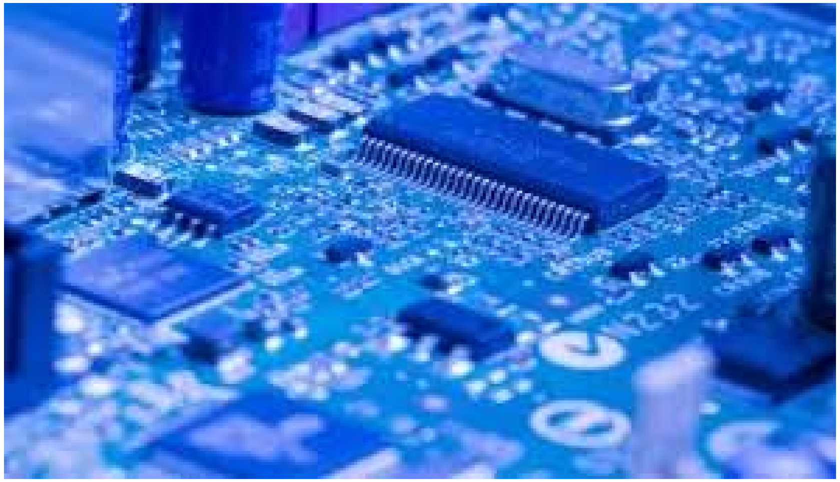
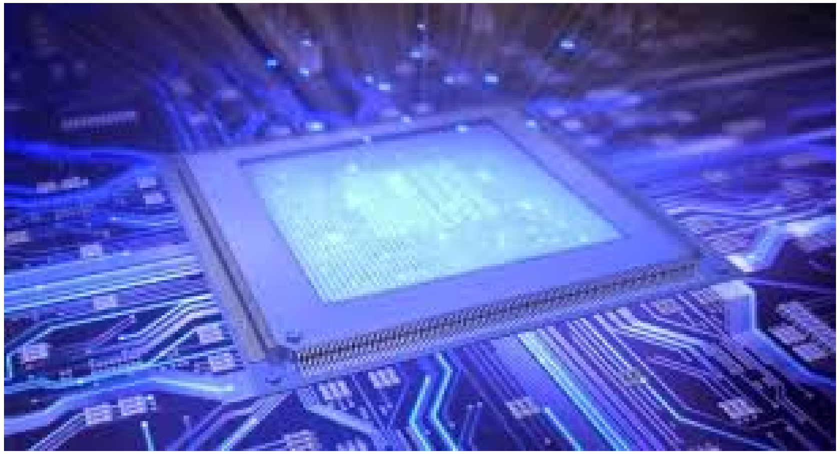
Electrónica Digital

Ingeniería Informática – FICH, UNL
Leonardo Giovanini





Algebra de Boole

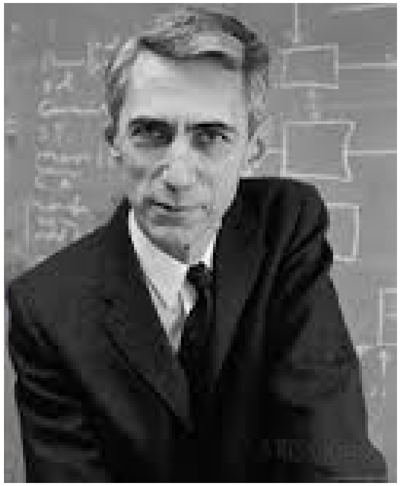
Organización de la clase

En esta se estudiarán los siguientes temas:

- Definición del Algebra de Boole;
- Teoremas fundamentales;
- Principio de dualidad;
- Ejemplos de Algebra de Boole;
- Lógica binaria.

El ***álgebra de Boole***, también llamada álgebra booleana, es una ***estructura matemática*** que ***sistematiza operaciones lógicas***, utilizandos técnicas algebraicas para tratar ***expresiones de la lógica proposicional***.

Fue ***propuesta por George Boole en 1854*** en su libro “*An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*”



Claude Shannon fue el primero en ***aplicarla al diseño y análisis*** de circuitos electrónicos digitales en 1948.

El álgebra de Boole se utiliza para

- ***Análizar*** circuitos digitales porque es una forma de ***describir el funcionamiento***; y
- ***Diseñar*** ya que ***teniendo la función lógica*** se la aplica para desarrollar una implementación de dicha función.

Dado un conjunto formado por al menos dos los elementos B = {∅, U} en el que se ha definido

Una ***operación unitaria*** interna que llamaremos ***complemento***

$$\begin{array}{rccc} \sim: & \mathfrak{B} & \rightarrow & \mathfrak{B} \\ & a & \rightarrow & b = \sim a \end{array}$$

Una ***operación binaria*** interna que llamaremos ***suma***

$$\begin{array}{rccc} \oplus: & \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} & \rightarrow & \mathfrak{B} \\ & (a,b) & \rightarrow & c = a \oplus b \end{array}$$

Una ***operación binaria*** interna, que llamaremos ***producto***

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} & \rightarrow & \mathfrak{B} \\ & (a,b) & \rightarrow & c = a \odot b \end{array}$$

Algebra de Boole - *Definición*

El conjunto y las operaciones así definidas $(\mathfrak{B}, \sim, \oplus, \odot)$ son un Álgebra de Boole, si cumplen los siguientes axiomas

1- Las operaciones de suma y producto son ***asociativas***

$$\forall a, b, c \in \mathfrak{B}: \ (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$
$$(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$$

2- Las operaciones de suma y producto son ***conmutativas***

$$\forall a, b \in \mathfrak{B}: \ a \oplus b = b \oplus a$$
$$a \odot b = b \odot a$$

3- Las operaciones de suma y producto son ***distributivas***

$$\forall a, b, c \in \mathfrak{B}: \ a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c)$$
$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

4- Existencia del ***elemento neutro*** para las operaciones

$$\forall a \in \mathfrak{B}: \ a \oplus \varnothing = a$$
$$a \odot U = a$$

5- Existencia del ***elemento complementario*** para las operaciones

$$\forall a \in \mathfrak{B}; \ \exists \sim a \in \mathfrak{B}: \ a \oplus \sim a = U$$
$$a \odot \sim a = \varnothing$$

La estructura es $(\mathfrak{B}, \oplus, \odot)$ un álgebra de Boole si y solo si es un ***retículo distributivo***.

A partir de estos axiomas se pueden deducir los siguientes teoremas fundamentales

1- Ley de ***idempotencia*** para la suma y producto

$$\forall a \in \mathfrak{B}: \quad a \oplus a = a$$
$$a \odot a = a$$

2- Ley de ***absorción*** para la suma y producto

$$\forall a \in \mathfrak{B}: \quad a \oplus U = U$$
$$a \odot \varnothing = \varnothing$$

3- Ley de ***identidad*** para la suma y producto

$$\forall a \in \mathfrak{B}: \quad a \oplus \varnothing = a$$
$$a \odot U = a$$

4- *Ley de* **involución**

$$\forall a \in \mathfrak{B}: \sim(\sim a) = a$$

5- Ley del ***complemento***

$$\sim U = \varnothing$$
$$\sim \varnothing = U$$

6- Leyes de ***De Morgan***

$$\forall a, b \in \mathfrak{B}: \sim(a \oplus b) = \sim a \odot \sim b$$
$$\sim(a \odot b) = \sim a \oplus \sim b$$

El concepto de ***dualidad*** permite formalizar este hecho: a toda ***relación, o ley lógica***, le ***corresponde su dual*** formada mediante el ***intercambio*** de los operadores suma con los de producto, y de los U con los ∅.

	Adición	**Producto**
1	$a\oplus \sim a = U$	$a\odot \sim a = \varnothing$
2	$a \oplus \varnothing = a$	$a \odot U = a$
3	$a \oplus U = U$	$a \odot \varnothing = \varnothing$
4	$a \oplus a = a$	$a \odot a = a$
5	$a \oplus b = b \oplus a$	$a \odot b = b \odot a$
6	$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$	$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
7	$a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c)$	$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$
8	$a \oplus a \odot b = a$	$a \odot (a \oplus b) = a$
9	$\sim (a \oplus b) = \sim a\odot \sim b$	$\sim (a \odot b) = \sim a\oplus \sim b$

Algebra de Boole - *Ejemplos*

Hay numerosos casos de estructuras algebraicas que corresponden al álgebra de Boole, aunque en apariencia son muy diferentes, su estructura es la misma.

Lógica proposicional - es un sistema formal cuyos elementos más simples representan proposiciones, y cuyas constantes lógicas representan operaciones sobre proposiciones, capaces de formar otras proposiciones de mayor complejidad.

$\mathfrak{B}$ es el conjunto de las ***afirmaciones verdaderas y falsas***, el complemento se denomina ***negación***, a la suma ***conjunción*** y al producto ***disyunción***.

Álgebra de conjuntos - es el estudio de las operaciones básicas que pueden realizarse con conjuntos. Un conjunto es una colección de objetos considerada como un objeto en sí, definido por los elementos que lo componen.

Dado un conjunto U, $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(U)$ es el conjunto de todos los subconjuntos posibles de U, el complemento se denomina ***complemento***, a la suma ***unión*** y al producto ***intersección***.

La ***lógica binaria*** es un sistema lógico cuyas ***variables adoptan sólo dos valores***, valores contrapuestos que son las posibles alternativas entre dos situaciones posibles, que representan el estado de las variables y cuyas operaciones lógicas permiten construir funciones de mayor complejidad.

Sin pérdida de generalidad definimos

$$\varnothing = 0 \qquad U = 1 \qquad \mathfrak{B} = \{0, 1\}$$

- La operación ***complemento*** se llama ***negación***

$$\begin{aligned} \bar{\ } : \quad \mathfrak{B} &\to \mathfrak{B} \\ a &\to b = \bar{a} \end{aligned}$$

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

- La operación ***suma*** se llama ***suma***

$$\begin{aligned} + : \quad \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} &\to \mathfrak{B} \\ (a, b) &\to c = a + b \end{aligned}$$

	$+$	b = 0	1
a	0	0	1
	1	1	1

- La operación ***producto*** se llama ***producto***

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} &\to \mathfrak{B} \\ (a, b) &\to c = a \cdot b \end{aligned}$$

	$\cdot$	b = 0	1
a	0	0	0
	1	0	1

$(\{0,1\}, \bar{\ }, +, \cdot)$ es un Álgebra de Boole porque cumple los siguientes ***axiomas***

1- Las operaciones de suma y producto son ***asociativas***

$$\forall a,b,c \in \{0,1\}: \; (a+b)+c = a+(b+c)$$
$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

2- Las operaciones de suma y producto son ***conmutativas***

$$\forall a,b \in \{0,1\}: \; a+b = b+a$$
$$a\cdot b = b\cdot a$$

3- Las operaciones de suma y producto son ***distributivas***

$$\forall a,b,c \in \{0,1\}: \; a+(b\cdot c) = (a+b)\cdot(a+c)$$
$$a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$$

4- Existencia del ***elemento neutro*** para las operaciones

$$\forall a \in \{0,1\}: \; a+0 = a$$
$$a\cdot 1 = a$$

5- Existencia del ***elemento complementario*** para las operaciones

$$\forall a \in \{0,1\}; \; \exists \bar{a} \in \{0,1\}: \; a+\bar{a} = 1$$
$$a\cdot\bar{a} = 0$$

A partir de los axiomas se deducen los ***teoremas fundamentales***

1- Ley de ***idempotencia*** para la suma y producto

$$\forall a \in \{0,1\}: \quad a + a = a \qquad a \cdot a = a$$

2- Ley de ***absorción*** para la suma y producto

$$\forall a \in \{0,1\}: \quad a + 1 = 1 \qquad a \cdot 0 = 0$$

3- Ley de ***identidad*** para la suma y producto

$$\forall a \in \{0,1\}: \quad a + 0 = a \qquad a \cdot 1 = a$$

4- *Ley de* **involución**

$$\forall a \in \{0,1\}: \quad \bar{\bar{a}} = a$$

5- Ley del ***complemento***

$$\bar{1} = 0 \qquad \bar{0} = 1$$

6- Leyes de ***De Morgan***

$$\forall a,b \in \{0,1\}: \quad \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \qquad \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$$