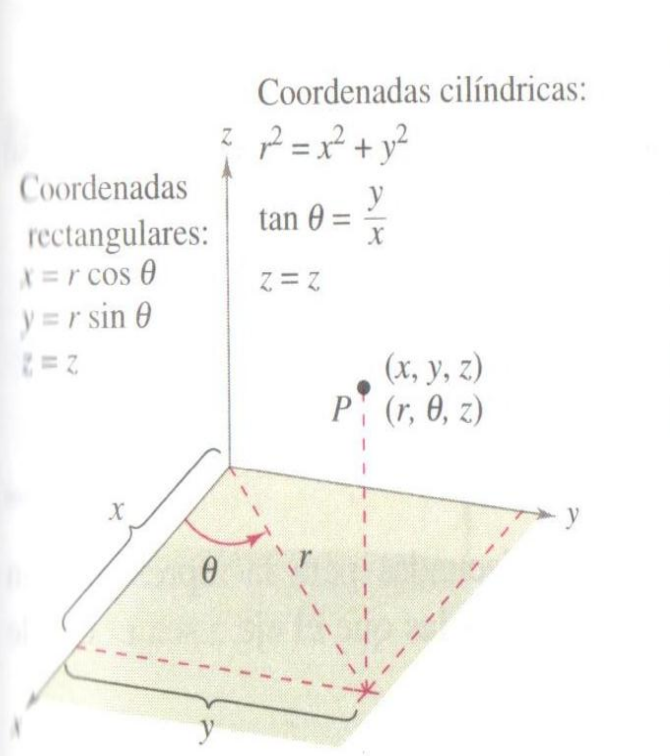
Cálculo II

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Prof. Ing. Silvia Seluy

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Las coordenadas cilíndricas usadas en gráficas en tres dimensiones, representan una combinación de las coordenadas polares en gráficas bidimensionales (plano) con el eje z. Por lo tanto un punto P(x,y,z) quedará representado en coordenadas cilíndricas por $P(r, \theta, z)$



DEFINICIÓN Coordenadas cilíndricas

Las **coordenadas cilíndricas** representan un punto P en el espacio mediante ternas ordenadas (r, θ, z) en donde

1. r y θ son las coordenadas polares para la proyección vertical de P sobre el plano xy.
2. z es la coordenada vertical rectangular.

RELACIÓN ENTRE LAS COORDENADAS RECTANGULARES Y CILÍNDRICAS

En las siguientes ecuaciones, en primer lugar se obtendrá:

- El pasaje de coordenadas cilíndricas a rectangulares .
- Luego, se observa el pasaje de coordenadas rectangulares a cilíndricas

Ecuaciones que relacionan las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las cilíndricas (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = y/x$$

Pasaje de coordenadas cilíndricas a rectangulares

- EJEMPLO:

Convierta el punto $(r, \theta, z) = \left(4, \dfrac{5\pi}{6}, 3\right)$ a coordenadas rectangulares.

Solución Usando las ecuaciones de conversión cilíndricas a rectangulares, se obtiene

$$x = 4\cos\frac{5\pi}{6} = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = 4\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6} = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$z = 3.$$

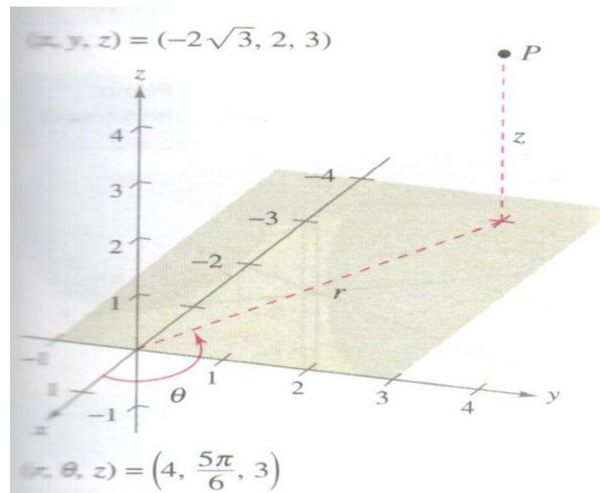


Figura 9.68

Por lo tanto, en coordenadas rectangulares el punto es $(x, y, z) = \left(-2\sqrt{3}, 2, 3\right)$, como se muestra en la figura 9.68.

Pasaje de coordenadas rectangulares a cilíndricas

- EJEMPLO:

Convierta el punto $(x, y, z) = \left(1, \sqrt{3}, 2\right)$ a coordenadas cilíndricas.

Solución Usando las ecuaciones para la conversión rectangulares a cilíndricas, se obtiene:

$$r = \pm\sqrt{1 + 3} = \pm 2$$

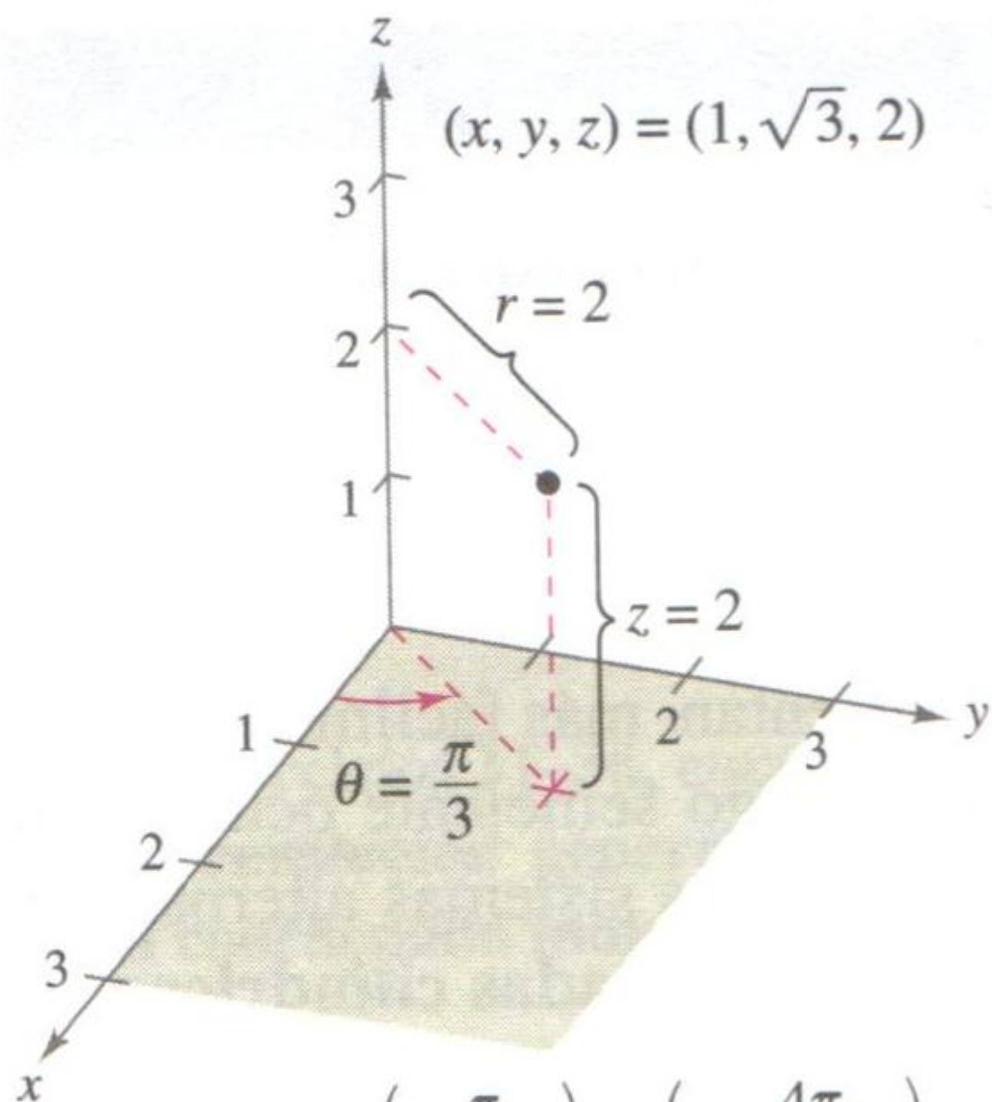
$$\tan\theta = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\sqrt{3}\right) + n\pi = \frac{\pi}{3} + n\pi$$

$$z = 2$$

Se tienen dos opciones para r y una cantidad infinita de opciones para θ. Como se muestra en la figura 9.69, dos representaciones convenientes de este punto son

$$\left(2, \frac{\pi}{3}, 2\right) \qquad r > 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante I}$$

$$\left(-2, \frac{4\pi}{3}, 2\right). \qquad r < 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante III}$$



$$(r, \theta, z) = \left(2, \frac{\pi}{3}, 2\right) \text{ o } \left(-2, \frac{4\pi}{3}, 2\right)$$

UTILIDAD DE LAS COORDENADAS CILÍNDRICAS

En el espacio, r = a representa un cilindro alrededor del eje z.

La ecuación $\theta = \theta_0$ es un plano que forma un ángulo θ_0 con el semieje positivo x, y que contiene al eje z.

La ecuación $z = z_0$ representa un plano normal al eje z, de igual forma que con las coordenadas rectangulares.

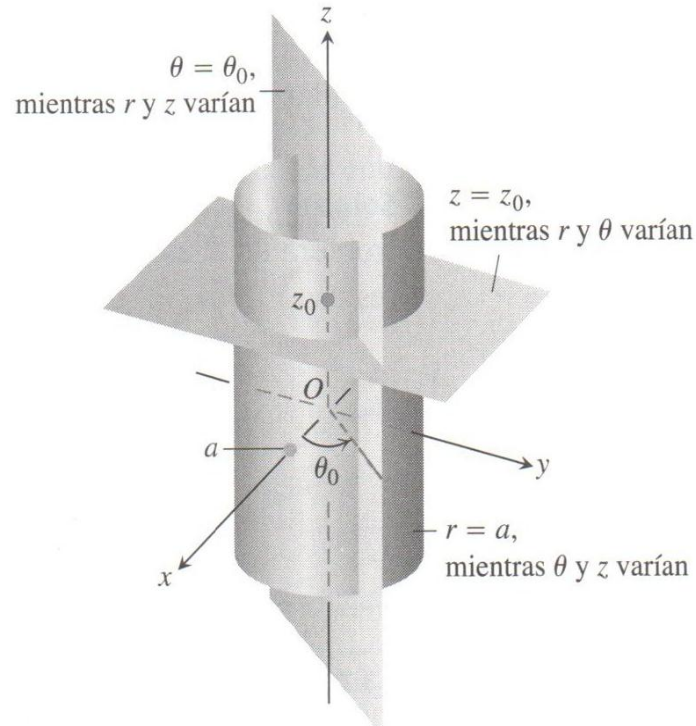
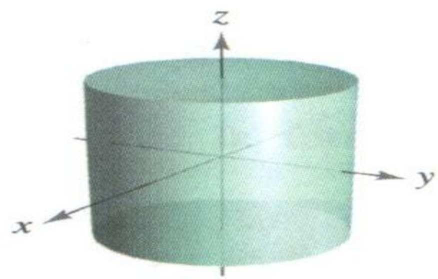


FIGURA 15.37 Ecuaciones con coordenadas constantes en las coordenadas cilíndricas producen cilindros y planos.

Las coord. Cilíndricas son adecuadas para sup. Cilíndricas y sup. de revolución donde el eje z, sea el eje de simetría.

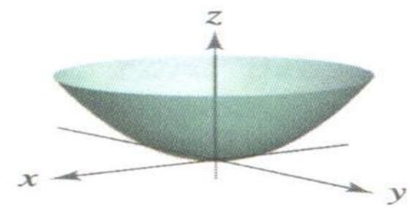
Ejemplos:

$x^2 + y^2 = 9$
$r = 3$



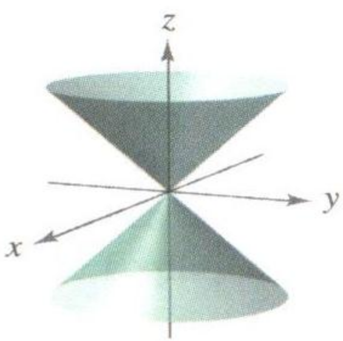
Cilindro

$x^2 + y^2 = 4z$
$r = 2\sqrt{z}$



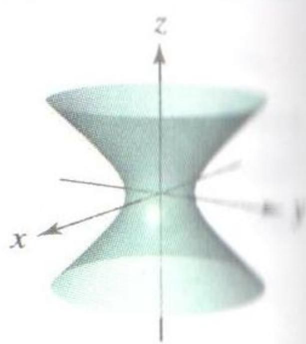
Paraboloide

$x^2 + y^2 = z^2$
$r = z$



Cono

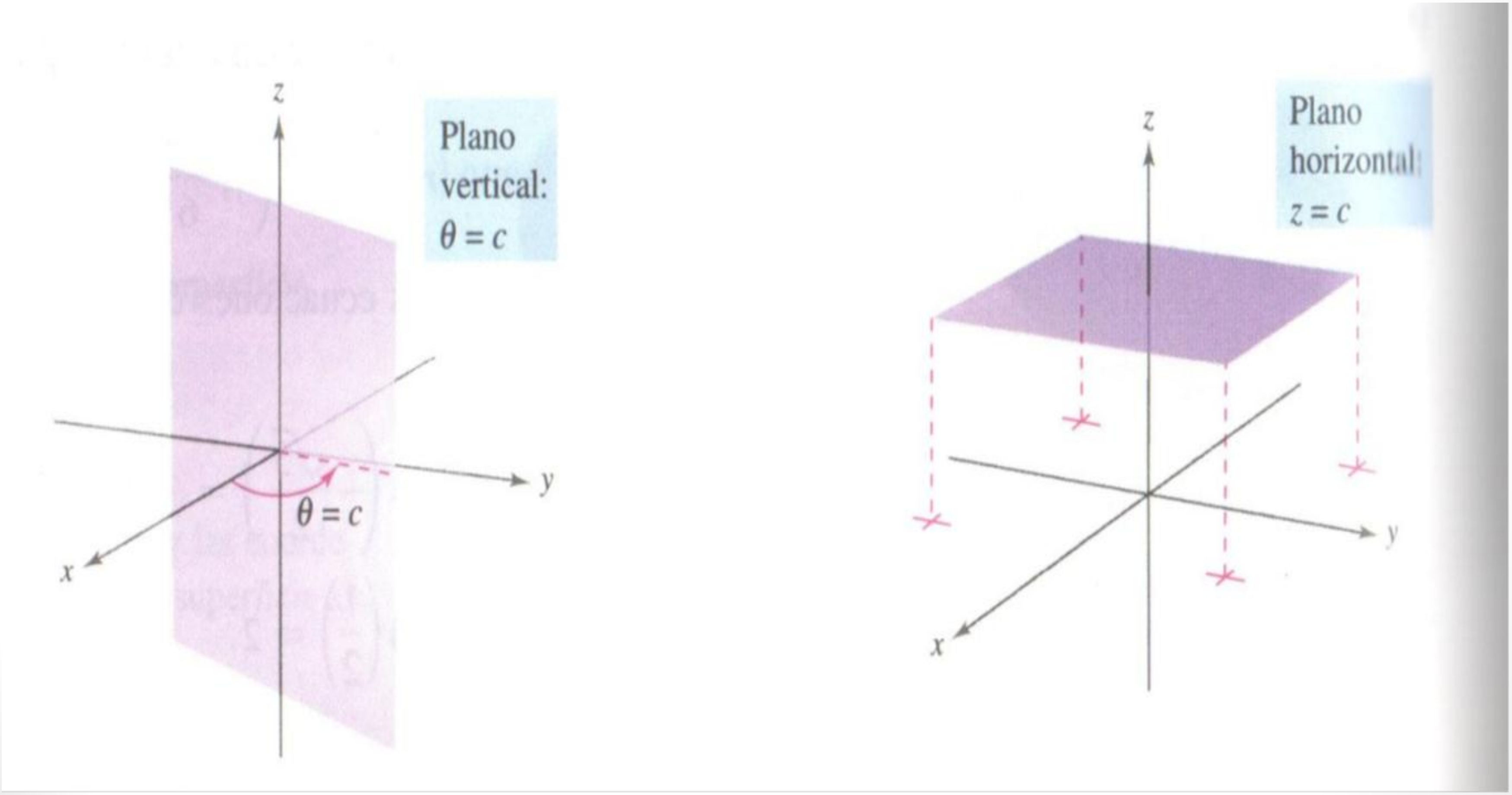
$x^2 + y^2 - z^2 = 1$
$r^2 = z^2 + 1$



Hiperboloide

También se destaca la utilidad para representar planos:

- Casos de planos que contienen al eje z o planos horizontales:



Integrales triples en coordenadas cilíndricas.

Se toma una región D, la cual se divide en n cuñas cilíndricas.

Consideramos la k-ésima cuña cilíndrica y en ella:

$\Delta r_k, \Delta\theta_k, \Delta z_k$ Al tomar el límite de las sumas de Riemann aplicadas a estas cuñas, se obtiene la integral triple buscada.

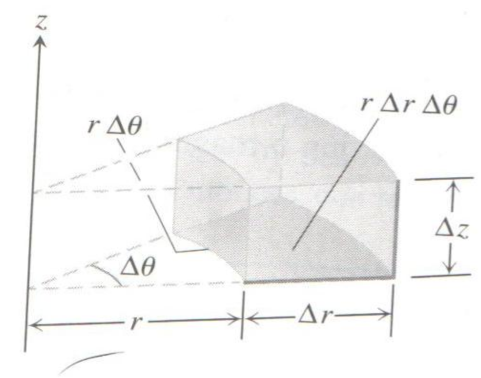


FIGURA 15.38 En coordenadas cilíndricas, el volumen de la cuña se aproxima mediante el producto $\Delta V = \Delta z\, r\, \Delta r\, \Delta\theta$.

Por lo tanto: el volumen de la cuña queda determinado por $\Delta V_k = r_k.\Delta r_k.\Delta\theta_k.\Delta z_k$ donde el producto $r_k.\Delta r_k.\Delta\theta_k$ representa el área A_k.

La suma de Riemann tiene la forma:

$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k, \theta_k, z_k)\Delta z_k r_k \Delta r_k \Delta\theta_k}$$

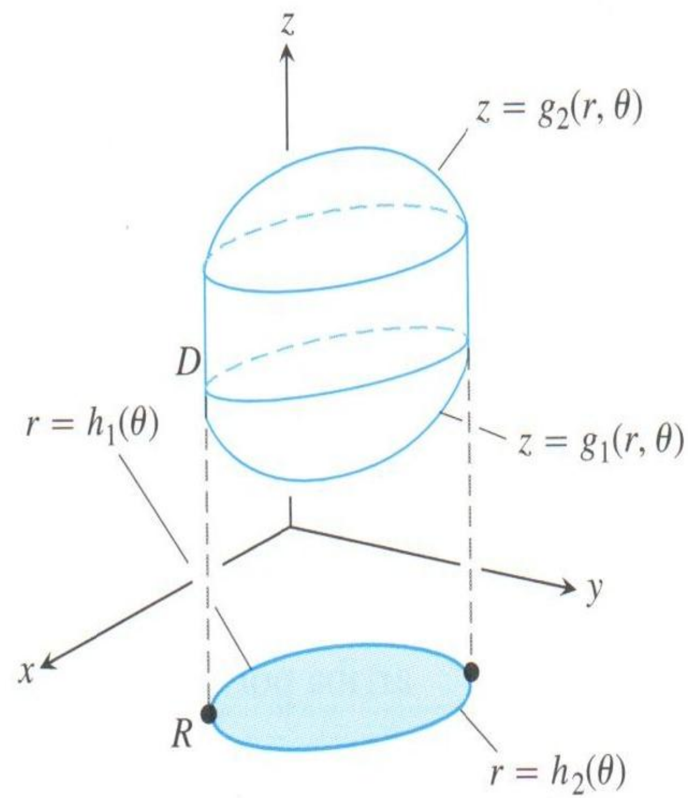
Y en el límite:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\|P\|\to 0} S_n = \iiint_D f \; dV = \iiint_D f\, dz\, r\, dr\, d\theta}$$

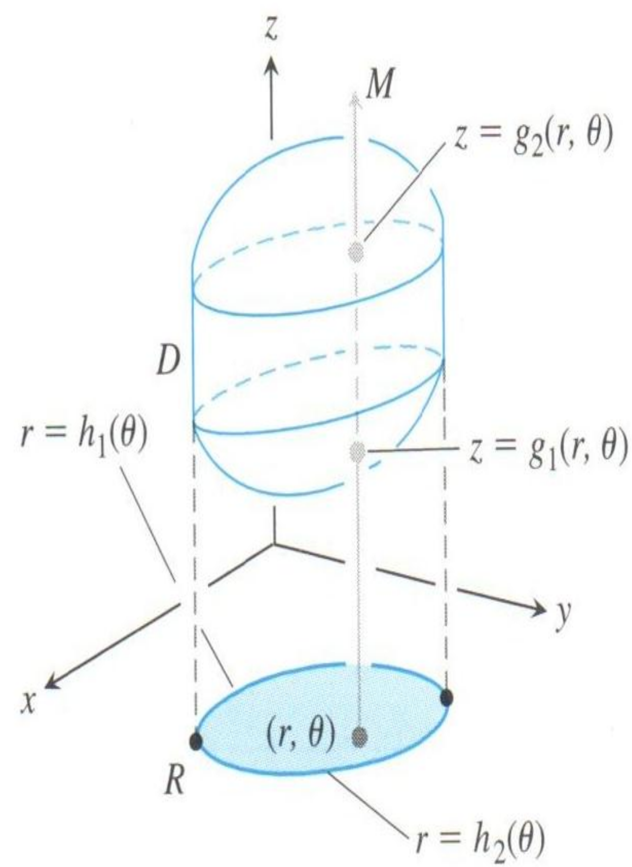
Cómo integrar en coordenadas cilíndricas?

- Se verá cómo evaluar la integral: $\iiint\limits_{D} f(r,\theta,z)\,dV$

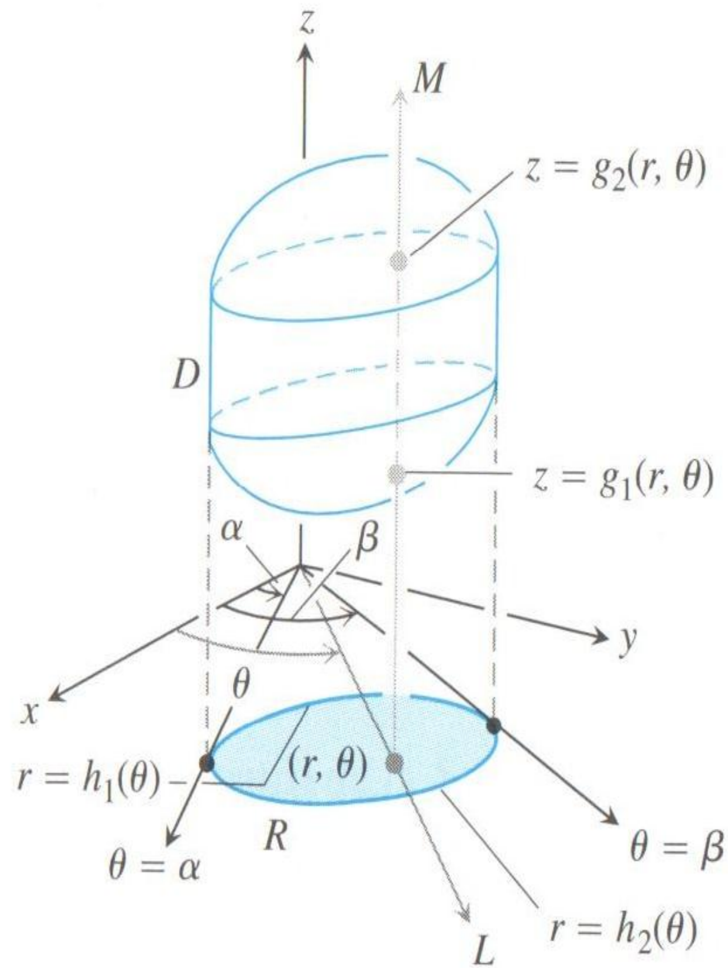
1. *Haga un bosquejo*. Trace la región D junto con su proyección R sobre el plano xy. Marque las superficies y las curvas que acotan a D y a R.



2. *Determine los límites de integración.* Trace una recta M paralela al eje z, por un punto típico (r, θ) de R. Mientras z crece, M entra a D en $z = g_1(r, \theta)$ y sale en $z = g_2(r, \theta)$. Éstos son los límites de integración en z.



3. *Determine los límites de integración en r.* Trace un rayo L por (r, θ) desde el origen. El rayo entra a R en $r = h_1(\theta)$ y sale en $r = h_2(\theta)$. Éstos son los límites de integración en r.



4. *Determine los límites de integración en θ.* Cuando L barre R, el ángulo θ que forma con el semieje positivo x va desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$. Éstos son los límites de integración en θ. La integral es

$$\iiint_D f(r, \theta, z)\, dV = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=h_1(\theta)}^{r=h_2(\theta)} \int_{z=g_1(r,\theta)}^{z=g_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta.$$