Cálculo I:

Clase 1:

Derivadas y sección 3.1

Fórmula de la derivada: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Alternativa: $f'(x) = \lim_{h \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

Teorema del valor intermedio: si f es una función continua en [a,b] y "k" es un valor entre $f(a)$y $f(b)$, entonces $\exists c \in (a,b)$tal que $f(c) = k$

Teorema de Bolzano (consecuencia o corolario): sea f una función continua en $[a,b]$ y $f(a) * f(b) < 0$entonces $\exists\, c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$

Casos de no derivabilidad:
. f discontinua en x=c
. punto anguloso en x=c
. punto cuspidal en x=c
. recta tangente vertical en x=c

Definición: Extremos de una función (absolutos): Sea f una función definida en un intervalo I que contiene a c

1. $f(c)$ es el mínimo de f en I si $f(c) \leq f(x)\ \forall\, x\, en\, I$
2. $f(c)$es el máximo de f en I si $f(c) \geq f(x) \forall\, x\, en\, I$

Teorema del valor extremo (Weierstrass)(3.1): si f es continua en [a,b], entonces alcanza en [a,b] sus extremos absolutos. El recíproco es FALSO (puede alcanzar sus extremos absolutos sin ser continua).

Definición: Extremos relativos:

1. Si hay un intervalo abierto que contenga a c en el que $f(c)$ es un máximo, entonces a $f(c)$ se le llama máximo relativo de f, o también suele decirse que f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$
2. Si hay un intervalo abierto que contenga a c en el que $f(c)$ es un mínimo, entonces a $f(c)$ se le llama mínimo relativo de f, o f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$

Puntos críticos: $x = c \in Df$ es un punto crítico de f si $f`'(c) = 0$ o $f\,'(c)$no existe.

Teorema de Fermat: si $x = c$ es un extremo local o relativo de f entonces $x = c$ es un punto crítico de f.

Utilidad del contrarrecíproco: Si $x = c$ no es punto crítico de f, $x = c$ no es extremo relativo.
NO EXISTEN LOS PUNTOS LOCALES EN LAS FRONTERAS []
El recíproco es FALSO, puede haber un punto crítico, sin ser un extremo.

Clase 2:

Aclaración

Ecuación de la recta: $(y - y1) = m(x - x1)$

m: $\frac{y2-y1}{x2-x1}$

3.2

Teorema de Rolle: Si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces $\exists\, c \in (a, b) \,/\, f'(c) = 0$
Debilitación de derivabilidad: Asegura que $\exists\, c \in (a, b) \,/\, f'(c)\ no\ existe$
Recíproco falso: Puede $\exists\, c \in (a, b) \,/\, f'(c) = 0$ y que f no sea derivable en (a,b), f no sea continua en $[a, b]$ o que $f(a) \neq f(b)$.
Interpretación geométrica: Rolle asegura la existencia de al menos un punto en el interior del intervalo en el cual la recta tangente a la función es horizontal.

Teorema de Lagrange (valor medio): Si f es continua en [a,b] y derivable en (a,b), entonces $\exists\, c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Interpretación geométrica: (m de la tangente en x=c = m de la recta secante que pasa por los puntos $[(a, f(a)), (b, f(b))]$, o sea, existe al menos un punto donde la tangente y la secante son PARALELAS).
.El recíproco es FALSO.
.El teorema de Lagrange es un caso particular del teorema de Rolle si la pendiente de la secante es 0(ambas tangentes son horizontales)

Interpretación en términos de velocidad:
Si se cumplen las condiciones:
Rolle: asegura que al menos en un instante, un organismo en movimiento, se detuvo en el camino (velocidad nula).
Lagrange: asegura que existió al menos un instante donde la velocidad instantánea era igual a la velocidad promedio.

3.5

Aclaración: El ∞ NO es un número, si decimos que un límite existe, decimos que es un número (la infinitud es un caso de no existencia de un límite)

Definición de límites al infinito: Sea L un número real

1. La afirmación $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0\, /\, |f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x > M$
2. La afirmación $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ significa que $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N < 0\, /\, |f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x < N$

Teorema 3.10: $\frac{c}{x^n}$ $x \to \pm$ el denominador se hace arbitrariamente grande →la función se hace arbitrariamente chica.

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{Pm(x)}{Qn(x)}$ .m>n⇒lim=∞ .m<n⇒lim=0 .m=n⇒lim=$\frac{am}{bn}$(coef princ.)

Asíntotas: $y = k$ es asíntota de $f(x)$ si $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$ (si la distancia entre la función y la recta y se vuelve cada vez menor, y es una asíntota de dicha función)

Asíntotas horizontales: La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$ (cuando un límite al infinito da un número finito)

Asíntotas verticales: cuando un límite tendiendo a un número finito da infinito. Cuando hablamos específicamente de las A.V no podemos proponer infinitos puntos de corte como con las A.H, ya que esto estaría contradiciendo la definición de función porque no cumple con la unicidad.

Asíntotas oblicuas: si $y = mx + h$ es A.O de $f(x)$, entonces:

1) $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$
2) $h = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$

Las A.O generalmente aparecen en funciones racionales con $m > n$.

Definición de límites infinitos en el infinito: Sea f una función definida en intervalo (a, ∞)

1. El enunciado $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ significa que para todo número positivo M, hay un correspondiente número $N > 0$ tal que $f(x) > M$ siempre que $x > N$.
2. El enunciado $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ significa que para todo número negativo M, hay un correspondiente número $N > 0$ tal que $f(x) < M$ siempre que $x > N$.

Teorema de la función media (compresión): usamos dos funciones como "compresas" en los extremos, siendo la del medio la que queramos evaluar, de esta forma si ambos extremos tienden a un mismo número, entonces la del medio también lo hará.

6.6

Aclaración: un límite inexistente ≠ un límite indeterminado.

Regla de L'Hôpital: sea f y g derivables en (a,b) que contenga a c, salvo tal vez en c misma, si $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces:

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ … nos ayuda a evadir indeterminaciones, pero solo se limita a 0/0 y ∞/∞.

Otras indeterminaciones: $0.\infty$, 1^{∞}, $\infty - \infty$, ∞^{0}, 0^{0}, para evitar estas indeterminaciones, debemos convertirlas en las que sí afecta L'Hôpital a través de propiedades algebraicas o logarítmicas.

.) Teniendo en cuenta que $a.b = \frac{b}{1/a} = \frac{a}{1/b}$, entonces:

$0.\infty = \frac{0}{1/\infty}\ (0/0)\ o\ \frac{\infty}{1/0}\ (\infty/\infty)$

Propiedades logarítmicas:

$.\, ln(a^{b}) = b\, ln\, a$

$.\, log_{2} 8 = 3 \equiv 8 = 2^{3}$

$.\, \lim_{x \to c} ln\, f(x) = ln \lim_{x \to c} f(x)$

$.\, ln(\frac{a}{b}) = ln\, a - ln\, b$

$.\, log_{a} x = n \equiv x = a^{n}$

$.\, ln\,(a.b) = ln\, a + ln\, b$

Clase 3:

3.3

Funciones crecientes y decrecientes (criterio de la primera derivada)

Funciones monótonas: funciones solo decrecientes o crecientes en un intervalo (siempre se debe especificar dicho intervalo ya que en su totalidad podría ser diferente)

. f es creciente en un intervalo cuando $\forall\, x1; x2 \in I: x1 < x2 \Rightarrow f(x1) < f(x2)$

Las funciones crecientes preservan las desigualdades (x1 es MENOR que x2, entonces f(x1) es MENOR que f(x2))

. f es decreciente cuando $\forall\, x1 < x2 \Rightarrow f(x1) > f(x2)$. Las funciones decrecientes no preservan las desigualdades (x1 MENOR que x2, f(x1) MAYOR que f(x2))

Monotonicidad estricta: f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en un intervalo

Monotonicidad atenuante: $x1 < x2 \Rightarrow f(x1) \leq f(x2)$, las funciones se denominan NO decrecientes o NO crecientes (puede haber puntos donde es constante)

Criterio de la primera derivada para monotonicidad: sea f continua en [a,b] y derivable en (a,b) entonces:

1) si $f'(x) > 0 \ldots \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f\ crece\ en\ [a,b]$
2) si $f'(x) < 0 \ \ldots \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f\ decrece\ en\ [a,b]$
3) si $f'(x) = 0 \ \ldots \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f\ es\ constante\ en\ [a,b]$

⇒Recíproco FALSO.

Criterio de la primera derivada para extremos locales: sea c un número crítico de la función f que es continua en un intervalo I que contiene a c. Si f es derivable en este intervalo, salvo posiblemente en c, entonces:

1) si $f'(x)$ cambia de - a + en c, entonces $x = c$ es MÍNIMO LOCAL
2) si $f'(x)$ cambia de + a - en c, entonces $x = c$ es MÁXIMO LOCAL
3) si $f'(x)$ no cambia, entonces c no es extremo local

Aclaraciones: . un mero cambio en la monotonicidad no asegura que el punto sea un extremo (ya que no sabemos que en ese punto f es continua)

. cuando en el punto la función es discontinua el criterio de la primera derivada NO puede aplicarse

3.4

Concavidades (criterio de la segunda derivada)

. f es cóncava hacia arriba en I si f' crece en I (su gráfica siempre está por arriba de las rectas tangentes)

. f es cóncava hacia abajo en I si f' decrece en I (su gráfica siempre está por debajo de las rectas tangentes)

Criterio de la derivada segunda para la concavidad:

Sea f una función dos veces derivable en un I, entonces:

1) $f''(x) > 0 \ \ldots \ \forall x \in I \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba (∪)
2) $f''(x) < 0 \ \ldots \ \forall x \in I \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo (∩)

Punto de inflexión: sea f una función continua en un I; $c \in I$, c es de inflexión de f si en $x = c$ Hay una recta tangente y en él la concavidad cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Teorema 3.8: *Condición necesaria para ser punto de inflexión:*

si $x = c$ es punto de inflexión de $f \Rightarrow f''(c) = 0$ o bien $\nexists\ f''(c)$

. el recíproco es FALSO, ya que puede haber funciones cuya $f''(c) = 0$ y NO necesariamente son puntos de inflexión.

. *utilidad del contrarrecíproco:* si $f''(c) \neq 0$ o no se anula, entonces NO tiene punto de inflexión

Clase 4:

Continuación de la 3.4

Criterio de la derivada segunda para extremos locales:

Sea c un punto tal que $f'(c) = 0$, si $\exists f''(x) \forall x \in I$ (int abierto)

- Si $f''(c) > 0 \rightarrow x = c$ es mínimo local
- Si $f''(c) < 0 \rightarrow x = c$ es máximo local
- Si $f''(c) = 0 \rightarrow$ el teorema no asegura nada (gralte. pto. de inflexión)

Casos en los que falla el criterio:

- $\nexists f'(c)$
- $f''(c) = 0$
- $\nexists f''(c)$

Cuando el criterio falla, se utiliza el de la primera derivada

Trazado de curvas

Inversa: simétricas respecto de $y = x$

Simetría: espejo en $y = x$

Inyectiva: si trazo una línea horizontal corta una sola vez la gráfica

Análisis completo de una función

1. Dominio
2. Conjunto imagen
3. $\cap$ con los ejes
4. Situación cerca de las discontinuidades
5. Situación en $\pm \infty$
6. Continuidad y derivabilidad
7. Monotonicidad y extremos locales
8. Concavidad

Optimización

Optimizar $f(x; y) / g(x; y) = 0$

maximizar o minimizar función objetivo restricción oligadura

Dist.(P,Q)=$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Pasos:

1. Identificar las incógnitas
2. Buscar y escribir la función que nos piden optimizar
3. Buscar y expresar la relación entre las incógnitas

4. Despejar una de las incógnitas de una ecuación para sustituir en la otra
5. Derivar
6. Comprobar si se trata de máx. o min.(sustituir en la derivada un número que esté a la izq. y uno a la derecha
7. Sustituir en la otra ecuación el valor de la incógnita obtenido.

Clase 5

2.5
Derivación implícita

Función implícita: No aparece la y despejada en términos de x.

En los términos en los que únicamente interviene x se deriva como de costumbre, cuando se derivan términos en los cuales interviene y debe aplicarse la regla de la cadena

- $x^2 + y^2 = 25$ ⇒circunferencia radio S (lugar geométrico)

El teorema de la función implícita dice que este lugar geométrico dado por esta ecuación, si cumple con determinadas condiciones, puede esconder segmentos de una gráfica que contenga una o más funciones

- $x^2 + y^2 = -4$ ⇒ningún lugar geométrico
- $x^2 + y^2 = 0$ ⇒P(0,0) (un solo punto)

Aplicaciones:
Derivación logarítmica: para resolver derivadas de funciones más complicadas (racionales y expopotenciales). Se aplica log en ambos miembros.
Cálculo de derivadas de inversas de funciones.

3.7
Diferenciales
Aproximación de funciones de manera local(mirarla en un determinado lugar) por medio de una recta tangente.
Sea f derivable en I(abierto) donde $c \in I$, $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ es la recta tangente aproximante. $c \rightarrow$centro de aproximación

Utilidad: En un intervalo pequeño que contiene a c (que sea derivable), la recta tangente y la función se confunden. Esto sirve al tener una función complicada ya que podemos evaluarla en el punto más facilmente usando la recta tangente en lugar de la original (ésta será un polinomio de grado 1)

Definición de diferencial: Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo abierto que contenga a x. *La diferencial de* $x\,(dx)$es un número cualquiera distinto de cero. *La diferencial de* $y\,(dy)$ es $dy = f\,'(x)\,dx$ (cambio que se produce por moverse desde c hasta Δcen la recta aproximante. Cuando $\Delta c \Rightarrow 0$, $\Delta y \simeq dy$
Diferencial(definición no formal): es una cantidad que sirve para aproximar cambios producidos en la función a través de cambios producidos en la tangente.

Propagación de error: $\Delta y = f(\,x + \,\Delta x) \,-\, f(x) \,\simeq f\,'(c)\,\Delta x$,Δy no puede calcularse por ser el error real así que utilizamos dy y obtenemos un valor aproximado.
Error relativo: $\frac{dv}{v}.\,dr$

Aproximación de cantidades: $\Delta y = f(\,x + \,\Delta x) \,-\, f(x) \,\simeq f\,'(c)\,\Delta x$
Clase 6
Aclaraciones
Definición de primitiva: Fes primitiva o antiderivada de f en I si $F'\,(x) = f(x)\ \forall \epsilon R$
Definición de integral indefinida:familia de todas las primitivas de una función.

6.4
Método de separación en suma de funciones parciales
La *integración por separación en fracciones parciales* se utiliza para funciones racionales.
$\frac{P(x)\,(grado\,m)}{Q(x)\,(grado\,n)}$ $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ *cociente de polinomios*

- suponemos que: $m < n$ (inoperable)

Las raíces de Q son:
.*Caso 1:* reales y distintas
.*Caso 2:* reales repetidas
.*Caso 3:* complejos simples
.*Caso 4:* complejos repetidos

- Suponemos que: $m \geq n$ (impropia)

Dividimos P por Q y obtenemos el polinomio del cociente ($C(x)$) y del resto ($r(x)$), luego aplicamos uno de los casos anteriores (ver ejemplos)

Clase 7
4.2
Área

Método de exhaución o agotamiento (Alquimes): Calcula el área de un círculo mediante cuadrados inscriptos y circunscriptos, para hacerlo más exacto, aumenta la cantidad de lados.

Definición de partición: Dado un intervalo $[a, b]$, una partición de un intervalo es un conjunto de puntos que contiene a las fronteras y particiona al intervalo en subintervalos que se llaman no solapados.
-Dos intervalos consecutivos son no solapados cuando se tocan pero no se pisan. Su único punto de intersección es la frontera en común.

- Particiones irregulares→ los Δxi (longitudes) no son iguales.
- Particiones regulares→ todos los Δxi son iguales $\left(\Delta xi = \frac{b-a}{n}\right)$.

Norma de la partición: máximo entre todas las longitudes de los subintervalos $||p|| = máx_{1<i<n}\{\Delta xi\}$.
Si n aumenta, $||p||$ disminuye y viceversa (vale cuando los refinamientos son regulares!).
Definición de refinamiento: Dado $[a, b]$, considero una partición P, una partición Q que sea un refinamiento de P sería que Q sea superconjunto de P (debe contener los mismos puntos que P más otros)

Por Weierstrass: Si f es continua en $[a, b]$, entonces en cada uno de los intervalos Δxi tiene un mínimo y un máximo y:
$s(m) = f(m_1). \Delta x_1 + f(m_2). \Delta x_2 + f(m_n). \Delta x_n$ suma inferior
$S(M) = f(M_1). \Delta x_1 + f(M_2). \Delta x_2 + f(M_n). \Delta x_n$ suma superior

Teorema 4.3: Límites de las sumas inferior y superior→ sea f continua y no negativa en $[a, b]$. Los límites cuando $n \to \infty$, de las sumas tanto inferior como superior existen y son iguales entre sí:

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x$$
$$= \lim_{n\to\infty} S(n)$$

Definición del área de una región en el plano: Sea f continua y no negativa en $[a, b]$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x\,,\ x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

4.3

Sumas de Riemann e integral definida

Suma de Riemann: Sea f definida en $[a, b]$

Sea $\Delta = \{a = x_0 < x_1 <... < x_{i-1} < x_i <... < x_n = b\}$ una partición del $[a, b]$;

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y sea $c_i \in [x_i - 1; x_i]$ entonces: la suma $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ se llama suma de Riemann de f para la partición Δ.

*Para cada partición: $s(n) \leq SR \leq S(n)$ … pero en el límite todas coinciden (teorema de comprensión o valor intermedio)

- $s(n) \leq SR \leq S(n) \rightarrow$ cuando $\lim_{||\Delta|| \to 0}$ de las sumas de Riemann existe, la función se llama integrable en $[a, b]$ y el valor de ese límite se denota: $\int_a^b f(x)\, dx$.

<u>Definición de una integral definida:</u> una función es integrable en un intervalo cuando el límite de la suma de Riemann de la función en ese intervalo existe. Este límite se conoce como integral definida de f de a a b.

<u>Teorema 4.4: Continuidad implica integrabilidad:</u> Si f es continua en $[a, b]$ $\Rightarrow$ f es integrable en $[a, b]$

$\Leftarrow$Recíproco FALSO

<u>Definición de las integrales como áreas de una región: Si f es</u> continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x)\, dx$

<u>Aclaraciones importantes</u>

.$f \geq 0$ en $[a, b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx$ puede verse como área

.f continua en $[a, b]$ $\Rightarrow$ condición suficiente de integralidad

El área no puede ser negativa, sin embargo, si la integral da como resultado un n° negativo, tampoco implica que sea el resultado del área, debemos confirmar si el integrando es no negativo

<u>Propiedades sobre integrales:</u>

- $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$ $\Rightarrow$alterar el orden del diccionario
- *Aditividad del intervalo:* si $a < c < b$; entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema 4.7: *Linealidad:*

$$\int_a^b (\alpha f \pm \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \pm \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema 4.8: *Preservación de desigualdades:*

- Si $f(x) \geq 0\ \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ (recíproco falso)
- Si $f(x) \geq g(x)\ \forall\, x \in [a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

$\Leftrightarrow$ Recíproco FALSO

Notas complementarias sobre propiedades de integrales definidas:

1. Si $m \leq f(x) \leq M\ \forall\, x \in [a,b]$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \geq M(b-a)$.
2. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
3. f par: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$. $f$impar: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Clase 8

4.4

TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

1° teorema fundamental del cálculo: Sea f continua en $[a,b]$ y sea F una antiderivada de f. Entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

Definición de *punto de bifurcación*: es el punto en el cual se anula el argumento del valor absoluto (donde cambia el comportamiento de f)

Valor medio o promedio de una función continua en $[a,b]$: $\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(x)\,dx$

Teorema del valor medio para integrales: Sea f continua en $[a,b] \Rightarrow \exists\, c \in [a,b] / f(c) = \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(x)\,dx \rightarrow f(c).(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Interpretación geométrica para el área: (se considera $f \geq 0\ en\ [a,b]$)
Asegura la existencia de al menos un punto, que genera un

rectángulo en el cual $f(c).(b-a)$ es su área, con base en el punto $[a,b]$ y altura en $f(c)$.

<u>2° teorema fundamental del cálculo:</u> Sea f una función continua en un intervalo I, $a \in I$; entonces: $\frac{d}{dx}[\int_a^x f(t)\, dt] = f(x)$ ⇒refuerzo del carácter inverso de los operadores de integración y derivación.

<u>¡Saber diferenciar!:</u> .*integral indefinida:* familia de primitivas
.*integral definida:* un número
.función *integral:* una función

<u>Generalización del 2°TFCI:</u> $\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\, dt = f[u(x)]\,.\,u'(x)$

5.1

Cálculo de área: $\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$. ($f(x)$ mayorante, $g(x)$ *minorante*). ACL: las áreas permanecen invariables por la traslación.

5.4

Longitud de arco: Debe ser una curva suave, función continuamente diferenciable en $[a,b]$y $f(x)'$debe ser continua. $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f(x)']^2}\, dx$

Clase 9

6.7

Integrales impropias

Método para evaluar integrales que no satisfacen algunos requerimientos(límites infinitos o discontinuidades en el intervalo).

<u>Definición de integrales impropias con límites de integración infinitos:</u>

1. Si f es continua en $[a,\infty)$ ⇒ $\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx$
2. Si f es continua en $(-\infty, b]$ ⇒ $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\, dx$
3. Si f es continua en $(-\infty, +\infty)$ ⇒ $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \int_{-\infty}^c f(x)\, dx + \int_c^\infty f(x)\, dx$

En 1 y 2, si el límite existe, converge. En 3 si alguna de la derecha diverge, la de la izquierda también.

Definición de integrales impropias con discontinuidades infinitas:

1. Si f es continua en $[a,b)$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$
2. Si f es continua en $(a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$

El límite nos permite calcular las integrales impropias

3. $\exists\, c \in (a,b) \,/\, f$ discontinua en c $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Dos tipos de integrales especiales

$\int_1^\infty \frac{dx}{xp}$ $\Rightarrow$ extremo de integración no finito

$\int_0^1 \frac{dx}{xp}$ $\Rightarrow$ discontinuidad en el intervalo

Las integrales de tipo "p" Criterio de convergencia: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$

.Si $\frac{1}{p-1}$ $p > 1$

.Diverge si $p \leq 1$

Cola de una integral impropia:

$\int_4^\infty \frac{dx}{x^2}$ $(cola\, de \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ $(criterio)$ $- \int_1^4 \frac{dx}{x^2}$ $(definida\, con\, 1°TFC)$

Toda integral impropia tiene el mismo carácter que su cola

Criterio de comparación directa: Sean $f(x)$ y $g(x)$ continuas en $[a, +\infty)$ y tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in [a, +\infty)$, entonces:

- Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ converge
- Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge

Criterio de comparación en el límite: Sean $f(x)$ y $g(x)$ positivas y continuas en $a, +\infty)$. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ (Lpositivo y finito), entonces:

$\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_a^\infty g(x)\,dx$ tienen igual carácter.

Puede extenderse a los casos:

- $L = 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$. Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.
- $L = 0 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$. Si $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ diverge, $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Clase 10

7.1

Sucesiones numéricas

Definición de sucesión: Función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.

Notación:

- Por comprensión: Con la ley de formación ya se identifican los términos que la componen $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$
- Por extensión: se le dan valores a n: $\{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\}$
- Por recurrencia: ej. se dan los dos primeros términos y el resto se obtiene sumando los anteriores.

Factorial de un número (n!): es el producto de ese número por todos los anteriores $[n\,(n-1)\,(n-2)....]$ $0! = 1$

Definición del límite de una sucesión: Sea L un número real. El límite de la sucesión $\{a_n\}$ es L. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Si $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, M = M(\varepsilon) > 0 / \left|a_n - L\right| < \varepsilon$ siempre que $n > M$. Si L existe, la sucesión converge a L, sino diverge.

Interpretación en términos de entorno: Existe un M para ε a partir del cual todos los términos de la cola quedan dentro del entorno.

Notas de valor absoluto, entorno y distancia

$|x - c| = dist.\,(x; c)$

$\{x/dist(x; c) < r\} \Rightarrow \{x/|x - c| < r\} = (c - r; c + r)$

Siempre es un intervalo abierto y r es pequeño

$\therefore E\,(c; r) = \{x/|x - c| < r\} \Rightarrow |x - t| < d \equiv x \in E\,(t; d)$

Teorema 7.1: Límite de una sucesión: Sea L un número real. Sea f una función de variable real tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = L$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para todo entero positivo n, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Observaciones:

1. Si como función tuvo límite, como sucesión también. ⇔recíproco falso.
   Contraejemplo: $a_n = sen\,\pi n$ $\rightarrow.\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

. $\lim_{n\to\infty} (sen\, \pi x)$ $\nexists$ por oscilación.

2. $\lim_{n\to\infty} f(x) = L \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $f(n) = a_n$.
3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe, entonces no existe $\lim_{n\to\infty} f(x)$.

<u>Teorema 7.2:</u> *Propiedades de los límites de las sucesiones:*

Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = K$

. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L + K$

. $\lim_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha L \quad \Rightarrow \alpha \in reales$

. $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = L\, K$

. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{K} \quad \Rightarrow b_n \neq 0$ y $K \neq 0$

<u>Sucesiones no pensadas como función:</u> Si involucran exponenciales o exponenciales con base negativa o factoriales.

<u>Teorema 7.3: Teorema de compresión para sucesiones:</u> Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} b_n$ y existe un entero N tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$ para toda $n > N$, entonces $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

<u>Teorema 7.4: Teorema del valor absoluto:</u> Dada una sucesión (a_n), si $\lim_{n\to\infty} \left|a_n\right| = 0 \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (solo si es 0).

<u>Definición de sucesiones monótonas:</u>Se dice que una sucesión $\{a_n\}$es monótona si sus términos son no decrecientes $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n \leq ...$ o si sus términos son no crecientes $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq ...$

$\{a_n\}$ es una sucesión $\Rightarrow$ No decreciente si $a_n \leq a_{n+1}\, \forall n$

$\Rightarrow$ No creciente $a_n \geq a_{n+1}\, \forall n$

<u>Determinación de la monotonicidad</u>

1. Si a_n es pensable como función → usar derivadas
2. Si $a_n (> 0\, \forall n)$ no es pensable como función:

$\frac{a_n}{a_n + 1}$. $< 1 \rightarrow a_n$ es creciente

. $> 1 \rightarrow a_n$ es decreciente

Acotación de sucesiones

Una sucesión a_n es:

- Acotada superiormente cuando $\exists\, M \in R / a_n \leq M\ \forall\, n$
- Acotada inferiormente cuando $\exists\, m \in R / a_n \geq m\ \forall\, n$
- Acotada cuando sea acotada inferiormente y superiormente

Existen infinitas cotas superiores e inferiores

.Supremo $\{a_n\}$ es la menor de las cotas superiores, si es un elemento de la sucesión pasa a llamarse máximo.

.Infimo $\{a_n\}$ es la mayor de las cotas inferiores, si es un elemento de la sucesión pasa a llamarse mínimo.

Las cotas NO dependen de n.

Determinación de la acotación

1. Si es pasable a función→ Se pasa y se examinan max y min.
2. Si no es pasable→ Si es decreciente el primer término es el máx. Si es creciente, el primer término es el min.

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ está acotada. $\Leftarrow$ Recíproco falso.

Teorema 7.5: Sucesiones monótonas acotadas: Si una sucesión $\{a_n\}$es acotada y monótona, entonces converge. $\Leftarrow$ Recíproco falso.

Clase 11

7.2

SERIES NUMÉRICAS

Serie: *suma* de infinita cantidad de términos de una sucesión

.Sea $\{a_n\}$ una sucesión dada, la suma: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ se llama *serie numérica* de los a_n

- $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Aclaraciones:

Siempre se debe poner un número como punto de partida que dé un resultado con sentido

La cola de una serie se denota cómo: cola después de $n - 1$ términos

Definición de series convergentes y divergentes: Dada una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la n-ésima suma parcial está dada por $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Si la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}$converge a

S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y se dice que el límite S es la suma de la serie. Si $\{s_n\}$ diverge, entonces la serie diverge.

La serie geométrica

$\sum_{n=1}^{\infty} a r^k$ Se caracteriza por que el 2° término es el 1° multiplicado por r (razón), el 3° es el 2ª multiplicado por r, etc.

Teorema 7.6: Convergencia de una serie geométrica: Una serie geométrica de razón r diverge si $|r| \geq 1$. Si $0 < |r| < 1$, entonces la serie converge a la suma $\sum_{n=0}^{\infty} a r^k = \frac{a}{1-r}$, $0 < |r| < 1$.

Casos especiales:

. Si $r = 0$ no hay serie (suma infinita de 0)

. Si $r = 1$ tenemos una suma infinita de a por lo que $\lim_{N \to \infty} S_N = N.a = \infty$ y la serie diverge.

La serie telescópica

$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

. Se caracteriza por la cancelación natural de términos.

. Es convergente y se puede calcular su suma

. Se le llama telescopio ya que la suma pasa de ser una expresión extensa a una más pequeña

Demostración: $S_N = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + (1/3 - 1/4) +...+ (1/N - 1/N + 1)$

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1} \qquad \lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to \infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$$

Teorema 7.7: Propiedades de las series infinitas: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, c es un número real, entonces las series siguientes convergen a la suma indicada. (solo vale si es convergente)

1. $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = cA$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$

⇐Recíproco falso, puede que las series sean divergentes y la suma sea convergente.

Teorema 7.8: Condición necesaria de convergencia de una serie numérica: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ⇐Recíproco falso

Demo: suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = L$, entonces, como $s_n = s_{n-1} + a_n$ y $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = L$ se concluye que $L = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (s_{n-1} + a_n) \Rightarrow$

$= \lim_{n\to\infty} s_{n-1} + \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$

$= L + \lim_{n\to\infty} a_n$ (a_n converge a 0)

Teorema 7.9: Contrarrecíproco de la condición necesaria de convergencia: Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. ⇐Recíproco falso

Clase 12

7.3
Criterios de la integral y de comparación directa en cualquier momento me mato

Teorema 7.10: Criterio de la integral

Series numéricas que siendo convergentes no se puede calcular la suma

. $\sum a_n ; a_n > 0 \;\; \forall n$

Sea $f(x)$ una función tal que $f(n) = a_n$ y que es positiva, continua y decreciente $\forall x \in [1, +\infty)$ (¡siempre verificar!) entonces: $\sum a_n$ y $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ tienen igual carácter

En caso de convergencia, la suma de la serie NO es necesariamente igual al valor de la integral, solo heredan el carácter

Las series tipo "p"

$\sum \frac{1}{n^p} | \, |$

Teorema 7.11: *Convergencia de series "p":* La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p}, \frac{1}{2^p},...$

1. Converge si $p > 1$
2. Diverge si $0 < p \leq 1$

Observación: Si $p < 0$, el denom. sube y por contrareciproco de la condición necesaria de convergencia de una serie→Diverge.

Teorema 7.12: Criterio de la comparación directa: Sea $0 < a_n \leq b_n \forall n$

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge

Observaciones: .$\forall n$ es mucho, todo puede darse para las colas de a_n y b_n

. No se dice nada de series mayores a una convergente ni menores a una divergente.

Teorema 7.13 Criterio de comparación en el límite: Suponga que $a_n > 0, b_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = L$ donde L es finito y positivo. Entonces, las dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen o divergen.

Observaciones: . $\forall n$ puede suavizarse sólo para $n \geq N$

. $L = 0 \to a_n \leq b_n$ $L = \infty \to a_n \geq b_n$

Teorema 7.14: Criterio de la serie alternante: Sea $a_n > 0$. Las series alternantes $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ convergen si se satisfacen las condiciones siguientes:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. $a_{n+1} \leq a_n \forall n$

Modificado: Si a_n es decreciente como sucesión, entonces para converger solo debe satisfacer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Teorema 7.15: Residuo de la serie alternante: Si una serie alternante convergente satisface $a_{n+1} \leq a_n$, entonces el valor absoluto del residuo R_N que se da al aproximar la suma S mediante S_N es menor o igual al primer término desechado $\left|S - S_N\right| = R_N \leq a_{n+1}$.

Teorema 7.16: Definición de convergencia absoluta y condicional:

1. $\sum a_n$ es *absolutamente convergente* si $\sum|a_n|$ (teorema 7.16)

2. $\sum a_n$ es condicionalmente convergente si $\sum a_n$ converge pero $\sum|a_n|$ diverge

Demostración teorema 7.16: si $\sum|a_n|$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ es convergente (condición suficiente para la convergencia)

Demos: $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \qquad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$

Por hipótesis: $\sum|a_n|$ conv. $\Rightarrow \sum 2|a_n|$ conv $\Rightarrow$ por c.c.d $\sum a_n + |a_n|$ conv

pero también $\sum|a_n|$ conv y luego $\sum(a_n + |a_n| - |a_n|)$ converge

- $\Leftarrow$Recíproco FALSO

Teorema 7.17: *Criterio de la razón/cociente:* Sea $\sum a_n$ una serie cuyos términos sean distintos de cero

1. $\sum a_n$ converge absolutamente si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$
2. $\sum a_n$ diverge si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ o $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$
3. No es concluyente si $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

.Sirve para cuando aparecen factoriales

Teorema 7.18: *Criterio de la raíz:* Sea $\sum a_n$ una serie

1. $\sum a_n$ converge absolutamente si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$
2. $\sum a_n$ diverge si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ o $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$
3. El criterio de la raíz no es concluyente si $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$

.Sirve cuando los términos tienen forma de potencia n-ésima

- Criterio de la razón y criterio de la raíz nunca son concluyentes para series tipo p.

Clase 13

7.5

Polinomios de Taylor: aproximación de manera local

Método de aproximación a una función (antes usábamos la recta tangente, ahora un polinomio) $P_n(c) \cong f(c)$

Definición de los polinomios de Taylor y de Maclaurin de n-ésimo grado

Si f tiene n derivadas en c, entonces al polinomio

$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 +...+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$ se le llama *polinomio de Taylor de grado n para f en c.* Si $c = 0$, entonces a

$P_n(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 +...+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ también se le llama *polinomio de MacLaurin de grado n para f.*

Teorema 7.19: Teorema de Taylor: Si una función f es $n + 1$ veces derivable en un intervalo I que contiene a c, entonces, para toda x en I, existe z entre x y c tal que $f(x) = f(c) + f\,'(c)(x - c) + \frac{f``(c)}{2}(x - c)^2 +...+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + R_n(x)$ donde $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}$.

Observaciones: . $Error = R_n(x) \leq max.\ f^{(n+1)}(z)\frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!}$

$.f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$f(x) = P_0 + R_0$

$f(x) = a_0 + f\,'(z)(x - c)$

$\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)} = f\,'(z)$ →t. de Lagrange

Aproximación de cantidades: Tomo una función y calculo su polinomio de Taylor, reemplazo en el la variable por el valor de la variable dada en la función. Ej. quiero aproximar $ln(1.1)$, tomo $f(x) = ln(1 + x)$ (porque $ln\,x$ no está definida en 0). Obtengo los términos del polinomio y $ln(1.1) \approx P_n(1.1)$.

Error en la aproximación: $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ $\quad Error = |R_n(x)|$

Clase 14

7.6

Series de potencias

Ahora una f en vez de estar "aproximada", estará *representada* por un polinomio de grado infinito ($f(c) = P_n(c)$)

<u>Definición de serie de potencias:</u> Si x es una variable, entonces una serie infinita de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ se llama serie de potencias. De manera más general, una serie infinita de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + ... + a_n(x - c)^n + ...$ se llama serie de potencias centrada en c, donde c es una constante.

<u>Definición:</u> el *dominio* de una serie de potencias es el conjunto de todas las x que puestas en la serie me den un n° finito (serie convergente)

<u>Teorema 7.20: *Convergencia de una serie de potencias*</u>

Dada una serie de potencias centrada en c ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^2$, sucede exactamente una de las siguientes afirmaciones:

1. La serie converge en $x = c$
2. $\exists \ r > 0/$la serie converge absolutamente para $|x - c| < r$ y diverge para $|x - c| > r$
3. La serie converge absolutamente para todas las x

r= radio de convergencia

intervalo de convergencia: valores de x para los cuales las series de potencias converge

el radio de convergencia obtenido es el mismo que el de la función original, pero el intervalo de convergencia puede cambiar debido al comportamiento en extremos

<u>Teorema 7.21: *Propiedades de funciones definidas mediante series de potencias*</u>

Si una función dada por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$

$$= a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + ... + a_n(x - c)^n + ...$$

tiene un radio de convergencia $R > 0$, entonces, en el intervalo $(c - R, c + R)$, f es derivable (y por lo tanto continua). La derivada y la antiderivada de f son las siguientes

1. $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}$

   $= a_1 + 2a_2(x - c) + ... + n a_n(x - c)^{n-1} + ...$

2. $\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-c)^{n+1}}{n+1}$

$$= C + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + a_2\frac{(x-c)^3}{3} + \ldots + a_n\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

Clase 15

7.7

Representación de una función con series de potencias

Operaciones con series de potencias: Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

1. $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k\, x^n$
2. $f(x^N) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nN}$
3. $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)\, x^n$

7.8

Series de Taylor y Maclaurin

<u>Teorema 7.22: Forma de una serie convergente:</u> Si f se representa mediante una serie de potencias $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ para toda x en el intervalo abierto I que contiene a c, entonces $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ y

$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots$

⇐Recíproco falso

Demostración:

$f^{(0)}(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + a_4(x-c)^4 + \ldots + a_n(x-c)^n$

$f^{(1)}(x) = 1\,a_1 + 2\,a_2(x-c) + 3\,a_3(x-c)^2 + 4\,a_4(x-c)^3 + \ldots + n\,a_n(x-c)^{n-1}$

$f^{(2)}(x) = 2\,a_2 + 3!\ a_3(x-c) + 4.\ 3a_4(x-c)^2 + \ldots + n\,(n-1)\,a_n(x-c)^{n-2}$

$f^{(3)}(x) = 3!\ a_3 + 4!\ a_4(x-c) + \ldots$

$f^{(n)}(x) = n!\ a_n + (n+1)!\,a_{n+1}(x-c) + \ldots$

Evaluando cada derivada en $x = c$ se tiene:

$f^{(0)}(c) = 0!\ a_0$ $f^{(2)}(c) = 2!\ a_2$

$f^{(1)}(c) = 1!\ a_1$ $f^{(3)}(c) = 3!\ a_3$

Teorema 7.23: Convergencia de las series de Taylor: Si $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$ para toda x en el intervalo I, entonces la serie de Taylor para f converge y es igual a $f(x)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$

condición necesaria y suficiente para que una serie converja a la función de la cual provino

Demostración: Dada una serie de Taylor, la n-ésima suma parcial coincide con el n-ésimo polinomio de Taylor. Es decir, $S_n(x) = P_n(x)$ y como $P_n(x) = f(x) - R_n(x)$ se concluye que

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x)$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left[f(x) - R_n(x)\right]$$
$$= f(x) - \lim_{n \to \infty} R_n(x)$$