TEMA 3

INTEGRALES DE SUPERFICIE

SUPERFICIES PARAMETRIZADAS

Definición

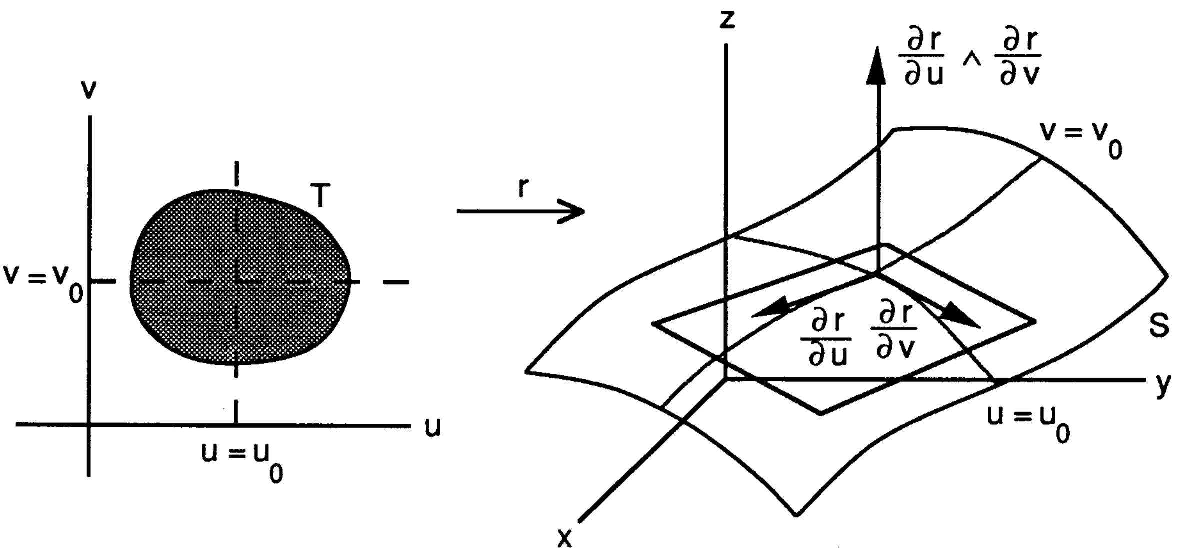
Sea T un abierto conexo de IR^2. Una superficie parametrizada es una aplicación

$$\begin{aligned} r:\ T &\rightarrow IR^3 \\ (u, v) &\rightarrow r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned}$$

que cumple las siguientes condiciones:

(1) Las funciones componentes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en T

(2) El producto vectorial $\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0 \quad \forall (u, v) \in T$



Habitualmente se designa por superficie S a la imagen por la aplicación r del abierto conexo T; u, v reciben el nombre de parámetros de la superficie.

Observación

La condición (2) de la definición de superficie parametrizada hace referencia a lo siguiente:

Fijando uno de los parámetros $u = u_0$ o $v = v_0$ obtenemos dos curvas contenidas en la superficie, que reciben el nombre de curvas coordenadas; $\partial r/\partial v$, $\partial r/\partial u$ representan los vectores tangentes a cada una de dichas curvas, ya que cada derivación parcial deja fija la otra componente.

La condición $\partial r/\partial u \wedge \partial r/\partial v \neq 0$ equivale a decir que los vectores $\partial r/\partial u$, $\partial r/\partial v$ son linealmente independientes, para todo valor (u, v), es decir, para todo punto de la superficie S. Así estos dos vectores generan en cada punto un subespacio vectorial de dimensión dos que corresponde al subespacio director del plano tangente a la superficie en cada punto.

Producto vectorial fundamental

En la parametrización de una superficie el vector $\partial r/\partial u \wedge \partial r/\partial v$ recibe el nombre de producto vectorial fundamental. Este vector es perpendicular a la dirección del plano tangente: es un vector normal a la superficie en cada punto, no necesariamente unitario.

Plano tangente a una superficie

La expresión de la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto de parámetros (u_0, v_0) es:

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0, v_0) & \partial x/\partial u\,(u_0, v_0) & \partial x/\partial v\,(u_0, v_0) \\ y - y(u_0, v_0) & \partial y/\partial u\,(u_0, v_0) & \partial y/\partial v\,(u_0, v_0) \\ z - z(u_0, v_0) & \partial z/\partial u\,(u_0, v_0) & \partial z/\partial v\,(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

Métodos básicos de parametrización de superficies

(1) Parametrización a través de la gráfica de una función.

Supongamos que una superficie venga dada como la gráfica de una función de dos variables

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \to f(x, y) \end{aligned}$$

Si se cumplen para la función f las condiciones de regularidad exigidas en el apartado (1) de la definición de superficie parametrizada, entonces, tomando x, y como parámetros:

$$(x, y) \to r(x, y) = (x, y, f(x, y)) \qquad (x, y) \in \mathrm{Dom}(f)$$

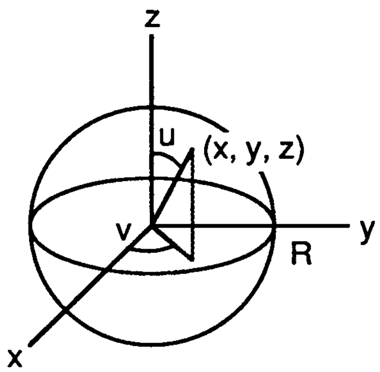
se verifica $\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1) \neq (0,0,0)$

por lo que se cumple la condición (2) de la definición, tratándose, por tanto, de una parametrización efectiva.

(2) Parametrización de superficies particulares.

- Esfera de centro (0, 0, 0) y radio R.

Expresión implícita: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



Expresión paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} x &= R \operatorname{sen} u \cos v \\ y &= R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z &= R \cos u \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0 < u < \pi \\ &0 \leq v \leq 2\pi \end{aligned}$$

Parametrizaciones dadas por gráficas de funciones:

Casquete superior: $T \to IR^3$

$(x, y) \to (x, y, +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$

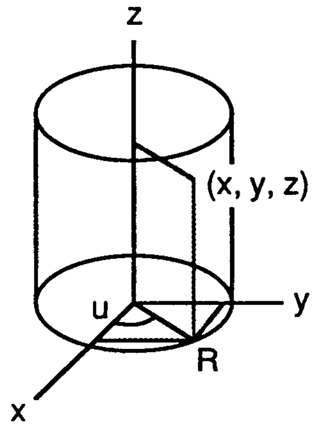
Casquete inferior: $T \to IR^3$

$(x, y) \to (x, y, -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$

siendo $T = \{ (x, y) \in IR^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq R^2 \}$

- Cilindro circular recto con eje de simetría OZ.

Expresión implícita: $x^2 + y^2 = R^2$



Expresión paramétrica:

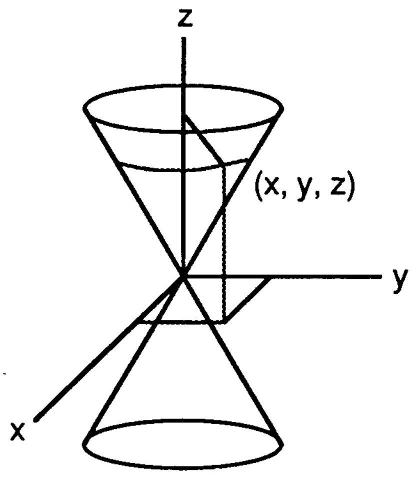
$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos u \\ y &= R\,\mathrm{sen}\,u \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 0 \le u \le 2\pi \\ z \in \mathrm{IR} \end{aligned}$$

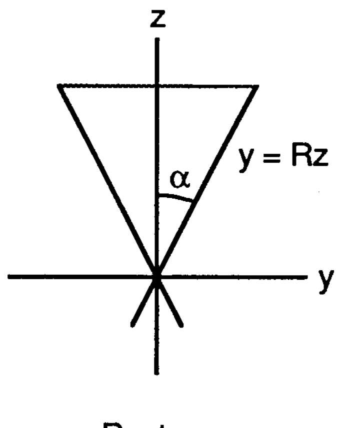
- Cono circular recto centrado en (0, 0, 0), con eje de simetría OZ.

Expresión implícita: $x^2 + y^2 = R^2 z^2$

Expresión paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} x &= R\,z\cos u \\ y &= R\,z\,\mathrm{sen}\,u \\ z &= z \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} 0 \le u \le 2\pi \\ z \in \mathrm{IR} - \{0\} \end{aligned}$$





$R = \mathrm{tg}\,\alpha$

Para z = 0, vértice del cono, no existe plano tangente.

AREA DE UNA SUPERFICIE

Teorema

Sea S una superficie de IR^3 parametrizada en la forma:

$$IR^2 \supset T \rightarrow IR^3$$
$$(u, v) \rightarrow r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

entonces:

$$\text{Area de S} = A(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) \right\| du\, dv$$

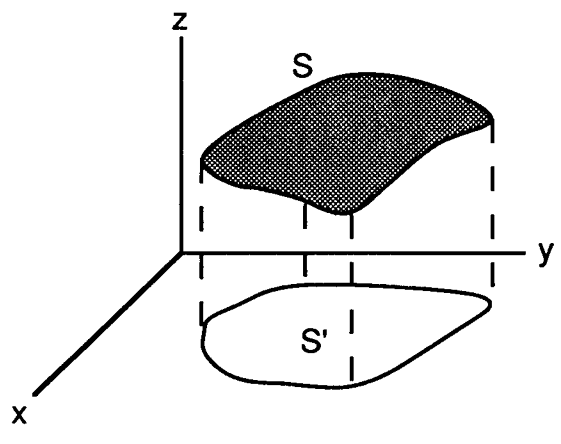
Caso particular

Si la superficie S viene dada por la gráfica de una función $f : IR^2 \rightarrow IR$, es decir, si la parametrización de S es:

$$S' \rightarrow IR^3$$
$$(x, y) \rightarrow (x, y, f(x, y))$$

entonces:

$$A(S) = \iint_{S'} \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + 1}\; dx\, dy$$



S' proyección sobre el plano xy de S

INTEGRAL DE SUPERFICIE DE CAMPOS ESCALARES

El concepto de integral de superficie de campos escalares es una generalización natural del concepto de integral doble en el plano, así que su definición es paralela a la de aquella.

Sea S una superficie de IR^3 parametrizada en la forma:

$$\begin{array}{rcl} IR^2 \supset T & \rightarrow & IR^3 \\ (u, v) & \rightarrow & r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{array}$$

Sea el campo escalar
$$\begin{array}{rcl} F: IR^3 & \rightarrow & IR \\ (x, y, z) & \rightarrow & F(x, y, z) \end{array}$$

y supongamos que F está definido y es continuo en todo punto de la superficie S.

Los pasos que conducirían a la definición de la integral de superficie del campo escalar F consistirían en subdividir la superficie S en n regiones, valorando en un punto arbitrario de cada una de ellas el campo escalar multiplicado por el área de cada región; hecho esto se calcularía la suma de estos productos y tomando cada vez un número mayor de particiones, por paso al límite, obtendríamos la siguiente:

Definición

La integral de superficie del campo escalar F sobre la superficie S es:

$$\iint_S F \, dS := \iint_T F(r(u,v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\, dv$$

Propiedades

(1) La integral de superficie de un campo escalar es independiente de la parametrización escogida para la superficie S.

(2) Si el campo escalar que se integra es $F(x, y, z) = 1$ queda:

$$\iint_S dS = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\, dv = A(S)$$

motivo por el cual dS recibe el nombre de diferencial de superficie, o mejor, diferencial de área.

(3) $\iint_S (F+G)\, dS = \iint_S F\, dS + \iint_S G\, dS$

(4) $\iint_S k F\, dS = k \iint_S F\, dS \qquad k \in IR$

(5) Si $S = S_1 \cup S_2$ donde $S_1 \cap S_2$ es a lo sumo una curva,

$$\iint_S F\,dS = \iint_{S_1} F\,dS + \iint_{S_2} F\,dS$$

Aplicaciones

Supongamos que $\mu = \mu\,(x, y, z)$ es la función de densidad de una lámina curvada S de grosor despreciable.

Entonces: $\quad$ Masa de S $= M(S) = \iint_S \mu\,(x, y, z)\,dS$

(1) Centro de masas de una lámina curvada

Si denotamos por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ las coordenadas del centro de masas:

$$\bar{x} = \frac{1}{M(S)} \iint_S x\,\mu\,(x, y, z)\,dS \qquad \bar{y} = \frac{1}{M(S)} \iint_S y\,\mu\,(x, y, z)\,dS$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M(S)} \iint_S z\,\mu\,(x, y, z)\,dS$$

(2) Momentos de inercia de una lámina curvada

Sea r una recta y denotemos por $d\,(x, y, z)$ la distancia de la recta r al punto (x, y, z) de la lámina curvada S. El momento de inercia de S respecto a la recta r resulta ser:

$$I_r = \iint_S d^2(x, y, z)\;\mu\,(x, y, z)\,dS$$

INTEGRAL DE SUPERFICIE DE CAMPOS VECTORIALES

Sea S una superficie de $\mathbb{R}^3$ parametrizada en la forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \supset T &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow r\,(u, v) = (\,x\,(u, v), y\,(u, v), z\,(u, v)\,) \end{aligned}$$

Sea F un campo vectorial que esté definido y sea continuo en un abierto U de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la superficie S,

$$\begin{aligned} F: U &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\to F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \end{aligned}$$

Sea n vector normal unitario a la superficie S, es decir:

$$n = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}}{\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \|}$$

Definición

Definimos la integral de superficie del campo vectorial F sobre la superficie S como la integral de superficie del campo escalar $F \cdot n$ sobre la superficie S.

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_T F(r(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right) du \, dv$$

Notación usual

Al ser:

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial (y,z)}{\partial (u,v)}, -\frac{\partial (x,z)}{\partial (u,v)}, \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \right)$$

quedará:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_T \left[F_1(r(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + F_2(r(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + F_3(r(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] du \, dv$$

o bien:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_S F_1 \, dy \wedge dz + F_2 \, dz \wedge dx + F_3 \, dx \wedge dy$$

Propiedades

(1) $\iint_S (F + G) \cdot n \, dS = \iint_S F \cdot n \, dS + \iint_S G \cdot n \, dS$

(2) $\iint_S (kF) \cdot n \, dS = k \iint_S F \cdot n \, dS \qquad k \in \mathbb{R}$

(3) Si $S = S_1 \cup S_2$ donde $S_1 \cap S_2$ es a lo sumo una curva,

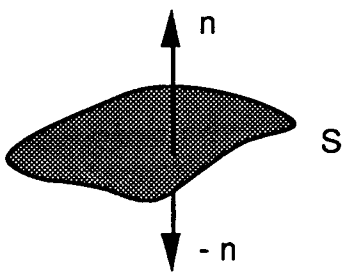
$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{S_1} F \cdot n \, dS + \iint_{S_2} F \cdot n \, dS$$

(4) El valor de la integral de superficie de un campo vectorial es, salvo el signo, independiente de la parametrización escogida.

Elección del vector normal

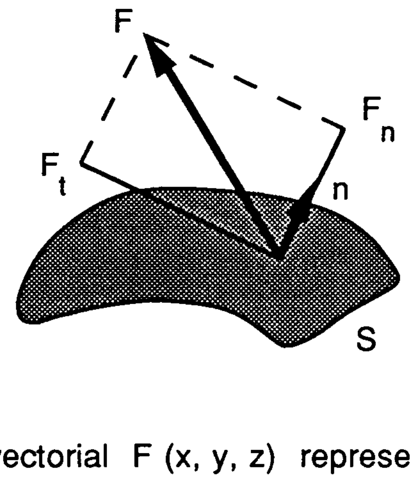
(1) Superficies cerradas. Tomaremos n como el vector normal exterior.

(2) Superficies abiertas. Tomaremos, si es posible, el vector normal ascendente. - tercera componente positiva -



Interpretación

Si F es un campo vectorial, $F \cdot n$ es un campo escalar que representa la componente normal a la superficie S del campo F.



$F_n = F \cdot n \qquad \|n\| = 1$

Si el campo vectorial $F(x, y, z)$ representa un campo de fuerzas en el espacio (campo eléctrico, magnético,...) entonces

$$\iint_S F \cdot n \, dS$$

representa el flujo que atraviesa S por unidad de tiempo.

Teoría de fluidos

Supongamos que tenemos un fluido estacionario, es decir, aquel que posee en cada punto una velocidad independiente del tiempo v (x, y, z); sea μ (x, y, z) la densidad del fluido en cada punto; definimos:

$$F(x, y, z) = \mu(x, y, z)\ v(x, y, z)$$

F (x, y, z) recibe el nombre de densidad de flujo de la corriente de fluido y representa la masa de fluido que circula por (x, y, z) en la dirección de v por unidad de área y unidad de tiempo. La integral

$$\iint_S F \cdot n \ dS$$

representa el flujo del campo F que atraviesa la superficie S y, por tanto, la masa total de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo.

TEOREMA DE STOKES

El teorema de Stokes expresa una relación entre la integral de línea de un campo vectorial y la integral de superficie.

Teorema de Stokes

Sea el campo vectorial

$$\begin{aligned} F : IR^3 &\to IR^3 \\ (x, y, z) &\to F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \end{aligned}$$

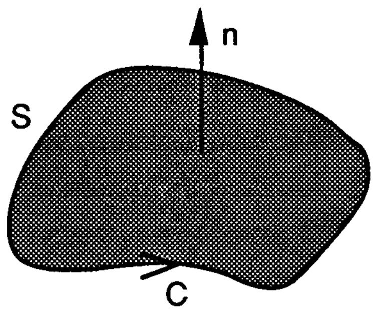
cuyas componentes sean funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas en un abierto que contenga a la superficie S.

Sea S una superficie parametrizada de IR^3 cuya frontera sea una curva C cerrada, simple y regular a trozos.

Supongamos que C está orientada de forma que al recorrer la frontera del lado de la normal a S deja la superficie a la izquierda.

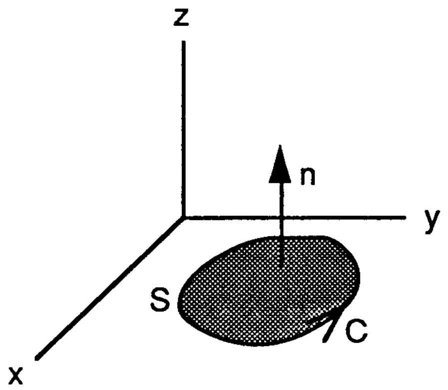
Entonces:

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot}\, F \cdot n \ dS$$



Caso particular: Teorema de Green

Supongamos que S es una región del plano xy.



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad (x, y) \in S$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 0, 1)$$

Sea F un campo de IR^2 cumpliendo las condiciones del teorema de Stokes:

$$F(x, y, 0) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$$

entonces:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

expresión que recoge el teorema de Green como caso particular del teorema de Stokes.

TEMA 3. PROBLEMAS

3.1 Encontrar una representación paramétrica de las siguientes superficies, así como la ecuación del plano tangente en el punto indicado en cada caso:

(a) $x + y + z = 0$ $\quad P = (1, 0, -1)$

(b) $x^2 + z^2 = a^2$ $\quad P = (a, 1, 0)$

(c) $z = 2 - x^2 - y^2$ $\quad P = (1, 1, 0)$

(d) $y = z^2$ $\quad P = (2, 1, 1)$

(e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $\quad P = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$

(f) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$ $\quad P = (0, 0, 1)$

3.2 Calcular el área de las siguientes superficies:

(a) región que en el plano $x + y + z = 1$ determina el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(b) porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = y$.

(c) porción de la superficie $z^2 = 2xy$ que se proyecta en el primer cuadrante del plano xy limitada por los planos $x = 2$, $y = 1$.

3.3 Calcular el área de la superficie determinada por la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

3.4 Calcular el área de las siguientes superficies:

(a) porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ comprendida entre los planos $z = \sqrt{2}/2$ y $z = -\sqrt{2}/2$.

(b) porción del cilindro parabólico $z = y^2$ sobre el triángulo de vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1).

(c) porción del paraboloide hiperbólico $z = xy$ interior al cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$.

3.5 Calcular el área de la porción de semiesfera $x^2 + (y - a)^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = ay$.

3.6 Calcular el área de las siguientes superficies:

(a) porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ situada por encima del plano $z = 0$ y limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.

(b) porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ situada entre los planos $x + 2z = 3$ y $z = 0$.

(c) porción del paraboloide $2z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el disco de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{2}$.

(d) porción del cilindro $z^2 + x^2 = 25$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 25$.

3.7 Calcular el área de la superficie del recinto limitado por los planos $z = 1/5$, $z = 4/5$ y las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

3.8 Calcular las integrales de superficie de los campos escalares F sobre las superficies S indicadas:

(a) $F(x, y, z) = z^2$ $\quad S \equiv$ casquete de $z = 1/2\,(x^2 + y^2)$ para $0 \leq z \leq 1$.

(b) $F(x, y, z) = xy$ $\quad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante.

(c) $F(x, y, z) = x^2y^2z^2$ $\quad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3.9 Probar que el momento de inercia de un recipiente esférico hueco alrededor de uno de sus diámetros es $2/3\, M R^2$, siendo M su masa y R el radio, suponiendo que su densidad es constante.

3.10 Calcular las integrales de superficie de los campos escalares F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = z$ $\quad S \equiv z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$.

(b) $F(x, y, z) = x^2yz$ $\quad S \equiv$ casquete más pequeño en que el plano $y + z = 1$ divide a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3.11 Calcular las coordenadas del centro de masas de un casquete esférico homogéneo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3.12 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, -y, 1)$ $\quad S \equiv z = 1 - x^2 - y^2,\ 0 \le z \le 1$

(b) $F(x, y, z) = (\operatorname{sen} xyz, z(x-y), x^2+y^2)$

$S \equiv$ porción del plano $y = 2z$ limitado por el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

(c) $F(x, y, z) = (xz, yz, z^2)$

$S \equiv$ primer octante del elipsoide $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$.

3.13 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ $\quad S \equiv$ cubo con centro el origen y aristas de longitud 2.

(b) $F(x, y, z) = (x - y, y - z, x - y)$ $\quad S \equiv$ frontera de $[0, 1]^3$.

3.14 Calcular las siguientes integrales de superficie:

(a) $\iint_S (x + y)\, dy \wedge dz + (y + z)\, dz \wedge dx + (x + z)\, dx \wedge dy$

$S \equiv$ superficie del cuerpo limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.

(b) $\iint_S xy\, dy \wedge dz + y^2\, dz \wedge dx + y^2\, dx \wedge dy$

$S \equiv$ superficie del cuerpo $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$.

(c) $\iint_S y\, dy \wedge dz + x\, dx \wedge dz + dx \wedge dy$

$S \equiv r(t, u) = (t \cos u, t \operatorname{sen} u, u),\ 0 \le t \le 1,\ 0 \le u \le 2\pi$

3.15 Calcular el flujo que atraviesa la superficie del primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en la dirección de la normal ascendente, para el campo $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.

3.16 El flujo de un fluido tiene el campo $F(x, y, z) = (x, -2x - y, z)$ como vector densidad de flujo. Sea S el hemisferio superior ($z \geq 0$) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcular la masa de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo en la dirección de la normal ascendente.

3.17 Verificar el teorema de Stokes con el cálculo de las integrales de línea sobre las trayectorias C de los campos vectoriales F que se indican:

(a) $F(x, y, z) = (z, x, y)$

C curva intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

(b) $F(x, y, z) = (y - z, z - y, x - y)$

C curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.

(c) $F(x, y, z) = (x^2 + y, yz, x - z^2)$

C curva intersección del plano $2x + y + 2z = 2$ y los tres planos coordenados.

(d) $F(x, y, z) = (x, y, 0)$

C curva intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$.

3.18 Emplear dos superficies diferentes para calcular las siguientes integrales de línea mediante el teorema de Stokes.

(a) $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$

C curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $z = a/2$, con $a > 0$.

(b) $\int_C (y^2 - xz)\,dx + (x^2 + zy)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$

C curva intersección del plano $2x + 2y + 2z = 1$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

(c) $\int_C (y + x)\,dx + (x + z)\,dy + z^2\,dz$

C curva intersección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.

3.19 Calcular el valor de la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ siendo C una curva cerrada que limita un recinto sobre el plano xy de 3 unidades de área, y el campo:

$$F(x, y, z) = (y^3 \operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} y \operatorname{sen} z ,\ 3y^2 \operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} z + 4x ,\ y (\operatorname{Sh} x + \operatorname{Ch} z))$$

3.20 Probar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que a continuación se detallan:

(a) $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = -\sqrt{3}\,\pi$

C curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $x + y + z = 1$.

(b) $\int_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz = 0$

C curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $y = z$.

(c) $\int_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz = -10\pi$

C curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z/4 = 1$.

(d) $\int_C (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz = 4\pi$

C curva intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, $z \geq 0$, y el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

3.21 Calcular cada una de las siguientes integrales de línea:

(a) $\int_C (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$

$C = \{ x + y + z = a \} \cap \{ x^2 + y^2 = a^2/4 \}$

(b) $\int_C (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$

$C = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 4y \} \cap \{ x^2 + y^2 = 2y \}$

(c) $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$

$C = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \cap \{ y + z = 1 \}$

3.22 Sobre la trayectoria intersección del plano $x + y + z = 3/2$ con la frontera del cubo unidad, $\partial\, [0, 1]^3$, calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x, y, z) = (y^2 - z^2 ,\ z^2 - x^2 ,\ x^2 - y^2)$.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DEL TEMA 3

3.1 Encontrar una representación paramétrica de las siguientes superficies, así como la ecuación del plano tangente en el punto indicado en cada caso:

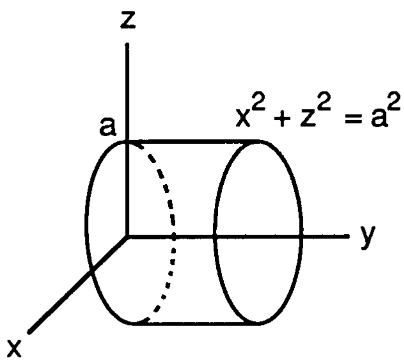
(a) $x+y+z=0$ $\qquad P=(1,0,-1)$

Parametrización $r = r(x,y)$: $\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=-x-y \end{array}\right\}$ $x, y \in IR$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \forall x, y$$

Plano tangente: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z+1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\quad x+y+z=0$

(b) $x^2+z^2=a^2$ $\qquad P=(a,1,0)$



Parametrización: $r = r(u,v)$

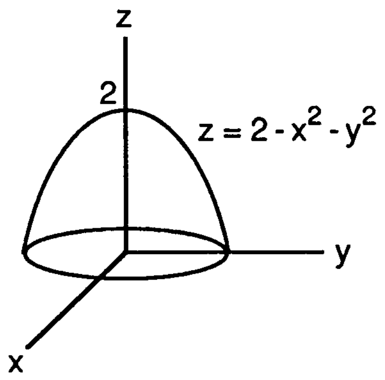
$\left.\begin{array}{l} x=a\cos u \\ y=v \\ z=a\,\mathrm{sen}\,u \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} u \in [0, 2\pi] \\ v \in IR \end{array}$

Valor de los parámetros en $P=(a,1,0)$, $u=0$, $v=1$.

$$\left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \qquad \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plano tangente: $\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z & a & 0 \end{vmatrix} = 0;\quad x-a=0$

(c) $z = 2 - x^2 - y^2$ $P = (1, 1, 0)$



Parametrización: $r = r(x,y)$

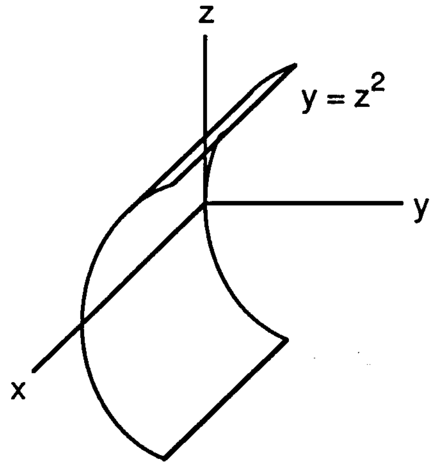
$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 2 - x^2 - y^2 \end{array}\right\} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Valor de los parámetros en $P = (1, 1, 0)$, $x = 1$, $y = 1$.

$$\left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \left.\frac{\partial r}{\partial y}\right|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Plano tangente: $$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 0 & 1 \\ z & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 ; \qquad 2x + 2y + z - 4 = 0$$

(d) $y = z^2$ $P = (2, 1, 1)$



Parametrización: $r = r(x,z)$

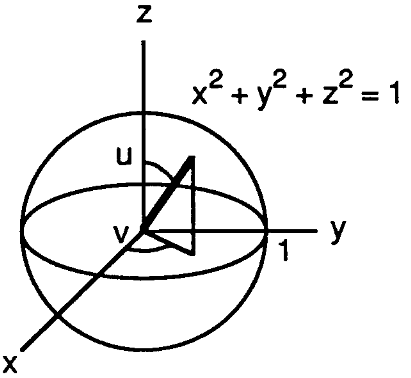
$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = z^2 \\ z = z \end{array}\right\} \quad x, z \in \mathbb{R}$$

Valor de los parámetros en $P = (2, 1, 1)$, $x = 2$, $z = 1$.

$$\left.\frac{\partial r}{\partial x}\right|_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\frac{\partial r}{\partial z}\right|_{(2,1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Plano tangente: $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ y-1 & 0 & 2 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 ; \qquad y - 2z + 1 = 0$

(e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad P = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$



Parametrización: $r = r(u,v)$

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{sen}\, u \cos v \\ y = \text{sen}\, u\, \text{sen}\, v \\ z = \cos u \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 < u < \pi \\ 0 \le v \le 2\pi \end{array}$$

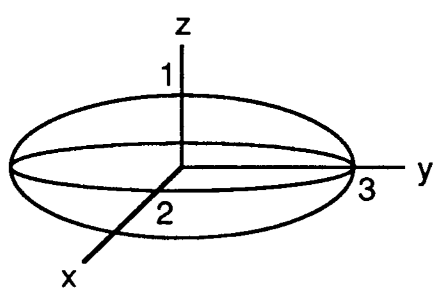
Valor de los parámetros en $P = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)$, $u = \frac{\pi}{4}$, $v = \frac{\pi}{4}$

$$\left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plano tangente: $\begin{vmatrix} x-1/2 & 1/2 & -1/2 \\ y-1/2 & 1/2 & 1/2 \\ z-\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \quad x + y + \sqrt{2}\, z - 2 = 0$

(f) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \qquad P = (0, 0, 1)$

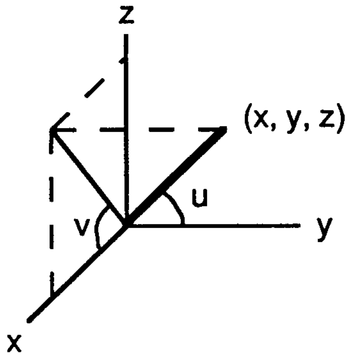
La parametrización que, en principio, podríamos considerar habitual:



$$\left.\begin{array}{l} x = 2\, \text{sen}\, u \cos v \\ y = 3\, \text{sen}\, u\, \text{sen}\, v \\ z = \cos u \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 < u < \pi \\ 0 \le v \le 2\pi \end{array}$$

no permite calcular plano tangente en el punto P = (0, 0, 1) "polo norte" del elipsoide, pues allí $\partial r/\partial u \wedge \partial r/\partial v = 0$.

Consideramos entonces la siguiente parametrización $r = r(u, v)$:



$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 3 \cos u \\ z = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 < u < \pi \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{array}$$

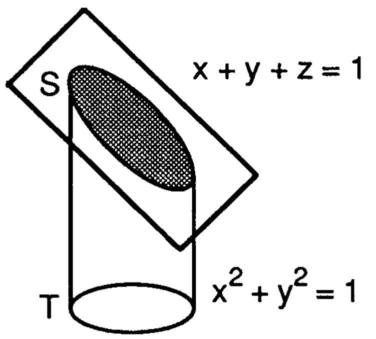
Valor de los parámetros en P = (0, 0, 1), $u = \pi/2$, $v = \pi/2$.

$$\left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Plano tangente: $\begin{vmatrix} x & 0 & -2 \\ y & -3 & 0 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ; \qquad z - 1 = 0$

3.2 Calcular el área de las siguientes superficies:

(a) región que en el plano $x + y + z = 1$ determina el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) = 1 - x - y \end{array}\right\} \quad (x, y) \in T$$

$$\partial f/\partial x = -1, \qquad \partial f/\partial y = -1$$

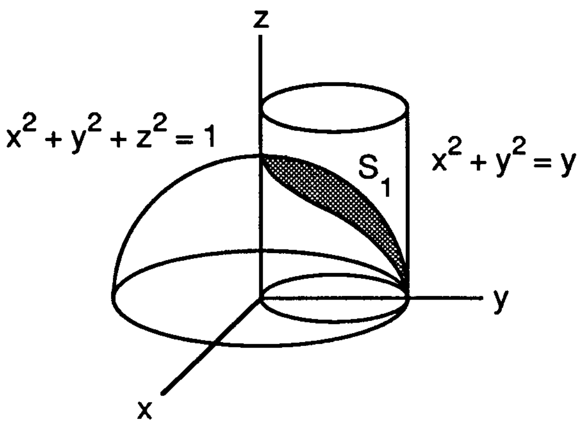
Dominio de parámetros: $T = \{ (x, y) \,/\, x^2 + y^2 \leq 1 \}$

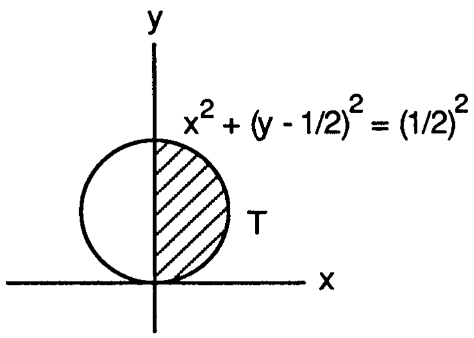
$$\text{Area (S)} = \iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}\; dx\,dy = \iint_T \sqrt{3}\; dx\,dy =$$
$$= \sqrt{3}\ \text{Area (T)} = \sqrt{3}\ \pi$$

(b) porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = y$.

Calculamos el área de la cuarta parte de la superficie S, correspondiente al hemisferio superior y a la porción que se proyecta sobre el primer cuadrante del plano xy;

$$\text{Area (S)} = 4\ \text{Area}(S_1)$$





Parametrización de S_1: $z = f(x, y) = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\text{Area}(S_1) = \iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}\; dx\,dy =$$
$$= \iint_T \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\; dx\,dy =$$

Frontera del recinto T: $x^2 + y^2 = y$, completando cuadrados:

$$x^2 + (y - 1/2)^2 = (1/2)^2 \qquad x \geq 0,\ y \geq 0$$

La otra frontera de T es el eje OY: $x = 0$

Cambio de variable: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $J(r, \theta) = r$

Descripción de T en polares: $\quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$
$\quad 0 \leq r \leq \operatorname{sen}\theta$

$$\text{Area}(S_1) = \iint_T \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\text{Area}(S) = 2\pi - 4$$

(c) porción de la superficie $z^2 = 2xy$ que se proyecta en el primer cuadrante del plano xy limitada por los planos $x = 2,\ y = 1$.

Parametrización de S: $\quad z = f(x, y) = \sqrt{2xy} \quad 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{2xy}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{2xy}}$$

$$\text{Area}(S) = \iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dy\,dx =$$

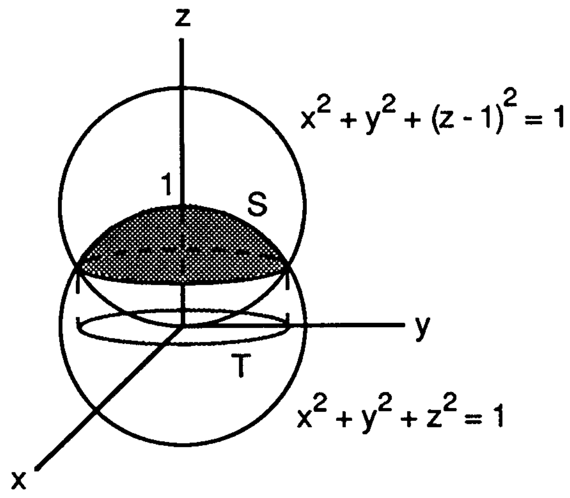
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^2\int_0^1 [x^{1/2}y^{-1/2} + x^{-1/2}y^{1/2}]\,dy\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^2 (2x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{-1/2})\,dx =$$

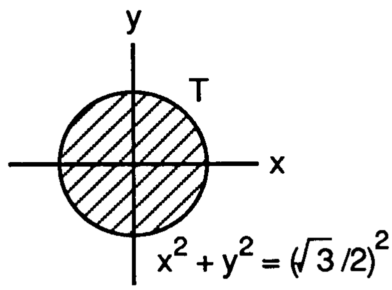
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{3}2\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right) = 4$$

3.3 Calcular el área de la superficie determinada por la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

Parametrización de S: $\quad z = f(x, y) = +\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$





Proyección de la curva intersección de ambas esferas:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \end{array}\right\} \qquad z^2-(z-1)^2=1 \qquad z=\frac{1}{2}$$

La curva intersección está contenida en el plano $z = 1/2$, por lo tanto, su proyección en el plano xy será:

$$x^2+y^2=(\sqrt{3}/2)^2 \qquad \text{que es la frontera de T.}$$

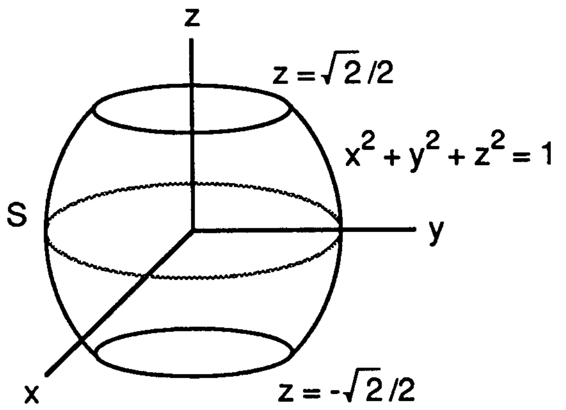
$$\text{Area (S)} = \iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2+(\partial f/\partial y)^2+1}\; dx\,dy = \iint_T \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\,dy$$

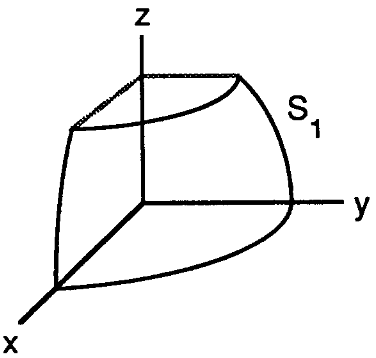
$$\text{En polares} \quad \left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\} \; J(r,\theta)=r, \; \text{T se describe como:} \quad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{3}/2 \end{array}$$

$$\text{Area (S)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\, dr\,d\theta = 2\pi\left[-\sqrt{1-r^2}\,\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \pi$$

3.4 Calcular el área de las siguientes superficies:

(a) porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ comprendida entre los planos $z=\sqrt{2}/2$ y $z=-\sqrt{2}/2$.





Por la simetría de la figura: Area (S) = 8 Area (S_1)

Parametrización de S_1: $z = f(x,y) = +\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

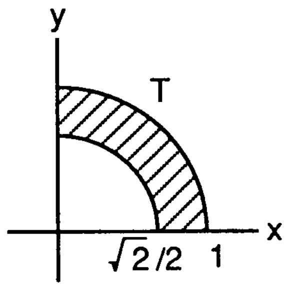
$$\text{Area}(S_1) = \iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}\ dx\,dy =$$

$$= \iint_T \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\ dx\,dy$$

Determinación de T:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{aligned}\right\} \quad x^2+y^2=1$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\sqrt{2}/2 \end{aligned}\right\} \quad x^2+y^2=(\sqrt{2}/2)^2$$

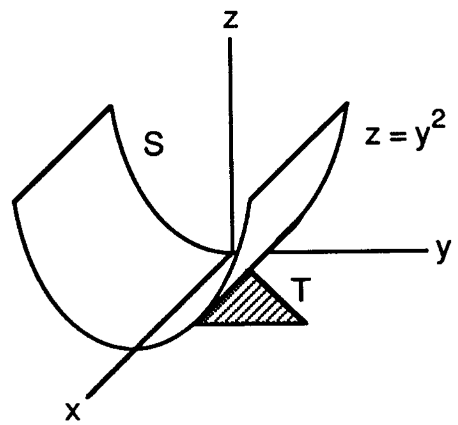


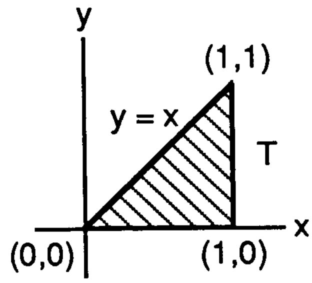
En polares $\left.\begin{aligned} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}\right\}$ $J(r,\theta) = r$, T se describe como: $\begin{aligned} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ \sqrt{2}/2 \le r \le 1 \end{aligned}$

$$\text{Area}(S_1) = \int_0^{\pi/2}\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\ dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\sqrt{1-r^2}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

$$\text{Area}(S) = 2\sqrt{2}\,\pi$$

(b) porción del cilindro parabólico $z = y^2$ sobre el triángulo de vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.





$$T: \begin{array}{l} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{array}$$

Parametrización de S: $z = f(x, y) = y^2 ; \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$\text{Area (S)} = \iint_T \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + 1}\ dx\,dy = \int_0^1 \int_y^1 \sqrt{4y^2 + 1}\ dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1}\ (1 - y)\,dy = \int_0^1 \left(2\sqrt{y^2 + 1/4} - 2y\sqrt{y^2 + 1/4} \right) dy =$$

$$= \left[y\sqrt{y^2 + 1/4} + \frac{1}{4} \ln \left(y + \sqrt{y^2 + 1/4} \right) - \frac{2}{3} \left(y^2 + 1/4 \right)^{3/2} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{12} \left[1 + \sqrt{5} + 3 \ln (2 + \sqrt{5}) \right]$$

(c) porción del paraboloide hiperbólico $z = xy$ interior al cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$.

Parametrización de S: $z = f(x, y) = x\,y \quad$ para $x^2 + y^2 \le 4$

$$\partial f / \partial x = y \qquad \partial f / \partial y = x$$

$$\text{Area (S)} = \iint_T \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + 1}\ dx\,dy = \iint_T \sqrt{y^2 + x^2 + 1}\ dx\,dy$$

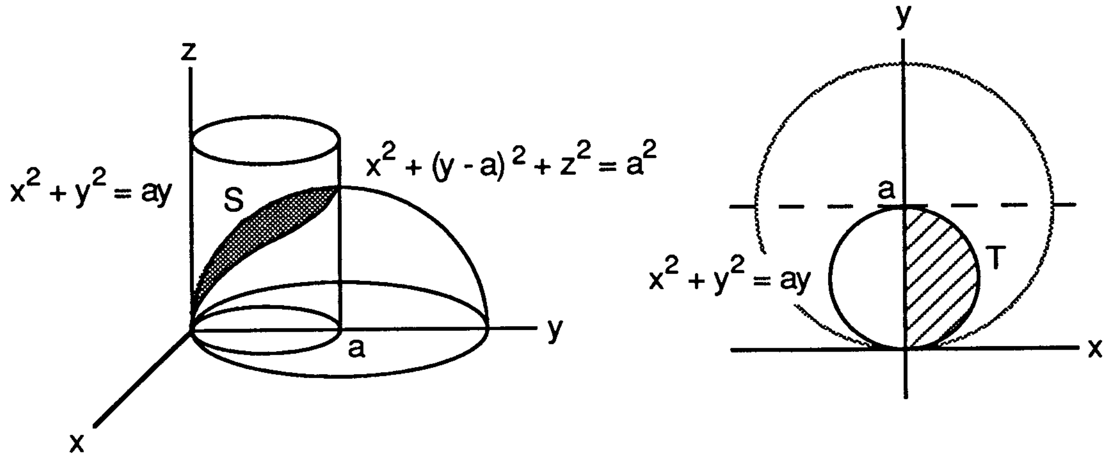
Efectuando un cambio a coordenadas polares $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\}$ $J(r,\theta) = r$

el dominio de parámetros T: $x^2 + y^2 \le 4$ se describe como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \end{array}$

$$\text{Area (S)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \sqrt{r^2+1}\; r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{3}(r^2+1)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$$

3.5 Calcular el área de la porción de semiesfera $x^2 + (y-a)^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = ay$.

Por la simetría de la figura, consideraremos S_1 como la mitad de la superficie S que se proyecta en el primer cuadrante del plano xy.



Parametrización de S_1: $z = f(x,y) = +\sqrt{a^2 - x^2 - (y-a)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - (y-a)^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(y-a)}{\sqrt{a^2 - x^2 - (y-a)^2}}$$

$$\text{Area (S)} = 2\iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}\; dx\,dy =$$

$$= 2\iint_T \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - (y-a)^2}}\, dx\,dy$$

Las fronteras de T son, por un lado, la circunferencia $x^2 + y^2 = ay$ que completando cuadrados es:

$$x^2 + (y - a/2)^2 = (a/2)^2$$

y, por otro lado, el eje OY cuya ecuación es: $x = 0$

Por la forma del integrando tomamos coordenadas polares centradas en el punto (0, a):

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = a + r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\} \quad J(r,\theta) = r$$

Las fronteras de T se transforman en:

$$x^2 + y^2 = ay \;\rightarrow\; r = -a\,\text{sen}\,\theta\,; \qquad x = 0 \;\rightarrow\; \theta = 3\pi/2$$

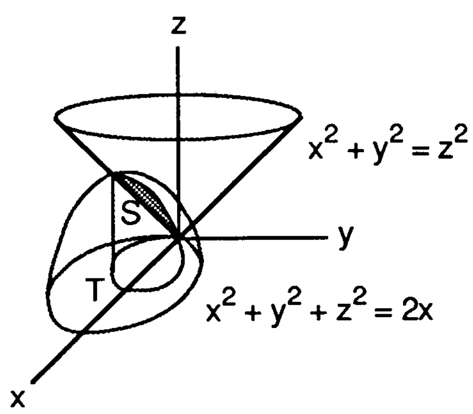
por lo que T se describe como: $\begin{array}{c} 3\pi/2 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le -a\,\text{sen}\,\theta \end{array}$

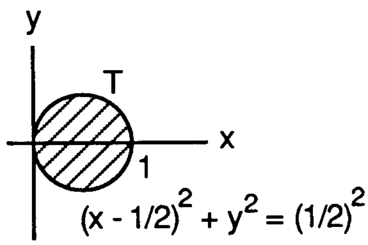
$$\text{Area (S)} = 2\int_{3\pi/2}^{2\pi}\int_0^{-a\,\text{sen}\,\theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta = -2a\int_{3\pi/2}^{2\pi}\left[\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^{-a\,\text{sen}\,\theta} =$$

$$= -2a^2\int_{3\pi/2}^{2\pi} (\cos\theta - 1)\, d\theta = 2a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

3.6 Calcular el área de las siguientes superficies:

(a) porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ situada por encima del plano $z = 0$ y limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$.





Parametrización de S: $z = f(x, y) = +\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{Area}(S) = \iint_T \sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + 1}\ dx\,dy = \iint_T \sqrt{2}\ dx\,dy$$

La frontera de T resulta de la proyección de la curva intersección del cono y de la esfera:

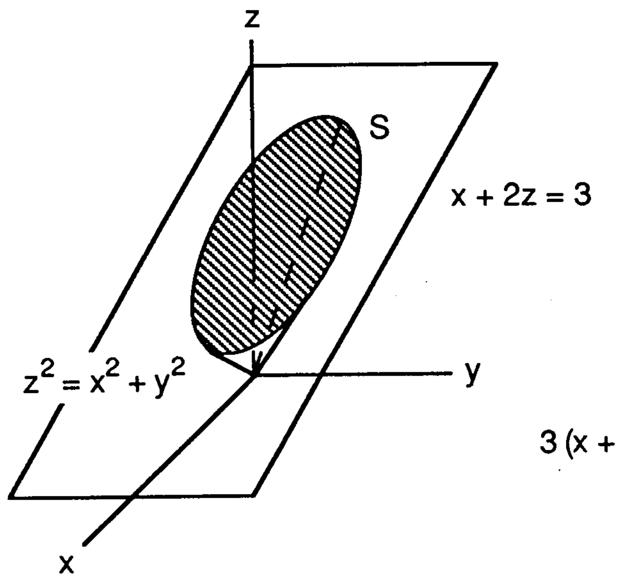
$$\left.\begin{array}{l} z^2 = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2x \end{array}\right\} \quad x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2x \qquad x^2 + y^2 = x$$

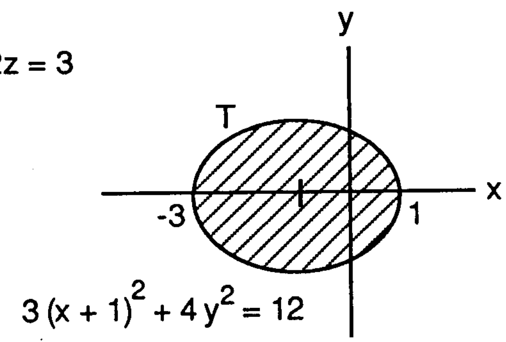
$$(x - 1/2)^2 + y^2 = (1/2)^2$$

circunferencia de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$. Entonces:

$$\text{Area}(S) = \sqrt{2} \iint_T 1\ dx\,dy = \sqrt{2}\ \text{Area}(T) = \sqrt{2}\ \pi\,(1/2)^2 = \frac{\sqrt{2}\ \pi}{4}$$

(b) porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ situada entre los planos $x + 2z = 3$ y $z = 0$.





Parametrización de S: $z = f(x,y) = +\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\text{Area (S)} = \iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}\ dx\,dy = \iint_T \sqrt{2}\ dx\,dy$$

La frontera de T es la proyección de la curva intersección del cono con el plano:

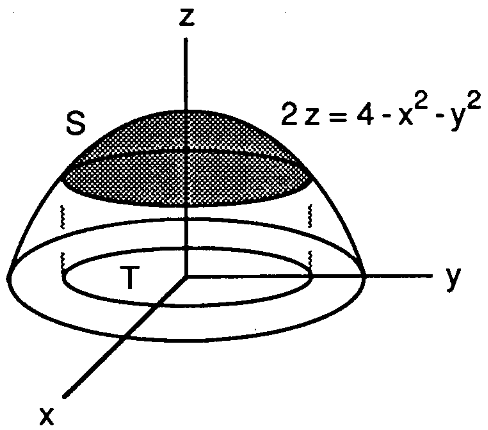
$$\left.\begin{array}{l} z^2 = x^2+y^2 \\ x+2z=3 \end{array}\right\} \quad z = \frac{3-x}{2}\ ; \quad \left[\frac{3-x}{2}\right]^2 = x^2+y^2 \qquad 3x^2+6x+4y^2=9$$

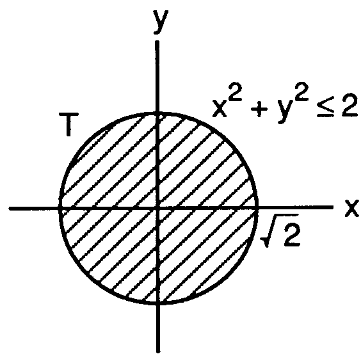
$$3(x+1)^2 + 4y^2 = 12 \qquad \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

elipse de semiejes 2, $\sqrt{3}$.

$$\text{Area (S)} = \sqrt{2}\iint_T 1\ dx\,dy = \sqrt{2}\ \text{Area (T)} = \sqrt{2}\ 2\sqrt{3}\ \pi = 2\sqrt{6}\ \pi$$

(c) porción del paraboloide $2z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el disco de centro (0, 0) y radio $\sqrt{2}$.





Parametrización de S: $z = f(x,y) = 2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

$$\partial f/\partial x = -x \qquad \partial f/\partial y = -y$$

$$\text{Area (S)} = \iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}\; dx\,dy = \iint_T \sqrt{x^2+y^2+1}\; dx\,dy$$

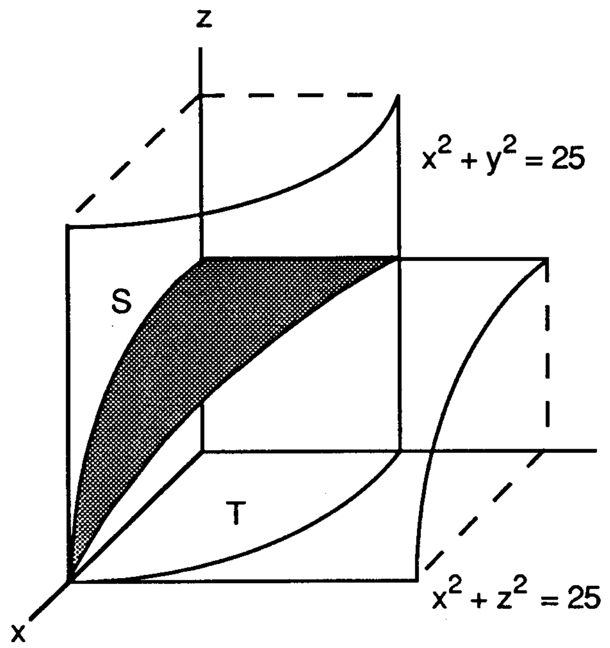
En coordenadas polares $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $J(r,\theta) = r$, el recinto T:

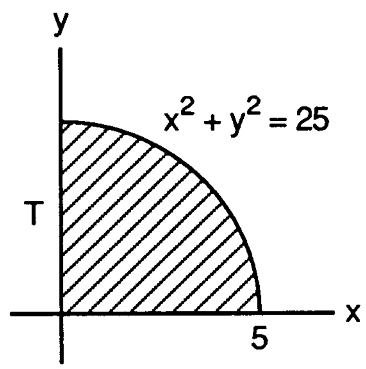
$x^2 + y^2 \le 2$ se expresa como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \end{array}$

$$\text{Area (S)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{r^2+1}\; r\,dr\,d\theta = 2\pi\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(r^2+1)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}\,(3\sqrt{3} - 1)$$

(d) porción del cilindro $z^2 + x^2 = 25$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 25$.

El dibujo representa la octava parte de la superficie cuya área queremos calcular, concretamente la que corresponde al primer octante del espacio xyz.





Parametrización de la porción de S: $z = f(x,y) = +\sqrt{25 - x^2}$

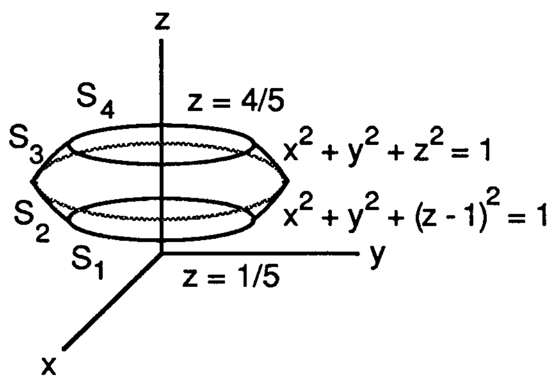
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\text{Area (S)} = 8\iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}\; dx\,dy = 8\iint_T \frac{5}{\sqrt{25 - x^2}}\, dx\,dy$$

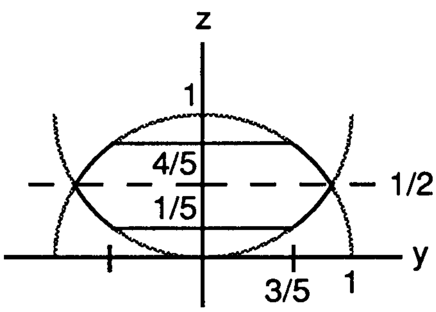
Descripción de T: $\quad 0 \le x \le 5$, $\quad 0 \le y \le \sqrt{25 - x^2}$

$$\text{Area (S)} = 40 \int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}\, dy\,dx = 40 \int_0^5 dx = 200$$

3.7 Calcular el área de la superficie del recinto limitado por los planos $z = 1/5$, $z = 4/5$ y las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.



En sección:



Este recinto está limitado por cuatro fronteras:

S_1: Disco sobre el plano $z = 1/5$ limitado por $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$

Proyección en el plano xy: $\quad x^2 + y^2 = (3/5)^2$

S_2: Porción de esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ limitada por $z = 1/5$ y por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Proyección de las curvas intersección en el plano xy:

$$x^2 + y^2 = (3/5)^2 \qquad\qquad x^2 + y^2 = (\sqrt{3}/2)^2$$

S_3: Porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ limitada por $z = 4/5$ y por la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$

Proyección de las curvas intersección en el plano xy:

$$x^2 + y^2 = (3/5)^2 \qquad\qquad x^2 + y^2 = (\sqrt{3}/2)^2$$

S_4: Disco sobre el plano $z = 4/5$ limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Proyección en el plano xy: $x^2 + y^2 = (3/5)^2$

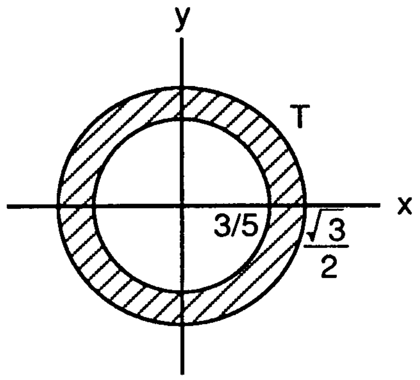
Las áreas de las superficies S_1 y S_4 son iguales, así como las de las superficies S_2 y S_3; basta observar su simetría respecto al plano $z = 1/2$.

$$\text{Area}(S_1) = \text{Area}(S_4) = \pi\,(3/5)^2 = \frac{9\pi}{25}$$

Cálculo del área de S_3:

Parametrización: $z = f(x, y) = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$



En polares: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $J(r, \theta) = r$

Descripción de T: $\begin{array}{c} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 3/5 \le r \le \sqrt{3}/2 \end{array}$

$$\text{Area}(S_3) = \iint_T \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}\; dx\,dy = \iint_T \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{3/5}^{\sqrt{3}/2} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}\, dr\,d\theta = 2\pi \left[-\sqrt{1 - r^2}\, \right]_{3/5}^{\sqrt{3}/2} = \frac{3\pi}{5}$$

$$\text{Area}(S) = \sum_{i=1}^{4} \text{Area}(S_i) = \frac{9\pi}{25} + \frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} + \frac{9\pi}{25} = \frac{48}{25}\,\pi$$

3.8 Calcular las integrales de superficie de los campos escalares F sobre las superficies S indicadas:

(a) $F(x, y, z) = z^2$ $\qquad$ $S \equiv$ casquete de $z = 1/2\,(x^2 + y^2)$ para $0 \leq z \leq 1$.

La integral de superficie de un campo escalar F viene dada por:

$$\iint_S F\, dS = \iint_T F(r(u,v))\ \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\|\ du\, dv$$

siendo T el dominio de los parámetros que describen la superficie S.

Si la parametrización de S viene dada por $r(x, y)$ en la forma:

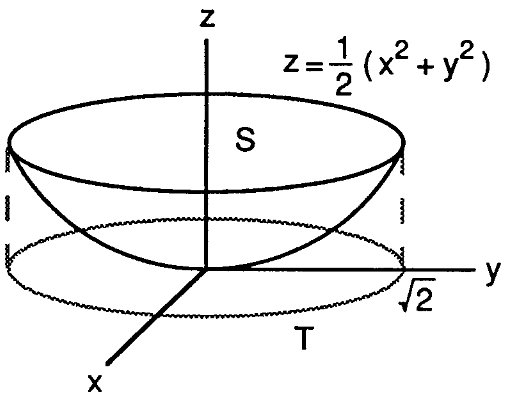
$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{array}\right\} \quad (x, y) \in T,$$ la fórmula anterior se expresa como:

$$\iint_S F\, dS = \iint_T F(x,y)\ \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} \right\|\ dx\, dy$$

siendo

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \partial f/\partial x \\ 0 & 1 & \partial f/\partial y \end{vmatrix} \right\| = \sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + 1}$$

Este es el caso que nos ocupa en este ejercicio.



Parametrización de S:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y \qquad \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

Por lo tanto:

$$\iint_S F\, dS = \iint_T \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right]^2 \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\ \ dx\, dy$$

El dominio de parámetros T es la proyección sobre el plano xy de la superficie S y su frontera resulta ser la proyección de la curva intersección del paraboloide con el plano $z = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ z = 1 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = (\sqrt{2})^2$$

Efectuando en la integral un cambio a polares: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\}$ $J(r,\theta) = r$

el recinto T se expresa como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \end{array}$

$$\iint_S F\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{4} r^4 \sqrt{r^2+1}\; r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}} r^5\sqrt{r^2+1}\; dr =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} r = \operatorname{tg} t \\ dr = \dfrac{1}{\cos^2 t}\, dt \end{array}\right\} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \operatorname{tg}^5 t\,\sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1}\;\frac{1}{\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sen}^5 t}{\cos^8 t}\, dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} \frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^8 t}\operatorname{sen} t\; dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\operatorname{arctg}\sqrt{2}} (\cos^{-8} t - 2\cos^{-6} t + \cos^{-4} t)\operatorname{sen} t\; dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{7}\cos^{-7}(\operatorname{arctg}\sqrt{2}) - \frac{2}{5}\cos^{-5}(\operatorname{arctg}\sqrt{2}) + \frac{1}{3}\cos^{-3}(\operatorname{arctg}\sqrt{2}) - \frac{8}{105}\right] =$$

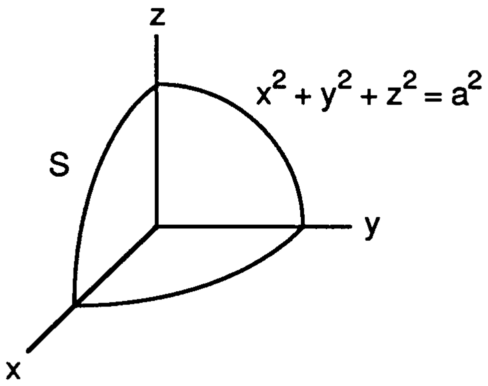
$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{44}{35}\sqrt{3} - \frac{8}{105}\right) \qquad \text{ya que } \cos(\operatorname{arctg}\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

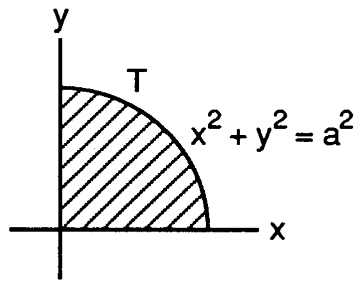
(b) $F(x, y, z) = xy$ $\qquad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ en el primer octante.

Parametrización de S: $\quad z = f(x, y) = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$





Por lo tanto: $$\iint_S F\, dS = \iint_T x\, y \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

El recinto T es la proyección en el plano xy de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (primer octante), es decir:

$$x^2 + y^2 \leq a^2 \qquad x, y \geq 0$$

En polares: $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $J(r, \theta) = r$, T se describe como: $\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq r \leq a \end{array}$

$$\iint_S F\, dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^a r^2 \cos\theta\, \mathrm{sen}\,\theta \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^a \frac{a\, r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr = \left\{ \begin{array}{c} r = a\,\mathrm{sen}\,t \\ dr = a\cos t\, dt \end{array} \right\} =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{sen}^2\,\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{a^4\, \mathrm{sen}^3\, t}{a\cos t}\, a\cos t\, dt = \frac{1}{2}\, a^4 \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^3\, t\, dt =$$

$$= \frac{a^4}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)\, \mathrm{sen}\, t\, dt = \frac{-a^4}{2} \left[\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{a^4}{3}$$

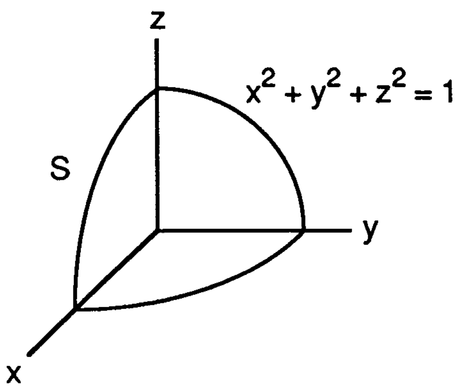
(c) $F(x, y, z) = x^2y^2z^2 \quad S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

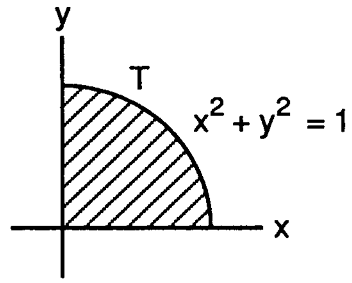
Esta integral de superficie se extiende a la esfera de radio unidad centrada en el origen de coordenadas.

Dada la simetría de la figura y del campo $F(x, y, z) = x^2y^2z^2$ respecto al origen de coordenadas:

$$(x, y, z) \leftrightarrow (-x, -y, -z)$$

podemos extender el cálculo sólo al primer octante de la esfera, y luego multiplicar el resultado por ocho.





Parametrización de S: $z = f(x, y) = +\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$8 \iint_S F\, dS = 8 \iint_T x^2 y^2 (1-x^2-y^2) \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy$$

En coordenadas polares T se describe: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le r \le 1 \end{array}$

$$8 \iint_S F\, dS = 8 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cos^2\theta\; r^2 \operatorname{sen}^2\theta\; (1-r^2) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\; r\, dr\, d\theta =$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta\; d\theta \int_0^1 r^5 \sqrt{1-r^2}\; dr = \left\{ \begin{array}{l} r = \operatorname{sen} t \\ dr = \cos t\, dt \end{array} \right\} =$$

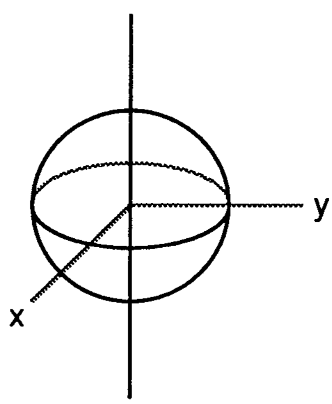
$$= 8 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \, \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^5 t \, \cos t \, \cos t \, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\theta) \, d\theta \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)^2 \cos^2 t \, \mathrm{sen}\, t \, dt =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4\theta}{2} \right) d\theta \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t + 2\cos^4 t - \cos^6 t)(-\mathrm{sen}\, t) \, dt =$$

$$= \left[\theta - \frac{\mathrm{sen}\, 4\theta}{4} \right]_0^{\pi/2} \left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{2\cos^5 t}{5} - \frac{\cos^7 t}{7} \right]_0^{\pi/2} = \frac{4\pi}{105}$$

3.9 Probar que el momento de inercia de un recipiente esférico hueco alrededor de uno de sus diámetros es $2/3 \; M R^2$, siendo M su masa y R el radio, suponiendo que su densidad es constante.



Momento de inercia respecto a una recta r:

$$I_r = \iint_S d^2(x, y, z) \, \mu(x, y, z) \, dS$$

Al tomar como diámetro el eje OZ:

$$d^2(x, y, z) = x^2 + y^2$$

Como se trata de un recipiente homogéneo $\mu(x, y, z) = k$.

Así pues, hemos de calcular:

$$I_r = \iint_S k \, (x^2 + y^2) \, dS$$

Parametrización de la esfera: $(x, y, z) = r(u, v)$

$$\left.\begin{array}{l} x = R \,\mathrm{sen}\, u \, \cos v \\ y = R \,\mathrm{sen}\, u \, \mathrm{sen}\, v \\ z = R \cos u \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 < u < \pi \\ 0 \le v \le 2\pi \end{array}$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| = R^2 \,\mathrm{sen}\, u$$

$$I_r = \iint_S k\,(x^2+y^2)\,dS = \iint_T k\left([x(u,v)]^2 + [y(u,v)]^2\right) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} k\,\left(R^2 \operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + R^2 \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v\right) R^2 \operatorname{sen} u\;du\,dv =$$

$$= k R^4 \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 u\;du = 2 k \pi R^4 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 u)\operatorname{sen} u\;du =$$

$$= 2 k \pi R^4 \left[-\cos u + \frac{1}{3}\cos^3 u \right]_0^{\pi} = \frac{8}{3} k \pi R^4$$

Pero la masa total M del recipiente esférico homogéneo es:

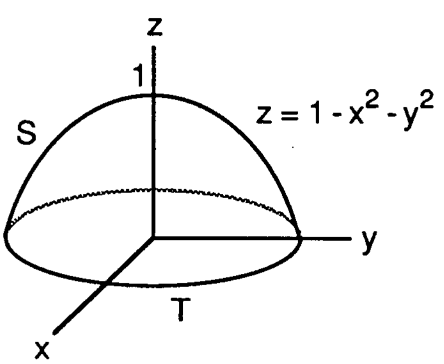
$$M = \iint_S \mu(x,y,z)\;dS = \iint_S k\,dS = k \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen} u\;du\,dv = 4 k \pi R^2$$

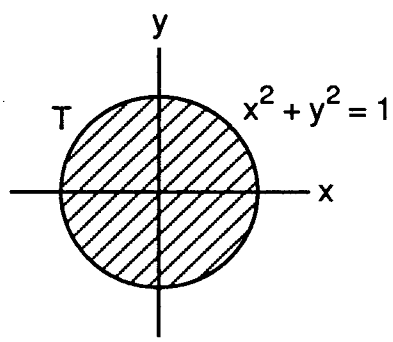
Sustituyendo M en la expresión de I_r nos queda:

$$I_r = \frac{8}{3} k \pi R^4 = \frac{2}{3}\, 4 k \pi R^2\; R^2 = \frac{2}{3} M R^2$$

3.10 Calcular las integrales de superficie de los campos escalares F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x,y,z) = z$ $\qquad$ $S \equiv z = 1 - x^2 - y^2,\; z \geq 0.$





Parametrización de S: $\quad z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \qquad \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

$$\iint_S F\, dS = \iint_S z\, dS = \iint_T (1 - x^2 - y^2)\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\; dx\, dy$$

En coordenadas polares $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\}$ $J(r, \theta) = r$, el recinto T:

$x^2 + y^2 \le 1$ se describe como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{array}$

$$\iint_S F\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)\sqrt{4r^2 + 1}\; r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r - r^3)\sqrt{4r^2 + 1}\; dr = 2\pi \int_0^1 \left(r\sqrt{4r^2 + 1} - r^3\sqrt{4r^2 + 1}\right) dr$$

Calculamos por separado cada integral:

$$\int_0^1 r\sqrt{4r^2 + 1}\; dr = \frac{1}{8}\left[\frac{(4r^2 + 1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\,(5\sqrt{5} - 1)$$

$$\int_0^1 r^3\sqrt{4r^2 + 1}\; dr = \left[\frac{1}{12}\, r^2 (4r^2 + 1)^{3/2}\right]_0^1 - \frac{1}{6}\int_0^1 r\,(4r^2 + 1)^{3/2}\, dr =$$

$$= \frac{1}{12}\, 5\sqrt{5} - \frac{1}{48}\left[\frac{(4r^2 + 1)^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5}}{12} - \frac{1}{120}\,(25\sqrt{5} - 1)$$

Finalmente:

$$\iint_S F\, dS = 2\pi\left[\frac{1}{12}\,(5\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{12}\, 5\sqrt{5} + \frac{1}{120}\,(25\sqrt{5} - 1)\right] = \left(5\sqrt{5} - \frac{11}{5}\right)\frac{\pi}{12}$$

(b) $F(x, y, z) = x^2yz$ $\qquad$ $S \equiv$ casquete más pequeño en que el plano $y + z = 1$ divide a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

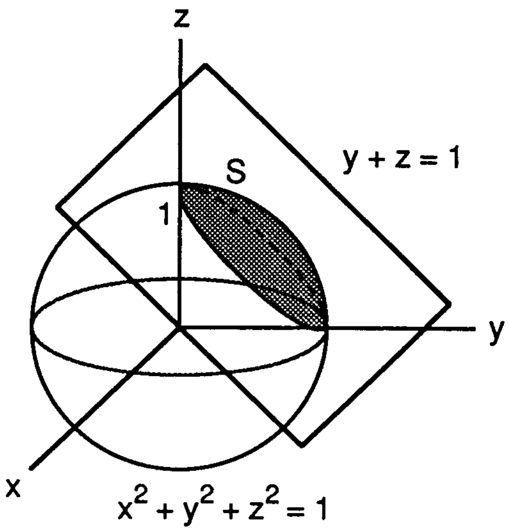
Parametrización de S: $z = f(x, y) = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

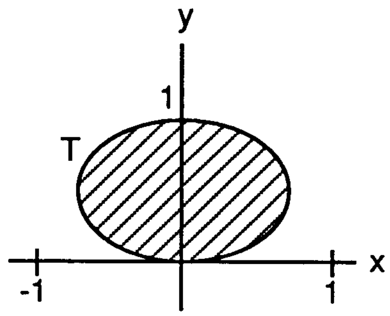
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\iint_S F\,dS = \iint_S x^2 y\, z\, dS = \iint_T x^2 y \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

$$\iint_S F\,dS = \iint_T x^2 y\; dx\, dy$$





Determinación del dominio de parámetros T. La frontera de T será la proyección sobre el plano xy de la curva intersección de la esfera y el plano.

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad x^2 + y^2 + (1 - y)^2 = 1 \qquad x^2 + 2y^2 - 2y = 0$$

completando cuadrados: $$\frac{x^2}{(\sqrt{2}/2)^2} + \frac{(y - 1/2)^2}{(1/2)^2} = 1$$

elipse de centro $(0, 1/2)$ y semiejes $\sqrt{2}/2$ y $1/2$

Efectuando un cambio a coordenadas elípticas descentradas:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, r\cos\theta \\ y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\, r \,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\} \qquad J(r,\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}\, r = \frac{\sqrt{2}}{4}\, r$$

el recinto T se describe como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{array}$

Por lo tanto:

$$\iint_S F\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\, r\cos\theta\right)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, r\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \frac{\sqrt{2}}{4}\, r\, dr\, d\theta =$$

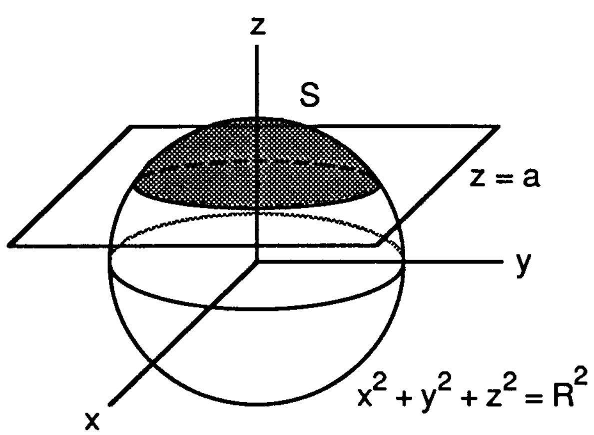
$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\,(1 + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, dr\, d\theta =$$

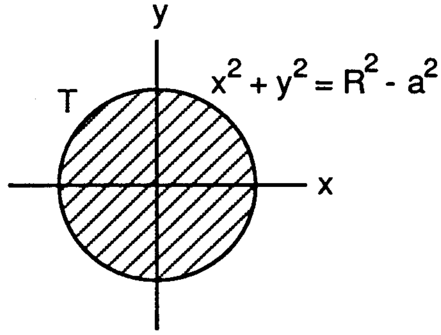
$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\int_0^{2\pi}\left[\cos^2\theta\,\frac{1}{4}\, r^4 + \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{1}{5}\, r^5\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\cos^2\theta + \frac{1}{5}\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{16}\left[\frac{1}{8}\,\theta + \frac{1}{16}\,\mathrm{sen}\,2\theta - \frac{1}{15}\cos^3\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{64}\,\pi$$

3.11 Calcular las coordenadas del centro de masas de un casquete esférico homogéneo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.





Supondremos que el casquete esférico viene determinado sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ desde su parte superior hasta la intersección con el plano $z = a$, $0 \le a \le R$.

Parametrización del casquete S: $z = f(x, y) = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} \right\| = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

El dominio de parámetros T tiene por frontera la proyección de la curva intersección del plano y de la esfera:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ z = a \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = R^2 - a^2$$

Al ser el casquete esférico homogéneo su densidad $\mu(x, y, z)$ es constante.

$$\text{Masa (S)} = \iint_S \mu(x, y, z)\, dS = \iint_S k\, dS = k \iint_T \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

Tomando coordenadas polares, T se describe como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \sqrt{R^2 - a^2} \end{array}$

$$\text{Masa (S)} = kR \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2 - a^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi kR \int_0^{\sqrt{R^2 - a^2}} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr =$$

$$= -2\pi kR \left[\sqrt{R^2 - r^2} \right]_0^{\sqrt{R^2 - a^2}} = 2\pi kR\,(R - a)$$

Buscamos ahora las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centro de masas.

Por simetría $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\bar{z} = \frac{1}{\text{Masa (S)}} \iint_S z\, \mu(x, y, z)\, dS = \frac{1}{\text{Masa (S)}}\, k \iint_S z\, dS$$

Nos limitaremos a calcular esta última integral con la misma parametrización de S:

$$\iint_S z\, dS = \iint_T \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\ \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = R \iint_T 1\ dx\, dy =$$

$$= R\ \text{Area}\,(T) = R\,\pi\,(R^2 - a^2)$$

ya que T es un círculo de radio $\sqrt{R^2 - a^2}$

Sustituyendo en la expresión de $\bar{z}$:

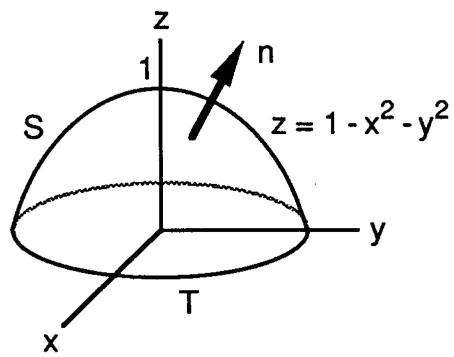
$$\bar{z} = \frac{1}{\text{Masa (S)}}\ k \iint_S z\, dS = \frac{1}{2\pi k R\,(R - a)}\ R\pi\,(R^2 - a^2) = \frac{R + a}{2}$$

siendo, por lo tanto, el centro de masas el punto: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{R + a}{2})$

3.12 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,(y, -y, 1)$ $\qquad S \equiv z = 1 - x^2 - y^2,\ 0 \leq z \leq 1$

Consideramos la siguiente parametrización de la superficie S:



$$\left.\begin{array}{l} x = v \cos u \\ y = v \,\text{sen}\, u \\ z = 1 - v^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq 1 \end{array}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (-v \,\text{sen}\, u\,,\, v \cos u\,,\, 0) \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = (\cos u\,,\, \text{sen}\, u\,,\, -2v)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (-2v^2 \cos u\,,\, -2v^2 \,\text{sen}\, u\,,\, -v)$$

El vector normal que se obtiene corresponde a la dirección descendente (3ª componente negativa); tomamos como vector normal el ascendente, al tratarse de una superficie abierta. Es decir:

$$(2v^2\cos u\ ,\ 2v^2 \operatorname{sen} u\ ,\ v)$$

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{v}(v \operatorname{sen} u, - v \operatorname{sen} u, 1) \cdot (2v^2\cos u, 2v^2 \operatorname{sen} u, v)\, dv\, du =$$

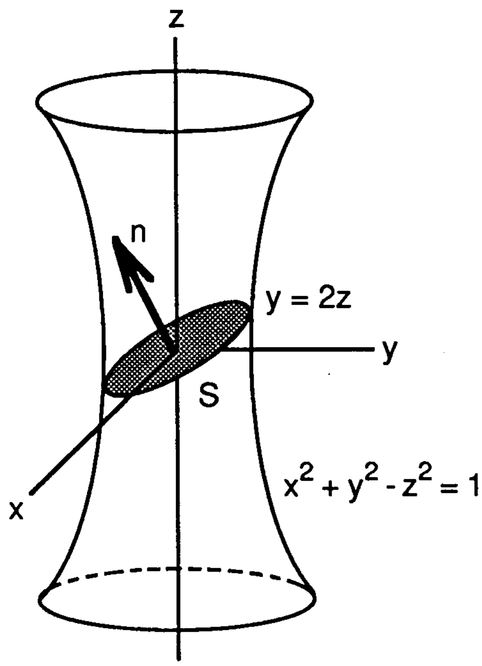
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [\, 2v^2 (\operatorname{sen} u \cos u - \operatorname{sen}^2 u) + 1\,]\, dv\, du =$$

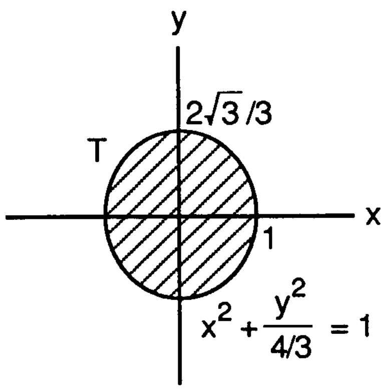
$$= \int_0^1 2v^2\, dv \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} u \cos u - \operatorname{sen}^2 u)\, du + \int_0^{2\pi} du \int_0^1 dv =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 u - \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u \right]_0^{2\pi} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$$

(b) $F(x, y, z) = (\operatorname{sen} xyz\ ,\ z(x - y)\ ,\ x^2 + y^2)$

$S \equiv$ porción del plano $y = 2z$ limitado por el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.





Proyección de la curva intersección del plano $y = 2z$ y el hiperboloide sobre el plano coordenado xy:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ y = 2z \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 - (y/2)^2 = 1 \qquad x^2 + \frac{y^2}{4/3} = 1$$

elipse centrada en (0,0) y de semiejes 1, $2\sqrt{3}/3$

La parametrización mediante coordenadas elípticas del interior de la curva proyección (dominio T), induce la parametrización poco habitual de la porción de plano S interior al hiperboloide:

$$z = y/2 \;\rightarrow\; \left.\begin{array}{l} x = v \cos u \\ y = 2\sqrt{3}/3\, v \operatorname{sen} u \\ z = \sqrt{3}/3\, v \operatorname{sen} u \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 0 \le v \le 1 \\ 0 \le u \le 2\pi \end{array}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (- v \operatorname{sen} u \,,\, 2\sqrt{3}/3\, v \cos u \,,\, \sqrt{3}/3\, v \cos u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (\cos u \,,\, 2\sqrt{3}/3 \operatorname{sen} u \,,\, \sqrt{3}/3 \operatorname{sen} u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (0 \,,\, \sqrt{3}/3\, v \,,\, - 2\sqrt{3}/3\, v)$$

Tomamos como normal ascendente el opuesto del vector obtenido:

$$(0 \,,\, -\sqrt{3}/3\, v \,,\, 2\sqrt{3}/3\, v)$$

Entonces: $\displaystyle\iint_S F \cdot n \, dS =$

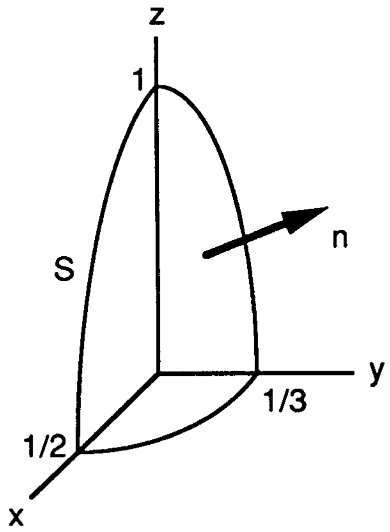
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (\operatorname{sen} (2/3\, v^3 \operatorname{sen}^2 u \cos u), \sqrt{3}/3\, v \operatorname{sen} u\, (v \cos u - 2\sqrt{3}/3\, v \operatorname{sen} u),$$

$$, v^2\cos^2 u + 4/3\, v^2 \operatorname{sen}^2 u) \cdot (0, - \sqrt{3}/3\, v, 2\sqrt{3}/3\, v)\, dv\, du =$$

$$= \int_0^1 v^3\, dv \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{3} \operatorname{sen} u \cos u + \frac{10\sqrt{3}}{9} \operatorname{sen}^2 u + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos^2 u \right) du = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$$

(c) $F(x, y, z) = (xz \,,\, yz \,,\, z^2)$

$S \equiv$ primer octante del elipsoide $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$.

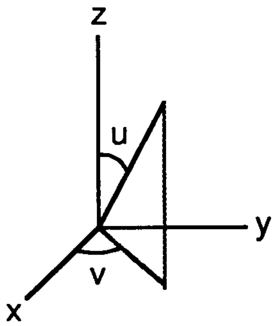


Elipsoide:

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{(1/3)^2} + \frac{z^2}{1^2} = 1$$

semiejes: 1/2, 1/3, 1



Parametrización del primer octante del elipsoide:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1/2 \ \mathrm{sen}\, u \ \cos v \\ y = 1/3 \ \mathrm{sen}\, u \ \mathrm{sen}\, v \\ z = \quad \cos u \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \le u \le \pi/2 \\ 0 \le v \le \pi/2 \end{array}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{1}{2} \cos u \cos v , \frac{1}{3} \cos u \ \mathrm{sen}\, v , - \mathrm{sen}\, u\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{-1}{2} \mathrm{sen}\, u \ \mathrm{sen}\, v , \frac{1}{3} \mathrm{sen}\, u \cos v , 0\right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{1}{3} \mathrm{sen}^2 u \cos v , \frac{1}{2} \mathrm{sen}^2 u \ \mathrm{sen}\, v , \frac{1}{6} \mathrm{sen}\, u \cos u\right)$$

que sirve como vector normal ascendente.

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} \mathrm{sen}\, u \cos v \cos u, \ \frac{1}{3} \mathrm{sen}\, u \ \mathrm{sen}\, v \cos u, \ \cos^2 u\right) \cdot$$

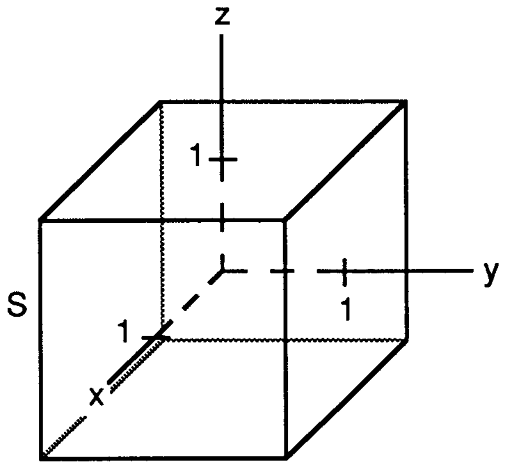
$$\cdot \left(\frac{1}{3} \mathrm{sen}^2 u \cos v , \frac{1}{2} \mathrm{sen}^2 u \ \mathrm{sen}\, v , \frac{1}{6} \mathrm{sen}\, u \cos u\right) dv \, du =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{6} \mathrm{sen}^3 u \cos u + \frac{1}{6} \cos^3 u \ \mathrm{sen}\, u\right) dv \, du =$$

$$= \frac{1}{6}\,\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}^4 u - \frac{1}{4}\cos^4 u\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{24}$$

3.13 Calcular las integrales de superficie de los campos vectoriales F sobre las superficies S que se indican:

(a) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ $\quad$ $S \equiv$ cubo con centro el origen y aristas de longitud 2.



$S = \partial\,[-1, 1]^3$

Nos encontramos ante una superficie cerrada que es unión de seis caras superficies regulares. Como superficie cerrada que es debemos tomar sobre cada una de sus caras el vector normal exterior.

Actuamos de forma sistemática para la parametrización de cada cara y para la evaluación de la integral sobre la misma:

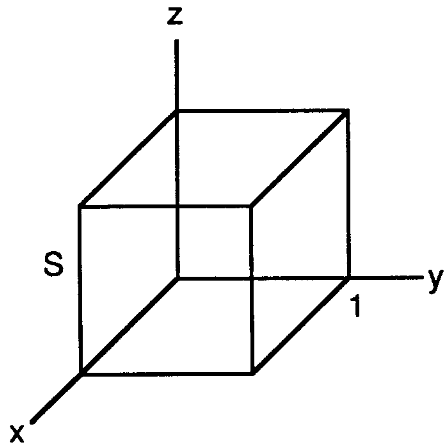
Cara (Parametrización)	n	F · n	$\iint_S$ F · n dS
$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=y \\ z=z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} -1 \le y \le 1 \\ -1 \le z \le 1 \end{array}$	(1,0,0)	yz	$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} yz\,dy\,dz = 0$
$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=y \\ z=z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} -1 \le y \le 1 \\ -1 \le z \le 1 \end{array}$	(-1,0,0)	- yz	$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -yz\,dy\,dz = 0$
$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=1 \\ z=z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le z \le 1 \end{array}$	(0,1,0)	xz	$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xz\,dx\,dz = 0$
$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=-1 \\ z=z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le z \le 1 \end{array}$	(0,-1,0)	- xz	$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -xz\,dx\,dz = 0$
$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{array}$	(0,0,1)	xy	$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy\,dx\,dy = 0$
$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=-1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{array}$	(0,0,-1)	- xy	$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -xy\,dx\,dy = 0$

$\iint_S F \cdot n\, dS$ es la suma de los valores de la última columna:

$$\iint_S F \cdot n\, dS = 0$$

Observación: Esta integral podría calcularse mediante un único proceso de integración empleando el teorema de la divergencia; véase problema 4.22 (a).

(b) F (x, y, z) = (x - y, y - z, x - y) S ≡ frontera de $[0, 1]^3$.



$S = \partial\,[0,1]^3$

Como en el apartado anterior efectuaremos la integral sobre cada cara y recogeremos los resultados en la siguiente tabla:

Cara (Parametrización)	n	F · n	$\iint_S F\cdot n\, dS$
$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=y \\ z=z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0\le y\le 1 \\ 0\le z\le 1 \end{array}$	(1,0,0)	1 - y	$\int_0^1\int_0^1 (1-y)\,dy\,dz = \frac{1}{2}$
$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=y \\ z=z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0\le y\le 1 \\ 0\le z\le 1 \end{array}$	(-1,0,0)	y	$\int_0^1\int_0^1 y\,dy\,dz = \frac{1}{2}$
$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=1 \\ z=z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ 0\le z\le 1 \end{array}$	(0,1,0)	1 - z	$\int_0^1\int_0^1 (1-z)\,dz\,dx = \frac{1}{2}$
$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=0 \\ z=z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ 0\le z\le 1 \end{array}$	(0,-1,0)	z	$\int_0^1\int_0^1 z\,dz\,dx = \frac{1}{2}$
$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{array}$	(0,0,1)	x - y	$\int_0^1\int_0^1 (x-y)\,dy\,dx = 0$
$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le 1 \end{array}$	(0,0,-1)	y - x	$\int_0^1\int_0^1 (y-x)\,dy\,dx = 0$
			$\iint_S F\cdot n\, dS = 2$

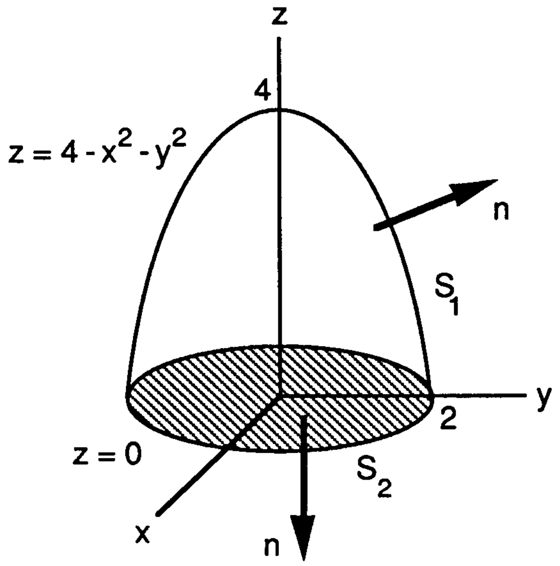
Observación: El teorema de la divergencia permite calcular de forma más ágil esta integral; véase problema 4.22 (b).

3.14 Calcular las siguientes integrales de superficie:

(a) $\iint_S (x + y)\, dy \wedge dz + (y + z)\, dz \wedge dx + (x + z)\, dx \wedge dy$

$S \equiv$ superficie del cuerpo limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.

Se trata de una superficie cerrada unión de dos superficies regulares.



$S = S_1 \cup S_2$

S_1 porción de paraboloide

S_2 disco en el plano $z = 0$

Parametrización de S_1:

$$\left.\begin{array}{l} x = v\cos u \\ y = v \operatorname{sen} u \\ z = 4 - v^2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le 2 \end{array}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (-v \operatorname{sen} u\, , v\cos u\, , 0) \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = (\cos u\, , \operatorname{sen} u\, , -2v)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (-2v^2\cos u\, , -2v^2 \operatorname{sen} u\, , -v)$$

Hemos de tomar el normal exterior que para S_1 es el ascendente; así pues, consideramos como normal:

$$(2v^2\cos u\, , 2v^2 \operatorname{sen} u\, , v)$$

$$\iint_{S_1} F \cdot n\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (v(\cos u + \operatorname{sen} u)\, , v \operatorname{sen} u + 4 - v^2, v\cos u + 4 - v^2) \cdot$$

$$\cdot\ (2v^2\cos u\, , 2v^2 \operatorname{sen} u\, , v)\, dv\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 [\, v^3(1 + 2 \text{ sen } u \cos u) + 8v^2 \text{sen } u - 2v^4 \text{sen } u + v^2 \cos u + 4v \,]\, dv\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (v^3 + 4v)\, dv\, du \;+\; 0 \;=\; 24\pi$$

Parametrización de S_2: $\left.\begin{array}{l} x = v \cos u \\ y = v \text{ sen } u \\ z = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le 2 \end{array}$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (\, - v \text{ sen } u \,,\, v \cos u \,,\, 0 \,) \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = (\, \cos u \,,\, \text{sen } u \,,\, 0 \,)$$

$\dfrac{\partial r}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial v} = (\, 0 \,,\, 0 \,,\, - v \,)$ que tiene el sentido exterior adecuado.

$$\iint_{S_2} F \cdot n \, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (\, v\,(\cos u + \text{sen } u),\;\; v \text{ sen } u,\;\; v \cos u \,) \cdot (\, 0, 0, - v \,)\, dv\, du =$$

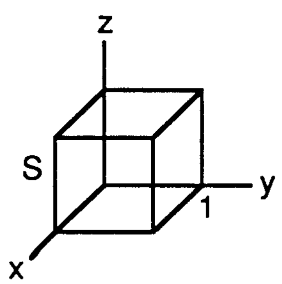
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 - v^2 \cos u \;\, dv\, du \;=\; \int_0^{2\pi} \cos u \, du \int_0^2 - v^2 \, dv \;=\; 0$$

Por lo tanto: $\displaystyle\iint_S F \cdot n\, dS \;=\; \iint_{S_1} F \cdot n\, dS \;+\; \iint_{S_2} F \cdot n\, dS \;=\; 24\pi$

(b) $\displaystyle\iint_S xy \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + y^2 \, dx \wedge dy$

$S \equiv$ superficie del cuerpo $0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1,\; 0 \le z \le 1.$

La superficie S es cerrada y viene determinada por la unión de seis superficies regulares que son las seis caras.



$S \;=\; \partial\, [\, 0, 1 \,]^3$

Cara (Parametrización)	n	F · n	$\iint_S F \cdot n \, dS$
$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=y \\ z=z \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{matrix}$	(1,0,0)	y	$\int_0^1\int_0^1 y \, dy \, dz = \frac{1}{2}$
$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=y \\ z=z \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{matrix}$	(-1,0,0)	0	$\int_0^1\int_0^1 0 \, dy \, dz = 0$
$\left.\begin{matrix} x=x \\ y=1 \\ z=z \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{matrix}$	(0,1,0)	1	$\int_0^1\int_0^1 1 \, dx \, dz = 1$
$\left.\begin{matrix} x=x \\ y=0 \\ z=z \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{matrix}$	(0,-1,0)	0	$\int_0^1\int_0^1 0 \, dx \, dz = 0$
$\left.\begin{matrix} x=x \\ y=y \\ z=1 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{matrix}$	(0,0,1)	y^2	$\int_0^1\int_0^1 y^2 \, dy \, dx = \frac{1}{3}$
$\left.\begin{matrix} x=x \\ y=y \\ z=0 \end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{matrix}$	(0,0,-1)	$-y^2$	$\int_0^1\int_0^1 -y^2 \, dy \, dx = -\frac{1}{3}$
			$\iint_S F \cdot n \, dS = \frac{3}{2}$

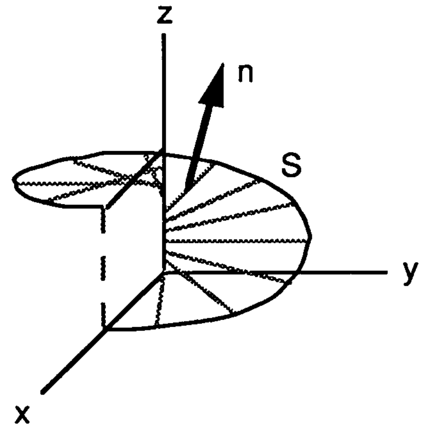
Observación: El cálculo de esta integral mediante el teorema de la divergencia se encuentra en el problema 4.22 (d).

(c) $\iint_S y \, dy \wedge dz + x \, dx \wedge dz + dx \wedge dy$

$S \equiv r(t, u) = (t \cos u, t \operatorname{sen} u, u), \quad 0 \le t \le 1, \; 0 \le u \le 2\pi$

El campo vectorial a integrar es $F(x, y, z) = (y, -x, 1)$.

El signo negativo de la segunda componente es consecuencia de que en la integral aparece $dx \wedge dz = - dz \wedge dx$.



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = t\cos u \\ y = t\,\text{sen}\,u \\ z = \;\; u \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \le t \le 1 \\ 0 \le u \le 2\pi \end{array}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = (\cos u\,,\, \text{sen}\,u\,,\, 0\,)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (\,-t\,\text{sen}\,u\,,\, t\cos u\,,\, 1\,)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} \wedge \frac{\partial r}{\partial u} = (\,\text{sen}\,u\,,\, -\cos u\,,\, t\,)$$

que es el normal ascendente ya que $0 \le t \le 1$.

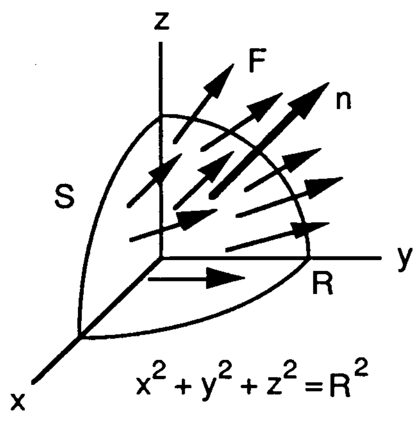
$$\iint_S F \cdot n\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (\,t\,\text{sen}\,u\,,\, -t\cos u\,,\, 1\,) \cdot (\,\text{sen}\,u\,,\, -\cos u\,,\, t\,)\, dt\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2t\, dt\, du = 2\pi$$

3.15 Calcular el flujo que atraviesa la superficie del primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en la dirección de la normal ascendente, para el campo $F(x, y, z) = (\,yz, xz, xy\,)$.

El flujo que atraviesa la superficie S es:

$$\iint_S F \cdot n\, dS$$



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\,\text{sen}\,u\cos v \\ y = R\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v \\ z = R\cos u \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \le u \le \pi/2 \\ 0 \le v \le \pi/2 \end{array}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (R \cos u \cos v , R \cos u \,\mathrm{sen}\, v , - R \,\mathrm{sen}\, u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (- R \,\mathrm{sen}\, u \,\mathrm{sen}\, v , R \,\mathrm{sen}\, u \cos v , 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (R^2 \mathrm{sen}^2 u \cos v , R^2 \mathrm{sen}^2 u \,\mathrm{sen}\, v , R^2 \mathrm{sen}\, u \cos u)$$

siendo éste el vector normal ascendente. Entonces:

$$\iint_S F \cdot n \, dS =$$

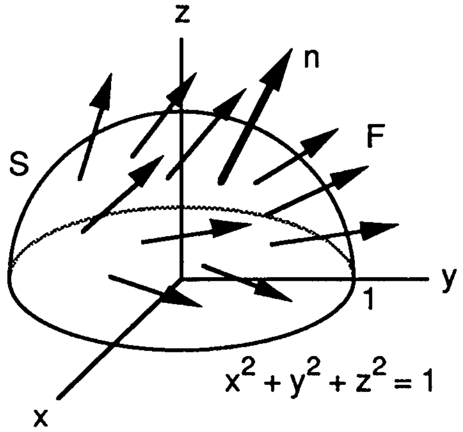
$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (R^2 \mathrm{sen}\, u \cos u \,\mathrm{sen}\, v, R^2 \mathrm{sen}\, u \cos u \cos v, R^2 \mathrm{sen}^2 u \,\mathrm{sen}\, v \cos v) \cdot$$

$$\cdot (R^2 \mathrm{sen}^2 u \cos v, R^2 \mathrm{sen}^2 u \,\mathrm{sen}\, v, R^2 \mathrm{sen}\, u \cos u) \, dv \, du =$$

$$= 3R^4 \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^3 u \cos u \, du \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\, v \cos v \, dv =$$

$$= 3R^4 \left[\frac{\mathrm{sen}^4 u}{4} \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\mathrm{sen}^2 v}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{8} R^4$$

3.16 El flujo de un fluido tiene el campo $F(x, y, z) = (x, - 2x - y, z)$ como vector densidad de flujo. Sea S el hemisferio superior ($z \geq 0$) de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Calcular la masa de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo en la dirección de la normal ascendente.



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = \mathrm{sen}\, u \cos v \\ y = \mathrm{sen}\, u \,\mathrm{sen}\, v \\ z = \cos u \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \leq u \leq \pi/2 \\ 0 \leq v \leq 2\pi \end{array}$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (\cos u \cos v\,,\ \cos u \operatorname{sen} v\,,\ -\operatorname{sen} u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\,,\ \operatorname{sen} u \cos v\,,\ 0)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (\operatorname{sen}^2 u \cos v\,,\ \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v\,,\ \operatorname{sen} u \cos u)$$

Este es el vector normal ascendente, pues tiene la 3ª componente positiva.

La masa de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo es el flujo del fluido, es decir:

$$\iint_S F \cdot n\, dS$$

En este caso:

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} u \cos v\,,\ -2 \operatorname{sen} u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\,,\ \cos u) \cdot$$

$$\cdot\, (\operatorname{sen}^2 u \cos v\,,\ \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v\,,\ \operatorname{sen} u \cos u)\, dv\, du =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}^3 u\,(\cos^2 v - 2 \operatorname{sen} v \cos v - \operatorname{sen}^2 v) + \operatorname{sen} u \cos^2 u]\, dv\, du =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 u\, du \int_0^{2\pi} (\cos 2v - \operatorname{sen} 2v)\, dv + 2\pi \left[\frac{-1}{3} \cos^3 u \right]_0^{\pi/2} = 0 + 2\pi \frac{1}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

3.17 Verificar el teorema de Stokes con el cálculo de las integrales de línea sobre las trayectorias C de los campos vectoriales F que se indican:

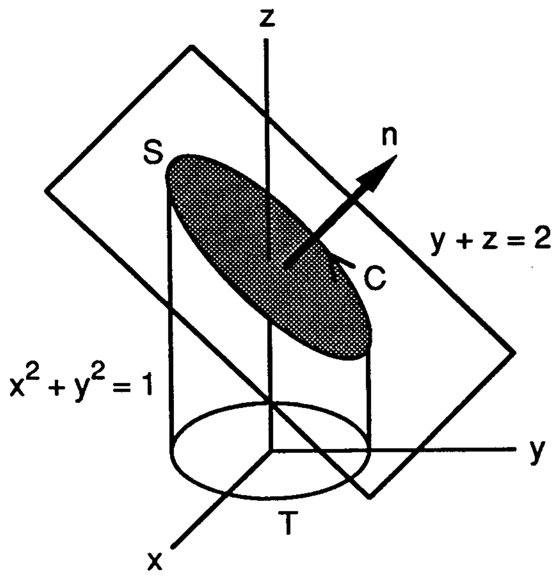
(a) $F(x, y, z) = (z, x, y)$

C curva intersección del plano $y + z = 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

El teorema de Stokes afirma que si S es una superficie regular cuya frontera es una curva C cerrada y simple, entonces:

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n\, dS$$

cumpliendo F las condiciones que en el enunciado del teorema se exigen.



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 2 - y \end{array}\right\} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 1, 1)$$

normal ascendente

Verificar el teorema supone comprobar la igualdad, para lo que procederemos así:

1º) Cálculo de la integral de superficie $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS$

$$F(x, y, z) = (z, x, y) \qquad \operatorname{rot} F = (1, 1, 1)$$

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \iint_T (1, 1, 1) \cdot (0, 1, 1) \, dx \, dy = \iint_T 2 \, dx \, dy = 2 \text{ Area } (T) = 2\pi$$

2º) Cálculo de la integral de línea $\int_C F \cdot dr$

Parametrización de la curva C: $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 2 - \operatorname{sen} t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$

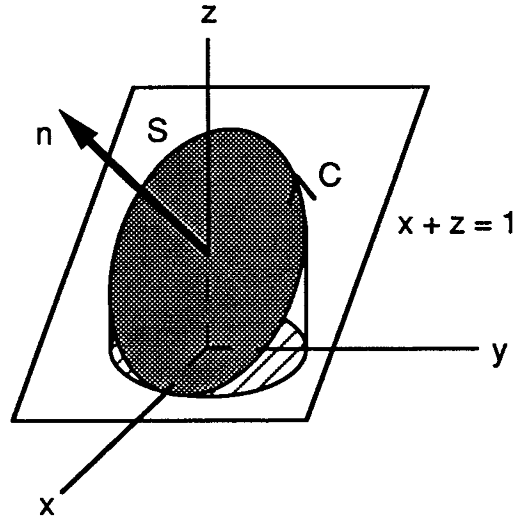
$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (2 - \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, -\cos t) \, dt =$$

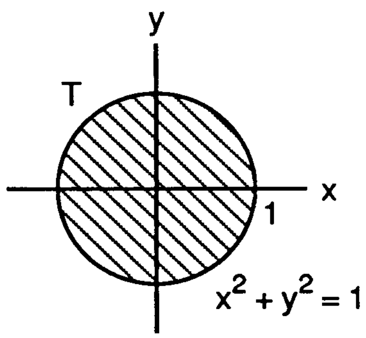
$$= \int_0^{2\pi} (1 - 2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos t) \, dt = 2\pi$$

Queda, por tanto, comprobado el teorema.

(b) $F(x, y, z) = (y - z, z - y, x - y)$

C curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.





1º) Cálculo de la integral de superficie $\iint_S \text{rot } F \cdot n \; dS$

S es la porción de plano $z = 1 - x$ limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Parametrización de S: $\left.\begin{array}{l} x = v \cos u \\ y = v \operatorname{sen} u \\ z = 1 - v \cos u \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} u \in [0, 2\pi] \\ v \in [0, 1] \end{array}$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (-v \operatorname{sen} u, v \cos u, v \operatorname{sen} u) \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = (\cos u, \operatorname{sen} u, -\cos u)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (-v, 0, -v) \qquad \text{normal ascendente: } (v, 0, v)$$

$$F(x, y, z) = (y - z, z - y, x - y) \qquad \text{rot } F = (-2, -2, -1)$$

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-2, -2, -1) \cdot (v, 0, v) \, dv \, du = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -3v \, dv \, du = -3\pi$$

2º) Cálculo de la integral de línea $\int_C F \cdot dr$

Proyección de la curva intersección sobre el plano xy:

$$\left.\begin{array}{r} z = 1 - x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

Parametrización de C: $\left.\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = 1 - \cos t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t - 1 + \cos t , 1 - \cos t - \operatorname{sen} t , \cos t - \operatorname{sen} t) \cdot$$

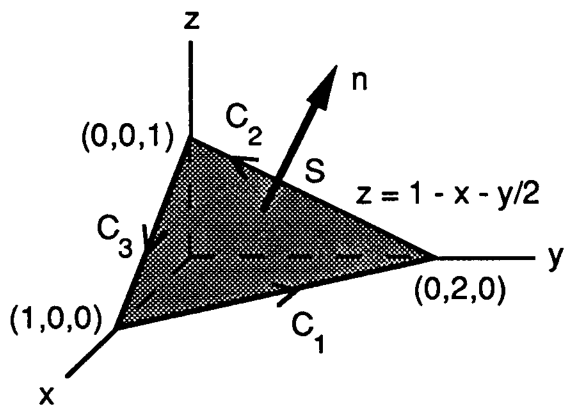
$$\cdot (- \operatorname{sen} t , \cos t , \operatorname{sen} t) \, dt =$$

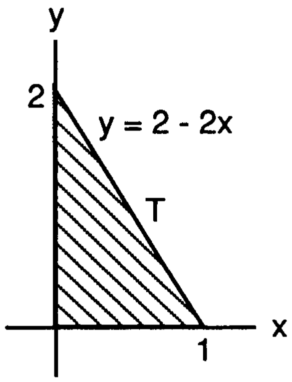
$$= \int_0^{2\pi} (-1 - \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t + \cos t - \operatorname{sen} t \cos t) \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-1 - \frac{1 - \cos 2t}{2}) \, dt + 0 = -3\pi$$

(c) $F (x, y, z) = (x^2 + y, yz, x - z^2)$

C curva intersección del plano $2x + y + 2z = 2$ y los tres planos coordenados.





1º) Cálculo de la integral de superficie $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS$

Parametrización de S: $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 1 - x - y/2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 - 2x \end{array}$

$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (1 , 1/2 , 1)$ es el vector normal ascendente

$F (x, y, z) = (x^2 + y , yz , x - z^2)$ $\qquad$ $\operatorname{rot} F = (- y , - 1 , - 1)$

Entonces:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (-y, -1, -1) \cdot (1, 1/2, 1) \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left(-y - \frac{3}{2} \right) dy\, dx = \frac{-1}{2} \int_0^1 \left[(2-2x)^2 + 3(2-2x) \right] dx = -\frac{13}{6}$$

2º) Cálculo de la integral de línea $\int_C F \cdot dr$

La trayectoria C se descompone en tres:

$$C_1: \left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad t \in [0, 1] \qquad \text{Segmento de } (1, 0, 0) \text{ a } (0, 2, 0)$$

$$\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^1 \left((1-t)^2 + 2t, 0, 1-t \right) \cdot (-1, 2, 0)\, dt = \int_0^1 (-1 - t^2)\, dt = \frac{-4}{3}$$

$$C_2: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 1] \qquad \text{Segmento de } (0, 2, 0) \text{ a } (0, 0, 1)$$

$$\int_{C_2} F \cdot dr = \int_0^1 \left(2 - 2t, (2-2t)\,t, -t^2 \right) \cdot (0, -2, 1)\, dt = \int_0^1 (3t^2 - 4t)\, dt = -1$$

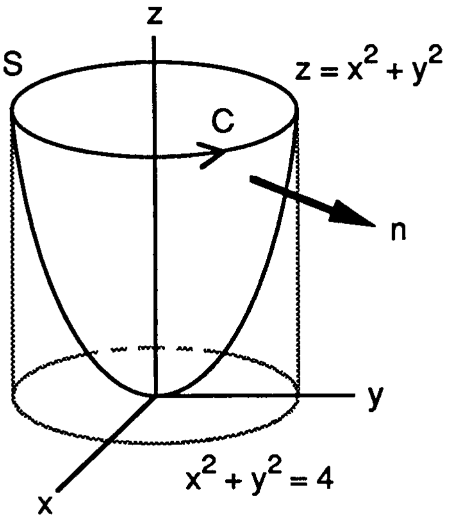
$$C_3: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{array}\right\} \quad t \in [0, 1] \qquad \text{Segmento de } (0, 0, 1) \text{ a } (1, 0, 0)$$

$$\int_{C_3} F \cdot dr = \int_0^1 \left(t^2, 0, t - (1-t)^2 \right) \cdot (1, 0, -1)\, dt = \int_0^1 (2t^2 - 3t + 1)\, dt = \frac{1}{6}$$

por lo tanto: $\displaystyle\int_C F \cdot dr = \frac{-4}{3} - 1 + \frac{1}{6} = -\frac{13}{6}$

(d) $F(x, y, z) = (x, y, 0)$

C curva intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$.



Parametrización de S:

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\text{para } x^2 + y^2 \le 4$$

1º) Cálculo de la integral de superficie $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \; dS$

$$F(x, y, z) = (x, y, 0) \qquad \operatorname{rot} F = (0, 0, 0)$$

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \; dS = \iint_S 0 \; dS = 0$$

2º) Cálculo de la integral de línea $\int_C F \cdot dr$

Parametrización de la curva C: $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \\ z = 4 \end{array}\right\} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 0) \cdot (-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0$$

3.18 Emplear dos superficies diferentes para calcular las siguientes integrales de línea mediante el teorema de Stokes.

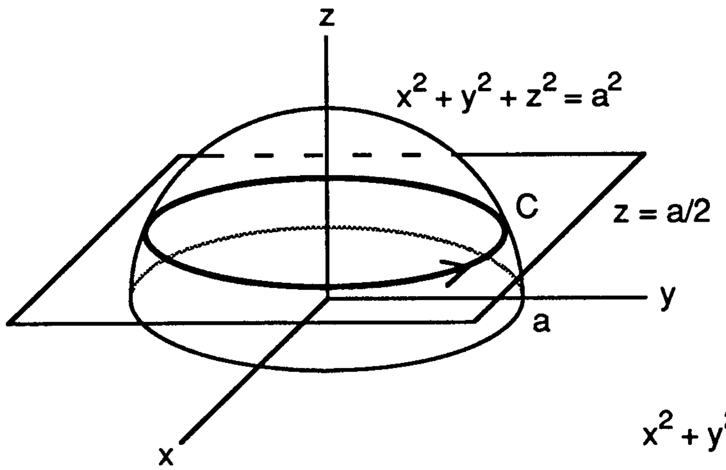
(a) $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$

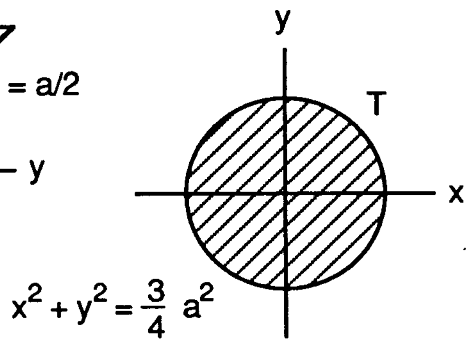
C curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $z = a/2$, con $a > 0$.

En las condiciones de su enunciado, el teorema de Stokes afirma que

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot}\, F \cdot n \; dS$$

para cualquier superficie S que tenga por frontera la curva cerrada C.





Tomaremos, en primer lugar, como superficie S con frontera C, la porción de plano $z = a/2$ limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Parametrización de S: $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = a/2 \end{array}\right\}$ $(x, y) \in T$; $\quad \dfrac{\partial r}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial y} = (0, 0, 1)$

Determinación de la frontera del dominio de parámetros T:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ z = a/2 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = \frac{3}{4}\, a^2$$

T es un círculo de centro (0, 0) y radio $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\, a$

$$\iint_S \text{rot}\, F \cdot n \; dS = \iint_T (-1, -1, -1) \cdot (0, 0, 1)\, dx\, dy = -\iint_T 1\, dx\, dy =$$

$$= -\,\text{Area}\,(T) = -\frac{3\pi}{4}\, a^2$$

Tomamos ahora, en segundo lugar, como superficie S con frontera C, el casquete de esfera limitado por el plano $z = a/2$.

Parametrización de S: $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{array}\right\}$ $\quad x^2 + y^2 \leq \dfrac{3}{4}\, a^2$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, , \; \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, , \; 1 \right)$$

$$\iint_S \operatorname{rot} F\cdot n\, dS = \iint_T (-1,-1,-1)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, 1\right) dx\, dy =$$

$$= -\iint_T \left(\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + 1\right) dx\, dy$$

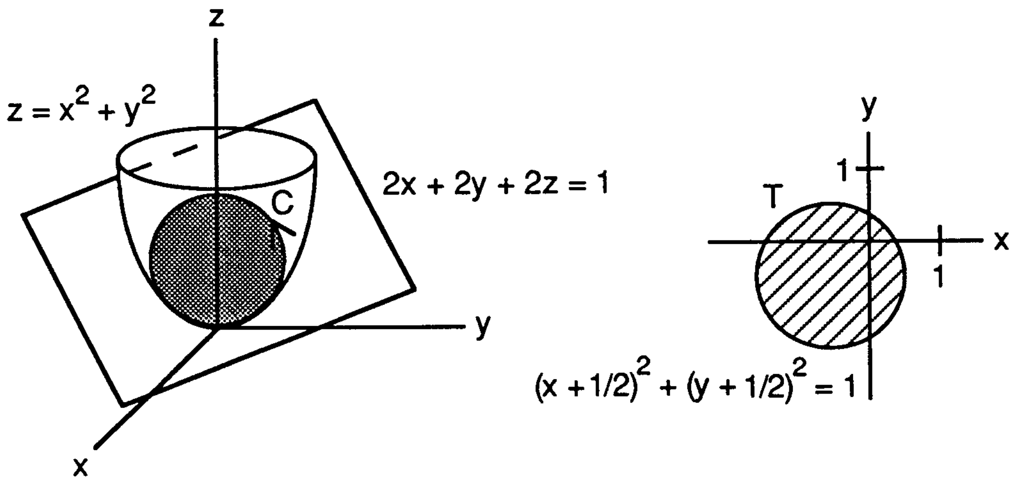
En polares $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array}\right\}$ $J(r,\theta) = r$, T se describe como: $\begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \frac{\sqrt{3}}{2} a \end{array}$

$$\iint_S \operatorname{rot} F\cdot n\, dS = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}/2\, a} \left[\frac{r(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)}{\sqrt{a^2-r^2}} + 1\right] r\, dr\, d\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)\, d\theta \int_0^{\sqrt{3}/2\, a} \frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\, dr - 2\pi \int_0^{\sqrt{3}/2\, a} r\, dr = -\frac{3\pi}{4} a^2$$

(b) $\int_C (y^2 - xz)\, dx + (x^2 + zy)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$

C curva intersección del plano $2x + 2y + 2z = 1$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$.



$F(x, y, z) = (y^2 - xz, x^2 + zy, x^2 + y^2)$ $\qquad$ $\operatorname{rot} F = (y, -3x, 2x - 2y)$

En primer lugar, tomamos como superficie S con frontera C la porción de plano interior al paraboloide.

Parametrización de S: $z = f(x, y) = 1/2 - x - y$ $\qquad \dfrac{\partial r}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial y} = (1, 1, 1)$

Para determinar los límites de los parámetros x,y buscamos la proyección sobre el plano xy de la curva C:

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ z = \frac{1}{2} - x - y \end{array}\right\} \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{2} - x - y \qquad (x + 1/2)^2 + (y + 1/2)^2 = 1$$

Entonces:

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \iint_T (y, -3x, 2x - 2y) \cdot (1, 1, 1) \, dx \, dy = \iint_T (-y - x) \, dx \, dy$$

Efectuando un cambio a polares descentradas: $\left.\begin{array}{l} x = -1/2 + r\cos\theta \\ y = -1/2 + r \operatorname{sen}\theta \end{array}\right\}$

$$J(r, \theta) = r$$

el dominio de parámetros T se describe como: $\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{array}$

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - r \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2} - r\cos\theta\right) r \, dr \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r \, dr - \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) \, d\theta \int_0^1 r^2 \, dr = \pi - 0 = \pi$$

Consideramos ahora como superficie S con frontera C la porción de paraboloide delimitada por el plano.

Parametrización de S: $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \quad (x, y) \in T$

$\dfrac{\partial r}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$ que es el vector normal ascendente

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS = \iint_T (y, -3x, 2x - 2y) \cdot (-2x, -2y, 1) \, dx \, dy =$$

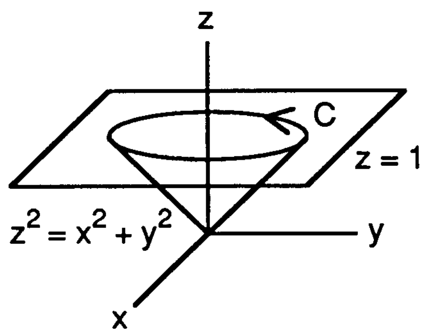
$$= \iint_T (4xy + 2x - 2y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[4\left(\frac{-1}{2} + r\cos\theta\right)\left(\frac{-1}{2} + r \operatorname{sen}\theta\right) + \right.$$

$$+ 2\left(\frac{-1}{2} + r\cos\theta\right) - 2\left(\frac{-1}{2} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\Big]\ r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r - 4r^2 \mathrm{sen}\,\theta + 4r^3 \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\right) dr\,d\theta = \pi$$

(c) $\int_C (y + x)\,dx + (x + z)\,dy + z^2\,dz$

C curva intersección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.



$$F(x, y, z) = (y + x, x + z, z^2)$$

$$\mathrm{rot}\,F = (-1, 0, 0)$$

Consideramos como superficie S con frontera C el plano $z = 1$ limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$.

Parametrización de S: $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 1 \end{array}\right\}\ x^2 + y^2 \leq 1 \qquad \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 0, 1)$

$$\iint_S \mathrm{rot}\,F \cdot n\,dS = \iint_T (-1, 0, 0)\cdot(0, 0, 1)\ dx\,dy = \iint_T 0\,dx\,dy = 0$$

Consideramos ahora como superficie S con frontera C el cono entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

Parametrización de S: $\left.\begin{array}{l} x = v\cos u \\ y = v\,\mathrm{sen}\,u \\ z = v \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 < v \leq 1 \end{array}$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} = (v\cos u, v\,\mathrm{sen}\,u, -v)$$

vector normal ascendente: $(-v\cos u, -v\,\mathrm{sen}\,u, v)$

$$\iint_S \mathrm{rot}\,F \cdot n\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-1, 0, 0)\cdot(-v\cos u, -v\,\mathrm{sen}\,u, v)\,dv\,du =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 v \cos u \, dv \, du = \int_0^{2\pi} \cos u \, du \int_0^1 v \, dv = 0$$

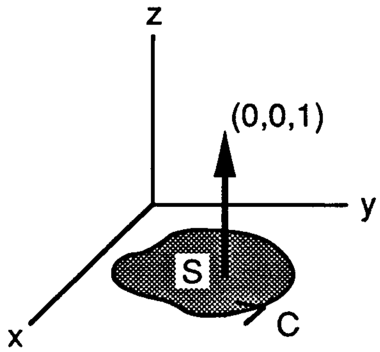
3.19 Calcular el valor de la integral de línea $\int_C F \cdot dr$ siendo C una curva cerrada que limita un recinto sobre el plano xy de 3 unidades de área, y el campo:

$$F(x, y, z) = (\, y^3 \text{Ch}\, x + \text{Sh}\, y \,\text{sen}\, z \,,\; 3y^2 \,\text{Sh}\, x \,\text{Ch}\, z + 4x \,,\; y\,(\text{Sh}\, x + \text{Ch}\, z)\,)$$

$$\text{rot}\, F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^3\text{Ch}\, x + \text{Sh}\, y \,\text{sen}\, z & 3y^2\text{Sh}\, x\,\text{Ch}\, z + 4x & y\,(\text{Sh}\, x + \text{Ch}\, z) \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}\, F = (\, \text{Sh}\, x + \text{Ch}\, z - 3y^2\text{Sh}\, x \,\text{Sh}\, z \,,\; \text{Sh}\, y \cos z - y\,\text{Ch}\, x \,,$$
$$,\; 3y^2\text{Ch}\, x \,\text{Ch} z + 4 - 3y^2\text{Ch}\, x - \text{Ch} y \,\text{sen}\, z\,)$$

Parametrización de la superficie S del plano xy:



$$\left.\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 0, 1)$$

normal ascendente

Por el teorema de Stokes:

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot}\, F \cdot n \, dS = \iint_S (3y^2\text{Ch}\, x \,\text{Ch}\, 0 + 4 - 3y^2\text{Ch}\, x - \text{Ch}\, y \,\text{sen}\, 0)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_S 4\, dx\, dy = 4 \iint_S 1\, dx\, dy = 4 \,\text{Area}\,(S) = 4 \cdot 3 = 12$$

3.20 Probar que las siguientes integrales de línea tienen los valores que a continuación se detallan:

(a) $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = -\sqrt{3}\,\pi$

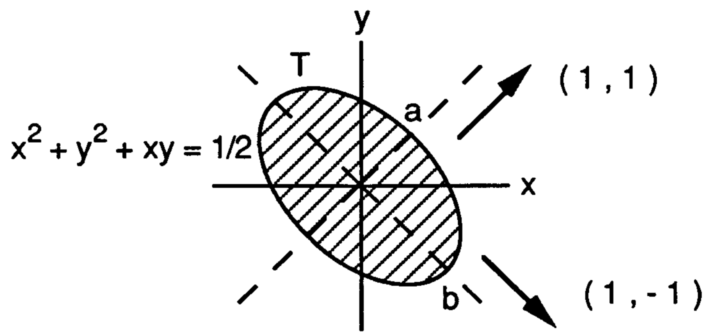
C curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con $x + y + z = 1$.

Un plano como $x + y + z = 0$ al cortar una esfera como $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ determina sobre ella una circunferencia. Vamos a ver cuál es la proyección de dicha curva sobre el plano xy:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0 \end{array}\right\} \quad z=-x-y \qquad\qquad x^2+y^2+(-x-y)^2=1$$

$$\text{de donde:} \qquad x^2+y^2+xy=1/2$$

Se trata de una elipse en el plano xy. El hecho de aparecer el término cruzado xy es debido a que sus ejes de simetría no son paralelos a los ejes coordenados. Si buscamos sus direcciones principales veremos que son las de vectores (1, 1) y (1, -1). Por lo tanto la elipse tiene la forma:



Los ejes de simetría son las rectas $y = x$, $y = -x$ respectivamente. Para hallar los semiejes a, b de esta elipse, buscamos los puntos de corte de la elipse con dichos ejes:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+xy=1/2 \\ y=x \end{array}\right\} \quad 3x^2=1/2 \qquad x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Puntos: $(\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$, $(-\sqrt{6}/6 , -\sqrt{6}/6)$

semieje a $= d\,(\,(0, 0)\,, (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)\,) = \sqrt{3}/3$

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+xy=1/2 \\ y=-x \end{array}\right\} \quad x^2=1/2 \qquad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Puntos: $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

semieje b $= d\,((0,0), (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)) = 1$

Para calcular $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ emplearemos el teorema de Stokes:

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot}\, F \cdot n\, dS$$

siendo $F(x,y,z) = (y, z, x)$, $\text{rot}\, F = (-1, -1, -1)$

Tomamos como superficie S la porción de plano delimitada por la esfera:

$$\left.\begin{array}{l} x=x \\ y=y \\ z=-x-y \end{array}\right\} \text{ dominio de parametros T: } \quad x^2+y^2+xy \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 1, -1)$$

$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (1, 1, 1)$ que es el vector normal ascendente.

Entonces: $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint_S \text{rot}\, F \cdot n\, dS =$

$$= \iint_T (-1,-1,-1)\cdot(1,1,1)\,dx\,dy = -3 \iint_T 1\,dx\,dy = -3 \text{ Area}(T)$$

pero T es el interior de una elipse y su área es $a\,b\,\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

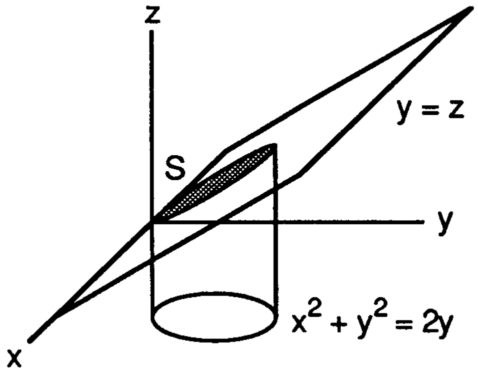
por lo tanto: $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = -3\,\frac{\sqrt{3}}{3}\pi = -\sqrt{3}\,\pi$

(b) $\int_C (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz = 0$

C curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $y = z$.

Emplearemos el teorema de Stokes.

$F(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$, $\text{rot}\, F = (0, 0, 0)$



Cilindro $x^2 + y^2 = 2y$

$x^2 + (y - 1)^2 = 1$

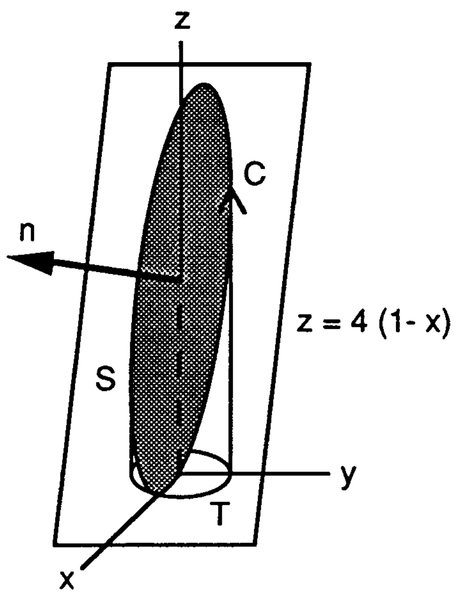
$$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{rot}\, F \cdot n\, dS = 0$$

(c) $\displaystyle\int_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz = -10\,\pi$

C curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z/4 = 1$.

Emplearemos el teorema de Stokes.

$F(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$, $\quad$ rot $F = (-2, -2, -2)$



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 4\,(1 - x) \end{array}\right\} \quad x^2 + y^2 \le 1$$

Dominio de parámetros T : $x^2 + y^2 \le 1$. Círculo unidad.

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (4, 0, 1) \qquad \text{vector normal ascendente}$$

$$\int_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz = \iint_T (-2, -2, -2) \cdot (4, 0, 1)\, dx\, dy =$$

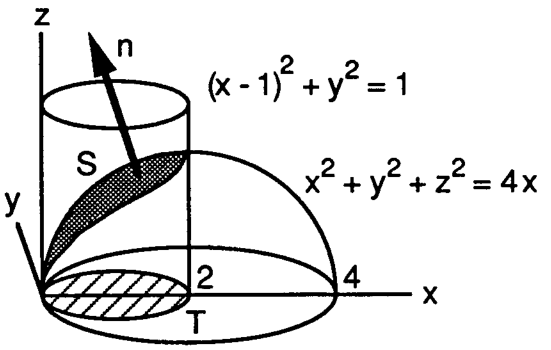
$$= -10 \text{ Area } (T) = -10\pi$$

(d) $\displaystyle\int_C (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz = 4\pi$

C curva intersección de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, $z \geq 0$, y el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

El cálculo de la integral se efectuará por medio del teorema de Stokes.

$F(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$ $\qquad$ $\text{rot } F = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)$



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = +\sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2} \end{array}\right\}$$

para $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

La circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ es la frontera del dominio de parámetros T, es decir, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto, T es el círculo de centro $(1, 0)$ y radio 1.

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = \left(\frac{x-2}{\sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2}}, 1 \right)$$

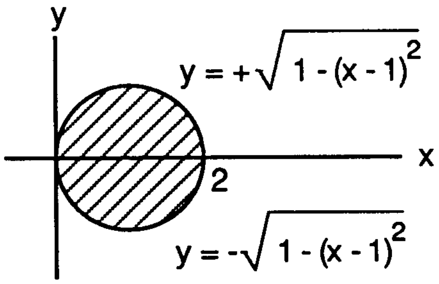
que es vector normal ascendente. Entonces:

$$\int_C F \cdot dr = \int_C (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz = \iint_S \text{rot } F \cdot n\, dS =$$

$$= \iint_T 2\left(y - \sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2}, \sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2} - x, x - y\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{x-2}{\sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{4 - (x-2)^2 - y^2}}, 1 \right) dx\,dy =$$

$$= 2\iint_T \left(\frac{-2y}{\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}} + 2 \right) dx\, dy =$$



Descripción del dominio T:

$$0 \le x \le 2$$
$$-\sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le +\sqrt{1-(x-1)^2}$$

$$= 4\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{-y}{\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}}\, dy\, dx + 4\iint_T 1\, dx\, dy =$$

$$= 4\int_0^2 \left[\left(4-(x-2)^2-y^2\right)^{1/2} \right]_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx + 4 \text{ Area (T)} = 0 + 4\pi = 4\pi$$

3.21 Calcular cada una de las siguientes integrales de línea:

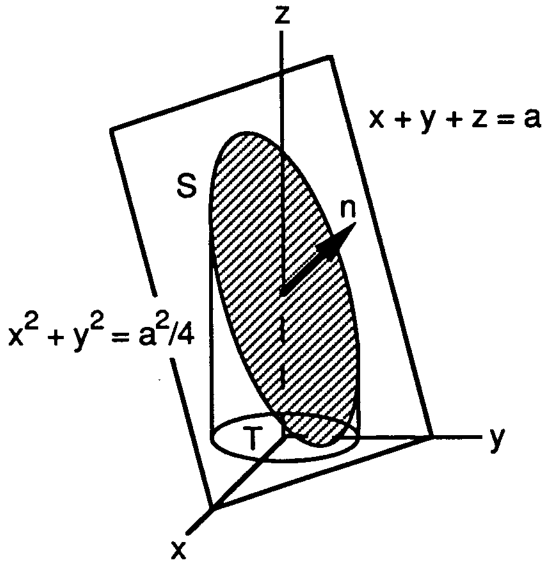
(a) $\int_C (y^2+z^2)\, dx + (x^2+z^2)\, dy + (x^2+y^2)\, dz$

$C = \{ x+y+z = a \} \cap \{ x^2+y^2 = a^2/4 \}$

Por el teorema de Stokes:

$$\int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \iint_S \text{rot } F \cdot n\, dS \qquad \text{con S tal que } \partial S = C$$

$F(x, y, z) = (y^2+z^2 , x^2+z^2 , x^2+y^2)$ $\qquad$ rot $F = (2y - 2z , 2z - 2x , 2x - 2y)$



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = a - x - y \end{array}\right\}$$

para $x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$

Dominio de parámetros T: círculo de centro (0, 0) y radio a/2.

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (1, 1, 1) \qquad \text{vector normal ascendente}$$

Entonces:

$$\int_C (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz =$$

$$= 2 \iint_T (\, y - (a - x - y)\, ,\, a - x - y - x\, ,\, x - y\,) \cdot (1, 1, 1)\, dx\, dy =$$

$$= 2 \iint_T 0\, dx\, dy = 0$$

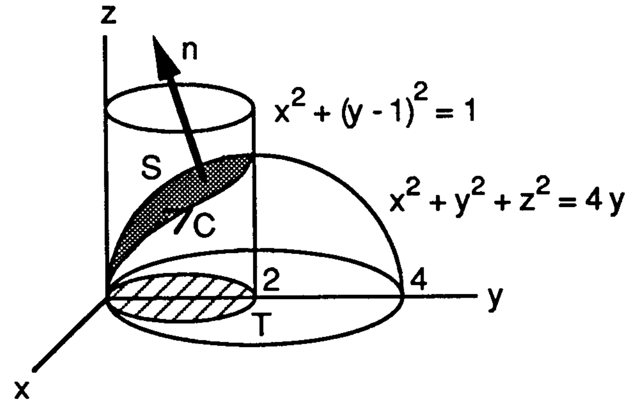
(b) $\displaystyle\int_C (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz$

$C = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 4y \} \cap \{ x^2 + y^2 = 2y \}$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4y$ es la esfera $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 2^2$

$x^2 + y^2 = 2y$ es el cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

El cilindro corta al plano xy en una circunferencia de igual ecuación.



Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = +\sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2} \end{array}\right\}$$

para $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2}} , \frac{y-2}{\sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2}} , 1 \right)$$

que es el vector normal ascendente. Aplicando el teorema de Stokes:

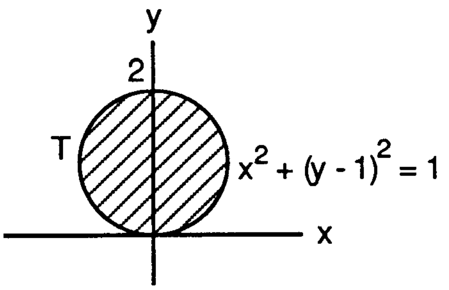
$F(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$ $\qquad$ $\text{rot}\, F = 2(y - z, z - x, x - y)$

$$\int_C (y^2 + z^2)\, dx + (x^2 + z^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz =$$

$$= 2 \iint_T \left(y - \sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2} , \sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2} - x , x - y \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2}} , \frac{y-2}{\sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2}} , 1 \right) dx\, dy =$$

$$= 2 \iint_T \left(\frac{2x}{\sqrt{4 - x^2 - (y-2)^2}} - 2 \right) dx\, dy =$$



Descripción del dominio T:

$$0 \leq y \leq 2$$

$$-\sqrt{1 - (y-1)^2} \leq x \leq +\sqrt{1 - (y-1)^2}$$

$$= 2\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \frac{2x}{\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}}\, dx\, dy - 4\iint_T 1\, dx\, dy =$$

$$= 4\int_0^2 \left[-\sqrt{4-x^2-(y-2)^2}\, \right]_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} dy - 4\, \text{Area}\,(T) = 0 - 4\pi = -4\pi$$

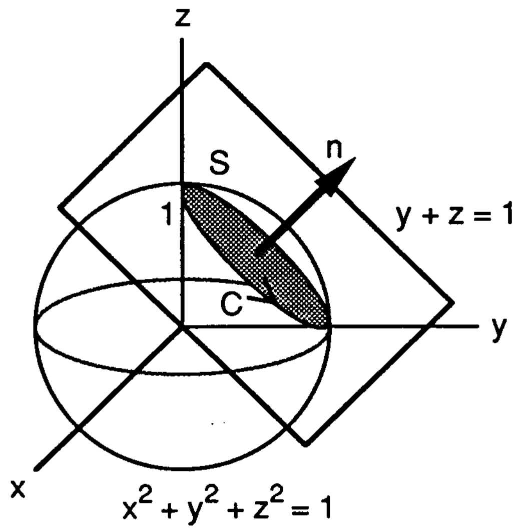
(c) $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz$

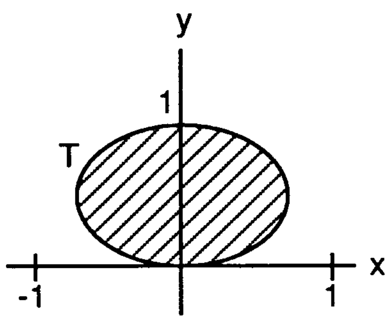
$C = \{ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \} \cap \{ y + z = 1 \}$

En las condiciones del teorema de Stokes, si $\partial S = C$:

$$\int_C F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \iint_S \text{rot}\, F \cdot n\, dS$$

$F(x, y, z) = (y, z, x)$ rot $F = (-1, -1, -1)$





Superficie S con frontera C: $\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 1 - y \end{array}\right\}$ $(x, y) \in T$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 1, 1)$$ vector normal ascendente

Determinación del dominio de parámetros T: su frontera es la proyección de la curva intersección del plano con la esfera.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y + z = 1 \end{array}\right\} z = 1 - y \qquad x^2 + y^2 + (1 - y)^2 = 1 \qquad x^2 + 2y^2 - 2y = 0$$

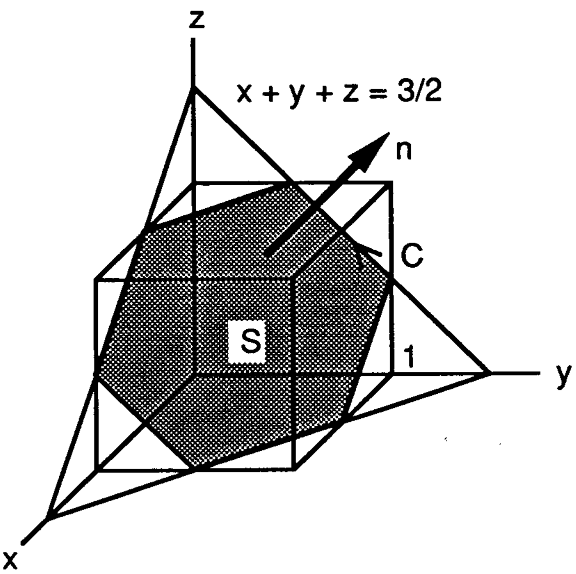
$$x^2 + 2\,(y - 1/2)^2 = 1/2 \qquad \frac{x^2}{(\sqrt{2}/2)^2} + \frac{(y - 1/2)^2}{(1/2)^2} = 1$$

Elipse de centro (0, 1/2) y semiejes $\sqrt{2}/2$ y 1/2

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot n\,dS = \iint_T (-1, -1, -1) \cdot (0, 1, 1)\,dx\,dy =$$

$$= -2 \iint_T 1\,dx\,dy = -2\,\text{Area}\,(T) = -2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{2}\,\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\pi$$

3.22 Sobre la trayectoria intersección del plano $x + y + z = 3/2$ con la frontera del cubo unidad, $\partial\,[0, 1]^3$, calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x, y, z) = (y^2 - z^2,\ z^2 - x^2,\ x^2 - y^2)$.



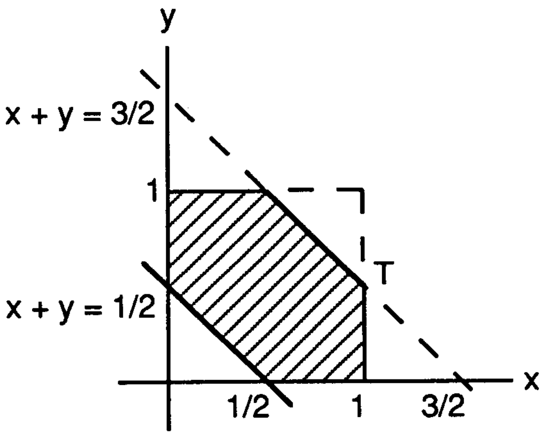
Parametrización de S:

$$\left.\begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = 3/2 - x - y \end{array}\right\}$$

$$(x, y) \in T$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (1, 1, 1)$$

normal ascendente



Determinación del dominio T:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3/2 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad x + y = 3/2$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3/2 \\ z = 1 \end{array}\right\} \quad x + y = 1/2$$

$F(x, y, z) = (y^2 - z^2,\ z^2 - x^2,\ x^2 - y^2)$; $\qquad$ $\text{rot}\, F = -2\,(y + z,\ x + z,\ x + y)$

Por el teorema de Stokes:

$$\int_C (y^2 - z^2)\, dx + (z^2 - x^2)\, dy + (x^2 - y^2)\, dz = \iint_S \text{rot}\, F \cdot n\, dS =$$

$$= \iint_T -2\,(y + 3/2 - x - y,\ x + 3/2 - x - y,\ x + y) \cdot (1, 1, 1)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_T -6\, dx\, dy = -6 \iint_T 1\, dx\, dy = -6\ \text{Area}\,(T) = -6\ \frac{3}{4} = -\frac{9}{2}$$