Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Práctica N° 9: ISOMORFISMOS

1) Determinar cuáles de las siguientes transformaciones lineales es un isomorfismo, justificando en cada caso la respuesta:

a) $T : R^2 \to R^3 \,/\, T(x, y) = (x + y, y, 0)$

b) $T : R^3 \to R^2 \,/\, T(x, y, z) = (x, y)$

c) $T : R^2 \to R^2 \,/\, T(x, y) = (x - y, x + 2y)$

d) $T : R^2 \to P_2 \,/\, T(x, y) = ax^2 + (b - c)$

e) $T : R^3 \to R^3$, sabiendo que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$

f) $T : R^2 \to R^3$, sabiendo que $T(1, 0) = (1, 0, 1)$ y $T(0, 1) = (1, 1, 1)$

g) $T : R^n \to P_n \,/\, T(a_0, a_1, a_2, ..., a_n) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

2) Sea $L : M_{2x2} \to M_{2x2}$ una transformación lineal definida por $L(A) = M \cdot A$, siendo $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

a) Determinar si la transformación lineal es o no un isomorfismo. Justificar.

b) Demostrar que para toda M invertible, L es un isomorfismo.

3) Considerar la aplicación lineal $T : R^2 \to D_2$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$:

a) ¿Es T un isomorfismo?

b) ¿Son los espacios R^2 y D_2 isomorfos?

c) ¿Se contradicen las respuestas de los ítems *a*) y *b*)?

4) Sea B una base del espacio vectorial V, con $dim\, V = n$. Demostrar que la transformación de coordenadas de V en R^n tal que $T(v) = [v]_B$ es un isomorfismo.

5) Definir una transformación lineal que sea un isomorfismo entre los espacios dados. Justificar.

a) P_2 y D_2.

b) M_{2x3} y M_{3x2}.

c) P_2 y R^3.

6) Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justificar o presentar contraejemplos según corresponda.

Sea $T : V \to W$, con $dim\ V = n$ y $dim\ W = m$:

a) Si $m = n$, entonces T es un isomorfismo.

b) Si T es un isomorfismo entonces, $m = n$.

c) Si T es una transformación lineal inyectiva y $m = n$, entonces T es un isomorfismo.

d) Si toda matriz asociada a T es cuadrada, entonces T es un isomorfismo.

e) Si toda matriz asociada a T es cuadrada, entonces V y W son isomorfos.

f) Si $\rho(T) = m$ y $m = n$, entonces T es un isomorfismo.

g) Si V y W son isomorfos, entonces T puede ser una transformación lineal cuya nulidad sea mayor a 0.

7) Sea $S = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in P_3 \,/\, a_1 = a_2 = 0\}$ y $M : R_2 \to S$ dada por $M(a, b) = a + ax^3$:

a) ¿Es M un isomorfismo? Justificar la respuesta.

b) ¿Son los dos espacios vectoriales involucrados isomorfos? Justificar.

8) Sea $T : P_1 \to P_2$ con matriz asociada A_T, respecto a las bases canónicas de los espacios involucrados:

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_1 = \{x, 1\} \qquad P_2 = \{x^2, x, 1\}$$

a) Completar: $Im(T) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2 \,/\, ...\}$.

b) Determinar si los polinomios $r(x) = 3x + 3x^2$ y $m(x) = 1 + x + x^2$ pertenecen a $Im(T)$.

c) Encontrar (si existe) $p(x) \in P_1$ tal que $T[p(x)] = 2x + x^2$.

d) ¿Es T inyectiva? Justificar.

e) ¿Es T sobreyectiva? Justificar.

Ejercitación adicional para seguir practicando:

9) Sea D_3 el conjunto de matrices diagonales de $3x3$ y sea $T : D_3 \to P_2$ dada por:

$$T \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = (a + b) - (a + b)x + cx^2$$

a) Determinar el núcleo y la imagen de T.

b) Determinar la matriz asociada a T con respecto a las bases:

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad B_2 = \{x^2, 2x, 3\}$$

c) ¿Es T un isomorfismo? Justifica tu respuesta.

d) ¿Son los espacios involucrados en la transformación lineal isomorfos? Justifica tu respuesta.

10) Sea S_{2x2} el conjunto de todas las matrices simétricas de $2x2$ y D_{2x2} el conjunto de todas las matrices diagonales de $2x2$:

a) Determinar si es posible construir un isomorfismo $T : P_2 \to S_{2x2}$. Justifica tu respuesta.

b) Determinar si es posible construir un isomorfismo $T : P_2 \to S_{2x2}$ cuya imagen sea D_{2x2}. Justifica tu respuesta.

11) Sea $T : R^n \to R^m$ una transformación lineal. Indicar en cada ítem, justificando, si T *es un isomorfismo*, T *no es un isomorfismo* o si *los datos no son suficientes para determinar si* T *es un isomorfismo*:

a) La matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas de ambos espacios es $A_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $n = m = 5$.

c) $n = m = 3$ y $T(1,0,0) = (0,0,0)$.

d) $n = 2$ y $m = 3$.

e) $n = m = 4$ y $\rho(T) = 4$.

f) $Nu(T) = \{(0,0)\}$ y $n = m = 2$.