FÍSICA II

Notas sobre Campo eléctrico: ley de Gauss

FICH – UNL

Version v.2

2021

CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

En la unidad I se plantea que, dada una distribución de carga eléctrica es posible conocer el campo resultante mediante la Ley de Coulomb

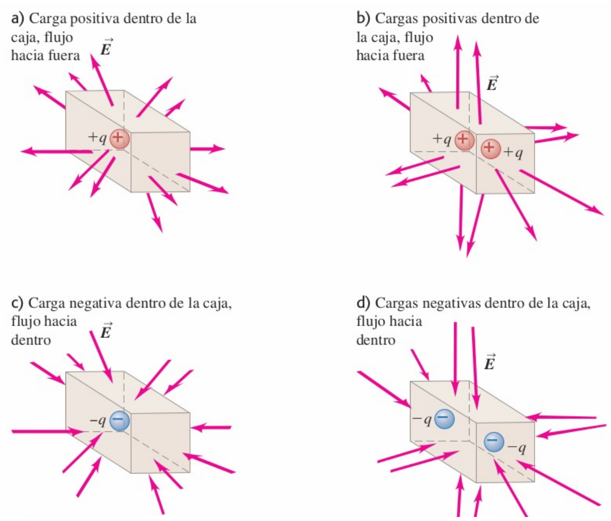
$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}=k\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Para una carga puntual (o un cuerpo esférico lejano) el cálculo es simple

$$\vec{E}=\int d\vec{E}=\int\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

Para una distribución de cargas el cálculo de E en un punto dado no es tan simple ya que se debe a la integral de las contribuciones de cada dq

¿La pregunta inversa es valida?: ¿si se conoce la distribución del campo eléctrico, es posible obtener la distribución de la carga que lo produce?



Hagamos un experimento virtual, tomemos un cubo en el espacio e imaginemos qué ocurre si coloco una carga q positiva. Luego, que pasa si agrego una segunda carga. Y ¿qué pasaría si las cargas fueran negativas?

Se espera que la primer carga produzca un campo eléctrico saliente del cubo. Que la segunda carga genere una mayor densidad de líneas de campo. Y que cargas negativas generen el mismo efecto pero con campo entrante al cubo.

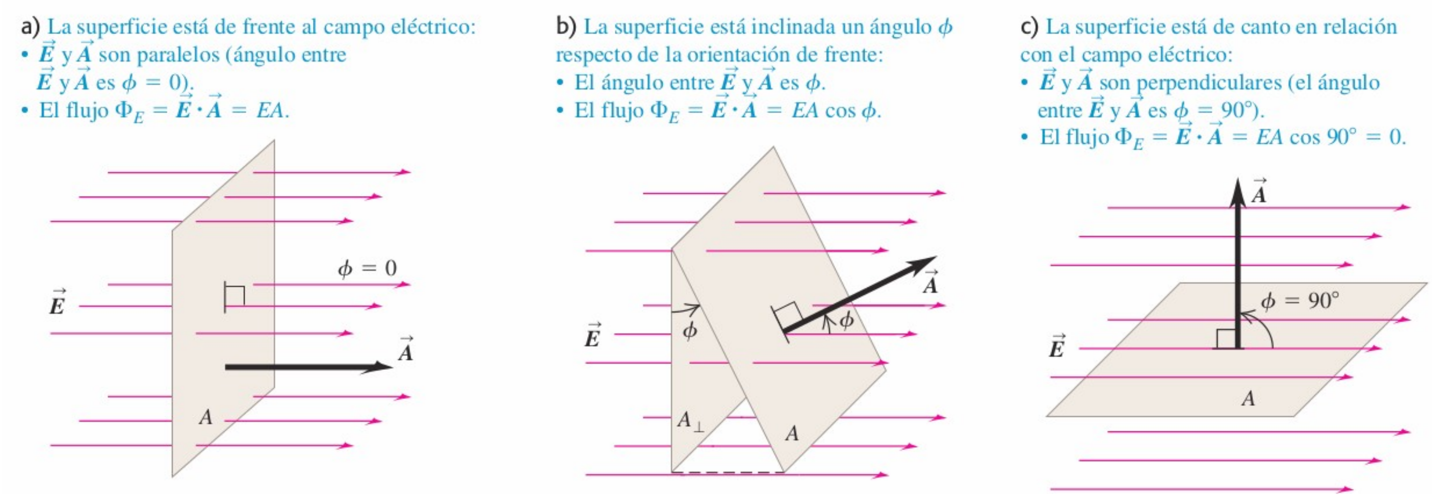
En definitiva, la carga contenida en un dado volumen del espacio debe tener una relación directa con el campo vectorial que produce.

CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

Flujo de campo

Cualquier campo vectorial se puede cuantificar al calcular el flujo del campo que atraviesa una superficie. Esto es conocido como Flujo.

FLUJO ELÉCTRICO: El flujo de una cantidad vectorial (E en este caso) a través de una superficie es el producto escalar entre el campo vectorial y el vector normal de la superficie. En definitiva, el flujo es una medida de la cantidad de vectores que atraviesan una superficie en forma normal.



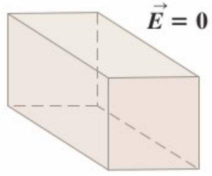
Si E es uniforme y A es una superficie plana $\Phi_E = \vec{E}\,.\,\vec{A}$

Si E es NO uniforme y/o A es una superficie arbitraria $\Phi_E = \int \vec{E}\,.\,d\,\vec{A} = \int E\cos\phi\, dA$

CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

Líneas de campo vs flujo de campo

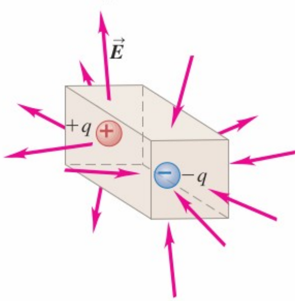
a) Sin carga dentro de la caja, flujo igual a cero



Seguimos experimentando: vaciamos el cubo y vemos que ya no hay líneas de campo.

El primer resultado es bastante obvio. Si el campo eléctrico es producido por cargas eléctricas entonces al no haber carga no hay campo y por lo tanto no habrá flujo. Generar E sin cargas sería como pretender generar gravedad sin masa.

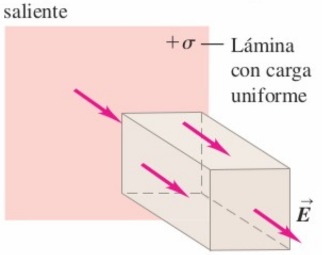
b) Carga *neta* igual a cero en el interior de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente



Luego agregamos una carga positiva y una igual negativa. Nuevamente carga neta nula, campo eléctrico nulo.

El segundo resultado, es decir que no haya líneas de campo ni entrantes ni salientes parece condicionado a que las cargas estén en el mismo punto del espacio. Es decir, si la carga +q está en un vértice izquierdo del cubo y la -q en el derecho, entonces es esperable que por el izquierdo salgan lineas de campo y por el derecho entren. Esto es cierto, voy a ver lineas entrando y saliendo, pero lo interesante es que el flujo neto será nulo!!!!

c) No hay carga dentro de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente

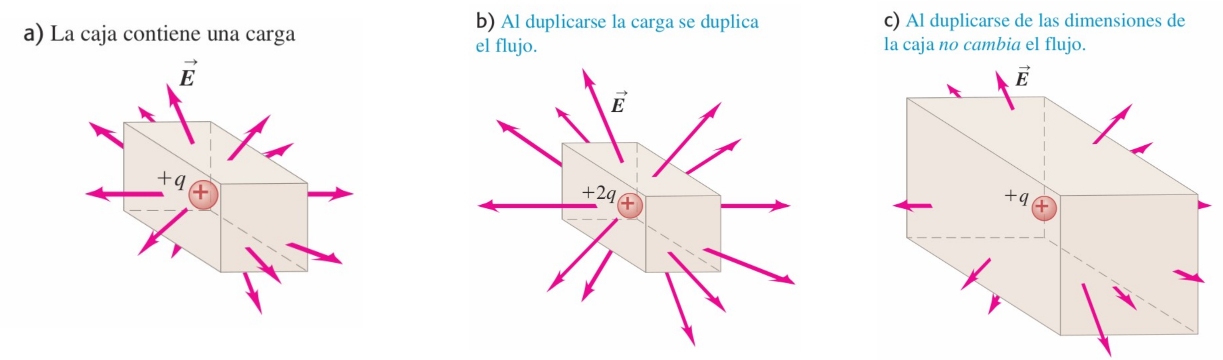


Finalmente colocamos el cubo en una región del espacio donde existe un campo E constante en una dirección. Alineamos el cubo con la dirección del campo

Este resultado es bastante simple de imaginar si pensamos que el campo E es constante y unidireccional y entonces las líneas que ingresan por la superficie posterior salen por la frontal, dando flujo nulo.

CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

¿Cuál es la relación entre la carga y el flujo de E?



Resulta natural pensar que a mayor carga mas lineas de campo y por ende mayor flujo. También que cuanto mayor la superficie menos densidad de líneas de campo atravesarán cada superficie. Sin embargo, la reducción en la cantidad de líneas por unidad de superficie será igual al incremento de la superficie. En definitiva, el flujo será el mismo. Lo difícil es encontrar una relación matemática entre carga y campo, o carga y flujo de campo que se cumpla para cualquier distribución de carga.

La respuesta la obtuvo Carl Gauss (Alemania 1777-1855), quien fue uno de los más grandes matemáticos, además de contribuir a la física y la astronomía.

CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica neta dentro de dicho volumen.

$$\Phi_E = \vec{E} . \vec{A} = \frac{q_{neta}}{\varepsilon_0}$$

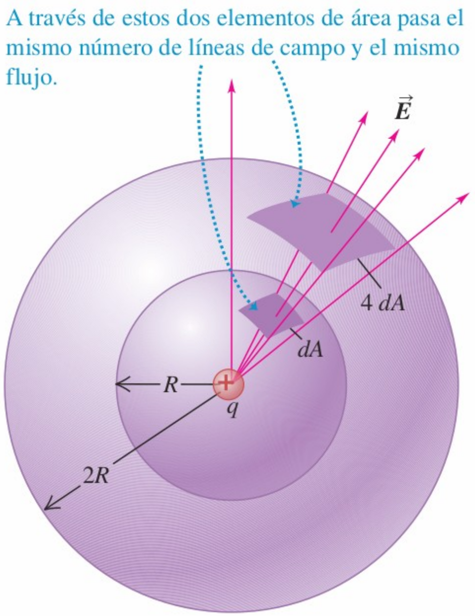
Veamos como funciona para un caso simple: Carga puntual q (+) en el centro de una esfera de radio R.

Las líneas de campo se extienden en forma radial hacia afuera en todas direcciones por igual. Según Coulomb la magnitud E del campo eléctrico en cada punto de la superficie está dada por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}$$

y, el FLUJO es:

$$\Phi_E = \vec{E} . \vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\left(4\pi R^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

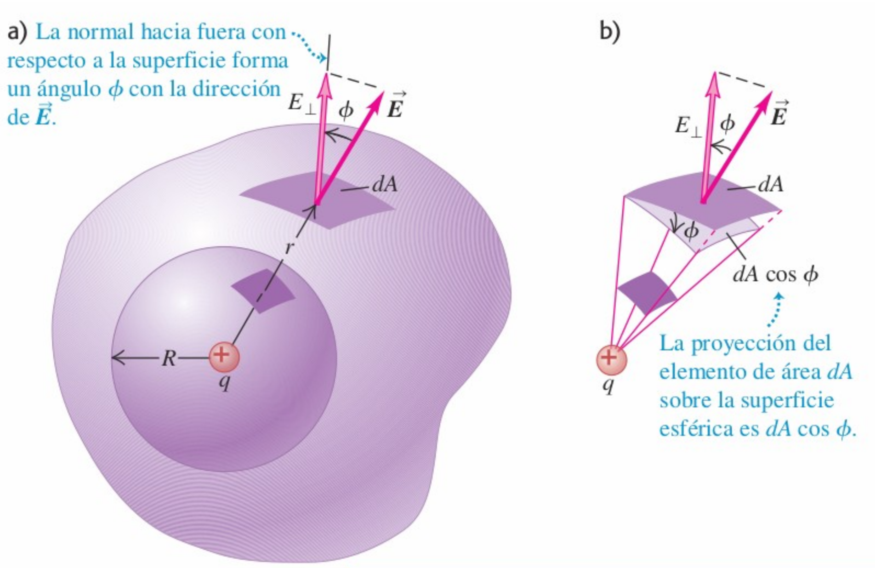


El FLUJO es independiente del radio R de la esfera. Solo depende de la carga encerrada y de una permitividad eléctrica del medio

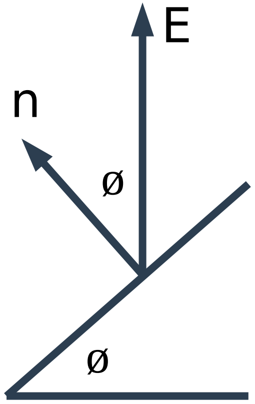
CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

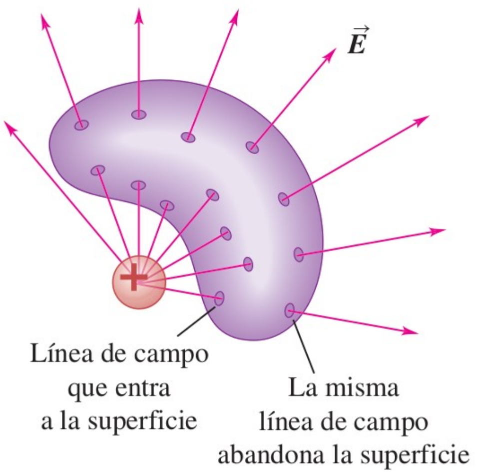
Pero, ¿qué ocurre cuando la superficie no es simétrica?

Se puede demostrar que, sin importar la forma de la superficie de Gauss (siempre y cuando sea cerrada), el flujo de E será igual a la carga encerrada q_{enc}/ε_o



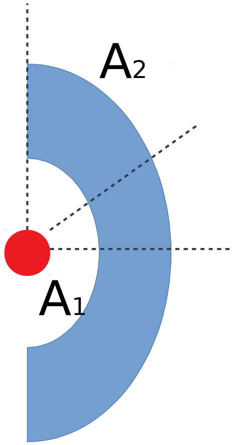
En 2D resulta más fácil verlo





Y, ¿qué ocurre en un caso como este?. La carga está fuera del volumen definido por la superficie de Gauss. Entonces, la carga neta es cero y por lo tanto, el flujo también será nulo

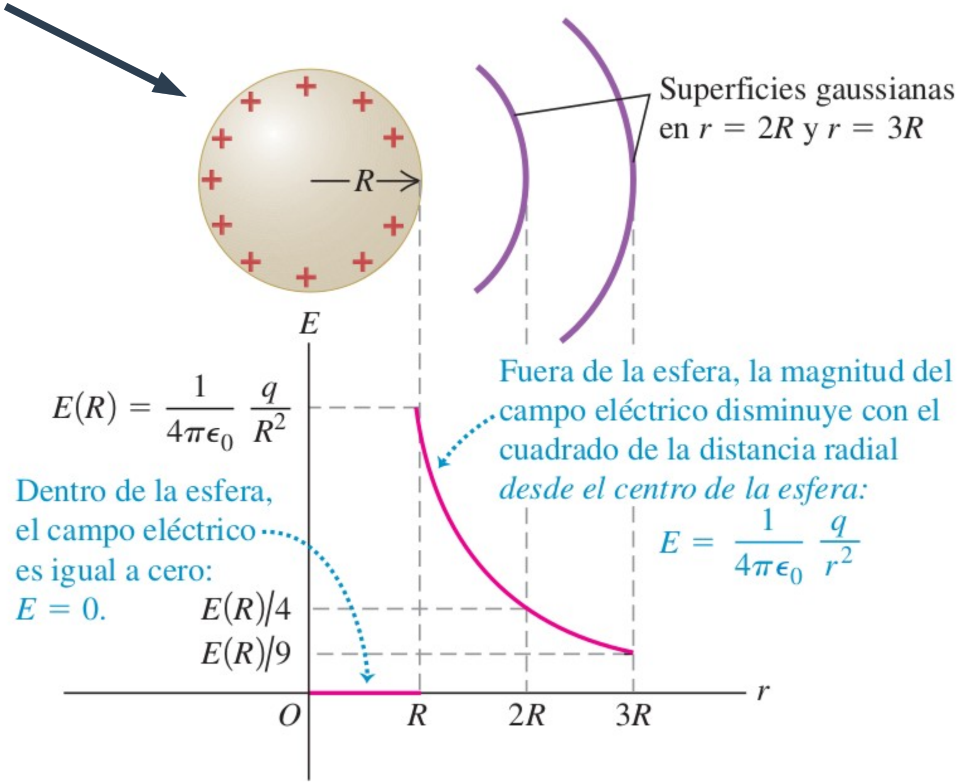
Pensemos en un caso más simple. El flujo sobre la curva interna es positivo y tiene valor $Ø_1 = A_1E_1$. El flujo sobre la cara externa es negativo y tiene valor $Ø_2 = A_2E_2$. Sabemos que E disminuye con r^2 y que A aumenta con r^2. Podemos demostrar que $Ø_1 = Ø_2$ y como el flujo en las dos caras planas es nulo, entonces $Ø_{neto} = 0$.



CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

¿En qué casos vale la pena aplicar Gauss?: Cuando es posible imaginar una superficie de Gauss que sea simétrica respecto a la distribución de carga

Tomemos el caso de una esfera (¿conductora o aislante?) con una carga positiva q. Esta distribución de carga generará líneas de campo salientes a la esfera. Una esfera es isotrópica, es decir que siempre veo lo mismo sin importar desde donde la miro. Luego, es esperable que la solución (campo E también sea isotrópica).



Pensemos en aplicar una superficie de Gauss que sea una esfera de radio r centrada en la esfera con carga:

$$\Phi_E=\vec{E}.\vec{A}=\frac{q}{\varepsilon_0}=E\left(4\pi r^2\right)=\frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Y ¿qué pasa dentro de la esfera con carga?

Si el radio r es menor a R entonces no hay carga encerrada y el campo es nulo. Es decir que en cualquier punto interior de la esfera el campo es nulo.

CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

Y si ahora se trata de una esfera no conductora con carga homogénea?

En este caso necesito expresar a la carga encerrada en función del volumen definido por la superficie de Gauss. Si la carga total es Q, entonces la densidad volumétrica de carga ρ es:

$$\rho = Q/(4\pi R^3/3)$$

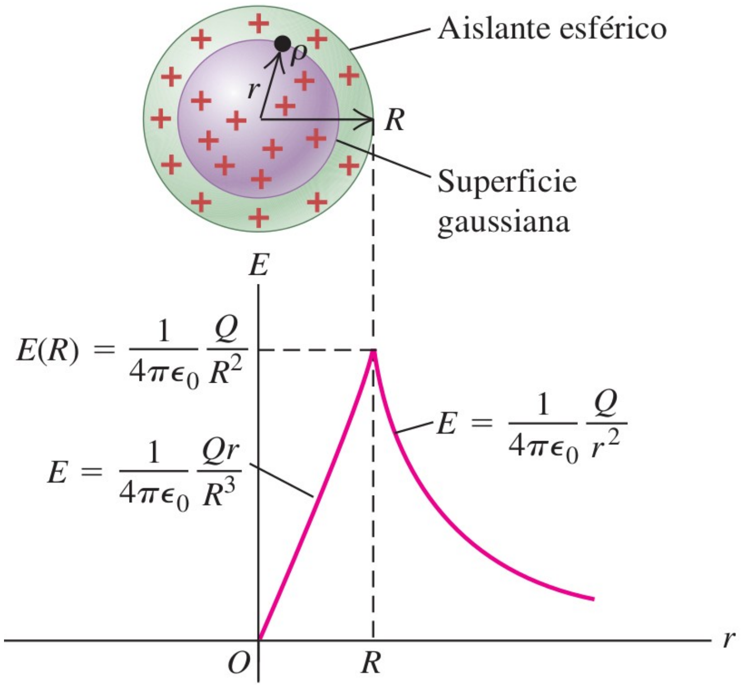
Y la carga encerrada en la superficie de radio r es:

$$q_{enc} = \rho(4\pi r^3/3) = Q r^3/R^3 = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

Luego, el campo E en el interior de la esfera de carga es:

$$E = \frac{q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q r^3}{R^3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q r}{R^3}$$

E crece en forma lineal con r



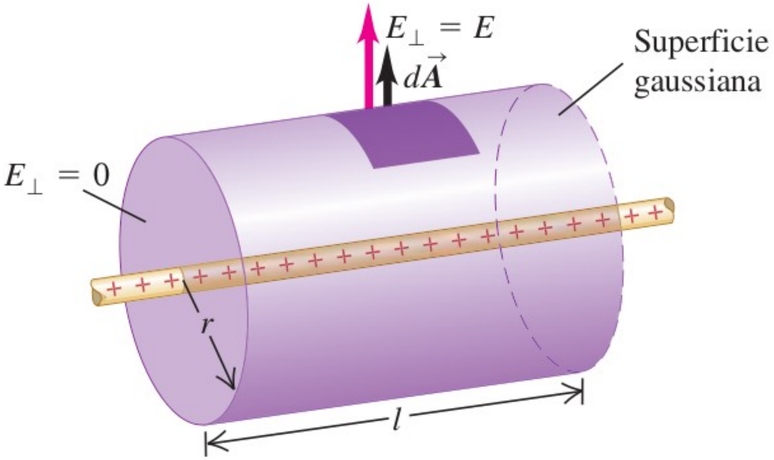
Por otro lado, cuando la superficie de Gauss tiene un radio r>R entonces la carga encerrada es directamente Q y el campo resultante es el mismo que se tiene para una carga puntual

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

Miremos el caso de una varilla con carga uniforme. Si no usáramos Gauss entonces tendríamos que resolver una integral de linea para sumar todas las contribuciones de cada dq sobre un punto dado. Aplicando Gauss el resultado es más rápido. Tomamos una superficie que sea un cilindro de radio r centrado en la varilla. Luego, por simetría, el campo E deberá ser solo perpendicular a dicha superficie. Expresamos la carga en función de la densidad lineal λ como:

$$\lambda = Q/l$$

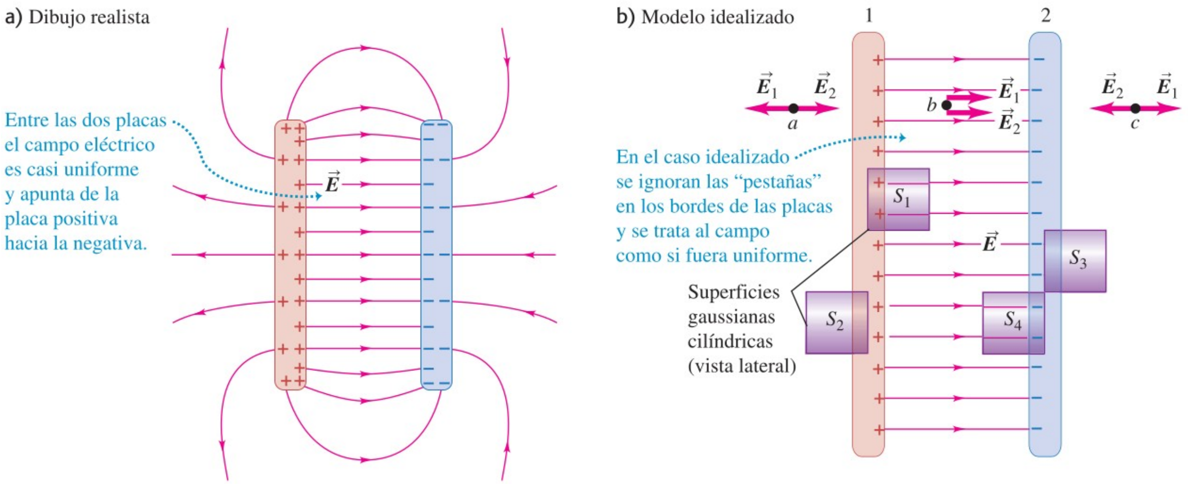


Luego, aplicando Gauss:

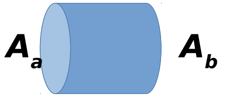
$$\vec{E}.\vec{A} = E(2\pi r l) = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda l}{(2\pi r l)\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r\,\varepsilon_0}$$

CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

El campo entre placas conductoras paralelas es un caso de gran aplicación porque es la base de los capacitores. En este caso entre las placas se establece un campo aproximadamente paralelo, mientras que fuera de ellas el campo puede considerarse nulo. Podemos aplicar Gauss planteando cilindros de radio arbitrario como los mostrados en la figura. Si tomamos las superficies S_2 o S_3 veremos que no hay carga encerrada y por tanto no habrá flujo eléctrico.



En las superficies S_1 y S_4 pasa lo mismo. Analizamos la S_1: sobre la superficie plana en contacto con el metal (A_a), el flujo es nulo ya que, en electrostática, el campo E es nulo dentro de conductores (¿por qué?). Por otro lado, en la otra superficie plana (A_b) sí hay flujo de E. Finalmente, en la superficie curva (A_c) el campo no es nulo, pero el flujo sí lo es porque el campo y la superficie son perpendiculares. Luego, aplicando Gauss:



$$\vec{E}\,.\,\vec{A}=\cancel{\vec{E}_a\,.\,\vec{A}_a}+\vec{E}_b\,.\,\vec{A}_b+\cancel{\vec{E}_c\,.\,\vec{A}_c}=\vec{E}_b\,.\,\vec{A}_b=E_b\,A_b=\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Y la carga encerrada es escrita en función de la densidad de carga σ

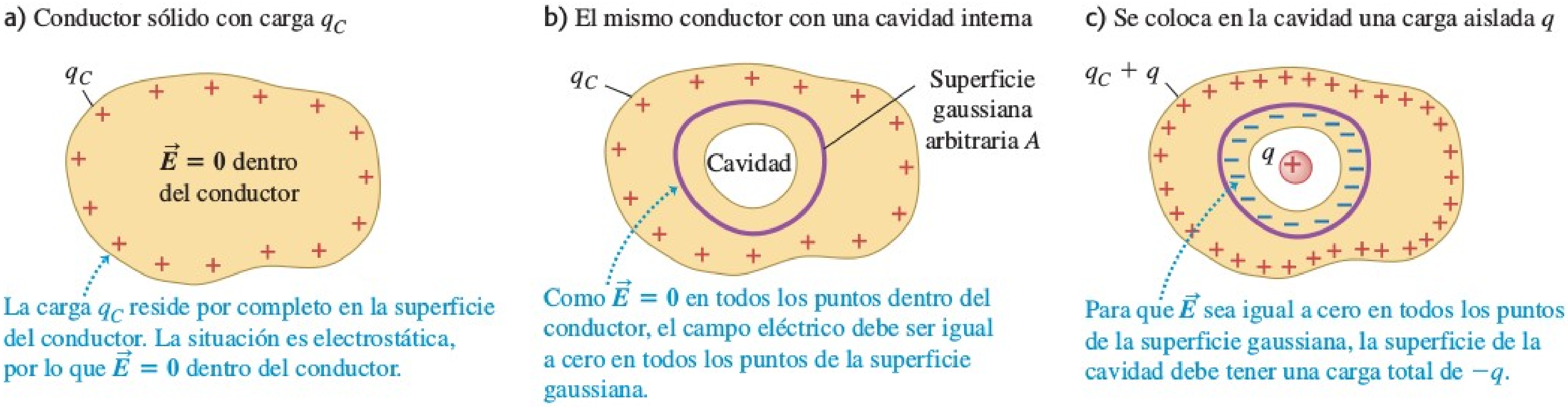
$$\sigma=Q/A_{tot} \quad \Rightarrow \quad E=\frac{q_{enc}}{A_b\,\varepsilon_0}=\frac{\sigma A_b}{A_b\,\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Este resultado nos muestra que el campo entre placas paralelas es igual en cualquier posición e independiente de la distancia entre placas

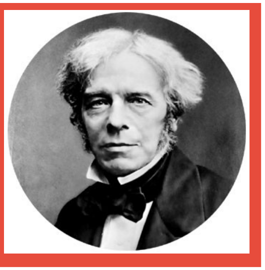
CAMPO ELÉCTRICO – Ley de Gauss

Campo eléctrico dentro de un conductor con carga

Sabemos que en un conductor las cargas se re acomodan hasta que alcanzan una configuración tal que el campo eléctrico en cada punto sea nulo. Esto debe ser así porque sino las cargas estarían en constante movimiento y eso requeriría de un gasto de energía. Es decir, no podría perdurar indefinidamente.



El caso b es lo que normalmente se llama Jaula de Faraday. Básicamente lo que ocurre es que dentro de una "jaula" conductora las cargas se re acomodan para que el campo en el interior sea nulo.



CAMPO ELÉCTRICO – Jaula de Faraday

La jaula de Faraday es un protector contra campos eléctricos externos