-0,65

1er Parcial 2023

Stencil de la derivada segunda a segundo orden si la grilla crece de tamaño de izquierda a derecha en una razón de 10% $h_k = 1.1 * h_{k-1}$

dominio 1D:

Como crece un 10% $h_k = 1.1 * h_{k-1}$ es una malla No Uniforme.

mallas No Uniformes:

$$\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right|_i = \frac{2\phi_{i+1}}{h^+(h^+ + h^-)} - \frac{2\phi_i}{h^+h^-} + \frac{2\phi_{i-1}}{h^-(h^+ + h^-)}$$ (PDF dif finitas 1D pág 21)

$h^+ = 1.1 * h^-$

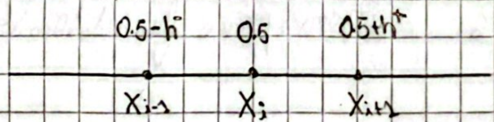
h^- = espaciado entre X_i y X_{i-1} elegimos $h^- = 0.1$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{2\phi_{i+1}}{(1.1\times 0.1)(1.1\times 0.1 + 0.1)} - \frac{2\phi_i}{(1.1\times 0.1)(0.1)} + \frac{2\phi_{i+1}}{0.1(1.1\times 0.1 + 0.1)}$$

$$\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{2\phi_{i+1}}{0.0231} - \frac{2\phi_i}{0.011} + \frac{2\phi_{i-1}}{0.021}\right]$$ Stencil derivada segunda

---

Función Analítica $f(x) = e^{-x^2}$ en $X = 0.5$



$X_i = 0.5$ $\quad f(0.5) = e^{-(0.5)^2} = 0.7788$

$X_{i-1} = 0.5 - h^- = 0.4$ $\quad f(0.4) = e^{-(0.4)^2} = 0.85$

$X_{i+1} = 0.5 + h^+ = 0.5 + 0.11 = 0.61$ $\quad f(0.61) = e^{-(0.61)^2} = 0.68$

$[f(0.5) = \phi_i]$ $\quad [f(0.4) = \phi_{i-1}]$ $\quad [f(0.61) = \phi_{i+1}]$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{2\cdot(0.68)}{0.0231} - \frac{2\cdot(0.778)}{0.011} + \frac{2\cdot(0.85)}{0.021} = [-0,765]$$ valor de la derivada segunda aproximada

La derivada segunda de $F(x)$ es

$F(x) = e^{-x^2}$ $\quad F'(x) = -2e^{-x^2}x$ $\quad F''(x) = 4e^{-x^2}x^2 - 2e^{-x^2}$

$F''(0.5) = -0{,}778$ bastante bien aproximado

Error = | derivada numerica - derivada analitica |

$= |-0{,}765 - (-0{,}778)| = 0.0138$

Como pide 2do orden de la derivada, el error disminuye proporcionalmente al cuadrado del tamaño de la malla h

$h_1 = 0.1$ ERROR $= 0.0138$

ahora usamos $h_2 = 0.05$

$h^- = 0.05$ $\quad h^+ = 1.1 \times h^- = 1.1 \times 0.05 = 0.055$

$X_i = 0.5$ $\quad X_{i+1} = 0.5 + h^+ = 0.555$ $\quad X_{i-1} = 0.5 - h^- = 0.45$

$f(0.5) = 0.778$ $\quad f(0.555) = 0.734$ $\quad f(0.45) = 0.81$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{2 \cdot (e^{(-0.555)^2})}{0.033} - \frac{2 \cdot (e^{(-0.5)^2})}{2{,}75 \times 10^{3}} + \frac{2 \cdot (e^{(-0.45)^2})}{0.02775}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -0.408$$

Error $= |-0.408 - (-0{,}778)| = 0.36$ no es cercano porque fue redondeando