7.3. FEM 2D calor

Resolver por elementos finitos la evolución temporal de la temperatura de una placa triangular equilátera de lado 1 metro sometida a conducción pura (sin fuentes) y discretizada como un único triángulo y sometida en sus 3 caras a condiciones de contorno del tipo mixta. La temperatura inicial de la placa es de 30 Celsius, la temperatura ambiente es de 100 Celsius, el coeficiente h es de 100 kW/m2/K, la densidad del material de la placa es de 7800 kg/m3, el calor específico es de 460 J/Kg/K y la conductividad es de 53 W/m/K.

1. Informar las matrices de masa y de conducción y el vector miembro derecho elemental.
2. Elija el paso de tiempo necesario para poderlo resolver en forma implícita de manera estable.
3. Informar las temperaturas calculadas al cabo de 1 y 2 segundos.
4. Calcular los flujos de calor al cabo de 1 y 2 segundos por cada una de las 3 caras del dominio triangular.

Para empezar recordemos como eran las expresiones que permiten integrar un triángulo arbitrario tanto en coordenadas reales como en las naturales del elementos master.

$$\underline{\underline{J^e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_j - x_i) & (y_j - y_i) \\ (x_k - x_i) & (y_k - y_i) \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

$$\underline{\underline{B^e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} & \frac{\partial N_j^e}{\partial x} & \frac{\partial N_k^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial y} & \frac{\partial N_j^e}{\partial y} & \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \end{bmatrix} = (\underline{\underline{J^e}})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} & \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} & \frac{\partial N_k^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} & \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} & \frac{\partial N_k^e}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{B^e}} = (\underline{\underline{J^e}})^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

Suponiendo que el triángulo tiene el primer vértice en $(x, y) = (0, 0)$ y en consecuencia por definición del problema tendremos

$$(x, y)_1 = (0, 0) \tag{7.13}$$
$$(x, y)_2 = (1, 0) \tag{7.14}$$
$$(x, y)_3 = (\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2) \tag{7.15}$$
$$\tag{7.16}$$

En ese caso el jacobiano se escribe como:

$$(\underline{\underline{J^e}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

entonces la matriz de conducción sin la contribución del contorno se escribe como

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \nabla N^T \, k \, \nabla N \, d\Omega = \int_{\Omega^e} B^T \, k \, B \, d\Omega \tag{7.18}$$

$$\mathbf{K}^e = \begin{pmatrix} 30{,}6 & -15{,}3 & -15{,}3 \\ -15{,}3 & 30{,}6 & -15{,}3 \\ -15{,}3 & -15{,}3 & 30{,}6 \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

En cuanto a la matriz de masa tenemos

$$\mathbf{M}^e_{ij} = \int_{\Omega^e} N_i \, (\rho \, C_p) \, N_j \, d\Omega = \int_{\hat{\Omega}^e} N_i \, (\rho \, C_p) \, N_j \, |J^e| d\hat{\Omega} = \rho \, C_p \, \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{7.20}$$

$$\mathbf{M}^e = 10^5 \begin{pmatrix} 2{,}5894 & 1{,}2947 & 1{,}2947 \\ 1{,}2947 & 2{,}5894 & 1{,}2947 \\ 1{,}2947 & 1{,}2947 & 2{,}5894 \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

En cuanto a la condición Robin o mixta, el aporte a la matriz del contorno entre los nodos 1 y 2 es:

$$\mathbf{A}^e_{12} = \int_{1-2} N_i \, h \, N_j \, ds = \int_0^1 h \begin{pmatrix} (1-s)^2 & (1-s)\, s & 0 \\ (1-s)\, s & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ds = \frac{1}{6} \, h \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

Dada la similitud de los 3 lados, todos unitarios y con las mismas condiciones esto se repite del siguiente modo:

$$\mathbf{A}^e_{23} = \int_{2-3} N_i \, h \, N_j \, ds = \frac{1}{6} \, h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

$$\mathbf{A}^e_{31} = \int_{3-1} N_i \, h \, N_j \, ds = \frac{1}{6} \, h \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

$$\left(M^e + K^e + A^e_{12} + A^e_{23} + A^e_{31}\right) T^{n+1} = M^e T^n + f^e_{12} + f^e_{23} + f^e_{31}$$

Con un paso de tiempo $\Delta t = 0{,}1$ si seguimos la evolucion temporal hasta los 10 segundos vemos la siguiente figura:

Los flujos de calor a través de las 3 caras son iguales dado que las temperaturas de los 3 nodos crecen similarmente con el tiempo y las condiciones externas son únicas para las 3 caras. Entonces el flujo de calor surge de la propia condición mixta, es decir:

$$k\nabla T(t)\cdot\boldsymbol{\eta} + h(T(t) - T_\infty) = 0$$

Es decir que el flujo de calor se puede calcular a partir de

$$q = -k\nabla T(t)\cdot\boldsymbol{\eta} = h(T(t) - T_\infty)$$

Como la temperatura varia en el tiempo graficamos como es ese flujo de calor en el tiempo en la siguiente figura:

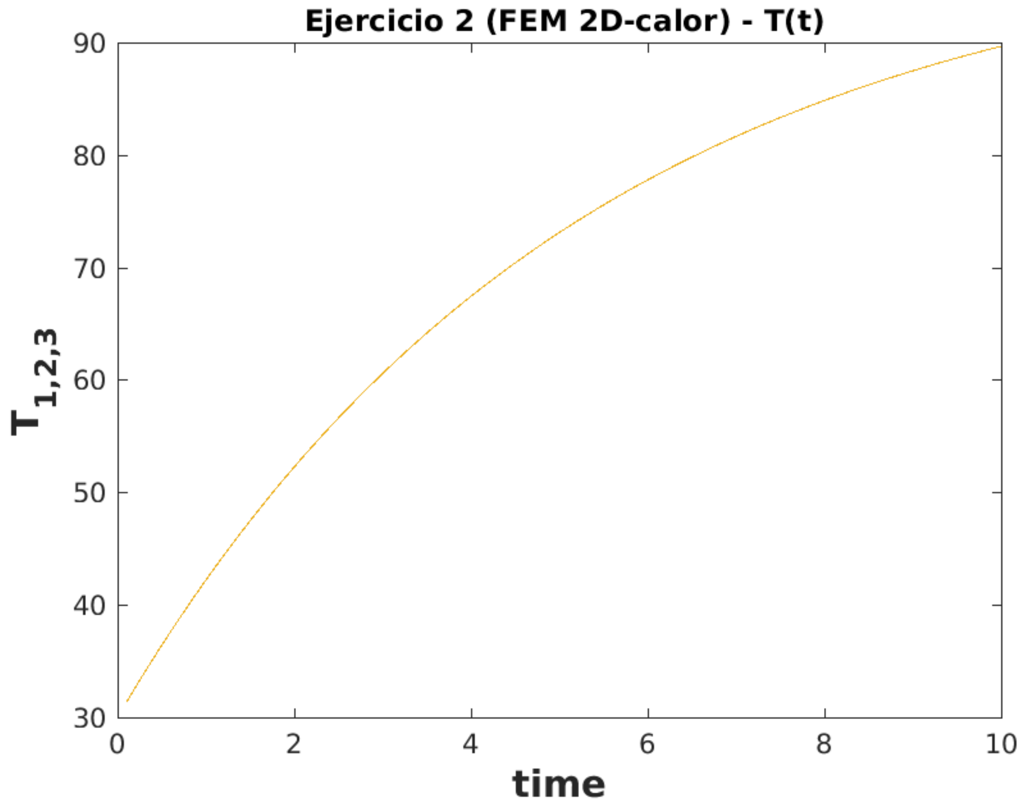

Figura 7.8: Temperatura vs tiempo - FEM 2D

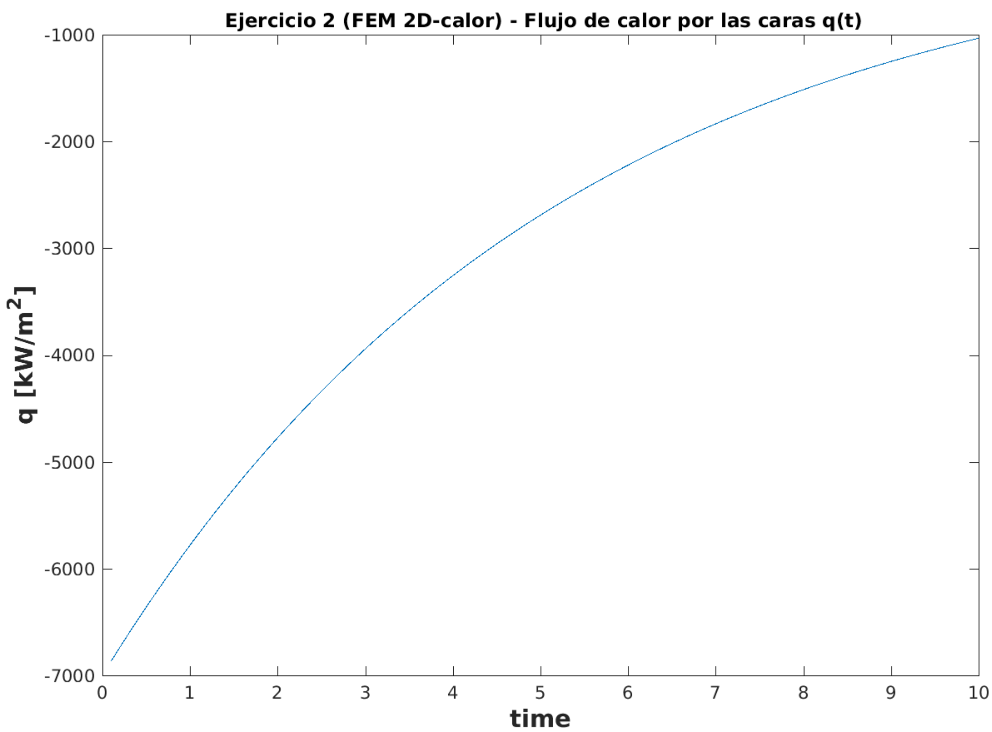

Figura 7.9: Flujo de calor vs tiempo - FEM 2D