Cálculo II

INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

Prof. Ing. Silvia Seluy

INTEGRALES EN COORDENADAS POLARES

- Se considera un rectángulo polar con valores de radio y ángulo ctes.

Se toma una región Q en forma de abanico, definida por:

$0 \le r \le a \qquad \alpha \le \theta \le \beta$.

En ella, una región R, donde se define a una función $f(r,\theta)$ acotada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, y por las curvas $r = g_1(\theta)$ y $r = g_2(\theta)$ tal que $0 \le g_1(\theta) \le g_2(\theta) \le a$

El dominio se subdivide en arcos y rayos, obteniendo celdas polares.

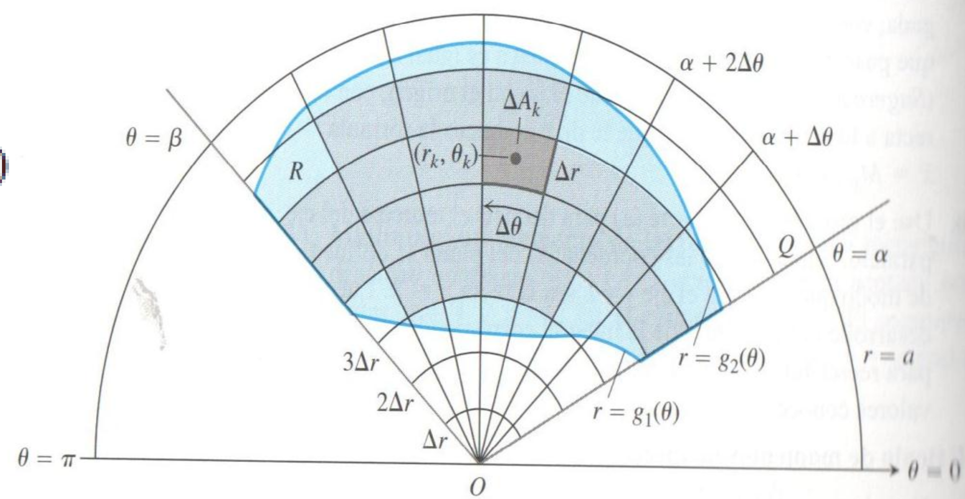


FIGURA 15.21 La región R: $g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, está contenida en la región con forma de abanico Q: $0 \le r \le a$, $\alpha \le \theta \le \beta$. La partición de Q mediante arcos de circunferencia y rayos induce una partición de R.

Arcos de radios $\Delta r, 2\Delta r \ldots m\Delta r$ con $\Delta r = \dfrac{a}{m}$

Rayos de abertura $\theta = \alpha \qquad \theta = \alpha + \Delta\theta \qquad \theta = \alpha + 2\Delta\theta \qquad \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta$

con $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/m'$

Las sumas de Riemann

- Si tomamos en una celda polar su Area y así para todas las celdas polares, su área está dada por: $\Delta A_1, \Delta A_2 \ldots\ldots\ldots \Delta A_n$
- Al tomar cualquier punto (r_k, θ_k) en una celda polar, de área ΔA_k

se forma la suma:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k)\Delta A_k}$$

Se expresa a ΔA_k en términos de Δr y $\Delta\theta$

En la región, con f continua, cuando las celdas son más pequeñas, tienden a un límite tal que en ese caso, $\Delta r \to 0,\ \Delta\theta \to 0$, ese límite se conoce como la integral doble sobre R y se escribe:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r,\theta)\,dA}$$

Cálculo del área de una celda polar

Se considerará al área de la celda polar como diferencia de las áreas de los sectores mayor y menor:

ΔA_k = área del sector grande (Ae) - área del sector pequeño (Ap)

Área del sector: $A = \frac{1}{2}\theta . r^2$

$$A_e = \frac{1}{2}.(r_k + \frac{\Delta r}{2})^2 . \Delta\theta$$

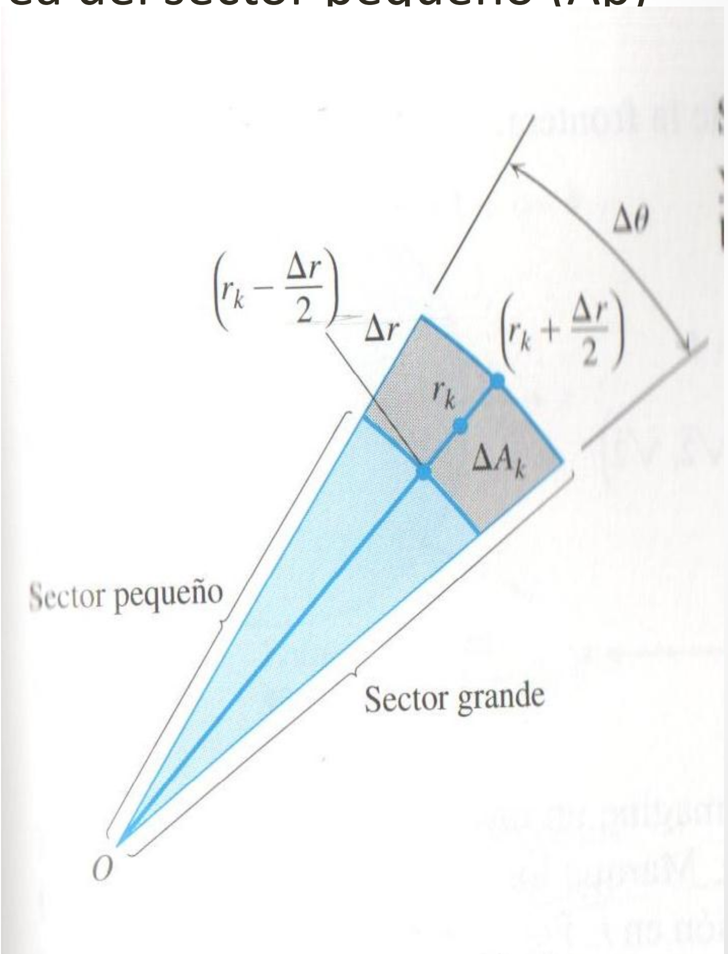
$$A_p = \frac{1}{2}.(r_k - \frac{\Delta r}{2})^2 . \Delta\theta$$

$$\Delta A_k = \frac{\Delta\theta}{2}\left[\ (r_k + \frac{\Delta r}{2})^2 - (r_k - \frac{\Delta r}{2})^2\ \right]$$

$$\Delta A_k = \frac{\Delta\theta}{2}(2 r_k \Delta r) = r_k \Delta r \Delta\theta$$

Por lo tanto:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k) r_k \Delta r . \Delta\theta}$$



- Pasando al límite cuando el número de celdas aumenta y los valores Δr y $\Delta\theta$ tienden a cero, las sumas de Riemann,

conducen a la integral doble:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(r,\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$$

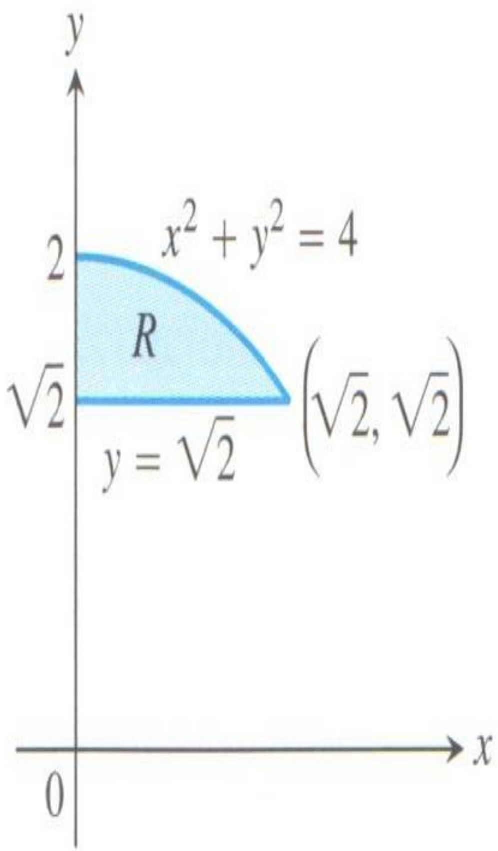
De acuerdo al Teorema de Fubini, una de sus versiones indicaría

Evaluar las integrales repetidas con respecto a r y θ

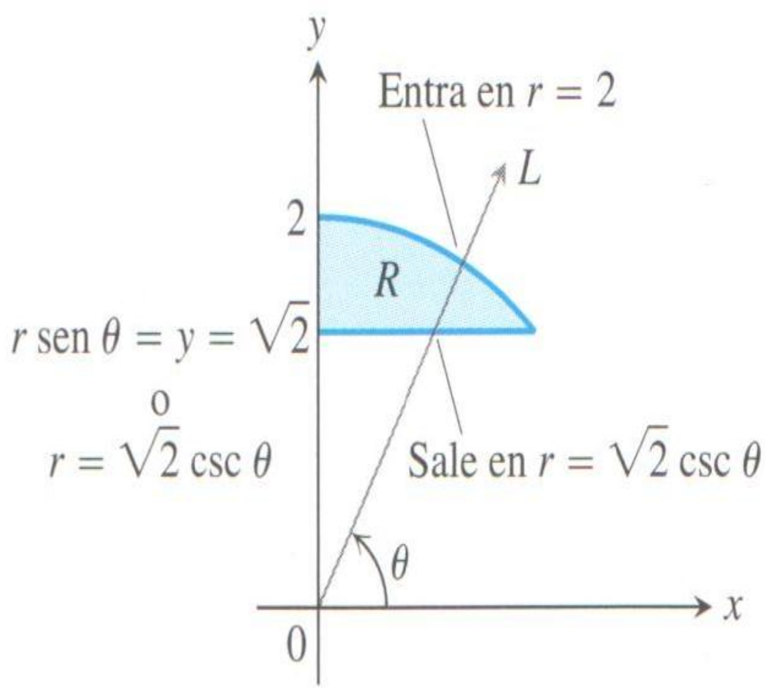
$$\boxed{\iint_R f(r,\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$$

Cómo determinar los límites de integración?

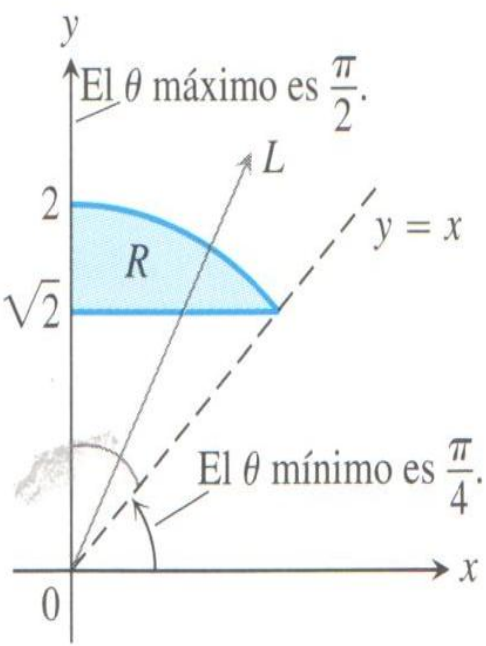
1. *Trace*: Trace la región y marque las curvas de la frontera.



2. *Determine los límites de integración en r*: Imagine un rayo L que parte del orig… que corta a R en la dirección creciente de r. Marque los valores de r donde L e… y sale de R. Éstos son los límites de integración en r. Por lo general, dependen del… gulo θ que forma L con el semieje positivo x.



3. *Determine los límites de integración en θ*: Determine los valores mínimo y máx de θ que acotan a R. Éstos son los límites de integración en θ.



La integral es

$$\iint_R f(r,\theta)\,dA = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2}\int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Área en una integral doble

Obtener el área en coordenadas polares, con una integral doble, significa considerar una región R, cerrada y acotada en el plano polar:

$$\boxed{Area = \iint_R r\,\mathrm{dr}\;\;\mathrm{d}\theta}$$

UN CAMBIO DE COORDENADAS:

- De cartesianas a polares:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(r\cos\theta, r\,sen\theta)\,r\,\mathrm{dr}\;\;\mathrm{d}\theta}$$

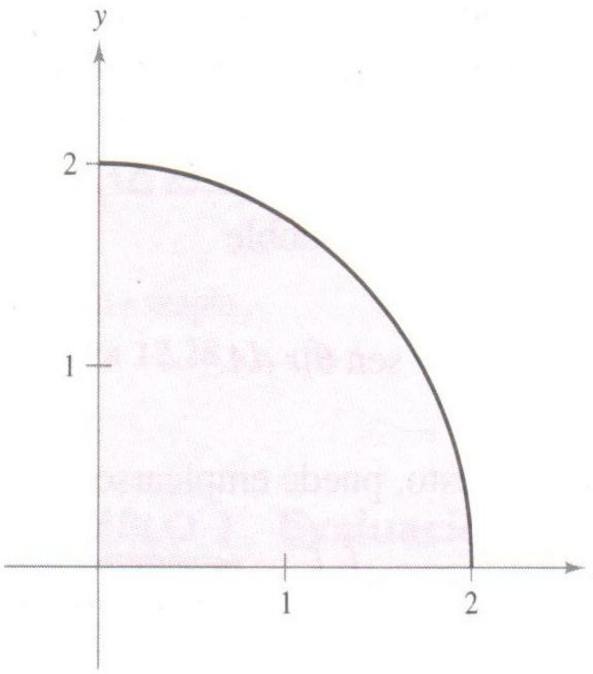
Ejemplo: describir la región en coord. polares

- Use coordenadas polares para describir cada una de las dos regiones a) y b).
- Región a)

Solución

a. La región R es un cuarto de círculo de radio 2. Esta región puede describirse en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 0 \le r \le 2,\ \ 0 \le \theta \le \pi/2\}.$$



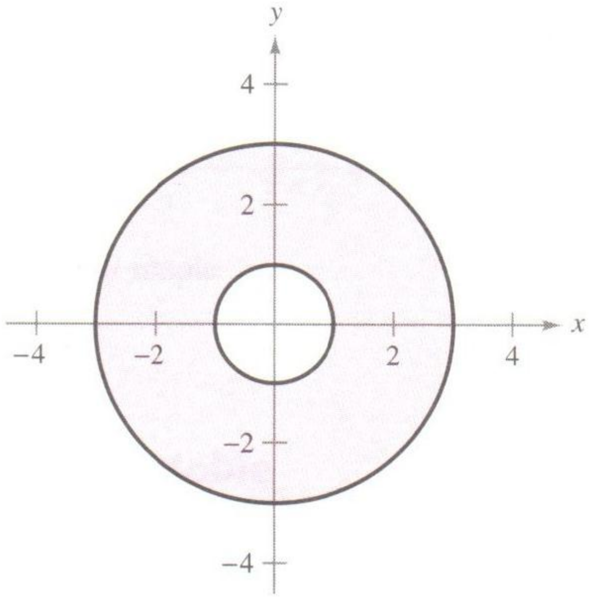
(a)

Caso b)

- Describa la región b) dada, en coordenadas polares:

b. La región R consta de todos los puntos que se encuentran entre los círculos concéntricos de radio 1 y de radio 3. Esta región puede describirse en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 1 \leq r \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$



(b)

Ej: Evaluar una integral doble en coord. polares

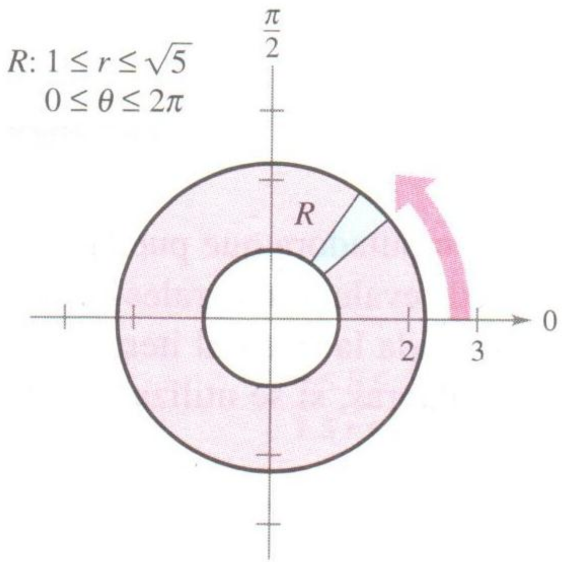
- Sea R la región anular comprendida entre las circunferencias:

$x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$

- Evalúe la integral $\iint_R (x^2 + y)dA$

Solución Los límites polares son $1 \le r \le \sqrt{5}$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, como se muestra en la figura 12.29. Además, $x^2 = (r\cos\theta)^2$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$. Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^2 + y)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^2\cos^2\theta + r\operatorname{sen}\theta) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^3\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right)\Big]_1^{\sqrt{5}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2\theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\operatorname{sen}\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(3 + 3\cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\operatorname{sen}\theta\right) d\theta \\
&= \left(3\theta + \frac{3\operatorname{sen}2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\cos\theta\right)\Big]_0^{2\pi} \\
&= 6\pi.
\end{aligned}$$



Región *r*-simple.
Figura 12.29

Ejemplo de cambio de variables

Emplee coordenadas polares para hallar el volumen de la región sólida limitada hacia arriba por el hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Y hacia abajo por la región circular R dada por

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Solución En la figura 12.30 se ve que R tiene como límites

$$-\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, \quad -2 \leq y \leq 2$$

y que $0 \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. En coordenadas polares, los límites son

$$0 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

siendo la altura $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2}$. Por lo tanto, el volumen V es

$$\begin{aligned}
V = \int\!\!\int_R f(x, y)\, dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16 - r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (16 - r^2)^{3/2}\Big]_0^2\, d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(24\sqrt{3} - 64\right) d\theta \\
&= -\frac{8}{3}\left(3\sqrt{3} - 8\right)\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{16\pi}{3}\left(8 - 3\sqrt{3}\right) \approx 46.979.
\end{aligned}$$

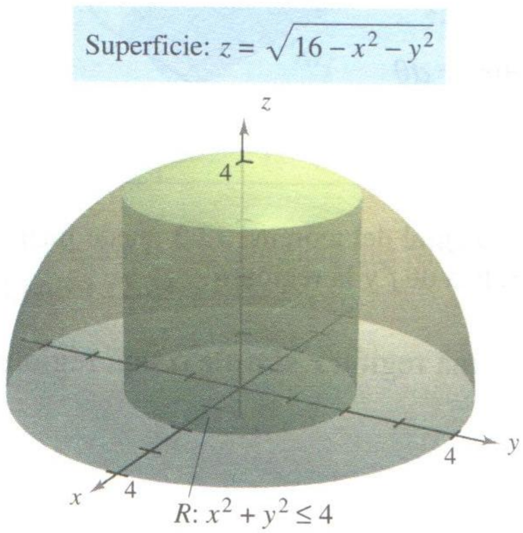


Figura 12.30