ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°8

REPRESENTACION MATRICIAL DE UNA TL

1. Se tiene la transformación lineal $T:\Re^5 \to \Re^2$ y que $T(x) = A.x$ para alguna matriz A y cada x en $\Re^5$. ¿Cuántas filas y columnas tiene A?

2. Para cada transformación lineal T encuentra:

a) Su representación matricial A_T respecto de las bases canónicas de los espacios involucrados.

b) Núcleo e imagen de T, nulidad y rango de T.

I) $T: M_{23} \to M_{32}: \quad T(A) = A^t$

II) $T:\Re^3 \to \Re^2: \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-3z \end{pmatrix}$; Hallar T(1, 0, 3)

III) $T: M_{22} \to M_{22}: \quad T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+2c+d & -a+2c+2d \\ a-2b+5c+4d & 2a-b+c-d \end{pmatrix}$

IV) $T: P_2 \to \Re^3: \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 - a_1; -2a_0 + 3a_1 + a_2; a_1 + a_2)$

Calcular $T(1+2x-2x^2)$

V) $T:\Re^2 \to \Re^2$: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x.\cos\frac{\pi}{4} - y.sen\frac{\pi}{4} \\ x.sen\frac{\pi}{4} + y.\cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ Geométricamente, ¿qué representa esta transformación?

VI) $T:\Re^2 \to \Re^2$: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+4 \\ y+2 \end{pmatrix}$ Geométricamente, interpreta el efecto de aplicar esta transformación a un cierto vector.

3. Hallar la matriz asociada a cada transformación lineal de V en W, respecto de las bases dadas B_1 y B_2

$$T:\Re^3 \to \Re^2 : \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-3z \end{pmatrix} \quad , \quad B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Para v = (1, 0, 3), encuentra las coordenadas de T(v) respecto de la base B_2 , usando la matriz de transformación respecto de las bases B_1 y B_2,

RESOLUCION DE ALGUNOS EJERCICIOS

1) La matriz A tiene 5 columnas (para que sea compatible con x bajo la multiplicación) y como Ax es un vector de R^2 (espacio de llegada), A tiene 2 filas.

2)

IV) a) $T: P_2 \to R^{3_3} / T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_0 - a_1, -2a_0 + 3a_1 + a_2, a_1 + a_2)$

Sean $B_1 = \{x^2, x, 1\}$ = base canónica de P_2
$B_2 = \{i, j, k\}$ = base canónica de R^3.

Entonces:

$$T(x^2) = T(0 + 0x + 1x^2) = (0,1,1)$$
$$T(x) = T(0 + 1x + 0x^2) = (-1,3,1)$$
$$T(1) = T(1 + 0x + 0x^2) = (1,-2,0)$$

Como B_2 es la base canónica de R^3, no se calcula en este caso las coordenadas de cada imagen de los vectores de B_1 con respecto a B_2.
Entonces la matriz asociada a T es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Vamos a aplicar operaciones elementales sobre A_T:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Entonces resolvemos el sistema B $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donde $x = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$ son las coordenadas del polinomio p(x)= $a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$ con respecto a B_1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-a_1 + a_0 = 0 \to a_0 = a_1$$

$$a_2 + 3a_1 - 2a_0 = 0$$
$$a_2 + 3a_1 - 2a_1 = 0$$
$$a_2 = -a_1$$

$$\Rightarrow nu(T) = \{-a_1x^2 + a_1x + a_1 \text{ con } a_1 \in R\}$$
$$= gen\{-x^2 + x + 1\}$$
$$\Rightarrow v(T) = 1$$

A la hora de calcular imagen (T) muchos podríamos hacerlo así:

$$imagen\ (T) = \{(a_0 - a_1,\ \ -2a_0 + 3a_1 + a_2,\ \ a_1 + a_2)\}$$
$$= \text{gen } \{(1,-2,0),(-1,3,1),(0,1,1)\}$$

De este modo $\rho(T)=3$ y $\nu(T)+\rho(T)=4$!!!! Pero 4 no es la dimensión del espacio de partida.
Además se puede demostrar que el conjunto de vectores

$$\{(1,-2,0),(-1,3,1),(0,1,1)\}$$

es linealmente dependiente.
Remirando el conjunto imagen lo reescribimos como:

$$imagen\ (T) = \{(a_0 - a_1,\ \ -2a_0 + 3a_1 + a_2,\ \ a_1 + a_2)\ \ con\ a_0, a_1, a_2 \in R\}$$
$$= \{(a_0 - a_1,\ -2a_0 + 2a_1 + a_1) + a_2,\ a_1 + a_2)\ \ con\ a_0, a_1, a_2 \in R\}$$
$$= \{(a_0 - a_1,\ \ \ -2(a_0 - a_1) + (a_1 + a_2),\ a_1 + a_2)\ \ con\ a_0, a_1, a_2 \in R\}$$
$$= \{(a_0 - a_1)(1,-2,0) + (a_1 + a_2)(0,1,1)\ con\ a_0, a_1, a_2 \in R\}$$
$$= \text{gen } \{(1,-2,0),(0,1,1)\}$$

Por lo tanto $\rho(T)=2$.

3 4) Se calcula la imagen de cada vector de B_1

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

Luego se calculan las coordenadas de cada imagen con respecto a B_2 resolviendo los siguientes sistemas

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{5} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

De modo que

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Y $A_T = \begin{pmatrix} 3 & \frac{7}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a T respecto de las bases dadas B_1 y B_2.

Por teorema $[T(v)]_{B_2} = A_T [(v)]_{B_1}$ (*)
Para calcular $[(v)]_{B_1}$ con v=(1,0,3), se plantea el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolviéndolo resulta: $a = 1, b = -2, c = 2$. Entonces:

$$[(v)]_{B_1} = [(1,0,3)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por (*) :

$$[T(v)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{7}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{-4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow [T(v)]_{B_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{-4}{5} \end{pmatrix}$$

Recordando que el último vector es un vector de coordenadas con respecto a la base B_2 y que, por lo tanto, contiene los escalares de la combinación lineal de los vectores de B_2, resulta que:

$$T(v) = 8\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{5} \\ -\frac{52}{5} \end{pmatrix}$$