Teoría de la Computación - Notas de práctica

Ejercicios resueltos del libro *Kenneth H. Rosen, Matemática Discreta y sus Aplicaciones, 5ta edición*

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas,
Universidad Nacional del Litoral.

Autores edición 2021
Gustavo A. Ríos Rodriguez
www.cimec.org.ar/tcomp

April 26, 2021

Autores edición 2020: Gustavo A. Ríos Rodriguez, Juan M. Giménez, Juan J. Gómez Barroso, Guillermo Tessi.

Contents

1 Los fundamentos: lógica y demostración, conjuntos y funciones

1.1 Lógica

- **Ejercicio 1.** Cuáles de las siguientes frases son proposiciones? Cuál es el valor de verdad de aquellas que son proposiciones?

  a) *Boston es la capital de Massachusetts*: es una proposición porque está afirmando un hecho y la respuesta tiene un único valor de verdad. Su valor de verdad es verdadero.

  b) *Buenos Aires es la capital de Argentina*: es una proposición porque está afirmando un hecho y la respuesta tiene un único valor de verdad. Su valor de verdad es verdadero.

  c) $2+3=5$: es una proposición porque está afirmando un hecho y la respuesta tiene un único valor de verdad. Su valor de verdad es verdadero.

  d) $5+7=10$: es una proposición porque está afirmando un hecho y la respuesta tiene un único valor de verdad. Su valor de verdad es falso.

  e) $x+2=11$: no es una proposición porque si bien está afirmando un hecho no tiene un único valor de verdad ya que la variable x no está definida o no tiene asignado un valor.

  f) *Responde a esta pregunta*: no es una proposición porque no está afirmando un hecho.

  g) $x+y=y+x$ para todo par de números reales x y y: es una proposición porque está afirmando un hecho y la respuesta tiene un único valor de verdad ya que tanto la variable x como la variable y están definidas por tener asignado un dominio de discurso (DD) que en este caso son los números reales. Su valor de verdad es verdadero.

- **Ejercicio 5.** Sean p y q los enunciados "Está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey" y "Se han divisado tiburones cerca de la costa", respectivamente. Expresa cada una de las siguientes fórmulas en lenguaje natural.

  a) $\neg q$: No se han divisado tiburones cerca de la costa.

  b) $p \wedge q$: Está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey y se han divisado tiburones cerca de la costa.

  c) $\neg p \vee q$: No está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey o se han divisado tiburones cerca de la costa.

d) $p \to \neg q$: Si está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey entonces no se han divisado tiburones cerca de la costa.

e) $\neg q \to p$: Si no se han divisado tiburones cerca de la costa entonces está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey.

f) $\neg p \to \neg q$: Si no está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey entonces no se han divisado tiburones cerca de la costa.

g) $p \leftrightarrow \neg q$: Está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey es condición necesaria y suficiente para que no se hayan divisado tiburones cerca de la costa.

h) $\neg p \wedge (p \vee q)$: No está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey pero está permitido nadar en la costa de Nueva Jersey o se han divisado tiburones cerca de la costa.

- **Ejercicio 7.** Sean p y q los enunciados "Estamos bajo cero" y "Nieva", respectivamente. Escribe los enunciados siguientes usando "p", "q" y conectores lógicos.

  a) Estamos bajo cero y nieva.

  b) Estamos bajo cero, pero no nieva.

  c) No estamos bajo cero y no nieva.

  d) Bien estamos bajo cero o bien nieva (o ambas cosas).

  e) Si estamos bajo cero, entonces también nieva.

  f) Estamos bajo cero o nieva, pero no nieva si estamos bajo cero.

  g) Que estemos bajo cero es necesario y suficiente para que nieve.

  Respuesta:

  a) $p \wedge q$

  b) $p \wedge \neg q$

  c) $\neg p \wedge \neg q$

  d) $p \vee q$

  e) $p \to q$

  f) $(p \vee q) \wedge (p \to \neg q)$

  g) $p \leftrightarrow q$

- **Ejercicio 12.** Determina si estas bicondicionales son verdaderas o falsas.

a) $2 + 2 = 4$ si y sólo si $1 + 1 = 2$: esta bicondicional es verdadera ya que ambas proposiciones lo son.

b) $1 + 1 = 2$ si y sólo si $2 + 3 = 4$: esta bicondicional es falsa ya que una de las proposiciones es verdadera y la otra es falsa.

c) Es invierno si y solo si no es primavera, verano u otoño: esta bicondicional es verdadera ya que ambas son verdaderas.

d) $1 + 1 = 3$ si y sólo si los cerdos vuelan: esta bicondicional es verdadera ya que ambas proposiciones son falsas.

e) $0 > 1$ si y sólo si $2 > 1$: esta bicondicional es falsa ya que una de las proposiciones es verdadera y la otra es falsa.

- **Ejercicio 13.** Determina si estas implicaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $1 + 1 = 2$ entonces $2 + 2 = 5$: la implicación es falsa porque la condición suficiente es verdadera y la necesaria es falsa.

b) Si $1 + 1 = 3$ entonces $2 + 2 = 4$: la implicación es verdadera porque la condición suficiente es falsa.

c) Si $1 + 1 = 3$ entonces $2 + 2 = 5$: la implicación es verdadera porque la condición suficiente es falsa.

d) Si los cerdos vuelan, entonces $1 + 1 = 3$: la implicación es verdadera porque la condición suficiente es falsa.

e) Si $1 + 1 = 3$ entonces Dios existe: la implicación es verdadera porque la condición suficiente es falsa.

f) Si $1 + 1 = 3$ entonces los cerdos vuelan: la implicación es verdadera porque la condición suficiente es falsa.

g) Si $1+1 = 2$ entonces los cerdos vuelan: la implicación es falsa porque la condición suficiente es verdadera y la necesaria es falsa.

h) Si $2 + 2 = 4$ entonces $1 + 2 = 3$: la implicación es verdadera porque ambas la condición suficiente y la condición necesaria son verdaderas.

- **Ejercicio 21.** Enuncia la recíproca, contrarrecíproca e inversa de las siguientes implicaciones.

a) Si nieva hoy, esquiaré mañana.

b) Voy a clase siempre que vaya a haber un control.

c) Un entero positivo es primo si no tiene otros divisores más que 1 y él mismo.

Respuesta: recordemos que dada una implicación $p \to q$, su recíproca se escribe como $q \to p$, su contrarrecíproca como $\neg q \to \neg p$ y su inversa como $\neg p \to \neg q$.

a) **recíproca**: Si esquío mañana entonces nieva hoy.
contrarrecíproca: Si no esquío mañana entonces hoy no nieva.
inversa: Si no nieva hoy, no esquiaré mañana.

b) **recíproca**: Si voy a clase entonces va a haber un control.
contrarrecíproca: Si no voy a clase entonces no va a haber un control.
inversa: Si no va a haber un control entonces no voy a clase.

c) **recíproca**: Si un entero positivo es primo entonces no tiene otros divisores más que 1 y él mismo.
contrarrecíproca: Si un entero positivo no es primo entonces tiene otros divisores además de 1 y él mismo.
inversa: Si un entero positivo tiene otros divisores además de 1 y él mismo entonces no es primo.

- **Ejercicio 23.** Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.

a) $p \wedge \neg p$

b) $p \vee \neg p$

c) $(p \vee \neg q) \to q$

d) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$

e) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

f) $(p \to q) \to (q \to p)$

Respuesta:

a)

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

b)

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

c)

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \to q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

d)

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	F	T

e)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

f)

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

- **Ejercicio 25.** Construye las tablas de verdad para cada una de estas fórmulas.

  a) $(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$

  b) $(p \oplus q) \rightarrow (p \wedge q)$

  c) $(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$

  Respuesta:

a)

p	q	$p \vee q$	$p \oplus q$	$(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	T

1.2 Equivalencias proposicionales

- **Ejercicio 9.** Demuestra, sin utilizar tablas de verdad, que cada una de las implicaciones del ejercicio 7 es una tautología (por brevedad, sólo se resolverán las implicaciones a) y d) de dicho ejercicio).

  Respuesta: Cuando se mencione "por equivalencia de implicación 1", o abreviadamente (EI1), se está haciendo referencia a la primera equivalencia lógica $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ presentada en la tabla 6, pág. 22, del libro de Rosen.

- El ejercicio 7a) propone la siguiente implicación: $(p \land q) \to p$

$$
\begin{aligned}
& && (p \land q) \to p \\
&\text{(por EI1)} && \equiv \neg(p \land q) \lor p \\
&\text{(por ley de De Morgan)} && \equiv (\neg p \lor \neg q) \lor p \\
&\text{(por ley conmutativa)} && \equiv (\neg q \lor \neg p) \lor p \\
&\text{(por ley asociativa)} && \equiv \neg q \lor (\neg p \lor p) \\
&\text{(por ley de negación)} && \equiv \neg q \lor \mathbf{T} \\
&\text{(por ley de dominación)} && \equiv \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

- El ejercicio 7d) propone la siguiente implicación: $(p \land q) \to (p \to q)$

$$
\begin{aligned}
& && (p \land q) \to (p \to q) \\
&\text{(por EI1)} && \equiv (p \land q) \to (\neg p \lor q) \\
&\text{(por EI1)} && \equiv \neg(p \land q) \lor (\neg p \lor q) \\
&\text{(por ley de De Morgan en el primer paréntesis)} && \equiv (\neg p \lor \neg q) \lor (\neg p \lor q) \\
&\text{(por leyes conmutativa y asociativa)} && \equiv (\neg p \lor \neg p) \lor (\neg q \lor q) \\
&\text{(por ley idempotente en el primer paréntesis)} && \equiv \neg p \lor (\neg q \lor q) \\
&\text{(por ley de negación en el segundo paréntesis)} && \equiv \neg p \lor \mathbf{T} \\
&\text{(por ley de dominación)} && \equiv \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

- **Ejercicio 13.** Determina si $(\neg q \land (p \to q)) \to \neg p$ es o no una tautología.

  Respuesta: para resolver este ejercicio utilizaremos las equivalencias lógicas de las tablas 5 y 6, pág. 22, del libro de Rosen. Debemos utilizar las leyes allí listadas de manera de determinar si el valor de verdad de la fórmula proposicional es siempre **T** para cualquier combinación de valores de verdad de p y q, es decir, si es una tautología o no.

$$
\begin{aligned}
& (\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p \\
\text{(por EI1)} \quad & \equiv \neg(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \vee \neg p \\
\text{(por EI1)} \quad & \equiv \neg(\neg q \wedge (\neg p \vee q)) \vee \neg p \\
\text{(por ley distributiva)} \quad & \equiv \neg((\neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge q)) \vee \neg p \\
\text{(por ley de negación)} \quad & \equiv \neg((\neg q \wedge \neg p) \vee \mathbf{F}) \vee \neg p \\
\text{(por ley de identidad)} \quad & \equiv \neg(\neg q \wedge \neg p) \vee \neg p \\
\text{(por ley de De Morgan y doble negación)} \quad & \equiv (q \vee p) \vee \neg p \\
\text{(por ley asociativa)} \quad & \equiv q \vee (p \vee \neg p) \\
\text{(por ley de negación)} \quad & \equiv q \vee \mathbf{T} \\
\text{(por ley de dominación)} \quad & \equiv \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

por lo que queda demostrado que es una tautología.

- **Ejercicio 22.** Demuestra que $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ y $p \rightarrow (q \vee r)$ son lógicamente equivalentes.

  Respuesta: partiremos de la primera proposición compuesta y llegaremos a la segunda. Lo importante de ver es que las leyes que figuran en las tablas se leen de izquierda a derecha y de derecha a izquerda.

$$
\begin{aligned}
& (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \\
\text{(por EI1 en ambos paréntesis)} \quad & \equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r) \\
\text{(por ley conmutativa)} \quad & \equiv (q \vee \neg p) \vee (\neg p \vee r) \\
\text{(por ley asociativa)} \quad & \equiv q \vee (\neg p \vee \neg p) \vee r \\
\text{(por ley idempotente)} \quad & \equiv q \vee \neg p \vee r \\
\text{(por ley conmutativa)} \quad & \equiv \neg p \vee q \vee r \\
\text{(por ley asociativa)} \quad & \equiv \neg p \vee (q \vee r) \\
\text{(por EI1)} \quad & \equiv p \rightarrow (q \vee r)
\end{aligned}
$$

por lo que queda demostrada la equivalencia.

1.3 Predicados y cuantificadores

- **Ejercicio 7.** Traduce estas sentencias a lenguaje natural, donde $C(x)$ es "x es cómico" y $F(x)$ es "x es divertido", y el dominio de discurso consiste en todas las personas.

a) $\forall x(C(x) \to F(x))$

b) $\forall x(C(x) \land F(x))$

c) $\exists x(C(x) \to F(x))$

d) $\exists x(C(x) \land F(x))$

Respuesta:

a) Toda persona, si es cómica entonces es divertida.

b) Todas las personas son cómicas y divertidas.

c) Algunas personas, si son cómicas son divertidas.

d) Hay personas que son cómicas y divertidas.

- **Ejercicio 9.** Sea $P(x)$ la sentencia "x habla ruso" y $Q(x)$ "x conoce el lenguaje de programación C++". Exprese cada una de las siguientes sentencias en términos de $P(x)$ y $Q(X)$, cuantificadores y conectivos lógicos. El dominio para los cuantificadores consiste en todos los estudiantes de la facultad.

  a) Hay un estudiante en tu facultad que habla ruso y conoce C++.

  b) Hay un estudiante en tu facultad que habla ruso pero que no conoce C++.

  c) Todos los estudiantes de tu facultad hablan ruso o conocen C++.

  d) Ningún estudiante de tu facultad habla ruso o conoce C++.

  Respuesta: Dados los predicados $P(x)$ y $Q(x)$ y siendo el dominio de x todos los alumnos de la facultad, se aplican cuantificadores y conectores lógicos.

  a) $\exists x[P(x) \land Q(x)]$

  b) $\exists x[P(x) \land \neg Q(x)]$

  c) $\forall x[P(x) \lor Q(x)]$

  d) $\neg\exists x[P(x) \lor Q(x)]$

- **Ejercicio 12.** Sea $Q(x)$ la sentencia "$x + 1 > 2x$". Si el dominio consiste en todos los enteros, cuáles son los valores de verdad de las siguientes proposiciones?

  a) $Q(0)$

  b) $Q(-1)$

  c) $Q(1)$

d) $\exists x Q(x)$

e) $\forall x Q(x)$

f) $\exists x \neg Q(x)$

g) $\forall x \neg Q(x)$

Respuesta:

a) $Q(0)$: **T** ya que evaluando la expresión en 0 me queda que $1 > 0$.

b) $Q(-1)$: **T** ya que evaluando la expresión en -1 me queda que $0 > -2$.

c) $Q(1)$: **F** ya que evaluando la expresión en 1 me queda que $2 > 2$.

d) $\exists x Q(x)$: **T**. Por ejemplo, $x = 0$.

e) $\forall x Q(x)$: **F**. Por ejemplo, $x = 1$.

f) $\exists x \neg Q(x)$: **T**. Por ejemplo, $x = 1$.

g) $\forall x \neg Q(x)$: **F**. Por ejemplo, $x = 0$.

- **Ejercicio 23.** Traduce cada una de estas frases a expresiones lógicas usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos.

a) Nadie es perfecto.

b) No todo el mundo es perfecto.

c) Todos tus amigos son perfectos.

d) Todo el mundo es tu amigo y es perfecto.

e) No todo el mundo es tu amigo o alguien no es perfecto.

Respuesta:

Utilizaremos los predicados $P(x)$: "x es perfecto" y $A(x)$: "x es tu amigo", siendo el dominio de x todas las personas.

a) $\neg\exists x P(x)$, o su expresión lógicamente equivalente $\forall x \neg P(x)$

b) $\neg\forall x P(x)$, o su expresión lógicamente equivalente $\exists x \neg P(x)$

c) $\forall x\ [A(x) \to P(x)]$

d) $\forall x\ [A(x) \wedge P(x)]$

e) $\neg\forall x A(x) \vee \exists x \neg P(x)$

- **Ejercicio 33.** Halla un contraejemplo, si es posible, a estas sentencias universalmente cuantificadas, donde el dominio para todas las variables consiste en todos los enteros.

  a) $\forall x \ (x^2 \geq x)$
  b) $\forall x \ (x > 0 \lor x < 0)$
  c) $\forall x \ (x = 1)$

  Respuesta: Aplicando simple razonamiento matemático, se concluye lo siguiente:

  a) No existe un contraejemplo, la sentencia es siempre verdadera para el dominio de los enteros.
  b) El único valor entero que no es mayor que 0 ni menor que 0, es el propio valor 0 $(x = 0)$.
  c) Cualquier número entero distinto de 1 es un contraejemplo válido. Por ejemplo, $(x = 3)$.

- **Ejercicio 43.** Muestra que $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ y $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$ tienen el mismo valor de verdad, cualquiera sea el dominio de discurso considerado.

  Respuesta: *Suponiendo* que $P(x)$ es verdadera para algún elemento x del dominio de discurso, entonces $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$ es verdadera más allá del valor de verdad que pueda asumir $Q(x)$ para ese o para cualquier otro elemento del dominio de discurso, ya que $\exists x P(x) \equiv T$ (i.e. incluso podría ser $Q(x)$ falsa para todos los elementos del dominio de discurso!). Luego, $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ también será T ya que vemos que para algún x, alguna de las dos o ambas $P(x)$ ó $Q(x)$ son verdaderas (en este caso particular $P(x)$). De la misma manera, si (*suponiendo que*) la expresión $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv T$, ello significa que para al menos un elemento del dominio de discurso alguna de las dos o ambas $P(x)$ ó $Q(x)$ son verdaderas. Supongamos que sólo $P(x)$ fuera verdadera para ese elemento del dominio de discurso. Entonces también puedo afirmar que $\exists x P(x) \equiv T$, independientemente de los valores de verdad que pudiera asumir $Q(x)$ para ese o cualquier otro elemento del dominio de discurso. Pero entonces $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$ también es T.

  Por otro lado, para que $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$ sea falsa, no debe existir ningún elemento que haga verdaderas ni a $P(x)$ ni a $Q(x)$. Luego, la expresión $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ también será falsa. Por otro lado, si la expresión $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ es falsa, ello significa que para un mismo elemento x, ni $P(x)$ ni $Q(x)$ son verdaderas, y esto se hace extensivo a todos los elementos del dominio de discurso. Luego, vemos que $\exists x P(x) \equiv F$ y $\exists x Q(x) \equiv F$, por lo cual $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$ también es F.

  De esta manera hemos mostrado que ambas expresiones del enunciado toman siempre los mismos valores de verdad. Por lo tanto, $\exists x(P(x) \lor Q(x))$ es una expresión lógicamente equivalente a $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x)$.

1.4 Cuantificadores anidados

- **Ejercicio 3.** Sea $Q(x, y)$ la sentencia "x ha enviado un e-mail a y", donde el dominio tanto para x como para y consiste en todos los estudiantes de tu clase. Expresa cada una de las siguientes cuantificaciones en lenguaje natural.

  Respuesta:

  a) $\exists x \exists y Q(x, y)$: Hay un estudiante de tu clase que le ha enviado un e-mail a alguno (podría ser a él mismo?).

  b) $\exists x \forall y Q(x, y)$: Hay un estudiante de tu clase que le ha enviado un e-mail a todos.

  c) $\forall x \exists y Q(x, y)$: Todos los estudiantes de tu clase le han enviado un e-mail a al menos uno.

  d) $\exists y \forall x Q(x, y)$: Hay un estudiante de tu clase que ha recibido un e-mail de todos.

  e) $\forall y \exists x Q(x, y)$: Todos los estudiantes de tu clase han recibido un e-mail de alguno.

  f) $\forall x \forall y Q(x, y)$: Todos los estudiantes de tu clase le han enviado e-mails a todos.

- **Ejercicio 10.** Sea $F(x, y)$ la sentencia "x puede engañar a y", donde el dominio para x como para y consiste en todas las personas del mundo. Utiliza cuantificadores para expresar cada una de las siguientes sentencias.

  a) Todo el mundo puede engañar a Fred.

  b) Evelyn puede engañar a todo el mundo.

  c) Todo el mundo puede engañar a alguien.

  d) No hay nadie que pueda engañar a todo el mundo.

  e) Todo el mundo puede ser engañado por alguien.

  f) Nadie puede engañar a Fred y a Jerry (a los dos).

  g) Nadie puede engañar exactamente a dos personas.

  h) Hay exactamente una persona a quien todo el mundo puede engañar.

  i) Nadie puede engañarse a sí mismo.

  j) Hay alguien que puede engañar a exactamente una persona.

  Respuesta:

  a) $\forall x \ F(x, \text{Fred})$

b) $\forall x\ F(\text{Evelyn}, x)$

c) $\forall x\ \exists y\ F(x, y)$

d) $\neg\exists x\ \forall y\ F(x, y) \qquad (\equiv \forall x \exists y\ \neg F(x, y))$

e) $\forall x\ \exists y\ F(y, x)$

f) $\neg\exists x\ [F(x, \text{Fred}) \wedge F(x, \text{Jerry})]$

g) $\neg\exists x\ \forall y\ \forall z\ [F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge \forall w\ ((w \neq y) \wedge (w \neq z) \rightarrow \neg F(x, w))]$

h) $\exists x\ \forall y\ [F(y, x) \wedge \forall z\ (F(y, z) \rightarrow x = z)]$, o utilizando la contrarrecíproca de la implicación $\exists x\ \forall y\ [F(y, x) \wedge \forall z\ (x \neq z \rightarrow \neg F(y, z))]$

i) $\neg\exists x\ F(x, x)$

j) $\exists x\ \exists y\ [F(x, y) \wedge \forall z\ (F(x, z) \rightarrow z = y)]$

- **Ejercicio 28.** Determina el valor de verdad de cada una de estas sentencias si el dominio de todas las variables es el conjunto de los números reales.

a) $\forall x\ \exists y\ (x^2 = y)$

b) $\forall x\ \exists y\ (x = y^2)$

c) $\exists x\ \forall y\ (xy = 0)$

d) $\exists x\ \exists y\ (x + y \neq y + x)$

e) $\forall x\ (x \neq 0 \rightarrow\ \exists y\ (xy = 1))$

f) $\exists x \forall y\ (y \neq 0 \rightarrow\ xy = 1)$

g) $\forall x \exists y\ (x + y = 1)$

h) $\exists x \exists y\ (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$

i) $\forall x \exists y\ (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$

j) $\forall x \forall y \exists z\ (z = (x + y)/2)$

Respuesta:

a) **T**. El cuadrado de un número real es otro número real.

b) **F**. El cuadrado de un número real es no negativo, por lo que cualquier $x < 0$ no es el cuadrado de ningún número real.

c) **T**. Tomando $x = 0$.

d) **F**. Si fuese verdadero estaríamos violando la propiedad conmutativa de la suma, por lo que se concluye que es falso.

e) **T**. Ya que todo número real no nulo tiene su inverso multiplicativo.

f) **F**. No existe número x que sea inverso multiplicativo de todos los números reales no nulos.

g) **T**. Seleccionando $y = 1 - x$ la propiedad se cumple para todo x.

h) **F**. El sistema de ecuaciones es incompatible, por lo que no tiene solución.

i) **F**. El sistema de ecuaciones solo tiene solución con $x = 1$ e $y = 1$. Para cualquier otro valor de x las igualdades no se cumplen para ninguna y.

j) **T**. Debido a el promedio de dos números reales es otro número real.

- **Ejercicio 37.** Encuentra un contraejemplo, si es posible, de estas sentencias universalmente cuantificadas, donde el dominio de todas las variables consiste en todos los enteros.

  a) $\forall x \forall y (x^2 = y^2 \to x = y)$

  b) $\forall x \exists y (y^2 = x)$

  c) $\forall x \forall y (xy \geq x)$

  Respuesta: Lo primero que tengo que realizar es determinar el valor de verdad de cada proposición. Si es falsa, tengo que encontrar el contraejemplo. En cambio, si es verdadera, no existe el contraejemplo.

  a) La sentencia nos dice que si dos enteros cumplen que sus cuadrados son iguales, entonces son el mismo entero. Esto no es cierto, porque estamos trabajando con los enteros (positivos, nulo y negativos). Para hallar el contraejemplo me tengo que preguntar: ¿Hay un par de enteros, distintos entre si, cuyos cuadrados son iguales? Es decir, un par de enteros que hagan falsa la implicación en cuestión. Claramente hay muchos (infinitos). Tomamos un entero cualquiera, por ejemplo, el $x = -7$ y vemos que con el $y = 7$ cumplen que $x^2 = 49 = y^2$. Pero claramente $x \neq y$.

  b) Esta sentencia afirma que, dado un entero, puedo hallar otro tal que su cuadrado es el entero dado. Dicho de otra forma, todo entero es el cuadrado de algún otro. Así, por ejemplo, para el 1 puedo hallar el -1, para el 0, puedo hallar el mismo 0, para el 25 puedo hallar el 5. Claramente estoy haciendo trampa, porque estoy tomando cuadrados exactos. Entonces, vemos que la sentencia no es cierta, porque, por ejemplo para el -8 no puedo hallar ningún entero cuyo cuadrado sea -8 (en realidad para ningún negativo, ni para ningún entero positivo que no sea cuadrado perfecto).

  c) En este caso, nos dice que el producto de dos enteros cualesquiera es mayor o igual que ellos. Por ejemplo, si tomamos $x = 2$ y $y = 1$, el producto $xy = 2$ es mayor o igual a x (y a y). ¿Ésto se cumple siempre? Claramente no; basta con tomar un entero x positivo y un entero y negativo para que esto se cumpla. También es válido como contraejemplo, tomar un x positivo y $y = 0$.

1.5 Métodos de demostración

- **Ejercicio 3.** Construye un argumento utilizando reglas de inferencia para mostrar que las hipótesis *"Randy trabaja duro"*, *"Si Randy trabaja duro, será un chico soso"*, *"Si Randy es un chico soso, no conseguirá el trabajo"* implican la conclusión *"Randy no conseguirá el trabajo"*.

  Respuesta: En primer lugar, se deben identificar las hipótesis y la conclusión del argumento deductivo que debemos construir. Estas son:

  - H_1 : "Randy trabaja duro".
  - H_2 : "Si Randy trabaja duro, será un chico soso".
  - H_3 : "Si Randy es un chico soso, no conseguirá el trabajo".
  - C : "Randy no conseguirá el trabajo".

  Luego, el argumento deductivo lo vamos a construir de la siguiente manera:

  1. De H_1 y H_2, aplicando el *Modus Ponens*, puedo concluir C_1: "Randy será un chico soso". $(H_1 \wedge H_2 \rightarrow C_1)$
  2. A partir de C_1 y H_3, aplicando nuevamente el *Modus Ponens*, puedo concluir C: "Randy no conseguirá el trabajo", que era lo que lo que deseábamos concluir. $(C_1 \wedge H_3 \rightarrow C)$

- **Ejercicio 13.** Determina si es correcto cada uno de los siguientes argumentos. Si el argumento es correcto, cuál es la regla de inferencia utilizada? Si no lo es, qué error lógico ocurre?

  a) Si n es un número real tal que $n > 1$, entonces $n^2 > 1$. Supongamos que $n^2 > 1$, entonces $n > 1$.

  b) El número $\log_2(3)$ es irracional si no es la razón de dos enteros. Por lo tanto, como $\log_2(3)$ no se puede escribir en la forma a/b donde a y b son enteros, es irracional.

  c) Si n es un número real y $n > 3$, entonces $n^2 > 9$. Supongamos que $n^2 \leq 9$, entonces $n \leq 3$.

  d) Si n es un número real y $n > 2$, entonces $n^2 > 4$. Supongamos que $n \leq 2$, entonces $n^2 \leq 4$.

  Respuesta:

a) El argumento es incorrecto, ya que se comete la falacia de afirmar la conclusión. Esto es así ya que podemos identificar en el argumento que la primera sentencia se puede escribir como $p \to q$, teniendo en cuenta que $p : n > 1$, $q : n^2 > 1$. Luego, asume que se cumple q, con lo cual concluye p, es decir, el argumento se puede expresar como: $[(p \to q) \wedge q] \to p$, que es la falacia de afirmar la conclusión.

b) El argumento se puede reescribir de la siguiente manera: Si $\log_2(3)$ no es la razón de dos enteros, entonces es irracional. Luego, como $\log_2(3)$ no se puede escribir como la razón de dos enteros a y b, puedo concluir que es irracional. Identificando a p: "$\log_2(3)$ no es la razón de dos enteros" y q: "$\log_2(3)$ es irracional", el argumento anterior se puede expresar como: $[(p \to q) \wedge p] \to q$, que es el *Modus Ponens*. Es decir que el argumento es correcto.

c) En este caso, el argumento es correcto ya que se puede expresar en la forma $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$, que es el *Modus Tollens*.

d) Este argumento o razonamiento lo podemos escribir en la forma $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$. El mismo es incorrecto, ya que es la falacia de negar la hipótesis.

- **Ejercicio 17.** Demuestra la proposición $P(0)$, donde $P(n)$ es la proposición: *"si n es un entero positivo mayor que 1, entonces $n^2 > n$"*. ¿Qué tipo de demostración has empleado?

  Respuesta: En este ejercicio debemos demostrar que la proposición $P(n)$ es verdadera para el caso $n = 0$. Realizando dicho reemplazo nos queda:

  $P(0)$: *"si 0 es un entero positivo mayor que 1, entonces $0^2 > 0$"*.

  La implicación resultante tiene valor de verdad **T**, dado que la hipótesis es falsa ($\mathbf{F} \to q \equiv \mathbf{T}$), quedando demostrado $P(0)$. La demostración utilizada es una *demostración vacua*.

- **Ejercicio 18.** Demuestra la proposición $P(1)$, donde $P(n)$ es la proposición: *"si n es un entero positivo, entonces $n^2 \geq n$"*. ¿Qué tipo de demostración has empleado?

  Respuesta: En este ejercicio debemos demostrar que la proposición $P(n)$ es verdadera para el caso $n = 1$. Realizando dicho reemplazo nos queda:

  $P(1)$: *"si 1 es un entero positivo mayor que 1, entonces $1^2 \geq 1$"*.

  Puesto que la conclusión es verdadera, la implicación también lo será, independientemente del valor de verdad que tome la hipótesis. La demostración utilizada es una *demostración trivial*.

- **Ejercicio 20.** Demuestra que el cuadrado de un número par es un número par utilizando:

a) una demostración directa.
b) una demostración indirecta.
c) una reducción al absurdo.

Respuesta: En primer lugar debemos definir la proposición $p \to q$ a demostrar. En el ejercicio puede verse que p: n es un número par, q: el cuadrado de n es par. Acto seguido, podemos escribir en lenguaje matemático estricto la sentencia, esto es:

$$(n = 2k_1) \to (n^2 = 2k_2)$$

donde n, k_1 y k_2 son números enteros.

a) Para la demostración directa, comenzamos desde la hipótesis y a partir de operaciones algebraicas que preserven la igualdad, intentamos arribar a la conclusión.

$$\begin{aligned} & & n &= 2k_1 \\ \text{multiplicando a ambos lados por } n & & n^2 &= 2k_1 n \\ \text{considerando } k_2 = k_1 n & & n^2 &= 2k_2 \\ & & & q.e.d \end{aligned}$$

b) Para la demostración indirecta utilizamos la contrarrecíproca de la implicación que expresa a nuestro enunciado. Es decir, suponemos que "el cuadrado de n es un número impar" y debemos arribar a que "n es impar".

$$\begin{aligned} \text{hipótesis} & & n^2 &= 2k_2 - 1 \\ \text{sumo } 2n+1 \text{ en ambos lados} & & n^2 + 2n + 1 &= 2k_2 + 2n \\ \text{cuadrado del binomio y sacando factor común 2} & & (n+1)^2 &= 2(k_2 + n) \\ \text{introduciendo el entero } k_3 = k_2 + n & & (n+1)^2 &= 2k_3 \qquad \text{(a)} \end{aligned}$$

En este punto sabemos que $(n+1)^2$ es un número par, algo que no nos alcanza para determinar la paridad de n. Por lo tanto, vamos a utilizar una demostración auxiliar para desenredar el camino.
Demostración auxiliar. Quiero demostrar ahora que "si m^2 es par, entonces m es par" utilizando para ello una demostración indirecta:

$$\begin{aligned} \text{hipótesis: existen } m, c \text{ enteros tales que} & & m &= 2c + 1 \\ \text{elevo al cuadrado ambos lados} & & m^2 &= (2c_1 + 1)^2 \\ \text{desarrollando el cuadrado del binomio} & & m^2 &= 4c_1^2 + 4c_1 + 1 \\ \text{factor común 2 de los dos primeros términos} & & m^2 &= 2(2c_1^2 + 2c_1) + 1 \\ \text{introduciendo el entero } c_2 = 2c_1^2 + 2c_1 & & m^2 &= 2c_2 + 1 \\ & & & q.e.d \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

Regresando a la ec.(a), (tomando a $n+1$ como el m de la demostración auxiliar), y utilizando el resultado recién hallado en la ec.(b), podemos asegurar ahora que $n+1$ es un número par puesto que su cuadrado es par, y con una simple manipulación algebraica encontrar que n es impar, completando la demostración.

$$\begin{aligned} \text{por (a) y (b)} \qquad & n+1 = 2k_1 \\ \text{despejo } n \qquad & n = 2k_1 - 1 \\ & q.e.d \end{aligned}$$

Es decir, hemos finalmente demostrado que si n^2 es impar, entonces n es impar.

c) Para la demostración por reducción al absurdo podemos plantear lo siguiente: suponemos que p y $\neg q$ son verdaderas, esto es n es un número par y n^2 es un número impar, en símbolos: $(p \wedge \neg q)$. Ahora bien, siguiendo los pasos de la demostración indirecta, vimos que $\neg q \rightarrow \neg p$, por lo que $\neg p$ debe ser verdadera también. Esto conduce a la contradicción $p \wedge \neg p$ (n es un número par e impar a la vez) lo que es un absurdo ($p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$). q.e.d.

NOTA: La reducción al absurdo utilizada aquí puede definirse simbólicamente como:

$$[(p \wedge \neg q) \rightarrow \mathbf{F}] \rightarrow [p \rightarrow q]$$

- **Ejercicio 25.** Demuestra que la suma de un número irracional y un número racional es un número irracional utilizando una demostración por reducción al absurdo.

Respuesta: Supongamos que r es un número racional e i un número irracional, y que la suma $s = r + i$, en vez de ser irracional tal cual lo indica el enunciado, también es racional.

Por definición, r es un número racional si existen dos enteros a y b, con $b \neq 0$, tales que $r = a/b$. De la misma manera, si la suma es racional, entonces la podemos expresar como $s = c/d$ con c y d perteneciente a los enteros y con $d \neq 0$. Pero entonces, si despejo i me queda como $i = s - r$, es decir

$$i = s - r = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd}$$

Dado que b y d son enteros distintos de cero, entonces su producto también será entero y no nulo. Por otro lado, el numerador también es suma y producto de números enteros, por lo cual también será entero. Luego vemos que i queda expresado como un número racional, lo cual es un absurdo. De esta manera queda demostrado que para que la suma sea irracional, uno de los números enteros tiene que ser racional y el otro irracional.

- **Ejercicio 29.** Demuestra que si x es irracional, entonces $1/x$ también lo es.

  Respuesta: Resulta conveniente aplicar una demostración indirecta, es decir, mostraremos que si $1/x$ es racional, entonces x también es racional. Partimos entonces de suponer que $1/x$ es racional. Luego, por definición de número racional $1/x = a/b$, con a y b enteros y $b \neq 0$.

  Pero $1/x$ no puede ser 0 ya que si multiplicamos por x ambos lados de la ecuación, estaríamos ante el absurdo $1 = 0 \cdot x$. Por lo tanto, $a \neq 0$.

  Aplicando álgebra, tenemos que:

$$x = 1/(1/x) = 1/(a/b) = b/a$$

  que es el cociente entre dos números enteros no nulos. Por lo tanto, x es racional.

- **Ejercicio 43.** Demuestra que estas tres sentencias son equivalentes. *(i)* $3x + 2$ es un entero par; *(ii)* $x + 5$ es un entero impar, y *(iii)* x^2 es un entero par.

  Respuesta: Para este tipo de ejercicios, se deben demostrar, en principio, 3 dobles implicaciones (6 implicaciones), a saber, $(i) \leftrightarrow (ii)$, $(ii) \leftrightarrow (iii)$ y $(iii) \leftrightarrow (i)$. Pero teniendo en cuenta dos de ellas, alcanza (4 implicaciones). Estas últimas, se pueden reducir a 3 siempre que podamos, por lo que demostraremos sólo las siguientes implicaciones: $(i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) \rightarrow (i)$.

  - $(i) \rightarrow (ii)$ (por demostración indirecta)
    Supongamos que $x + 5$ es par (debemos demostrar que $3x + 2$ es impar). Luego, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x + 5 = 2k$. Ahora trabajemos con esta igualdad:

$$\begin{aligned}
x + 5 &= 2k \\
x &= 2k - 5 \\
3x &= 3(2k - 5) \\
3x + 2 &= 3(2k - 5) + 2 \\
&= 6k - 15 + 2 \\
&= 6k - 13 \\
&= 6k - 14 + 1 \\
&= 2(3k - 7) + 1 \\
&= 2l + 1
\end{aligned}$$

    donde $l = 3k - 7$ es entero por ser producto y diferencia de enteros. Luego, hemos demostrado que $3x + 2$ es impar.

- $(ii) \rightarrow (iii)$ (por demostración directa)
  Supongamos que $x+5$ es impar. Luego existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x+5 = 2k+1$. Entonces:

$$\begin{aligned} x+5 &= 2k+1 \\ x &= 2k-4 = 2(k-2) \\ x^2 &= 4(k-2)^2 = 2(2(k-2)^2) = 2m \end{aligned}$$

  donde $m \in \mathbb{Z}$ por ser producto de enteros. Luego x^2 es par.

- $(iii) \rightarrow (i)$ (por demostración indirecta)
  Supongamos que $3x+2$ es impar (debo probar que x^2 es impar). Luego, existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $3x+2 = 2k_1+1$. Entonces,

$$\begin{aligned} 3x+2 &= 2k_1+1 \\ 3x &= 2(k_1-1)+1 \end{aligned}$$

  Es decir, $3x$ es impar, lo que implica que x también lo es (de lo contrario, $3x$ sería par).
  Si x es impar, existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2k_2+1$, luego

$$\begin{aligned} x^2 &= (2k_2+1)^2 \\ &= 2(2k_2^2+2k_2)+1 \\ &= 2k+1 \end{aligned}$$

  donde $k \in \mathbb{Z}$ por ser producto y sumas de enteros. Finalmente, x^2 es impar.

- **Ejemplo 1**: Este ejemplo es desarrollado a partir de un teorema presentado en el libro de Burden y Faires, Numerical Analysis, *9na Edición*, el cual es utilizado por la Cátedra de Cálculo Numérico de la FICH. El mismo sirve para ilustrar un ejemplo de demostración mediante reducción al absurdo o contradicción. El teorema 6.21 de la pág. 412 de dicho libro enuncia que: *"si una matriz A es estrictamente diagonal dominante (e.d.d), entonces la misma es no singular"*.

  Respuesta: en primer lugar, a los fines de que el material sea autocontenido, introducimos los conceptos de matriz e.d.d y de matriz singular. Una matriz A de tamaño $n \times n$ se define como e.d.d si se satisface que $\forall i, i = 1, 2, \ldots, n$

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \tag{1}$$

  Por ejemplo, la siguiente matriz de tamaño 4×4 es e.d.d

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

mientras que la siguiente no es e.d.d

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, si una matriz A es no singular, entonces existe otra matriz A^{-1}, llamada la inversa de A. Además, el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene como única solución al vector nulo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ver teorema 6.17, pág. 398 del mismo libro).

Ahora bien, más que los pasos algebraicos realizados en la demostración, lo que interesa en esta instancia del curso de Teoría de la Computación es mostrar el planteo que realiza para llevar a cabo la demostración de dicho enunciado mediante reducción al absurdo. Lo que se realiza es lo siguiente: se asume que A es singular y ello lleva a contradecir el hecho de que A sea e.d.d. Luego, si A es e.d.d. tiene que ser no singular.

Asumir que A es singular implica asumir que $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, con $\mathbf{x} \in R^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (es decir, que el sistema lineal homogéneo admite alguna solución no nula en R^n). Esto significa que ése vector $\mathbf{x}$ que existe tiene al menos alguna componente no nula. Sin pérdida de generalidad, llamemos k a la componente de dicho vector con mayor valor absoluto, es decir que

$$0 < |x_k| = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| \tag{2}$$

Ahora bien, puesto que dicho vector satisface la solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo cual también se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n \tag{3}$$

En particular, para la k-ésima fila (cuando $i = k$) también se cumple que

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = 0 \tag{4}$$

de donde se obtiene que

$$a_{kk}x_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j \tag{5}$$

Tomando valores absolutos en ambos miembros de la ecuación anterior y aplicando la desigualdad triangular, podemos escribir

$$\begin{aligned} |a_{kk}x_k| &= |\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j| \\ &\leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}x_j| \end{aligned} \tag{6}$$

y teniendo en cuenta que $|a_{kk}x_k| = |a_{kk}||x_k|$ y que $|a_{kj}x_j| = |a_{kj}||x_j|$, podemos expresar la desigualdad anterior como

$$|a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}||x_j| \tag{7}$$

por lo cual, puesto que por hipótesis $x_k \neq 0$, se puede operar de la siguiente manera

$$\boxed{|a_{kk}|} \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \boxed{\leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|} \tag{8}$$

donde la última desigualdad surge a partir del hecho de que $|x_k| = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|$, por lo cual $|x_j|/|x_k| \leq 1$. Pero al observar la desigualdad indicada en recuadros, vemos que la misma contradice el hecho de que A sea e.d.d. Es decir que si asumimos que A es singular entonces A no es e.d.d. Luego, queda demostrado por contradicción que si A es e.d.d, entonces A es no singular.

1.6 Conjuntos

- **Ejercicio 7.** Determina si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa.

  a) $0 \in \emptyset$
  b) $\emptyset \in \{0\}$
  c) $\{0\} \subset \emptyset$
  d) $\emptyset \subset \{0\}$
  e) $\{0\} \in \{0\}$

f) $\{0\} \subset \{0\}$

g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

Respuesta:

a) $0 \in \emptyset$: **F**. El conjunto vacío no contiene elementos.

b) $\emptyset \in \{0\}$: **F**. El conjunto de la derecha tiene un único elemento, el cero (0). El vacío no es elemento de ese conjunto.

c) $\{0\} \subset \emptyset$: **F**. El conjunto vacío (el de la derecha) no contiene subconjuntos propios.

d) $\emptyset \subset \{0\}$: **V**. El conjunto vacío es subconjunto propio de cualquier conjunto no vacío (en particular el de la derecha, que posee un elemento: el cero).

e) $\{0\} \in \{0\}$: **F**. El único elemento que posee el conjunto de la derecha es el cero. Por lo tanto, el conjunto $\{0\}$ no es elemento del conjunto de la derecha.

f) $\{0\} \subset \{0\}$: **F**. Para que un conjunto sea subconjunto propio de otro, no pueden ser iguales.

g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$: **V**. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

- **Ejercicio 8.** Determina si cada una de estas sentencias es verdadera o falsa.

a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

g) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

Respuesta:

a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$: **V** ya que $\emptyset$ es el único elemento perteneciente o que está en el conjunto $\{\emptyset\}$.

b) $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$: **V** ya que el $\emptyset$ es uno de los elementos que están en el conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$: **F** ya que $\{\emptyset\}$ no es un elemento de $\{\emptyset\}$.

d) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$: **V** ya que en éste caso $\{\emptyset\}$ sí es elemento de $\{\{\emptyset\}\}$.

e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$: **V** ya que $\{\emptyset\}$ es subconjunto de $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ porque todo elemento de $\{\emptyset\}$ está en $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

f) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$: **V** (ídem anterior)

g) $\{\{\emptyset\}\} \subset \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$: **F** ya que si bien todo elemento de $\{\{\emptyset\}\}$ está en $\{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$, ambos conjuntos son iguales y el símbolo $\subset$ está indicando que no pueden ser iguales los conjuntos. Si hubiese sido $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$ entonces sería **V**.

- **Ejercicio 18.** Determina si alguno de estos conjuntos es el conjunto de partes de algún conjunto

  a) $\emptyset$

  b) $\{\emptyset, \{a\}\}$

  c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$

  d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

  Respuesta:

  a) $\emptyset$: no es el conjunto de partes de ningún conjunto, ya que el conjunto de partes es aquél conjunto cuyos elementos son *todos* los subconjuntos de un conjunto dado. Es decir, que al menos el conjunto de partes debería poseer un elemento que sería el conjunto vacío, en cuyo caso lo denotaríamos como $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

  b) $\{\emptyset, \{a\}\}$: sí, es el conjunto de partes del conjunto $S = \{a\}$.

  c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$: no es conjunto de partes de ningún conjunto (notar que el cardinal del conjunto dado es igual a 3, lo cual no sería posible si el conjunto dado fuese el conjunto de partes de otro conjunto, ya que su cardinal sería $2^{|S|}$).

  d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$: sí, es el conjunto de partes del conjunto $S = \{a, b\}$.

- **Ejercicio 22.** Supongamos que $A \times B = \emptyset$, donde A y B son conjuntos. ¿Qué se puede concluir?

  Respuesta: Podemos concluir que $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$. Si no fuera así, tanto A como B tendrían al menos un elemento cada uno, es decir, que existen $a \in A$ y $b \in B$. Entonces, hay al menos un par ordenado (a, b) en el producto cartesiano $A \times B$, por lo tanto no sería vacío. Esta contradicción nos asegura que A o B (o ambos) es vacío.

1.7 Operaciones con conjuntos

- **Ejercicio 6.** Sea A un conjunto. Demuestra que

a) $A \cup \emptyset = A$

b) $A \cap \emptyset = \emptyset$

c) $A \cup A = A$

d) $A \cap A = A$

e) $A - \emptyset = A$

f) $A \cup U = U$

Respuesta: En este ejercicio vamos a realizar varias demostraciones (algunas de ellas son identidades listadas en la Tabla 1 de la sección), para lo cual vamos a utilizar la notación constructiva de conjuntos y los operadores lógicos ya estudiados en secciones anteriores.

a) $A \cup \emptyset = A$: Ley de identidad.

$$\begin{aligned}
& A \cup \emptyset = \\
\text{notación constructiva} \quad & = \{x|x \in A\} \cup \{x|x \in \emptyset\} \\
\text{def. de unión} \quad & = \{x|(x \in A \vee x \in \emptyset)\} \\
& = \{x|(x \in A \vee \mathbf{F})\} \\
\text{por ley de identidad (lógica)} \quad & = \{x|x \in A\} \\
\text{por def. de conjunto} \quad & = A
\end{aligned}$$

b) $A \cap \emptyset = \emptyset$: Ley de dominación.

$$\begin{aligned}
& A \cap \emptyset = \\
\text{notación constructiva} \quad & = \{x|x \in A\} \cap \{x|x \in \emptyset\} \\
\text{def. de intersección} \quad & = \{x|(x \in A \wedge x \in \emptyset)\} \\
& = \{x|(x \in A \wedge \mathbf{F})\} \\
\text{por ley de dominación (lógica)} \quad & = \{x|\mathbf{F}\} \\
\text{por def. de conjunto vacío} \quad & = \emptyset
\end{aligned}$$

c) $A \cup A = A$: Ley idempotente.

$$\begin{aligned}
& A \cup A = \\
\text{notación constructiva} \quad & = \{x|x \in A\} \cup \{x|x \in A\} \\
\text{def. de unión} \quad & = \{x|(x \in A \vee x \in A)\} \\
\text{por ley idempotente (lógica)} \quad & = \{x|x \in A\} \\
\text{por def. de conjunto} \quad & = A
\end{aligned}$$

d) $A \cap A = A$: Ley idempotente.

$$\begin{aligned} & A \cap A = \\ \text{notación constructiva} \quad & = \{x|x \in A\} \cap \{x|x \in A\} \\ \text{def. de intersección} \quad & = \{x|(x \in A \land x \in A)\} \\ \text{por ley idempotente (lógica)} \quad & = \{x|x \in A\} \\ \text{por def. de conjunto} \quad & = A \end{aligned}$$

e) $A - \emptyset = A$.

$$\begin{aligned} & A - \emptyset = \\ \text{notación constructiva} \quad & = \{x|x \in A\} - \{x|x \in \emptyset\} \\ \text{def. de diferencia} \quad & = \{x|(x \in A \land x \notin \emptyset)\} \\ & = \{x|x \in A \land \mathbf{T}\} \\ \text{identidad lógica} \quad & = \{x|x \in A\} \\ \text{por def. de conjunto} \quad & = A \end{aligned}$$

f) $A \cup U = U$.

$$\begin{aligned} & A \cup U = \\ \text{notación constructiva} \quad & = \{x|x \in A\} \cup \{x|x \in U\} \\ \text{def. de unión} \quad & = \{x|(x \in A \lor x \in U)\} \\ \text{todo elemento está en el universal} \quad & = \{x|x \in A \land \mathbf{T}\} \\ \text{identidad lógica} \quad & = \{x|x \in A\} \\ \text{por def. de conjunto} \quad & = A \end{aligned}$$

- **Ejercicio 12.** Sean A y B conjuntos, demuestra que:

  a) $(A \cap B) \subseteq A$
  b) $A \subseteq (A \cup B)$
  c) $A - B \subseteq A$
  d) $A \cap (B - A) = \emptyset$
  e) $A \cup (B - A) = A \cup B$

  Respuesta:

  a) $(A \cap B) \subseteq A$. Debemos demostrar, por definición de subconjunto, que $\forall x\ (x \in A \cap B \to x \in A)$. Tomando un elemento arbitrario x, por definición de intersección de conjuntos, si $x \in A \cap B$, entonces $x \in A \land x \in B$. De esta manera, se concluye que $x \in A$ es verdadero.

b) $A \subseteq (A \cup B)$. Debemos demostrar, por definición de subconjunto, que $\forall x\ (x \in A \to x \in (A \cup B))$. Elegimos hacer la demostración de la implicación de manera indirecta, es decir, $\forall x\ [\neg(x \in A \cup B) \to \neg(x \in A)]$ o su expresión lógicamente equivalente $\forall x\ (x \notin A \cup B \to x \notin A)$. Tomamos para ello un elemento arbitrario del dominio x (particularización universal), y por definición de complemento, si $x \notin A \cup B$ entonces $x \in \overline{A \cup B}$. Luego, por leyes de De Morgan para conjuntos, si $x \in (\overline{A \cup B})$ entonces $x \in (\overline{A} \cap \overline{B})$. Por definición de intersección podemos decir que entonces $x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}$. Aplicando definición de complemento se tiene que $(x \notin A) \wedge (x \notin B)$. De esta manera, hemos probado que $x \notin A$. Puesto que la demostración fue realizada hasta aquí para un elemento arbitrario del dominio, podemos hacer extensivo el resultado para cualquier otro elemento (generalización universal) y concluir que se cumple $\forall x\ (x \notin (A \cup B) \to x \notin A)$, y por ende $A \subseteq (A \cup B)$.

c) $A - B \subseteq A$. Debemos demostrar, por definición de subconjunto, que $\forall x\ (x \in (A - B) \to x \in A)$. Tomando un elemento arbitrario x, por definición de diferencia de conjuntos, si $x \in (A - B)$, entonces $(x \in A) \wedge (x \notin B)$. De esta manera, se concluye que $x \in A$ es verdadero, concluyendo la demostración directa.

d) $A \cap (B - A) = \emptyset$

$$
\begin{aligned}
& A \cap (B - A) = \\
\text{notación constructiva} \quad & = \{x | x \in A\} \cap \{x | x \in (B - A)\} \\
\text{def. de intersección y diferencia} \quad & = \{x | (x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin A)\} \\
\text{ley conmutativa y de negación (lógica)} \quad & = \{x | x \in B \wedge \mathbf{F}\} \\
\text{dominación (lógica)} \quad & = \{x | \mathbf{F}\} \\
\text{por def. de conjunto} \quad & = \emptyset
\end{aligned}
$$

e) $A \cup (B - A) = A \cup B$

$$
\begin{aligned}
& A \cup (B - A) = \\
\text{notación constructiva} \quad & = \{x | x \in A\} \cup \{x | x \in (B - A)\} \\
\text{def. de unión y diferencia de conj.} \quad & = \{x | (x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A))\} \\
\text{ley distributiva (lógica)} \quad & = \{x | (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A)\} \\
\text{ley negación (lógica)} \quad & = \{x | (x \in A \vee x \in B) \wedge \mathbf{T}\} \\
\text{ley indentidad (lógica)} \quad & = \{x | (x \in A \vee x \in B)\} \\
\text{por def. de unión de conj.} \quad & = A \cup B
\end{aligned}
$$

- **Ejercicio 15.** Demuestra que si A y B son conjuntos, entonces $A - B = A \cap \overline{B}$.

  Respuesta: Por definición de diferencia de conjuntos, tenemos que

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Por otro lado, la definición de intersección de dos conjuntos $A \cap B$, se expresa como

$$A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$$

Considerando la definición de complemento de un conjunto, en este caso B

$$\overline{B} = U - B = \{x | x \notin B\}$$

Reescribiendo el segundo miembro de la igualdad $A \cap \overline{B}$ según la definición de complemento y de intersección de conjuntos, tenemos que

$$A \cap \overline{B} = \{x | x \in A \land x \notin B\}$$

Por lo tanto, queda demostrado que $A - B = A \cap \overline{B}$ son iguales.

- **Ejercicio 29.** Demuestra que si A es un subconjunto del conjunto universal U, entonces

  a) $A \oplus A = \emptyset$
  b) $A \oplus \emptyset = A$
  c) $A \oplus U = \overline{A}$
  d) $A \oplus \overline{A} = U$

  Respuesta: Según la definición de diferencia simétrica, denotada por $A \oplus B$, esta da como resultado un conjunto que contiene los elementos que bien están en A o bien están en B, pero no en ambos. Esta definición puede expresarse como:

  $$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

  Aplicando esta equivalencia con los conjuntos A, U, $\emptyset$ y $\overline{A}$, tenemos:

  a) $A \oplus A = \emptyset$ (nilpotencia)

  $$\begin{aligned} A \oplus A &= (A - A) \cup (A - A) \\ \text{diferencia de conj.} \quad &= \emptyset \cup \emptyset \\ \text{ley idempotente de conj.} \quad &= \emptyset \end{aligned}$$

  b) $A \oplus \emptyset = A$ (elemento neutro)

  $$\begin{aligned} A \oplus \emptyset &= (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) \\ \text{diferencia de conj.} \quad &= A \cup \emptyset \\ \text{ley identidad de conj.} \quad &= A \end{aligned}$$

c) $A \oplus U = \overline{A}$

$$\begin{aligned} A \oplus U &= (A - U) \cup (U - A) \\ \text{diferencia de conj.} \quad &= \emptyset \cup \overline{A} \\ \text{ley identidad de conj.} \quad &= \overline{A} \end{aligned}$$

d) $A \oplus \overline{A} = U$

$$\begin{aligned} A \oplus \overline{A} &= (A - \overline{A}) \cup (\overline{A} - A) \\ \text{diferencia de conj.} \quad &= A \cup \overline{A} \\ \text{ley de complemento} \quad &= U \end{aligned}$$

En este ejercicio se han utilizado las siguientes igualdades: $A - A = \emptyset$, $A - \emptyset = A$ (demostrada en el ejercicio 6e), $A - U = \emptyset$, $U - A = \overline{A}$, $A - \overline{A} = A$ y $\overline{A} - A = \overline{A}$. Demuéstrelas!

1.8 Funciones

- **Ejercicios 12 y 13.** Determina si estas funciones de los $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ son inyectivas y sobreyectivas.

  a) $f(n) = n - 1$
  b) $f(n) = n^2 + 1$
  c) $f(n) = n^3$
  d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

  Respuesta: en todos los casos en los cuales consideremos o intuyamos que la función es inyectiva o sobreyectiva, debemos demostrarlo de manera general haciendo uso de las definiciones de función inyectiva o sobreyectiva. En caso contrario, si consideramos que no cumple con alguna de esas propiedades, entonces podemos demostrarlo haciendo uso de contraejemplos.

  a) $f(n) = n - 1$
  Primero demostraremos la inyectividad. Para ello, asumamos que $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ son dos elementos cualesquiera del dominio de la función, con $z_1 \neq z_2$. Luego, si restamos 1 en ambos lados de la anterior nos queda $z_1 - 1 \neq z_2 - 1$. Es decir que si $z_1 \neq z_2$, entonces $f(z_1) \neq f(z_2)$. De esta manera mostramos que la función es inyectiva.

Para demostrar la sobreyectividad de la función, consideremos un elemento z cualquiera del codominio de la función (es decir, $z \in \mathbb{Z}$). Luego, si consideramos que la función es sobre, tenemos que mostrar que z se puede escribir como la imagen por f de algún elemento del dominio (en este caso, como imagen de algún entero). Entonces, nos preguntamos si podemos escribir $z = n - 1$ con $n \in \mathbb{Z}$. Puesto que de la ecuación anterior puedo despejar $n = z + 1$ y que el n así despejado es entero, hemos mostrado que la función es sobreyectiva.

b) $f(n) = n^2 + 1$

Demostración de inyectividad: se mostrará con un contraejemplo (C.E.) que la función no es inyectiva (la presencia del n^2 así lo hace sospechar!). Asumamos $z_1 = -1$ y $z_2 = 1$. Luego, aplicando la función a estos se tiene: $f(z_1) = 2$ y $f(z_2) = 2$. Vemos entonces que para elementos distintos del dominio, sus respectivas imágenes por la función son iguales. Luego, concluímos que f no es inyectiva.

Demostración de sobreyectividad: en este caso, se mostrará con un C.E. que la función no es sobre. Para ello, consideremos el elemento del codominio $z = 4$. Si la función fuera sobreyectiva, entonces podría escribir que $4 = n^2 + 1$ con $n \in \mathbb{Z}$. Pero despejando n de la anterior veo que $n = \sqrt{(}3)$. Pero aquí vemos que $n \notin \mathbb{Z}$. Luego la función no es sobre.

c) $f(n) = n^3$

Inyectividad: sean z_1 y z_2 dos enteros cualesquiera (elementos del dominio de la función), con $z_1 \neq z_2$. Luego podemos ver que $z_1^3 \neq z_2^3$, con lo cual se muestra que la función es inyectiva (nota: si el módulo de ambos enteros es distinto entonces es claro que el cubo de ambos será distinto. Si el módulo de ambos enteros es el mismo, para que sean distintos necesariamente deben tener distinto signo. Como la función cubo preserva el signo de su argumento, entonces las imágenes de ambos números serán distintas).

Sobreyectividad: mostraremos con un C.E. que la función no es sobreyectiva. Consideremos el elemento del codominio $z = 7$. Es posible escribir $7 = n^3$ con $n \in \mathbb{Z}$? Despejando n de la anterior tenemos que $n = \sqrt[3]{7}$ con lo cual, claramente $n \notin \mathbb{Z}$. Luego, no hemos podido encontrar ningún elemento del dominio de la función tal que su imagen por f sea igual a 7. Es decir, la función no es sobre.

d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$: para el entretiempo.

- **Ejercicio 17.** Da una fórmula explícita para una función del conjunto de los enteros al conjunto enteros positivos que sea

  a) inyectiva, pero no sobre,

  b) sobre, pero no inyectiva,

c) inyectiva y sobre,

d) ni inyectiva ni sobre.

Respuesta:

a) $f(n) = 2n + 1$ para $n \geq 0$ y $f(n) = -2n + 2$ para $n < 0$.

b) $f(n) = |n| + 1$.

c) $f(n) = 2n + 1$ para $n \geq 0$ y $f(n) = -2n$ para $n < 0$.

d) $f(n) = n^2 + 2$.

- **Ejercicio 19.** Determina si estas funciones son biyecciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

Respuesta:

a) Demostración de inyectividad. Supongamos que $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son dos elementos del dominio de la función. Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces para que la función f sea inyectiva debe cumplirse que $x_1 = x_2$.

$$\begin{array}{rc} \text{hipótesis} & f(x_1) = f(x_2) \\ & 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ \text{resto 1 a ambos lados} & 2x_1 = 2x_2 \\ \text{divido por 2 a ambos lados} & x_1 = x_2 \end{array}$$

Como $x_1 = x_2$, queda demostrado que la función es inyectiva.

Demostración de sobreyectividad. Consideremos un elemento r cualquiera del codominio de la función (es decir, $r \in \mathbb{R}$). Luego, si consideramos que la función es sobre, tenemos que mostrar que r se puede escribir como la imagen por f de algún elemento del dominio (en este caso, como imagen de algún real). Entonces, nos preguntamos si podemos escribir $r = 2x + 1$ con $x \in \mathbb{R}$. De la ecuación anterior puedo despejar $x = (r - 1)/2$ y ver que el x así despejado es real, con lo cual hemos mostrado que la función es sobreyectiva.

Como la función es inyectiva y sobreyectiva, concluímos que también es biyectiva.

b) No. La función no es inyectiva dado que $f(2) = f(-2) = 5$, pero $2 \neq -2$.

c) Sí. Demostración similar a item **a**.

d) No es inyectiva, con $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$, $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces tampoco es biyectiva.

- **Ejercicio 25.** Supongamos que g es una función de A en B y f es una función de B en C.

  a) Demuestra que si tanto f como g son funciones inyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

  b) Demuestra que si tanto f como g son funciones sobreyectivas, entonces $f \circ g$ también lo es.

Respuesta:

a) Para resolver este ejercicio utilizaremos las hipótesis (tanto f como g son inyectivas) para arribar a la conclusión.

Como f es inyectiva entonces se cumple que si $f(b_1) = f(b_2) \to b_1 = b_2$, con b_1 y b_2 en B y $f(b_1)$ y $f(b_2)$ en C (i). Del mismo modo, si g es inyectiva entonces se cumple que si $g(a_1) = g(a_2) \to a_1 = a_2$, con a_1 y a_2 en A y $g(a_1)$ y $g(a_2)$ en B (ii).

Tomando dos elementos $a_1, a_2 \in A$, y utilizando un ligero cambio de nomenclatura tal que $(f \circ g)(a_i) = f(g(a_i))$ podemos asegurar que

$$f(g(a_1)) = f(g(a_2)) \underbrace{\to}_{\text{por (i)}} g(a_1) = g(a_2) \underbrace{\to}_{\text{por (ii)}} a_1 = a_2$$

lo que demuestra la inyectividad de la composición.

b) En este caso las hipótesis son que $\forall c \exists b\, (f(b) = c)$ (i) y del mismo modo $\forall b \exists a\, (g(a) = b)$ (ii), con $a \in A$, $b \in B$ y $c \in C$.

Tomando un $c \in C$ arbitrario, por (i) sé que $\exists b \in B\ (f(b) = c)$. Luego, por (ii) sé que para dicho $b\ \exists\ a\ \in\ A\ (g(a) = b)$. De esta manera, puedo reemplazar en la primera expresión y determinar que $\exists a\ f(g(a)) = c$, quedando demostrada la sobreyectividad de la composición.

---

3 Inducción y recursividad

3.3 Inducción Matemática

- **Ejercicio 3.** Usar inducción matemática para probar que $3+3\cdot 5+3\cdot 5^2+\cdots+3\cdot 5^n = 3(5^{n+1}-1)/4$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$.

  Respuesta: podemos escribir el enunciado del ejercicio en la forma $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+ P(n)$, donde

  $$P(n) : 3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \ldots 3 \cdot 5^n = 3(5^{n+1} - 1)/4 \tag{9}$$

  A su vez, utilizando la notación de sumatoria, se puede escribir

  $$P(n) : \sum_{j=0}^{n} 3 \cdot 5^j = 3(5^{n+1} - 1)/4 \tag{10}$$

  El paso base (P.B) de la demostración corresponde a $n = 0$. En este caso, consideremos primero el lado izquierdo de $P(n)$

  $$\sum_{j=0}^{0} 3 \cdot 5^j = 3 \cdot 5^0 = 3 \tag{11}$$

  Si ahora consideramos el lado derecho de $P(n)$ para $n = 0$, se observa que $3(5^{0+1} - 1)/4 = 3(5-1)/4 = 3$. Como el lado izquierdo y el lado derecho son iguales, se concluye que se cumple el P.B.

  Para demostrar el paso inductivo, primero debemos explicitar la hipótesis inductiva (H.I) de nuestra demostración. Asumamos entonces que se cumple $P(k)$,

  $$P(k) : \sum_{j=0}^{k} 3 \cdot 5^j = 3(5^{k+1} - 1)/4 \tag{12}$$

  Queremos demostrar que entonces se cumple $P(k + 1)$

  $$P(k+1) : \sum_{j=0}^{k+1} 3 \cdot 5^j = 3(5^{k+2} - 1)/4 \tag{13}$$

  Luego comenzaremos la demostración partiendo del lado izquierdo de $P(k + 1)$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} 3 \cdot 5^j &= \\
\text{(Explicitando último término)} &= \sum_{j=0}^{k} 3 \cdot 5^j + 3 \cdot 5^{k+1} \\
\text{(Por H.I.)} &= 3(5^{k+1} - 1)/4 + 3 \cdot 5^{k+1} \\
\text{(Distributiva y sumando los dos términos)} &= \frac{3 \cdot 5^{k+1} - 3 + 4 \cdot 3 \cdot 5^{k+1}}{4} \\
\text{(Sumando los términos en } 3 \cdot 5^{k+1}) &= \frac{5 \cdot 3 \cdot 5^{k+1} - 3}{4} \\
\text{(Producto de potencias de igual base y sacando factor común 3)} &= \frac{3(\cdot 5^{k+2} - 1)}{4}
\end{aligned}
$$

que es el lado derecho de $P(k+1)$. Luego, el principio de inducción matemático nos permite afirmar que, como se cumple el paso base y el paso inductivo, entonces se cumple el enunciado del ejercicio, es decir, se cumple $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+, P(n)$.

- **Ejercicio 7.** Demuestra que $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para todo entero n positivo.

  Respuesta: Sea $P(n) : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ con $n \geq 1$.

  PASO BASE: Reemplazando con $n = 1$ en el lado izquierdo de la igualdad tenemos $1^2 = 1$. El mismo reemplazo del lado derecho nos queda $1(1+1)(2+1)/6 = 1$. Como el lado izquierdo evaluado en $n = 1$ es igual al lado derecho, también evaluado en $n = 1$, entonces queda demostrada la veracidad del paso base.

  PASO INDUCTIVO: Tomando un k arbitrario pero fijo debemos demostrar que si se cumple $P(k)$, entonces se cumple $P(k+1)$. Lo vamos a hacer a través de una demostración directa. Nuestra hipótesis inductiva consiste precisamente en asumir que $P(k)$ es verdadero. Luego, partimos de la expresión para $P(k)$

$$
\begin{aligned}
P(k): \quad & 1^2+2^2+\cdots+k^2 &&= k(k+1)(2k+1)/6 \\
\text{sumo } (k+1)^2 \text{ en ambos lados} \quad & \sum_{j=1}^{k} j^2+(k+1)^2 &&= k(k+1)(2k+1)/6+(k+1)^2 \\
\text{factor común } k+1 \text{ en el lado derecho} \quad & \sum_{j=1}^{k+1} j^2 &&= (k+1)[k(2k+1)/6+(k+1)] \\
\text{factor común } 1/6 \text{ en el lado derecho} \quad & &&= \frac{(k+1)}{6}[k(2k+1)+6(k+1)] \\
\text{desarrollando} \quad & &&= \frac{(k+1)}{6}(2k^2+7k+6) \\
\text{factorizando el polinomio de orden 2} \quad & &&= \frac{(k+1)}{6}2(k+2)(k+3/2) \\
\text{reacomodando} \quad & &&= \frac{(k+1)}{6}(k+2)(2k+3) \\
\text{reacomodando} \quad & &&= \frac{(k+1)}{6}(k+2)(2(k+1)+1) \\
\text{llegamos a } P(k+1) \quad & &&
\end{aligned}
$$

Luego, el principio de inducción matemática nos permite afirmar que, como se cumple el paso base y el paso inductivo, entonces se cumple el enunciado del ejercicio, es decir, se cumple $\forall n \in \mathbb{Z}^+, P(n)$.

- **Ejercicio 13.** Demuestra que $2^n > n^2$ para todo n entero mayor que 4.

  Respuesta: Sea $P(n)$ la proposición que afirma que $2^n > n^2$ para todo n entero mayor que 4.

  PASO BASE: Si tomamos el primer entero mayor que 4, tenemos que $P(5)$ es verdadera, ya que por un lado $2^5 = 32$ y por otro lado $5^2 = 25$. Luego vemos que el lado izquierdo de $P(5)$ es mayor que su lado derecho, cumplíendose la desigualdad.

  PASO INDUCTIVO: *Suponemos* que $P(k)$ es verdadera, esta es nuestra hipótesis inductiva (H.I). Es decir para un elemento k del dominio de discurso (en este caso un entero positivo mayor que 4), se cumple que $2^k > k^2$. Entonces *debemos demostrar* que se cumple $P(k+1)$. Para ello, planteamos o iniciamos la demostración a partir de $P(k)$

$$
\begin{aligned}
& 2^k > k^2 \\
\text{multiplicamos ambos miembros por 2} \quad & 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 \\
\text{producto de potencias de igual base} \quad & 2^{k+1} > 2 \cdot k^2
\end{aligned}
$$

Del lado izquierdo de la desigualdad anterior tenemos el lado izquierdo de la desigualdad correspondiente a $P(k+1)$. Ahora vamos a ir acotando el lado derecho de forma tal de intentar llegar al lado derecho de la desigualdad que aparece en $P(k+1)$. Para ello vamos a escribir $2 \cdot k^2 = k^2 + k^2$, con lo cual queda

$$2^{k+1} > k^2 + k^2 \tag{14}$$

Como $k > 4$, entonces $k^2 > 4k$. Luego podemos afirmar que

$$2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 4k \tag{15}$$

Pero $4k = 2k + 2k$, es decir que

$$2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 4k = k^2 + 2k + 2k \tag{16}$$

Ahora bien, si $k > 4$, entonces $2k > 8$. Luego podemos escribir que

$$2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 4k = k^2 + 2k + 2k > k^2 + 2k + 8 \tag{17}$$

Finalmente, como $8 > 1$ puedo decir

$$2^{k+1} > k^2 + k^2 > k^2 + 4k = k^2 + 2k + 2k > k^2 + 2k + 8 > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \tag{18}$$

Es decir que se cumple que $2^{k+1} > (k+1)^2$, cumpliéndose el paso inductivo.

Luego, el principio de inducción matemática nos permite afirmar que, como se cumple el paso base y el paso inductivo, entonces se cumple el enunciado del ejercicio, es decir, se cumple $\forall n \in \mathbb{Z}$, con $n > 4, P(n)$.

- **Ejercicio 20.** Demuestra utilizando el principio de inducción que 3 divide a $n^3 + 2n$ si n es un entero no negativo.

  Respuesta: Sea $P(n)$ la proposición que afirma que $n^3 + 2n$ es divisible por 3 para todo n entero no negativo.

PASO BASE: Si tomamos el primer entero no negativo, tenemos que $P(0)$ es verdadera, dado que $0^3 + 2 \cdot 0 = 0$, que es divisible por 3.

PASO INDUCTIVO: *Suponemos* que $P(k)$ es verdadera (esta será nuestra hipótesis inductiva), es decir k^3+2k es divisible por 3. Entonces *debemos demostrar* que $P(k) \to P(k+1)$. Para ello, partimos del lado izquierdo de la expresión para $P(k+1)$, es decir

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 + 2(k+1) &= (k+1)(k+1)^2 + 2k + 2 \\
&= (k+1)(k^2 + 2k + 1) + 2k + 2 \\
&= k^2(k+1) + 2k(k+1) + (k+1) + 2k + 2 \\
&= k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k + k + 1 + 2k + 2 \\
&= (k^3 + 2k) + 3k^2 + 3k + 3 \\
&= (k^3 + 2k) + 3(k^2 + k + 1)
\end{aligned}$$

que también es divisible por 3, puesto que el primer término lo es por hipótesis inductiva, mientras que el segundo lo es porque vemos que queda expresado como $3m$ con $m = k^2 + k + 1$ perteneciente a los Z. De esta manera, queda demostrado el paso inductivo.

Luego, el principio de inducción matemática nos permite afirmar que, como se cumple el paso base y el paso inductivo, entonces se cumple el enunciado del ejercicio, es decir, se cumple $\forall n \in Z_0^+, P(n)$.

- **Ejercicio 42.** Supongamos que

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

donde a y b son números reales, demuestra que

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

para todo entero n positivo.

Respuesta: Sea

$$P(n) : A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

PASO BASE: Reemplazando con $n = 1$ en el lado izquierdo de la igualdad tenemos A. El mismo reemplazo del lado derecho nos queda $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$. Debido a la propia definición de la matriz A queda demostrado el paso base.

PASO INDUCTIVO: Tomando un k arbitrario pero fijo debemos demostrar que $P(k) \to P(k+1)$. Lo vamos a hacer a través de una demostración directa. Partimos de la expresión de $P(k)$, ya que *asumimos* que es verdadera (es nuestra hipótesis inductiva)

$$\begin{aligned}
P(k): \qquad & A^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \\
\text{post-multiplicamos por } A \text{ en ambos lados} \qquad & A^k A = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} A \\
\text{producto de matrices lado izquierdo} \qquad & A^{k+1} = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \\
\text{producto matricial lado derecho} \qquad & A^{k+1} = \begin{bmatrix} a^k a & 0 \\ 0 & b^k b \end{bmatrix} \\
\text{producto potencias de igual base} \qquad & A^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{bmatrix} \\
\text{llegamos a } P(k+1) \qquad &
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado el paso inductivo.

Luego, el principio de inducción matemática nos permite afirmar que, como se cumple el paso base y el paso inductivo, entonces se cumple el enunciado del ejercicio, es decir, se cumple $\forall n \in \mathbb{Z}^+, P(n)$.

- **Ejercicio 47.** Use inducción matemática para probar que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos del conjunto universal U, entonces

$$P(n): \overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j} \tag{19}$$

Respuesta: Podemos escribir el enunciado del ejercicio en la forma $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$. Iniciamos la demostración por inducción analizando el P.B., que se corresponde al caso $n = 2$. Comenzamos analizando el lado izquierdo de $P(n = 2)$

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{2} A_j} = \overline{A_1 \cup A_2} \tag{20}$$

Por otro lado, el lado derecho de $P(n = 2)$ se puede escribir de la siguiente manera,

$$\bigcap_{j=1}^{2} \overline{A_j} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \tag{21}$$

Luego por la ley de De Morgan para conjuntos, ambos lados son iguales, con lo cual podemos concluir que se cumple el P.B.

Para mostrar el paso inductivo, identificamos primero nuestra H.I., en éste caso

$$P(k) : \overline{\bigcup_{j=1}^{k} A_j} = \bigcap_{j=1}^{k} \overline{A_j} \tag{22}$$

Luego queremos mostrar que si se cumple $P(k)$ entonces $P(k+1)$, la cual viene expresada por

$$P(k+1) : \overline{\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j} = \bigcap_{j=1}^{k+1} \overline{A_j} \tag{23}$$

Partiendo del lado izquierdo de la anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\overline{\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j} &= \\
\text{(Explicitando la unión con el } A_{k+1}\text{)} &= \overline{(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) \cup A_{k+1}} \\
\text{(Aplicando ley de De Morgan para conjuntos)} &= \overline{(\bigcup_{j=1}^{k} A_j)} \cap \overline{A_{k+1}} \\
\text{(Aplicando la H.I.)} &= \bigcap_{j=1}^{k} \overline{A_j} \cap \overline{A_{k+1}} \\
\text{(Asociando el último conjunto con los demás)} &= \bigcap_{j=1}^{k+1} \overline{A_j}
\end{aligned}$$

con lo cual llegamos al lado derecho de $P(k+1)$. Luego, por el principio de inducción matemático podemos afirmar que, como se cumple el paso base y el paso inductivo, entonces se cumple el enunciado del ejercicio, es decir, se cumple $\forall n \in \mathbb{Z}^+, P(n)$.

3.4 Definiciones recursivas e inducción estructural

- **Ejercicio 8.** Da una definición recursiva para la sucesión a_n, $n = 1, 2, 3 \ldots$, si

  a) $a_n = 4n - 2$
  b) $a_n = 1 + (-1)^n$
  c) $a_n = n(n + 1)$
  d) $a_n = n^2$

  Respuesta: Para encontrar una expresión recursiva de cada sucesión debemos determinar como se relaciona el término n-ésimo con los predecesores.

  a) Una estrategia es listar los primeros elementos de la sucesión para tratar de encontrar algún patrón. Reemplazando con n=1,2, etc, tenemos, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 10$, $a_4 = 14$, con lo que ya podemos predecir que el término actual de la sucesión es el anterior más cuatro, lo que es lo mismo que $a_n = a_{n-1} + 4$, con el paso base $a_1 = 2$.
  b) Listando los primeros elementos $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2$, de lo cual podemos deducir que $a_n = a_{n-2}$ y necesitaremos los pasos base $a_1 = 0$ y $a_2 = 2$.
  c) Listando los primeros elementos $a_1 = 2$, $a_2 = 6$, $a_3 = 12$, $a_4 = 20$, $a_5 = 30$, pero el patrón no es tan evidente. Una estrategia más robusta es analizar la diferencia (o razón, según el caso) entre dos términos sucesivos. Para ello planteamos

  $$a_n - a_{n-1} = n(n + 1) - (n - 1)n = n(n + 1 - (n - 1)) = 2n$$

  de donde podemos despejar $a_n = 2n + a_{n-1}$, con el paso base $a_1 = 2$.
  d) Con el mismo planteo que el incíso anterior se puede arribar a $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, con el paso base $a_1 = 1$.

- **Ejercicio 13.** Demuestra que $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$ para todo entero positivo n.

  Respuesta: Utilizaremos el PIM para la demostración. Además es importante recordar la definición de la sucesión de Fibonacci:

  $$f_n = \begin{cases} 0,\, n = 0 \\ 1,\, n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2},\, n \geq 2 \end{cases}$$

  PASO BASE: Reemplazando con $n = 1$ en el lado izquierdo de la igualdad tenemos f_1, que por definición de Fibonacci es $f_1 = 1$. El mismo reemplazo del lado derecho nos queda f_2, donde $f_2 = 1$ también por definición de Fibonacci. La igualdad demuestra el paso base.

PASO INDUCTIVO: Tomando un k arbitrario pero fijo debemos demostrar que $P(k) \to P(k+1)$. Lo vamos a hacer a través de una demostración directa, por lo cual nuestra hipótesis inductiva consiste en asumir que se cumple $P(k)$ y partir de allí

$P(k)$	$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2k-1}$	$= f_{2k}$
sumamos a ambos lados el término $f_{2(k+1)-1}$	$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2(k+1)-1}$	$= f_{2k} + f_{2(k+1)-1}$
manipulando índices en el lado derecho	$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2(k+1)-1}$	$= f_{2k} + f_{2k+1}$
utilizando la definición de Fibonacci	$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2(k+1)-1}$	$= f_{2k+2}$
manipulando índices	$f_1 + f_3 + \cdots + f_{2k-1} + f_{2(k+1)-1}$	$= f_{2(k+1)}$
llegamos a $P(k+1)$	$q.e.d$	

con lo cual demostramos que se cumple el paso inductivo.

Luego, por el principio de inducción matemática podemos afirmar que, como se cumple el paso base y el paso inductivo, entonces se cumple el enunciado del ejercicio, es decir, se cumple $\forall n \in \mathbb{Z}^+, P(n)$.

- **Ejercicio 17.** Determinar el número de divisiones realizadas por el algoritmo de Euclides para encontrar el máximo común divisor de los números de Fibonacci f_n y f_{n+1}, donde n es un entero no negativo. Verifique su respuesta utilizando inducción matemática.

---

2 Enteros y sucesiones

2.4 Enteros y división

- **Ejercicio 9.** ¿Cuál es el cociente y el resto cuando

  a) 19 se divide entre 7?

  b) -111 se divide entre 11?

  c) 789 se divide entre 23?

  d) 1.001 se divide entre 13?

  e) 0 se divide entre 19?

  f) 3 se divide entre 5?

g) -1 se divide entre 3?

h) 4 se divide entre 1?

Respuesta: Aplicando el algoritmo de la división, podemos expresar el dividendo a como una suma entre el divisor d multiplicado por el cociente q y el resto r, es decir $a = dq + r$.

Para obtener el cociente q de una división, hay que aplicar el operador **div**, el cual se define como $q = \lfloor a/d \rfloor$.

Para obtener el resto r de una división, podemos despejar r del algoritmo de la división: $r = a - dq$, o bien utilizando una de las definiciones del operador módulo: $r = a - (d \cdot \mathbf{int}(a/d))$, siendo **int** la parte entera de la división.

a) Si $a = 19$ y $d = 7$, entonces $q = a\ \mathbf{div}\ d = 19\ \mathbf{div}\ 7 = 2$ y $r = a\ \mathbf{mod}\ d = 19\ \mathbf{mod}\ 7 = 5$. Por lo tanto, $19 = 2 \cdot 7 + 5$.

b)

c)

d)

e)

f)

g) Si $a = -1$ y $d = 3$, entonces $q = -1\ \mathbf{div}\ 3 = -1$ y $r = -1\ \mathbf{mod}\ 3 = 2$. Por lo tanto, $-1 = (-1) \cdot 3 + 2$.

h) algoritmos

- **Ejercicio 11.** Obtén la descomposición en factores primos de cada uno de estos enteros

a) 88

b) 126

c) 729

d) 1.001

e) 1.111

f) 909.090

Respuesta: Para calcular la descomposición de un entero en producto de primos, primero se divide dicho entero por los primeros primos sucesivos, comenzando por el 2.

a) $88/2 = 44$, $44/2 = 22$, $22/2 = 11$. Como 11 es un número primo, el procedimiento se ha completado. Entonces $88 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 2^3 \cdot 11$.

b) $126/2 = 63$, $63/3 = 21$, $21/3 = 7$. Como 7 es un número primo, el procedimiento se ha completado. Entonces $126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

c)

d)

e)

f)

- **Ejercicios 29 y 31.** Cuáles son los mcm y mcd de los siguientes pares de enteros?

  a) $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$, $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9$

  b) $11 \cdot 13 \cdot 17$, $2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3$

  Respuesta: dada la descomposición en factores primos de dos enteros a y b de la siguiente manera

$$a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n} \tag{24}$$
$$b = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_n^{b_n} \tag{25}$$

  los $\text{mcm}(a, b)$ y el $\text{mcd}(a, b)$ se pueden calcular como

$$\text{mcm}(a, b) = p_1^{\max(a_1,b_1)} \cdot p_2^{\max(a_2,b_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\max(a_n,b_n)} \tag{26}$$
$$\text{mcd}(a, b) = p_1^{\min(a_1,b_1)} \cdot p_2^{\min(a_2,b_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\min(a_n,b_n)} \tag{27}$$

  Aplicando las ecuaciones anterior a los pares de enteros dados, calculamos primero los mcm:

  a) $\text{mcm}(3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3, 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9) = 2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^9 \cdot 7^3$

  b) $\text{mcm}(11 \cdot 13 \cdot 17, 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3) = 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$

  y a continuación los mcd:

  a) $\text{mcd}(3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3, 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9) = 3^5 \cdot 5^3$

  b) $\text{mcd}(11 \cdot 13 \cdot 17, 2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^5 \cdot 7^3) = 1$

- **Ejercicio 50.** ¿Qué sucesión de números pseudoaleatorios se genera utilizando el generador de congruencia lineal $x_{n+1} = (5x_n + 3) \bmod 7$, con la semilla $x_0 = 3$ (enunciado modificado).

  Respuesta: Partiendo de la semilla dada, reemplazamos en la expresión y obtenemos:

  $$x_1 = (5.3 + 3) \bmod 7 = 4$$

  Realizando el mismo reemplazo con el último resultado obtenido, se logra la secuencia: $x = 3, 4, 2, 6, 5, 0, 3, 4, 2, 6, 5, \ldots$. Notar que se generan seis números en forma aleatoria y luego el ciclo se repite (el 1 nunca aparece).

- **Ejercicio 53.** Cifra el mensaje 'NO PASAR' traduciendo las letras a números, aplicando la función de cifrado dada y pasando los números obtenidos a letras (utilizar alfabeto español de 27 letras).

  Extra: Determina cuales son funciones de cifrado que admiten descifrado y cuales no.

  a) $f(p) = (p + 3) \bmod 27$
  b) $f(p) = (p + 13) \bmod 27$
  c) $f(p) = (3p + 7) \bmod 27$

  Respuesta: En primer lugar convertimos letras a números, por lo que el mensaje 'NO PASAR' queda como 1315 1600190018. Notar para que no haya ambigüedades, cada letra se representa por dos dígitos, completando con ceros (zero-padding) cuando sea necesario. De a pares de dígitos evaluamos la función de cifrado obteniendo el mensaje a enviar.

  a) 1618 1903220321 $\rightarrow$ PR SDVDU. Admite descifrado utilizando la función inversa $f^{-1}(p) = (p - 3) \bmod 27$
  b) 2601 0213051304 $\rightarrow$ ZB CNFNE. Admite descifrado utilizando la función inversa $f^{-1}(p) = (p - 13) \bmod 27$
  c) 1925 0107100707 $\rightarrow$ SY BHKHH. No admite descrifrado ya que f no es inyectiva. Ej: $f(\text{A}) = f(\text{R})$ con A$\neq$R, por lo que no admite inversa.

2.5 Enteros y algoritmos

- **Ejercicio 21.** Utilice el algoritmo de Euclides para encontrar

  a) $\text{mcd}(12, 18)$

b) mcd(111, 201)

c) mcd(1001, 1331)

d) mcd(12345, 54321)

Respuesta: el algoritmo de Euclides se basa en el lema 1 de la pág.178 del libro de Rosen, 5ta Ed., el cual enuncia: sea $a = bq + r$, donde a, b, q y r son enteros. Luego, el $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r)$. Se debe tener en cuenta que el $\text{mcd}(a, b)$ *es el último resto no nulo* calculado por la aplicación reiterada de la igualdad mencionada por este lema.

Aplicando entonces el algoritmo de Euclides se tiene,

a) $\text{mcd}(12, 18) = \text{mcd}(18, 12) = \text{mcd}(12, 6) = 6$.
Expandiendo cada uno de los pasos a partir del algoritmo de la división se tiene:

$$\begin{aligned} 12 &= 18.0 + 12 \\ 18 &= 12.1 + 6 \\ 12 &= 6.2 + 0 \end{aligned}$$

b) $\text{mcd}(111, 201) = \text{mcd}(111, 90) = \text{mcd}(90, 21) = \text{mcd}(21, 6) = \text{mcd}(6, 3) = 3$.
Expandiendo cada uno de los pasos a partir del algoritmo de la división se tiene:

$$\begin{aligned} 111 &= 201.0 + 111 \\ 201 &= 111.1 + 90 \\ 111 &= 90.1 + 21 \\ 90 &= 21.4 + 6 \\ 21 &= 6.3 + 3 \\ 6 &= 3.2 + 0 \end{aligned}$$

c) mcd(1001, 1331)

d) mcd(12345, 54321)

---

4 Conteo

4.1 Fundamentos de combinatoria

- **Ejercicio 3.** Un cuestionario se compone de 10 preguntas, cada una de las cuales tiene cuatro posibles respuestas.

a) ¿De cuántas formas puede contestar un estudiante al cuestionario si responde a todas las preguntas?

b) ¿De cuántas formas puede contestar un estudiante al cuestionario si puede dejar preguntas sin contestar?

Respuesta:

a) Mi tarea de responder el cuestionario la puedo separar en 10 tareas sucesivas, que son responder cada pregunta por separado. En este sentido, la primer pregunta tiene 4 posibles respuestas, y por cada una de ellas, hay 4 formas diferentes de responder la segunda, etc. Siguiendo este razonamiento para todas las preguntas, tenemos que la cantidad total de formas de responder el cuestionario es: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 4 = 4^{10} = 1048576$.

b) Usando el mismo razonamiento que en el caso anterior, podemos considerar que la *no respuesta* es una posibilidad más para cada pregunta, por lo tanto, para cada una de ellas tenemos 5 posibles respuestas en lugar de 4. Luego, la cantidad total de formas diferentes de responder el cuestionario es: $5^{10} = 9765625$

- **Ejercicio 15.** ¿Cuántas cadenas de letras minúsculas existen de longitud 4 o menor?

  Respuesta: Las cadenas de longitud cuatro se puedo calcular fácilmente. Si considero las formas que tengo de elegir la primer letra de la cadena, éstas son 26 (el total de letras del alfabeto sin contar la ñ). De la misma manera puedo elegir la segunda. Como no tengo restricción de que sean distintas, también tengo 26 formas de hacerlo. Siguiendo este razonamiento y aplicando la regla del producto tengo $26^4 = 456976$ posibles cadenas de letras de longitud 4. Ahora bien, para determinar todas las cadenas de longitud 4 o menor, debo contar las cadenas de longitud 3 (26^3), de longitud 2 (26^2), de longitud 1 (26) y la cadena vacía. Como todas ellas son distintas, aplico regla de la suma para calcular el total. Esto es: $\sum_{i=0}^{4} 26^i = 1+26+676+17576+456976 = 475255$.

- **Ejercicio 16.** ¿Cuántas cadenas de cuatro letras minúsculas hay que contengan la letra x?

  Respuesta: Es complicado pensar en contar todas las cadenas posibles con la letra x, porque para no repetir cadenas, tendría que pensar en aquellas que contienen una sóla x, las que contienen 2, las que contienen 3 y la cadena $xxxx$. Esto resulta un tanto largo y tedioso. Pensemos otra forma más fácil. En el Ejercicio 15 vimos que era fácil contar todas las cadenas de longitud 4. En ellas se encuentran las que contienen y las que no contienen a la letra x. Si se pudiera contar las que *no* contienen a la x, con una simple resta solucionamos el problema. Si sacamos la letra x del alfabeto, nos quedan 25 posibles letras, con las cuales puedo formar todas las posibles cadenas que no contengan a la x. Esto se hace, aplicando regla del producto, de 25^4 formas. Finalmente, del total de cadenas de longitud 4, le restamos aquellas que no contienen la letra x: $26^4 - 25^4 = 66351$.

- **Ejercicio 27.** Cuántas chapas patentes se pueden fabricar usando dos o tres letras, seguidas de dos o tres dígitos? Consideramos que las letras son 26.

  Respuesta: comenzaremos contando las patentes de dos letras seguidas de dos dígitos. La primera letra se puede seleccionar de 26 formas distintas. Como en las patentes las letras se pueden repetir, entonces la segunda letra también la puedo seleccionar de 26 formas distintas. Pasando luego a los dígitos, tanto al primero como al segundo los puedo seleccionar de 10 formas distintas. Ahora bien, debo aplicar la regla del producto ya que por cada una de las letras que puedo seleccionar para la primera, tengo 26 posibilidades para la segunda, contra 10 posibilidades para el primer dígito y 10 para el segundo dígito. De esta manera, para las patentes de dos letras y dos dígitos, la cantidad que puedo generar es $n_1 = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$.

  Para el caso de patentes que comienzan con dos letras seguidas de tres dígitos, aplicando un razonamiento análogo concluimos que se pueden generar $n_2 = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

  De manera similar, cuando consideramos patentes que comienzan con tres letras seguidas de dos dígitos, la cantidad que podemos generar es $n_3 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$.

  Finalmente, para el caso de patentes que comienzan con tres letras seguidas de tres dígitos, la cantidad que podemos generar es $n_4 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

  Ahora bien, es posible sumar las cantidades n_1, n_2, n_3 y n_4 para dar la respuesta final? Es decir, podemos aplicar la regla de la suma para afirmar que la respuesta final es $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$?

  Sí, podemos sumar sin mayores complicaciones porque las patentes contadas en n_1, n_2, n_3 y n_4 pertenecen a conjuntos disjuntos. Luego la respuesta final es $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

- **Ejercicio 29.** Cuántas cadenas de ocho letras hay

  a) que no contienen vocales, si las letras se pueden repetir?

     Respuesta: debemos contar en cada caso de cuántas formas podemos elegir cada una de las letras de la cadena. Puesto que la cadena de 8 letras no puede contener vocales y las letras se pueden repetir, entonces a cada una de las letras la voy a poder seleccionar de $26 - 5 = 21$ formas distintas. Luego, aplicando la regla del producto, vemos que el total de cadenas de 8 letras sin vocales son 21^8.

  b) que no contienen vocales, si las letras no se pueden repetir?

     Respuesta: en este caso, además de no contener vocales en la cadena, las letras no se pueden repetir. Entonces, a la primera letra la puedo elegir de 21 formas distintas, a la segunda de 20, a la tercera de 19, y así hasta completar la cadena. Luego, aplicando la regla del producto, podemos afirmar que el total de cadenas de éste tipo serán $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14$.

c) que comienzan con una vocal, si las letras se pueden repetir?

Respuesta: se plantea primero ubicar a la vocal en la primera posición de la cadena. Luego, en las restantes 7 posiciones puedo elegir una letra cualquiera de entre las 26 que tiene el alfabeto, ya que las letras se pueden repetir. Aplicando la regla del producto, esto nos daría que el número de cadenas es 26^7. Pero a éste número debemos multiplicarlo por 5, ya que las posibilidades de elegir la vocal que ocupa la primera posición son 5. Finalmente, la respuesta es $5 \cdot 26^7$.

d) que comienzan con una vocal, si las letras no se pueden repetir?

Respuesta: este caso es similar al anterior, excepto porque las letras no se pueden repetir. Entonces, si ubico una vocal en la primera posición, tengo que tener en cuenta que esa vocal no puede volver a ser usada en el resto de la cadena. Por lo tanto, a la segunda letra de la cadena la voy a poder elegir de 25 formas distintas, a la tercera de 24, y así hasta completar la cadena. Aplicando la regla del producto nos queda $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19$. Como a la vocal que ubico en la primera posición la puedo seleccionar de 5 formas distintas, entonces el resultado final será $5 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19$.

e) que contienen *al menos* una vocal, si las letras se pueden repetir?

Respuesta: una forma de plantear el problema consiste en contar todas las cadenas de 8 letras admitiendo la repetición de las mismas (estas son 26^8) y a ése número restarle la cantidad de cadenas de 8 letras, admitiendo también la repetición de las mismas, pero que no contienen vocales (las cuales son 21^8). De esta manera, si al total de cadenas con letras repetidas le restamos las que no tienen vocales, el conjunto final que estamos considerando es el de cadena de 8 letras, con letras repetidas y que contienen al menos una vocal. La respuesta final es $26^8 - 21^8$.

f) que contienen *exactamente* una vocal, si las letras se pueden repetir?

Respuesta: en este caso, la diferencia con el ejercicio anterior es que la cadena de 8 letras debe contener *exactamente una vocal*. Lo que se plantea, en primera instancia, es colocar la vocal en la primera posición de la cadena. Luego, en las restantes posiciones puedo elegir 21 letras (porque admito la repetición de letras que no sean vocales). Como a la única vocal de la cadena la puedo elegir de 5 formas distintas, entonces aplicando la regla del producto puedo afirmar que tengo $5 \cdot 21^7$ formas de armar cadenas con exactamente una vocal en la primera posición.

Ahora bien, si coloco a la vocal en la segunda posición de la cadena, entonces puedo repetir el razonamiento anterior y tendría $5 \cdot 21^7$ formas de armar cadenas con una única vocal en el segundo lugar.

Se puede ver que desplazando la vocal de a una posición hasta el final de la cadena, el razonamiento expuesto se repite. Como las cadenas tiene 8 letras, entonces esta situación se repite 8 veces.

Como el conjunto de cadenas que tienen una vocal en la primera posición es disjunto con aquél de cadenas con una vocal en la segunda posición y así con el resto de cadenas que tienen exactamente una vocal en las otras posiciones de la cadena, puedo aplicar la regla de la suma. Como el número de cadenas que tengo en cada conjunto es el mismo, entonces directamente multiplico por 8. De esta forma, la respuesta final es $8 \cdot 5 \cdot 21^7$.

g) que comienzan con la letra X, contienen al menos una vocal, si las letras se pueden repetir?

Respuesta: para hacer en clase.

h) que comienzan y terminan con la letra X, contienen al menos una vocal, si las letras se pueden repetir?

Respuesta: para hacer en clase.

- **Ejercicio 33.** Cuántas funciones hay entre el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ donde n es un entero positivo, y el conjunto $\{0, 1\}$.

a) que sean inyectivas?

b) que asignen el 0 tanto a 1 como a n?

c) que asignen el 1 a exactamente uno de los enteros positivos menores que n?

Respuesta: Primero debemos recordar que las funciones son asignaciones a cada elemento del dominio (el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$), de un único elemento del codominio (el conjunto $\{0, 1\}$). Esto puede ser representado a partir de una cadena de n bits donde cada posición indica la asignación para dicho elemento del dominio. Por ejemplo: f(1) = 1, f(2) = 0, f(3) = 0, puede ser representada por la cadena 100. En este ejercicio, además cada respuesta debe ser evaluada dependiendo del número n de elementos del dominio.

a) Para que una función sea inyectiva, dos elementos distintos del dominio deben tener imágenes distintas en el codominio. Con esto podemos afirmar que no hay funciones inyectivas para $n > 3$. Con $n = 1$ hay dos posibilidades: la cadena 0 (f(1) = 0) o la cadena 1 (f(1) = 1), mientras que para $n = 2$ hay otras dos posibilidades: la cadena 01 o la cadena 10.

b) dado que tenemos asignaciones prefijadas, sólo queda decidir las asignaciones de los bits libres, para los cuales tenemos dos alternativas. Luego aplicando la regla del producto:

$$\left. 0 \underbrace{\_}_{2} \underbrace{\_}_{2} \cdots \underbrace{\_}_{2} 0 \right\} = 2^{n-2}$$

se encuentra que hay 2^{n-2} funciones posibles.

c) En este caso tenemos una única asignación libre en la posición n (la última). Para el resto de los bits sólo podemos elegir a quien asignarle el único 1 disponible, definiendo el resto de los bits como 0. Para esto último tenemos $n-1$ posiciones elegibles. Aplicamos finalmente la regla del producto y se tienen $2(n-1)$ funciones posibles.

$$\left. \underbrace{\_\ \_ \cdots}_{n-1} \underbrace{\_}_{2} \right\} = 2(n-1)$$

- **Ejercicio 39.** ¿De cuántas maneras puede un fotógrafo de boda ordenar un grupo de 6 personas si

  a) los novios deben salir juntos en la foto?

  b) los novios no pueden salir juntos en la foto?

  c) la novia debe salir en algún puesto a la izquierda del novio?

Respuesta: Representamos el ordenamiento en la foto a partir de cadenas.

a) Dado que los novios deben estar juntos, ellos ocuparían una única posición en el ordenamiento, por lo que se puede simplificar el problema en ordenar 5 posiciones. Para el puesto de más a la izquierda tenemos 5 opciones para elegir a la "persona", para el siguiente tenemos 4 posibilidades (una persona ya fue ubicada), luego tendremos 3 opciones y así sucesivamente hasta completar las 5 posiciones. Dado que la tarea de ordenar el grupo se puede dividir en las tareas consecutivas de ordenar cada persona, aplicando la regla del producto obtenemos la cantidad de posibles fotos bajo esta configuración:

$$\left. \underbrace{\_}_{5} \underbrace{\_}_{4} \underbrace{\_}_{3} \underbrace{\_}_{2} \underbrace{\_}_{1} \right\} = 5! = 120$$

Pero además, este número debe multiplicarse por 2 ya que la partícula (novio-novia) puede ordenarse de dos maneras, con el novio a la izquierda de la novia y viceversa. Luego, el resultado final es $2 * 5! = 240$.

b) En este caso podemos utilizar el principio de inclusión exclusión. Primero consideramos (incluimos) todos los posibles ordenamientos para la foto: con el mismo análisis del inciso anterior se puede ver que hay 6! ordenamientos posibles. Luego quitamos (excluimos) aquellos donde los novios están juntos (en el inciso anterior vimos que eran $2*5!$), y nos quedan sólo los ordenamientos donde los novios están separados, esto es: $6! - 2*5! = 720 - 240 = 480$.

c) Para cada uno de los ordenamientos posibles siempre podemos encontrar un homólogo (también listado entre los ordenamientos posibles) cuya única modificación sea intercambiar las posiciones del novio y de la novia entre sí. En un caso la novia estará a la derecha y en el otro a la izquierda del novio. De esta manera podemos asegurar que en la mitad de los ordenamientos la novia estará a la izquierda del novio, esto es $720/2 = 360$ ordenamientos (o fotos) posibles.

4.2 Principios del palomar

- **Ejercicio 5.** Mostrar que en un grupo de 5 enteros (no necesariamente consecutivos) hay dos con el mismo resto cuando se los divide por 4.

  Respuesta: se aplicará el principio del palomar teniendo en cuenta que el enunciado del ejercicio nos está preguntando *"si hay dos con el mismo resto"*. Haciendo una analogía con los objetos (N) y las cajas (k), podemos observar en el enunciado que los objetos que voy a seleccionar son los 5 enteros, es decir que $N = 5$. Por otro lado, podemos también observar que las cajas de nuestro problema son los posibles restos que puedo llegar a computar cuando divido a un entero cualquiera por 4. Estos restos son 0, 1, 2 y 3. Es decir que la cantidad de cajas es $k = 4$. Luego, si tengo 5 objetos y 4 cajas, el principio del palomar *garantiza* que hay al menos una caja con dos o más objetos. Es decir, hay al menos dos o más enteros que al dividirlos por 4, tienen el mismo resto.

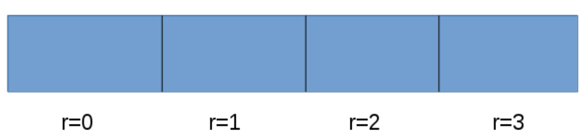


Figure 1: Representación esquemática del problema 5. Las cajas son los posibles restos de hacer la división de un entero por 4.

- **Ejercicio 10.** Sea (x_i, y_i) con $i = 1, 2, 3, 4, 5$ un conjunto de puntos distintos del plano con coordenadas enteras. Considérese el conjunto de segmentos que une a cada pareja de ellos. Demuestra que, para alguno de dichos segmentos, el punto medio tiene coordenadas enteras.

Respuesta: Para resolver este problema es conveniente listar varios argumentos sucesivos:

- El punto medio del segmento que une los puntos i y j se define como $(\frac{x_i+x_j}{2}, \frac{y_i+y_j}{2})$.
- Si dicho punto medio tiene coordenadas enteras, entonces tanto $(x_i + x_j)$ como $(y_i + y_j)$ son pares.
- La suma de dos enteros es par sólo si o bien ambos enteros son pares o bien ambos enteros son impares.
- Un punto de coordenadas enteras puede clasificarse de acuerdo a la paridad de sus componentes:
  * (par, par)
  * (par, impar)
  * (impar, par)
  * (impar, impar)

  en donde puede observarse que hay solo 4 posibilidades

De lo argumentado podemos decir entonces que para que el punto medio de uno de los segmentos tenga coordenadas enteras, entonces los puntos que une deben tener la misma paridad de sus componentes. Dado que hay 4 posibilidades, asumimos que tenemos $k = 4$ cajas posibles para ubicar los $N = 5$ puntos disponibles, por lo que el principio del palomar garantiza que al menos $\lceil N/k \rceil = \lceil 5/4 \rceil = 2$ (dos) de ellos estarán en la misma caja, esto es, tendrán la misma paridad componente a componente. Ergo, garantizamos que habrá al menos un segmento (el que une esos dos puntos) cuyo punto medio tendrá coordenadas enteras.

- **Ejercicio 13.**

  a) Mostrar que si 5 enteros son seleccionados de entre los 8 primeros enteros positivos, entonces debe haber algún par de estos enteros que sume 9.

     Respuesta: el enunciado del ejercicio nos pide mostrar que *"si seleccionamos 5 enteros entre el 1 y el 8, entonces hay un par que suma 9"*. En este caso, la cantidad de objetos que voy a seleccionar son los 5 enteros, es decir que $N = 5$. Por otro lado, podemos también observar que las cajas de nuestro problema son los posibles pares de enteros tal que seleccionados entre el 1 y el 8, su suma sea igual a 9. Vemos que estos pares son (1,8), (2,7), (3,6) y (4,5). Es decir que la cantidad de cajas del problema es $k = 4$. Luego, si tengo 5 objetos y 4 cajas, el principio del palomar *garantiza* que hay al menos una caja con dos o más objetos. Es decir, hay al menos un par que suma 9.

  b) Se verifica la conclusión del ítem anterior si el número de enteros seleccionados es 4 en vez de 5?

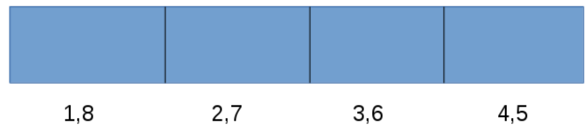


Figure 2: Representación esquemática del problema 13. Las cajas son los posibles pares de enteros entre el 1 y el 8 tales que su suma es igual a 9.

Respuesta: No se verifica la conclusión anterior si se seleccionan 4 enteros. Por ejemplo: se seleccionan los enteros 2, 3, 4, 8. Con ninguno de ellos logro "completar" un par que sume 9.

- **Ejercicio 32.** Una red de ordenadores está formada por seis equipos. Cada ordenador está conectado directamente al menos a otro. Demuestra que hay al menos dos ordenadores en la red que tienen el mismo número de conexiones.

  Respuesta: Del enunciado se desprende que la cantidad de objetos a repartir es $N = 6$, el número de ordenadores en la red. Las cajas en este problema representan la cantidad de conexiones del ordenador. Cada ordenador está conectado con al menos otro ordenador, como máximo una única conexión con c/u, y no puede conectarse consigo mismo. De allí se desprende que $k = 5$ (1 a 5 conexiones). Por el principio del palomar podemos garantizar que habrá al menos una caja que tendrá al menos $\lceil N/k \rceil = \lceil 6/5 \rceil = 2$ (dos) objetos, esto es, garantiza que al menos un par de ordenadores tendrá el mismo número de conexiones.

4.3 Permutaciones y Combinaciones

- **Ejercicio 9.** ¿Cuántas posibilidades hay para las tres primeras posiciones en una carrera de caballos con doce participantes si són posibles todos los órdenes de llegada y no hay empates?

  Respuesta: Es posible responder mediante un proceso de dos tareas que consiste en, primero seleccionar los integrantes del podio y luego sus posibles ordenamientos. Esto es, selecciono 3 caballos del grupo de 12, lo que puedo hacer de C(12,3) formas, y luego genero todos los posibles ordenamientos del podio, para lo cual tengo P(3,3) formas. Entonces, por la regla del producto, el total es C(12,3).P(3,3) = 220 . 6 = 1320.

  Notar que es posible pensarlo directamente a partir de una permutación sin repetición donde selecciono del conjunto de caballos uno a uno (*en orden*) los integrantes del podio. Esto lo puedo hacer de P(12,3)=1320 formas distintas.

  Ambos planteos son válidos ya que respetan la equivalencia C(12,3) = P(12,3)/P(3,3).

- **Ejercicio 11.** ¿Cuántas cadenas de 10 bits contienen

    a) exactamente 4 unos?

    b) como mucho 4 unos?

    c) al menos 4 unos?

    d) una cantidad igual de unos y ceros?

    Respuesta:

    a) Como deseo que cada cadena tenga *exactamente* 4 unos, lo que diferencia una cadena con estas características de otra, es la ubicación de estos unos. Por ejemplo, la cadena $C_1 = 0110010001$ tiene unos en las posiciones 1, 5, 8 y 9 de la cadena, y la cadena $C_2 = 1001110000$ tiene unos en las posiciones 5, 6, 7 y 10. Entonces, nuestro problema es *elegir* esas posiciones de todas las formas posibles para ubicar los 4 unos. Es decir, seleccionar 4 ubicaciones de los unos de entre 10 posibles. Como no interesa el orden de esas ubicaciones (la cadena $C2$ tiene unos en 10, 7, 5 y 6 o también se pude decir en 7,10, 6 y 5), aplicaremos combinatoria. Entonces, la selección de las 4 posiciones para los bits 1's de entre 10 posibles se realiza de C(10,4) = 210 formas diferentes. Luego, hay 210 cadenas que contienen exactamente 4 unos.

    b) Realizando el mismo razonamiento que en la parte a), podemos contar las cadenas que contienen exactamente cuatro 1's, tres 1's, dos 1's, un 1 y ninguno. Como todas esas cadenas son diferentes en cada subconjunto de cadenas, aplicamos la regla de la suma: C(10,4) + C(10,3) + C(10,2) + C(10,1) + C(10,0) = 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 386 cadenas de longitud 10 con a lo sumo 4 unos.

    c) Podríamos usar el mismo razonamiento que en el caso anterior, y contar todas las cadenas con 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 unos y sumarlas. Parece algo tedioso. Entonces, utilizaremos algún resultado ya conocido. Sabemos la cantidad total de cadenas de 10 bits (sin importar la cantidad de 1's que tenga), éstas son 2^{10}. Si a esa cantidad le restamos las cadenas que no queremos (las que tienen tres 1's, dos 1's, un 1 y ningún 1) resolvemos el problema, ya que esas cantidades las calculamos en el item anterior. Entonces, la cantidad de cadenas de longitud 10 con al menos cuatro 1's es: 2^{10} - (C(10,3) + C(10,2) + C(10,1) + C(10,0)) = 1024 - (120 + 45 + 10 + 1) = 848.

    d) de tarea.

- **Ejercicio 21.** ¿Cuántas permutaciones de las letras $ABCDEFG$ contienen

    a) la cadena BCD?

b) la cadena $CFGA$?

c) las cadenas BA y GF?

d) las cadenas ABC y DE?

e) las cadenas ABC y CDE?

f) las cadenas CBA y BED?

Respuesta:

a) Si BCD debe ser una parte de la cadena de letras, la podemos pensar como una *superletra* y considerar 5 elementos para permutar. Estos son, las letras A, E, F y G y la superletra BCD. Por lo tanto tenemos P(5,5)=5! cadenas diferentes.

b) Similar al anterior.

c) Ahora tenemos dos *superletras* a considerar, y 3 letras simples. El cálculo es como antes.

d) Similar a los anteriores.

e) En este caso, para que pueda contener las dos *superletras*, ambas deben unirse porque no puedo repetir letras, por lo tanto, considero una nueva *superletra* $ABCDE$ y las dos letras restantes. El cálculo queda como tarea.

f) Observe que aquí no se pueden pegar las dos subcadenas porque se superpondrían las letras A con la E. Es decir, la letra B no puede estar antes de la A y de la E al mismo tiempo, por lo tanto, no hay cadenas que contengan estas dos subcadenas.

4.4 Coeficientes Binomiales

Teorema del binomio: sean x y y variables, y sea $n \in Z_0^+$. Entonces se cumple

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

- **Ejercicio 7.** Cuál es el coeficiente de x^9 en la expansión de $(2-x)^{19}$?

  Respuesta: teniendo en cuenta la expresión dada por el teorema del binomio, podemos decir que para el término x^9, su coeficiente va a estar dado de la siguiente manera. Si identificamos a x como la segunda variable en la expresión del teorema, vemos que el exponente al cual está elevada es j, es decir que en nuestro caso $j = 9$. Luego, dado que $n = 19$, podemos afirmar que $n - j = 10$. Además, como x está restando en el binomio, entonces se debe tener en cuenta el signo menos que la afecta. De esta manera se tiene que el coeficiente de x^9 es

$$\binom{19}{9}2^{10}\cdot(-1)^9$$

- **Ejercicio 21.** Mostrar que si n y k son enteros, con $1 \leq k < n$, entonces se cumple

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

utilizando

a) un argumento combinatorio (ayuda: muestre que ambos lados de la identidad cuentan el número de formas de seleccionar un subconjunto de k elementos de un conjunto de n elementos, y luego un elemento de este subconjunto de k elementos.)

b) una demostración algebraica.

a) **Respuesta:** teniendo en cuenta la ayuda proporcionada por el libro, podemos realizar el siguiente planteo. En primer lugar, recordemos que el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ está contando las formas de seleccionar k-objetos de un conjunto de n-objetos (el orden en el que los selecciono no me interesa). Es decir, que el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ está contando el número de k-combinaciones de un conjunto de n-elementos que puedo armar. Ahora bien, si observo el lado izquierdo de la identidad, veo que tengo el producto de k por el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$. Esto es, el coeficiente binomial está contando las formas de elegir k-elementos de un conjunto de n-elementos, y luego, el producto por k está contando las formas de seleccionar un elemento de este subconjunto de k-elementos, ya que como vimos en la sección de regla del producto y regla de la suma (principios básicos de conteo), tengo k-formas distintas de elegir un elemento de un conjunto de k-elementos. Luego, el producto de k por el coeficiente binomial surge del proceso de realizar las dos tareas de forma consecutiva, ya que una vez seleccionado el conjunto con k-elementos, por cada uno de esos conjuntos tengo k-formas de seleccionar uno de sus elementos.

Por otro lado, si observo el lado derecho de la identidad, veo en primer lugar que el coeficiente binomial $\binom{n-1}{k-1}$ está contando las formas de seleccionar o de armar subconjuntos de $k-1$ elementos a partir de un conjunto con $n-1$ elementos. Luego, esto es multiplicado por n, que podríamos pensarlo como las formas que tengo de seleccionar un elementos de un conjunto de n. Es decir, en este caso, primero estaría seleccionando un elemento de un conjunto de n y luego, del conjunto con $n-1$ elementos que me queda, selecciono $k-1$. Podemos ver que al final, la tarea que estamos realizando es la misma que si observamos el lado izquierdo, ya que en definitiva terminamos seleccionando k-elementos del conjunto de n ya que si consideramos al elementos que elegimos primero junto a los $k-1$, entonces en realidad estamos seleccionando k elementos. Lo que ocurre es que en este caso, primero selecciono al elemento que voy a distinguir de entre los restantes k, los cuales fueron seleccionados del conjunto de n-elementos.

La figura (3) ilustra ambas formas de realizar la tarea.

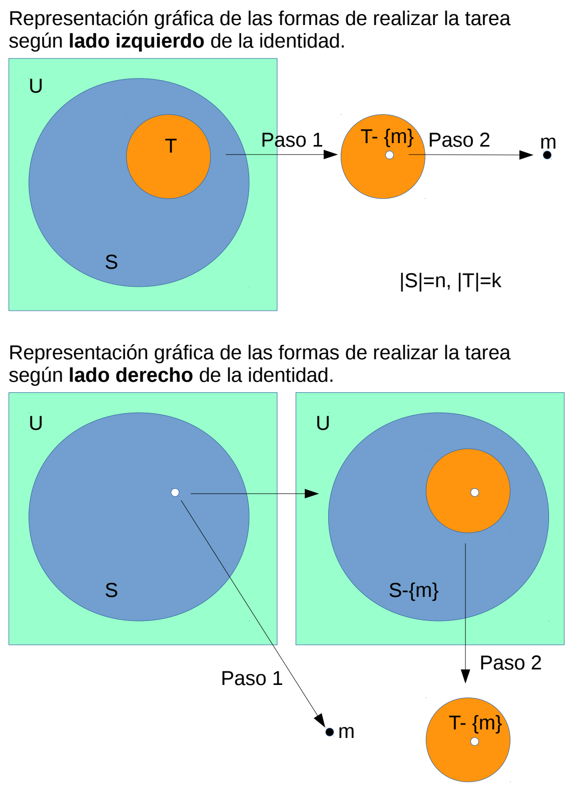


Figure 3: Representación esquemática del problema 21. Por un lado se ilustran las formas de seleccionar k-elementos de un conjunto de n-elementos y luego un elementos de éste último subconjunto. Por otro lado, se grafica las formas de seleccionar 1 elemento de un conjunto de n-objetos, y luego seleccionar $k-1$ del conjunto con $n-1$ elementos restantes.

b) Tarea

- **Ejercicio 22.** Demuestra la identidad

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

utilizando

a) un argumento combinatorio

b) una demostración algebraica

Respuesta:

a) Resolver basado en el ejemplo 21.a)

b) Planteamos la fórmula para el número de r-combinaciones de un conjunto de n elementos:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} &= \\
\text{definición número combinatorio} \qquad &= \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(n-k)!}{((n-k)-(r-k))!(r-k)!} \\
\text{simplifico factores}(n-k)! \qquad &= \frac{n!}{k!((n-k)-(r-k))!(r-k)!} \\
\text{aplico } (n-k)-(r-k)=(n-r) \qquad &= \frac{n!}{k!(n-r)!(r-k)!} \\
\text{multiplico y divido por } r! \qquad &= \frac{n!r!}{k!(n-r)!(r-k)!r!} \\
\text{reordeno factores} \qquad &= \frac{n!}{(n-r)!r!}\frac{r!}{(r-k)!k!} \\
\text{definición de número combinatorio} \qquad &= \binom{n}{r}\binom{r}{k} \\
&= q.e.d
\end{aligned}$$

- **Ejercicio 31.** Demuestra que un conjunto no vacío tiene el mismo número de subconjuntos con un número impar de elementos que con un número par de elementos.

Respuesta: El número combinatorio $\binom{n}{k}$ permite contar el número de subconjuntos de k elementos tomando de un conjunto de n elementos. Además, por el colorario 2, sabemos que:

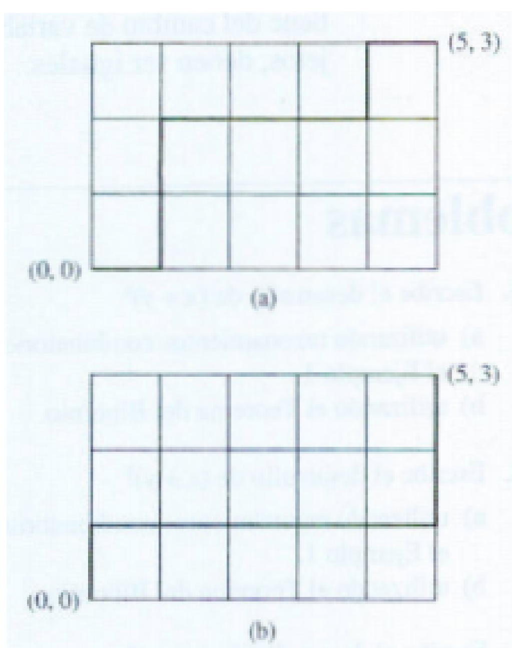
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

De la fórmula anterior podemos ver que si k es impar, el coeficiente binomial contribuye con signo negativo. Mientras que si k es par, el coeficiente binomial contribuye con signo positivo. Podemos explicitar esto haciendo:

$$\begin{aligned}\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\binom{n}{5}+\cdots &=0\\ \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots &=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\dots\end{aligned}$$

donde vemos que del lado izquierdo de la igualdad se suman el número de subconjuntos con cantidad par de elementos, mientras que del lado derecho se cuenta el número de subconjuntos con cantidad impar de elementos. Con la igualdad el ejercicio queda demostrado.

- **Ejercicio 33.** En este problema contaremos el número de caminos en el plano xy entre el origen $(0,0)$ y el punto (m,n) tales que cada camino está formado por una serie de pasos, y cada paso es bien un movimiento a la derecha o bien un movimiento hacia arriba. (No se permiten movimientos hacia la izquierda ni hacia abajo). En la siguiente figura se muestran dos ejemplos de tales caminos.



  a) Demuestra que cada camino del tipo descrito se puede representar por una cadena de bits formada por m ceros y n unos, donde los ceros representan un paso a la derecha y los unos representan un paso hacia arriba.

  b) Utilizando el apartado (a), concluye que hay $\binom{m+n}{n}$ caminos del tipo descrito.

Respuesta:

a) Un camino del tipo descrito en el enunciado está definido por m pasos hacia la derecha y n pasos hacia arriba. Por lo tanto, un camino puede escribirse como una cadena de longitud $m+n$, con ceros para los pasos hacia la derecha y unos para los pasos hacia arriba.

b) El número de cadenas de longitud $m+n$ que contienen exactamente m ceros puede expresarse como la combinatoria

$$\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!((m+n)-m)!} = \frac{(m+n)!}{m!n!}$$

Pero esta combinatoria es equivalente a la cantidad de cadenas de longitud $m+n$ que contienen exactamente n unos

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{n!((m+n)-n)!} = \frac{(m+n)!}{n!m!}$$

Por lo tanto, todas las cadenas posibles quedan determinadas una vez especificadas las posiciones de los ceros o las posiciones de los unos.

4.5 Permutaciones y combinaciones generalizadas

- **Ejercicio 1.** De cuántas formas se pueden seleccionar tres elementos ordenados de un conjunto de cinco si se permite la repetición?

  Respuesta: el enunciado es claro en el sentido de que menciona seleccionar elementos, admitiendo la repetición, y mencionando que el orden en el que se eligen interesa. Luego, debemos contar las formas de seleccionar empleando el concepto de permutaciones con repetición. La cantidad de objetos a ordenar es $r = 3$ y la cantidad de tipos de elementos es $n = 5$. Por lo tanto n^r nos cuenta de cuántas formas podemos ordenar r-elementos de entre n-tipos distintos admitiendo la repetición. Para éste caso particular, la respuesta es 125.

- **Ejercicio 7.** De cuántas formas se pueden seleccionar tres elementos sin ordenar de un conjunto de cinco si se permite la repetición?

  Respuesta: el enunciado es claro en el sentido de que menciona seleccionar elementos, admitiendo la repetición, y el orden en el que se eligen no interesa. Luego, debemos contar las formas de seleccionar empleando el concepto de combinaciones con repetición. La cantidad de objetos a seleccionar es $r = 3$ y la cantidad de tipos de elementos es $n = 5$. Por lo tanto $C(n-1+r, r)$ nos cuenta de cuántas formas podemos elegir r-elementos de entre n-tipos distintos admitiendo la repectición. Para éste caso particular, la respuesta es $C(7, 3)$.

- **Ejercicio 10.** Una tienda de cruasanes tiene cruasanes sin relleno, cruasanes con chocolate, cruasanes con crema, cruasanes con nata, cruasanes vegetales y cruasanes con salmón. ¿De cuántas formas se pueden escoger

  a) una docena de cruasanes?

  b) tres docenas de cruasanes?

  c) dos docenas de cruasanes con al menos dos de cada clase?

  d) dos docenas de cruasanes con no más de dos cruasanes con nata?

  e) dos docenas de cruasanes con al menos cinco cruasanes de chocolate y al menos tres de crema?

  f) dos docenas de cruasanes con al menos un cruasán sin relleno, al menos dos de nata, al menos tres de chocolate, al menos uno de crema, al menos dos de vegetales y no más de tres de salmón?

  Respuesta

  a) una docena de cruasanes?

  El número de objetos a seleccionar es $r = 12$ ya que tengo que elegir una docena de cruasanes. Por otro lado, el número de tipos de cruasanes es $n = 6$. Tengo que elegir una docena, no me interesa el orden en el que los elijo, y además se admite (necesariamente en este caso porque $r > n$) que haya más de una de cada tipo (podrían ser todas de chocolate, por ejemplo). Luego, estamos hablando de contar las formas de seleccionar empleando combinaciones con repetición. En éste caso, la respuesta es $C(17, 12)$.

  b) tres docenas de cruasanes?

  Responden los alumnos.

  c) dos docenas de cruasanes con al menos dos de cada clase?

  Ahora el número de cruasanes a seleccionar es $r = 24$. Si tengo que asegurarme que haya al menos dos de cada clase, entonces voy a colocar dos de cada clase (es decir $2 \cdot 6 = 12$) por lo cual me queda la libertad de elegir sólo $24 - 12 = 12$ cruasanes de entre los $n = 6$ tipos. Es decir que ahora $r = 12$ y $n = 6$. Luego, aplico la fórmula para contar el número de combinaciones admitiendo la repetición de objetos del mismo tipo por lo ya expuesto en incisos anteriores. La respuesta es $C(17, 12)$.

  d) dos docenas de cruasanes con no más de dos cruasanes con nata?

  En principio se deben seleccionar 24 cruasanes. Al especificar que no debe haber más de dos del tipo "cruasanes con nata", entonces una forma de plantear el problema es contando aquellas selecciones con ningún cruasán de nata, con exactamente un cruasán de nata y con exactamente dos cruasanes de nata. Luego sumaría la cantidad de formas posibles de armar estas selecciones (por qué sería posible sumarlas?). Si contara las selecciones con ningún crusanán de nata, entonces las 24 cruasanes las tengo que elegir entre 5 tipos diferentes, es decir que $r = 24$ y $n = 5$. Aplicando la fórmula para contar combinaciones con repetición tengo $C(28, 24)$. Haciendo lo mismo para aquellas selecciones que tienen exactamente 1 cruasán de nata, $r = 23$ (porque ya coloqué la de nata en el pedido) entre $n = 5$ tipos (porque no puedo volver elegir las de nata). Entonces la cantidad de estas selecciones es $C(27, 23)$. Finalmente, para el caso de pedidos con exactamente 2 cruasanes de nata, $r = 22$ y $n = 5$, con lo cual la cantidad de éste tipo de pedidos es $C(26, 22)$. La respuesta final es $C(28, 24) + C(27, 23) + C(26, 22)$.

e) dos docenas de cruasanes con al menos cinco cruasanes de chocolate y al menos tres de crema?

   Responden los alumnos.

f) dos docenas de cruasanes con al menos un cruasán sin relleno, al menos dos de nata, al menos tres de chocolate, al menos uno de crema, al menos dos de vegetales y no más de tres de salmón?

   Ahora debemos armar pedidos (seleccionar) que contengan: al menos 1 sin relleno, al menos 2 con nata, al menos 3 con chocolate, al menos 1 con crema y al menos 2 con vegetales. Como tengo que garantizar que los pedidos tengan estas cantidades estipuladas, sólo me quedará la libertad de elegir $24 - 9 = 15$ cruasanes (de entre todos los tipos). Ahora bien, partiendo de esta última situación, cómo cuentos los pedidos que puedo armar con "no más de tres de salmón"? Una forma es contando todos los pedidos con ningúno de salmón, con exactamente un cruasán de salmón, con exactamente dos cruasanes de salmón y con exactamente tres cruasanes de salmón, y finalmente sumar (pregunta para el alumno: es posible sumar libremente o debo tener alguna precaución al hacerlo?). En definitiva,

   (a) los pedidos con ningúno de salmón se cuentan como elegir 15 cruasanes de entre 5 tipos diferentes, admitiendo la repetición, es decir: $C(19, 15)$.
   (b) los pedidos con exactamente un cruasán de salmón se cuentan como elegir 14 cruasanes (pongo la única de salmón en el pedido y luego no puedo elegir más de éste tipo) de entre 5 tipos diferentes, admitiendo la repetición, es decir: $C(18, 14)$.
   (c) los pedidos con exactamente dos cruasanes de salmón se cuentan como elegir 13 cruasanes (pongo las dos de salmón en el pedido y luego no puedo elegir más de éste tipo) de entre 5 tipos diferentes, admitiendo la repetición, es decir: $C(17, 13)$.
   (d) los pedidos con exactamente tres cruasanes de salmón son: $C(16, 12)$.

   por lo cual la respuesta final es $C(19, 15) + C(18, 14) + C(17, 13) + C(16, 12)$.

- **Ejercicio 15.** ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21,$$

donde $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ son enteros no negativos tales que:

a) $x_1 \geq 1$?

b) $x_i \geq 2$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

c) $0 \leq x_1 \leq 10$?

d) $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 \leq 4$ y $x_3 \geq 15$?

Respuesta: El número de soluciones posibles de una ecuación diofántica es equivalente al número de r-combinaciones con repetición de un conjunto de n elementos. Sin embargo para aplicar la fórmula debemos primero garantizar que $x_i \geq 0$ con $i = 1, \ldots, r$. La estrategia cuando existan restricciones extras sobre alguna de las variables es realizar un cambio de variable para regresar a la forma estándar.

a) $x_1 \geq 1$? Debemos garantizar que se elija al menos un elemento de la *categoría* x_1 entre los 21 objetos a seleccionar. Esto lo explicitamos al crear una nueva variable $\hat{x_1}$ que indique cuantos elementos de la *categoría* x_1 se elegirán además del ya seleccionado. Matemáticamente definimos $\hat{x_1} = x_1 - 1$ y reemplazamos tanto en la ecuación como en la restricción, llegando a:

$$\hat{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20,$$

con $\hat{x_1} \geq 0$. Dado que queremos seleccionar 20 elementos ($r = 20$) de un conjunto de $n = 5$ categorías o tipos de elementos, aplicamos C(n+r-1,r) y tenemos C(24,20) = 24.23.22.21/4! soluciones posibles.

b) $x_i \geq 2$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$? Garantizamos cumplir la restricción para cada variable aplicando cambios de variable tal como en el inciso anterior, esto es $\hat{x_i} = x_i - 2$ y reemplazamos tanto en la ecuación como en las restricciones. Se llega a:

$$\hat{x_1} + \hat{x_2} + \hat{x_3} + \hat{x_4} + \hat{x_5} = 11,$$

con $\hat{x_i} \geq 0$ Aplicamos la fórmula y tenemos C(15,11) = 15.14.13.12/4! soluciones posibles.

c) $0 \leq x_1 \leq 10$? En este caso la restricción actúa como límite superior, por lo que no se puede aplicar el cambio de variables anterior en forma directa. Sin embargo, simplificaremos la solución planteando que el número total de soluciones con $x_1 \leq 10$ es equivalente al número total de soluciones sin restricciones C(21+5,21), menos aquellas donde $x_1 \geq 11$. Para el sustraendo debemos realizar un cambio de variables similar a los incisos anteriores (notar que aplica dado el sentido de la desigualdad) y contar el número de soluciones de la diofántica resultante, la cual es

$$\hat{x_1} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10,$$

con $\hat{x_1} \geq 0$. El número de soluciones posibles es entonces C(25,21)-C(14,10).

d) $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 < 4$ y $x_3 \geq 15$? Cuando tenemos restricciones combinadas como en este caso, primero garantizamos mediante cambio de variables aquellas de límite inferior ($\hat{x_2} = x_2 - 1$ y $\hat{x_3} = x_3 - 15$), resultando ahora en

$$x_1 + \hat{x_2} + \hat{x_3} + x_4 + x_5 = 5,$$

con $x_1 \leq 3$ y $\hat{x_2} \leq 2$. Para resolverla podemos aplicar una idea similar a la del inciso anterior. Notar que ambas restricciones de límite no pueden darse simultáneamente ya que no tenemos los suficientes objetos disponibles, si ese fuera el caso hay que tener cuidado al utilizar el principio de inclusión-exclusión.

Finalmente el resultado total es el número total de soluciones sin restricciones de la ultima ecuación C(5+5,5), menos el total de soluciones con $x_1 \geq 4$, menos el total de soluciones con $x_2 \geq 3$. Esto es (realizar el proceso) C(9,5) - C(5,1) - C(6,2) = 106.

- **Ejercicio 33.** Cuántas cadenas distintas se pueden formar con las letras de ORONO si se pueden utilizar todas o una parte de las palabras?

  Respuesta: La palabra ORONO está compuesta por 3 O's (indistinguibles entre sí), 1 R y 1N. Como se nos solicita utilizar todas o una parte de las letras disponibles, se debe analizar cada caso por separado y utilizar la regla de la suma. En cada caso podríamos utilizar razonamientos a partir del número de combinaciones, pero para simplificar el cómputo, podemos aplicar directamente el Teorema 3 que dice:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

  - Utilizando 5 letras. Solo hay una posibilidad de elegir 5 letras y es justamente tomando todas las disponibles. Para este caso $n = 5$, $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$. Reemplazando en la fórmula se tiene un total de 20 posibles cadenas diferentes de 5 letras.
  - Utilizando 4 letras. Tenemos $n = 4$ objetos. Pero dependiendo de que letra dejamos fuera de la selección, tendremos tres variantes:
    - 3 O's y 1 R. $n_1 = 3$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$. Total de 4 cadenas diferentes.
    - 3 O's y 1 N. $n_1 = 3$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$. Total de 4 cadenas diferentes.
    - 2 O's, 1 R y 1 N. $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$. Total de 12 cadenas diferentes.

    Por lo que tenemos un total de 20 posibles cadenas diferentes de 4 letras.

- Utilizando 3 letras. Tenemos $n = 3$ objetos. Pero dependiendo de que letras dejamos fuera de la selección, tendremos cuatro variantes:
  * 3 O's. $n_1 = 3$, $n_2 = 0$, $n_3 = 0$. Total de 1 cadenas diferentes.
  * 2 O's y 1 R. $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$. Total de 3 cadenas diferentes.
  * 2 O's y 1 N. $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$. Total de 3 cadenas diferentes.
  * 1 O, 1 R y 1 N. $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$. Total de 6 cadenas diferentes.

  Por lo que tenemos un total de 13 posibles cadenas diferentes de 3 letras.
- Con razonamientos similares para los casos de cadenas de dos y una letra sumaremos 10 posibles cadenas diferentes.

Utilizando la regla de la suma se tiene un total de 63 cadenas distintas que se pueden formar tomando todas o parte de las letras de ORONO.

---

7 Relaciones

7.1 Relaciones y sus propiedades

- **Ejercicio 6.** Determina si la relación R en el conjunto de todos los números reales es reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva, donde $(x, y) \in R$ si y sólo si,

  a) $x + y = 0$
  b) $x = \pm y$
  c) $x - y$ es un racional
  d) $x = 2y$
  e) $xy \geq 0$
  f) $xy = 0$
  g) $x = 1$
  h) $x = 1$ ó $y = 1$

  Respuesta: para determinar si una relación R en un conjunto A cumple o no las propiedades mencionadas, debemos recordar primero cómo se expresan mediante cuantificadores y conectores lógicos dichas propiedades

  - Reflexividad: R es reflexiva si $\forall a \in A, (a, a) \in R$.
  - Simetría: R es simétrica si $\forall a \forall b \in A, [(a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R]$.

- Antisimetría: R es antisimétrica si $\forall a \forall b \in A, [(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow (a = b)]$, o su contrarrecíproca $\forall a \forall b \in A, [(a \neq b) \rightarrow (a,b) \notin R \vee (b,a) \notin R]$.
- Transitividad: R es transitiva si $\forall a \forall b \forall c \in A, [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R]$.

Luego, expresadas las definiciones de las propiedades a analizar mediante cuatificadores, pasamos a analizar las relaciones mencionadas:

a) $x + y = 0$: en este caso vemos que el par $(x,y) \in R$ si se cumple que $x + y = 0$.

  - Analizando la reflexividad, vemos que si proponemos el par de la forma (x,x) para un x cualquiera en los reales, entonces para que dicho par exista en la relación debería cumplirse que $x + x = 0$. Pero esto sólo se cumple en el caso particular de que $x = 0$. Luego R *no es reflexiva*. Presentado un contraejemplo, para $x = 1$, vemos que $(1,1) \notin R$.
  - Analizando la simetría, consideremos un par $(x,y) \in R$. Luego dicho par cumple con $x + y = 0$. Por la propiedad conmutativa de la suma vemos que $y + x = 0$, de lo cual podemos inferir que $(y,x) \in R$, es decir que R *es simétrica*.
  - Antisimetría. Consideremos dos elementos x y y en el conjunto de los números reales, tales que $x \neq y$. Si $(x,y) \in R$ ello significa que $x + y = 0$. Pero entonces, por propiedad conmutativa de la suma $y + x = 0$, lo cual significa que $(y,x) \in R$ también. Luego R *no es antisimétrica* porque $(x,y) \notin R \equiv \mathbf{F}$ y $(y,x) \notin R \equiv \mathbf{F}$.
  - Transitividad: asumamos que los pares (x,y) y (y,z) pertenecen a R. Entonces se verifica que $x + y = 0$ y que $y + z = 0$. Luego, despejando y de la segunda ecuación y reemplazando en la primera, se tiene que $x - z = 0$, es decir que el par $(x,z) \notin R$. Por ende, R *no es transitiva*.

b) $x = \pm y$: responden los alumnos.

c) $x - y$ es un racional

  - Analizando la reflexividad, vemos que si proponemos el par de la forma (x,x) para un x cualquiera en los reales, entonces para que dicho par exista en la relación debería cumplirse que $x - x$ sea racional. Puesto que $x - x = 0$ y cero es racional, entonces se verifica que $(x,x) \in R$ para cualquier x en los reales. Luego R *es reflexiva*.
  - Analizando la simetría, consideremos un par $(x,y) \in R$. Entonces $\exists a, b \in Z$, con $b \neq 0$ tal que $x - y = \frac{a}{b}$. Pero entonces puedo afirmar que $y - x = -\frac{a}{b}$ también es racional. Luego, el par $(y,x) \in R$. De esta manera, podemos concluir que R *es simétrica*.
  - Antisimetría. Consideremos dos elementos x y y en el conjunto de los números reales, tales que $x \neq y$. Si $(x,y) \in R$ ello significa que $x - y$ es racional. Pero por lo expuesto en el inciso anterior, ello significa que $y - x$ también es

racional, con lo cual el par $(y,x) \in R$. Luego R *no es antisimétrica* porque $(x,y) \notin R \equiv \mathbf{F}$ y $(y,x) \notin R \equiv \mathbf{F}$.

- Transitividad: asumamos que los pares (x,y) y (y,z) pertenecen a R. Entonces $\exists a,b,c,d \in Z$, con $b \neq 0$, $d \neq 0$ tal que $x - y = \frac{a}{b}$ y $y - z = \frac{c}{d}$. Despejando y de la segunda ecuación y reemplazando en la primera, se tiene $x - y = x - z - \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ y de ésta se obtiene $x - z = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$. Como tanto el numerador como el denominador son enteros y el denominador es no nulo, entonces se concluye que $x - z$ es racional. Luego, el par $(x,z) \in R$ y por ende R *es transitiva.*

d) $x = 2y$: responden los alumnos.

e) $xy \geq 0$

- Analizando la reflexividad, vemos que si proponemos el par de la forma (x,x) para un x cualquiera en los reales, entonces para que dicho par exista en la relación debería cumplirse que $x \cdot x \geq 0$. Si $x = 0$ entonces $x \cdot x = 0$ y si $x \neq 0$ entonces $x \cdot x > 0$. Luego, vemos que para todo x en los reales, el par $(x,x) \in R$. Entonces R *es reflexiva.*
- Para analizar la simetría, consideremos un par $(x,y) \in R$. Entonces $xy \geq 0$. Pero por ser conmutativo el producto de números reales, se tiene que $yx \geq 0$, es decir que el par $(y,x) \in R$. De esta manera probamos que R *es simétrica.*
- Antisimetría. Consideremos dos elementos x y y en el conjunto de los números reales, tales que $x \neq y$. Si $(x,y) \in R$ ello significa que $xy \geq 0$. Pero por lo expuesto en el inciso anterior, ello significa que $yx \geq 0$, con lo cual el par $(y,x) \in R$. Luego R *no es antisimétrica* porque $(x,y) \notin R \equiv \mathbf{F}$ y $(y,x) \notin R \equiv \mathbf{F}$.
- Transitividad: asumamos que los pares (x,y) y (y,z) pertenecen a R. Entonces $xy \geq 0$ y $yz \geq 0$. Luego, pueden ocurrir los siguientes casos: a) x, y y z son los tres no nulos y tienen el mismo signo, en cuyo caso $xz \geq 0$; b) $x = 0$, en cuyo caso "no interesa" el signo de y ni de z (sigue siendo el mismo porque $(y,z) \in R$), se tiene que $xz = 0$, entonces $(x,z) \in R$. Sin embargo, si $y = 0$, podría darse, por ejemplo, que $x < 0$ y $z > 0$, con lo cual $xz < 0$. Es decir, que si $(x,y) \in R$ y $(y,z) \in R$, no necesariamente $(x,z) \in R$. Por lo tanto, R *no es transitiva.*

f) $xy = 0$: responden los alumnos.

g) $x = 1$

- Analizando la reflexividad, vemos que no lo es. Por ejemplo, el par $(2,2) \notin R$.
- Viendo la simetría, tampoco lo es. C.E: vemos que el par $(1,2)$ está en R, pero el $(2,1)$ no lo está.
- Antisimetría. Consideremos el par de la forma $(1,y)$, con $y \neq 1$. Este par está en R. Ahora bien, el par de la forma $(y,1)$ no puede estar nunca en la relación. Luego, R *es antisimétrica.*

- Transitividad: teniendo en cuenta la definición de transitividad, los únicos pares de la forma (a, b) y (b, c) que puedo analizar son aquellos de la forma $(1, b)$ y $(1, c)$ donde necesariamente $b = 1$ para poder transicionar. Luego estamos haciendo la transición entre pares de la forma $(1, 1)$ y $(1, c)$. Pero como el par $(1, c)$ está en R, se verifica que R es transitiva.

h) $x = 1$ ó $y = 1$: responden los alumnos.

- **Ejercicio 23.** Cuántas relaciones distintas hay de un conjunto con m elementos a un conjunto con n elementos?

  Respuesta: En primera instancia, debemos recordar que una relación R de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Luego, habrá tantas relaciones como subconjuntos se puedan generar a partir de dicho conjunto $A \times B$. Si el cardinal de A es m y el cardinal de B es n, entonces el cardinal de $A \times B$ es $m \cdot n$. Si a cada subconjunto lo puedo pensar como formado por una selección particular de estos pares ordenados y a su vez, a este problema lo puedo asociar a contar el número de cadenas de bits de $m \cdot n$ bits, tal que si el j-ésimo bit vale 1 significa que el par ordenado asociado está en el subconjunto o relación y si vale cero, entonces no lo está. Como el total de cadenas distintas de $m \cdot n$ bits es, por regla del producto, 2^{mn}, este será el número posible de relaciones distintas que se pueden formar.

- **Ejercicio 24.** Sea la relación $R = \{(a, b) : a < b\}$ en el conjunto de los números enteros. Halla:

  a) R^{-1}
  b) $\overline{R}$

  Respuesta:

  a) Sea $R : A \to B$, la relación inversa R^{-1} se define como el conjunto de aquellos pares ordenados (a, b) tal que $(b, a) \in R$. En el ejercicio propuesto, si el par $(a, b) \in R$ entonces $a < b$. De acuerdo a la definición de inversa, ésta contendrá el par (b, a) siendo $b > a$. Por lo tanto, podemos definir $R^{-1} = \{(a, b) : a > b\}$.

  b) Sea $R : A \to B$, la relación complementaria $\overline{R}$ se define como el conjunto de aquellos pares ordenados (a, b) tal que $(a, b) \notin R$. En el ejercicio propuesto, de acuerdo a la definición de complementaria, ésta contendrá todo par (a, b) siendo falso $a < b$, que puede escribirse como $a \geq b$. Por lo tanto, podemos definir $\overline{R} = \{(a, b) : a \geq b\}$.

- **Ejercicio 48.** Supongamos que R y S son relaciones reflexivas en un conjunto A. Demuestra la veracidad o falsedad de las siguientes sentencias:

  a) $R \bigcup S$ es reflexiva.

  b) $R \bigcap S$ es reflexiva.

  c) $R \circ S$ es reflexiva.

  Respuesta

  a) $R \bigcup S$ es reflexiva.

  Sean R y S reflexivas. Ello significa que $\forall a \in A$ los pares ordenados de la forma $(a, a) \in R$ y que $(a, a) \in S$. Luego, por definición de unión de conjuntos, $R \bigcup S = \{(x, y) | (x, y) \in R \vee (x, y) \in S\}$. Pero entonces, en el caso particular de todos los pares reflexivos vemos que se cumple que $(a, a) \in R \vee (a, a) \in S$ es siempre verdadero. Luego, vemos que $(a, a) \in R \bigcup S$ es verdadero, por lo cual la unión es reflexiva.

  b) $R \bigcap S$ es reflexiva.

  Sean R y S reflexivas. Ello significa que $\forall a \in A$ los pares ordenados de la forma $(a, a) \in R$ y que $(a, a) \in S$. Luego, por definición de intersección de conjuntos, $R \bigcap S = \{(x, y) | (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S\}$. Pero entonces, en el caso particular de todos los pares reflexivos vemos que se cumple que $(a, a) \in R \wedge (a, a) \in S$ es siempre verdadero. Luego, vemos que $(a, a) \in R \bigcap S$ es verdadero $\forall a \in A$, por lo cual la intersección es reflexiva.

  c) $R \circ S$ es reflexiva.

  Si R y S son reflexivas, significa que los pares ordenados de la forma $(a, a) \in R$ y que $(a, a) \in S$. A su vez, la composición de $R \circ S$, por definición, es la relación formada por los pares ordenados de la forma (a, c) con $a \in A$ y $c \in A$, para los cuales $\exists b \in A$ tal que $(a, b) \in S$ y $(b, c) \in R$. En particular, si ambas R y S son reflexivas, entonces para todo $a \in A$ puedo encontrar otro $a \in A$ tal que están relacionados por $R \circ S$. Luego, $R \circ S$ es reflexiva.

7.3 Representación de relaciones

- **Ejercicio 7.** Determina si las relaciones representadas por las matrices del problema 3 son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.

  a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Respuesta: Se puede demostrar (hacerlo) que una relación R representada por una matriz $\mathbf{M}_R$ es:

- reflexiva, si toda la diagonal es no nula,
- simétrica, si la matriz es simétrica,
- antisimétrica, si para cada $m_{i,j} = 1 \wedge i \neq j$ entonces $m_{j,i} = 0$,
- transitiva, si $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} = \mathbf{M}_R$,

a) reflexiva, simétrica, transitiva

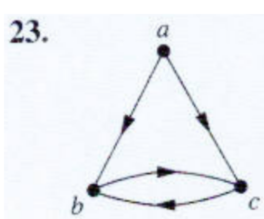
b) antisimétrica

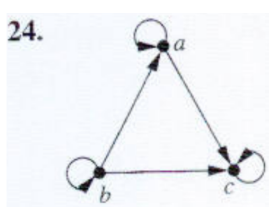
c) responden los alumnos

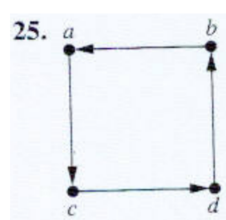
- **Ejercicio 20.** Dibuja los grafos dirigidos que representan a las relaciones del problema 7.

  Respuesta: desarrollan los alumnos

- **Ejercicio 31.** Determina si las relaciones representadas por los grafos de los problemas 23-25 son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas.







Respuesta: Se puede demostrar (hacerlo) que una relación R representada por una grafo dirigido $\mathbf{G}$ es:

- reflexiva, si todo vértice tiene un bucle,
- simétrica, si para cada arista de a a b hay una de b a a,

– antisimétrica, si para cada arista de a a b, no hay arista de b a a,

– transitiva, si para cada par de aristas de a a b y de b a c, hay una de a a c.

a) transitiva

b) reflexiva, antisimétrica, transitiva

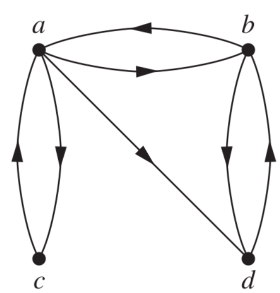
c) responden los alumnos

7.4 Cierre de relaciones

- **Ejercicio 3.** Sea R la relación $\{(a,b)|a$ divide a $b\}$ sobre el conjunto de los enteros. Cuál es su cierre simétrico?

  Respuesta: dada la relación R, su cierre simétrico se puede expresar como $R \bigcup R^{-1}$. Para el caso particular de la relación enunciada, se tiene que $R^{-1} = \{(b,a)|a$ divide a $b\}$ o lo que es lo mismo, $R^{-1} = \{(a,b)|b$ divide a $a\}$. Luego, el cierre simétrico se expresa como $R \bigcup R^{-1} = \{(a,b)|a$ divide a b ó b divide a $a\}$.

- **Ejercicios 7 y 9.** Dibujar el cierre reflexivo y el cierre simétrico de la relación representada por el gráfo de la siguiente figura.



  Respuesta: en clase

- **Ejercicios 12 y 13.** Suponiendo que la matriz $\mathbf{M}_R$ representa una relación R en un conjunto A, demuestra que la matriz que representa el cierre reflexivo de R es $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{I}_n$ y la matriz que representa el cirrre simétrico de R es $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^T$.

  Respuesta: El cierre reflexivo de R es el conjunto $R \bigcup \Delta$, siendo Δ la relación diagonal. Si planteamos el cierre en término de matrices, vemos que la relación R tiene su representación matricial $\mathbf{M}_R$, Δ tiene solo los elementos de la forma (a,a) por lo que su representación matricial es una matriz identidad de tamaño $n = |A|$, esto es $\mathbf{M}_{\Delta} = \mathbf{I}_n$. Finalmente la unión de conjuntos pude computarse a través de aplicar el or lógico coeficiente a coeficiente. Por lo tanto $R \bigcup \Delta = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{I}_n$.

El mismo planteo puede hacerse para el cierre simétrico de R, el cual es el conjunto $R \bigcup R^{-1}$. Hacerlo.

7.5 Relaciones de equivalencia

- **Ejercicio 5.** Suponga que A es un conjunto no vacío y que f es una función cuyo dominio es A. Sea R la relación en A que consiste en todos los pares ordenados (x, y) con $f(x) = f(y)$.

  a) Demuestra que R es una relación de equivalencia en A.

  b) ¿Cuáles son las clases de equivalencia de R?

  Respuesta

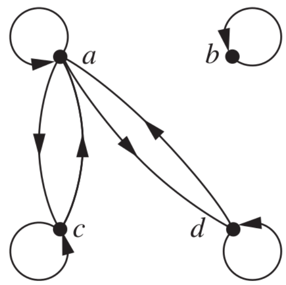
  a) Para mostrar que R es una relación de equivalencia en A, debemos mostrar que R es reflexiva, simétrica y transitiva.

  - Reflexividad: sea $x \in A$ un elemento cualquiera del mismo. Como f es función en A, entonces existe $f(x)$ para todo $x \in A$ (propiedad de existencia de una función). Además, como f es función, entonces la imagen de x por f es única. Luego, podemos afirmar que $f(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Luego vemos que todo x del conjunto A está relacionado consigo mismo y por ende $(x, x) \in R$. De esta manera concluimos que R es reflexiva.
  - Simetría: asumamos que el par $(x, y) \in R$. Entonces se cumple que $f(x) = f(y)$. A continuación podemos decir que $f(y) = f(x)$, por lo cual el par $(y, x) \in R$. De esta manera, concluimos que R es simétrica.
  - Transitividad: asumamos que los pares (x, y) y (y, z) pertenecen a R. Entonces se cumple que $f(x) = f(y)$ y que $f(y) = f(z)$. Pero de aquí se puede afirmar que $f(x) = f(z)$, con lo cual el par $(x, z) \in R$. De esta manera podemos concluir que R es transitiva.

  Luego hemos mostrado que R es una relación de equivalencia.

  b) Las clases de equivalencia de R son todos aquellos subconjuntos de elementos de A tal que sus imágenes por la función f son iguales. Es decir, si $x \in A$, entonces $[x]_R = \{y \in A| \quad f(x) = f(y)\}$.

- **Ejercicio 15.** Determine si la relación cuyo grafo dirigido se muestra en la siguiente figura es o no una relación de equivalencia.



Respuesta: en clase

- **Ejercicio 29.** Cuáles de las siguientes colecciones de subconjuntos son particiones del conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? Para aquellas que lo sean, enumere las clases de equivalencia y los pares ordenados de la relación de equivalencia generadas por dichas particiones.

  a) $\{1, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$
  b) $\{1\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{4\}$, $\{5\}$
  c) $\{2, 4, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$: responden los alumnos
  d) $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 6\}$: responden los alumnos

Respuesta

  a) $\{1, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$
  La misma no es una partición del conjunto A, ya que los subconjuntos enumerados no son disjuntos.
  b) $\{1\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{4\}$, $\{5\}$
  Los subconjuntos enumerados son disjuntos y no vacíos, por lo cual se los puede considerar como una partición del conjunto A. A cada uno de ellos se los puede considerar como una clase de equivalencia de una relación de equivalencia R definida sobre A, las cuales son: $[1]_R = \{1\}$, $[2]_R = [3]_R = [6]_R = \{2, 3, 6\}$, $[4]_R = \{4\}$ y $[5]_R = \{5\}$. Finalmente, los pares ordenados generados por dichas particiones son: $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(6, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 6)$, $(6, 2)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$ y la relación de equivalencia R será aquella formada por dichos pares.

- **Ejercicio 42.** Suponga que R_1 y R_2 son relaciones de equivalencia en el conjunto S. Determina si cada una de las siguientes combinaciones de R_1 y R_2 es o no es necesariamente una relación de equivalencia.

  a) $R_1 \bigcup R_2$
  b) $R_1 \bigcap R_2$

  Respuesta. Partimos de la premisa de que tanto R_1 como R_2 son reflexivas, simétricas y transitivas. Esto es:

  i) $\forall a \in S, (a,a) \in R_1$
  ii) $\forall a \in S, (a,a) \in R_2$
  iii) $\forall a \forall b \in S, [(a,b) \in R_1 \to (b,a) \in R_1]$
  iv) $\forall a \forall b \in S, [(a,b) \in R_2 \to (b,a) \in R_2]$
  v) $\forall a \forall b \forall c \in S, [(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1 \to (a,c) \in R_1]$
  vi) $\forall a \forall b \forall c \in S, [(a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_2 \to (a,c) \in R_2]$

  Debemos entonces verificar si tanto su unión como se intersección mantienen dichas propiedades.

  a) Por definición, $R_1 \bigcup R_2 = \{(a,b) : (a,b) \in R_1 \vee (a,b) \in R_2\}$.
     - Primero verificamos si cumple reflexividad. Esto es tiene que cumplir que todo par de la forma (a,a) tiene que estar en $R_1 \bigcup R_2$. Por (i) todo par (a,a) está en R_1, por lo que también estará en $R_1 \bigcup R_2$. Por lo tanto se satisface reflexividad.
     - Respecto a la simetría:

$$
\begin{array}{rl}
\text{para } a,b \in S & (a,b) \in R_1 \bigcup R_2 \\
\text{def. de unión} & \equiv (a,b) \in R_1 \vee (a,b) \in R_2 \\
\text{por (iii) y (iv)} & \to (b,a) \in R_1 \vee (b,a) \in R_2 \\
\text{def. de unión} & \equiv (b,a) \in R_1 \bigcup R_2
\end{array}
$$

       con lo que queda demostrada la simetría.
     - Intentaremos verificar la transitividad de forma similar:

$$
\begin{array}{rl}
\text{para } a,b,c \in S & (a,b) \in R_1 \bigcup R_2 \wedge (b,c) \in R_1 \bigcup R_2 \\
\text{def. de unión} & \equiv [(a,b) \in R_1 \vee (a,b) \in R_2] \wedge [(b,c) \in R_1 \vee (b,c) \in R_2] \\
\text{distribuimos} & \equiv [(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_1] \vee [(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2] \vee \\
 & \vee [(a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_1] \vee [(a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_2] \\
\text{por (v) y (vi)} & \to (a,c) \in R_1 \vee (a,c) \in R_2 \vee [(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2] \vee [(a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_1] \\
\text{def. de unión} & \equiv \left[(a,c) \in R_1 \bigcup R_2\right] \vee [(a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2] \vee [(a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_1]
\end{array}
$$

       con lo que queda demostrado que NO es transitiva, ya que $(a,b) \in R_1 \bigcup R_2 \wedge (b,c) \in R_1 \bigcup R_2$ no implica $(a,c) \in R_1 \bigcup R_2$.

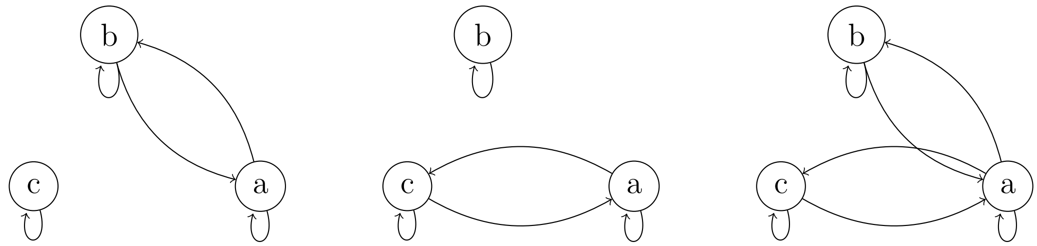


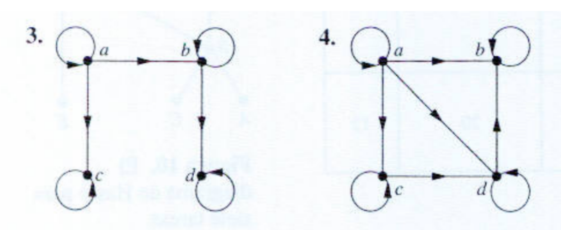
Figura. Ejemplo que no cumple transitividad. Izquierda: R_1. Centro R_2. Derecha $R_1 \bigcup R_2$.

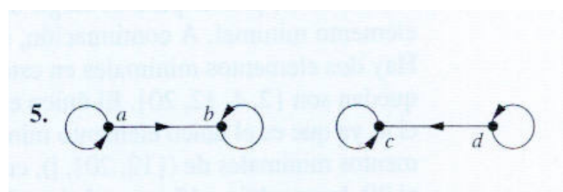
Finalmente, dado que $R_1 \bigcup R_2$ no cumple transitividad, tampoco es una relación de equivalencia.

b) Resuelven los alumnos siguiendo el ejemplo anterior.

7.6 Órdenes parciales

- **Ejercicio 3-5.** Determina si la relación cuyo grafo dirigido se muestra es o no una relación de órden. Aquellas que si lo cumplen, son relaciones de órden total?





Respuesta. Una relación es considerada órden parcial si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por lo tanto, sólo el grafo 5 representa una relación de órden parcial.

Para que una relación de órden parcial R en el conjunto S, simbolizado (S, R), sea de órden total, todo par de elementos del conjunto S deben ser comparables (estar relacionados) bajo la relación R. De esta manera, ninguno de los grafos del ejercicio es un órden total.

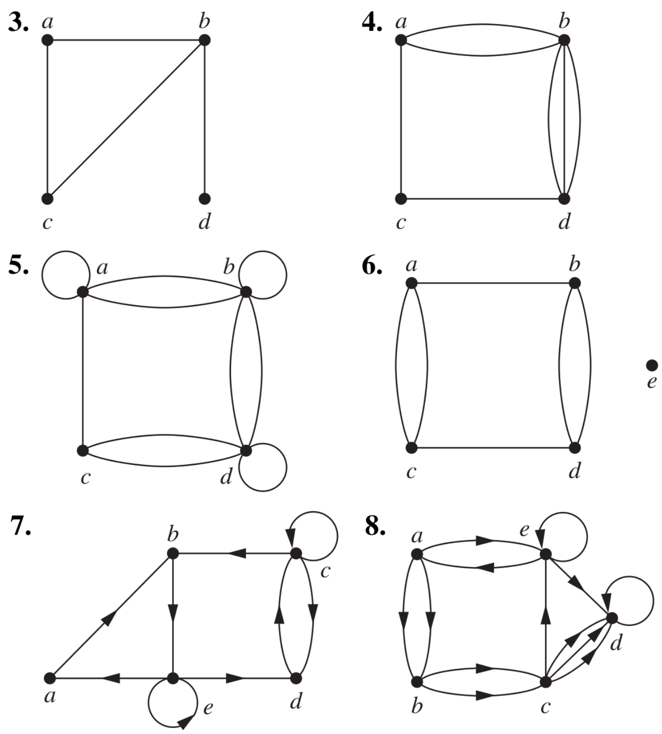
Se sugiere *completar* el grafo del ejercicio 5 agregando las aristas (pares ordenados) tales que se convierta en un órden total.

---

8 Grafos

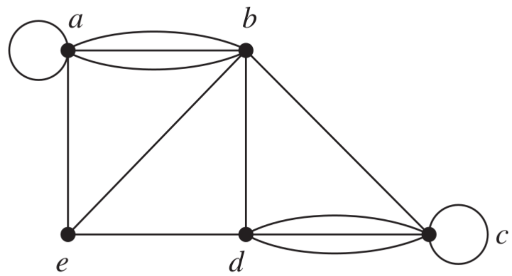
8.1 Introducción a grafos

- **Ejercicio 3-8.** Determine si cada uno de los siguientes grafos es simple, multigrafo (y no grafo simple), pseudografo (y no multigrafo), grafo dirigido o multigrafo dirigido (y no grafo dirigido).



8.2 Terminología en teoría de grafos

- **Ejercicio 2.** En el grafo de la siguiente figura, determine el número de vértices, el número de aristas y el grado de cada vértice. Identifique los vértices aislados y las hojas.

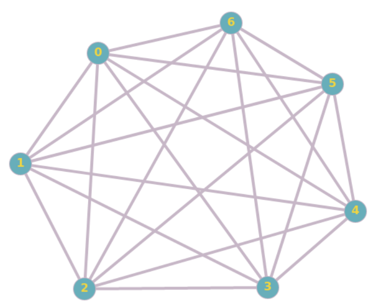


- **Ejercicio 5.** Puede existir un grafo con 15 vértices, cada uno de ellos de grado 5?

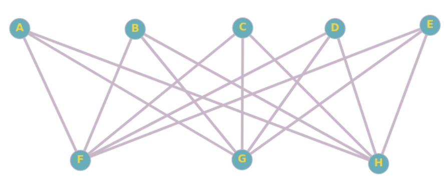
  Teniendo en cuenta el teorema 2 de la página 512 del libro de Rosen, 5ta Edición, todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar. Por lo tanto, como el número de vértices de grado impar que se plantea es impar, no es posible que exista un grafo con esas características.

- **Ejercicio 18.** Dibuja los siguientes grafos

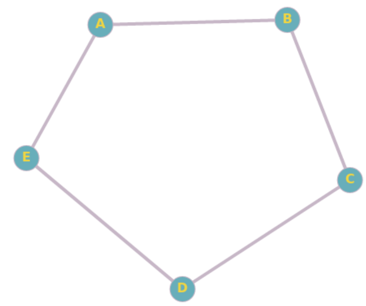
  a) K_7: el grafo completo de 7 vértices que se muestra en la figura



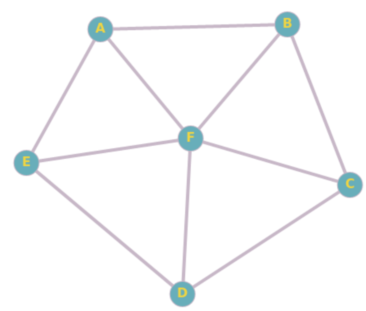
  b) $K_{5,3}$: el grafo bipartito completo se muestra en la figura



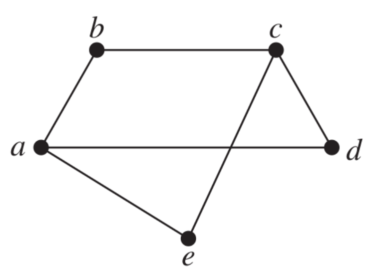
  c) C_5: el ciclo de 5 vértices es el que se muestra en la figura

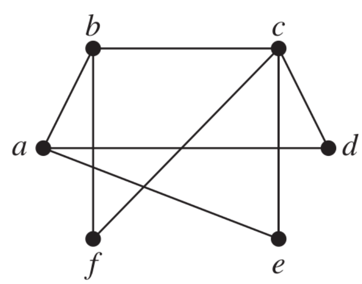


d) W_5: la rueda de 6 vértices es la que se muestra en la figura



- **Ejercicios 20 y 21.** Determina si los siguientes grafos son o no bipartitos.





- **Ejercicio 25.** Cuántos vértices y cuántas aristas tienen cada uno de los siguiente grafos?

  a) K_n
  b) C_n
  c) W_n
  d) $K_{m,n}$
  e) Q_n

a) K_n: en el caso de grafo completo de n vértices, vemos que cada vértice está conectado con todos los demás. Por lo tanto, cada vértice es de grado $n-1$, es decir $\delta(v_i) = n-1$. Luego, sabemos que la suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de aristas e, es decir: $\sum \delta(v_i) = 2e$ por lo cual podemos plantear que

$$\begin{aligned} e &= \sum \delta(v_i)/2 \\ &= n \cdot (n-1)/2 \end{aligned} \tag{28}$$

b) C_n: para el ciclo de n vértices se tiene que cada vértice está conectado con otros dos. Por lo tanto, el grado de cada vértice es $\delta(v_i) = 2$. Luego podemos afirmar que

$$\begin{aligned} e &= 2n/2 \\ &= n \end{aligned} \tag{29}$$

c) W_n para la rueda de $n+1$ vértices se tienen n vértices de grado 3 (los vértices de la "llanta") y un vértice de grado n. Luego podemos afirmar que

$$\begin{aligned} e &= (3n+n)/2 \\ &= 2n \end{aligned} \tag{30}$$

d) $K_{m,n}$: para el grafo bipartito completo $K_{m,n}$ tenemos m vértices de grado n y n vértices de grado m, por lo cual podemos decir que

$$\begin{aligned} e &= (mn+nm)/2 \\ &= mn \end{aligned} \tag{31}$$

e) Q_n: el n-cubo tiene 2^n vértices, cada uno de los cuales está conectado con n-vértices, es decir que el grado de los vértices es $\delta(v_i) = n$. Luego, el número de aristas será,

$$\begin{aligned} e &= n \cdot 2^n/2 \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned} \tag{32}$$

- **Ejercicio 32.** Cuántos subgrafos con al menos un vértice tiene W_3?

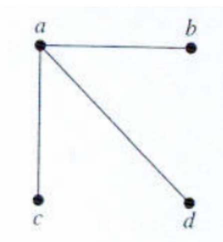
  Respuesta. Un razonamiento basado en conteo parte de que en W_3 cada uno de los cuatro vértice está conectados con todos los los demás. Primero seleccionamos todos los subconjuntos posibles de vértices, y luego evaluamos incluír o no las aristas que conectan cada vértice seleccionado. Entonces:

  – para los subgrafos de un único vértice, el grafo ya está definido sin aristas. Aquí hay 4 subgrafos.

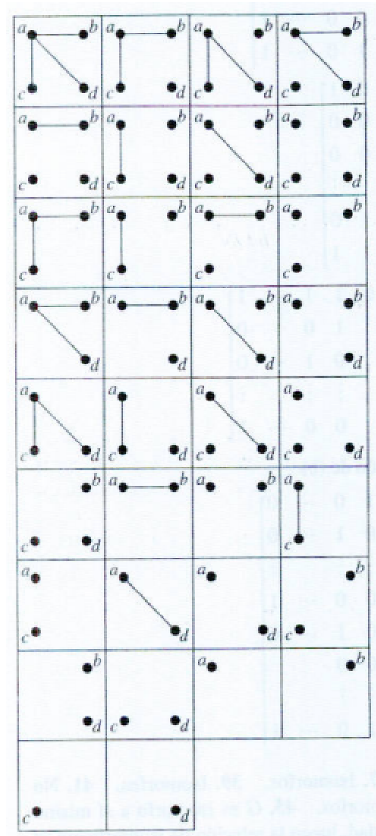
- para los subgrafos de 2 vértices, tengo $C(4,2)$ alternativas de selección de vértices. Luego, tengo dos posibilidades que es incluir o no la única arista que los une, entonces de aquí $C(4,2).2 = 12$.
- para los subgrafos de 3 vértices, tengo $C(4,3)$ alternativas de selección de vértices. Luego, hay dos posibilidades, incluir o no, cada arista de las $C(3,2)$ posibles, entonces de aquí tengo $C(4,3).2^{C(3,2)} = 4.2^3 = 32$.
- para los subgrafos de 4 vértices, tengo $C(4,4) = 1$ alternativas de selección de vértices. Luego, tengo dos posibilidades, incluir o no, cada arista de las $C(4,2)$ posibles, entonces de aquí tengo $C(4,4).2^{C(4,2)} = 64$.

Finalmente por la regla de la suma tengo $4 + 12 + 32 + 64 = 112$ subgrafos posibles.

- **Ejercicio 33.** Dibuja todos los subgrafos del siguiente grafo:



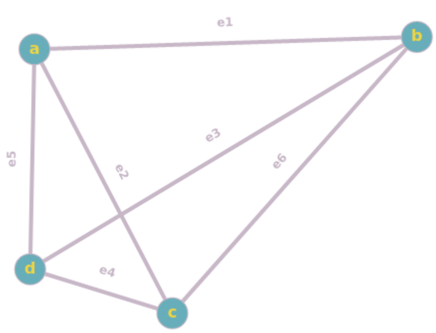
Respuesta.



8.3 Representación e isomorfismo de grafos

- **Ejercicios 9.** Utiliza listas de adyacencias, matrices de adyancencia y matrices de incidencia para representar a los siguientes grafos

  a) K_4: para el grafo completo de 4 vértices de la figura



se tienen las siguientes:

– lista de adyancencias

Vértices	Vértices adyancentes
a	b,c,d
b	a,c,d
c	a,b,d
d	a,b,c

– Matriz de adyacencia, con ordenación de filas y columnas según los vértices a,b,c,d

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

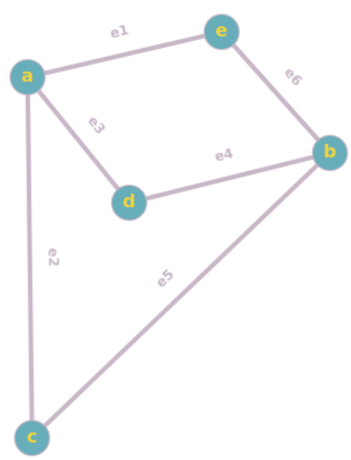
– Matriz de incidencia, con ordenación de filas según los vértices a,b,c,d y de columnas según las aristas e1,e2,e3,e4,e5,e6

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) C_4: responden los alumnos

c) W_4: responden los alumnos

d) $K_{2,3}$ para el grafo bipartito completo de la figura



se tienen las siguientes:

– lista de adyancencias

Vértices	Vértices adyancentes
a	c,d,e
b	c,d,e
c	a,b
d	a,b
e	a,b

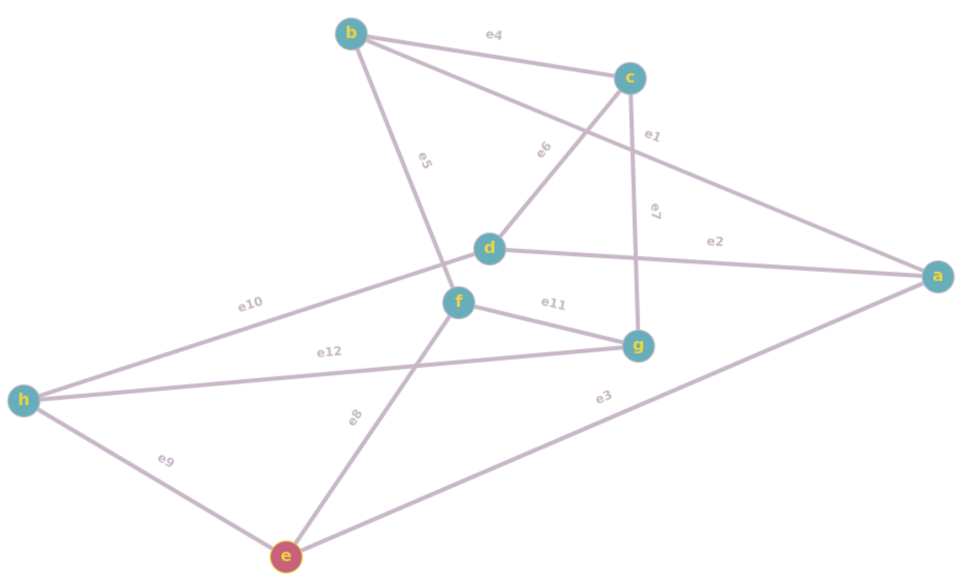
– Matriz de adyacencia, con ordenación de filas y columnas según los vértices a,b,c,d,e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– Matriz de incidencia, con ordenación de filas según los vértices a,b,c,d,e y de columnas según las aristas e1,e2,e3,e4,e5,e6

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Q_3: para el 3-cubo de la figura



se tienen las siguientes:

– lista de adyancencias

Vértices	Vértices adyancentes
a	b,d,e
b	a,c,f
c	b,d,g
d	a,c,h
e	a,f,h
f	b,e,g
g	c,f,h
h	d,e,g

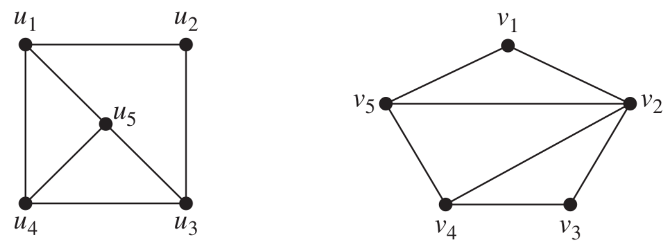
– Matriz de adyacencia, con ordenación de filas y columnas según el orden alfabético de los vértices

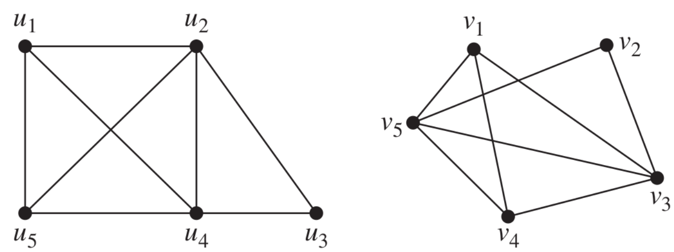
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

– Matriz de incidencia, con ordenación de filas según el orden alfabético de los vértices y de columnas según orden creciente de las aristas

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Ejercicios 36 y 38.** Determina si los pares de grafos correspondientes son o no isomorfos. Si lo fueran, construir el isomorfismo. Si no lo fueran, de un argumento riguroso de que tal isomorfismo no existe.





Respuesta: podemos hacer uso de los invariantes bajo isomorfismo para determinar si dos grafos NO son isomorfos. Es decir, si los invariantes se cumplen, entonces no podemos asegurar que los dos grafos considerados sean isomorfos, pero si no se cumplen, entonces sí podemos decir que no lo son. Algunos de los invariantes más conocidos son: a) número de vértices, b) número de aristas, c) grados de los vértices, d) existencia de circuitos simples de una cierta longitud (ver la sección de conexión en grafos). Si todos estos invariantes se cumplen, entonces podemos intentar construir un isomorfismo entre ambos grafos generando un camino que pase por todos los vértices del grafo, de manera que los grados de los vértices visitados siguiendo ése camino, sean iguales. Una vez construido el posible isomorfismo, debemos verificar que el mismo conserva las adyacencias construyendo las matrices de adyacencia de ambos grafos, siguiendo el ordenamiento planteado por el posible isomorfismo, y si ambas matrices son iguales, sólo entonces podemos afirmar que lo planteado es un isomorfismo.

Para el par de grafos del ejercicio 36, se observa que el número de vértices es 5 y el número de aristas es 7, en ambos. Sin embargo, el grafo de la derecha tiene un vértice de grado 4 (el vértice v_2) mientras que el grafo de la izquierda no tiene ningún vértice de grado 4. Luego, como este invariante no se cumple, podemos afirmar que ambos grafos NO son isomorfos.

Para el par de grafos del ejercicio 38, responden los alumnos.

8.4 Conexión en grafos

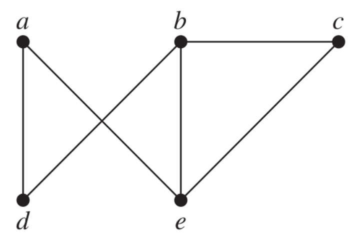
- **Ejercicio 1.** Forma un camino cada una de estas listas de vértices en el grafo siguiente? Qué caminos son simples? Cuáles son circuitos? Qué longitud tienen los que son caminos? Es el grafo de la figura conexo?

  a) a, e, b, c, b

  b) a, e, a, d, b, c, a

  c) e, b, a, d, b, e

  d) c, b, d, a, e, c



Respuesta

a) a, e, b, c, b: es camino, pero no es simple, no es circuito, tiene longitud 4.

b) a, e, a, d, b, c, a: no es camino porque la arista $\{c, a\}$ no está en el grafo.

c) e, b, a, d, b, e: no es camino porque la arista $\{b, a\}$ no está en el grafo.

d) c, b, d, a, e, c: es camino simple, también es circuito, tiene longitud 5.

El grafo es conexo, ya que en este caso se observa que existe un camino entre cada par de vértices distintos del mismo.

- **Ejercicio 15.** Halla el número de caminos de longitud n entre dos vértices diferentes de K_4 si n es: a) 2, b) 3, c) 4.

  Respuesta Utilizaremos las distintas potencias de la matriz de adyacencia del grafo K_n:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

por lo que hay 2 caminos diferentes de longitud 2 entre vértices distintos de K_4.

b)

$$A^2 \cdot A = A^3 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

por lo que hay 7 caminos diferentes de longitud 3 entre vértices distintos de K_4.

c)

$$A^2 \cdot A^2 = A^4 = \begin{pmatrix} 21 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 21 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 21 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

por lo que hay 20 caminos diferentes de longitud 4 entre vértices distintos de K_4.

- **Ejercicio 18.** Halla el número de caminos entre los vértices c y d en el grafo del ejercicio 1 que contengan longitud: a) 2, b) 3, c) 4, d) 5.

  Respuesta Para dar respuesta a este ejercicio se utilizará el teorema 2 de la página 537 del libro de Rosen, 5ta Edición. Luego, deberemos calcular las distintas potencias de la matriz de adyacencia del grafo, según cuál sea la longitud del camino solicitado, y observar en la matriz la entrada correspondiente a los vértices c y d. La matriz de adyacencia del grafo de la figura 1 es la siguiente, considerando el orden alfabético de los vértices para las filas y columnas de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Caminos de longitud 2: debemos calcular $A^2 = A \cdot A$,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego la entrada correspondiente a los vértices c y d es 1, lo cual nos indica que el número de caminos de longitud 2 entre estos vértices es 1, a saber: d, b, c.

b) Caminos de longitud 3: debemos calcular $A^3 = A^2 \cdot A$,

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & \boxed{2} & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego la entrada correspondiente a los vértices c y d es 2, lo cual nos indica que el número de caminos de longitud 3 entre estos vértices es 2, a saber: d, b, e, c y d, a, e, c.

c) Caminos de longitud 4: debemos calcular $A^4 = A^3 \cdot A$,

$$A^4 = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 6 & 1 & 3 \\ 11 & 15 & 8 & 3 & 7 \\ 6 & 8 & 8 & \boxed{6} & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 9 & 11 \\ 3 & 7 & 8 & 11 & 15 \end{bmatrix}$$

Luego la entrada correspondiente a los vértices c y d es 6, lo cual nos indica que el número de caminos de longitud 4 entre estos vértices es 6, a saber:

- d, b, e, b, c
- d, a, e, b, c
- d, b, d, b, c
- d, a, d, b, c
- d, b, c, b, c
- d, b, c, e, c

- **Ejercicios 20.** Demuestra que un grafo conexo con n vértices tiene *al menos* $n - 1$ aristas.

Respuesta: la demostración del enunciado será realizada mediante inducción matemática.

Veamos en primer lugar que si el grafo es conexo, entonces existe un camino entre dos vértices cualesquiera del mismo.

Paso Base (P.B.): el mismo será realizado para $n = 2$. En tal caso tengo dos vértices distintos. Como el grafo es conexo, tiene que existir una arista entre ambos, lo cual verifica que el grafo tiene *al menos* una arista. De esta manera, se cumple el paso base.

Paso Inductivo (P.I.): la hipótesis inductiva (H.I.) consiste en asumir que $P(k)$: "un grafo conexo con k vértices tiene *al menos* $k-1$ aristas" es verdadera. Luego, quiero demostrar que si la H.I. se cumple, entonces $P(k+1)$: "un grafo conexo con $k+1$ vértices tendrá *al menos* k aristas" también se cumple.

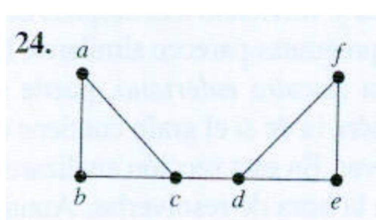
Ahora bien, la demostración del paso inductivo será realizada por contradicción. Entonces, voy a negar $P(k+1)$ y voy a intentar llegar a un absurdo que contradiga a $P(k)$. Luego digo: "sea G un grafo conexo con $k+1$ vértices y *con menos* de k aristas. Por el teorema del apretón de manos sabemos que

$$2e = \sum_{v_i \in V} \delta v_i \tag{33}$$

con $|V| = k+1$. Como supuse que $e < k$, entonces $\sum_{v_i \in V} \delta v_i < 2k < 2(k+1)$, donde la primera desigualdad se cumple por hipótesis cuando digo que tiene *menos* de k aristas. Pero entonces veo que alguno de los $k+1$ vértices tiene grado menor a 2, ya que si todos fueran de grado 2 entonces la sumatoria sería igual a $2(k+1)$. Ahora bien, si existen vértices con grado menor a dos, significa que esos vértices son hojas (grado 1), ya que el grafo, por hipótesis, es conexo y por lo tanto, el grado no puede ser cero. Pero si ahora elimino a éste vértice de grado 1 del grafo, la conectividad del grafo subyacente no va a cambiar y va a seguir siendo conexo, ahora con k vértices y *con menos* de $k-1$ aristas. Pero esto contradice mi H.I!!! Es decir que NO puede ser cierto que si G es conexo y tiene $k+1$ vértices entonces tenga *menos de* k aristas. Tiene que tener *al menos* k aristas. Con ello mostramos la veracidad del paso inductivo.

Finalmente, como se cumple el P.B. y el P.I., por el principio de inducción matemático podemos asegurar que se cumple el enunciado del ejercicio.

- **Ejercicios 24 y 26.** Hallar todos los vértices de corte y todas las aristas de corte del siguiente grafo:



Respuesta. Los vértices de corte (o puntos de articulación) son: c, d. La única arista de corte (o puente) es $\{c, d\}$.

- **Ejercicio 38.** Describe la matriz de adyacencia de un grafo con n componentes conexas si los vértices del grafo se ordenan de manera que los vértices de cada una de las componentes conexas aparecen consecutivamente.

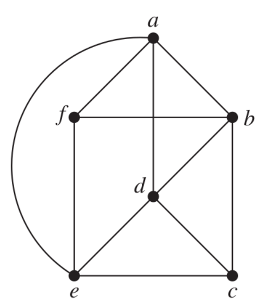
  Respuesta. La matriz de adyacencia será una matriz diagonal por bloques. Cada bloque contendrá la información de la adyacencia de los vértices de la componente conexa que representan, mientras que fuera del bloque todos los coeficientes serán cero, esto es:

$$\begin{pmatrix} [\text{cc I}] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [\text{cc II}] & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & [\text{cc n}] \end{pmatrix}$$

8.5 Caminos eulerianos y hamiltonianos

- **Ejercicios 4 y 5.** Determina si los grafos de las correspondientes figuras tienen o no un *circuito euleriano*. Construye uno en el caso de que exista. Si no existe ningún circuito euleriano, determina si el grafo tiene o no un *camino euleriano* y construye uno en el caso de que exista.

4.

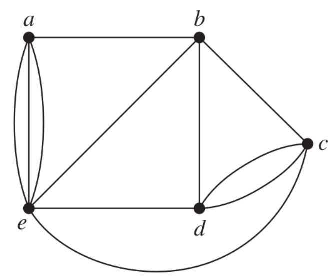


Respuesta: para determinar si un grafo conexo tiene o no un circuito euleriano, utilizamos el teorema 1 de la página 543 del libro de Rosen, el cual enuncia que: *un multigrafo conexo contiene un circuito euleriano si y sólo si cada uno de sus vértices es de grado par.*

En el grafo de la figura 4 vemos que no ocurre tal situación, ya que los vértices f y c tienen ambos grado 3. Luego podemos afirmar que el grafo NO tiene circuito euleriano.

Entonces, para determinar si el grafo tiene o no camino euleriano, utilizamos el teorema 2 de la página 544 del libro de Rosen, el cual enuncia que: *un multigrafo conexo contiene un camino euleriano, pero no un circuito euleriano, si y sólo si tiene exactamente dos vértice de grado impar*. Como este es el caso de nuestro grafo, podemos afirmar que existe un camino euleriano. Por ejemplo: $c, e, a, f, e, d, c, b, d, a, b, f$.

5.



Respuesta: repitiendo el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior, podemos afirmar que el grafo de la figura 5 tiene un circuito euleriano porque todos sus vértices son de grado par. Un circuito euleriano es: $a, e, c, d, e, a, e, b, d, c, b, a$.

- **Ejercicios 26.** Para qué valores de n contienen los siguientes grafos un circuito euleriano?

  a) K_n
  b) C_n
  c) W_n
  d) Q_n

Respuesta

a) K_n: sabemos que todos los vértices del grafo K_n tienen grado $n-1$. Es claro que para $n = 1$ y $n = 2$ es imposible que tengan un circuito euleriano. Ahora bien, para $n \geq 3$, se observa que el K_n tendrá circuito euleriano siempre que n sea impar, ya que en tal caso el grado de cada uno de sus vértices será par y se cumple el teorema 1 de la página 543 del libro de Rosen.

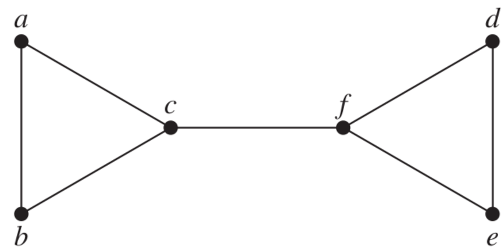
b) C_n: todos sus vértices son de grado 2, sin importar el número de vértices que tenga el ciclo (definido para $n \geq 3$). Luego, todos los ciclos tienen circuito euleriano.

c) W_n: Los vértices de la *llanta* siempre tienen grado 3, sin importar el número de vértices de la rueda. Luego, ninguna rueda puede tener circuito euleriano.

d) Q_n: todos los vértices del n-cubo tienen grado n. Por lo tanto, sólo los n-cubos con n par tendrán circuito euleriano.

- **Ejercicios 30, 31 y 32 (37, 38 y 39).** Determina si los grafos de las correspondientes figuras tienen o no un *circuito hamiltoniano*. Construye uno en el caso de que exista. Si no existe ningún circuito hamiltoniano, determina si el grafo tiene o no un *camino hamiltoniano* y construye uno en el caso de que exista.

30.



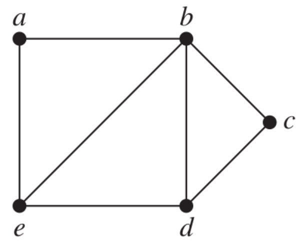
Respuesta: recordemos que en el caso que debamos determinar si un grafo conexo tiene o no un circuito hamiltoniano, contamos con dos teoremas que sólo proporcionan condiciones suficientes pero no necesarias para la existencia de tal circuito. Ellos son los teoremas de Dirac y Ore (página 458 del libro de Rosen), los cuales se transcriben a continuación

Teorema de Dirac: sea G un grafo simple con n vértices para $n \geq 3$ tal que todos los vértices de G tienen grado mayor o igual que $n/2$. Entonces, G contiene un circuito hamiltoniano.

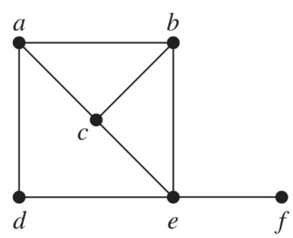
Teorema de Ore: sea G un grafo simple con n vértices para $n \geq 3$ tal que $\delta(u)+\delta(v) \geq n$ para cada par de vértices NO adyacentes u y v de G. Entonces, G contiene un circuito hamiltoniano.

En el caso del grafo de la figura 30, vemos que $n = 6$ y que tiene cuatro vértices de grado 2 (a saber: a, b, d, e) y dos de grado 3 (a saber: c, f). Luego, no cumple la hipótesis del teorema de Dirac por lo cual no puedo afirmar si tiene o no circuito hamiltoniano. Por otro lado, si lo analizo bajo el teorema de Ore, vemos que la suma de los grados de los vértices no adyacentes es 4 ó 5, lo cual no es mayor que $n = 6$. Por lo tanto, tampoco cumple la hipótesis de teorema de Ore. De manera que tampoco puedo afirmar que tenga o no circuito hamiltoniano. Debo entonces analizar por inspección el grafo. Aquí veo que no tiene circuito hamiltoniano porque una vez que pasé por los vértices c y f, no hay forma de volver a pasar por allí para cerrar el circuito.

Por otro lado, se observar por inspección que el grafo tiene camino hamiltoniano. Uno de ellos es el siguiente: a, b, c, f, e, d.

31. 

Respuesta: el grafo de la figura 31 tiene $n = 5$ vértices, con los siguientes grados: $\delta(a) = 2$, $\delta(b) = 4$, $\delta(c) = 2$, $\delta(d) = 3$ y $\delta(e) = 3$. Vemos que no todos los vértices del grafo tiene grado mayor que $\lceil n/2 \rceil$, por lo tanto no se cumple la hipótesis del teorema de Dirac y no puedo afirmar nada. Si intento aplicar el teorema de Ore, veo que su hipótesis tampoco se cumple ya que $\delta(a) + \delta(c) = 4$, que es menor que el número de vértices del grafo. Luego la hipótesis de dicho teorema tampoco se cumple y no puedo afirmar que tenga o no circuito hamiltoniano. Sin embargo, por simple inspección vemos que un circuito hamiltoniano es el a, b, c, d, e, a.

32. 

Respuesta: finalmente, el grafo de la figura 32 no puede tener circuito hamiltoniano porque tiene un vértice de grado 1 (el vértice f). Por otro lado, sí tiene camino hamiltoniano, uno de los cuales es: f, e, d, a, c, b.

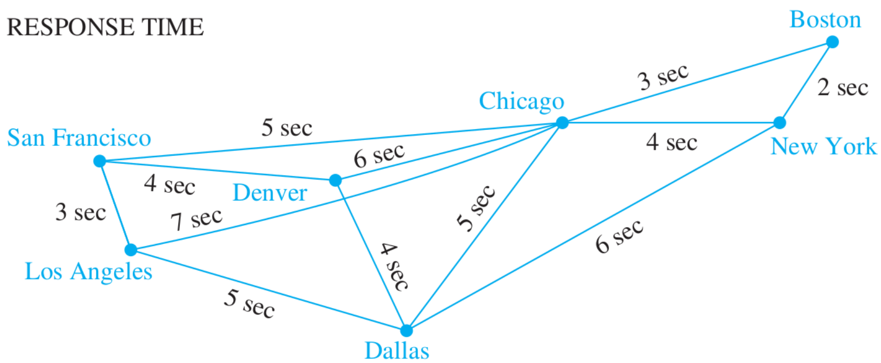
8.6 Caminos de longitud mínima

- **Ejercicio 2 y 5.** Determina el camino de longitud mínima (y su longitud) en el siguiente grafo.

  Respuesta: La solución se presenta en el siguiente enlace: Ver solución

---

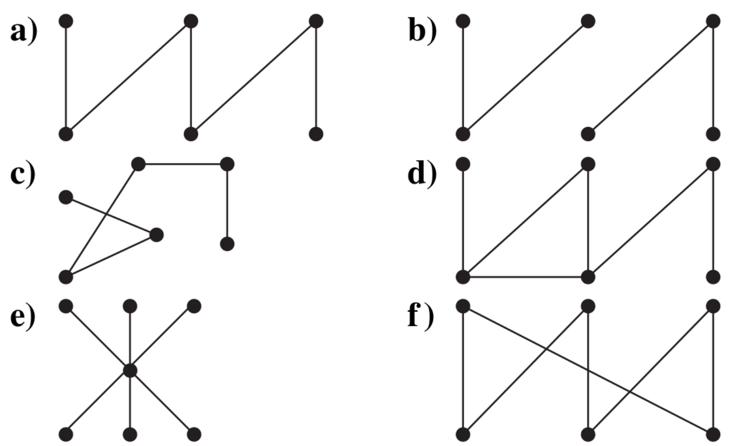
- **Ejercicio 12.** Determina una ruta con menor tiempo de respuesta entre los centros informáticos de las ciudades de Boston y Los Ángeles en el grafo de la figura 2, pág.556 del libro de Rosen 5ta Edición, que se presenta a continuación.



9 Árboles

9.1 Introducción a árboles

- **Ejercicio 1.** Cuáles de los siguientes grafos son árboles?



Respuesta: recordemos que la definición de árbol dice que un grafo es un árbol sıy sólo si el grafo es conexo, no dirigido, sin ciclos y simple. Luego, sobre los grafos de la figura se puede decir que:

a) es un árbol porque es conexo, sin ciclos, simple y no dirigido.

b) no es un árbol porque no es conexo.

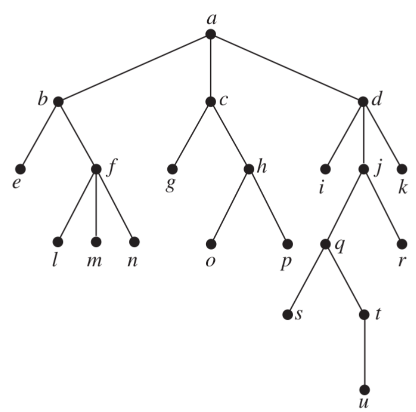
c) es un árbol porque es conexo, sin ciclos, simple y no dirigido.

d) no es un árbol porque tiene ciclos.

e) es un árbol porque es conexo, sin ciclos, simple y no dirigido.

f) no es un árbol porque tiene ciclos.

- **Ejercicio 3.** Contesta las siguientes preguntas relativas al árbol con raíz que se muestra a continuación.



Respuesta

a) Cuál es el vértice raíz? La raíz es el vértice a.

b) Cuáles son los vértices internos? Los vértices internos son a, b, c, d, f, h, j, q, t.

c) Qué vértices son hojas? Los vértices hojas son e, g, i, k, l, m, n, o, p, r, s, u.

d) Qué vértices son hijos de j? Estos son q y r.

e) Qué vértice es padre de h? El vértice c es padre de h.

f) Qué vértices son hermanos de o? El vértice p es el único hermano de o.

g) Cuáles son los antecesores de m? Los antecesores de m son f, b, a.

h) Cuáles son los descendientes de b? Los descendientes de b son e, f, l, m, n.

- **Ejercicio 5.** Es el árbol con raíz del ejercicio 3 un árbol m-ario completo para algún entero positivo m?

  Respuesta No, porque para que un árbol con raíz sea m-ario completo, todos sus vértices internos deben tener exactamente m hijos. Vemos que en el árbol con raíz del ejercicio 3, algunos vértices internos tiene 2 hijos (por ejemplo, el vértice b ó el h) mientras que otros tienen 3 (por ejemplo, el vértice f ó el d).

  Por otro lado, es un árbol 3-ario, ya que todos los vértices internos tienen *a lo sumo* 3 hijos.

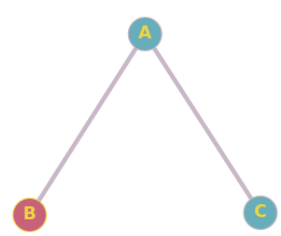
- **Ejercicio 7.** Cuál es el nivel de cada vértice del árbol con raíz del ejercicio 3?

  Respuesta: responden los alumnos

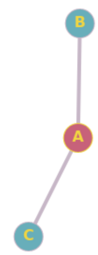
- **Ejercicio 11.** a) Cuántos árboles sin raíz hay con 3 vértices salvo isomorfismo? b) Cuántos árboles con raíz hay con 3 vértices salvo isomorfismo?

  Respuesta

  a) Teniendo en cuenta que un árbol es un grafo conexo, no dirigido, acíclico y simple, si dibujo los 3 vértices del árbol, como debe ser conexo pero sin ciclos, sólo puede tener 2 aristas, una uniendo al vértice a con el b y otra uniendo al vértice a con el c. Como además se indica que no tiene raíz y que no se deben contar los grafos que sean isoformos a éste, entonces la respuesta es que existe un único árbol de 3 vértices, salvo isomorfismo (no hay ningún vértice en la figura del árbol que sea "distinguido" como raíz).

  b) Si ahora consideramos que el árbol tiene raíz, sobre el grafo de la figura anterior podemos distinguir dos casos: i) cuando el vértice a es la raíz y sus dos hijos son los vértices b y c, en cuyo caso la representación es la misma que en la figura del inciso a); ii) cuando la raíz es, por ejemplo, el vértice b y los descendientes son a (hijo de b) y c (hijo de a), en cuyo caso lo dibujamos como sigue,



- **Ejercicio 17.** Cuántas aristas tiene un árbol con 10000 vértices?

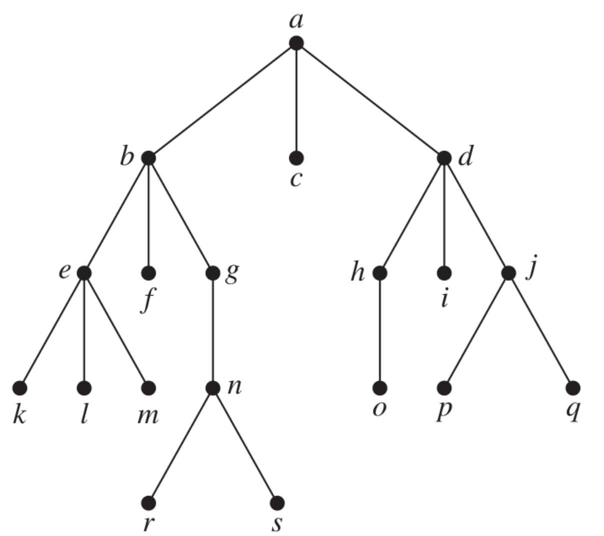
  Respuesta: responden los alumnos

- **Ejercicio 18.** Cuántos vértices (y cuántas hojas) tiene un árbol 5-ario completo con 100 vértices internos?

  Respuesta: según el teorema 4 de la página 596 del libro de Rosen, 5Ed., un árbol m-ario completo con i-vértices internos tiene $n = m \cdot i + 1$ vértices y $l = (m-1)i + 1$ hojas. Luego, en nuestro caso, $m = 5$, $i = 100$. Por lo tanto, $n = 501$ es el número de vértices y $l = 401$ hojas.

9.3 Recorridos en árboles

- **Ejercicios 9, 12 y 15.** En qué orden se visitan los vértices del árbol de la figura si se utiliza el recorrido: a) preorden, b) inorden, c) postorden ?



Respuesta

a) Siguiendo el algoritmo de recorrido *preorden*, en primer lugar debemos citar a la raíz del árbol y luego debemos volver a aplicar el mismo algoritmo *preorden* a cada uno de los subárboles cuyas raíces son los hijos de la raíz, recorriendo a los hijos de izquierda a derecha.

ALGORITHM 1 Preorder Traversal.

```
procedure preorder(T: ordered rooted tree)
r := root of T
list r
for each child c of r from left to right
    T(c) := subtree with c as its root
    preorder(T(c))
```

Así, en primer lugar citamos a a. Luego, el primer hijo de a es b, así que ahora llamamos a *preorden* sobre el subárbol cuya raíz es b. Ahora citamos a la raíz de éste árbol, la cual es b, y llamamos nuevamente a *preorden* para el subárbol con raíz e. Entonces citamos a la raíz e y llamamos a *preorden* para el subárbol con raíz k. Citamos a la raíz k y como k no tiene hijos, retornamos. Ahora, pasamos a analizar al siguiente hijo del vértice e, citado de izquierda a derecha, por lo cual corresponde llamar a *preorden* para el subárbol con raíz en l. Citamos a la raíz l y como no tiene hijos, retornamos. Analizamos al siguiente hijo de e, es decir, m, por lo cual llamamos a *preorden* para el subárbol con raíz en m. Citamos a la raíz m y como no tiene hijos, retornamos. Como e no tiene más hijos, retornamos. Ahora analizamos al siguiente hijo de b, que es el f. Llamamos a *preorden* para el subárbol con raíz en f. Citamos a la raíz f y como no tiene hijos, retornamos. Ahora seguimos con el próximo hijo de b, es decir, g. Continuando con éste procedimiento, el recorrido en predorden del árbol ordenado con raíz es el siguiente: **a, b, e, k, l, m, f, g, n, r, s, c, d, h, o, i, j, p, q**.

b) Siguiendo el algoritmo de recorrido *inorden*, en primer lugar debemos identificar a la raíz del árbol y si es una hoja, entonces la citamos. Si no es una hoja, entonces debemos aplicar el mismo algoritmo *inorden* al subárbol correspondiente al hijo más izquierdo de la raíz, luego debemos citar a la raíz y luego debemos aplicar el algoritmo *inorden* a cada uno de los subárboles cuyas raíces son los hijos restantes de la raíz, recorriéndolos de izquierda a derecha.

ALGORITHM 2 Inorder Traversal.

procedure *inorder*(T: ordered rooted tree)
$r :=$ root of T
if r is a leaf **then** list r
else
  $l :=$ first child of r from left to right
  $T(l) :=$ subtree with l as its root
  inorder($T(l)$)
  list r
  for each child c of r except for l from left to right
    $T(c) :=$ subtree with c as its root
    inorder($T(c)$)

Luego, para el árbol de la figura, tenemos que la raíz es a. Como no es una hoja, consideramos al hijo más izquierdo de a, que es b. Considero ahora al subárbol con raíz en b y llamo a $inorden(T(b))$. Ahora considero la raíz del árbol, que es b. Como no es hoja, considero a su hijo más izquierdo que es e y llamo $inorden(T(e))$ para el subárbol con raíz en e. Este árbol tiene como raíz a e, que no es hoja. Entonces considero a su hijo más izquierdo que es k y llamo $inorden(T(k))$. Este subárbol tiene como raíz a k, que al ser una hoja, la cito y retorno. Ahora estoy en el subárbol con raíz en e, cito a la raíz e y recorro de izquierda a derecha a los hijos restantes (l y m). Defino el subárbol con raíz en l y llamo a $inorden(T(l))$. Como la raíz de éste árbol es hoja, la cito y retorno. Paso al siguiente hijo de e, que es m, defino el subárbol con raíz en m y llamo a $inorden(T(m))$. Como la raíz de éste árbol es hoja, la cito y retorno. Ahora cito a la raíz del árbol del cual b era el hijo más izquierdo, es decir, cito a b, y recorro de izquierda a derecha a los hijos restantes (f y g). Defino al subárbol con raíz en f y llamo $inorden(T(f))$. Como la raíz es hoja, cito a f y retorno. Sigo con el vértice g, defino al subárbol con raíz en g y llamo $inorden(T(g))$. Continuando de ésta manera, podemos finalmente decir que el recorrido en inorden del árbol ordenado con raíz es el siguiente: **k, e, l, m, b, f, r, n, s, g, a, c, o, h, d, i, p, j, q**.

c) Siguiendo el algoritmo de recorrido *postorden*, en primer lugar debemos identificar a la raíz del árbol, luego debemos volver a aplicar el mismo algoritmo *postorden* a cada uno de los subárboles cuyas raíces son los hijos de la raíz, recorriendo a los hijos de izquierda a derecha, y finalmente debemos citar a la raíz.

ALGORITHM 3 Postorder Traversal.

procedure *postorder*(T: ordered rooted tree)
r := root of T
for each child c of r from left to right
  $T(c)$:= subtree with c as its root
  postorder($T(c)$)
list r

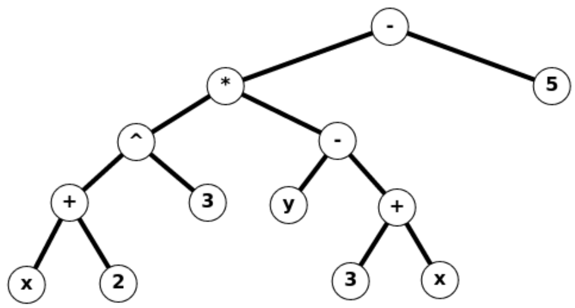
De esta manera, para el árbol de la figura identificamos a la raíz a. Luego empezamos a recorrer de izquierda a derecha a los hijos de a. Consideramos entonces al vértice b y llamamos $postorden(T(b))$. Ahora identificamos a la raíz b y empezamos a recorrer a sus hijos de izquierda a derecha, y llamamos a $postorden(T(e))$. Identificamos a la raíz de éste subárbol, que es e y recorremos a sus hijos de izquierda a derecha, por lo cual llamamos $postorden(T(k))$. Identificamos a la raíz k y como no tiene hijos, citamos a k y retornamos. Pasamos al siguiente hijo de e que es l y llamamos $postorden(T(l))$. Identificamos a la raíz l y como no tiene hijos, citamos a l y retornamos. Ahora pasamos al siguiente hijo de e que es m y volvemos a llamar $postorden(T(m))$. Definimos a la raíz de éste subárbol, y como no tiene hijos, la citamos a m y retornamos. Como ya terminé de recorrer todos los hijos de la raíz e, ahora la cito y retorno. Continuando ahora con el recorrido de los siguientes hijos de b, paso al f y llamo a $postorden(T(f))$. Identifico a la raíz de éste subárbol y como no tiene hijos, cito a la raíz f y retorno. Continúo con el siguiente hijo de b que es g y llamo a $postorden(T(g))$. Identifico a la raíz de éste subárbol, que es g y recorro a sus hijos de izquierda a derecha, por lo que llamo a $postorden(T(n))$. Continuando de ésta manera, el recorrido en postorden del árbol ordenado con raíz es el siguiente: **k, l, m, e, f, r, s, n, g, b, c, o, h, i, p, q, j, d, a**.

- **Ejercicio 16.** a) Representa, mediante un árbol binario, la expresión

```
((x+2)^3)*(y-(3+x))-5
```

Escribe dicha expresión en notación b) prefija, c) postfija, d) infija

Respuesta. a) En la figura se presenta el árbol binario resultante



b) La notación prefija resulta del recorrido preorden del árbol, por lo que se tiene:

`- * ^ + x 2 3 - y + 3 x 5`

c) La notación postfija resulta del recorrido postorden del árbol, por lo que se tiene:

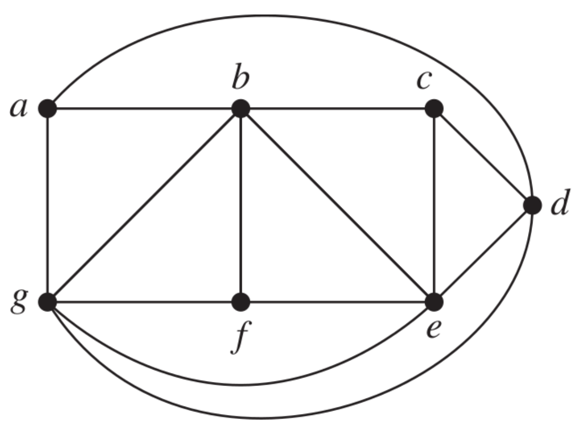
`x 2 + 3 ^ y 3  x + - * 5 -`

d) La notación infija resulta del recorrido inorden del árbol, por lo que se tiene:

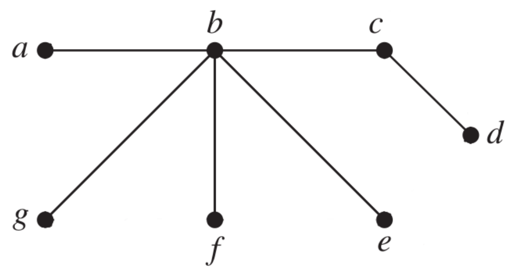
`x + 2 ^ 3 * y - 3 + x - 5`

9.4 Árbol generador o de expansión

- **Ejercicio 3.** Mediante la eliminación de ciclos, obtén un árbol generador a partir del grafo de la siguiente figura



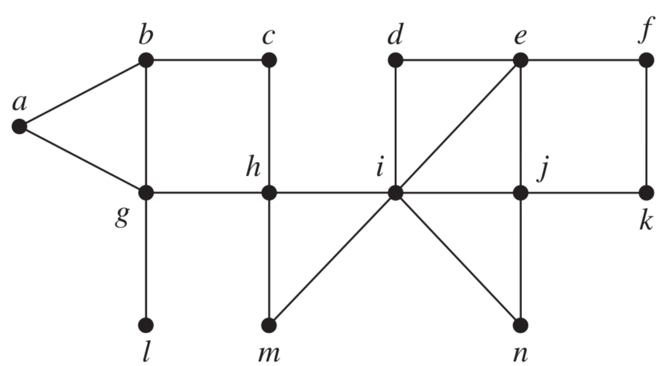
Respuesta. Eliminando aristas que forman ciclos, podemos obtener un árbol generador del grafo simple y conexo de la figura. En particular, si eliminamos las aristas $\{a, d\}$, $\{g, d\}$, $\{g, e\}$, $\{g, f\}$, $\{f, e\}$, $\{e, c\}$, $\{a, g\}$ y $\{e, d\}$, obtenemos el árbol generador siguiente



Ejercicio 1. Cuántas aristas deben eliminarse de un grafo simple y conexo con n vértices y m aristas para obtener un árbol generador?

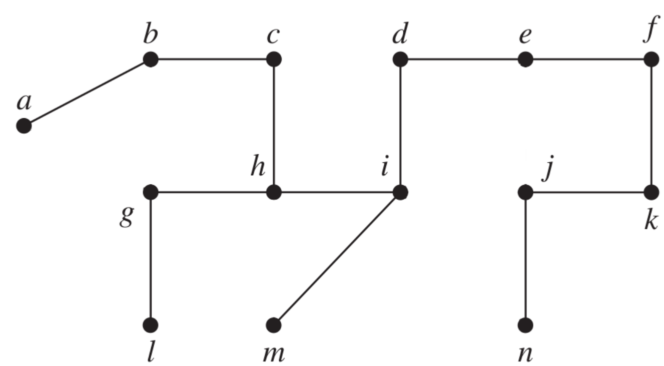
Respuesta. responden los alumnos

Ejercicio 14 y 16. Utilice a) la búsqueda en profundidad y b) la búsqueda a lo ancho para obtener un árbol generador del grafo simple y conexo dado. Elija al vértice a como la raíz del árbol y suponga que los vértices están ordenados alfabéticamente. Finalmente, dibuje los árboles generadores obtenidos como árboles con raíz (queda para los alumnos).

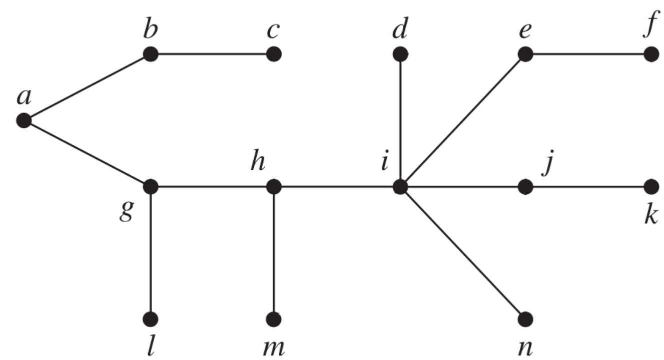


Respuesta.

a) **Búsqueda en profundidad**: partiendo de la raíz a, la cual agrego al árbol T, ahora agrego al vértice b y a la correspondiente arista $\{a, b\}$, ya que esto no me genera ciclos y b no está en T. Con el mismo criterio, ahora agrego al vértice c y a la arista $\{b, c\}$. Luego agrego al vértice h y a la arista $\{c, h\}$ y luego al vértice g y a la arista $\{h, g\}$. A continuación agrego al vértice l y a la arista $\{g, l\}$. Como el vértice l no tiene vértices adyacentes en el grafo de partida que no estén en T, retrocedo al vértice g y como no puedo agregar vértices ni aristas sin generar ciclos, retrocedo otra vez hasta el vértice h. A partir de h, agrego al vértice i y a la arista $\{h, i\}$. Entonces agrego al vértice d y a la arista $\{i, d\}$ y luego hago lo mismo con los vértices e, f, k, j y n, y sus correspondientes aristas $\{d, e\}$, $\{e, f\}$, $\{f, k\}$, $\{k, j\}$ y $\{j, n\}$. Como desde n no puedo agregar más vértices y aristas sin generar ciclos, retrocedo hasta j. Como desde j no puedo agregar vértices ni aristas sin generar ciclos, retrocedo a k. Por el mismo motivo, voy retrocediendo a f, e, d e i. Finalmente, estando en i puedo agregar al vértice m y a la correspondiente arista $\{i, m\}$. Como no hay más vértices por agregar del grafo de partida, entonces termina el algoritmo.



b) **Búsqueda a lo ancho**: partiendo de la raíz a, agrego a los vértices b y g y a las aristas $\{a, b\}$ y $\{a, g\}$. Estando ahora en el vértice b agrego al vértice c y a la arista $\{b, c\}$. Ahora, estando en el vértice g, agrego a los vértices l y h y a las aristas $\{g, l\}$ y $\{g, h\}$. Estando ahora en el vértice c, veo que no puedo agregar al vértice h porque ya está en T y si lo hiciera, me formaría un ciclo. Entonces voy al vértice h, y estando allí agrego a los vértices i y m y a las aristas $\{h, i\}$ y $\{h, m\}$. Estando en l veo que no puedo agregar más vértices porque no hay vértices adyacentes que no estén en T. Estando en m, veo que tampoco puedo agregar vértices y/o aristas. Por lo tanto, paso a estar en el vértice i. Desde allí puedo agregar a los vértices d, e, j, n y a las aristas $\{i, d\}$, $\{i, e\}$, $\{i, j\}$, $\{i, n\}$. Estando en d veo que no puedo agregar vértices ni aristas. Estando en e puedo agregar al vértice f y a la arista $\{e, f\}$. Luego voy al vértice j y desde allí puedo agregar al vértice k y a la arista $\{j, k\}$. Visitando al vértice n veo que no puedo agregar nada. Finalmente, desde los vértices f y k veo que también ya no puedo agregar más nada, por lo cual finaliza la búsqueda a lo ancho.



9.5 Árbol generador mínimo

- **Ejercicio 1 y 5.** Utiliza el algoritmo de Prim y el algoritmo de Kruskal para diseñar la red de comunicaciones descrita en el Ejercicio 1, pág. 645 del libro de Rosen 5ta Edición.

  Respuesta: Las soluciones se presentan en los siguientes enlaces:

  Algoritmo de Prim

  Algoritmo de Kruskal

---

11 Modelos de Computación

Ejercicios seleccionados

Ejercicio 11.2.5. Construye una máquina de estado finito que modele una máquina expendedora de bebidas que acepta monedas de 5, 0 y 25 centavos. La máquina acepta monedas hasta que se introducen 35 centavos y devuelve cualquier cantidad superior a 35 centavos. Entonces, el cliente puede apretar los botones y elegir una bebida de cola, una cerveza o una tónica.

Respuesta: Una máquina de estado finito se compone de $M = (I, O, S, f, g, \sigma)$, por lo que para resolver el problema hay que definir los conjuntos y funciones intervinientes, presentarlos esquemáticamentes en una tabla y luego a través de un grafo que resuma el comportamiento de nuestra máquina.

- Los estados en los que puede estar la máquina S se relacionan con la cantidad de dinero acumulada hasta el momento, esto es $S = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$, donde la máquina comienza en estado 0.

- Las posibles entradas son $I = \{5, 10, 25, C, B, T\}$ referidas a ingresar las distintas monedas aceptadas o pulsar los botones de cola, cerveza y tónica respectivamente.
- Las salidas $O = \{5, 10, 25, C, B, T, X\}$ ya que puede dar vuelto, retornar el pedido, o no retornar nada (X).
- La tabla de estados que se presenta a continuación muestra el comportamiento de las funciones de transición de estados f y de salida g.

	transición (f)						**salida (g)**					
	entrada						**entrada**					
estado	**5**	**10**	**25**	**C**	**B**	**T**	**5**	**10**	**25**	**C**	**B**	**T**
0	5	10	25	0	0	0	X	X	X	X	X	X
5	10	15	30	5	5	5	X	X	X	X	X	X
10	15	20	35	10	10	10	X	X	X	X	X	X
15	20	25	35	15	15	15	X	X	5	X	X	X
20	25	30	35	20	20	20	X	X	10	X	X	X
25	30	35	35	25	25	25	X	X	15	X	X	X
30	35	35	35	30	30	30	X	5	20	X	X	X
35	35	35	35	0	0	0	5	10	25	C	B	T

Table 1:

En la siguiente figura se presenta el grafo de la máquina expendedora. Notar que por simplicidad no se incluyen las transiciones que no modifican el estado de la máquina.