Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Práctica N° 4: BASES Y CAMBIO DE BASE

1) Sea V un espacio vectorial de dimensión n. En cada caso, elegir la opción correcta.

a) Un conjunto linealmente independiente en V siempre tiene:
( ) a lo sumo n elementos.
( ) exactamente n elementos.
( ) como mínimo n elementos.

b) Un conjunto generador de V siempre tiene:
( ) a lo sumo n elementos.
( ) exactamente n elementos.
( ) como mínimo n elementos.

c) Una base de V siempre tiene:
( ) a lo sumo n elementos.
( ) exactamente n elementos.
( ) como mínimo n elementos.

2) Determinar si el conjunto de vectores B dado en cada ítem es *i*) *un conjunto generador*, *ii*) *un conjunto LI*, *iii*) *una base*, del espacio vectorial indicado.

a) $B = (1, -1), (1, 2)$ en R^2.

b) $B = (1, -3), (-2, 6)$ en R^2.

c) $B = (1, -1), (3, -3)$ en $H = \{(x, y) \in R^2 / \, x + y = 0\}$.

d) $B = (1, 4), (0, 1)$ en $H = \{(x, y) \in R^2 / \, x + y = 0\}$.

e) $B = (-2, 4)$ en $H = \{(x, y) \in R^2 / \, 2x + y = 0\}$.

f) $B = \{-3x, 1 + x^2, x^2 - 5\}$ en P_2.

g) $B = \{x^3, x^2 + 1, x + 6\}$ en P_3.

h) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \right\}$ en M_{2x2}.

i) $B = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ en M_{2x2}.

3) Determinar si el conjunto $C = \{(1, 2, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 0)\}$ es base o no de R^3:

4) Escribir la base canónica de los espacios: R^4, P_2, M_{2x2} y S_{3x3} (conjunto de matrices simétricas de orden 3).

5) Hallar una base de los espacios propuestos, decir cuál es su dimensión y escribir dos vectores de cada espacio:

a) $H = \{(x, y, z) \in R^3 \, / \, 3x - 2y + 6z = 0\}$.

b) El conjunto de los vectores (x, y, z) de R^3 tales que $x = 3t$, $y = -2t$, $z = t$, para algún número real t.

c) El conjunto D_3, formado por todas las matrices diagonales de M_{3x3}.

d) $H = \{p(x) \in P^2 \, / \, p(0) = 0\}$.

6) Encontrar los valores que puede tomar el número real a para que los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1, a)$ formen una base de R^3.

7) Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un espacio vectorial V. Sean $u_1 = v_1$, $u_2 = v_1 + v_2$, $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$. Demostrar que $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de V.

8) Encontrar el vector de coordenadas de:

a) $x = (1, -2, 7)$ con respecto a la base $B = \{(1, 0, 3), (1, 1, 1), (2, -1, 4)\}$ de R^3.

b) $p(x) = 2x^2 - 6x - 16$ con respecto a la base $B = \{-3x, x^2 + 1, x^2 - 5\}$ de P_2.

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ con respecto a la base $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\}$.

9) Resuelve los siguientes ítems:

a) Se sabe que $[v]_{B_1} = (4, -1)$, donde $B_1 = \{(0, -1), (1, 1)\}$. Encontrar las coordenadas del vector $v \in R^2$ respecto a la base $B_2 = \{(0, 1), (-3, 0)\}$.

b) En P_1 se sabe que $[p(x)]_{B_1} = (2, 1)$, donde $B_1 = \{1 - x, x\}$. Escribir $p(x)$ en términos de $B_2 = \{x + 1, x - 1\}$.

10) Dadas las bases $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$:

a) Determinar la matriz de transición de la base B_1 a B_2.

b) Determinar la matriz de transición de la base B_2 a B_1.

c) Chequear que ambas matrices de transición son inversas.

11) Considerar las bases de P_1: $B = \{6 + 3x, 10 + 2x\}$ y $B' = \{2, 3 + 2x\}$.

a) Hallar la matriz de transición de B a B'.

b) Encontrar la matriz de transición de B' a B.

c) Calcular $[p(x)]_{B'}$ para $p = -4 + x$ sin usar una matriz de transición.

d) Calcular $[p(x)]_{B'}$ para $p = -4 + x$ usando la matriz de transición de B a B'.

12) Sean B_1 y B_2 dos bases del espacio P_2. Encontrar los elementos de la base B_1 sabiendo que:

$$B_2 = \{3 - x, x^2 - 1, x^2 - x\} \qquad A_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercitación adicional para seguir practicando:

13) Determinar si $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$ forma una base de R^3.

14) Sea $B = \{(0, -1), (1, 2)\}$ una base de R^2, y $v = (-3, -8) \in R^2$, hallar $[v]_B$.

15) Dadas las bases $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ y $B' = \{(0, -1), (1, 2)\}$, hallar:

a) La matriz de cambio de base de B' a B.

b) La matriz de cambio de base de B a B'.

16) ¿Pueden estas matrices ser una matriz de cambio de base en algún espacio vectorial? Razoná la respuesta.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

17) Sea $v = (1, 2)$ en R^2. Como es sabido, sus coordenadas en la base canónica $\{(1, 0), (0, 1)\}$ son $(1, 2)$. Si es posible, ejemplifica otra base B de modo que las coordenadas de v sean:

a) $(2, 1)$

b) $(-1, -2)$

c) $(0, 0)$