Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Práctica N° 3: INDEPENDENCIA LINEAL

1) Determinar si cada uno de los siguientes conjuntos es linealmente independiente o dependiente.

a) $H = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) $H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \right\}$

d) $H = \{t^2 + t, t - 1, t + 1\}$

2) ¿Cuales de los siguientes conjuntos de vectores en P_2 son linealmente dependientes?

a) $\{2 - x + 4x^2, 3 + 6x + 2x^2, 2 + 10x - 4x^2\}$

b) $\{3 + x + x^2, 2 - x + 5x^2, 4 - 3x^2\}$

c) $\{6 - x^2, 1 + x + 4x^2\}$

3) Hallar los valores de α (si es que existen) para los cuales los vectores del conjunto C determinan que éste sea linealmente independiente:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

4) Dados los vectores $v_1 = (0, 3, 1, -1)$, $v_2 = (6, 0, 5, 1)$ y $v_3 = (4, -7, 1, 3)$:

a) Demostrar que los vectores forman un conjunto linealmente dependiente en R^4.

b) Expresar cada vector como una combinación lineal de los otros dos.

5) Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla. Si es falsa, exhibir un contraejemplo.

a) Todo conjunto de 2 vectores en R^2 es linealmente independiente en R^2.

b) Todo conjunto de vectores de un espacio vectorial V que contiene al vector nulo de V es linealmente independiente.

c) No existen condiciones para que un conjunto de un solo vector sea linealmente independiente.

d) Un conjunto finito de vectores que contiene al vector nulo es linealmente dependiente.

e) Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}\}$ también es un conjunto linealmente independiente.

f) Si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}\}$ también es un conjunto linealmente dependiente.

6) Agregar un elemento al conjunto $A = \left\{ \left(-2, \frac{1}{2}, 3\right), (1, 0, -1) \right\}$ de modo que resulte:

c) Linealmente independiente.

d) Linealmente dependiente.

7) Suponiendo que el conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es linealmente independiente, demuestra que si $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + ... + \beta_n v_n$, entonces se verifica que $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, ..., \alpha_n = \beta_n$.

8) Sea $\{v_1, v_2\}$ linealmente independiente en un espacio vectorial V. Demostrar que si un vector v_3 tiene la forma $av_1 + bv_2$ con $a, b \in R$, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente dependiente.

9) Sea el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ linealmente independiente en un espacio vectorial V. Sea c un escalar distinto de cero. Demostrar que los siguientes conjuntos también son linealmente independientes:

a) $\{v_1, v_1 + v_2, v_3\}$

b) $\{v_1, cv_2, v_3\}$

Ejercitación adicional para seguir practicando:

10 ¿Cuál de los siguientes conjuntos son linealmente independientes en R^2?

a) $\{(1, 1), (-1, -1)\}$

b) $\{(2, 3), (3, 2)\}$

c) $\{(11, 0), (0, 4)\}$

d) $\{(6, -10), (0, 0)\}$