CÁLCULO II

SUPERFICIES PARAMÉTRICAS

Prof. Ing. Silvia Seluy

REPRESENTACIÓN DE CURVAS

- Las curvas (planas o en el espacio), se han representado por medio de ecuaciones paramétricas o bien, mediante una función vectorial. Es decir:
- $\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}}$ curva plana
- $\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}}$ curva en el espacio

En ambos casos, la representación se realiza mediante un único parámetro "t"

REPRESENTACIÓN DE SUPERFICIES

- Las superficies se representan por ecuaciones paramétricas en el espacio, y su función vectorial utiliza dos parámetros (u, v).

Definición de superficie paramétrica

Sean x, y y z funciones de u y v continuas en un dominio D en el plano uv. El conjunto de puntos (x, y, z) dado por

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$ Superficie paramétrica

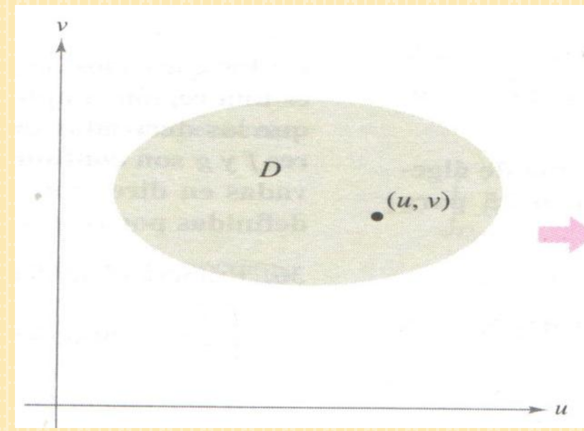
se llama **superficie paramétrica**. Las ecuaciones

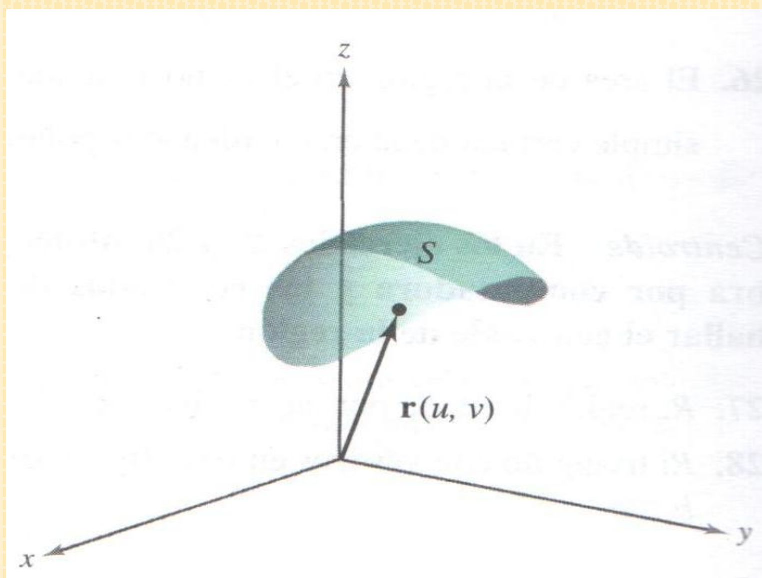
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad \text{y} \quad z = z(u, v)$$ Ecuaciones paramétricas

son las **ecuaciones paramétricas** de la superficie.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA

Si se toma un punto en el dominio D de la función se observa que S es la superficie trazada por el vector posición **r**(u,v) a medida que el Punto (u,v) se mueve en D.

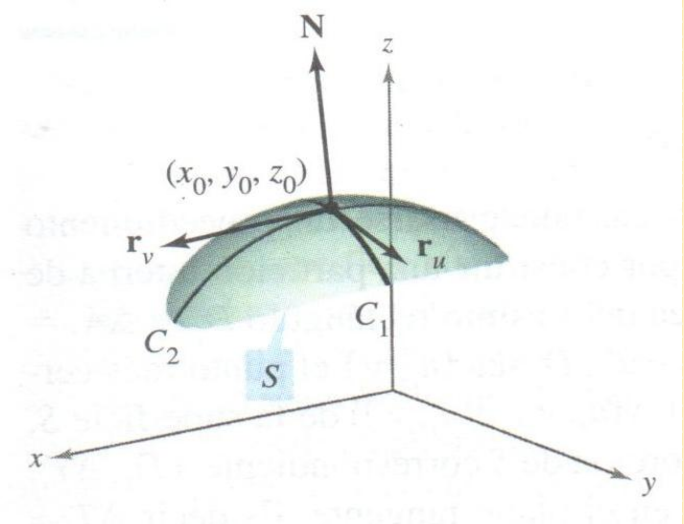




VECTORES NORMAL Y PLANO TANGENTE

- Siendo la superficie S: $\bar{r}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k}$

al considerar un punto de S: (x_0, y_0, z_0) y en él, las derivadas parciales respecto a u y a v, éstas pueden interpretarse como sus vectores tangentes y en dicho punto existe un vector normal N.



Las curvas C1 y C2 se formaron al tomar ctes. los parámetros v=vo y u=uo, respectivamente.

. Siendo $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$ una superficie paramétrica suave, en una región abierta D del plano x,y entonces un vector normal en el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por: $\boxed{\vec{N} = \vec{r}_u(u_0, v_0) \, x \, \vec{r}_v(u_0, v_0)}$

Si el vector normal **N** es distinto de cero, entonces se dice que la superficie es suave y tendrá un plano tangente.(Ej.5)-pág. 834- Larson

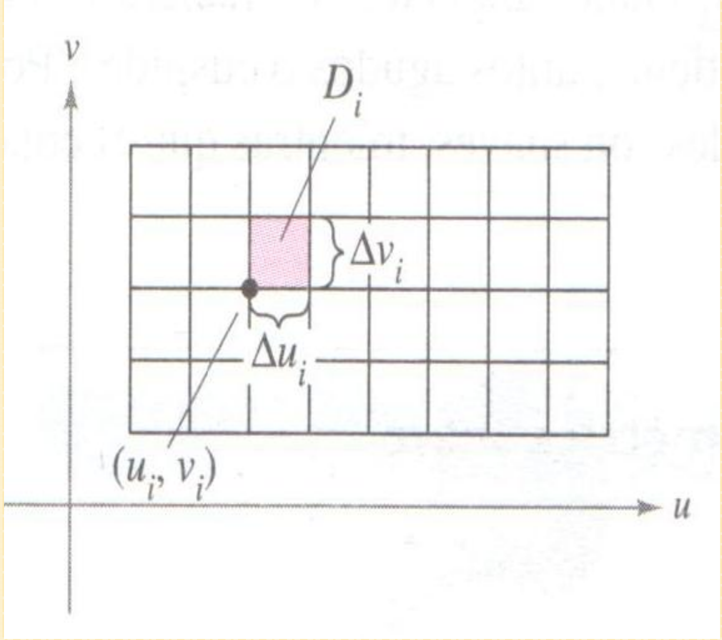
Ej. de superficies suaves: esfera, paraboloide.

Una superficie no suave es un cono.

ÁREA DE UNA SUPERFICIE PARAMÉTRICA

Para un dominio D, se toma una partición en n rectángulos. Al considerar el i-ésimo rectángulo D_i en D, se puede formar su área como: $\Delta A_i = \Delta u_i \cdot \Delta v_i$

Se tomará el punto más cercano al origen en Di

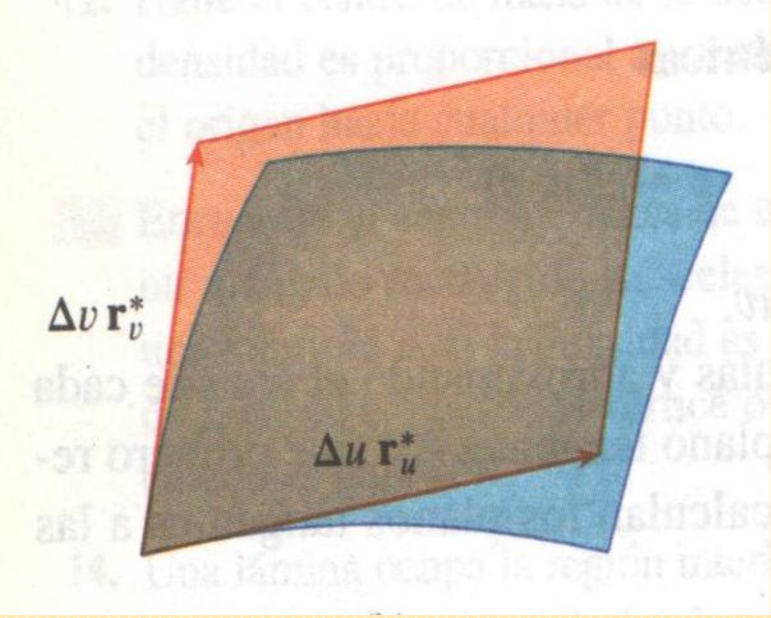


En la superficie, S_i es la porción correspondiente a Di. Tiene un Área ΔT_i que se aproxima mediante un paralelogramo en el plano tangente al punto $(x_{(u_i,v_i)}, y_{(u_i,v_i)}, z_{(u_i,v_i)})$

- Teniendo en cuenta este paralelogramo:

La superficie quedaría:

$\Delta S_i \approx \Delta T_i$ y el plano tangente es:



$$\left\| \Delta u_i \vec{r}_u \text{ x } \Delta v_i \vec{r}_v \right\| = \left\| \vec{r}_u \text{ x } \vec{r}_v \right\| \Delta u_i \Delta v_i$$

De esta manera podemos llegar a la definición de Área de una superficie paramétrica suave.

(Ej. 6 y 7) pág. 836. (Larson)

Área de una superficie paramétrica

Sea S una superficie paramétrica suave

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

definida sobre una región abierta D del plano uv. Si cada punto de la superficie S corresponde exactamente a un punto del dominio D, entonces el **área de la superficie** de S está dada por

$$\text{Área de la superficie} = \iint_S dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dA$$

donde $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}$.

SEMEJANZA CON INTEGRALES DE LONGITUD DE ARCO

Recordando las integrales de longitud de arco y la semejanza con integrales de área de una superficie:

Longitud sobre el eje x: $\int_a^b dx$

Longitud de arco en el plano xy: $\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Área en el plano xy: $\int_R\int dA$

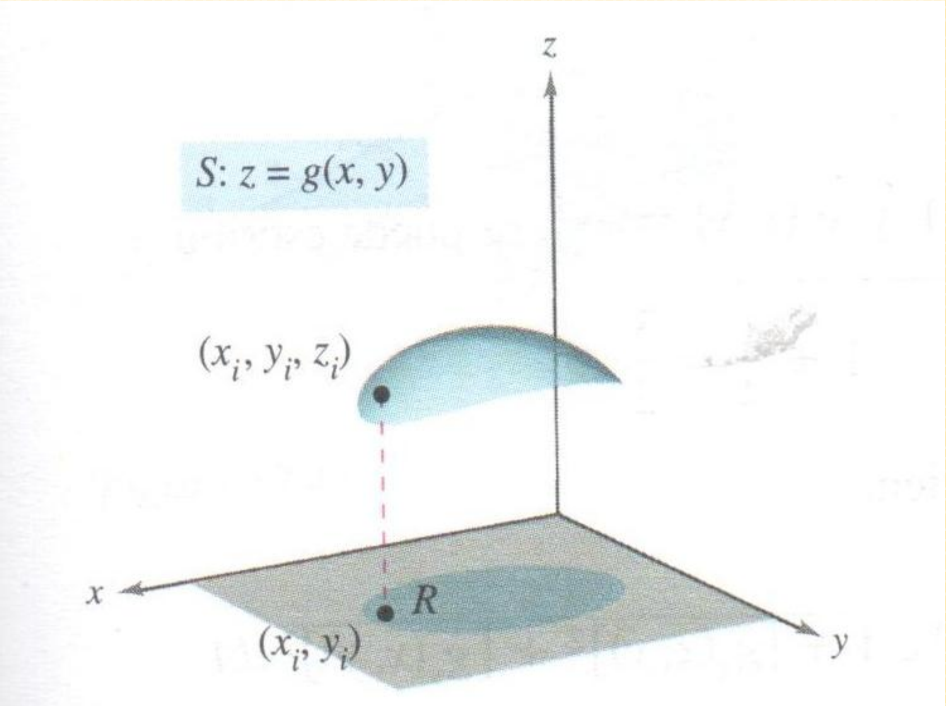
Área de una superficie en el espacio: $\int_R\int dS = \int_R\int \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA$

INTEGRALES DE SUPERFICIE

- Sea S una superficie dada por z= g(x,y) y

R su proyección sobre

el plano xy.



La función escalar f asigna un número a cada punto de S.

Podemos formar:

$\sum f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$, i= 1,n

Entonces:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta S_i.$$

Siempre que exista el límite.

TEOREMA 13.10 Evaluación de una integral de superficie

Sea S una superficie con ecuación $z = g(x, y)$ y sea R su proyección sobre el plano xy. Si g, g_x y g_y son continuas en R y f es continua en S, entonces la integral de superficie de f sobre S es

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_R f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\, dA.$$

Si f(x,y,z) = 1, entonces la integral de superficie, da el área de la superficie de S. (Ej. 4) pág. 843

VARIANTES

- En lugar de la forma tomada en la definición como la gráfica de S: z= g(x,y), se puede considerar:
- S es la gráfica de y = g(x,z) y R es su proyección sobre el plano xz, o bien:
- S es la gráfica de x = g(y,z) y R es su proyección sobre el plano yz.

Por lo tanto, la integral se tomará convenientemente de acuerdo a cómo se defina S y su proyección.

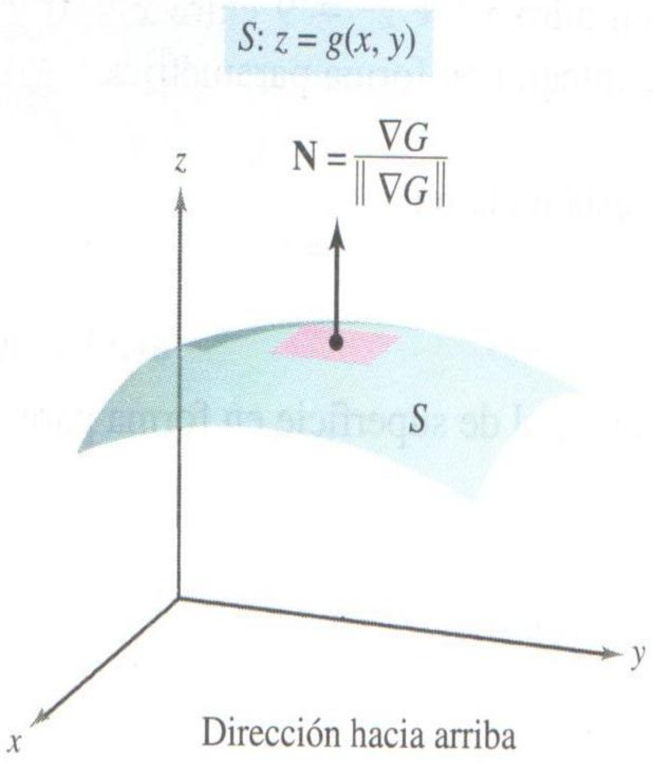
SUPERFICIES ORIENTABLES

Supongamos que una superficie S tiene un plano tangente en cada uno de sus puntos, excepto en los puntos frontera.

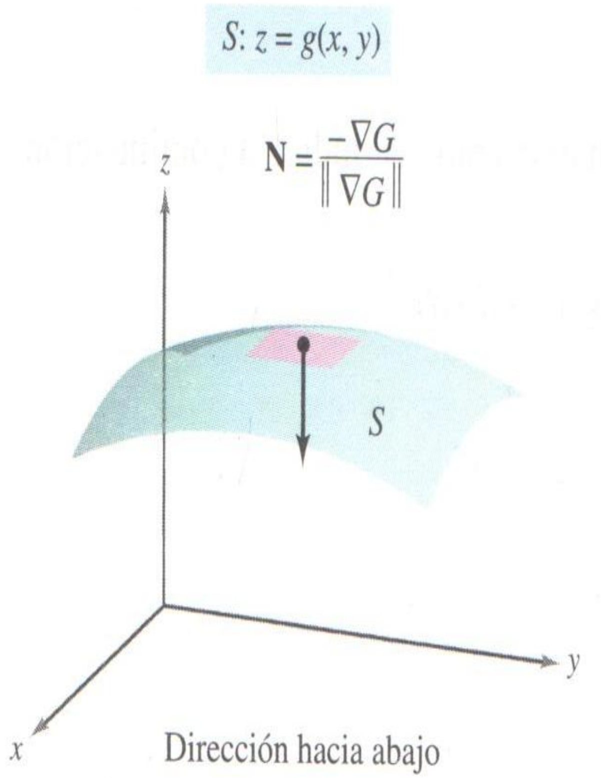
Si pudiéramos elegir un vector unitario normal(**N**) en cada uno de sus puntos tal que variase en forma continua, entonces S es una superficie orientada y la orientación está dada por la elección de **N.**

Por tal razón podemos representar a **N** como el vector gradiente, que apunta hacia afuera de la superficie.

ORIENTACIÓN DE LA SUPERFICIE



S está orientada con dirección hacia arriba.



S está orientada con dirección hacia abajo.

Figura 13.50

¿CÓMO SE EXPRESA N EN LA ORIENTACIÓN?

En el caso de una superficie orientable dada por:

$$z = g(x, y)$$ Superficie orientable

se hace

$$G(x, y, z) = z - g(x, y).$$

Entonces, S puede orientarse ya sea mediante el vector unitario normal

$$\mathbf{N} = \frac{\nabla G(x, y, z)}{\|\nabla G(x, y, z)\|}$$

$$= \frac{-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}}$$ Vector unitario normal hacia arriba

N EN CASO DE CAMBIO DE ORIENTACIÓN:

El gradiente el **mediante el** vector **N,** cambia de signo y quedaría:

$$\mathbf{N} = \frac{-\nabla G(x,y,z)}{\|\nabla G(x,y,z)\|}$$

$$= \frac{g_x(x,y)\mathbf{i} + g_y(x,y)\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}}$$

Vector unitario normal hacia abajo

OTRAS FORMAS DE EXPRESAR A LA SUPERFICIE ORIENTABLE S:

NOTA Suponga que una superficie orientable está dada por $y = g(x, z)$ o por $x = g(y, z)$. Entonces pueden usarse los vectores gradientes

$$\nabla G(x, y, z) = -g_x(x, z)\mathbf{i} + \mathbf{j} - g_z(x, z)\mathbf{k} \qquad G(x, y, z) = y - g(x, z)$$

o

$$\nabla G(x, y, z) = \mathbf{i} - g_y(y, z)\mathbf{j} - g_z(y, z)\mathbf{k} \qquad G(x, y, z) = x - g(y, z)$$

para orientar esta superficie.

N EN LA SUPERFICIE ORIENTABLE DADA EN FORMA PARAMÉTRICA

Si la superficie orientable está definida paramétricamente, entonces:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$ Superficie paramétrica

los vectores unitarios normales están dados por

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$$

y

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u}{\|\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u\|}.$$