8.3. FEM 2D calor

Resolver por elementos finitos la evolución temporal de la temperatura de una placa triangular equilátera de lado 1 metro sometida a conducción pura (sin fuentes) y discretizada como un único triángulo y sometida en sus 3 caras a condiciones de contorno del tipo mixta. La temperatura inicial de la placa es de 30 Celsius, la temperatura ambiente es de 100 Celsius, el coeficiente h es de 100 kW/m2/K, la densidad del material de la placa es de 7800 kg/m3, el calor específico es de 460 J/Kg/K y la conductividad es de 53 W/m/K.

1. Informar las matrices de masa y de conducción y el vector miembro derecho elemental.
2. Elija el paso de tiempo necesario para poderlo resolver en forma implícita de manera estable.
3. Informar las temperaturas calculadas al cabo de 1 y 2 segundos.
4. Calcular los flujos de calor al cabo de 1 y 2 segundos por cada una de las 3 caras del dominio triangular.

Para empezar recordemos como eran las expresiones que permiten integrar un triángulo arbitrario tanto en coordenadas reales como en las naturales del elementos master.

$$\underline{\underline{J^e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_j - x_i) & (y_j - y_i) \\ (x_k - x_i) & (y_k - y_i) \end{bmatrix} \tag{8.11}$$

$$\underline{\underline{B^e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \end{bmatrix} = (\underline{\underline{J^e}})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} & \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} & \frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} & \frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$
$$\underline{\underline{B^e}} = (\underline{\underline{J^e}})^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

Suponiendo que el triángulo tiene el primer vértice en $(x, y) = (0, 0)$ y en consecuencia por definición del problema tendremos

$$(x, y)_1 = (0, 0) \tag{8.13}$$
$$(x, y)_2 = (1, 0) \tag{8.14}$$
$$(x, y)_3 = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2) \tag{8.15}$$
$$\tag{8.16}$$

En ese caso el jacobiano se escribe como:

$$(\underline{\underline{J^e}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

entonces la matriz de conducción sin la contribución del contorno se escribe como

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \nabla N^T \, k \, \nabla N \, d\Omega = \int_{\Omega^e} B^T \, k \, B \, d\Omega \tag{8.18}$$

$$\mathbf{K}^e = \begin{pmatrix} 30{,}6 & -15{,}3 & -15{,}3 \\ -15{,}3 & 30{,}6 & -15{,}3 \\ -15{,}3 & -15{,}3 & 30{,}6 \end{pmatrix} \tag{8.19}$$

En cuanto a la matriz de masa tenemos

$$\mathbf{M}^e_{ij} = \int_{\Omega^e} N_i \, (\rho \, C_p) \, N_j \, d\Omega = \int_{\hat{\Omega}^e} N_i \, (\rho \, C_p) \, N_j \, |J^e| d\hat{\Omega} = \rho \, C_p \, \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{8.20}$$

$$\mathbf{M}^e = 10^5 \begin{pmatrix} 2{,}5894 & 1{,}2947 & 1{,}2947 \\ 1{,}2947 & 2{,}5894 & 1{,}2947 \\ 1{,}2947 & 1{,}2947 & 2{,}5894 \end{pmatrix} \tag{8.21}$$

En cuanto a la condición Robin o mixta, el aporte a la matriz del contorno entre los nodos 1 y 2 es:

$$\mathbf{A}^e_{12} = \int_{1-2} N_i \, h \, N_j \, ds = \int_0^1 h \begin{pmatrix} (1-s)^2 & (1-s)\,s & 0 \\ (1-s)\,s & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ds = \frac{1}{6} \, h \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.22}$$

Dada la similitud de los 3 lados, todos unitarios y con las mismas condiciones esto se repite del siguiente modo:

$$\mathbf{A}^e_{23} = \int_{2-3} N_i \, h \, N_j \, ds = \frac{1}{6} \, h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{8.23}$$

$$\mathbf{A}^e_{31} = \int_{3-1} N_i \, h \, N_j \, ds = \frac{1}{6} \, h \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{8.24}$$

$$\left(M^e + K^e + A^e_{12} + A^e_{23} + A^e_{31}\right) T^{n+1} = M^e T^n + f^e_{12} + f^e_{23} + f^e_{31}$$

Con un paso de tiempo $\Delta t = 0{,}1$ si seguimos la evolucion temporal hasta los 10 segundos vemos la siguiente figura:

Los flujos de calor a través de las 3 caras son iguales dado que las temperaturas de los 3 nodos crecen similarmente con el tiempo y las condiciones externas son únicas para las 3 caras. Entonces el flujo de calor surge de la propia condición mixta, es decir:

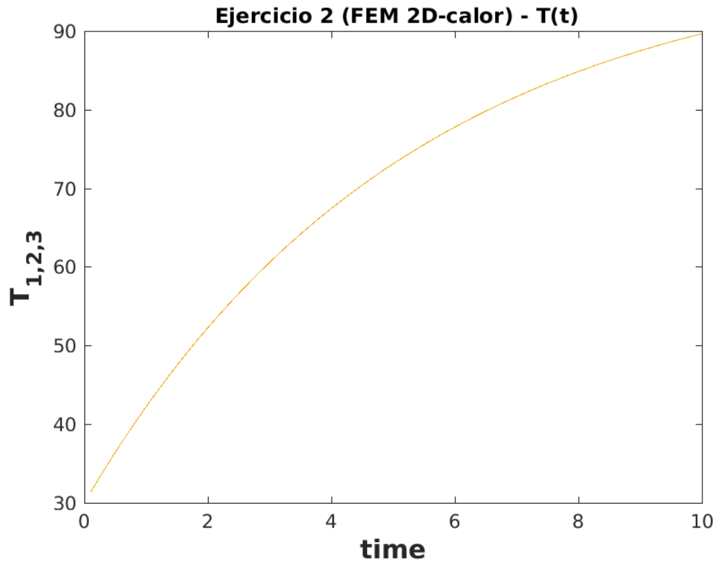

Figura 8.8: Temperatura vs tiempo - FEM 2D

$$k\nabla T(t)\cdot\boldsymbol{\eta} + h(T(t) - T_\infty) = 0$$

Es decir que el flujo de calor se puede calcular a partir de

$$q = -k\nabla T(t)\cdot\boldsymbol{\eta} = h(T(t) - T_\infty)$$

Como la temperatura varia en el tiempo graficamos como es ese flujo de calor en el tiempo en la siguiente figura:

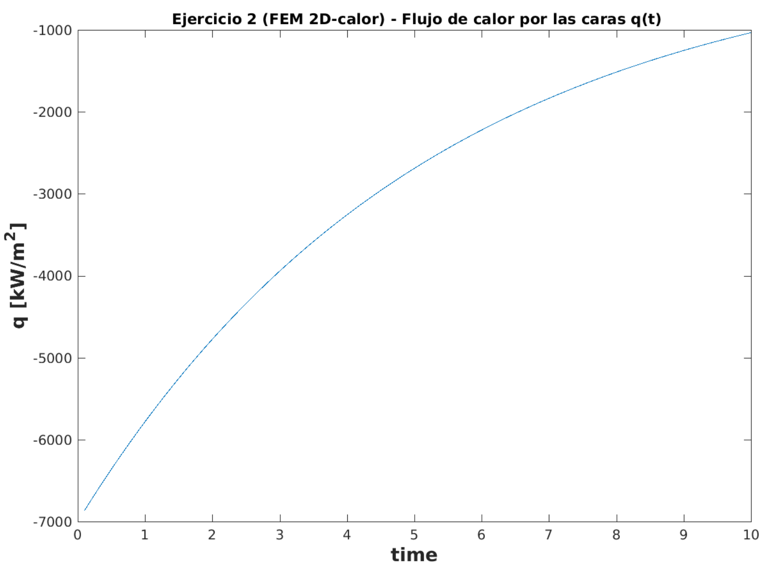

Figura 8.9: Flujo de calor vs tiempo - FEM 2D

8.3.1. Ejercicio Recuperatorio Diciembre 2024

En el examen recuperatorio de Diciembre de 2024 hemos tomado un ejercicio similar solo que las condiciones de contorno en las 3 aristas eran un tanto diferentes, en cada una de las 3 aristas habia una de las 3 condiciones normalmente usadas.

El enunciado era:

1. Escriba la ecuación diferencial general en coordenadas cartesianas en 2D para la conducción del calor, no estacionaria, reactiva y con fuente. Por el momento no tenga en cuenta las condiciones de contorno.
2. Marque cuáles son los parámetros que deben ser proporcionados como datos del problema y cuales son las dimensiones de los mismos en un sistema internacional de medidas.
3. Utilizando el método de residuos ponderados defina el residuo y usando Galerkin como función de peso defina la ecuación integral a resolver en todo el dominio. Por el momento deje las funciones de prueba escritas en forma genérica, expresadas como N(x,y).
4. A continuación plantee lo que debería resolver por cada elemento de la malla en cuestión, aún sin tener en cuenta las condiciones de contorno.
5. Discretice usando funciones de forma C lineales, pensando que todos los elementos son triangulares y usando el método "theta" para integrar en el tiempo. Si aparece un término de contorno por el momento déjelo expresado en forma genérica.
6. Escriba cada término anterior como contribución a la matriz de rigidez global o al vector miembro derecho global, según corresponda, es decir escriba K_{ij}^e y f_i^e para un elemento arbitrario. Para el caso del miembro derecho escriba para cada una de las 3 condiciones de contorno estudiadas en el curso como estas modifican K_{ij}^e y f_i^e.
7. A partir de la figura siguiente aplique lo obtenido anteriormente a los siguientes casos:
    - *a*) theta=0, calcule la matriz de rigidez y el miembro derecho global para la malla de la izquierda, y en este caso cuál es el paso de tiempo máximo permitido ?
    - *b*) Calcule la temperatura en todos los nodos al cabo de 2 segundos.
    - *c*) Idem (a) pero ahora usando theta=1, en este caso cuál es el paso de tiempo máximo permitido ?
    - *d*) Idem (b) pero usando theta = 1.
    - *e*) Idem (a) usando theta=1/2
    - *f*) Idem (b) usando theta=1/2
8. Repita lo mismo para la malla de la derecha
9. Emita conclusiones respecto a las soluciones obtenidas

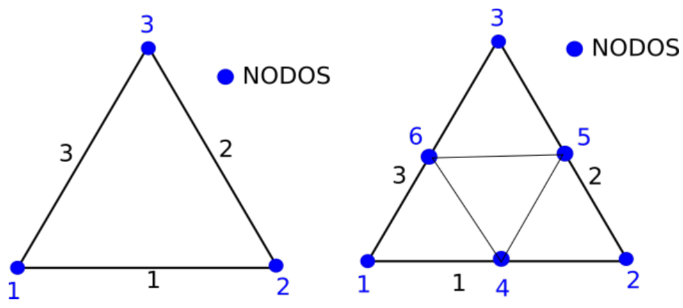

Figura 8.10: Ejercicio FEM 2D Calor - Definicion

El dominio es un triángulo equilátero de 1 mm de lado. En todos los casos la solución inicial de partida es constante e igual a 273 K en todos los nodos. La fuente es constante en todo el dominio e igual a

100 medida en Watt/m³. El término reactivo en este caso es igual a 10 Watt/m³/C. Las condiciones de contorno a usar son: • arista 1 (entre nodos 1 y 2) flujo normal entrante de 10 Watt/m² • arista 2 (entre nodos 2 y 3) condición mixta con h=200 Watt/m²/K y temperatura exterior de 283 K • arista 3 (entre nodos 3 y 1) condición Dirichlet (incluyendo los nodos extremos)

La figura a la derecha surge de refinar las 3 aristas del triángulo a la mitad y generar 4 triángulos mas chicos en lugar de 1 solo grande como se observa en la misma.

Si necesita algunos datos mas tómelos de aquí: Densidad = 1000 kg/m³ Calor específico = 4186 Joules/Kg/K Conductividad térmica = 0,58 Watt/(m·K)

Nota: Puntos 1 al 6: 20 pts. Punto 7: 30 pts. Punto 8: 40 pts. Punto 9: 10 pts.

Cabe aclarar que el valor Dirichlet en los nodos 1 y 2 coincide con el valor inicial de 273 K.

En cuanto a las respuestas tenemos:

1. $$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + cT = \nabla \cdot \left(\kappa \nabla T\right) + Q \tag{8.25}$$

   Se debe agregar luego las condiciones de contorno, que en general suelen ser :

   $$T = \bar{T} \qquad \forall x \in \Gamma_T \tag{8.26}$$
   $$-\kappa \nabla T \cdot \eta = \bar{q} \qquad \forall x \in \Gamma_q \tag{8.27}$$
   $$\kappa \nabla T \cdot \eta + h_\infty (T - T_\infty) = 0 \qquad \forall x \in \Gamma_h \tag{8.28}$$
   $$\tag{8.29}$$

2. Los parámetros a establecer como datos son:

   $$\rho, C_p, \kappa, c, Q$$

   para el problema en el interior además de las condiciones de contorno que en este problema son

   $$\bar{T}, \bar{q}, h_\infty, T_\infty$$

   las temperaturas de los nodos Dirichlet, el flujo de calor en la arista 1 y los parámetros propios de la condición Robin o mixta. Las unidades en el sistema internacional son las que están expresadas al final del enunciado, es decir por ejemplo, ρ en kg/m³, y asi con el resto que aqui por razones de brevedad evito escribir. Respecto a aquellas unidades como el calor específico que se expresan Joules/Kg/K esto se debe interpretar como la cantidad de Joules o su equivalente en calorias que hay que aportar a un medio material para hacerle subir 1 grado K a cada Kg de masa que quiero calentar. Lo mismo con la constante reactiva c, que se expresa en Watt/m³/C equivale a la cantidad de Watt que consume o emite un medio material por cada m³ de volúmen y por cada grado de temperatura del sistema. Aqui la conversion entre 1 grado C y 1 grado K es directa, es decir, como T[K] = T[C] + 273, dT[K] = dT[C] porque la diferencial de una constante es nula. O si se quiere subir 10 grados Celsius a un sistema equivale a subir igualmente 10 Kelvin al mismo.

3. El residuo se define como

   $$\mathcal{R} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + cT - \nabla \cdot \left(\kappa \nabla T\right) - Q \tag{8.30}$$

   $$\int_\Omega \mathcal{W}\mathcal{R} d\Omega = \int_\Omega \mathcal{N}\Big(\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + cT - \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - Q\Big) d\Omega \tag{8.31}$$

4. En cada elemento resolvemos

   $$\int_{\Omega^e} \mathcal{W}_i^e \mathcal{R}^e d\Omega = \int_{\Omega^e} \Big[\mathcal{N}_i\big(\rho C_p \textstyle\sum_j \mathcal{N}_j \frac{\partial T_j}{\partial t} + c \sum_j \mathcal{N}_j T_j\big) + \nabla \mathcal{N}_i \cdot (\kappa \nabla \sum_j \mathcal{N}_j T_j) - \mathcal{N}_i Q\Big] d\Omega -$$
   $$- \int_{\Gamma^e} \mathcal{N}_i \kappa \nabla \textstyle\sum_j \mathcal{N}_j T_j \cdot \eta d\Gamma \tag{8.32}$$

5. aplicamos el método θ

$$\int_{\Omega^e}\Big[\mathcal{N}_i\big(\rho C_p \sum_j \mathcal{N}_j \tfrac{T_j^{n+1}-T_j^n}{\Delta t} + c\sum_j \mathcal{N}_j T_j^{n+\theta}\big) + \nabla\mathcal{N}_i\cdot\ (\kappa\ \sum_j \nabla\mathcal{N}_j T_j^{n+\theta}) - \mathcal{N}_i Q^{n+\theta}\Big] d\Omega - \tag{8.33}$$

$$-\int_{\Gamma^e}\mathcal{N}_i\kappa\nabla\sum_j \mathcal{N}_j T_j^{n+\theta}\cdot\eta d\Gamma \tag{8.34}$$

6. generamos las matrices elementales y el vector miembro derecho correspondiente a cada elemento. La matriz de masa correspondiente al término temporal se escribe como:

$$\mathcal{M}_{ij}^e = \frac{\rho C_p}{\Delta t}\int_{\Omega^e}\mathcal{N}_i\mathcal{N}_j d\Omega \tag{8.35}$$

El término reactivo como

$$\mathcal{C}_{ij}^e = c\int_{\Omega^e}\mathcal{N}_i\mathcal{N}_j d\Omega \tag{8.36}$$

El término difusivo como

$$\mathcal{D}_{ij}^e = \int_{\Omega^e}\nabla\mathcal{N}_i\cdot\ \kappa\,\nabla\mathcal{N}_j d\Omega \tag{8.37}$$

El término fuente como

$$\mathcal{F}_{i,Q}^e = \int_{\Omega^e}\mathcal{N}_i Q^{n+\theta} d\Omega \tag{8.38}$$

El aporte de las condición de contorno Neumann en el miembro derecho se escribe como:

$$\mathcal{F}_{i,q}^e = \int_{\Gamma^e\cap\Gamma_q}\mathcal{N}_i\kappa\nabla\sum_j\mathcal{N}_j T_j^{n+\theta}\cdot\eta d\Gamma = -\int_{\Gamma^e\cap\Gamma_q}\mathcal{N}_i\bar{q}^{n+\theta}d\Gamma \tag{8.39}$$

Finalmente para la condición Robin o mixta hay que tener en cuenta que como esta depende de la incógnita en forma lineal el aporte es tanto en la matriz como en el vector miembro derecho. Entonces escrita en el miembro derecho luce como:

$$\int_{\Gamma^e\cap\Gamma_h}\mathcal{N}_i\kappa\nabla\sum_j\mathcal{N}_j T_j^{n+\theta}\cdot\eta d\Gamma = -\int_{\Gamma^e\cap\Gamma_h}\mathcal{N}_i h_\infty(\sum_j\mathcal{N}_j T_j^{n+\theta} - T_\infty)d\Gamma \tag{8.40}$$

lo cual produce una matriz que llevada al miembro izquierdo luce como:

$$\mathcal{H}_{ij}^e = h_\infty\int_{\Gamma^e\cap\Gamma_h}\mathcal{N}_i\mathcal{N}_j d\Gamma \tag{8.41}$$

dejando un vector a la derecha como

$$\mathcal{F}_{h,i}^e = h_\infty T_\infty\int_{\Gamma^e\cap\Gamma_h}\mathcal{N}_i d\Gamma \tag{8.42}$$

De forma que la ecuación completa del método θ se escribe como

$$\mathcal{M}_{i,j}^e T_j^{n+1} + \theta\,(\mathcal{C}_{i,j}^e + \mathcal{D}_{i,j}^e + \mathcal{H}_{i,j}^e)T_j^{n+1} = \mathcal{M}_{i,j}^e T_j^n + (1-\theta)\,(\mathcal{C}_{i,j}^e + \mathcal{D}_{i,j}^e + \mathcal{H}_{i,j}^e)T_j^{n+1} + \mathcal{F}_{i,Q}^e + \mathcal{F}_{i,q}^e + \mathcal{F}_{i,h}^e \tag{8.43}$$