6) a) Para la transformación T: $R^2 \rightarrow R^2$ definida como

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x - 12y \\ 7x - 11y \end{pmatrix}$$

i) Encuentre una base del espacio de salida tal que la matriz asociada a T con respecto a dicha base sea diagonal.
ii) Halle (si existen) los vectores de R^2, distintos del nulo, que tal que su imagen con respecto a T es múltiplo escalar de ellos.
iii) Verifique la respuesta obtenida en el ítem anterior.

SOLUCIÓN:

T es una transformación lineal que va de vectores en R^2 a R^2

1°) Calculamos la matriz asociada A_T con respecto a las bases canónicas de ambos espacios:

$$A_T = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}$$

2°) calculamos los VAP y VEP de A_T

Para ello calculamos los valores propios del polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -12 \\ 7 & -11-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda+5)\cdot(\lambda-3)$$

▶ $\lambda_1 = -5$
$\lambda_2 = 3$

Luego, calculamos los vectores propios para cada de los valores propios:

- E_{λ_1}:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 14 & -12 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

$\equiv$

$Av = \lambda v$

$(A - \lambda I)\cdot v = 0$

Esto es el sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver el sistema por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 14 & -12 & 0 \\ 7 & -6 & 0 \end{array}\right)\times\left(\frac{1}{14}\right) \underset{F_1/(14)\rightarrow F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-6}{7} & 0 \\ 7 & -6 & 0 \end{array}\right)\times(-7) \underset{F_2 - 7\cdot F_1 \rightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-6}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\equiv$ $\equiv$ $\equiv$

$$\left\{ x_1 - \frac{6}{7}\cdot x_2 = 0 \quad (1) \right.$$

$\equiv$

- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:

$$x_1 = \frac{6}{7}\cdot x_2$$

La respuesta:

$$x_1 = \frac{6}{7}\cdot x_2$$
$$x_2 = x_2$$

La solución general: $X = \begin{pmatrix} \frac{6}{7}\cdot x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Luego, una base para E_{λ_1} está dada por $\left\{\binom{6/7}{1}\right\}$

- E_{λ_2}:

$$A-\lambda_2 I=\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 7 & -14 \end{pmatrix}$$

$\equiv$

$Av=\lambda v$

$(A-\lambda I)\cdot v=0$

Esto es el sistema de ecuaciones lineales, podemos resolver el sistema por eliminación de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -12 & 0 \\ 7 & -14 & 0 \end{array}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right) \underset{F_1/(6)\to F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 7 & -14 & 0 \end{array}\right)\times(-7) \underset{F_2-7\cdot F_1\to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\equiv$

$$\{\, x_1 - 2\cdot x_2 = 0 \quad (1)$$

$\equiv$

- De la ecuación 1 del sistema (1) encontramos con la variable x_1:

  $x_1=2x_2$

La respuesta:

$x_1=2x_2$

$x_2=x_2$

La solución general: $X=\begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Luego, una base para E_{λ_2} está dada por $\left\{\binom{2}{1}\right\}$

Por lo tanto:

- La matriz diagonal D está compuesta por los valores propios (λ_1 y λ_2):

  $$D=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  $\equiv$

- La matriz con los vectores propios (v_1 y v_2) como sus columnas:

  $$P=\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para responder a i), debemos encontrar una base del espacio de salida tal que la matriz asociada a T con respecto a dicha base sea diagonal.

Utilizamos, entonces la base que contiene los VEP de A:

Respuesta i) la base buscada es $B=\left\{\binom{6/7}{1},\binom{2}{1}\right\}$

Para el ítem ii), hay que calcular (si existen) los vectores $\vec{x}$ de R^2, distintos del nulo, que tal $T(\vec{x}) = A_T.\vec{x} = \lambda\vec{x}$ *

Los vectores de R^2 que verifican * son, justamente, los VEP de *A*, es decir: * se cumple si $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ó $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

En el ítems iii) hay que verificar la respuesta obtenida en el ítem anterior, es decir, hay que comprobar $A_T.\begin{pmatrix} 6/7 \\ 1 \end{pmatrix} = -5.\begin{pmatrix} 6/7 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que $A_T.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$