Clase teórica de la semana del 6-6

Mario Garelik

Sección 15.4 - Teorema de Green.

- **Ejercitación propuesta (pág. 829-830):** 1 – 20 // 23 – 29 // 34.
- Breve intro sobre la importancia del teorema, en la relación de una integral de línea sobre una curva cerrada simple con las doble sobre la regióna acotada encerrada por la curva.
- **Orientación positiva** de una curva cerrada.
- El **Teorema de Green** (con demo).
  - Enunciado y demostración *parcial*. Alcances de *parcial*.
  - La notación $\oint f$.
  - Ejemplos 1, 2 y 3 de aplicación.
  - Ejemplo 4: un caso en que el teorema no es aplicable.
- Uso del Teorema de Green para la demostración del recíproco de la condición necesaria y suficiente para que un campo sea conservativo.
- **Extensión de Green a regiones múltiplemente conexas**.
  - Ejemplo 5: aplicación directa.
  - Consecuencia importantísima: en ciertas circunstancias (*), podemos **sustituir una trayectoria complicada por una más simple**.
    * Sean C_1 y C_2 dos trayectoria cerradas, simples, SAT (suaves a trozos), que no se intersecan y ambas con la misma orientación positiva. Supongamos, además, que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Entonces:

$$\oint_{C_1} Pdx + Qdy = \oint_{C_2} Pdx + Qdy$$

    * Ejemplo 6.
- El **cálculo de áreas con integrales de línea**.
  - Ejercicios 17 - 18 y 21 (explicar uso).

Sección 15.5 - Superficies paramétricas y áreas.

- **Ejercitación propuesta (p. 837 - 838):** 1 al 10 //15 al 34 // 47.
- Breve intro. Se parametrizarán superficies en $\mathbb{R}^3$ así como, en su momento, fue posible parametrizar curvas bidimensionales.
- Nomenclatura: en la superficie parametrizada $S : \mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$, u, v son los **parámetros** y el par $(u,v) \in R$, donde R es una región del plano uv llamada **dominio del parámetro**. El vector $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ es el **vector posición** de un punto sobre la superficie: cunado (u,v) varía en R, el vector $\mathbf{r}(u,v)$ describe a S.
- Ejemplos de parametrizaciones:
  - Ejemplos 1 y 2: Cono
    - como función explícita $z = g(x,y)$.
    - con coordenadas *polares*: Objeción a la posibilidad de contemplar que $r < 0$.
    - cómo incide en la gráfica el variar el dominio del parámetro.
  - Ejemplo 3: parametrización de un cilindro circular.
  - Ejemplo 4: la eliminación de parámetros como medio para graficar.
  - Ejemplo 5: Esfera: uso de las coordenadas esféricas. Dominio de los parámetros para el ángulo polar (θ) y el azimutal (ϕ).
  - En general la identificación de una superficie parametrizada, por más conocida que sea, resulta complicado.
- **Bastidor** de una superficie: la idea de fijar uno de los parámetros para generar meridianos y paralelos.
- Los **vectores tangentes a un bastidor** en un punto: $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$.
- **Plano tangente** a una superficie paramétrica. Ejemplo 6.
- **Superficie suave**.
- Hacia el **cálculo del área** de una superficie paramétrica:
  - Partición regular del dominio R de los parámetros.
  - Aproximación al cálculo del área de un parche S_k:

    $$\Delta S_k \approx \Delta T_k$$

    donde T_k es el paraleogramo que se genera en la superficie a partir de los vectores $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$.
  - Recordar el área de un paralelogramo generado por dos vectores.
  - Construcción de la suma de Riemann.
  - Definición del **área de una superficie paramétrica** a partir de la integral:

    $$A(S) = \iint_R \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dA$$

    .

- Definición y deducción del **área de una superficie dada explícitamente** por $z = g(x, y)$:

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dx\, dy\,.$$

- Ejemplo 7: área de un cono parametrizado.
- Los modelos para $A(S)$ pueden utilizarse (como en el ejemplo 7) aún cuando S no sea suave en un número finito de puntos en la frontera de R.