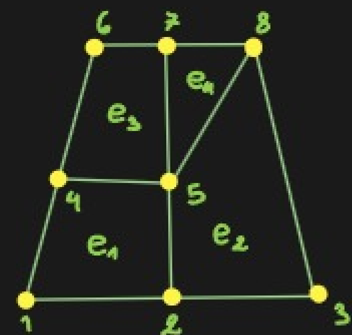
Método de Elementos Finitos

En el método de elementos finitos, se **divide** el dominio en **pequeños elementos** (triangulares o cuadrangulares) que, al unirse, conforman el dominio completo del problema, sin superposición entre ellos, es decir, la intersección entre cualquier par de elementos es cero. Dentro de cada elemento, se aproxima la solución mediante **funciones de forma**, que son funciones simples y predefinidas que facilitan el cálculo. Luego, se establece un sistema de ecuaciones al ensamblar las contribuciones de cada elemento, conectándolos en los nodos que comparten. Al resolver este sistema, se obtiene una aproximación de la solución en todo el dominio, lo cual permite aplicar el método a geometrías complejas y condiciones de borde variadas.



Ecuación diferencial a resolver:

$$A(\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - c\phi + Q(x,y) = 0$$

$$B(\phi) = \begin{cases} \phi - \hat{\phi} = 0 \rightarrow \text{Dirichlet} \\ k\frac{\partial \phi}{\partial n} + \bar{q} = 0 \rightarrow \text{Neumann} \\ k\frac{\partial \phi}{\partial n} + h(\phi - \phi_\infty) = 0 \rightarrow \text{Robin} \end{cases}$$

Estas condiciones de borde se van a aplicar únicamente a los elementos que estén en el borde y van a incluir también únicamente a los nodos correspondientes. En el elemento 4, por ejemplo, solo va a incluir a los nodos 7 y 8.

En residuos ponderados obtenemos una solución de la forma

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{m=1}^{M} a_m N_m(x)$$

Como $\psi(x)$ es una función difícil de calcular, la eliminamos. Para sumar los aportes de las condiciones de borde, sumamos una integral para el mismo.

$$\int_\Omega W R_\Omega \, d\Omega + \underbrace{\int_\Gamma \bar{W} R_\Gamma \, d\Gamma}_{\text{borde}} = 0$$

Utilizaremos funciones de peso W que sean iguales a las funciones de forma N. Recordar que $W = -\bar{W}$

Sistema a resolver:

$$\overbrace{\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\left[\int_{\Omega^e}\left(k_x \frac{\partial N_l^e}{\partial x}\frac{\partial N_m^e}{\partial x}\phi_m^e + k_y \frac{\partial N_l^e}{\partial y}\frac{\partial N_m^e}{\partial y}\phi_m^e\right) d\Omega\right]}^{D} + \dots$$

$$\dots + \sum_{m=1}^{M}\sum_{l=1}^{M}\left[\underbrace{\int_{\Omega^e} c N_l^e N_m^e \phi_m^e \, d\Omega}_{C} + \underbrace{\int_{\Gamma_h^e} h N_l^e N_m^e \phi_m^e \, d\Gamma}_{H}\right] = \dots$$

$$\dots \sum_{l=1}^{M}\left[\int_{\Omega^e} N_l^e G \, d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma_q^e} N_l^e \bar{q} \, d\Gamma}_{\text{cond. Neumann}} - \underbrace{\int_{\Gamma_h^e} N_l^e h \phi_\infty \, d\Gamma}_{\text{cond. Robin}} + \underbrace{\int_{\Gamma_\phi^e} N_l^e F_x^r \, d\Gamma + \int_{\Gamma_\phi^e} N_l^e F_y^r \, d\Gamma}_{\text{cond. Dirichlet}}\right]$$

cond. Neumann — cond. Robin — cond. Dirichlet (En realidad no las ponemos y directamente reemplazamos el valor en la solución)

Ecuaciones de forma

Como se mencionó anteriormente, los elementos pueden ser triangulares o cuadrangulares. En cada caso, las ecuaciones de forma van a ser distintas.

Elementos triangulares

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener N_2 es $[0;1;0]$ y N_3 es $[0;0;1]$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i = B_x T_e \; ; \; B_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial y} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i = B_y T_e \; ; \; B_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\underline{J}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_j - x_i) & (y_j - y_i) \\ (x_k - x_i) & (y_k - y_i) \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \end{bmatrix} = (\underline{J}^e)^{-1}\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} & \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} & \frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} & \frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^e = (\underline{J}^e)^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}} = \int_\Omega \left[B_x^T k_x B_x + B_y^T k_y B_y\right] d\Omega = \int_\Omega B_{2\times 2}^T k_{2\times 2} B_{2\times 2} \, d\Omega = B^T k B A^{\text{Área}}$$

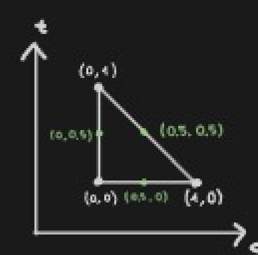
Ahora vemos la matriz C, con coordenadas normalizadas

$$\underline{\underline{C}} = \int_\Omega N^T N \, d\Omega = \int_{s,t} N^T(s,t) N(s,t) \, |J| \, ds \, dt$$

esto es det? → si

$$N = [1-s \quad s \quad t]$$

$$J = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$



$$\underline{\underline{C}} = |J| \int_0^1 \int_0^{1-s} N^T N \, ds \, dt = \sum w_i f(s,t) \, |J|$$

k es conduct. en la cond de contorno. Si no es difusividad

m → distancia metros

ESTUDIA
A

Fuerza → $[N/m]$

K es $[W/mK]$ → el valor no cambia si es $[W/m°C]$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

en el recu, el metodo implícito no tiene Δt max xq es incondicionalmente estable