Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

ESTADÍSTICA

Ingeniería Informática

TEORÍA

Mg.Ing. Susana Vanlesberg
Profesor Titular

UNIDAD 1
Probabilidad

INTRODUCCIÓN

El cambio en el ejercicio profesional, determina que los planes de estudio de todas las carreras relacionadas a las ciencias de la tierra, informática, economía, ciencias sociales por citar algunas, incluyan a la Estadística como materia troncal con entidad propia y de verdadera necesidad. Se pretende con ello, que un profesional que se apoye en la cuantificación y en el estudio de lo que observa a diario, entienda y conozca los conceptos básicos de la ciencia que le va a permitir, abandonando conductas pragmáticas, profundizar y comprender el fundamento científico de su área de trabajo.

No se trata de hacer expertos en Estadística. El principal objetivo de los docentes de esta materia se centra en generar una actitud crítica ante cualquier lectura científica, adquirir un lenguaje común con estadísticos y otros profesionales del área. Conocer a priori los pasos y los elementos imprescindibles en cualquier investigación empírica que se apoye en el manejo de grandes volúmenes de datos cuyo propósito final sea condensar dicha información para que pueda ser transmitida o extrapolar las conclusiones a las poblaciones de las que fueron tomadas las medidas.

Aunque no sea su deseo adentrarse en el mundo de la investigación, una parte importante en la transmisión de los nuevos hallazgos y conocimientos de otros colegas de su ámbito profesional, es el lenguaje estadístico.

Es por ello que han de estar absolutamente familiarizados con dicha terminología si se pretende tener una actitud crítica y objetiva ante la lectura de cualquier literatura científica.

En lo que se refiere al modo y la forma de transmitir los conocimientos, la experiencia acumulada a través de los años de docencia y en el área de la investigación nos condiciona a que teoría y práctica avancen de manera simultánea.

¿QUÉ ES LA ESTADÍSTICA?

Cuando coloquialmente se habla de Estadística, se suele pensar en una relación de datos numéricos presentada de forma ordenada y sistemática. Esta idea es la consecuencia del concepto popular que existe sobre el término y que cada vez está más extendido debido a la influencia de nuestro entorno, ya que hoy día es casi imposible que cualquier medio de difusión: periódico, radio, televisión, etc. no nos aborde diariamente con cualquier tipo de información estadística sobre accidentes de tránsito, índices de crecimiento de población, turismo, tendencias políticas, etc. Sólo cuando nos adentramos en un mundo más específico empezamos a percibir que la Estadística no sólo es algo más, sino que se convierte en la única herramienta que, hoy por hoy, permite dar luz y obtener resultados, y por tanto beneficios, en cualquier tipo de estudio, cuyos movimientos y relaciones, por su variabilidad intrínseca, no puedan ser abordadas desde la perspectiva de las leyes deterministas. Podríamos, desde un punto de vista más amplio, definir la Estadística como la ciencia que estudia cómo debe emplearse la información y cómo dar una guía de acción en situaciones prácticas que entrañan incertidumbre.

La Estadística se ocupa de los métodos y procedimientos para recoger, clasificar, resumir, hallar regularidades y analizar los datos, siempre y cuando la variabilidad e incertidumbre sea una causa intrínseca de los mismos. Además se ocupa de realizar inferencias a partir de ellos, con la finalidad de ayudar a la toma de decisiones y en su caso formular predicciones.

Podríamos por tanto clasificar la Estadística en descriptiva, cuando los resultados del análisis no pretenden ir más allá del conjunto de datos, e inferencial cuando el objetivo del estudio es derivar las conclusiones obtenidas a un conjunto de datos más amplio.

Estadística descriptiva: Describe, analiza y representa un grupo de datos utilizando métodos numéricos y gráficos que resumen y presentan la información contenida en ellos.

Estadística inferencial: Apoyándose en el cálculo de probabilidades y a partir de datos muestrales, efectúa estimaciones, decisiones, predicciones u otras generalizaciones sobre un conjunto mayor de datos.

CONCEPTOS BÁSICOS

Individuos o elementos: personas u objetos que contienen cierta información que se desea estudiar.

Población: conjunto de individuos o elementos que cumplen ciertas propiedades comunes.

Muestra: subconjunto representativo de una población.

Parámetro: función definida sobre los valores numéricos de características medibles de una población.

Estadístico: función definida sobre los valores numéricos de una muestra.

En relación al tamaño de la población, ésta puede ser:

Finita, como es el caso del número de mensajes que llegan al servidor de la Facultad en un día.

Infinita, si por ejemplo estudiamos el número de mensajes recibidos por el servidor de la Facultad a lo largo de su vida útil.

Caracteres: propiedades, rasgos o cualidades de los elementos de la población. Estos caracteres pueden dividirse en cualitativos y cuantitativos.

Modalidades: diferentes situaciones posibles de un caracter. Las modalidades deben ser a la vez exhaustivas y mutuamente excluyentes—cada elemento posee una y sólo una de las modalidades posibles.

Clases: conjunto de una o más modalidades en el que se verifica que cada modalidad pertenece a una y sólo una de las clases.

Frecuentemente en la práctica o en el ejercicio de las profesiones, se realizan simplificaciones tales como no considerar la fricción, adoptar un fluido ideal, no considerar gustos o ingresos en la determinación de la demanda de un determinado bien, con el fin de obtener modelos matemáticos relativamente sencillos.

Generalmente estos modelos son determinísticos: un número describe a una variable que se considera independiente, y a través de una fórmula (modelo) se determina un valor específico para la variable dependiente. Para el mismo conjunto de valores de la variable independiente, se obtendrá siempre el mismo conjunto de variables dependientes.

Cuando la incertidumbre en los resultados debe ser considerada explícitamente, sea por variación inherente en la naturaleza, falta de conocimiento de todas las causas y efectos en los sistemas físicos, por conocimiento incompleto del fenómeno que se analiza, falta de datos los modelos que se deberían utilizar son los probabilísticos y se los analiza haciendo uso de las reglas de la Teoría de Probabilidad.

A causa de la existencia de incertidumbre es que los eventos futuros no pueden pronosticarse de una manera exacta. Es más correcto decir que se considera la posibilidad de ocurrencia de un evento y luego determinar su probabilidad.

La Teoría de Probabilidad está relacionada con los experimentos y sus resultados, donde el término "experimento" está usado en un sentido general.

El cálculo de probabilidades suministra las reglas para el estudio de los experimentos aleatorios o de azar, constituyendo la base para la Estadística inductiva o inferencial.

Para trabajar con el cálculo de probabilidades es necesario fijar previamente cierta terminología.

Experimentos y sucesos aleatorios

Nosotros queremos estudiar experimentos que no son determinísticos, pero no estamos interesados en todos ellos. Por ejemplo, no podremos estudiar un experimento del que, por no saber, ni siquiera sabemos por anticipado los resultados que puede dar. No realizaremos tareas de adivinación. Por ello definiremos experimento aleatorio como aquel que verifique ciertas condiciones que nos permitan un estudio riguroso del mismo.

Llamamos experimento aleatorio al que satisface los siguientes requisitos:

-Todos sus posibles resultados son conocidos de antemano.
-El resultado particular de cada realización del experimento es imprevisible.
-El experimento se puede repetir indefinidamente en condiciones idénticas.

Al conjunto de resultados posibles lo denominaremos espacio muestral y lo denotaremos normalmente mediante la letra E o S. Los elementos del espacio muestral se denominan sucesos elementales.

Cualquier subconjunto de E será denominado suceso aleatorio, y se denotará normalmente con las letras A, B, ……...

Por experimento aleatorio o estadístico se entiende al conjunto de acciones que llevan a obtener resultados que pueden variar por causas que no se pueden prever, aunque se realicen en las mismas condiciones. Un experimento puede ser un experimento físico, que se puede repetir cualquier número de veces, o bien simplemente acciones llamadas pruebas, que se repiten en las mismas condiciones.

De acuerdo a los valores que el espacio muestral contenga, puede ser clasificado como:

-**finito**: si contiene una cantidad dada de valores posibles y es posible listarlos. Por ejemplo, la cantidad de resortes defectuosos en un teclado (de 0 a 121), cantidad de virus detectados en un proceso de corrida de un antivirus.

-**infinito numerable**: si se sabe que contendrá una gran cantidad de elementos pero posibles de enumerar, y pueden ponerse en correspondencia con el conjunto de los enteros positivos. Por ejemplo: cantidad de CD que se venden en un comercio expendedor de suministros de computación, cantidad de alumnos ingresantes a la carrera Ing. en Informática en los últimos 10 años.

-infinito o continuo: sus elementos se corresponden con los números reales. Por ejemplo: salario de los operarios de una empresa, Kw consumidos en una industria en los últimos 5 años.

En los dos últimos casos es útil definir el espacio muestral a través de una regla, ya que listar los elementos podría resultar en algunos casos tedioso y en otros imposible.

Por lo general no interesan los elementos que constituyen el espacio muestral individualmente, pero sí un grupo de ellos, en ese caso se estaría analizando a un subconjunto del espacio muestral. Un evento o suceso es un subconjunto de puntos muestrales del espacio muestral S correspondiente a un experimento aleatorio. Un evento simple es aquel que contiene un solo punto muestral y un evento compuesto es el que contiene dos o más puntos elementales.

Decimos que ha ocurrido un suceso cuando se ha obtenido alguno de los resultados que lo forman. **El objetivo de la Teoría de la Probabilidad es estudiar con rigor los sucesos**, que como vemos se pueden enunciar desde el lenguaje común, asignarles probabilidades y efectuar cálculos sobre dichas probabilidades. Observamos que los sucesos no son otra cosa que conjuntos y por tanto, serán tratados desde la Teoría de Conjuntos. Recordamos las operaciones básicas y las dotamos de interpretación para el caso de sucesos. A veces es más sencillo encontrar los elementos que forman el subconjunto contrario al buscado. Suceso complementario de un suceso es aquel formado por los elementos del espacio muestral que no están incluidos en el suceso de interés.

Ejemplo: se considera como experimento observar un objetivo en la pantalla de un visor. El resultado observable es la posición de la mancha luminosa sobre la pantalla, ubicada en un círculo de 10 cm de radio en el sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen se halla en el centro de la pantalla. Todos los sucesos observables que interesan en el experimento dado están ligados con el registro de la posición que ocupa la mancha luminosa en la pantalla. Aunque es evidente que no es posible observar físicamente sobre la pantalla un punto, no obstante, semejante procedimiento idealizado para describir un caso elemental simplifica la formalización matemática del experimento en cuestión.

El conjunto S es continuo y puede ser escrito de la siguiente forma:

$$S = \{(x,y) \,/\, x^2 + y^2 \leq 100\}$$

1.2 - RELACIONES ENTRE EVENTOS

Los eventos pueden estar relacionados de varias formas:

-Todos los puntos muestrales comunes a ambos eventos se denomina intersección.

-El conjunto que no contiene ningún suceso elemental se denomina evento o suceso imposible (ø).

-Si dos eventos A y B no contienen puntos elementales en común se dice que son mutuamente excluyentes; esta relación puede extenderse a más de dos eventos
($A \cap B$ = ø).

-La unión de dos eventos A y B es el evento que contiene los puntos muestrales pertenecientes a uno o a otro o a ambos ($A \cup B$).

Respecto al ejemplo anterior se identifican los siguientes eventos:

$A: \{el\ objetivo\ se\ encuentra\ en\ el\ primer\ cuadrante\}$

$$A = \{(x,y)\ /\ x^2 + y^2 \leq 100, x > 0, y > 0\}$$

$B: \{el\ objetivo\ se\ encuentra\ en\ el\ circulo\ de\ 5\ cm\ de$

$radio\ cuyo\ centro\ coincide\ con\ el\ de\ la\ pantalla\}$

$$B = \{(x,y)\ /\ x^2 + y^2 \leq 25\}$$

$C: \{el\ objetivo\ se\ encuentra\ en\ el\ circulo\ de\ 2.5\ cm\ de$

$radio\ cuyo\ centro\ esta\ desplazado\ en\ 5\ cm$

$a\ lo\ largo\ del\ eje\ x\ en\ el\ sentido\ negativo\}$

$$C = \{(x,y)\ /\ (x+5)^2 + y^2 \leq 6.25\}$$

Los sucesos A y B son no excluyentes, ya que tienen elementos comunes. Lo mismo sucede con los sucesos B y C, mientras que los sucesos A y C son excluyentes.

1.3 - PROBABILIDAD

Para cada punto en el espacio muestral perteneciente a un experimento es posible asignar un número llamado probabilidad. Existen algunas definiciones de probabilidad que responden a distintas escuelas:

Probabilidad subjetiva

Las probabilidades subjetivas están basadas en las creencias de las personas que efectúan la estimación de probabilidad. Se puede definir como la probabilidad asignada a un evento por parte de un individuo, basada en la evidencia que se tenga disponible. Esa evidencia puede presentarse en forma de frecuencia relativa de presentación de eventos pasados o puede tratarse simplemente de una creencia meditada.
Los tomadores de decisiones pueden hacer uso de cualquier evidencia que tengan a mano y mezclarlas con los sentimientos personales sobre la situación.
Como casi todas las decisiones sociales y administrativas de alto nivel se refieren a situaciones específicas y únicas, los responsables de tomar decisiones hacen un uso considerable de la probabilidad subjetiva.

Probabilidad a priori

La más antigua es la que se originó en los juegos de azar, denominada probabilidad a priori, según Laplace y se basa en el sencillo supuesto de resultados igualmente probables de un experimento. Así, si un suceso definido en el espacio muestral, tiene N resultados posibles igualmente probables y tiene n elementos, la probabilidad de ese suceso se define como el cociente de esas cantidades:

$$P(E) = \frac{n}{N} \qquad (1.3.1)$$

siendo n el número de casos favorables o que pertenecen al suceso y N el número de casos igualmente posibles o probables. Esto último hace criticable a la definición, ya que utiliza al término "probable" en la definición de probabilidad.

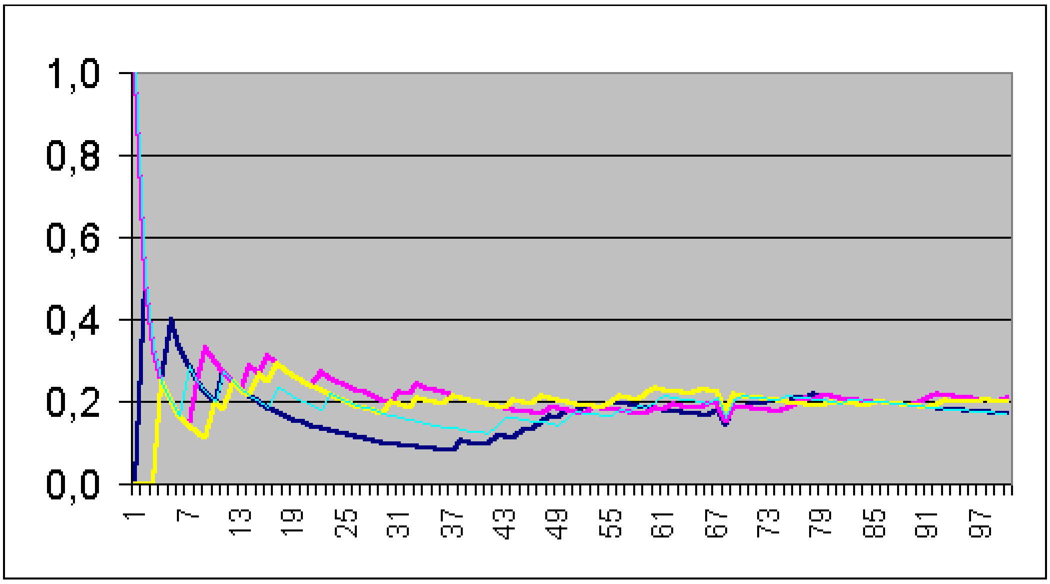
Probabilidad a posteriori o frecuencial

Otra forma de definir a la probabilidad de eventos es a través de la frecuencia relativa, denominada probabilidad a posteriori. Esto es, si un experimento es repetido un número n de veces en condiciones iguales y existen n1 ($n_1 \leq n$) resultados en los cuales se ha presentado el suceso que interesa, la frecuencia relativa n_1/n puede estimar a su probabilidad. Esta frecuencia relativa se aproxima a un valor constante cuando el número n de pruebas aumenta sin límites, y ese número es la probabilidad del suceso:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_1}{n} \qquad (1.3.2)$$

En la práctica se debe tener un límite y en realidad se toma a la frecuencia relativa como la probabilidad del evento.

En la gráfica siguiente se observa la repetición de una serie de experimentos una determinada cantidad de veces y la estabilización de las frecuencias hacia un valor constante que es su probabilidad.



Probabilidad axiomática

Las dificultades que presenta la definición frecuencial de probabilidad se han resuelto a principios del siglo XX mediante la utilización de una definición axiomática de la probabilidad. La definición, debida al ruso Kolmogorov, es muy parecida a la que damos a continuación.

Sea E el espacio muestral, se define la probabilidad como una aplicación P: P(E) → [0, 1] que cumple las siguientes condiciones:

*Axioma I: La probabilidad de un evento es un número mayor o igual que cero y menor o igual que uno.

$0 \leq P(E) \leq 1$

*Axioma II: La probabilidad del espacio muestral S es igual a uno.

$$P(S) = 1 \qquad (1.3.3)$$

*Axioma III: La probabilidad de un evento el cual es la unión de dos eventos mutuamente excluyentes es la suma de sus probabilidades.

$$A \cap B = \varnothing \qquad A \cup B = E$$

$$P(A \cup B) = P(E) = P(A) + P(B)$$

Esto puede generalizarse como:

$$P(\cup_i A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad con \quad A_i \cap A_j = \varnothing \quad y \quad i \neq j \qquad (1.3.4)$$

Algunas consecuencias de estos axiomas que tienen gran aplicación práctica:

a – Si $\overline{A}$ es el complemento de A en el espacio muestral S, luego:

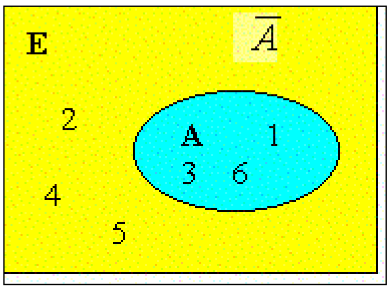
$$\overline{A} \cup A = S$$

$$\overline{A} \cap A = \varnothing$$

$$P(\overline{A} \cup A) = P(S) \quad y \quad P(S) = 1$$

$$P(\overline{A}) + P(A) = 1$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (1.3.5)$$



b - La probabilidad del suceso imposible es igual a cero. El suceso contrario de S es un suceso imposible, aplicando la consecuencia anterior:

$$P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$$

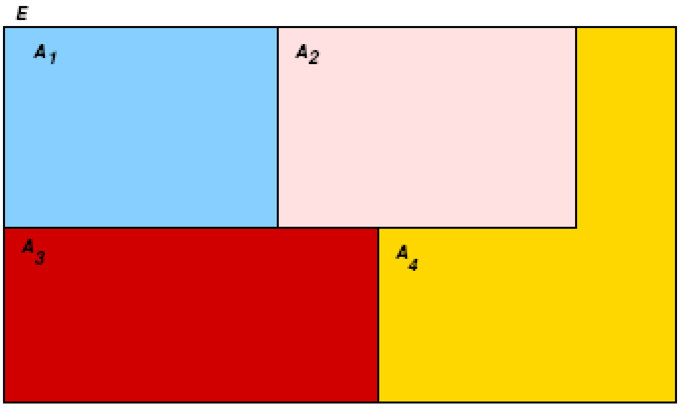
$$P(\varnothing) = 0 \qquad (1.3.6)$$

Sistema exhaustivo y excluyente de sucesos

Se dice que la colección A1, A2, . . . , An $\subset$ E es un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos si se verifican las relaciones:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$$

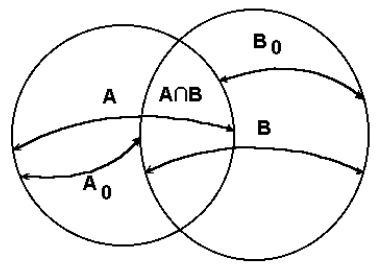
$$A_i \cap A_j = \phi \qquad \forall i \neq j$$



A1, A2, A3, A4 forman un sistema exhaustivo y excluyente de sucesos.

1.4 - PROBABILIDAD TOTAL

Teorema. Si dos eventos A y B pertenecen al mismo espacio muestral, la probabilidad de que A o B o ambos ocurran es la suma de sus probabilidades menos la probabilidad de su ocurrencia conjunta.



1

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (1.4.1)$$

Esta última expresión se justifica considerando dos sucesos no excluyentes A y B:

$$A = (A \cap B) \cup A_0$$

$$B = (A \cap B) \cup B_0$$

Sus probabilidades, por el Axioma III, son:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A_0)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B_0)$$

Luego, la unión de A y B será:

$$A \cup B = A_0 \cup (A \cap B) \cup B_0$$

Entonces, por el Axioma III:

$$P(A \cup B) = P(A_0) + P(A \cap B) + P(B_0)$$

De las expresiones anteriores, es posible obtener $P(A_0)$ y $P(B_0)$ para reemplazarlas en esta última:

$$P(A_0) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B_0) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

con lo que se demuestra la expresión correspondiente a la (1.4.1).

1.5 - PROBABILIDAD COMPUESTA Y CONDICIONAL

Cuando para la ocurrencia de un suceso es necesario que se presenten otros dos sucesos en forma conjunta se habla de probabilidad compuesta. Se deberá analizar si la presentación de uno de estos sucesos previamente condiciona la presentación del otro. Por lo tanto se deberá analizar si se condicionan o no. Un concepto de mucha importancia práctica es el siguiente:

La probabilidad condicional de un evento A dado que el B ha ocurrido se define como el cociente entre la probabilidad de la presentación conjunta de ambos eventos y la probabilidad del suceso B.

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (1.5.1)$$

Esto se refiere a que algunas veces, cuando se calcula la probabilidad de un evento, ya se tiene información; esto reduce el espacio de muestra original a uno de sus subconjuntos, o sea ubicándose en una porción del espacio de muestra y no en cualquier lugar.

Cuando la probabilidad de B es igual a cero, la probabilidad condicional no está definida.
De la misma forma:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; ; \quad P(A) > 0 \qquad (1.5.2)$$

1.5.1 - INDEPENDENCIA

Para poder obtener una expresión general para la probabilidad conjunta o compuesta de dos sucesos, hay que hacer la distinción entre sucesos dependientes e independientes. Se dice que dos eventos son dependientes si la ocurrencia de uno es afectada por la ocurrencia del otro; en caso contrario, los eventos se dicen independientes.

La dependencia e independencia estadística se relacionan con la forma en que se realiza el muestreo.

En general, los sucesos dependientes se relacionan con el muestreo sin reposición, y los independientes con el muestreo con reposición.

El muestreo aleatorio sin reposición es el proceso de selección al azar a partir de una población, de los elementos que conforman la muestra, sin devolverlos a la población antes de volver a extraer.

El muestreo aleatorio con reposición es el proceso de selección con devolución de los elementos antes de realizar una nueva extracción.

La ley que rige la probabilidad de ocurrencia conjunta de sucesos se llama regla de multiplicación de probabilidades y se expresa de la siguiente manera:

La probabilidad de ocurrencia conjunta de dos sucesos A y B está dada por:

$$\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(B).P(A/B) \\ P(A \cap B) = P(A).P(B/A) \end{array} \quad si\ son\ sucesos\ dependientes$$

(1.5.1.1)

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \quad si\ son\ sucesos\ independientes$$

(1.5.1.2)

Ejemplos de probabilidad total y compuesta

Las computadoras personales de una red bancaria son de dos tipos: 40% del tipo A y el resto de tipo B. El 10% de las del tipo A sufrieron algún desperfecto durante el último año. Sabiendo que del total de las computadoras el 7% tuvieron desperfecto alguna vez durante el año pasado, determinar la probabilidad de desperfecto en las computadoras de tipo B.

$A:\{Computadora\ de\ tipo\ A\}$
$P(A)=0{,}40$
$B:\{Computadora\ de\ tipo\ B\}$
$P(B)=0{,}60$
$D:\{desperfecto\ en\ cualquier\ computadora\}$
$P(D)=0{,}07$
$D:\{desperfecto\ en\ computadora\ del\ tipo\ A\}$
$P(D/A)=0{,}10$
$P(D/B)=?$

$$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)=$$
$$=P(D/A)\quad P(A)+P(D/B)\quad P(B)=$$
$$0{,}07=0{,}10*0{,}4+P(D/B)*0{,}60$$

$$P(D/B)=0{,}05$$

Se estima que entre la población del país, el 55% padece de obesidad, el 20% es hipertensa, y el 60% es obesa o hipertensa. ¿Es, de hecho, independiente el que una persona sea obesa de que padezca hipertensión?

Árbol de Probabilidad

Es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de experimentos aleatorios.

En el cálculo de la probabilidad se requiere conocer el número de elementos que forman parte del espacio muestral, éstos se pueden determinar con la construcción del diagrama de árbol.

Reglas para calcular probabilidad utilizando diagramas de árbol:

1.- la probabilidad de un evento es la multiplicación de las probabilidades de la rama.

2.- la probabilidad de varios eventos es la suma de las probabilidades de las ramas con casos favorables al evento.

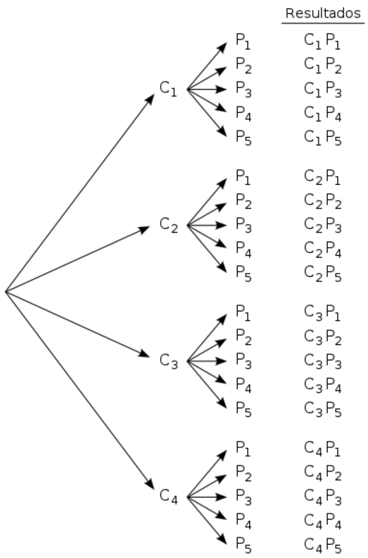
3.- los eventos son mutuamente excluyentes en 2 o más ramas

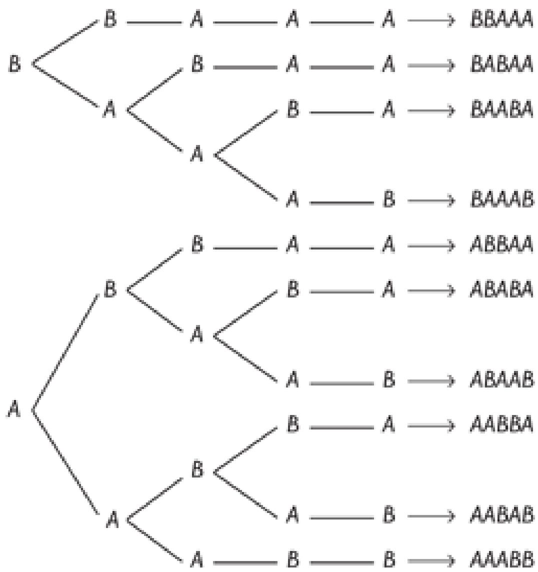
Para la construcción de un diagrama en árbol se partirá poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad.

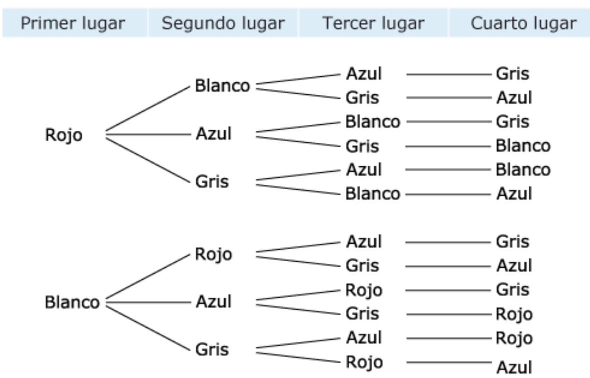
En el final de cada rama parcial se constituye a su vez un nudo del cual parten nuevas ramas, según las posibilidades del siguiente paso, salvo si el nudo representa un posible final del experimento (nudo final).

Hay que tener en cuenta que la suma de probabilidades de las ramas de cada nudo debe dar 1.

Ejemplos:

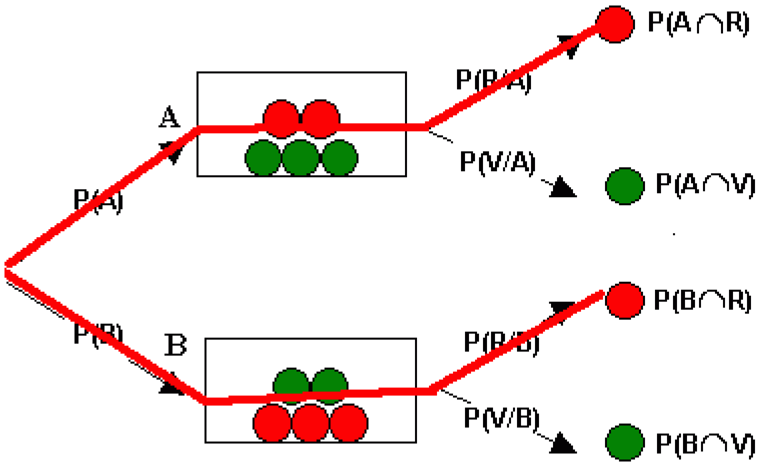




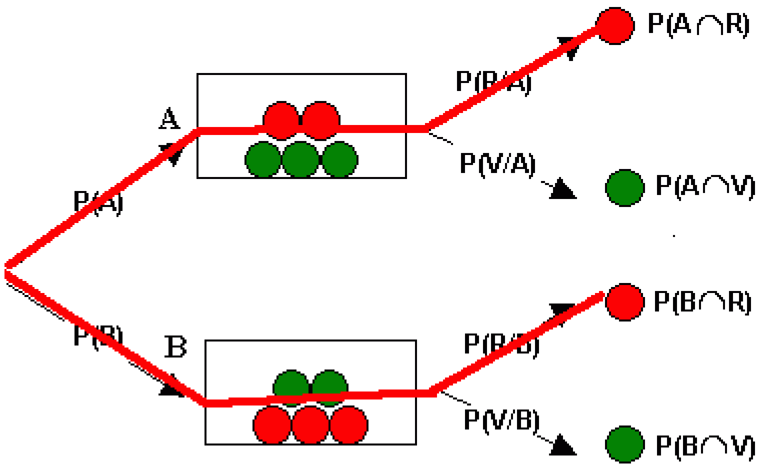


1.6 - TEOREMA DE BAYES (Probabilidades a posteriori)

Considerar el experimento de dos cajas A y B, que contienen tubos verdes y rojos:



Si se sabe que ha salido un tubo rojo, los caminos posibles en el árbol de probabilidades, quedan reducidos a dos, los señalados en rojo en el gráfico anterior; se tiene que reasignar probabilidades, todos los caminos que terminan en tubo verde, deberán tener probabilidad 0. ¿Cómo se asignan probabilidades a los caminos que conducen a tubo rojo?



$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R)$$

$$P(A/R) = \frac{P(A \cap R)}{P(A \cap R) + P(B \cap R)} = \frac{P(A) \cdot P(R/A)}{P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B)}$$

Este teorema tiene gran importancia a la hora de tomar decisiones ya que permite incorporar nueva información para mejorar las estimaciones de probabilidad ya realizadas o conocidas, esas probabilidades se denominan probabilidades revisadas o a posteriori.

Resumiendo supóngase un conjunto de eventos mutuamente excluyentes (G1 , G2, ..Gn) con probabilidades mayores que cero, respecto a un experimento aleatorio y que pueden considerarse como un conjunto de hipótesis acerca del suceso que interesa (E) y pertenecientes al espacio muestral. Si el experimento se ha realizado y se conoce que el suceso E ha ocurrido, la probabilidad a posteriori, de que se realice la hipótesis Gi , a condición de que E haya ocurrido, se obtiene a través de la fórmula de Bayes.

$$P(G_i/E) = \frac{P(G_i \cap E)}{P(G_1 \cap E) + P(G_2 \cap E) + \ldots + P(G_n \cap E)}$$

$$P(G_1 \cap E) + P(G_2 \cap E) + \ldots + P(G_n \cap E) = P(E)$$

$$P(E/G_i) = \frac{P(E \cap G_i)}{P(G_i)} \qquad P(E \cap G_i) = P(G_i)\,P(E/G_i)$$

$$P(G_i/E) = \frac{P(G_i).P(E/G_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(G_i).P(E/G_i)}, con\ \ i = 1,2,\ldots,n \qquad (1.6.1)$$

De esta manera la ocurrencia de E condiciona la información previa P (Gi). Estas probabilidades P(Gi) son llamadas probabilidades a priori , ya que son las probabilidades de las causas Gi antes de observar E . De la misma manera P(Gi/E) es llamada probabilidad a posteriori ya que se refiere al estado de conocimiento de Gi después de la ocurrencia de E. Se ve que la fórmula de Bayes permite con información experimental nueva, actualizar la que existe relacionada a un evento.

Ejemplo

En una compañía compran componentes electrónicos de dos proveedores. 60% son comprados en May Electric, y el resto en Harmon Products. El nivel de calidad de May Electric es mejor que el de Harmon Products. 5% de los aparatos comprados en May Electric necesitan mantenimiento adicional, mientras que 8% de los de Harmon Products lo necesitan.

Se seleccionó un componente al azar y se lo encontró defectuoso. ¿Determine la probabilidad de que haya sido comprado en Harmon Products?

$A: \{El\ componente\ se\ reconoce\ como\ defectuoso\}$

H_1 : {*El componente se compró a May Electric*}

H_2 : {*El componente se compró a Harmon products*}

$$P(H_1) = 0.6 \qquad P(H_2) = 0.4$$

$$P(A / H_1) = 0.05 \qquad P(A / H_2) = 0.08$$

$$P(H_2 / A) = \frac{P(H_2)\,P(A / H_2)}{P(A)} =$$

$$P(H_2 / A) = \frac{0.40(0.08)}{0.60(0.05) + 0.40(0.08)} = 0.5161$$

Este fenómeno tiene aplicaciones fundamentales en Ciencia: Cuando se tienen por ejemplo dos teorías científicas diferentes, T1 y T2, que pretenden explicar cierto fenómeno, y a las que asociamos unas probabilidades a priori de ser ciertas, P[T1] , P[T2] podemos llevar a cabo la experimentación que se considere más conveniente, para una vez obtenido el cuerpo de evidencia, B, calcular como se modifican las probabilidades de cada teoría mediante el teorema de Bayes: P[T1|B] , P[T2|B].Así la experimentación puede hacer que una teoría sea descartada si P[Ti|B] ≈ 0 o reforzada si P[Ti|B] ≈1.