Problema 1:
El término *m.**a*** no se incluye en el diagrama de cuerpo libre porque no es una fuerza, sino la consecuencia de la acción de la suma de todas ellas que actúan sobre el cuerpo, que son las que se representan en dicho diagrama

Problema 2:
Si el ángulo ϴ es función del tiempo entonces:

$$r(t) = |r|\ (\cos\theta(t)\, i + sen\theta(t)\ j); \qquad (1)$$

$$r'(t) = |r|\ (-sen\theta(t)\frac{d\theta}{dt} i + \cos\theta(t)\frac{d\theta}{dt}\ j); \qquad siendo: \frac{d\theta}{dt} = \varpi$$

$$\bar{r}'(t) = \bar{v}(t) = |r|\varpi\,(-sen\theta(t)\,\bar{i} + \cos\theta(t)\ \bar{j}); \qquad (2)$$

$$\bar{r}''(t) = \bar{a}(t) = |r|\varpi^2\,(-\cos\theta(t)\,\bar{i} - sen\theta(t)\ \bar{j}) \qquad (3)$$

Haciendo:

$$r(t)\bullet r'(t) = 0 \Rightarrow r(t)\ es\ perpendicular\ a\ r'(t)$$

$$r(t)\bullet r''(t) = -|r| \Rightarrow\ r(t)\ y\ r''(t) son\ opuestos$$

Problema 3:
Sea el caso de un jugador de fútbol (jugador **1)**, que ejecuta un tiro libre desde la posición $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ (el problema es bi-dimensional, distancia y altura). La pelota sale disparada al tiempo $t_0 = 0$ con un ángulo $\alpha = 30^0$ respecto al piso (eje de las *x*) y una velocidad inicial cuyo módulo es $|v_0| = 20\,m/s$. Si en el mismo instante ($t_0 = 0$), otro jugador del mismo equipo (jugador **2**) que está adelantado respecto al primero una distancia *x*= 25m. , sale corriendo a lo largo del eje "*x*" con velocidad constante ($v_{2x} = cte.$), tratando de alcanzar la pelota cuando la misma toque el suelo.
Preguntas:

a) (0.50 puntos)¿Calcular la altura máxima, $y_{máxima} = h$, alcanzada por la pelota?

b) (0.50 puntos) ¿Cuánto tiempo la pelota estará en el aire?

c) (0.50 puntos) ¿A que distancia, del punto en el que se ejecutó el tiro libre, $x_{máximo} = d$, la pelota tocará el suelo?

d) (0.50 puntos) ¿Cuál tendrá que ser la velocidad del jugador **2** (v_{2x}) para alcanzar la pelota en el instante que toque el piso?

$$\boxed{g = 9.80\,m/s^2} \qquad \boxed{\begin{array}{l} sen(30^0) = 0.50 \\ \cos(30^0) = 0.87 \end{array}}$$

Solución:

a) Las componentes de la velocidad inicial de la pelota son:

$$\begin{array}{l} v_{ox} = v_0\cos(30^0) = 17.40\ m/s \\ v_{0y} = v_0\ sen(30^0) = 10.00\,m/s \end{array} \qquad (1)$$

En la dirección del eje "*x*" no hay aceleración por lo cual

$$v_x = v_{0x} = 17.40\ m/s \qquad (2)$$

En la dirección del eje *“y”*, tomando como positivo el sentido contrario a *g*, tenemos:

$$v_y = v_{0y} - g\,t \qquad (3)$$

En el punto más alto de la trayectoria, $y_{máxima} = h$, se verifica que $v_y = 0$. Entonces de (3) obtenemos que

$0 = v_{0y} - gt_h$ donde t_h es el tiempo que tarda en alcanzar la altura *h*. Entonces:

$$t_h = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0\,sen(30^0)}{g} = \frac{10.0\ m/s}{9.8\,m/s^2} = 1.02\,s \qquad (4)$$

El valor $y_{máxima} = h$, se calcula a partir de la ecuación

$$y = y_0 + v_{oy}t - \frac{1}{2}g\,t^2 \qquad (5)$$

Sustituyendo en (5) $y_0 = 0$ y $t = t_h$, tendremos:

$$y_{máxima} = h = v_{oy}t_h - \frac{1}{2}g\,t_h^2 = (10.00m/s)(1.02\,s) - 0.5(9.80\,m/s^2)(1.04\,s^2)$$

$$= 10.20\,m - 5.1m = 5.1m$$

$$\boxed{h = 5.1m} \quad \textbf{Respuesta a)} \qquad \textbf{(6)}$$

b) La pelota tocará el piso cunado $y = 0$. Utilizando nuevamente la (5), teniendo en cuenta que también $y_0 = 0$, tendremos que:

$$0 = v_{0y}t_m - \frac{1}{2}g\,t_m^2 = v_{0y} - \frac{1}{2}g\,t_m \qquad (7)$$

donde t_m^2 es el tiempo que la pelota está en el aire. Es decir:

$$\boxed{t_m = \frac{2v_{0y}}{g} = 2\frac{10.00\,m/s}{9.80\,m/s^2} = 2.04\ s} \quad \textbf{Respuesta b)} \qquad \textbf{(8)}$$

Note que de acuerdo a (8) y (4) $t_m = 2\,t_h$

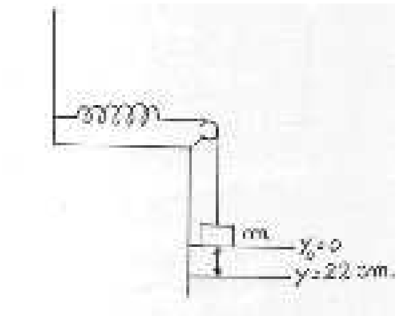
c) Para calcular la distancia $x_{máximo} = d$, aplicaremos la ecuación de la trayectoria de un movimiento uniforme en la dirección del eje *“x”*, con velocidad dada por (2)

$$\boxed{\begin{aligned} x_{máximo} &= d = x_0 + v_{0x}t_m = v_{0x}t_m = \\ &= (17.40\,m/s)(2.04s) = 35.50\,m \end{aligned}} \quad \textbf{Respuesta c)} \qquad \textbf{(9)}$$

d) Si el jugador **2** quiere alcanzar la pelota en el momento que toca el suelo, tendrá que recorrer en el tiempo $t_m = 2.04s$ una distancia $d - 15\,m = 35.50\,m - 25\,m = 10.50\,m$

$$\boxed{v_{2x} = \frac{10.60\,m}{2.04\,s} = 5.20\,m/s} \quad \textbf{Respuesta d)}$$

Problema 4:
Supongamos el esquema mostrado en la figura. El mismo consiste de un cuerpo de masa *m*=2.1 kg y un resorte helicoidal, unidos mediante una cuerda inextensible, que pasa por una polea sin fricción. Inicialmente el cuerpo de masa *m* es mantenido fijo en la posición $y_0 = 0$. Si se deja libre el cuerpo de masa *m* notamos que el mismo desciende una distancia $y = 22\,cm$, que es la posición de equilibrio que adquiere el sistema. ($g = 9.8\,m/s^2$)
a) (0.5 punto) Determine la constante *k* del resorte en unidades de *N/m.*



Si ahora se nos brinda información sobre la precisión con que han sido determinados los datos del problema, de manera tal que la gravedad está dada como $g = (9.8 \pm 0.1)\,m/s^2$; la masa del cuerpo como $m = (2.1 \pm 0.2)\,kg$ y el desplazamiento del cuerpo como $y = (22 \pm 0.1)\,cm$.
b) (1.0 punto) ¿Calcule el error cometido en la determinación de la constante del resorte?
c) (0.5 punto) Determine los factores de propagación en la determinación del error de la constante del resorte, correspondientes a la masa, la gravedad y el desplazamiento.

Solución:
a) Cuando se libera el cuerpo de masa *m* =2.1 kg, el mismo desciende hasta alcanzar el equilibrio una distancia *y*= 22 cm. En consecuencia el resorte se estirará, respecto a su posición de equilibrio, una distancia *x*= 22 cm . Sobre el extremo del resorte actuará una tensión *T*= *m g* y una fuerza de recuperación de signo contrario *F*=-*k x,* que equilibrará el sistema, pues en esa posición alcanzó el nuevo equilibrio. Esto significa que:

$$m\,g - k\,x = 0$$

Entonces

$$\boxed{k = \frac{m\,g}{x} = \frac{(2.1kg)(9.8\,m/s^2)}{0.22\,m} = 93.54\,kg/s^2 = 93.54\ N/m}$$ **Respuesta a) (1)**

b) De acuerdo a (1) $k = \dfrac{mg}{x}$. Además sabemos que $\Delta m = \pm 0.2\,kg$, $\Delta g = \pm 0.1\,m/s^2$ y $\Delta x = \pm 0.01\,m$ Por lo tanto:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta k = \pm\frac{g}{x}\Delta m \pm \frac{m}{x}\Delta g \pm \frac{m\,g}{x^2}\Delta x = \pm\frac{9.8\,m/s^2}{0.22\,m}(0.2\,kg) \pm \frac{2.1kg}{0.22\,m}(0.1\,m/s^2)\\ &\pm\frac{(2.1kg)(9.8\,m/s^2)}{(0.22)^2\,m^2}(0.001m) =\\ &= \pm(44.54\ s^{-2})\underbrace{(0.2\ kg)}_{\Delta m} \pm (9.54\ kg/m)\underbrace{(0.1\,m\,s^{-2})}_{\Delta g} \pm (425.21kg\ m^{-1}\,s^{-2})\underbrace{(0.001m)}_{\Delta x} =\\ &= \pm(8.91 + 0.95 + 0.425)\frac{N}{m} = \pm 10.24\frac{N}{m}\end{aligned}}$$ **(2)**

Respuesta b) $k = (93.54 \pm 10.24)\dfrac{N}{m}$ *es decir* $k = (93 \pm 10)\dfrac{N}{m}$

c) Los factores de propagación son los coeficientes de Δm, Δg y Δx en la (2)

Problema 5:

Supongamos que un cuerpo parte en el instante $t_0 = 0$, desde la posición $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, en un movimiento caracterizado por una velocidad que depende del tiempo. Si las componentes de velocidad en el plano (*x*,y), están dadas por:

$$\boxed{\begin{cases} v_x(t) = (2.0\, m\, s^{-2})\, t + (3.0\, m\, s^{-3})\, t^2 \\ v_y(t) = 4.4\, m\, s^{-1} \end{cases}} \qquad (1)$$

a) (1.0 puntos) Determinar las componentes de las trayectoria en función del tiempo. Es decir $x(t)$ *e* $y(t)$

b) (0.5 puntos) Determinar la posición y velocidad del cuerpo en *t*= 1 s

c) (0.5 puntos) Determinar la aceleración en *t*= 2 s

Solución:

a) $v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow \displaystyle\int_{x_0}^{x} d\,x(t) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$

Sustituyendo

$$\int_{x_0=0}^{x} dx(t) = x(t) - x_0 = x(t) = \int_{t_0=0}^{t} (2.0\, m\, s^{-2})\, t\, dt + \int_{t_0=0}^{t} (3.0\, m\, s^{-3})\, t^2\, dt \quad (2)$$

Un error conceptual que han cometido algunos alumnos en la resolución del problema, es el de no utilizar los límites de integración. En ese caso las integrales son indefinidas. Es decir que la solución se obtiene a menos de una constante. Por ejemplo:

$\int dx(t) = x(t) + C$ **, donde** C **es una constante que debe ser fijada por las condiciones iniciales.**

El problema estaba planteado con condiciones iniciales muy simples $t_0 = 0$ **y** $x_0 = 0$**. Pero que ocurriría si** $t_0 \neq 0$ **y** $x_0 \neq 0$ **; obviamente el resultado sería diferente. Físicamente esto significa que para determinar la posición de un objeto en cualquier instante, no es suficiente el conocer la velocidad en función del tiempo, se necesita también conocer la posición inicial.**

Resolviendo (2) obtenemos que:

$$\boxed{x(t) = (2\; m\, s^{-2})\left.\frac{t^2}{2}\right|_{t_0=0}^{t} + (3m\, s^{-3})\left.\frac{t^3}{3}\right|_{t_0=0}^{t} = t^2(m\, s^{-2}) + t^3(m\, s^{-3})} \quad \textbf{(3)}$$

De una forma similar se obtiene que:

$$\boxed{\begin{aligned} v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \Leftrightarrow \int_{y_0=0}^{y} d\,y(t) = \int_{t_0=0}^{t} v_y(t)\,dt \Leftrightarrow y(t) - y_0 = \\ = y(t) = 4.4\,m\,s^{-1} \int_{t_0=0}^{t} dt = (4.4\,m\,s^{-1})\,t \end{aligned}} \qquad \textbf{(4)}$$

b) Simplemente sustituyendo en **(3)** y **(4),** $t = 1s$, obtenemos las posiciones

$$\boxed{x(t = 1s) = 2\,m.\; e \;\; y(t = 1s) = 4.4\,m}$$

Sustituyendo $t = 1s$ en (1) obtenemos

$$\boxed{\begin{cases} v_x(t = 1s) = (2.0\,m\,s^{-1}) + (3.0\,m\,s^{-1}) \\ v_y(t = 1s) = 4.4\,m\,s^{-1} \end{cases}}$$

c) Derivando (1) respecto del tiempo obtenemos

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = (2.0\,m\,s^{-2}) + (6.0\,m\,s^{-3})\,t \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en lo anterior $t = 2\,s$, se obtiene:

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dv_x(t)}{dt} = (2.0\,m\;s^{-2}) + (12.0\;m\;s^{-2}) = 14\,m\,s^{-2} \\ a_y(t) = \dfrac{dv_y(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$