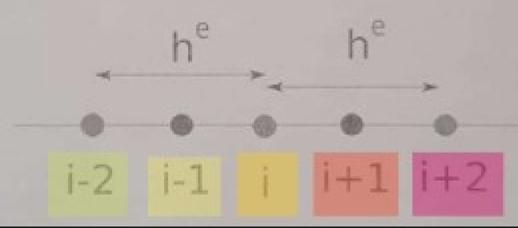
4. Ejercicio de Elementos Finitos (FEM)

1. Escriba las matrices elementales del término reactivo y el de difusión usando elementos finitos cuadráticos en 1D en forma genérica.
2. Ensamble estas matrices para un nodo i, extremo derecho del elemento anterior e izquierdo del elemento posterior de una malla como la mostrada en la figura.
3. Lo mismo pero ahora para el nodo interior "i-1" del elemento anterior y del "i+1" posterior al nodo "i".

Asuma que ambos elementos tienen la misma longitud "he" como se muestra en la figura



$$= \frac{x_1\xi^2}{2} - \frac{x_1\xi}{2} + x_2 - x_2\xi^2 + \frac{x_3\xi^2}{2} + \frac{x_3\xi}{2}$$

$$= \xi^2\left(\cancel{\frac{x_1+x_3}{2} - x_2}\right) + \frac{\xi}{2}\underbrace{(x_3 - x_1)}_{h} + x_2$$

$$x = \frac{h}{2}\xi + x_2 \qquad \frac{dx}{d\xi} = \frac{h}{2} \rightarrow \boxed{dx = }$$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = \frac{dN_1}{dx}\frac{dx}{d\xi} = \frac{h}{2}\frac{dN_1}{dx} \rightarrow \frac{dN}{dx}$$

$$\frac{dN_1}{dx} = \frac{2}{h}\left(\xi - \tfrac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{2\xi - 1}{h}}$$

$$\frac{dN_2}{dx} = \frac{2}{h}\cdot -2\xi = \boxed{\frac{-4\xi}{h}}$$

$$\frac{dN_3}{dx} = \frac{2}{h}\cdot\left(\xi + \tfrac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{2\xi + 1}{h}}$$

1) En elementos cuadráticos 1D, cada elemento tiene 3 funciones de forma, las cuales se definen como:

$$N_1(\xi) = \frac{(1-\xi)(1-2\xi)}{2} \qquad N_2(\xi) = 1 - \xi^2 \qquad N_3(\xi) = \frac{\xi(2\xi - 1)}{2}$$

Y sus derivadas: $\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{2}(4\xi - 3)$ $\quad \frac{dN_2}{d\xi} = -2\xi$ $\quad \frac{dN_3}{d\xi} = 2\xi - \frac{1}{2}$

Con la transformación a coordenadas globales $x(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-2\xi)x_1 + (1-\xi^2)x_2 + \frac{1}{2}\xi(2\xi-1)x_3.$

Las matrices del término difusivo y reactivo elementales se escriben como:

$$K^e_{ij} = \int_{\Omega e} k(x)\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{dN_l}{d\xi}\frac{dN_m}{d\xi}\cdot\frac{1}{J}\,d\xi \qquad C^e_{ij} = \int_{\Omega e} c(x)\,N_i N_j\,dx = \int_{-1}^{1} N_l N_m \cdot J\,d\xi$$

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{k}{h}\begin{bmatrix} 7/3 & -8/3 & 1/3 \\ -8/3 & 16/3 & -8/3 \\ 1/3 & -8/3 & 7/3 \end{bmatrix}$$

Si los nodos están equiespaciados entonces $J = \frac{h}{2}$

$$J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{dN}{d\xi}x_1 + \frac{dN}{d\xi}x_2 + \frac{dN}{d\xi}x_3$$

$$\underline{\underline{C}}^e = \frac{c\cdot h}{30}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2 y 3) Teniendo las dos matrices de los elementos

$$\underline{\underline{K}}^{e_1} = \frac{k}{h}\begin{bmatrix} 7/3 & -8/3 & 1/3 \\ -8/3 & 16/3 & -8/3 \\ 1/3 & -8/3 & 7/3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{K}}^{e_2} = \frac{k}{h}\begin{bmatrix} 7/3 & -8/3 & 1/3 \\ -8/3 & 16/3 & -8/3 \\ 1/3 & -8/3 & 7/3 \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{\underline{C}}^{e_1} = \frac{c\cdot h}{30}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}}^{e_2} = \frac{c\cdot h}{30}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}} = \frac{k}{h^e}\begin{bmatrix} 7/3 & -8/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ -8/3 & 16/3 & -8/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -8/3 & 7/3 + 7/3 & -8/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -8/3 & 16/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & -8/3 & 7/3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow \text{Para el nodo i-1} \\ \rightarrow \text{Para el nodo i} \\ \rightarrow \text{Para el nodo i+1} \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{\underline{C}} = \frac{c\cdot h}{30}\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 + 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow \text{Para el nodo i-1} \\ \rightarrow \text{Para el nodo i} \\ \rightarrow \text{Para el nodo i+1} \\ \\ \end{array}$$

Ejercicio de Elementos Finitos (FEM)

Escriba las matrices del término temporal, el reactivo y el de difusión usando elementos finitos lineales en 1D con paso de tiempo 0.1 segundo, coeficiente de reacción 25 y difusión 1E-3 para un nodo interior "i" de una malla, nodo compartido por 2 elementos, a la izquierda uno de tamaño 0.5 metros y a la derecha otro de tamaño 0.75 metros, como se muestra en la figura.

Las funciones de forma para elementos finitos lineales 1D se definen como:

$$N_1 = 1 - \xi \qquad N_2 = \xi$$

El sistema matricial a resolver queda: $\rho c_p \underline{\underline{C}}\,\dot{\underline{T}} = \underline{\underline{K}}\,\underline{T}^n + \underline{\underline{C}}\,\underline{T}^n + \underline{F}$

$$\underline{\underline{C}}^e = \frac{c h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{K}}^e = \frac{k}{h^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = 25 \quad k = 1e^{-3}$$

$$\underline{\underline{K}}^{e_1} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{0,5}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{500} & \frac{-1}{500} \\ \frac{-1}{500} & \frac{1}{500} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{K}}^{e_2} = \frac{1\cdot 10^{-3}}{0,75}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{750} & \frac{-1}{750} \\ \frac{-1}{750} & \frac{1}{750} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}}^{e_1} = \frac{25\cdot 0,5}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{25}{6} & \frac{25}{12} \\ \frac{25}{12} & \frac{25}{6} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{C}}^{e_2} = \frac{c h}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & \frac{25}{8} \\ \frac{25}{8} & \frac{25}{4} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{500} & \frac{-1}{500} & 0 \\ \frac{-1}{500} & \frac{1}{500} + \frac{1}{750} & \frac{-1}{750} \\ 0 & \frac{-1}{750} & \frac{1}{750} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} \frac{25}{6} & \frac{25}{12} & 0 \\ \frac{25}{12} & \frac{25}{6} + \frac{25}{4} & \frac{25}{8} \\ 0 & \frac{25}{8} & \frac{25}{4} \end{bmatrix}$$