ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

NOTAS SOBRE APLICACIONES DE LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES CUADRADAS

Una de las aplicaciones de la diagonalización de matrices cuadradas se encuentra en el análisis de la evolución de un sistema dinámico.

Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan en la resolución de sistemas estáticos, es decir, en sistemas que no dependen del tiempo, mientras que los valores y vectores propios se emplean en la solución de sistemas dinámicos, esto es, en sistemas que son función del tiempo. Para describir la evolución de estos últimos frecuentemente se deben calcular potencias de matrices cuadradas y, si estas matrices son diagonallizables dicho cálculo resulta más simple. ¿Por qué?

Se puede demostrar que si A y B son semejantes (es decir, si existe una matriz invertible C tal que $B = C^{-1} A\, C$) entonces A^n y B^n son semejantes con $n \in N$. Más aún $B^n = C^{-1} A^n C$.

Por lo tanto, si A es diagonalizable (esto es, semejante a una matriz diagonal D) entonces existe una matriz invertible C tal que $D = C^{-1} A\, C$, o equivalentemente, $A = C\, D\, C^{-1}$.

De modo que para matrices diagonalizables A, A^n puede calcularse como

$$A^n = C\, D^n\, C^{-1}$$

Ya que D es una matriz diagonal D^n es una matriz diagonal que se obtiene elevando a la n cada elemento de la diagonal principal de D.

Volvamos a los sistemas dinámicos…

Consideremos un sistema dinámico cuyo estado en el tiempo k está representado por un vector columna $X_k \in R^n$ con $n \in N$ y sea $A \in M_{nxn}$ la matriz de cambio de estado. Si el sistema evoluciona a lo largo del tiempo modificando su valor en cada período (minuto, hora, día, mes, etc.) supondremos que la relación entre los estados del sistema en dos períodos sucesivos se expresa por

$$\mathbf{X_{k+1} = A\,X_k} \qquad \mathbf{(1)}$$

Se puede interpretar que el vector X_k brinda información sobre el sistema dinámico con el transcurso del tiempo de modo que su formulación se adapta, por ejemplo, para describir un modelo de crecimiento de poblaciones en biología.

Prosiguiendo como en (1) resulta que en el tiempo k + 2, el estado del sistema será:

$$X_{k+2} = A\,X_{k+1}$$

y por **(1)** la ecuación anterior puede reescribirse como

$$X_{k+2} = A\,X_{k+1} = A\,(A\,X_k) = (A\,A)\,X_k = A^2\,X_k$$

Repitiendo el razonamiento anterior para el tiempo k + p el estado del sistema se describe con la ecuación

$$\mathbf{X_{k+p} = A^p\,X_k} \qquad \mathbf{(2)}$$

Vale decir, que el estado del sistema dinámico en el tiempo k + p será A^p veces el estado en el tiempo k.

Lo anterior también puede predecir cómo evolucionará el sistema en períodos grandes, es decir, cuando $p\to\infty$.

Como se observa en **(2)**, es necesario el cálculo de A^p para conocer el estado del sistema p períodos después de k.

Como vimos en el recuadro de la página 1, el cálculo de la potencia de la matriz A se simplifica si A es **diagonalizable** pues en ese caso si se reemplaza $\mathbf{A^p}$ por $\mathbf{C\ D^p\ C^{-1}}$ entonces **(2)** puede escribirse como

$$\mathbf{X_{k+p} = C\,D^p\,C^{-1}\,X_k}$$

con D la matriz diagonal semejante a A y C una de las matrices diagonalizantes.

Veamos una situación donde es posible aplicar estas consideraciones.

SITUACIÓN 1

Supongamos que en una ciudad hay sólo dos supermercados que llamaremos A y B. Una empresa de publicidad encargada de A, determina que del total de clientes de una ciudad que compran en el supermercado A un fin de semana, el 80% vuelve a comprar en A el siguiente fin de semana, mientras que el 20% restante va a comprar al supermercado B. En tanto, del total de clientes que compran en B un fin de semana, el 70% vuelve a comprar el fin de semana siguiente y el 30% restante va al supermercado A (adaptación de Kozak, Pastorelli y Vardanega, 2007, p. 616)

Esta situación puede plantearse a través del siguiente sistema

$$0.8\ A_o+0.3\ B_o = A_1$$

$$0.2\ A_o + 0.7\ Bo = B_1$$

donde

- A_o es el porcentaje de clientes que compra en el supermercado A el fin de semana inicial,
- B_o es el porcentaje de clientes que compra en el supermercado B el fin de semana inicial,
- A_1 es el porcentaje de clientes que compra en A el fin de semana siguiente,
- B_1 es el porcentaje de clientes que compra en B el fin de semana siguiente

El sistema anterior se puede representar con matrices y vectores como

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$$

Sea $X_o = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix}$, es decir, que el fin de semana inicial el supermercado A tiene el 65% de los clientes y el B el 35% restante. Entonces A_1 y B_1 pueden calcularse usando la última igualdad:

$$X_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.375 \end{pmatrix}$$

Entonces un fin de semana después del inicial el 62.5% de clientes de la ciudad vuelve a comprar en A y el 37.5% restante en B.

Supongamos que se quiere saber el porcentaje de clientes de cada supermercado después de 8 fines de semana después de iniciada esta investigación.

Por **(2)** sabemos que p fines de semana luego del fin de semana inicial, el estado del sistema puede calcularse como

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} A_0 \\ B_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_p \\ B_p \end{pmatrix} \quad \textbf{(3)}$$

Reemplazando p por 8, A_0 por 0.65 y B_0 por 0.35 en **(3)** y efectuando el cálculo de $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^8$ se obtiene:

$$X_8 = \begin{pmatrix} A_8 \\ B_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^8 \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.601563 & 0,9597656 \\ 0.398438 & 0.402344 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.60019 \\ 0.39980 \end{pmatrix}$$

Esto es, luego de 8 fines de semana después del fin de semana inicial el supermercado A tiene un poco más que el 60% de los clientes y el B un poco menos que el 40%.

Veamos otro modo de llegar a los mismos resultados sin la necesidad de multiplicar 8 veces la matriz A, empleando los VAP y VEP de la matriz A de cambio de estado.

La ecuación característica de A = $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0.8-\lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.7-\lambda \end{vmatrix} = (0.8-\lambda)(0.7-\lambda) - 0.06$$
$$= \lambda^2 - 1.5\,\lambda + 0.5 = 0$$

Calculando sus raíces, los autovalores de A, se obtiene: $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Como los autovalores de A son distintos, puede asegurarse que A es diagonalizable.

Calculando los vectores propios correspondientes se obtienen $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ para λ_1 y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ para λ_2.

Por lo tanto la matriz diagonalizante es $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}$, su inversa es $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

y la matriz diagonal semejante a A es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. De modo que A puede escribirse como A= C D C^{-1} y

$$\mathbf{A^n = C\,D^n\,C^{-1}} \qquad \mathbf{(4)}$$

Entonces por **(2)** y recordando lo mencionado en el recuadro de la página 1:

$$X_8 = \begin{pmatrix} A_8 \\ B_8 \end{pmatrix} = C\,D^8\,C^{-1}\begin{pmatrix} A_0 \\ B_o \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^8 & 0 \\ 0 & (1/2)^8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.60019 \\ 0.39980 \end{pmatrix}$$

La ventaja de emplear autovalores y autovectores es apreciable si se busca el modo de predecir el estado a largo plazo. Para ello haciendo k = 0 en (2) resulta

$$\mathbf{X_p = A^p\,X_0}$$

Pero como por **(4)**

$$\mathbf{A^p = C\,D^p\,C^{-1}}$$

Podemos aplicar las últimas dos igualdades y obtener

$$X_p = C\,D^p\ C^{-1}\begin{pmatrix} A_0 \\ B_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^p & 0 \\ 0 & (1/2)^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (1/2)^p \\ 2/3 & -(1/2)^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/5 + (1/2)^p\ 2/5 & 3/5 - (1/2)^p\ 3/5 \\ 2/5 - (1/2)^p\ 2/3 & 2/5 + (1/2)^p\ 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

Como $\frac{1}{2} < 1$ cuando p$\rightarrow \infty$ $\left(\frac{1}{2}\right)^p \rightarrow 0.$ Entonces el estado del sistema, es decir, los porcentajes de clientes para cada supermercado cuando p es muy grande, p$\rightarrow \infty$, será

$$\lim_{p\to\infty} A^p\ X_0 = \lim_{p\to\infty} C\ D^p\ C^{-1} = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^p & 0 \\ 0 & (1/2)^p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix}.$$

Analicemos los cálculos anteriores. En el último de los límites la única matriz que dependía de p era $\begin{pmatrix} 1^p & 0 \\ 0 & (1/2)^p \end{pmatrix}$. Como

$$\lim_{p\to\infty}\begin{pmatrix} 1^p & 0 \\ 0 & (1/2)^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

reemplazando este resultado en la penúltima igualdad es que resulta el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\ \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior puede expresarse también como

$$\lim_{k\to\infty} A^k\,X_0 = \lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}^k X_0 = \lim_{k\to\infty} C\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^k C^{-1}\,X_0$$

$$= C.\lim_{k\to\infty}\begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & (1/2)^k \end{pmatrix} C^{-1}X_0 = C\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C^{-1}X_0$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & 3/5 \\ 2/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix}$$

Del vector $\begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix}$ se puede concluir que, a largo plazo, al supermercado A concurrirá el 60%

de los clientes y al B el 40% de ellos ■

Observación: Si A es una matriz diagonalizable se sabe que existe una matriz invertible C que permite escribir $A = C.D.C^{-1}$. Se puede demostrar, por inducción completa, que para $n \in N$ se verifica que $A^n = C.D^n.C^{-1}$ y que A^n tiende a la matriz nula cuando $n \to \infty$ si sólo si el valor absoluto de cada valor propio de A es menor que 1.

******************************  

Veamos otro modo de emplear la teoría de los valores y vectores propios de una matriz para analizar un sistema dinámico.

Para ello supongamos que la matriz de cambio de estado A, de orden n, es diagonalizable con n vectores propios linealmente independientes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ y sus valores propios asociados son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Puesto que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de n vectores linealmente independientes, éste conjunto es una base de R^n y cualquier vector de R^n puede escribirse como combinación lineal de dichos vectores.

En particular descompongamos X_k como combinación de la base formada por los vectores propios:

$$X_k = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n$$

Entonces de **(2)** y aplicando la propiedad distributiva del producto de matrices se obtiene:

$$\mathbf{X_{k+p} = A^p X_k = A^p (c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n) = c_1 A^p v_1 + c_2 A^p v_2 + \ldots + c_n A^p v_n} \quad \mathbf{(5)}$$

Por definición de valor y de vector propio para cada j=1,2,…n se verifica que

$$A v_j = \lambda_j v_j$$

y puede demostrarse (omitimos la demostración) que $A^p v_j = (\lambda_j)^p v_j$

De modo que, continuando en **(5)**, resulta

$$\mathbf{X_{k+p} = c_1 A^p v_1 + c_2 A^p v_2 + \ldots + c_n A^p v_n}$$

$$\mathbf{X_{k+p} = c_1 (\lambda_1)^p v_1 + c_2 (\lambda_2)^p v_2 + \ldots + c_n (\lambda_n)^p v_n} \quad \mathbf{(6)}$$

Observa que el vector $\mathbf{X_{k+p}}$ quedó, finalmente, escrito como combinación lineal de los VEP de la matriz de cambio de estado A y, en los escalares de dicha combinación lineal, aparecen los VAP de A,

Aplicaremos estos razonamientos en el siguiente ejemplo extraído de Lay (2012) referido a un sistema dinámico depredador-presa.

SITUACIÓN 2

En los bosques de california (EE.UU) las ratas representan el 80% de la dieta de los búhos, el principal depredador de esos roedores.

Denotaremos las poblaciones de búhos y ratas en el tiempo k por el vector $X_k = \begin{pmatrix} B_k \\ R_k \end{pmatrix}$ donde k es el tiempo en meses, B_k es el número de búhos en la región en estudio en el mes k y R_k es el número de ratas (medido en miles), también en el mes k.

Supongamos que

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= 0.5\, B_k + 0.4\, R_k \\ R_{k+1} &= -0.104\, B_k + 1.1\, R_k \end{aligned} \qquad \textbf{(7)}$$

0,5 B_k en la primera ecuación indica que, si no hay ratas para alimentarse, entonces cada mes sobrevivirá sólo la mitad de los búhos, mientras que 1,1 R_k en la segunda ecuación implica que sin los búhos como depredadores, la población de ratas crecería 10% cada mes. Si las ratas son abundantes, 0,4 R_k hará que crezca la población de búhos, mientras que el término - 0,104 B_k mide la muerte de ratas por la depredación de los búhos.

La matriz de coeficientes del sistema **(7)** es $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1. \end{pmatrix}$. Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1.02$ y $\lambda_2 = 0.58$. Y los vectores propios correspondientes son $v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivamente. Ya que los valores propios de A son distintos, se sabe que A es diagonalizable. Entonces un vector cualquiera de R^2 puede escribirse entonces como combinación lineal de $\{v_1, v_2\}$ por ser éste un conjunto linealmente y, por ende, una base de R^2. Entonces para $k \geq 0$:

$$X_k = c_1\, v_1 + c_2\, v_2 = c_1 \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y, por lo tanto,

$$X_{k+p} = c_1\; 1.02^p \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} + c_2\, 0.58^p \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $|0.58| < 1$ cuando p $\to\infty$ $(0.58)^p \to 0$. Supongamos que $c_1 > 0$. Por lo tanto para p suficientemente grande, X_{k+p} es aproximadamente

$$X_{k+p} \cong c_1 \; 1.02^p \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Esta aproximación mejora conforme p aumenta. Para demostrarlo veamos p grande, entonces por la última igualdad

$$X_{k+p+1} = c_1 \, (1.02)^{p+1} \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} = 1.02 \, c_1 \, (1.02)^p \begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} = 1.02 \, X_{k+p} \qquad \textbf{(8)}$$

Observa que 1.02 es el VAP mayor que uno de la matriz A.

La aproximación en **(8)** indica que, a medida que pasa el tiempo, ambos valores de X_k (en este caso, los números de búhos y ratas) crecerán por un factor de aproximadamente 1,02 cada mes, es decir, con una tasa de crecimiento del 2% mensual.

Por **(8)** X_k es aproximadamente un múltiplo de (10,13). De modo que, las componentes en $X_k$están casi en la misma razón que las componentes de v_1: por cada 10 búhos hay casi 13 mil ratas.

El ejemplo anterior muestra dos hechos interesantes acerca de un sistema dinámico $X_{k+1} = A\,X_k$ donde A es n x n, sus valores propios satisfacen $|\lambda_1| \geq 1$ y $1 > |\lambda_j|$ para j=2,3,…,n y $v_1$es un vector propio correspondiente a λ_1 Si X_0 está dado por la ecuación (1) con $c_1 \neq 0$ entonces para k suficientemente grande,

$$X_{k+1} \cong \lambda_1 \, X_k \qquad \textbf{(9)}$$

La aproximación en **(9)** mejora cuanto más grande sea k. Además, por **(9),** X_k finalmente crecerá casi por un factor de λ_1 cada vez; de manera que λ_1 determina la eventual tasa de crecimiento del sistema.

OTRAS SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

1. *Un modelo de movimiento de población:* Se estimaba que el número de personas que vivían en las ciudades de E.E.U.U en el 2000 era de 58 millones y el número de personas que vivían en los alrededores de las ciudades era 142 millones. También se estudió que, por esos años, la probabilidad de que una persona que vivía en una de las ciudades se quedara en esa ciudad o en otra ciudad era 0.96, por lo que la probabilidad de que se desplazara a los alrededores era

0.04. Mientras tanto la probabilidad de que una persona que vivía en los alrededores se cambiara a la ciudad era del 0.01 y la probabilidad de que se quedara en los alrededores era del 0.99.

Por lo tanto tomando 2000 como el año de inicio del sistema y denotando con C_k a la cantidad de personas que en el año k viven en las ciudades de EEUU y con A_k la cantidad de personas que viven en ese año en los alrededores de las ciudades, resulta que el vector $X_k = \begin{pmatrix} C_K \\ A_k \end{pmatrix}$ indica la distribución de la población de EEUU según vivía en las ciudades y en los alrededores transcurridos k años después del 2000 y que

$$X_{k+1} = P\,X_k \qquad (10)$$

con $X_0 = \begin{pmatrix} 58 \\ 142 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 0.96 & 0.01 \\ 0.04 & 0.99 \end{pmatrix}$

a) Expresa el sistema dinámico que resulta de (10).

b) Sabiendo que $X_2 = \begin{pmatrix} 56.245 \\ 143.755 \end{pmatrix}$ calcule la población estadounidense que vivía en las ciudades y en los alrededores en el 2003.

c) Sabiendo que los valores propios de P son λ_1=1 y λ_2 =0.95 y que algunos de los vectores son, respectivamente, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ¿es posible afirmar que a largo plazo si las probabilidades no cambian por 1 persona que vive en una ciudad de E.E.U.U habrá 4 viviendo en los alrededores?

2. En cierta ciudad, 30% de las mujeres se divorcian cada año y 20% de las solteras contraen matrimonio. Hay 8000 mujeres casadas y 2000 mujeres solteras y la población total se mantiene constante.

a) Determine el número de mujeres casadas y solteras al cabo de 5 años.

b) ¿Cuáles son las perspectivas a largo plazo si estos porcentajes de matrimonios y divorcios continúan indefinidamente en el futuro?

3. La ciudad de Midvale conserva una población constante de 300.000 personas de un año a otro. Un estudio de ciencia política estimó que había 150.000 independientes, 90.000 demócratas y 60.000 republicanos en la ciudad. También se estimó que cada año 20% de los independientes se convierten en demócratas y que 10% se convierten en republicanos. De igual manera, 20% de los demócratas se vuelven independientes y 10% se convierten en republicanos; en tanto que 10% de los republicanos abandonan las filas para pasarse a los demócratas y 10% se vuelven independientes cada año. Sea $X_0 = \begin{pmatrix} 150.000 \\ 90.000 \\ 60.000 \end{pmatrix}$ y X_1 un vector

que representa el número de personas en cada grupo al cabo de un año.

a) Obtenga una matriz A tal que $A\,X_0 = X_1$

b) Demuestre que $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.5$ y $\lambda_3 = 0.7$ son los autovalores de A y exprese A en términos de la matriz diagonal semejante.

. c) ¿Que grupo dominará a la larga? Justifique su respuesta calculando $\lim_{n\to\infty} A^n\,X_0$.

REFERENCIAS:

Gareth, W. (2002). *Algebra Lineal con aplicaciones*. México: McGraw-Hill.

Lay, D. C. (2012). *Algebra Lineal y sus aplicaciones* (4° edición). México: Pearson Educación.

León, S. J. (1998). *Algebra lineal con aplicaciones.* México: Compañía Editorial Continental, S.A de C.V.

Kozak, A. M., Pastorelli, S. y Vardanega, P. (2007). *Nociones de Geometría analítica y álgebra lineal*. Argentina: Mc Graw-Hill Interamericana.