1. Escriba un stencil para calcular la derivada primera descentrada solo hacia atrás que sea de tercer orden sobre una malla uniforme. Demuestre que el stencil reproduce lo buscado a través de aplicarlo a un caso práctico. Por ejemplo

$$tanh(x^3/\sigma)$$

con $\sigma = 0{,}1$ alrededor del punto 0.1. Grafique el error en función del tamaño de la malla para verificar el orden de convergencia deseado.

Para calcular la derivada primera descentrada de tercer orden, tengo que llegar hasta el orden 4 en Taylor: cant. puntos - orden derivada = orden aproximación -> 3+1 = 4

Taylor:

$$\left.\begin{aligned}
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{E}(\mathcal{O}(h^4)) \\
f(x-2h) &= f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) - \frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{E}(\mathcal{O}(h^4)) \\
f(x-3h) &= f(x) - 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) - \frac{(3h)^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{E}(\mathcal{O}(h^4))
\end{aligned}\right\}$$

Realizo una combinación lineal de todas estas funciones para aproximar $f'(x)$

$$\begin{aligned}
f'(x) &\approx c_0 f(x_i) + c_1 f(x_{i-1}) + c_2 f(x_{i-2}) + c_3 f(x_{i-3}) \\
&\approx c_0 f(x_i) + c_1\left[f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x)\right] \\
&\quad + c_2\left[f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) - \frac{8h^3}{3!}f'''(x)\right] + c_3\left[f(x) - 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) - \frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)\right]
\end{aligned}$$

Agrupo derivadas: $\quad c_1 \quad c_2 \quad c_3$

$$f(x) \rightarrow c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$f'(x) \rightarrow -c_1 h - c_2 2h - c_3 3h = 1$$

$$f''(x) \rightarrow c_1\frac{h^2}{2} + c_2\frac{4h^2}{2} + c_3\frac{9h^2}{2} = 0$$

$$f'''(x) \rightarrow -c_1\frac{h^3}{3!} - c_2\frac{8h^3}{3!} - c_3\frac{(3h)^3}{3!} = 0$$

$$\left.\begin{aligned}
-c_2 2 - c_3 3 - \frac{1}{h} &= c_1 \\
c_1 &= -4c_2 - 9c_3
\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}
-2c_2 - 3c_3 &= -4c_2 - 9c_3 \\
2c_2 &= -6c_3 \Rightarrow c_2 = -3c_3
\end{aligned}$$

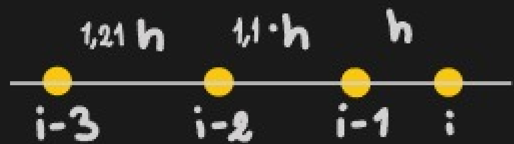
Resolviendo el sistema queda

$$c_0 = \frac{11}{6h} \quad c_1 = \frac{-3}{h} \quad c_2 = \frac{3}{2h} \quad c_3 = \frac{-1}{3h}$$

$$\text{Stencil: } f'(x) = \frac{11}{6h}f(x) - \frac{3}{h}f(x_{i-1}) + \frac{3}{2h}f(x_{i-2}) - \frac{1}{3h}f(x_{i-3})$$

2. Repita lo anterior pero ahora para una malla que crece con una tasa uniforme del $10\,\%$, es decir,

$$\Delta x_{l+1} = 1{,}1\,\Delta x_l \Rightarrow \frac{1}{1{,}1}\Delta x_{i+1} = \Delta x_i$$



El procedimiento acá es igual, solo que reemplazo h por lo que debería ser, hay que recordar que es la distancia hasta i, así que se suma todo $\quad \Delta x_i = 1{,}1\,\Delta x_{i-1}$

$$f(x_{i-1}) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{E}(\mathcal{O}(h^4))$$

$$f(x_{i-2}) = f(x) - (1+1{,}1)hf'(x) + \frac{((1+1{,}1)h)^2}{2}f''(x) - \frac{((1+1{,}1)h)^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{E}(\mathcal{O}(h^4))$$

$$f(x_{i-3}) = f(x) - (1+1{,}1+1{,}12)hf'(x) + \frac{((1+1{,}1+1{,}12)h)^2}{2}f''(x) - \frac{((1+1{,}1+1{,}12)h)^3}{3!}f'''(x) + \mathcal{E}(\mathcal{O}(h^4))$$

$$\begin{aligned}
f'(x) \approx c_0 f(x) &+ c_1\left[f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x)\right] \\
&+ c_2\left[f(x) - (1+1{,}1)hf'(x) + \frac{((1+1{,}1)h)^2}{2}f''(x) - \frac{((1+1{,}1)h)^3}{3!}f'''(x)\right] \\
&+ c_3\left[f(x) - (1+1{,}1+1{,}12)hf'(x) + \frac{((1+1{,}1+1{,}12)h)^2}{2}f''(x) - \frac{((1+1{,}1+1{,}12)h)^3}{3!}f'''(x)\right]
\end{aligned}$$

Agrupo derivadas:

$$f(x) \rightarrow c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$f'(x) \rightarrow -c_1 - c_2(1+1{,}1) - c_3(1+1{,}1+1{,}12) = \frac{1}{h}$$

$$f''(x) \rightarrow c_1\frac{1}{2} + c_2\frac{(1+1{,}1)^2}{2} + c_3\frac{(1+1{,}1+1{,}12)^2}{2} = 0$$

$$f'''(x) \rightarrow -c_1\frac{1}{6} - c_2\frac{(1+1{,}1)^3}{3!} - c_3\frac{(1+1{,}1+1{,}12)^3}{3!} = 0$$

Solucionando el sistema de ecuaciones obtengo: