UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°7

TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Determinar si la transformación dada es lineal

a) T: $R^4 \to R^2$; T $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

b) T: $M_{nn} \to$ R; T(A) = tr(A) donde la traza de una matriz cuadrada A, que se denota por tr(A), es la suma de las componentes de la diagonal principal. Es decir, si A es una matriz de nxn, entonces tr(A)= $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$

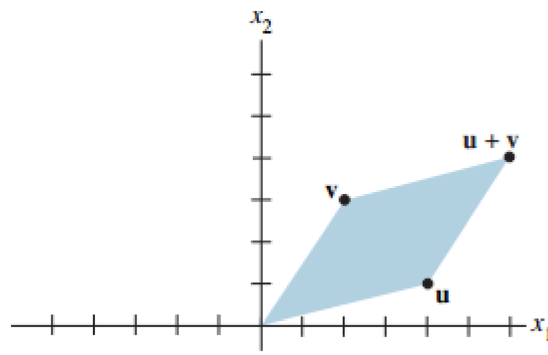
c) T: $P_2 \to P_3$; T(p(t)) = t^3 p'(0)+ t^2 p(0)

d) T: $P_1 \to P_2$; T(p(t)) = t p(t)+ 1

2. Sea $T:\Re^2 \to \Re^2 / T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$

Sean $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Encuentre $T(u)$ y $T(v)$.

Compruebe la linealidad (o no) de la transformación de **manera gráfica.**



3. Encontrar el núcleo, imagen, rango y nulidad de las siguientes transformaciones lineales:

a) T: $R^2 \to R$ / T $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+y)$

b) T: $R^3 \to R^2$ / T $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$

c) T: $M_{2x2} \to M_{2x2}$ / T(A) = A^t + A

4. Demuestra que T: U $\to$ V es una transformación <u>lineal</u> si y sólo si T $(\alpha u+\beta v) = \alpha T(u)+\beta T(v)$ con $\alpha,\beta \in R$ y u, v$\in$V.

5. Sea T: $R \to R$/ T(x)= mx+b con m, b$\in$R.

a) ¿Con qué nombre se conoce esta transformación?

b) Demuestra que T es una transformación lineal sólo si b=0.

c) ¿Cuál/es de las condiciones de linealidad no se cumple cuando b≠0?

6. Sea $T : \Re^2 \to \Re^2$: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Geométricamente, ¿qué representa esta transformación? ¿Es lineal?

7. Sea $T : \Re^2 \to \Re^2$: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$. Geométricamente, ¿qué representa esta transformación? ¿Es lineal?

8. Demuestra que si V y W son espacios vectoriales y L es una transformación lineal de V en W entonces $\forall$v$\in$V se verifica que la imagen de su opuesto es igual al opuesto de la imagen, es decir, que L(-v)= - L(v).

RESOLUCION DE ALGUNOS EJERCICIOS

1) Determinar si la transformación dada es lineal

b) T: $M_{nn} \rightarrow$ R; T(A) = tr(A) donde la traza de una matriz cuadrada A, que se denota por tr(A), es la suma de las componentes de la diagonal principal. Es decir, si A es una matriz de nxn, entonces tr(A)= $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$

Sean A= (a_{ij}), B=(b_{ij}) matrices de nxn. Entonces A+B =$(a_{ij}+ b_{ij})$ con i=1,2,….n

$$T(A+B)= tr(A+B)= a_{ii} + b_{ii}= tr(A)+tr(B)$$

Sea $\alpha \in$ R

$$T(\alpha A)= tr(\alpha A)= \alpha . a_{ii}= \alpha tr(A)= \alpha T(A)$$

Entonces T es lineal.

c) T: $P_2 \rightarrow P_3$; T(p(t)) = t^3 p'(0)+ t^2 p(0)

Si p(t)= $at^2+ bt+ c$ entonces p(0)=c y p'(0)=b. De modo que

$$T(p(t)) =T[at^2 + bt +c]= bt^3 + ct^2$$

Sean p(t)=$at^2 + bt + c$ y q(t)= $dt^2+ et+ f$

Entonces $T[(p+q)(t)]= T[(a+d)t^2 + (b+e) t +(c+f)]= (b+e) t^3 + (c+f) t^2$

$$= [b t^3 + c t^2] + [e t^3+ f t^2]$$

$$= T[p(t)] + T[q(t)]$$

Sea $\alpha \in$ R. Entonces: $T[\alpha p(t)]= T[\alpha (at^2 + bt+ c)]= T[\alpha at^2 + \alpha b t+ \alpha c]$

$$= \alpha b t^3 + \alpha c t^2$$

$$= \alpha T[p(t)]$$

Por lo tanto, T es lineal.

3) Encontrar el núcleo, imagen, rango y nulidad de las siguientes transformaciones lineales:

a) T: $R^2 \rightarrow R$ / T $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x+y$

nu (T)={(x,y) $\in R^2$/ T$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$}

Entonces los pares $(x, y) \in$ nu (T) satisfacen que: $x + y= 0 \Rightarrow x = -y$

De modo que:nu (T)= $\{\begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$ $con\ y \in R\}$= gen $\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \Rightarrow$ v(T)=1

imagen (T)= $\{x + y \quad con\ x + y \in R\}$.

Si denotamos $r = x + y$ resulta que im$T$ $= \{r \in R\} = R \Rightarrow \rho(T)=1$

c) $T: M_{2x2} \rightarrow M_{2x2} / T(A) = A^t + A$

nu(T)= $\{A \in M_{2x2} / T(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}$

Entonces las matrices $A \in$ nu (T) satisfacen que $A^t + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = -A^t \Rightarrow$ A es antisimétrica

$$\text{nu(T)} = \{\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \text{ con } b, c \in R\} = \text{gen } \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\} \Rightarrow \nu(T)=1$$

$$\text{im } T = \{A^t + A \quad \text{con } A \in M_{2x2}\}$$

Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces $A^t=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ y $A^t + A = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2c \end{pmatrix}$

Por lo tanto im T= $\{\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2c \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d \in R\}$= gen$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} \Rightarrow$ $\rho(T)=3$

4) Demuestre que $T: U \rightarrow V$ es lineal **si y sólo** si $T(\alpha u+\beta v) = \alpha T(u)+\beta T(v)$ con $\alpha, \beta \in R$ y $u, v \in V$.

Recordemos la definición de TL: T es lineal $\Leftrightarrow$ i) $T(a+b)=T(a)+T(b)$ $\forall a, b \in U$

ii) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ $\forall a \in U, \forall \alpha \in R$

Demostremos las dos implicaciones.

$\Rightarrow$**)** Sea $T: U \rightarrow V$ lineal $T(\alpha u+\beta v) = T(\alpha u)+T(\beta v) = \alpha T(u)+ \beta T(v)$

por i) de la definición de linealidad por ii) de la definición de linealidad

$\Leftarrow$**)** Sea T una transformación de U en V tal que si $\alpha, \beta \in R$ y $u, v \in U$ se verifica que

$$T(\alpha u+\beta v) = \alpha T(u)+\beta T(v) \quad (*)$$

Si $\alpha=\beta= 1$ aplicando (*) se verifica que $T(u+v) = T(u)+T(v)$

Si $\alpha= 1$ y $\beta=0$ aplicando (*) se verifica que $T(\alpha u)= T(\alpha u+0v)= \alpha T(u)+0.T(v)= \alpha T(u)$

Se demostró, entonces, i) y ii) de la definición de transformación lineal.

8. Por propiedades de las transformaciones lineales se sabe que si ésta se define de V en W (con V y W espacios vectoriales) entonces

- la imagen de 0_V es 0_W (afirmación i del Teorema 7.2.1)

- la imagen de la diferencia de dos elementos de V es igual a la diferencia de las imágenes de dichos elementos (afirmación ii del Teorema 7.2.1)

Entonces empleado los vectores cero o nulo de cada espacio vectorial, que L es una transformación lineal y las dos propiedades anteriores se obtiene que

$$L(-v)= L(0_V - v)= L(0_V)- L(v)= 0_W - L(v)= - L(v)$$

que es lo que se pedía demostrar.