mathbb{R}^3$.

Buscamos una función potencial $\phi(x, y, z)$ / $\nabla\phi = F$:

$$\phi(x, y, z) = \int \frac{1}{x}\,dx + C(y, z) = \ln|x| + C(y, z)$$

$$\partial\phi/\partial y = \frac{\partial C(y, z)}{\partial y} = \frac{1}{y} \quad \rightarrow \quad C(y, z) = \int \frac{1}{y}\,dy + C(z) = \ln|y| + C(z)$$

$$\phi(x, y, z) = \ln|x| + \ln|y| + C(z)\,; \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = C'(z) = \frac{1}{z}; \quad C(z) = \ln|z|$$

por lo tanto: $\phi(x, y, z) = \ln|x| + \ln|y| + \ln|z| = \ln|xyz|$.

Entonces:

$$\int_C \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{z}\,dz = \left[\ln|xyz|\right]_{(1,1,1)}^{(2,2,1/4)} = \ln 1 - \ln 1 = 0$$

(d) $\displaystyle\int_{(2,0,0)}^{(1,2,3)} x\,dx + y\,dy + z\,dz$

El campo a integrar es: $F(x, y, z) = (x, y, z)$

cumpliendo rot $F = 0$ en IR^3.

$x\,dx + y\,dy + z\,dz$ es una diferencial exacta y una función potencial es:

$$\phi(x, y, z) = 1/2\ (x^2 + y^2 + z^2)$$

entonces:

$$\int_{(2,0,0)}^{(1,2,3)} x\,dx + y\,dy + z\,dz = \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right]_{(2,0,0)}^{(1,2,3)} = \frac{1}{2}(14 - 4) = 5$$

(e) $\displaystyle\int_{(0,1,\pi/2)}^{(\pi,0,\pi/2)} \cos x\,dx + \text{sen}\, z\,dz$

El campo a integrar es: $F(x, y, z) = (\cos x, 0, \text{sen}\, z)$

cumpliendo rot $F = 0$ en IR^3.

Función potencial: $\phi(x, y, z) = \text{sen}\, x - \cos z$

entonces:

$$\int_{(0,1,\pi/2)}^{(\pi,0,\pi/2)} \cos x\,dx + \text{sen}\, z\,dz = [\,\text{sen}\, x - \cos z\,]_{(0,1,\pi/2)}^{(\pi,0,\pi/2)} = 0$$

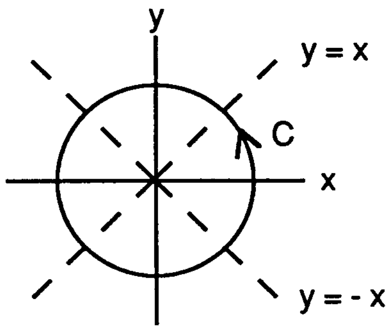
2.30 Calcular $\displaystyle\int_C \frac{2x}{x^2 - y^2}\,dx + \frac{-2y}{x^2 - y^2}\,dy$

para cada una de las siguientes trayectorias C:

(a) $x^2 + y^2 = 1$

El campo a integrar $\displaystyle (P, Q) = \left(\frac{2x}{x^2 - y^2}, \frac{2y}{-x^2 + y^2}\right)$

está definido en todo $(x, y) \in IR^2$, excepto las rectas $y = x$, $y = -x$.



C: $x^2 + y^2 = 1$

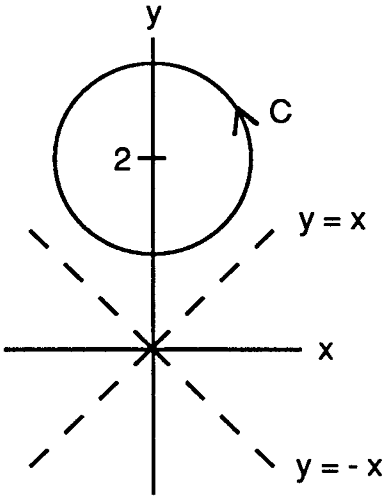
Parametrizando C por $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{array}\right\}$ $t \in [0, 2\pi]$ se tiene:

$$\int_C \frac{2x}{x^2 - y^2}\, dx + \frac{2y}{-x^2 + y^2}\, dy = \int_0^{2\pi} \frac{-4 \operatorname{sen} t \cos t}{\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{-2 \operatorname{sen} 2t}{\cos 2t}\, dt = -2 \int_0^{2\pi} \operatorname{tg} 2t\, dt$$

tg 2t no acotada en [0, 2π] ; se trata de una integral divergente.

(b) $x^2 + (y - 2)^2 = 1$



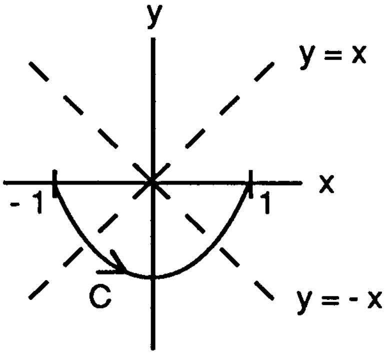
C: $x^2 + (y - 2)^2 = 1$

C esta contenida en una de las cuatro regiones simplemente conexas que forman el dominio del campo a integrar; además:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Al ser C una curva cerrada y la integral independiente de la trayectoria, su valor es cero.

(c) $y = x^2 - 1$ desde (-1,0) hasta (1,0)



C: $y = x^2 - 1$

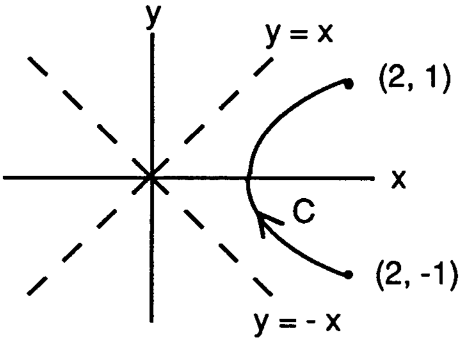
Parametrización:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{array}\right\} \quad t \in [-1, 1]$$

$$\int_C \frac{2x}{x^2 - y^2}\,dx + \frac{2y}{-x^2 + y^2}\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{6t - 4t^2}{3t^2 - t^4 - 1}\,dt$$

El denominador se anula para $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, es decir, el integrando no está acotado en [-1, 1]; la integral diverge.

(d) $x = y^2 + 1$ desde (2,-1) hasta (2,1)



C: $x = y^2 + 1$

desde (2, -1) hasta (2, 1)

La trayectoria C está contenida en una región simplemente conexa en la que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. La integral es independiente de la trayectoria.

Buscamos una función potencial ϕ:

$$\phi(x, y) = \int \frac{2x}{x^2 - y^2}\,dx + C(y) = \ln|x^2 - y^2| + C(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2 - y^2} + C'(y) = \frac{2y}{-x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad C'(y) = 0 \;; \quad C(y) = 0$$

$$\phi(x, y) = \ln | x^2 - y^2 |$$

Entonces:

$$\int_C \frac{2x}{x^2 - y^2}\, dx + \frac{2y}{-x^2 + y^2}\, dy = \Big[\ln | x^2 - y^2 | \Big]_{(2,-1)}^{(2,1)} = \ln 3 - \ln 3 = 0$$

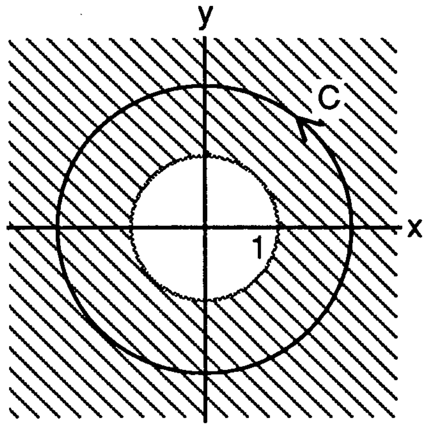
2.31 Calcular $\int_C x\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dx + y\sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dy$
para cada una de las siguientes trayectorias C:

(a) $x^2 + y^2 = 4$

El campo $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (x\sqrt{x^2 + y^2 - 1},\ y\sqrt{x^2 + y^2 - 1})$

está definido para $x^2 + y^2 \geq 1$ y cumple:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{para } x^2 + y^2 > 1$$



Trayectoria C: $x^2 + y^2 = 4$

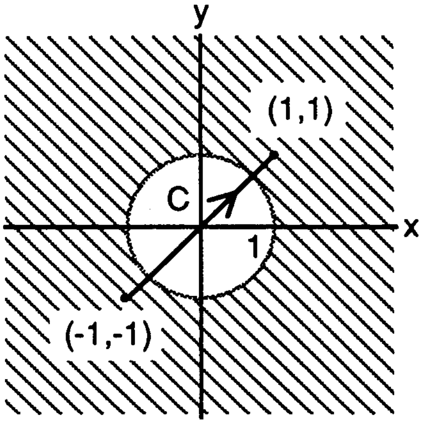
$$\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t \\ y &= 2\,\text{sen}\, t \end{aligned}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$$

El dominio no es simplemente conexo; no podemos concluir directamente que la integral sobre una trayectoria cerrada sea nula. Realizamos el cálculo efectivo:

$$\int_C x\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\, dx + y\sqrt{x^2 + y^2 - 1}\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} [\,2\cos t\, \sqrt{3}\, (-2\,\text{sen}\, t) + 2\,\text{sen}\, t\, \sqrt{3}\, 2\cos t\,]\, dt = 0$$

(b) $y = x$ desde $(-1,-1)$ hasta $(1,1)$



Trayectoria C: y = x

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\} \quad t \in [-1, 1]$$

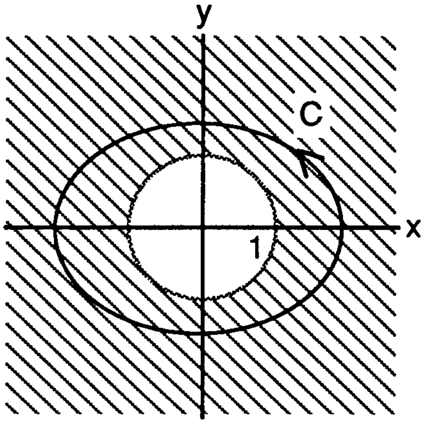
La trayectoria C no está incluida en el dominio del campo.

$$\int_C x\sqrt{x^2+y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2+y^2-1}\,dy = \int_{-1}^{1} 2t\sqrt{2t^2-1}\,dt$$

$$2t^2 - 1 \geq 0 \quad \text{en} \quad (-\infty, -\sqrt{2}/2] \cup [+\sqrt{2}/2, +\infty).$$

La integral no está definida en todo el intervalo de integración [-1, 1].

(c) $2x^2 + y^2 = 4$



Trayectoria C: $2x^2 + y^2 = 4$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$$

elipse de semiejes $\sqrt{2}$ y 2

$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_C x\sqrt{x^2+y^2-1}\,dx + y\sqrt{x^2+y^2-1}\,dy =$$

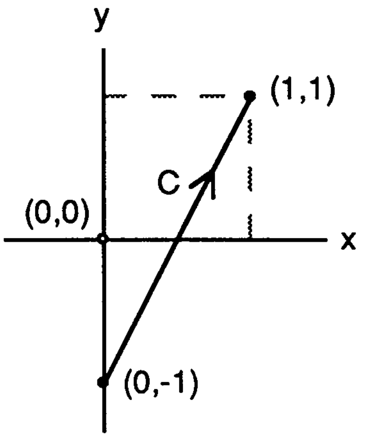
$$= \int_0^{2\pi} 2\,\text{sen}\,t\cos t\,\sqrt{2\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t - 1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\left[\,(2\cos^2 t + 4\,\text{sen}^2 t - 1)^{3/2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

2.32 Calcular $\int_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$

para cada una de las siguientes trayectorias C:

(a) $y = 2x - 1$ desde (0,-1) hasta (1,1)



Trayectoria C: $y = 2x - 1$

desde (0,-1) hasta (1,1)

$\frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$ es una diferencial exacta.

Función potencial: $\phi(x, y) = \frac{1}{2}\ln|x^2+y^2|$

La integral será independiente de la trayectoria en toda región simplemente conexa que no contenga al (0,0). En particular:

$$\int_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]_{(0,-1)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}\ln 2$$

(b) $x^2 + y^2 = 1$

La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ rodea al punto (0,0) que no pertenece al dominio del campo; esta trayectoria no está en una región simplemente conexa del dominio, por lo que debemos efectuar el cálculo directo.

Parametrización de C: $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{array}\right\}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0$$

2.33 Dado el campo vectorial de IR^2, $F(x, y) = \left(\frac{ax}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{y-a}{x^2 + (y-1)^2} \right)$ para $(x, y) \neq (0,1)$

(a) Calcular el valor del parámetro $a \in IR$ para que F sea conservativo.

Las componentes del campo son:

$$P(x, y) = \frac{ax}{x^2 + (y-1)^2} \qquad Q(x, y) = \frac{y-a}{x^2 + (y-1)^2} \qquad (x, y) \neq (0,1)$$

Basta imponer que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{-(y-a)\,2x}{[x^2 + (y-1)^2]^2} = \frac{-ax\,2(y-1)}{[x^2 + (y-1)^2]^2} \ ; \quad 2ax - 2xy = 2ax - 2axy \ ; \quad a = 1$$

(b) Para ese valor del parámetro buscar una función potencial del campo F.

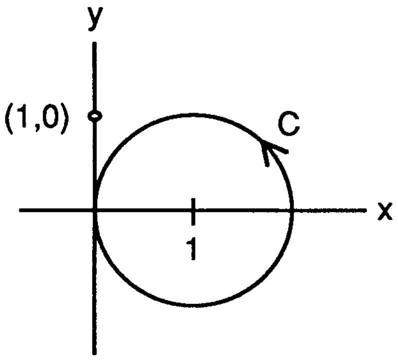
Buscamos una función $\phi(x, y)$ tal que: $\partial\phi/\partial x = P(x, y)$, $\partial\phi/\partial y = Q(x, y)$

$$\phi(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + (y-1)^2}\, dx + C(y) = \frac{1}{2} \ln |x^2 + (y-1)^2| + C(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} + C'(y) = \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} \quad \rightarrow \quad C'(y) = 0 \ ; \quad C(y) = 0$$

Función potencial: $\phi(x, y) = \frac{1}{2} \ln |x^2 + (y-1)^2|$

(c) Calcular $\int_C F \cdot dr$ si C es la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$



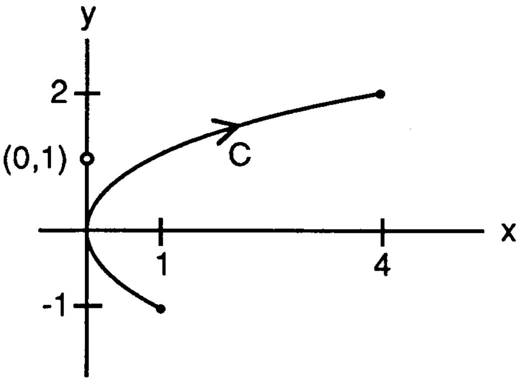
Trayectoria C:

$(x-1)^2 + y^2 = 1$

C es una trayectoria cerrada contenida en una región simplemente conexa del dominio de F, donde rot F = 0, entonces:

$$\int_C F \cdot dr = 0$$

(d) Calcular $\int_C F \cdot dr$ si C es la porción de parábola $x = y^2$ desde (1,-1) hasta (4,2).



Trayectoria C: $x = y^2$

desde (1,-1) hasta (4,2)

C es ahora una trayectoria abierta, entonces:

$$\int_C F \cdot dr = \left[\frac{1}{2} \ln | x^2 + (y-1)^2 | \right]_{(1,-1)}^{(4,2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{17}{5}$$

2.34 Dado el campo $F: IR^2 \to IR^2$ definido en la forma $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$

(a) Calcular dos funciones potenciales de F con diferente dominio.

El campo $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \quad (x, y) \neq (0, 0)$

verifica que: $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (x, y) \neq (0, 0)$

Buscamos una función $\phi(x, y)$ tal que: $\partial\phi/\partial x = P(x, y)$, $\partial\phi/\partial y = Q(x, y)$

$$\phi(x, y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + C(y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C(y)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad C'(y) = 0\,; \quad C(y) = 0$$

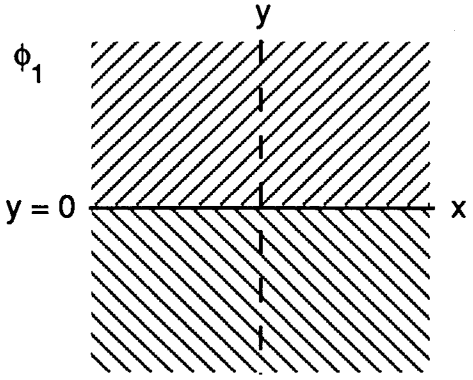
$$\phi_1(x, y) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} \qquad \text{para } \; y \neq 0$$

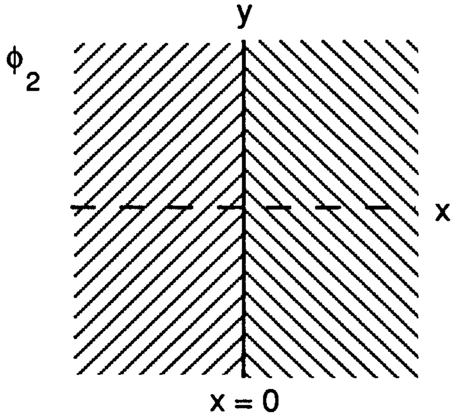
Buscamos ahora otra $\phi(x, y)$ variando el orden de integración.

$$\phi(x, y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\, dy + C(x) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C(x)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} + C'(x) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad C'(x) = 0\,; \quad C(x) = 0$$

$$\phi_2(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \qquad \text{para } \; x \neq 0$$

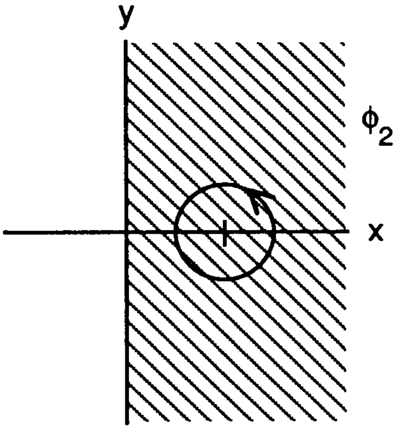




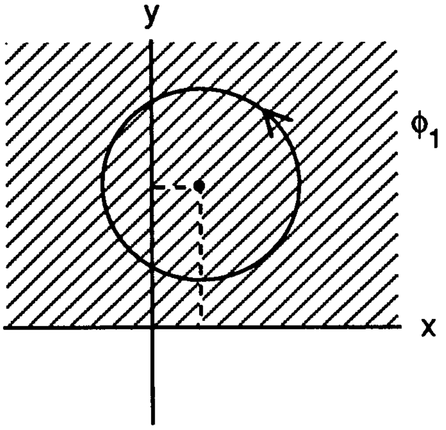
ϕ_1 y ϕ_2 están definidas respectivamente en cada uno de los semiplanos que muestran las figuras.

(b) Calcular $\int_C F \cdot dr$ para las trayectorias C siguientes:

$$(x-2)^2 + y^2 = 1, \qquad (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$



C_1: $(x-2)^2 + y^2 = 1$

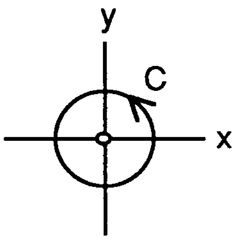


C_2: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

C_1 está contenida en uno de los semiplanos (simplemente conexo) en los que está definida ϕ_2 y análogamente ocurre con C_2 en uno de los semiplanos de ϕ_1. Al tratarse de curvas cerradas podemos concluir que en ambos casos

$$\int_C F \cdot dr = 0$$

(c) Calcular $\int_C F \cdot dr$ siendo C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$



Trayectoria C: $x^2 + y^2 = 1$

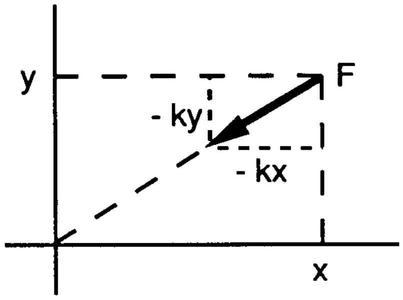
La trayectoria C no puede reducirse continuamente a un punto sin salirse del dominio del campo; debemos calcular la integral directamente:

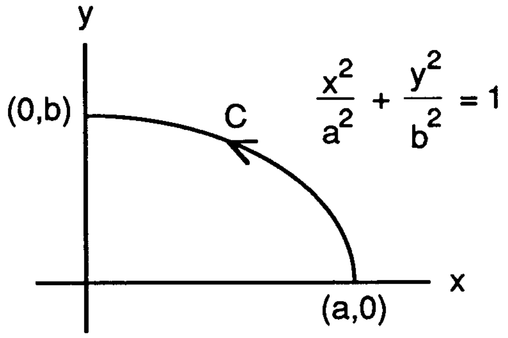
Parametrización de C: $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{array}\right\}$ $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_C F \cdot dr = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} (\,\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t\,)\,dt = 2\pi$$

2.35 De un campo de fuerzas en el plano se sabe que en cada punto la fuerza está dirigida hacia el origen de coordenadas y su magnitud es proporcional a la distancia al origen.

(a) Calcular el trabajo que realiza el campo al desplazar una partícula sobre la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y en sentido antihorario.





La fuerza en cada punto (x, y) será:

$$F\,(x, y) = (\,-kx, -ky\,)\,,\ k > 0\,; \qquad \|\,F\,(x, y)\,\| = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

Parametrización de la porción de elipse:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\,\mathrm{sen}\,t \end{array}\right\} \quad t \in [0, \pi/2] \qquad \left.\begin{array}{l} x' = -a\,\mathrm{sen}\,t \\ y' = \ \ b\cos t \end{array}\right\}$$

Trabajo realizado:

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_0^{\pi/2} (\,-k\,a\cos t\,, -k\,b\,\mathrm{sen}\,t\,) \cdot (\,-a\,\mathrm{sent}\,, b\cos t\,)\,dt =$$

$$= k\,(\,a^2 - b^2\,)\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,t\cos t\,dt = k\,(\,a^2 - b^2\,)\left[\frac{\mathrm{sen}^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{k}{2}\,(\,a^2 - b^2\,)$$

(b) ¿ Es conservativo ese campo de fuerzas ? En caso afirmativo, calcular su energía potencial.

Para saber si el campo de fuerzas F es conservativo

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = (-kx, -ky)$$

basta comprobar que $\partial P/\partial y = 0 = \partial Q/\partial x$, siendo F continuo con derivadas parciales continuas en el simplemente conexo IR^2.

Función potencial $\phi(x, y)$ tal que: $\partial\phi/\partial x = P$, $\partial\phi/\partial y = Q$

$$\phi(x, y) = \int -kx\,dx + C(y) = -\frac{k}{2}x^2 + C(y)$$

$$\partial\phi/\partial y = C'(y) = -ky \;; \quad C(y) = \frac{-k}{2}y^2 \quad \text{luego:} \quad \phi(x, y) = \frac{-k}{2}(x^2 + y^2)$$

y podíamos haber calculado:

$$W = \int_C F \cdot dr = \left[\phi(x,y)\right]_{(a,0)}^{(0,b)} = \left[\frac{-k}{2}(x^2 + y^2)\right]_{(a,0)}^{(0,b)} = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$$

Por último, la energía potencial es $-\phi$ y por lo tanto será:

$$\frac{k}{2}(x^2 + y^2)$$