

Coloquio

2. Métodos directos para la resolución de SEAL

En muchos casos nos encontramos con la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones algebraicas lineales que pueden escribirse así:

$$\begin{aligned} E_1 : \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 : \quad & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \dots \\ E_n : \quad & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{aligned}$$

y representarse matricialmente de la forma:

$$Ax = b$$

Algunos problemas que pueden llevarnos a resolver un SEAL son:

- Construir un polinomio
- A través del planteo de un problema por medio de diferencias finitas se llega también a un SEAL.

Un SEAL tiene solución única si se da una de las siguientes condiciones:

- La matriz A es invertible
- Su determinante no es nulo

Tipo de matrices

Matriz diagonal dominante

Una matriz se dice *estrictamente diagonal dominante* si:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

Matriz definida positiva

Una matriz es definida positiva si y solo si todos sus autovalores son positivos

Métodos directos

En ellos a través de un numero finito de pasos se obtiene la solución del problema.

Eliminación de Gauss

Se basa en realizar una serie de transformaciones sobre el sistema de modo de obtener un sistema equivalente, con matriz triangular.

En un sistema de n ecuaciones, se realizan $n - 1$ pasos de eliminacion

Factorización LU

Una forma de abordar la solucion $Ax = b$ es factorizar la matriz. Es decir buscar

$$A = LU$$

donde L y U son matrices triangulares inferior y superior, respectivamente.

Dicha factorizacion es interesante cuando se debe resolver varias veces cambiando el vector de terminos independientes

En general el numero de operaciones requeridas son de $O(n^3)$

Medidas para evaluar el comportamiento de una matriz

La norma, el radio espectral y numero de condición son medidas que nos permiten evaluar el comportamiento de la matriz en la solución de un SEAL, cuan fácil o rápido sera la solución, o cuan estables serán los resultados frente a errores en los datos.

Normas vectoriales

Una norma para un espacio vectorial V es una función que, aplicada a un vector da un escalar no nulo, tal que:

- $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

La norma se designa con doble raya. Así $\|x\|$ y se lee *norma de x*.

- Algunas normas para vectores son:

- Norma Euclídea

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Norma Infinito

$$\|x\|_\infty = \max |x_i|$$

- Norma L_1

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i| \right)$$

Pasar estas normas para matrices

Radio espectral

Se define como radio espectral de una matriz A, al modulo del mayor autovalor de la matriz

$$\rho(A) = \max[|\lambda| \mid \det(A - \lambda I) = 0]$$

Se puede demostrar geométricamente como el radio del menor circulo en el plano complejo, que contiene a todos los autovalores.

- Si el radio espectral es menor que uno la matriz es convergente $\rho(T) < 1$

La matriz es convergente si cuando tomamos el limite del producto matricial A^k cuando k tiende a infinito me tiene que dar 0, hago infinitos productos matriciales.

Siempre debo calcular el radio espectral de la Matriz de iteración G

$$x^{(k)} = Gx^{k-1} + c$$

Cuanto menor es el radio espectral de la matriz mas rápido converge el sistema.

Cuando el radio espectral esta cerca del uno a la matriz le cuesta mas converger.

Siempre el radio espectral va a ser menor o igual a la norma de la matriz

Numero de condición de una matriz

Se define como:

$$k(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

- Si el numero de condición es pequeño, una pequeña perturbación en los datos (b) produce errores relativos pequeños en la solución.
- Si el numero de condición es grande el error en la solución es grande.

3. Métodos iterativos para la resolución de SEAL

Los metodos iterativos estan basados en construir una secuencia de soluciones aproximadas $x^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$), que a medida que el contador de iteraciones k aumente se aproxime a la solucion exacta.

- Hace falta una estimacion inicial x^0 para comenzar el proceso, osea un valor semilla.

Método de Jacobi

Descomponemos la matriz A como:

$$A = L_s + D_s + U_s$$

donde:

- D_s es la matriz diagonal con la diagonal de A ($d_{ii} = a_{ii}$)
- L_s es la matriz triangular inferior con los términos de A excluyendo la diagonal
- U_s es la matriz triangular superior con los términos de A excluyendo la diagonal ($u_{ij} = a_{ij}$ para $i < j$)

Para una matriz diagonal dominante el método de Jacobi converge, si no es diagonal dominante no puedo decir nada.

Una matriz se dice diagonalmente dominante si $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

Para una misma solución dependiendo del orden de las ecuaciones ordenadas en la matriz el método puede o no tener solución.

Metodo de Gauss-Seidel

ESTRICTAMENTE

Si una matriz es diagonal dominante entonces dicho método converge

si no es estrictamente diagonal dominante no se puede garantizar nada

Si una matriz es simétrica, definida positiva, entonces el método de Gauss-Seidel converge

Método SOR

Se usa un parámetro de relajación w , si $w=1 \rightarrow$ Gauss-Seidel

$0 < w < 1$ método de sub-relajación

$1 < w < 2$ método de sobre-relajación Se puede hallar un w ópt. que minimice el radio espectral

Criterios para detener las iteraciones

- Usar la diferencia entre la iteración actual y la iteración anterior y que esta sea menor que una cierta tolerancia.
- Medir la diferencia relativa entre dos iteraciones y que esta sea menor que una cierta tolerancia.
- Utilizar que el residuo sea menor que una cierta tolerancia.

4. Ecuaciones no lineales

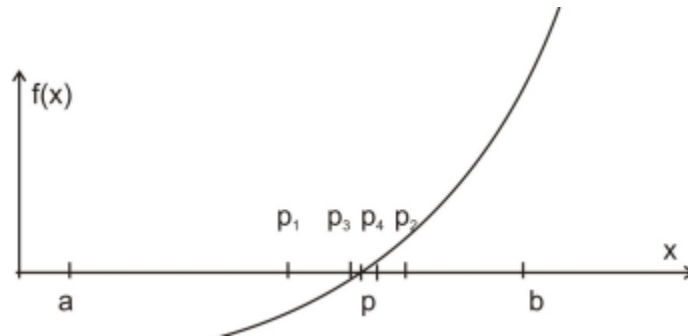
Generalmente se nos plantean problemas donde queremos despejar de una ecuación, una variable que no podemos escribir en forma explícita. Como por ejemplo:

Encontrar x tal que $f(x) = 0$

Método de la bisección

Sea $f(x)$ continua en $[a, b]$ y $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos.

Entonces por el teorema del valor medio, existe un c tal que $a < c < b$ en donde $f(c) = 0$.



El metodo de la Biseccion procede buscando una raiz propuesta en la mitad del intervalo (a, b) y repitiendo iterativamente este procedimiento.

Dicho metodo es lento tiene convergencia lineal, pero es robusto, siempre converge. Se lo usa muchas veces para poner en marcha a otros metodos.

Formas de detener las iteraciones

- Considerando el valor absoluto de la diferencia entre dos iteraciones.

$$|p_n - p_{n-1}| \leq tol_1$$

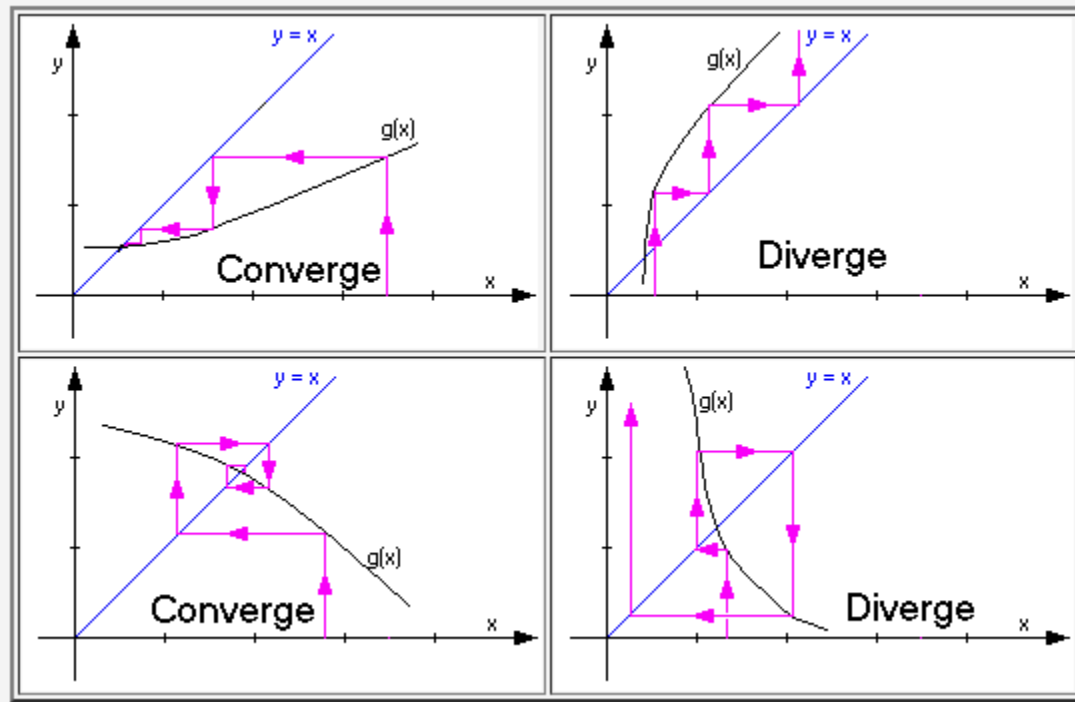
- Tomando el valor relativo entre las diferencias de las iteraciones

$$\frac{|p_n - p_{n-1}|}{p_n} \leq tol_2$$

- Este tercer criterio examina el error en $|f(p)| \leq tol_3$

Punto Fijo

Dado que $f(x) = 0$ puede reescribirse de la forma $f(x) = g(x) - x = 0$ por lo que es posible esperar que exista un valor de x_i que sea igual a $g(x_i)$ en donde dicho valor podría corresponderse a una raíz de $f(x)$

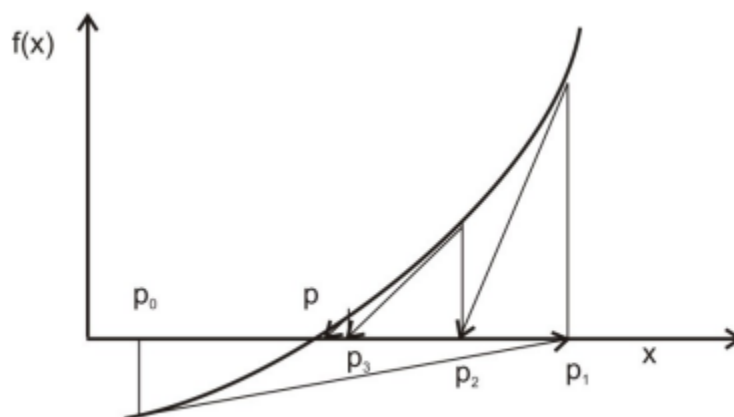


Método de Newton-Raphson

Sea $f(x)$ diferenciable dos veces se desea hallar p tal que $f(p) = 0$

El metodo de **NR** construye una sucesion p_n con la formula de recurrencia

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$



Dicho método posee convergencia *cuadrática*

Necesitamos evaluar la derivada de la funcion.

Convergencia

- La convergencia se dice que es local, cuando precisa que el punto inicial este suficientemente cerca del cero buscado → El método de **NR**
- El metodo de la biseccion, en contraposicion con el metodo de **NR**, tiene convergencia global ya que para cualquier $p_0 \in [a, b]$ converge

5. Interpolación y aproximación polinomial

Polinomio de interpolación de Lagrange

El problema de determinar un polinomio de grado uno que pasa por diferentes puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es igual al de aproximar una funcion f para la que $f(x_0) = y_0$ y $f(x_1) = y_1$ por medio de un polinomio de primer grado que se **interpola**, es decir que coincide con los valores de f en los puntos determinados

De tal forma nos queda el siguiente polinomio:

$$P_n(x) = L_{n,0}(x)y_0 + L_{n-1}(x)y_1 + \dots + L_{n,n}(x)y_n$$

Polinomios osculantes

Un polinomio osculante coincide con la funcion en los $n+1$ puntos y sus derivadas (hasta un orden $\leq m$) coinciden con las derivadas respectivas de la funcion

- Casos particulares

- Si $n = 0$

$$P^{(m)}(x_i) = f^{(m)}(x_i)$$

Polinomio de Taylor

- si $m_i = 0$ donde m son enteros

Son los polinomios interpolantes

Polinomios de Hermite

Los polinomios de hermite son polinomios osculantes con $m_i = 1$, es decir coinciden el polinomio y la funcion en sus valores y en sus primeras derivadas, en todos los puntos x_i ($i = 0, 1, \dots, n$)

Funciones splines (o trazadores)

Si hay grandes cambios de curvatura de la función puede ser que los polinomios globales se desvíen mucho de la curva a representar

Una posibilidad es decomponer la curva en subintervalos y usar polinomios diferentes para cada subintervalo

Una *función spline* de grado k , $S(x)$, con nudos en x_0, x_1, \dots, x_n es una que satisface:

- En cada subintervalo presenta un polinomio de grado $\leq k$
- $S(x)$ tiene derivadas de orden $k - 1$ continuas en $[x_0, x_n]$

Funciones splines cúbicas

Estas funciones poseen continuidad hasta la derivada segunda. Como cada función tiene 4 coeficientes y tenemos n funciones, por lo tanto tendremos $4n$ incógnitas. Sin embargo solo hay $4n - 2$. Por lo que nos faltan 2 ecuaciones. Por lo tanto las ecuaciones a agregar pueden ser:

- **Condiciones de frontera libre, es decir las llamadas *splines cúbica natural***
 - $S''(x_0) = 0$
 - $S''(x_n) = 0$
- **Condiciones de frontera sujeta, es decir las llamadas *splines cúbicas sujetas***
 - $S'(x_0) = f'(x_0)$
 - $S'(x_n) = f'(x_n)$

Aproximación y ajustes de curvas

Hay veces que se desea encontrar una función que aproxime de mejor manera posible una cantidad de puntos.

Por ejemplo, si se miden experimentalmente las deformaciones de un resorte para distintas fuerzas aplicadas, se obtienen una cantidad de puntos en un gráfico Fuerza-Desplazamiento.

Para ello utilizaremos el **metodo de los minimos cuadrados**, que busca la recta la cual minimiza el error entre el valor teórico y el valor real de nuestra función.

6. Diferenciación e integración numérica

Diferenciación numérica

APROXIMACION CENTRADA

Fórmula de 2 puntos

Hacemos el desarrollo de la serie de Taylor, quedándonos así:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots$$

Usamos solo el punto que queremos y el siguiente

Así la estimación de la derivada es:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

aca despejamos de la serie de Taylor $f'(x)$

Lo que es lo mismo:

$$y' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

orden h

El error de truncamiento es h

A esta formula también se la denomina formula de diferencia finita hacia adelante.

Fórmula de 3 puntos

El error es $\frac{h^2}{6} f'''$ Usamos el punto anterior el actual y el siguiente

El estimador de la derivada nos queda de la siguiente forma:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

desarrollamos $f(x+h)$; $f(x-h)$ y los restamos y despejamos la que querramos

Lo que es lo mismo que:

$$y' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

Centrada orden (h^2)

MIENTRAS MAS ORDEN MEJOR PQ h ES MAS CHICO $h=(b-a)/L$ h es la cant d intervalos

Se nos cancela el termino central $f(x)$ por el truncamiento que hacemos con Taylor.

Errores en diferenciación numérica

Al evaluar numericamente la derivada se introducen 2 tipos de errores:

- Error de truncamiento: Es debido al método numérico. Por ejemplo el error introducido al retener algunos terminos de la Serie de Taylor y descartar el resto.

Extrapolación de Richardson

A través de la extrapolación de Richardson podemos reducir el error de truncamiento.

- Error de redondeo: Debido a la aritmética finita de la computadora

Integración numérica

$$I = \int f(x)dx$$

no siempre puede lograrse analíticamente.

Ya sea porque:

[Primitiva](#)

- No se conozca la primitiva de la función $f(x)$
- No se conozca la función $f(x)$, sino que la misma este descrita mediante una tabla de valores

Si los puntos están igualmente espaciados

$$x_i = x_0 + ih$$

la fórmula

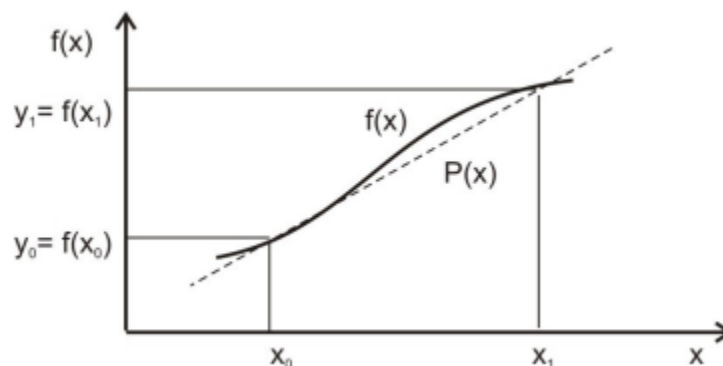
$$I = \sum a_i f(x_i)$$

Se conoce como fórmula de Newton-Cotes

Newton-Cotes

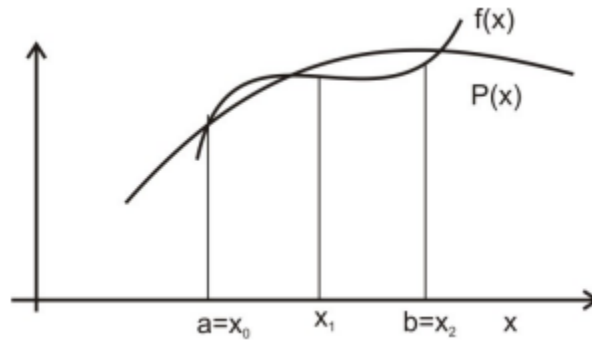
Regla del trapecio

Es el caso mas simple de fórmula de Newton-Cotes cerrada y se realiza con $n = 1$



Regla de Simpson

La fórmula de Newton-Cotes con $n = 2$ da:



Evalúa el área bajo la parábola que pasa por los 3 puntos

Regla de Simpson 3/8

Se toman $n = 3$ puntos.

- Las fórmulas cerradas de Newton-Cotes con n *par* tienen grado de precisión $n + 1$
- Las fórmulas cerradas de Newton-Cotes con n *impar* tienen grado de precisión n

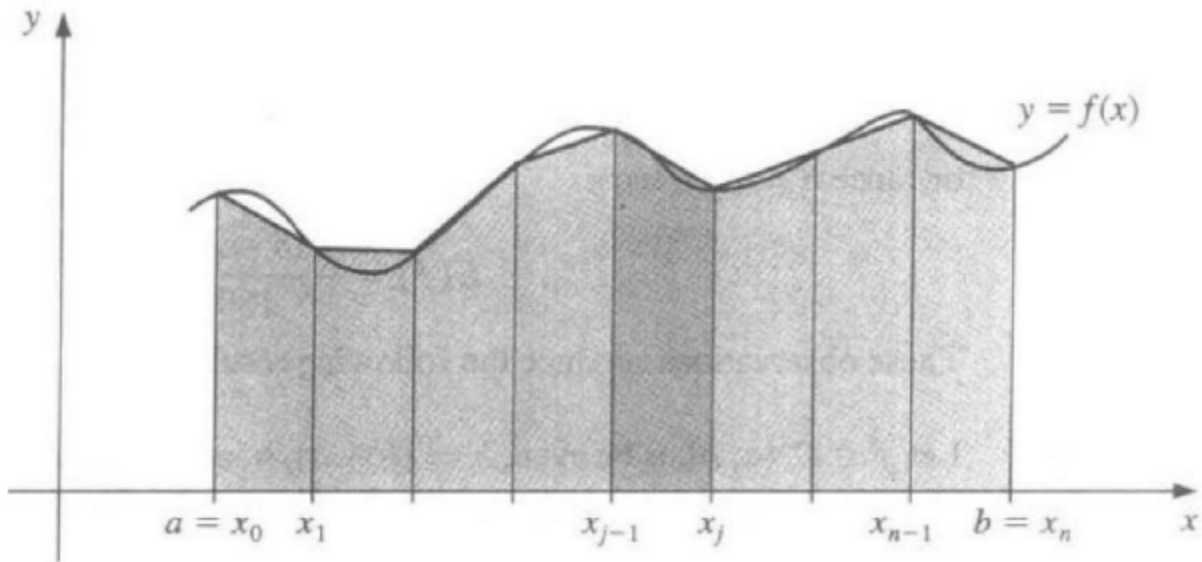
Reglas de integración compuesta

Las formulas de integración pueden usarse para integrar funciones definidas en una cantidad de puntos mayor. Estas formulas se llaman *compuestas*.

Vamos integrando la funcion con su fórmula en cada intervalo definido de la misma.

Estas formulas pueden usarse aún cuando los puntos no estén igualmente espaciados

Ej. Regla del trapecio compuesta



Metodo de Gauss

Se escogen dos puntos interiores y se traza una linea recta que pase por ambos puntos y se extiende hasta los extremos del intervalo. Como parte del trapezoide queda por encima de la curva y parte por abajo, si los puntos del trapezoide son escogidos correctamente podemos se puede llegar a igualar las dos zonas de modo que el area del trapecio sea igual al area bajo la curva

- Se puede extender a tres o mas puntos.
- Los puntos no necesariamente necesitan estar equidistantes.

Resolver por diferencia finita

- Ver que todas las unidades esten iguales

a los problemas de valores iniciales los vemos en funcion del tiempo, los problemas de valores de contorno estan en estado estacionario, ya no me interesa el tiempo.

En el estado estacionario no hay una variación temporal, si puede haber una variación espacial, diferentes valores según la posición.

tres condiciones de contorno

- Darle un valor a la temperatura \rightarrow condicion Dirichlet
- Es la condicion ejemplo $-k_0 d\phi/dx$ dandole un valor a k_o naturalmente va a fluir \rightarrow condicion Newumann
- Si fuerzo a que fluya mas lento o mas rapido le agrego una condición

Condición de frontera: son las condiciones que se dan en los limites de hasta donde vos podes calcular, osea hasta donde esta dado el dominio de nuestro problema. Representa a la interacción de nuestro dominio del problema con el resto del ambiente

El metodo de diferencia finita aproxima las derivadas a travez de la serie de taylor truncandola

7. Problemas de valores iniciales

La cantidad de condiciones iniciales que tiene que haber en un problema de valores iniciales tiene que ser igual al orden de derivación en la ecuación.

Básicamente un problema de valores iniciales consta de hallar la función $y(x)$ que satisface la ecuación diferencial $y'(x) = f(x, y)$ en el intervalo (a, b) y que además satisface la condición inicial $y(a) = y_0$.

Existencia y unicidad de la solución

Si f satisface una condición de Lipschitz en D para la variable y entonces el PVI tiene solución única $y(x)$

Condición de Lipschitz

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

hace referencia a que la derivada este acotada

Metodos de un paso

Los metodos de un paso permiten evaluar la solucion numérica y_{i+1} , en la abcisa x_{i+1} , con formulas del tipo:

$$y_{i+1} = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

Método de Euler

Es el método de un paso más sencillo

Despreciando el termino en h^2

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i)$$

Método de Runge-Kutta

Un método de RK de orden m es equivalente a tomar polinomios de Taylor hasta términos de orden m y el error de truncamiento es $O(h^{m+1})$

RK de orden	Error de truncamiento local	Evaluaciones de función
2	$O(h^3)$	2
4	$O(h^5)$	4

8. Solución numérica de problemas de valores de contorno

El problema es encontrar la funcion $w(x)$ que cumpla con la ecuacion de equilibrio.

El problema puede darse planteado como:

$$w'' = f(x, w)$$

$$w(0) = 0$$

$$w(L) = 0$$

No siempre un PVC tiene solución única, pero si hay un teorema que nos garantiza que la tenga

Sea:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') & , \text{para } a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

donde f es continua en el conjunto

$D = (x, y, y') | x \in [a, b], y \in [-\infty, \infty], y' \in [-\infty, \infty]$ y además las derivadas parciales de f con respecto a y y y' son continuas en D

- Si la derivada parcial de f con respecto a y es > 0
- Existe una constante M tal que la derivada parcial de f con respecto a y' es menor o igual que M

entonces el PVC tiene **solución única**

Método del disparo

El método del disparo consta de dividir el problema en dos PVI

PVI 1

$$u'' = p(x)u' + q(x)u + r(x)$$

$$u(a) = \alpha$$

$$u'(a) = 0 \rightarrow \text{angulo de inclinacion}$$

A una altura α disparo con un angulo de inclinacion de 0°

PVI 2

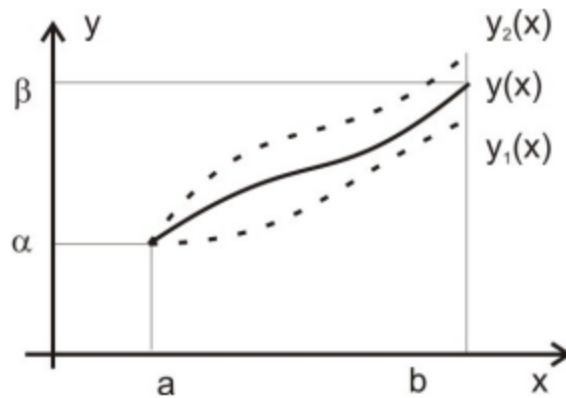
$$v'' = p(x)v' + q(x)v + r(x)$$

$$v(a) = 0$$

$$v'(a) = 1$$

Desde el piso disparo con angulo 1

La solución es un conjunto de ambos PVI



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & -1 + \frac{h}{2} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} p_2 & 2 + h^2 q_2 & -1 + \frac{h}{2} p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 - \frac{h}{2} p_3 & 2 + h^2 q_3 & -1 + \frac{h}{2} p_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 - \frac{h}{2} p_{N-1} & 2 + h^2 q_{N-1} & -1 + \frac{h}{2} p_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 - \frac{h}{2} p_N & 2 + h^2 q_N \end{bmatrix}$$

ESTUDIAR BIEN LO DEL TP8. ESTUDIAR BIEN LO DE SERIES DE TAYLOR, DIFERENCIA FINITAS.

CENTRADA USA EL PUNTO ANTERIOR Y EL QUE LE SIGUE, SI ESTA CENTRADO NO APARECE EL PUNTO MEDIO

DESCENTRADA USA DOS PUNTOS ANTERIOR Y EL Q LE SIGUE POR EJ

CUANDO LOS H DEL ANTERIOR Y SIGUIENTE SON DISTINTOS, HACE QUE SE DESCENTRE Y EL PUNTO QUE BUSCO SI APARECE
SI LOS H DEL ANTERIOR Y SIGUIENTE SON IGUALES EL PUNTO QUE BUSCO NO APARECE