Cálculo II

Prof. Ing. Silvia Seluy

TEMA: DERIVADA DIRECCIONAL

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

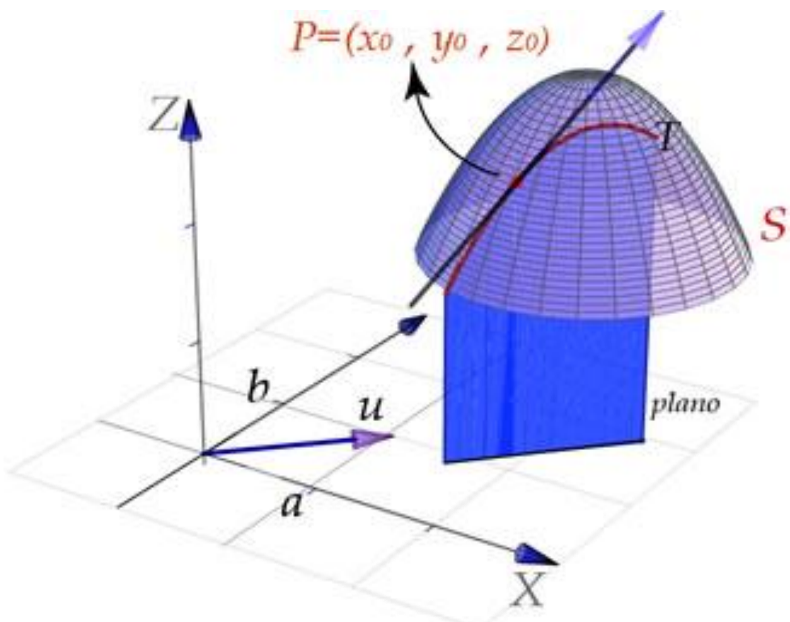
Suponga que deseamos calcular la tasa de cambio de z en el punto (xo,yo) en la dirección de un vector unitario arbitrario $\vec{u} = (a,b)$

Para esto consideramos la superficie S con ecuación *z= f(x,y)* que es la gráfica de f, y sea $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ está sobre S.

El plano vertical que pasa por el punto P en la dirección del vector $\vec{u}$ interseca a la superficie S en la curva T.

La pendiente de la recta tangente a la curva en P, es la tasa de cambio de z en la dirección de $\vec{u}$.

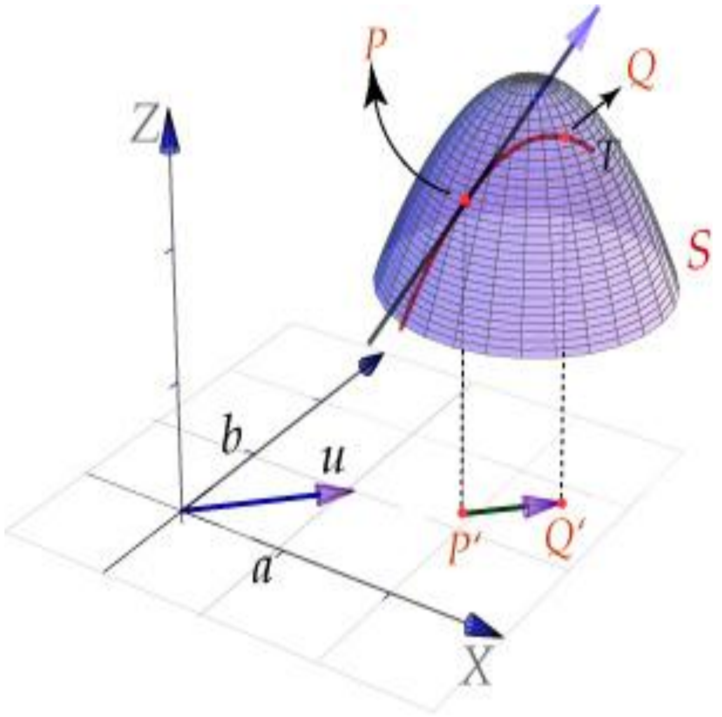


* Si Q(x,y,z) es otro punto sobre la curva T y si P´ y Q´ son las proyecciones sobre el plano xy de P y Q, entonces el vector **P´Q´**, es paralelo al vector **u** y por consiguiente:
* El vector $P'Q' = h.\bar{u} = (ha, hb)$ para algún escalar h , indica que

$$x - x_0 = h.a \Rightarrow x = x_0 + ha$$
$$y - y_0 = h.b \Rightarrow y = y_0 + hb$$

* Y la razón de cambio está dada por:

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha; y_0 + hb) - f(x_0; y_0)}{h}$$



Para tener la tasa de cambio instantánea de z con respecto a la distancia en la dirección de **u,** tomamos el límite para h $\longrightarrow$ 0 y se Obtiene la der. dir. de f en dirección de **u.**

DEFINICIÓN DE DERIVADA DIRECCIONAL

* Sea $f : D \subset R^2 \to R$ una función escalar y sean $P(x_0 ; y_0) \in D$ y $\vec{u} = < a; b >$ un vector unitario, entonces la Derivada Direccional de f en $P(x_0 ; y_0)$ en la dirección de $\vec{u}$ está dada por:

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(P) = D_{\vec{u}} f(x_0 ; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha; y_0 + hb) - f(x_0 ; y_0)}{h}}$$

Siempre que el límite exista.

Derivadas parciales y derivada direccional

* Si comparamos las definiciones de derivada parcial y derivada direccional, se puede notar que para algunos valores del vector unitario, en la derivada direccional, se obtiene una derivada parcial, esto es:

* Si **u** = <1,0>= **i**, entonces $D_{\bar{u}}f(P) = f_x(P) = f_x(x_0, y_0)$
* Si **u** =<0,1> = **j**, entonces $D_{\bar{u}}f(P) = f_y(P) = f_y(x_0, y_0)$

La derivada direccional generaliza las dos derivadas parciales, ya que es posible hablar de la derivada de *f* en cualquier dirección (u) y no sólo en las direcciones i y j.

El gradiente de una función diferenciable *f*

* La función *f(x,y)* está definida en una región R del plano xy, además el punto $P_0(x_0; y_0)$ y el vector unitario **u** también están en R.

* Podemos expresar las ecuaciones que parametrizan la recta que pasa por Po y es paralela al vector **u**, con el parámetro s como

$$x = x_0 + s.u_1 \qquad y = y_0 + s.u_2$$

* *La razón de cambio de f en Po, en la dirección de* ***u****, es:*

$$\frac{df}{ds})_{u,P_0} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1; y_0 + su_2) - f(x_0; y_0)}{s}$$

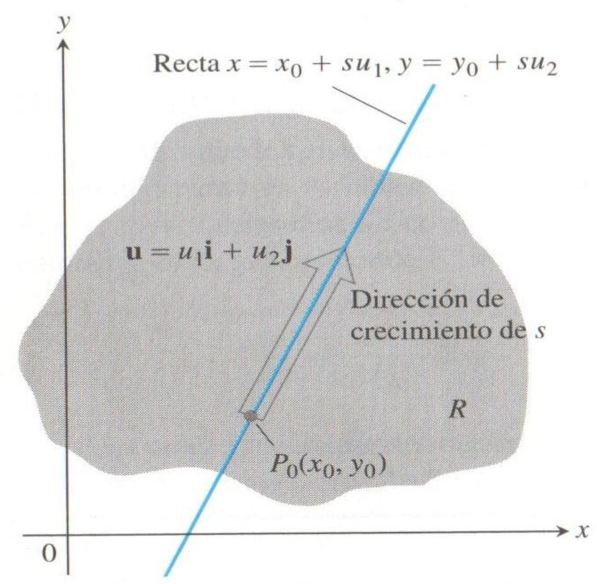


FIGURA 14.24 La razón de cambio de f en la dirección de **u** en un punto P_0 es la razón con que f cambia a lo largo de esta recta en P_0.

Tomamos la función *f(x,y)* teniendo en cuenta las ecuaciones de la recta, que parametrizamos por:

$$x = x_0 + s.u_1 \qquad\qquad y = y_0 + s.u_2$$

* Y al aplicar la regla de la cadena para la función diferenciable, *f:*

$$\frac{df}{ds}\Big)_{u,P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big)_{P_0} . \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big)_{P_0} . \frac{dy}{ds}$$

* *Si hacemos dx/ds= u1 mientras que dy/ds= u2, por lo tanto:*

$$\frac{df}{ds}\Big)_{u,P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big)_{P_0} .u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\Big)_{P_0} .u_2$$

$$\frac{df}{ds}\Big)_{u,P_0} = [\frac{\partial f}{\partial x}\Big)_{P_0} .\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\Big)_{P_0} .\vec{j}].[u_1\vec{i} + u_2\vec{j}]$$

=**(*Gradiente de f en Po). (Dirección u)***

LA DERIVADA DIRECCIONAL ES UN PRODUCTO PUNTO

* Siendo *f(x,y)* una función diferenciable en una región abierta que contiene al punto $P_0(x_0, y_0)$ se puede expresar a la derivada direccional como el producto punto del gradiente de *f* en Po con la dirección del vector unitario **u**, y se expresa como:

$$\boxed{\left.\frac{df}{ds}\right)_{u,P_0} = \left.\nabla f\right)_{P_0} . \bar{u}}$$

EJEMPLO

- Sea *f(x,y,z) =x.sen(yz).*
- *a) Determine el gradiente de f*
- *b) Encuentre la d.d. de f en (1,3,0) en la dirección <i,2j,-k>*

SOLUCIÓN:

a) $\nabla f(x,y,z) = < f_x(x,y,z); f_y(x,y,z); f_z(x,y,z) >$

$$= < senyz\,;\ xz.cosyz;\ \ xycosyz>$$

b) $\nabla f(1,3,0) = < 0,0,3 >$

El vector unitario en la dirección dada: $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k}$

La derivada direccional queda entonces:

$$D_{\vec{u}} f(1,3,0) = \nabla f(1,3,0).\vec{u}$$

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(1,3,0) = 3\vec{k}.(\vec{u}) = 3.(-\frac{1}{\sqrt{6}}) = -\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

Propiedades de la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f| \cos \theta$

1. La función f crece más rápidamente cuando $\cos \theta = 1$ o cuando $\mathbf{u}$ es la dirección de ∇f. Es decir, en cada punto P de su dominio, f crece más rápidamente en la dirección del vector gradiente ∇f en P. La derivada en esta dirección es

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos (0) = |\nabla f|.$$

2. De manera similar, f decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. La derivada en esta dirección es $D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos (\pi) = -|\nabla f|$.

3. Cualquier dirección $\mathbf{u}$ ortogonal a un gradiente $\nabla f \neq 0$ es una dirección de cambio nulo en f, pues en ese caso θ es igual a $\pi/2$ y

$$D_{\mathbf{u}}f = |\nabla f| \cos (\pi/2) = |\nabla f| \cdot 0 = 0.$$

DETERMINACIÓN DE CAMBIOS MÁXIMOS, MÍNIMOS Y NULOS

Encuentre las direcciones en que $f(x, y) = (x^2/2) + (y^2/2)$

(a) Crece más rápidamente en el punto (1, 1).

(b) Decrece más rápidamente en (1,1).

(c) ¿Cuáles son las direcciones de cambio nulo de f en (1, 1)?

Solución

(a) La función crece más rápidamente en la dirección de ∇f en (1, 1). El gradiente en te caso es

$$(\nabla f)_{(1,1)} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Su dirección es

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \qquad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{|\mathbf{i} + \mathbf{j}|} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

(b) La función decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$ en (1, 1), que es

$$-\mathbf{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

(c) Las direcciones de cambio nulo en (1, 1) son las direcciones ortogonales a ∇f:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad -\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

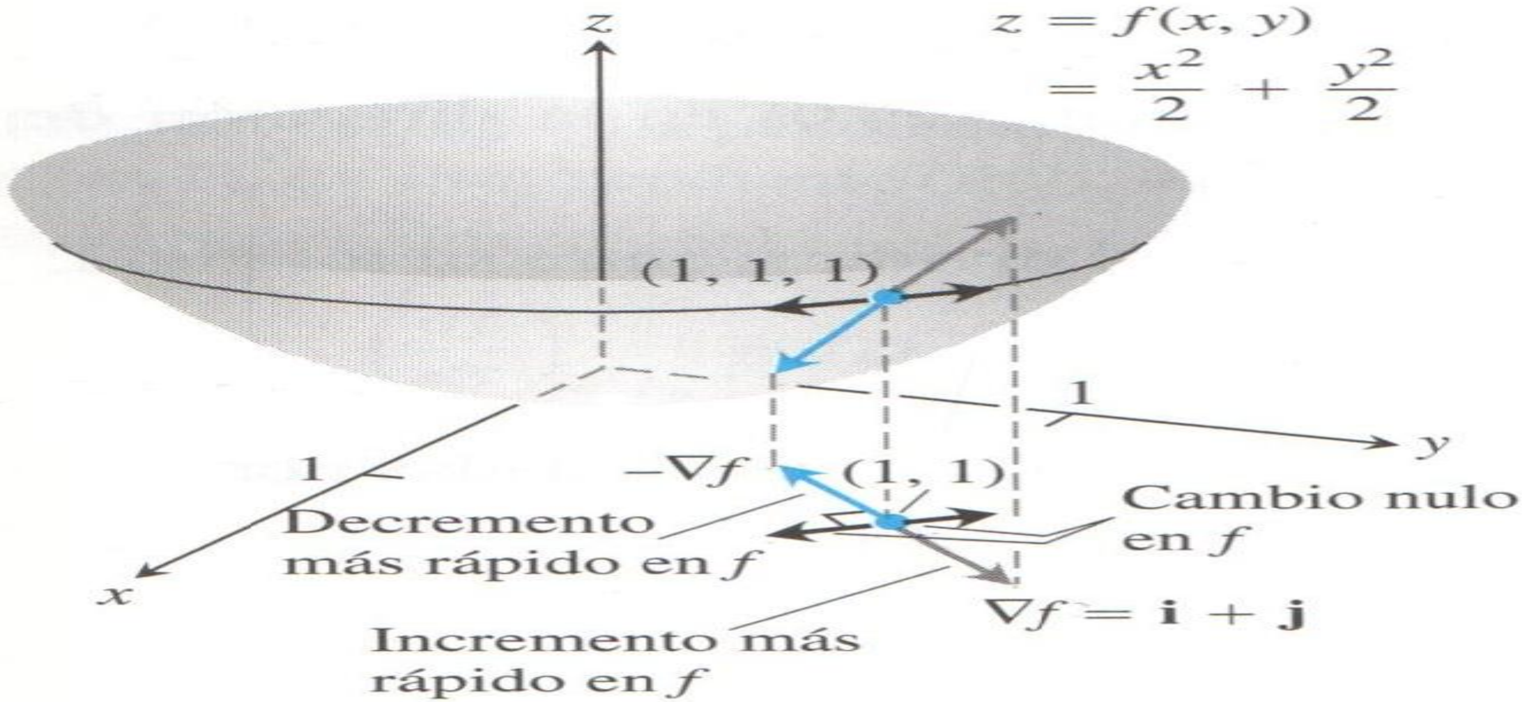


FIGURA 14.27 La dirección en que $f(x, y) = (x^2/2) + (y^2/2)$ crece más rápidamente en (1, 1) es la dirección de $\nabla f|_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Corresponde a la dirección de máximo ascenso sobre la superficie en (1, 1, 1) (ejemplo 3).

Gradientes y tangentes a curvas de nivel

Si una función diferenciable $f(x, y)$ tiene un valor constante c a lo largo de una curva gular $\mathbf{r} = g(t)\mathbf{i} + h(t)\mathbf{j}$, haciendo que la curva sea una curva de nivel de f, enton $f(g(t), h(t)) = c$. Al derivar ambos lados de esta ecuación con respecto a t tenemos ecuaciones

$r = x(t)\,i + y(t)\,j$

$$\frac{d}{dt} f(g(t), h(t)) = \frac{d}{dt}(c)$$

$, y(t)) = \frac{d}{dt} c$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dh}{dt} = 0 \qquad \text{Regla de la cadena}$$

$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{dg}{dt}\mathbf{i} + \frac{dh}{dt}\mathbf{j}\right)}_{\frac{d\mathbf{r}}{dt}} = 0.$$

La ecuación (5) dice que ∇f es normal al vector tangente $d\mathbf{r}/dt$, de modo que es norm la curva.

* En cada punto del dominio de una funcion diferenciable *f(x,y)*, el gradiente de *f* es normal a la curva de nivel que pasa por dicho punto.
* **El vector gradiente señala la dirección del incremento más rápido de la función.**

El producto punto: $\nabla f)_{P_0} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = 0$

explica cómo las corrientes fluyen normal a los contornos en los mapas topográficos, en la dirección negativa del vector gradiente por la propiedad 2 de la der. direccional.

La ecuación anterior nos dice que las direcciones son normales a las curvas de nivel.

La recta tangente y la recta normal

- Podemos identificar al vector gradiente de la función *f* como un **vector normal** a la curva de nivel C y decimos que:

$$\nabla f(x_0;y_0) = f_x(x_0;y_0)\vec{i} + f_y(x_0;y_0)\vec{j}$$

- Es el vector normal, que es perpendicular a C en $(x_0;y_0)$

Entonces puede escribirse un vector perpendicular al gradiente que será el **vector tangente** t:

$$\vec{t}(x_0;y_0) = f_y(x_0;y_0)\vec{i} - f_x(x_0;y_0)\vec{j}$$

De tal forma que el producto:

$$\nabla f(x_0;y_0).\vec{t}(x_0;y_0) = 0$$

* La recta que pasa por (x_0,y_0) y es normal al gradiente es la recta tangente. Decimos que un punto está en la tangente si:
* $$[(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}]\bullet\nabla f(x_0,y_0)=0$$ (fig. 1)
* O sea que la ecuación de la recta tangente es:

$$\boxed{(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0)=0}$$

* La recta que pasa por (x_0,y_0) y es normal al vector tg $t(x_0,y_0)$, es la recta normal. Un punto está en la normal si:
* $$[(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}]\bullet\vec{t}(x_0,y_0)=0$$ (fig. 2)
* O sea que la ecuación de la recta normal es:

$$\boxed{(x-x_0)f_y(x_0,y_0)-(y-y_0)f_x(x_0,y_0)=0}$$

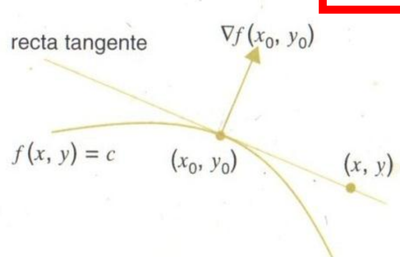
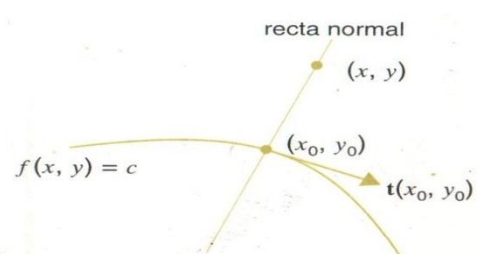


fig. (1)

fig. (2)



PLANO TANGENTE A UNA SUPERFICIE DE NIVEL

- TODAS las curvas que pasan por Po tendrán rectas tg en ese punto que determinan un plano tangente que tienen por vector normal al vector gradiente.

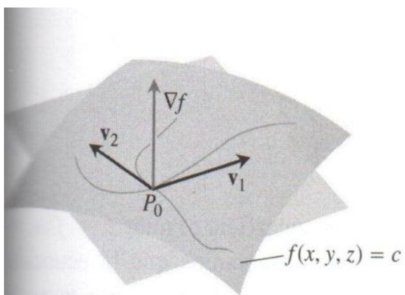


FIGURA 14.30 El gradiente ∇f es ortogonal al vector velocidad de cada curva regular en la superficie que pasa por P_0. Por tanto, los vectores velocidad en P_0 están en un plano común, que llamaremos el plano tangente en P_0.

El plano tg a una superficie *z= f(x,y)* de una función diferenciable *f* en el punto Po(xo,yo,zo) es:

$$\boxed{(x-x_0)f_y(x_0,y_0)-(y-y_0)f_x(x_0,y_0)-(z-z_0)=0}$$

DEMOSTRACIÓN

- Para obtener la ecuación de un plano tg a una superficie regular
- z= *f(x,y)* en Po(xo,yo,zo) donde zo=f(xo,yo), se observa que la ecuación z= f(x,y) es similar a f(x,y)-z=o.
- *La superficie z = f(x,y) es la superficie de nivel cero de la función F(x,y,z) = f(x,y) –z.*
- *Derivando F:*

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)-z) = f_x - 0 = f_x$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y)-z) = f_y - 0 = f_y$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x,y)-z) = 0-1 = -1$$

- *Reemplazo en* $(x-x_0)F_x(x_0,y_0)+(y-y_0)F_y(x_0,y_0)+F_z(z-z_0)=0$
- *Se obtiene:* $\boxed{(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0)-(z-z_0)=0}$