# **Cálculo II**

Clase 1

**11.6** **Secciones cónicas**

Las curvas estudiadas se llaman *secciones cónicas* porque se forman cortando un cono doble con un plano (el plano NO pasa por el origen)

Aclaraciones:

*Equidistante:* se dice que un punto es equidistante de un conjunto de figuras si las distancias entre ese punto y cada figura del conjunto son iguales

*Directriz:* es una línea que determina las condiciones de generación de otra línea

*Parábola*

*Resultado de seccionar el cono con un plano oblicuo (el plano sale por la boca superior)*

*Definición:* Una parábola es un conjunto de puntos (o lugar geométrico)en un plano que equidistan de un punto fijo dado (foco de la parábola) y una recta fija dada (directriz).

*Ec. Parábola con directriz paralela al eje x:* $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

*Acotaciones:*

.) El *vértice* de la parábola es el punto $(h, k)$

.) La directriz será la recta $y = k - p$

.) El foco es el punto $(h, k + p)$

.) $p$ es la distancia del foco (y la directriz) al vértice

si $p > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba $(\cup)$

si $p < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo $(\cap)$

*Ec. Parábola con directriz paralela al eje y:* $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

*Acotaciones:*

.) El *vértice* de la parábola es el punto $(h, k)$

.) La directriz será la recta $x = h - p$

.) El foco es el punto $(h + p, k)$

.) $p$ es la distancia del foco (y la directriz) al vértice

si $p > 0$ la parábola abre sus ramas hacia la derecha $(\subset)$

si $p < 0$ la parábola abre sus ramas hacia la izquierda $(\supset)$

*ACOTACIONES GENERALES:*

.) La directriz es paralela al eje que representa la variable al cuadrado.

.) El eje de simetría es paralelo al eje cuya variable representativa sea lineal (grado 1).
.) Gráficamente, $p$ incide en el grado de abertura de la parábola.
.) Caso degenerado: si $p = 0$, la parábola degenera en su eje de simetría y el foco está sobre la directriz
.) Caso particular: <u>ECUACIONES CANÓNICAS</u>

$\rightarrow x^2 = 4py$ $\rightarrow y^2 = 4px$

*Cuando el vértice está en el origen $[(h,k) = (0,0)]$*
*Ecuación de la directriz será: $x = p$
$y = p$

<u>Elipse</u>
*Resultado de seccionar el cono (si tiene base elíptica) con un plano horizontal*

*Definición:* Una elipse es el conjunto de puntos (o lugar geométrico) que cumplen con la condición de que la suma de sus dos distancias a dos puntos fijos llamados focos se mantiene constante.

- La recta que pasa por los focos de una elipse es el *eje focal*.
- El punto que está en el eje a la mitad de la distancia de los focos es el *centro.*
- Los puntos donde el eje focal y la elipse se cruzan son los *vértices* de la elipse.

*Ec. de la elipse con el eje focal en el eje x:* $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

*Acotaciones:*
.) El centro de la elipse es el punto $(h,k)$
.) Los focos son los puntos: $F_1(h - c, k)$
$F_2(h + c, k)$
Siendo $c$ la distancia desde el centro a cualquiera de los focos
.) Los vértices son los puntos: $V_1(h - a, k)$
$V_2(h + a, k)$
Siendo $a$ la distancia desde el centro hasta cualquiera de los vértices

*Ec. de la elipse con el eje focal en el eje y:* $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

*Acotaciones:*
.) El centro de la elipse es el punto $(h,k)$
.) Los focos son los puntos: $F_1(h, k - c)$
$F_2(h, k + c)$

Siendo $c$ la distancia desde el centro a cualquiera de los focos
.) Los vértices son los puntos: $V_1(h, k - a)$

$V_2(h, k + a)$

Siendo $a$ la distancia desde el centro hasta cualquiera de los vértices

*ACOTACIONES GENERALES:*

*.) Eje focal:* $dist(F_1; F_2) = 2c$

.) El eje focal será paralelo al eje donde $a$ esté debajo de su variante representativa

.) $a^2$ representa la distancia del *eje mayor*, siendo esta el fragmento de eje contenido dentro de la elipse entre ambos vértices

.) $b^2$ representa la distancia del *eje menor*, siendo este la distancia del eje ⊥ al eje mayor contenido dentro de la elipse

.) $a = dist(centro; V) =$ longitud del semieje mayor

.) $b =$ longitud del semieje menor

.) $a > b$

.) $c^2 = a^2 - b^2$ (pitágoras)

A partir de la propiedad de los triángulos:
$\left|F_1F_2\right| < \left|F_1P\right| + |P + a| \Rightarrow c < a$

.) Caso particular: <u>ECUACIONES CANÓNICAS</u>

$\rightarrow \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ $\qquad\qquad$ $\rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

*Cuando el vértice está en el origen $[(h, k) = (0, 0)]$*

——————————————esto no lo vimos en la clase de este año——————————————

.) *CASO DEGENERADO:* <u>Circunferencia:</u> resultado de seccionar un cono circular con un plano horizontal

- *Ec:* $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$

Es un caso degenerado de elipse para cuando los dos focos **coinciden**

- $F_1 = F_2 \rightarrow (c = 0) \rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow a = b$

El semieje mayor = el semieje menor

.) **e (excentricidad)**: es lo que mide el achatamiento de la elipse

$e = \frac{c}{a}$ $\qquad$ si $e \rightarrow 1$: la elipse es más ovalada

si $e \rightarrow 0$: la elipse es más redonda

*Si $c = 0$, $e = 0$ y la elipse es una circunferencia*

*Si $e = \frac{c}{a} = 1 \Leftrightarrow c = a \rightarrow (V_1 = F_1 \ y \ V_2 = F_2)$ y se degenera en una recta que va de vértice a vértice*

_________________________________________________________________
-

Hipérbola
*Resultado de seccionar un cono con un plano vertical*

*Definición:* La hipérbola es el conjunto de los puntos del plano (o lugar geométrico) cuya *diferencia* de la distancia a dos puntos fijos llamados *focos* se mantiene constante.

La recta que pasa por los focos de una hipérbola es el *eje focal.* El punto que está en el eje focal a la mitad de distancia entre los focos es el *centro* de la hipérbola. Los puntos donde el eje focal y la hipérbola se cruzan son los *vértices.*

*Ec. de la hipérbola con el eje focal en el eje x:* $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

.) Vértices: $V_1(h - a, k)$ Focos: $F_1(h - c, k)$

$V_2(h + a, k)$ $F_2(h + c, k)$

*Ec. de la hipérbola con el eje focal en el eje y:* $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

.) Vértices: $V_1(h, k - a)$ Focos: $F_1(h, k - c)$

$V_2(h, k + a)$ $F_2(h, k + c)$

*ACOTACIONES:*
.) Los parámetros representan lo mismo que los de la elipse, pero ahora:

- $c^2 = a^2 + b^2$ (pitágoras)
- $c > a$

.) El eje focal es paralelo al eje cuya variable representativa es POSITIVA.
.) $e = \frac{c}{a} > 1$ →nos define el grado de las hojas de la hipérbola
.) *Caso particular:* ECUACIONES CANÓNICAS:

- $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$
- $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

.) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 0$ → NO ES UNA HIPÉRBOLA
.) Las asíntotas que delimitan las ramas de la hipérbola están dadas por las rectas:

$\rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$ ó $x = \pm \frac{b}{a}y$

Cónicas degeneradas (casos donde el plano pasa por el origen):

- Si secciono el origen con un plano horizontal, me queda un punto
- Si secciono con un plano oblicuo que pasa por el origen, me queda una recta
- si secciono con un plano vertical que pasa por el origen, me queda una cruz (dos rectas que se intersectan en el origen)

Utilidad de la excentricidad

- $e = \frac{c}{a} = 0$ (circunferencia)
- $e = \frac{c}{a} < 1$ (elipse)
- $e = \frac{c}{a} = 1$ (parábola)
- $e = \frac{c}{a} > 1$ (hipérbola)

**ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO**

Tiene como objetivo reconocer qué ocurre con las cónicas por la mera observación de una ecuación (reconocer de qué cónica se trata y en qué caso particular estamos)

- $A x^2 + C y^2 + D x + E y + F = 0$ $(A, C, D, E \ y \ F \in R)$

*Consideraciones:*

.) $B = 0$ ( $B = coef. xy$ $\rightarrow Bxy$ *término rectangular*)

Si $B \neq 0$, la cónica está rotada (no entra en este curso)

- $A.C > 0$ (elipse)

Además, si $A = C$ hablamos específicamente de una *circunferencia*

- $A.C < 0$ (hipérbola)
- $A.C = 0$ (parábola)

Método de completar cuadrados

Este método se basa en sumar y resta un mismo término para poder armar un binomio cuadrado

- $x^2 + b x = c$

Si tengo en claro quien es $b$, el término que se sumará y restará será: $(\frac{b}{2})^2$

$\rightarrow x^2 + b x + (\frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 = (x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$

*En caso de poseer una ecuación de segundo grado completa (incluyendo los términos $y$), se separarán las $x$ de un lado y las $y$ del otro y se seguirá el mismo procedimiento con ambas*

## 11.1 Parametrización

Se presenta otra manera de describir una curva al expresar las coordenadas $x$ e $y$ cómo funciones de una tercera variable $t$

*Definición:* Si $x$ e $y$ están dadas como funciones $x = f(t)$, $y = g(t)$ en un intervalo $I$ de valores $t$, entonces el conjunto de puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por estas ecuaciones es una *curva paramétrica* y las ecuaciones son *ecuaciones paramétricas* de la curva.

La variable $t$ es un *parámetro* de la curva y su dominio $I$ es el *intervalo del parámetro*. Si $I$ es un intervalo cerrado $a \leq t \leq b$, el punto $(f(a), g(a))$ es el *punto inicial* de la curva, y $(f(b), g(b))$ es el *punto final*.

NOTA: para decir que se ha **parametrizado** la curva, debemos contar si o si con no solo las ecuaciones, sino también el intervalo. Estos tres constituyen la parametrización.

Clase 2

**13.1**

*Funciones vectoriales:* son funciones que tienen como dominio un subconjunto probablemente propio (o no) de números reales pero como rango o conjunto imagen algún subconjunto de $R^2$ o $R^3$. Generalmente, estas funciones están asociadas a objetos que describen una trayectoria o movimiento en el plano $R^2$ o $R^3$.

Cuando una partícula se mueve en el espacio durante un intervalo de tiempo $I$, visualizamos las coordenadas de la partícula como funciones definidas en $I$:

$x = f(t)$, $\quad y = g(t)$, $\quad t \in I$

Los puntos $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in I$, forman la curva en el espacio que llamamos la trayectoria de la partícula. Las ecuaciones y el intervalo de la ecuación *parametrizan* a la curva.

Una curva en el espacio se representa en forma vectorial.

$$r(t) = \vec{OP} = f(t)i + g(t)j + h(t)k$$

El vector de la **posición** de la partícula $P(f(t), g(t), h(t))$ en el tiempo $t$ es el **vector de posición** de la partícula. Las funciones $f$, $g$ y $h$ son las **funciones componentes** (los componentes) del vector posición. Consideramos la trayectoria de la partícula como la **curva trazada por r** durante el intervalo de tiempo $I$.

Límites:

*Definición:* Sea $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ una función vectorial con dominio $D$, y $L$ un vector. Decimos que $r$ tiene *Límite* $L$ cuando $t$ se aproxima a $t_0$ y se escribe:

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = L \; si \; \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 / \forall\, t \ni D \; |r(t) - L| < \varepsilon \Rightarrow 0 < \left|t - t_0\right| < \delta$$

*El cálculo del límite es componente a componente*

Si $L = L_1 i + L_2 j + L_3 k$, entonces se puede demostrar que $\lim_{t \to t_0} r(t) = L$ precisamente cuando:

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t \to t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t \to t_0} h(t) = L_3$$

<u>Continuidad:</u>

*Definición:* Una función vectorial $r(t)$ es *continua en un punto* $t = t_0$ de su dominio, si $\lim_{t \to t_0} r(t) = r(t_0)$. La función es *continua* si es continua en cada punto de su dominio (si y sólo si cada una de sus funciones componentes son continuas en tal punto).

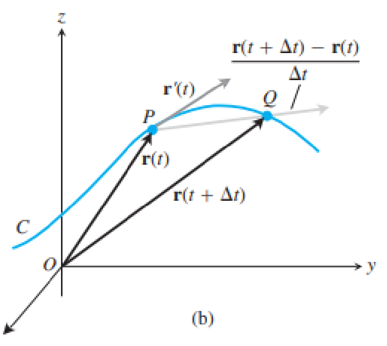
<u>Derivabilidad:</u>

Si $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ es el vector de posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio y que $f, g$ y $h$ son funciones derivables de $t$. Entonces, la diferencia entre las posiciones de la partícula en el tiempo $t$ y el tiempo $t + \Delta t$ es:

$$\Delta r = r(t + \Delta r) - r(t)$$

*Definición:* La función vectorial $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ es derivable en $t$ si $f, g$ y $h$ son *derivables* en $t$. La derivada es la función vectorial $r(t) = \frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt} i + \frac{dg}{dt} j + \frac{dh}{dt} k$

Conforme el incremento del tiempo se haga cada vez más chico, el vector $\Delta r$ va a ir girando (fijado en el punto P) y va a tener como posición límite una posición tangente a la trayectoria.




*Significado geométrico de la definición de derivada:*

Cuando $\Delta t \to 0$, el punto $Q$ se aproxima al punto $P$ a lo largo de la curva $C$. En el límite, el vector $\frac{\vec{PQ}}{\Delta t}$ se convierte en el vector tangente $r'(t)$

**La derivada mide, ahora en términos de trayectoria, la tasa de cambio de la posición respecto del tiempo (velocidad)**

*Al ser $\Delta r > 0$, la dirección de $r'(t)$ será la misma que la de la trayectoria, si fuera $\Delta r < 0$, iría hacia el otro lado y si $\Delta t < 0$ le da la vuelta y nuevamente, la derivada apunta en la dirección de la trayectoria.

<u>Curva suave:</u> la curva trazada por una parametrización $r(t)$ va a ser suave (regular) cuando $r'(t)$ es continua y $r'(t) \neq \phi$ (vector nulo), es decir, si $f, g$ y $h$ tienen primeras derivadas continuas y éstas no se anulan en forma simultánea.

*En términos de velocidad, esto significa que la partícula siempre estuvo en constante movimiento y no invierte su dirección (no existe la dirección de movimiento cuando la partícula se detiene)*

- Si $\exists_{t_0} \in I / r'(t_0) = \phi$ significa que en ese punto hay un punto anguloso

¡La curva es suave si admite al menos una parametrización suave!

<u>*Definiciones:*</u> Si $r$ es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces:

- $v(t) = \frac{dr}{dt}$ es el *vector velocidad* de la partícula, tangente a la curva.
- para cualquier tiempo $t$, la dirección de $v$ es la *dirección del movimiento*, denotado como el vector unitario $\frac{v}{|v|}$
- la magnitud de $v$ es la *rapidez de la partícula*
- $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$, cuando existe, es el *vector aceleración* de la partícula

<u>Reglas para derivar funciones vectoriales:</u> sean $u$ y $v$ funciones vectoriales diferenciables de $t$, $C$ un vector constante, $c$ un escalar y $f$ una función escalar derivable:

1. $\frac{d}{dt}C = 0$ (función constante)
2. $\frac{d}{dt}[cu(t)] = cu'(t)$
   $\frac{d}{dt}[f(t)u(t)] = f'(t)u(t) + f(t)u'(t)$ (múltiplos escalares)
3. $\frac{d}{dt}[u(t) + v(t)] = u'(t) + v'(t)$
4. $\frac{d}{dt}[u(t) - v(t)] = u'(t) - v'(t)$
5. $\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ (regla del producto punto)
6. $\frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$ (regla del producto cruz)
7. $\frac{d}{dt}[u(f(t))] = f'(t)u'(f(t))$ (regla de la cadena)

Funciones vectoriales de magnitud constante

Si $r$ es una función vectorial derivable de $t$ de longitud constante, entonces $r.\frac{dr}{dt} = 0$

**13.2**

**Integrales de funciones vectoriales**

Definición: La *integral definida* de $r$ con respecto a $t$ es el conjunto de todas las antiderivadas de $r$, denotado por $\int r(t)\, dt$. Si $R$ es cualquier antiderivada de $r$, entonces $\int r(t)\, dt = R(t) + C$

Si los componentes de $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ son integrables en $[a, b]$, entonces también lo es $r$, y la *integral definida* de $r$ de $a$ a $b$ es

$$\int_a^b r(t)\, dt = (\int_a^b f(t)\, dt)i + (\int_a^b g(t)\, dt)j + (\int_a^b h(t)\, dt)k$$

Clase 3

**13.3**

Una de las características de las curvas suaves en el espacio y en el plano es que se puede medir su longitud. Esto permite localizar cualquier punto a partir de un punto llamado "*punto base*", este punto actúa de inicio (referencia) para todas las mediciones

Definición: La *longitud* de una curva suave $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$, $a \leq t \leq b$, recorrida exactamente una vez cuando $t$ va desde $t = a$ hasta $t = b$, es $L = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\, dt$

*Fórmula para longitud de un arco:* $L = \int_a^b |v(t)|\, dt$

Parámetro de longitud:

Si seleccionamos un punto base $P(t_0)$ en una curva suave parametrizada por $t$, cada valor de $t$ determina un punto en la curva y una "distancia dirigida"

- Si $t > t_0 \Rightarrow s(t) = dist(P(t_0), P(t))$
- Si $t < t_0 \Rightarrow s(t) = -\, dist(P(t_0), P(t))$

Cada valor de $s$ determina un punto en la curva, y esto parametriza dicha curva con respecto a $s$.

LLamamos a $s$ un *parámetro de longitud de arco* de la curva. El valor del parámetro se incrementa en la dirección en la que crece $t$.

Definición: *Parámetro de longitud de arco con un punto base* $P(t_0)$

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |v(\tau)| d\tau$$

NOTA: es posible pasar a parametrizar una curva (parametrizada en función de $t$) en términos de la longitud de arco, no es muy común ni fácil.

Rapidez de la longitud de arco

Cómo $C$ es una curva suave, $v(t)$ es continua y se asegura que existe la integral $s(t) = \int_{t_0}^{t} |v(\tau)| d\tau$, el 2° teorema fundamental del cálculo nos dice que $s$ es una función derivable de $t$ con derivada $\frac{ds}{dt} = |v(t)|$

. Esta ecuación quiere decir que la rapidez con la que una partícula se mueve respecto del tiempo es el concepto de rapidez y que en ésta no participe el punto de base quiere decir que la velocidad que lleva la partícula en su trayectoria es independiente de este.

Vector tangente unitario: $T = \frac{v}{|v|}$

Marca la dirección del movimiento en cada instante $t$.

. El cambio de la función posición respecto al parámetro longitud de arco está dado por el vector tangente unitario

$\frac{dr}{dt} = v(t)$ (tasa de variación de la posición respecto al tiempo)

$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds}$

$\frac{dr}{ds} = v(t)\frac{dt}{ds}$

$\frac{dr}{ds} = v(t)\frac{1}{ds/dt}$

$\frac{dr}{ds} = v(t)\frac{1}{|v(t)|}$ $\Rightarrow \frac{dr}{ds} = \frac{v(t)}{|v(t)|} = T$

**13.4**

Curvatura de una curva plana

Puesto que $T$ es un vector unitario, su longitud es constante (1) y solo cambia su dirección cuando la partícula se desplaza a lo largo de la curva.

La *curvatura* es la magnitud de la tasa/razón de cambio de la dirección de $T(t)$ respecto de la longitud de arco.

Definición: si $T$ es el vector tangente unitario de una curva suave, la función de *curvatura* de la curva es: $\kappa = \left|\frac{dT}{ds}\right|$

Si $\left|\frac{dT}{ds}\right|$ es grande, $T$ gira rápidamente y la curvatura es grande, y si $\left|\frac{dT}{ds}\right|$ es cercana a 0, $T$ gira lentamente y la curvatura es menor.

*La curvatura nunca puede ser negativa*

Fórmula para el cálculo de la curvatura:

Si $r(t)$ es una curva suave, entonces la curvatura es:

$$\kappa = \frac{1}{|v|}\left|\frac{dT}{dt}\right|$$

donde $T = \frac{v}{|v|}$ es el vector tangente unitario.

Vector normal unitario: en un punto donde $\kappa \neq 0$, el vector normal unitario principal de una curva suave en el plano es:

$$N = \frac{1}{\kappa}\frac{dT}{ds}$$

Fórmula para calcular N:

Si $r(t)$ es una curva suave, entonces el vector normal unitario principal es:

$$N = \frac{|dT/dt|}{|dT/dt|}$$

donde $T = \frac{v}{|v|}$ es el vector tangente unitario.

Círculo de Curvaturas Planas:

El **círculo de curvatura** o **círculo osculador** en un punto $P$ de una curva plana donde $\kappa \neq 0$ es el círculo en el plano de la curva que:

1. Es tangente a la curva en $P$ (tiene la misma recta tangente que la curva)
2. Tiene la misma curvatura que tiene la curva en $P$.
3. Está del lado cóncavo o interno de la curva.

Por esto, el círculo de curvatura será mejor aproximación que una línea recta.

$C = P + \rho N$

$C$ = centro de curvatura

$P$ = el punto donde nos paramos

$\rho N$ = me muevo una distancia $\rho$ en dirección al vector normal

El **radio de curvatura** de la curva en $P$ es el radio del círculo de curvatura, el cual, de acuerdo con el ejemplo 2, es

$$\text{Radio de curvatura} = \rho = \frac{1}{\kappa}$$

**12.6**

Cilindros: Un *cilindro* es una superficie que se genera con el movimiento de una línea recta paralela fija dada a lo largo de una curva plana dada.

*Superficie en $R^3$ que se genera a partir de una curva plana dada (curva generatriz) y haciendo recorrer de manera ⊥ a ella una recta por toda su trayectoria*

NOTA: si una de las variables en la ecuación de la curva generatriz está libre (ósea, vale 0), el cilindro será paralelo al eje representativo de esa variable.

Superficies cuádricas: Una *superficie cuádrica* es la gráfica en el espacio de una ecuación de segundo grado en $x$, $y$ y $z$.
*Ec general:* $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dz + Fx + Gy = E$
*Si se agregan los términos lineales que faltan, se hace el completamiento de cuadrados y se obtiene una cuadrática que no esté centrada en el origen*

NOTA: Error de Thomas: $(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dz = E)$, de esta ecuación se obtiene una gráfica que está centrada en un punto que tiene 1° y 2° coordenada 0, pero en la tercera coordenada no es 0 porque aparece el término lineal de $z$.

Las superficies cuádricas básicas son los *elipsoides,* los *paraboloides*, los *conos elípticos* y los *hiperboloides*.

Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
.) Corta los ejes coordenados en $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ y $(0, 0, \pm c)$, *en este caso, no dan las coordenadas de los focos*
.) El mayor entre $a^2, b^2$ y $c^2$ indica cómo se posiciona el elipsoide.
.) El elipsoide recibe este nombre ya que si se toman las trazas (intersecciones de la superficie cuádrica con los planos $xy, xz$ y $zy$ ) con los planos coordenados (o planos paralelos a estos), no son otra cosa que elipses

Paraboloide hiperbólico: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$, $\quad c > 0$
.) Una de las trazas es una parábola
.) Para el caso $z = 0$ (plano $xy$), las trazas son las asíntotas de la hipérbola, y la traza con el plano $z = c$, nos da una hipérbola que tiene el eje focal sobre el eje $y$
Paraboloide elíptica: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$, $\quad c > 0$

Cono elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$
Hiperboloide de una hoja: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hiperboloide de dos hoja: $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

## Clase 4

**13.5**

El marco TNB

El *vector binormal* de una curva en el espacio es $B = T \times N$, un vector unitario ortogonal a $T$ y $N$.

$B$, $T$ y $N$ definen un nuevo marco de referencia vectorial de mano derecha (de vectores unitarios mutuamente ortogonales) conocido como *marco de Frenet* o *marco TNB*

Ahora, en cada punto de la trayectoria tenemos un conjunto de vectores que brindan información importante sobre esta.

$T = brinda\ información\ sobre\ la\ dirección\ de\ la\ trayectoria$

$N = marca\ la\ dirección\ en\ que\ la\ curva\ de\ la\ trayectoria\ se\ dobla<$

$B = marca\ la\ dirección\ en\ que\ la\ curva\ tiende\ a\ desplazarse\ hacia\ arriba\ de\ manera\ perpendicular\ del\ plano\ osculador\ (TN)$

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Cuando una partícula está acelerada, por lo general se desea saber qué parte de la aceleración actúa en la dirección del movimiento (en la dirección de la tangencial $T$)

Definición: Si el vector aceleración se escribe como $a = a_T T + a_N N$ entonces:

$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|v|$ y $a_N = \kappa(\frac{ds}{dt})^2 = \kappa|v|^2$

son los componentes escalares *tangencial* y *normal* de la aceleración.

Interpretación geométrica:

.) $a_T$= nos dice cuánto de la aceleración es paralelo a la dirección del movimiento de la curva

.) $a_N$= nos mide cuánto de la aceleración es perpendicular al movimiento de la curva $(N \perp T)$

Interpretación física: el $v$ no es necesariamente unitario, de instante en instante cambia de dirección y magnitud, entonces la $a_T$ está viendo la tasa de cambio de la magnitud de $v(\frac{d}{dt}|v|)$ consecuentemente, la componente normal de $a\,(a_N)$ mide la tasa de cambio de la dirección de $v\,(\kappa|v|)^2$

Fórmula para calcular el componente normal de la aceleración:

$$a_N = \sqrt{|a|^2 - (a_T)^2}$$

Torsión

*Definición:* Sea $B = T \times N$. La función de torsión de una curva suave es $\tau = -\frac{dB}{ds}.N$

*La torsión puede ser positiva, negativa o nula*

Planos determinados por T, N y B:

$TN$ = plano osculador

$NB$ = plano normal

$BT$ = plano rectificador

Interpretación en término de TNB: ahora, la curvatura mide, en cada punto $P$ que se mueve a lo largo de una trayectoria, cómo va girando el plano normal. Análogamente, la torsión es la razón de cambio a la cual el plano osculador gira alrededor de $T$ cuando $P$ se mueve a lo largo de la curva (la torsión mide cuánto se tuerce la curva).

Fórmula para calcular τ: $\tau = \frac{(matriz\ formada\ por\ los\ componentes\ de\ la\ 1°, 2°\ y\ 3°\ derivada\ de\ r(t)}{(|v \times a|)^2}$

**14.1**

"Funciones de variable vectorial y valor real"

$f: R^n \to R$ *suelen llamarse campos vectoriales*

$R^n$ = campos: porque tiene variables vectoriales $(n = 1, 2, 3, ..., n)$

$R$ = escalares: porque toman valores reales

$f$ = es una asignación o correspondencia que hay entre los elementos de una región en $R^n$ que le asigna a cada punto del conjunto $D$ un único escalar en $R$ $(D \subseteq R^n \to R)$

Definiciones: Sea $D$ un conjunto de $n$-adas de números reales $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Una *función de valores reales* $f$ en $D$ es una regla que asigna un único número real (individual) $w = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ a cada elemento de $D$. El conjunto $D$ es el **dominio** de la función. El conjunto de valores $w$ asignados por $f$ es el **rango** de la función. El símbolo $w$ es la **variable dependiente** de $f$, y se dice que $f$ es una función de $n$ **variables independientes** $x_1$ a $x_n$. También se llama a las $x_j$ **variables de entrada** de la función y a $w$ la variable de **salida de la función.**

Gráfica de una función: $\{(x; y); f(x; y)\}\ f: R^2 \to R$

*Aclaración:* no tiene sentido hablar de $f: R^3 \to R$ ya que el rango es identificable a partir de la ley de formación

*Superficie:* $z = f(x; y)$

Dominios y rangos:

Para definir una función de más de una variable, se excluye las entradas que conducen a números complejos o a la división entre cero. Se dice entonces que el **dominio** de una función es el conjunto más grande para el cual la regla que la define genera números reales, a menos que el dominio esté indicado de manera *explícita* (lo anterior mencionado era la manera *implícita*). El **rango** consiste en el conjunto de valores de salida para la variable dependiente.

**Funciones de dos variables**

Las regiones en el plano pueden tener puntos interiores y puntos frontera.

Definiciones:

*PUNTO INTERIOR:* Un punto $(x_0, y_0)$ en una región (conjunto) $R$ del plano $xy$ es un $punto\ interior$ de $R$ si es el centro de un disco de radio positivo que se encuentra completamente en $R$

.) Sea $R \subset R^2$, un punto $P_0$ es interior a $R$ si $\exists\, r > 0/Disc\,(P_0; r) \subset R$ y $|P - P_0| < r$ siendo $P \in Disc(P_0; r)$

*PUNTO FRONTERA:* Un punto $(x_0, y_0)$ es un $punto\ frontera$ de $R$ si todos los discos con centro $(x_0, y_0)$ contienen puntos que están fuera de $R$, así como puntos que están dentro de $R$ (El punto frontera no tiene que pertenecer a $R$)

NOTA: las mismas definiciones valen tanto para $R^2$ como para $R^3$, pero en este caso en vez de un disco, nos referimos a una *esfera:*

*Definición:* Un punto $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ en una región $R$ del espacio es un $punto\ interior$ de $R$ si es el centro de una bola sólida que está completamente dentro de $R$ y un punto $(x_0, y_0, z_0)$ es un $punto\ frontera$ de $R$ si la esfera con centro en $(x_0, y_0, z_0)$ tiene puntos que están fuera de $R$ y puntos que están en $R$.

El $interior$ de $R$ es el conjunto de puntos interiores de $R$. La $frontera$ de $R$ es el conjunto de puntos frontera de $R$.

Una región es **abierta** si consta sólo de puntos interiores. Una región es **cerrada** si contiene todos sus puntos frontera.

Definiciones: Una región en el plano está **acotada** si está dentro de un disco de radio fijo. Una región es **no acotada** si carece de fronteras.

**Gráficas, curvas de nivel y contornos**

Hay dos maneras de dibujar los valores de una función $f(x, y)$:

1. Trazar y etiquetar las curvas en el dominio donde $f$ asume un valor constante.
2. Dibujar la superficie $z = f(x, y)$ en el espacio.

<u>Definiciones:</u> El conjunto de puntos en el plano donde la función $f(x, y)$ tiene un valor constante $f(x, y) = c$ se llama $curva\ de\ nivel$ de $f$
El conjunto de todos los puntos $(x, y, f(x, y))$ en el espacio, para $(x, y)$ en el dominio de $f$, se llama la $gráfica$ de $f$. La gráfica de $f$ también se llama $superficie\ z = f(x, y)$

La curva en el espacio donde el plano $z = c$ corta a una superficie $z = f(x, y)$ está formada por los puntos que representan el valor de la función $f(x, y) = c$. Esta curva se llama $curva\ de\ contorno\ f(x, y) = c$ para distinguirla de la curva de nivel $f(x, y) = c$.

En el espacio, los puntos donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x, y, z) = c$ forman una superficie en el dominio de la función
<u>Definición:</u> El conjunto de puntos $(x, y, z)$ en el espacio donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x, y, z) = c$, es una $superficie\ de\ nivel\ de\ f$.

*Las superficies de nivel son la generalización del concepto de curvas de nivel llevado a $R^3$*

NOTA: una función como $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ NO es graficable ($R^4$ no se puede graficar), pero si a esta función la intersectamos con un $w = constante$, pasaremos a tener una *superficie de nivel* (ya no una curva), ya que estaríamos en el dominio de la función que sería en $R^3$.

**14.2**
**Límites y continuidad en dimensiones superiores**

<u>Definición de límite:</u>
Decimos que una función $f(x, y)$ tiende al **límite** $L$ cuando $(x, y)$ tiende a $(x_0, y_0)$ y escribimos :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$, existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para todo $(x, y)$ en el dominio de $f$,

$|f(x, y) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$

Definición de continuidad:
Una función $f(x, y)$ es continua en el punto $(x_0, y_0)$ si:
- $f$ está definida en $(x_0, y_0)$
- $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y)$ existe
- $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Una función es continua si es continua en todos los puntos del dominio.

Criterio de dos trayectorias para demostrar la inexistencia de un límite:
Si una función $f$(x, y)tiene límites diferentes a lo largo de dos trayectorias distintas en el dominio de $f$ cuando $(x, y)$ tiende a $(x_0, y_0)$ entonces $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y)$ no existe
- El hecho que las aproximaciones por líneas rectas a $(x_0, y_0)$ tengan el mismo límite no implica que exista límite en $(x_0, y_0)$.

Clase 5
**14.3**
**Derivadas parciales**
Definiciones: .) La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a $x$ en el punto $(x_0, y_0)$ es
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$, si el límite existe, donde tomamos a la variable $y$ como constante.
.) La derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a $y$ en el punto $(x_0, y_0)$ es
$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$, si el límite existe, donde tomamos a la variable $x$ como constante.

Derivadas parciales y continuidad
El hecho de que una función en un punto tenga derivadas parciales, no significa que en ese punto sea continua

Derivadas parciales de 2° orden

Al derivar dos veces una función $f(x,y)$, generamos sus derivadas de segundo orden.

$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)$ $\quad$ $\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)] = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

$\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)] = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x_0,y_0) = f_{yy}(x_0,y_0)$ $\quad$ $\frac{\partial}{\partial y}[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)] = \frac{\partial^2}{\partial y x}(x_0,y_0) = f_{xy}(x_0,y_0)$

Teorema de Clairaut

Si $f(x,y)$ y sus derivadas parciales $f_x$, $f_y$, $f_{xy}$ y $f_{yx}$ están definidas en una región abierta que contiene a un punto $(x_0,y_0)$ y todas son continuas en $(x_0,y_0)$, entonces $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$

Diferenciabilidad

Con dos o más variables se trata de la idea de incremento, no se puede calcular el incremento real de manera exacta, por lo que lo aproximo usando el diferencial

Teorema 3: teorema del incremento

Si $f_x$ y $f_y$ de $f(x,y)$ están definidas en una región abierta $R$ que contiene a un punto $(x_0,y_0)$ y son continuas en dicho punto, entonces el cambio $\Delta z = f(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ en el valor de $f$ que resulta del movimiento de $(x_0,y_0)$ a otro punto $(x_0+\Delta x,\, y_0+\Delta y)$ en $R$ satisface la ecuación $\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ en la cual $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x$ y $\Delta y \to 0$

*Este teorema brinda condiciones suficientes para la diferenciabilidad en un punto*

Definición: Una función $z = f(x,y)$ es **diferenciable en** $(x_0,y_0)$ si $f_x(x_0,y_0)$ y $f_y(x_0,y_0)$ existen y si $\Delta z$ satisface la ecuación $\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ en la cual cada $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x$ y $\Delta y \to 0$. Se dice que $f$ es **diferenciable** si es derivable en todos los puntos de su dominio, y se dice que su gráfica es una **superficie suave.**

Corolario del teorema 3: si las derivadas parciales $f_x$ y $f_y$ de una función $f(x,y)$ son continuas en una región abierta $R$, entonces $f$ es diferenciable en cada punto de $R$

Teorema 4: Si una función $f(x,y)$ es diferenciable en $(x_0,y_0)$, entonces $f$ es continua en $(x_0,y_0)$.

**14.4**

<u>Teorema 5: Regla de la cadena</u>

Si $w = f(x,y)$ es derivable y si $x = x(t)$, $y = y(t)$ son funciones derivables de t, entonces la composición $w = f(x(t), y(t))$ es una función derivable de $t$ y

$$\frac{dw}{dt} = f_x(x(t),\, y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t),\, y(t)) \cdot y'(t),$$

o bien,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

*Con el teorema 6 (para tres variables) se aplica de la misma manera agregando el tercer término $\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$ para una función $w = f(x,y,z)$*

<u>Teorema 8: derivación implícita:</u> Sea $F(x,y)$ derivable y que la ecuación $F(x,y) = 0$ define a $y$ como una función derivable de $x$.

Entonces en cualquier punto donde $F \neq 0$: $\frac{dy}{dx} =- \frac{F_x}{F_y}$

NOTA: este modelo de cálculo se basa en el teorema de la regla de la cadena.

*Extensión a tres variables: siendo* $F(x,y,z) = 0$

.) $\frac{\partial z}{\partial x} =- \frac{F_x}{F_z}$ .) $\frac{\partial z}{\partial y} =- \frac{F_y}{F_z}$

**14.5**

<u>Derivada direccional</u>

Si $f(x,y)$ es derivable, entonces la razón de cambio de $f$ con respecto a $t$ cuando este crece a lo largo de una curva derivable $x = g(t)$, $y = h(t)$ es $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$. Esta tasa de cambios se ve afectada por la dirección de la curva que considere.

Ahora, se cambia dicha curva y se considera una línea recta, a la cual se parametriza en términos de longitud de arco, medido desde un punto base $P_0$ y en la dirección de un vector unitario.

Esta línea recta nos indica la tasa de variación de $f$ respecto a la ***distancia*** desde el punto base y en la dirección del vector

<u>Definición:</u> La derivada de $f$ en $P_0(x_0, y_0)$ en la dirección del vector unitario $u = u_1 i + u_2 j$ es el número

$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s \cdot u_1,\, y_0 + s \cdot u_2) - f(x_0, y_0)}{s}$ siempre que el límite exista

<u>Caso particular:</u>

.) Si $u = i$ $\rightarrow$ $\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,p_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$

.) Si $u = j$ $\rightarrow$ $\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,p_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)$

*Las derivadas parciales de $f$ respecto de $x$ e $y$, son casos particulares de derivadas direccionales en dos direcciones determinadas*

Interpretación de la derivada direccional

La ecuación $z = f(x, y)$ representa la superficie $S$ en el espacio. Si $z_0 = f(x_0, y_0)$, entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está en $S$. El plano vertical (plano único) que pasa por $P$ y $P(x_0, y_0, z_0)$ paralelo a $u$ interseca a $S$ en la curva $C$. La tasa de cambio de $f$ en la dirección de $u$ es la pendiente de la tangente de $C$ en $P$.

*Ahora se puede calcular la tasa de cambio de $f$ en cualquier dirección de $u$*

Fórmula eficiente para el cálculo de la derivada direccional

Sea la recta $x = x_0 + s \cdot u_1$, $y = y_0 + s \cdot u_2$, que pasa por $P_0(x_0, y_0)$, parametrizada con el parámetro longitud de arco que crece en la dirección del vector unitario $u = u_1 i + u_2 j$. Por regla de la cadena:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{p_0} \frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{p_0} \frac{dy}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{p_0} u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{p_0} u_2$$

$$= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{p_0} i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{p_0} j\right] \cdot [u_1 i + u_2 j]$$

Definición: El ***vector gradiente*** de $f(x, y)$ en un punto $P_0(x_0, y_0)$ es el vector $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$ que se obtiene al calcular las derivadas parciales de $f$ en el punto $P_0$

Teorema 9, La derivada direccional es un producto punto: Si $f(x, y)$ es derivable en una región abierta que contiene a $P_0(x_0, y_0)$, entonces $\left(\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0} = (\nabla f)_{P_0} \cdot u$

Propiedades de la derivada direccional

• $D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f| cos\theta$ •

1. La función $f$ crece más rápidamente cuando $cos(\theta) = 1$ o cuando $\theta = 0$ y $u$ es en la dirección de $\nabla f$. Es decir, en cada punto $P$ de su dominio, $f$ crece más rápidamente en la dirección del vector gradiente $\nabla f$ en $P$. La derivada en esta dirección es $D_u f = |\nabla f| cos(0) = |\nabla f|$
2. De manera similar, $f$ decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. La derivada en esta dirección es $D_u f = |\nabla f| cos(\pi) = -|\nabla f|$
3. Cualquier dirección de $u$ ortogonal a un gradiente de $\nabla f \neq 0$ es una dirección de cambio nulo en $f$ porque en este caso $\theta$ es igual a $\frac{\pi}{2}$ y $D_u f = |\nabla f| cos(\frac{\pi}{2}) = |\nabla f| \cdot 0 = 0$

Posición y dirección respecto al vector gradiente
Si una función derivable $f(x, y)$ tiene valor constante $c$ a lo largo de una curva suave $r = x(t)i + y(t)$ (curva de nivel), entonces
$f(x(t),\ y(t)) = c$ ($f[r(t)] = c$)
Al derivar con respecto a $t$:
$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'(t) = 0$ (regla de la cadena)

- $(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j) \cdot (\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j) = 0$

∴ En todos los puntos $(x_0, y_0)$ del dominio de una función derivable $f(x, y)$, el gradiente de $f$ es normal al vector tangente $\frac{dr}{dt}$ (y por lo tanto, también a la curva de nivel que pasa por $(x_0, y_0)$)
Ecuación de la recta de dicha tangente:
$L\{Q(x, y)/PQ \perp \nabla f(P)\}$, $(x - x_0,\ y - y_0) \perp (f_x P,\ f_y P)$

- $L$: $f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) = 0$

## Clase 6

**14.6**

Planos tangentes y rectas normales
Si $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ es una curva suave sobre una superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ de una función derivable $f$, entonces
$f(x(t),\ y(t),\ z(t)) = c$. Al derivar respecto a $t$:
$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = \frac{d}{dt}(c)$ (se aplica regla de la cadena)

- $(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k) \cdot (\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k) = 0$

∴ en todos los puntos a lo largo de la curva, $\nabla f$ es ortogonal al vector velocidad de la curva

Todos los vectores de velocidad de $P_0$ son ortogonales a $\nabla f$ en $P_0$, de manera que todas las rectas tangentes a la curva formen un plano que pasa por $P_0$ normal a $\nabla f$ (*plano tangente a la superficie de nivel*)
Definición: El *plano tangente*, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, a la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ de una función derivable $f$ es el plano que pasa por $P_0$ normal a $\nabla f|_{P_0}$
La *recta normal* a la superficie de nivel en $P_0$ es la recta que pasa por $P_0$ paralela a $\nabla f|_{P_0}$
Ambos tienen las siguientes ecuaciones:
*Plano tangente a $f(x, y, z) = c$ en $P_0(x_0, y_0, z_0)$:*
$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0$

*Recta normal a* $f(x, y, z) = c$ *en* $P_0(x_0, y_0, z_0)$*:*

$x = x_0 + t\, f_x(P_0)$ $\qquad$ $y = y_0 + t\, f_y(P_0)$ $\qquad$ $z = z_0 + t\, f_z(P_0)$

*Plano tangente a la superficie* $z = f(x, y)$ *en* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

El plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ de una función derivable $f$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

<u>Estimación de cambio en $f$ en la dirección de $u$</u>

Para calcular el cambio en el valor de una función derivable $f$ cuando nos movemos una pequeña distancia $ds$ desde un punto $P_0$ en una dirección particular $u$, se usa la fórmula:

$df = (\nabla f|_{P_0} \cdot u)\, ds$ $\qquad$ *$ds$ =incremento en la distancia*

<u>Herramientas de aproximación:</u> **Linealización**

<u>Definición:</u> La *linealización* de una función $f(x, y)$ en un punto $(x_0, y_0)$ donde $f$ es derivable es la función

$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

La aproximación $f(x, y) \approx L(x, y)$ es la *aproximación lineal estándar* de $f$ en $(x_0, y_0)$

<u>El error en la aproximación lineal estándar</u>

Si $f$ tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene un rectángulo $R$ con centro en $(x_0, y_0)$ y si $M$ es una cota superior para los valores de $|f_{xx}|$, $|f_{yy}|$ y $|f_{xy}|$ de $R$, entonces el error $E(x, y)$ en que se incurre al sustituir $f(x, y)$ en $R$ para su linealización satisface la igualdad

$|E(x, y)| \le \frac{1}{2} M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$ $\qquad$ $E = f(x, y) - L(x, y)$

<u>Diferencial y diferencial total</u>

*Definición:* si nos movemos de $(x_0, y_0)$ a un punto cercano $(x_0 + dx,\ y_0 + dy)$, el cambio resultante

- $df = f_x(x_0, y_0)dx + f_x(x_0, y_0)dy$

en la aproximación lineal de $f$ se llama *diferencial total de f*

*Nos permite aproximar el cambio real

$\Delta f \approx \Delta L$ (aproximamos el cambio de $f$ a través del cambio de $L$)

❖ $L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$\Delta x$ $\qquad\qquad$ $\Delta y$

$L(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$

−

$L(x_0, y_0) = f(x_0, y_0)$

——————————————————————————————————————————

$\Delta L = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$

$dy \qquad dy$

$\Delta L \approx df(x_0, y_0) \rightarrow$ diferencial es la parte del plano que no contempla el valor en el punto
NOTA: para obtener el porcentaje del tamaño del cambio que se produjo se divide el error por el total (por lo que será un valor relativo)

## Clase 7

**14.7**
Funciones de varias continuas en cerrados y acotados alcanzan allí sus valores extremos absolutos (Weierstrass)

<u>Definición:</u> Sea que $f(x, y)$ esté definida en una región $R$ que contiene el punto $(a, b)$. Entonces:

1. $f(a, b)$ es un valor **máximo local** de $f$ si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los puntos $(x, y)$ del dominio en un disco abierto con centro en $(a, b)$

$P(a, b)$ es máximo relativo de $f$ si $\exists\, D(P; r) / f(a, b) \geq f(x, y)\ \forall\, (x, y) \in D$

2. $f(a, b)$ es un valor **mínimo local** de $f$ si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos los puntos $(x, y)$ del dominio en un disco abierto con centro en $(a, b)$

$P(a, b)$ es mínimo relativo de $f$ si $\exists\, D(P; r) / f(a, b) \leq f(x, y)\ \forall\, (x, y) \in D$

<u>Teorema 10, criterio de la primera derivada para extremos locales</u>
Si $f(x, y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior $(a, b)$ de su dominio, y si las primeras derivadas parciales existen allí, entonces $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$

*OBSERVACIONES:*

- Que $\frac{\partial f}{\partial x/y} = 0$ es condición necesaria pero NO suficiente (un punto en donde las D.D P.P estén anuladas no significa que sea extremo)
- El contrarrecíproco dice que en el punto donde las D.D P.P no se anulen, entonces NO hay recíproco

*DEMOSTRACIÓN:* Sea $g(x) = f(x, b)$, usando $y = b$ se fija un plano en el eje $y$ en el punto $b$, al tomar $y$ constante en ese plano $f(x, y)$ se obtiene una curva que solo depende de $x$. $g(x)$ será la curva que interseca la superficie $f(x, y)$ con el plano $y = b$ y es de una sola variable.

.) Al ser $P(a, b)$ extremo local de $f$

- $g$ tiene un extremo relativo en $x = a$
- por Fermat, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$

Sea $h(x) = f(a, y)$

- $h$ tiene un extremo relativo en $x = a$
- Por fermat $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

*CONSIDERACIONES:* Si $f$ derivable en $(a, b)$ y sea
$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$ la ecuación del plano tangente.
Si $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$, entonces $z = f(a, b)$(una constante)
$\rightarrow$ el plano $z$ es horizontal en ese punto

*Si no es derivable, no hay plano tangente*

<u>Punto crítico:</u> Un punto interior del dominio de una función $f(x, y)$ donde tanto $f_x$ como $f_y$ se anulan, o donde alguna de éstas no existen, es un *punto crítico* de $f$.

<u>Punto de silla:</u> Una función derivable $f(x, y)$ tiene un *punto de silla* en un punto crítico $(a, b)$ si en cada disco abierto con centro $(a, b)$ existen puntos del dominio $(x, y)$ donde $f(x, y) > f(a, b)$, y puntos del dominio $(x, y)$ donde $f(x, y) < f(a, b)$. El punto correspondiente $(a, b, f(a, b))$ sobre la superficie $z = f(x, y)$ se llama punto de silla de la superficie
*Los puntos que anulan la derivada primera pero que sin embargo no dan lugar a un extremo local se llaman *puntos de silla**

<u>Criterio de la segunda derivada para extremos locales (teorema 11)</u>
Suponga que $f(x, y)$ y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en un disco con centro en $(a, b)$, y que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$.
Entonces:

1. $f$ tiene un *máximo local* en $(a, b)$, si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ y $f_{xx} < 0$ en $(a, b)$
2. $f$ tiene un *mínimo local* en $(a, b)$, si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ y $f_{xx} > 0$ en $(a, b)$
3. $f$ tiene un *punto de silla* en $(a, b)$, si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ en $(a, b)$

4. El criterio *no es concluyente* en $(a,b)$, si $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ en $(a,b)$
   En este caso, debemos encontrar otra manera de determinar el comportamiento de $f$ en $(a,b)$

La expresión $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ se conoce como **discriminante** o **Hessiano** de $f$, se puede calcular co9mo el determinante:

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

**14.8**

Multiplicadores de lagrange:

Este método dice que los valores extremos de una función $f(x,y,z)$, cuyas variables están sujetas a una restricción $g(x,y,z) = 0$, se encuentran sobre la superficie $g = 0$ en lo puntos donde:

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

para algún escalar $\lambda$(llamado multiplicador de lagrange).

Teorema del gradiente ortogonal (teorema 12)

Suponga que $f(x,y,z)$ es derivable en una región cuyo interior contiene una curva suave $C$: $r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j + z(t)\,k$. Si $P_0$ es un punto de $C$ donde $f$ tiene un máximo o un mínimo local relativo a sus valores sobre $C$, entonces $\nabla f$ es ortogonal a $C$ en $P_0$

*DEMOSTRACIÓN:* los valores de $f$ en $C$ están dados por la composición $f(g(t), h(t), z(t))$, cuya derivada respecto a $t$ es

$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = \nabla f \cdot v$

En cualquier punto $P_0$ donde $f$ tiene un mínimo o un máximo local relativo a sus valores sobre la curva $\frac{df}{dt} = 0$, entonces

$\nabla f \cdot v = 0$

Corolario del teorema 12: En los puntos de una curva suave $r(t) = x(t)\,i + y(t)\,j$, donde una función derivable $f(x,y)$ asume sus máximos y mínimos locales en relación con sus valores en la curva, $\nabla f \cdot v = 0$, donde $v = \frac{dr}{dt}$

Método de los multiplicadores de Lagrange:

Sea $f(x,y,z)$ y $g(x,y,z)$ son derivables y que $\nabla g \neq 0$ cuando $g(x,y,z) = 0$. Para determinar los valores máximos y mínimos locales de $f$ sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 0$ (si ésta existe), se obtienen los valores de $x$, $y$, $z$ y $\lambda$ que satisfacen en forma simultánea las ecuaciones

$\nabla f = \lambda \nabla g$ y $g(x, y, z) = 0$

*Mario:* Si $g(x, y, z)$ es continuamente diferenciable en $\Omega$ (una región omega) $\subset D = dom$ (y $\nabla g \neq 0$) de una $f(x, y, z)$ derivable.

Si $P_0$ es un extremo local de $f(x, y, z)$ sujeto a la ligadura $g(x, y, z) = 0$ (superficie de nivel), entonces $\exists \lambda \in R / \nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$

*DEMOSTRACIÓN:* Si $P_0 \in S$ es un extremo local de $f \rightarrow f$ alcanza un extremo local en $P_0 \forall C \subset S / P_0 \in C$ (alcanza un extremo local sobre todas las curvas incluidas en la superficie $S$ que pasa por ese punto)

- Por el teorema del gradiente ortogonal $\nabla f(P_0) \perp v$ (el gradiente es ortogonal al vector velocidad de todas las curvas derivables de $S$ que pasan por $P_0$
- Por otra parte, $\nabla g \perp S$ en $P_0$ (el gradiente es el vector normal al plano tangente a $S$)
  $\rightarrow \nabla g \perp v$ en $P_0 \forall v$ de $C \subset S$

Entonces: $\nabla f(P_0) // \nabla g(P_0)$ (existe un número $\lambda$ que sea la constante de paralelismo.

Desde el punto de vista geométrico, el método de los multiplicadores de Lagrange busca encontrar los puntos en los cuales los gradientes de la $f$ a optimizar y la restricción son paralelos, ya que allí encontraremos extremos locales