Nombre y Apellido Alumno:

DNI:

EJERCICIO 3: MDF (cada ejercicio por hojas separadas)

Tomando de referencia el Ejercicio 2, resolver por **Diferencias Finitas** el mismo problema utilizando la siguiente discretización mostrada en la Figura 3.
Determinar:

1. Usando los valores de referencia que eligió en el punto 2 del ejercicio 2, escriba el stencil de los nodos 3 y 5, lo más simplificado posible.
2. ¿Cuántos grados de libertad tiene el problema?
3. Muestre como queda la matriz global "**K**" del sistema y el miembro derecho "**f**".
4. Calcule las temperaturas en los nodos.

Nota: Punto 1: 35 pts. Punto 2: 5 pts. Punto 3: 35 pts. Punto 4: 25 pts.

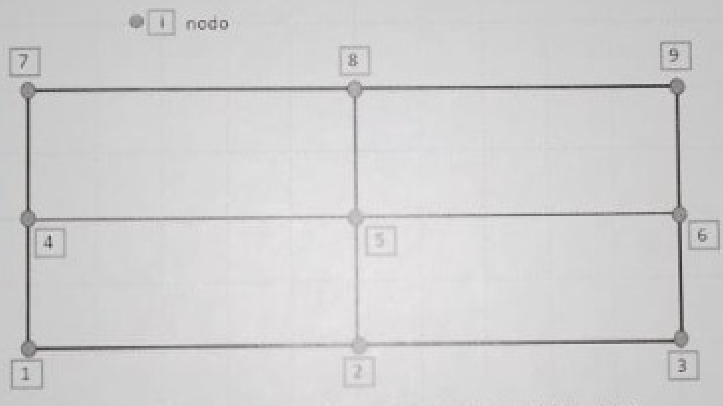

Figura 3: Discretización por DF con referencia al domino del Ejercicio2

1) Para el nodo 5, el stencil depende de los nodos 2, 4, 6 y 8. Dado que no se encuentra en el borde, el stencil es el típico stencil de diferencias finitas

$$k\left(\frac{\phi_6-2\phi_5+\phi_4}{\Delta x^2}+\frac{\phi_8-2\phi_5+\phi_2}{\Delta y^2}\right)=-Q$$

El nodo 3, en cambio, se encuentra en un borde, por lo que tengo solo 2 nodos vecinos y, además, debo incluir los valores correspondientes a la condición de borde

$$k\left(\frac{\phi_2-2\phi_3+\phi_{derecha}}{\Delta x^2}+\frac{\phi_6-2\phi_3+\phi_{abajo}}{\Delta y^2}\right)=-Q$$

Sabemos que a la derecha tengo condición de Neumann, por lo que

$$-k\frac{\partial\phi}{\partial x}=\bar{q}\Rightarrow -k\frac{\phi_{der}-\phi_3}{\Delta x}=\bar{q}$$

Al utilizar esta aproximación, estoy perdiendo el orden x^2

Ahora, despejo el nodo ficticio para así reemplazarlo en el stencil

$$\phi_{der}=\left(\frac{\bar{q}}{-k}\cdot\Delta x\right)+\phi_3 \Rightarrow k\left(\frac{\phi_2-2\phi_3+\frac{\bar{q}\Delta x}{-k}+\phi_3}{\Delta x^2}+\frac{\phi_6-2\phi_3+\phi_{abajo}}{\Delta y^2}\right)=-Q$$

Para la condición Robin procedo de forma similar:

$$-k\frac{\partial\phi}{\partial y}=h(\phi-\phi_\infty)\Rightarrow -k\frac{\phi_{ab}-\phi_3}{\Delta y}=h(\phi-\phi_\infty)$$

$$\phi_{ab}=\frac{h}{-k}(\phi-\phi_\infty)\Delta y+\phi_3 \Rightarrow k\left(\frac{\phi_2-2\phi_3+\frac{\bar{q}\Delta x}{-k}+\phi_3}{\Delta x^2}+\frac{\phi_6-2\phi_3+\frac{h}{-k}(\phi-\phi_\infty)\Delta y+\phi_3}{\Delta y^2}\right)=-Q$$

Finalmente, el stencil queda: $k\left(\frac{\phi_2-\phi_3+\frac{\bar{q}\Delta x}{-k}}{\Delta x^2}+\frac{\phi_6-\phi_3+h(\phi_3-\phi_\infty)\frac{\Delta y}{-k}}{\Delta y^2}\right)=-Q$

Dado que $\Delta x=\Delta y$
Lo voy a llamar h

$$\frac{k}{h^2}\left(\phi_2+\phi_3\left(-2+\frac{h_r h}{-k}\right)+\phi_6\right)=-Q+\frac{q}{h}-\frac{h_r\phi_\infty}{h}$$

2) El problema tiene 9 grados de libertad ya que tenemos 9 incógnitas correspondientes a los 9 nodos ya que no se tienen condiciones dirichlet por lo que el número total de ecuaciones van a ser 9.

3) La estructura general de K es:

$$K=\begin{bmatrix} D & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & D & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & D & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & D & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & D & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & D & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & D & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & D & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & D \end{bmatrix}$$

donde $D=\frac{4k}{h^2}$ y los valores -1 corresponden a los términos $\frac{-k}{h^2}$ de los nodos vecinos.

Si hay **condiciones de contorno** (Neumann o Robin), los coeficientes correspondientes se ajustan, agregando términos adicionales.

El vector f incluye la **fuente** Q en los nodos internos y los términos que provienen de las condiciones de contorno:

$$f=\begin{bmatrix} Q+\text{contorno}_1\\ Q+\text{contorno}_2\\ Q+\text{contorno}_3\\ Q+\text{contorno}_4\\ Q\\ Q+\text{contorno}_6\\ Q+\text{contorno}_7\\ Q+\text{contorno}_8\\ Q+\text{contorno}_9 \end{bmatrix}$$

Si hay flujo prescrito en el borde derecho q, se agrega $\frac{kq}{h}$ en las posiciones correspondientes.

Si hay una condición de Robin en el borde inferior, se agrega $h\phi_\infty$.

La matriz K obtenida con los valores planteados en el ejercicio 2 es:

$$k=\begin{bmatrix} 410 & -2 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 410 & -1 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 410 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 10 & -2 & 0 & -4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & -1 & 10 & -1 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 0 & -2 & 10 & 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 410 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & -1 & 410 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & -2 & 410 \end{bmatrix}$$

Y el vector F:

$$F=\begin{bmatrix} 100080\\ 100100\\ 100080\\ 80\\ 100\\ 80\\ 100080\\ 100100\\ 100080 \end{bmatrix}$$

4)

$$\phi=\begin{bmatrix} 250.41\\ 250.49\\ 250.41\\ 260.84\\ 262.56\\ 260.84\\ 250.41\\ 250.49\\ 250.41 \end{bmatrix}$$