

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Práctica N° 2: COMBINACIÓN LINEAL Y ESPACIO GENERADO

1) Dados los siguientes conjuntos de vectores pertenecientes a R^3 :

$$\begin{aligned} a) & \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \\ b) & \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ c) & \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ d) & \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \\ e) & \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

i) Describir geométricamente el espacio que generan.

ii) Expresar, si es posible, el vector $(-7, 3, 5)$ como combinación lineal de los conjuntos dados.

2) En cada ítem, determinar si H genera o no al elemento a :

$$\begin{aligned} a) & H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \right\}; \quad a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ b) & H = \{t^2 + t, t - 1, t + 1\}; \quad a = 5t^2 - 3t + 8 \\ c) & H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}; \quad a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ d) & H = \{1 + x^2, x^2, x^2 + x\}; \quad a = 5x^2 - x \end{aligned}$$

3) Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla. Si es falsa, exhibir un contraejemplo o justificar por qué no lo es.

a) Cada uno de los vectores v_1, v_2, \dots, v_k pertenece al $\text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

b) Todo conjunto de 2 vectores en R^2 genera a R^2 .

c) El conjunto $\{(3, 2), (-1, 3)\}$ genera a R^2 .

d) $(3, 5)$ está en el espacio generado por $\{(1, 1), (2, 4)\}$.

e) Si $\{(1, 2), (2, 3)\}$ genera a R^2 , entonces $\{(1, 2), (2, 3), (-2, -3)\}$ también genera a R^2 .

4) El conjunto $M = \{t^2 + 2t + 1, t^2 + 2\}$ ¿genera a P_2 ? Justificar.

5) Determinar en cada ítem si el conjunto de vectores genera o no a R^3 :

$$\begin{aligned} a) & G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ b) & H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

6) Establecer si el conjunto S genera o no a $M_{2 \times 2}$:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

7) Determinar un conjunto generador para:

- a) El espacio vectorial de las matrices de 2×2 .
- b) El espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3.
- c) El espacio vectorial de los puntos de una recta en R^3 que pasa por el origen.
- d) $H = \{(a, a, b) \in R^3 / a, b \in R\}$

8) Determinar en los siguientes ítems:

- a) El espacio que generan los vectores $(1, 2, 3)$ y $(-1, -1, 0)$.
- b) El espacio que generan los vectores $(-2, 1, 4)$ y $(6, -2, -12)$.
- c) ¿Por qué se obtienen objetos distintos en a) y b) si en ambos casos se trata del espacio generado por dos vectores de R^3 ?

9) Sean $U =$ plano xy y $w = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ dos subconjuntos de R^3 :

- a) Definir $H = U \cap W$.
- b) Nombrar tres elementos que pertenezcan a H .

10) Sea U el espacio vectorial generado por las funciones $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$. Demostrar que la función $h(x) = 6x^2 - 10x + 5$ pertenece a U .

Ejercitación adicional para seguir practicando:

11) ¿Cuál de los siguientes conjuntos de polinomios genera a P_2 ?

- a) $\{1, x^2\}$
- b) $\{3, 2x, -x^2\}$
- c) $\{1, 1 + x, 1 + x^2\}$

12) Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrarla. Si es falsa, exhibir un contraejemplo o justificar por qué no lo es.

- a) El conjunto de vectores $\{(x, -3x) \in R^2\}$ es un subespacio vectorial de R^2 .
- b) El conjunto de vectores $\{(x, -3x + 1) \in R^2\}$ es un subespacio vectorial de R^2 .
- c) El conjunto de vectores $\{(x, y, 1) \in R^3\}$ es un subespacio vectorial de R^3 .
- d) El conjunto de polinomios de grado 2 es un subespacio vectorial de P_3 .
- e) $\text{gen}\{(1, 2, -1, 3), (7, 1, 0, 4), (-8, 0, 8, 2)\}$ es un subespacio vectorial de R^3 .