Cálculo II

INTEGRALES DE LÍNEA

Prof. Ing. Silvia Seluy

Resumen de Integrales estudiadas

- La integral definida sobre un intervalo real

$$\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{Integración sobre el intervalo } [a, b].$$

- La integral doble sobre una región plana

$$\iint_R f(x, y)\, dA \qquad \text{Integración sobre la región } R.$$

- La integral triple sobre una región sólida

$$\iiint_Q f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

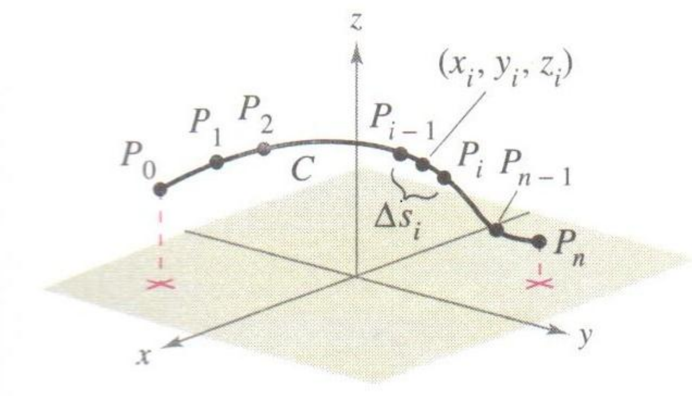
Las integrales definidas y las integrales de línea

- Para encontrar la masa de una varilla delgada o el trabajo realizado por una fuerza variable que actúa en dirección del eje x, se usa una integral definida.

- Para calcular la masa (o el trabajo producido por una fuerza sobre) de una varillas o cables a lo largo de una curva en el plano o en el espacio, se utilizan integrales más generales conocidas como integrales de línea (refiriéndose a la curva).

La integral de línea

Para definir la integral de línea se trabaja sobre una curva C, suave por partes[1] haciendo una partición de C (tomando a C como la masa de un alambre de longitud finita).Dicha partición se hace mediante puntos como Po,P1, ….., Pn, obteniendo de esa manera, n sub-arcos.



Partición de la curva C.

Al tomar el í-ésimo sub-arco , su longitud está dada por ΔS_i . Se elige en cada sub-arco un punto (x_i, y_i, z_i) y se puede aproximar la masa del alambre a:

$$\boxed{\text{Masa del alambre} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i}$$

(1) (sus derivadas primeras $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ y $\frac{dz}{dt}$ si es una curva del espacio, deben ser continuas en el [a,b] y no simultáneamente nulas en el (a,b), lo mismo para curvas en el plano).

Al hacer tender a cero la longitud del sub- arco más largo, es decir, aplicando $\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$

Cuando el límite existe y es finito, obtenemos la masa del alambre y entonces se define a la integral de línea como:

Si f está definida en una región que contenga una curva suave C de longitud finita, entonces la **integral de línea de f a lo largo de C** está dada por

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta s_i \qquad \text{Plano}$$

o

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta s_i \qquad \text{Espacio}$$

Cómo evaluar una integral de línea

Para evaluar una integral de línea sobre una curva C en el plano o en el espacio, se usa el hecho que :

$$ds = \|r'(t)\|dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\ dt$$

Por lo cual, para evaluar la integral de línea se recurre a:

TEOREMA 13.4 Evaluación de una integral de línea como integral definida

Sea f continua en una región que contenga una curva suave C. Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, donde $a \le t \le b$, entonces

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE

Observe que si $f(x, y, z) = 1$, la integral de línea proporciona la longitud de arco de la curva C, como se definió en la sección 10.5. Es decir

$$\int_C 1\, ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \text{longitud de arco de la curva } C.$$

INTEGRAL DE LÍNEA PARA UNIÓN DE DOS TRAYECTORIAS

EJEMPLO:

La figura 16.3 muestra otra trayectoria desde el origen hasta el punto (1, 1, 1), la unión de las trayectorias C_1 y C_2. Integrar la función $f(x, y, z) = x - 3y^2 + z$ sobre $C_1 \cup C_2$.

Solución Elegimos la parametrización más sencilla que podamos pensar para C_1 y C_2, verificando las longitudes de los vectores de velocidad en el desarrollo:

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$C_2: \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1.$$

Con estas parametrizaciones obtenemos que

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(x, y, z)\, ds = \int_{C_1} f(x, y, z)\, ds + \int_{C_2} f(x, y, z)\, ds \qquad \text{Ecuación (3)}$$

$$= \int_0^1 f(t, t, 0)\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 f(1, 1, t)(1)\, dt \qquad \text{Ecuación (2)}$$

$$= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0)\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1)\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}.$$

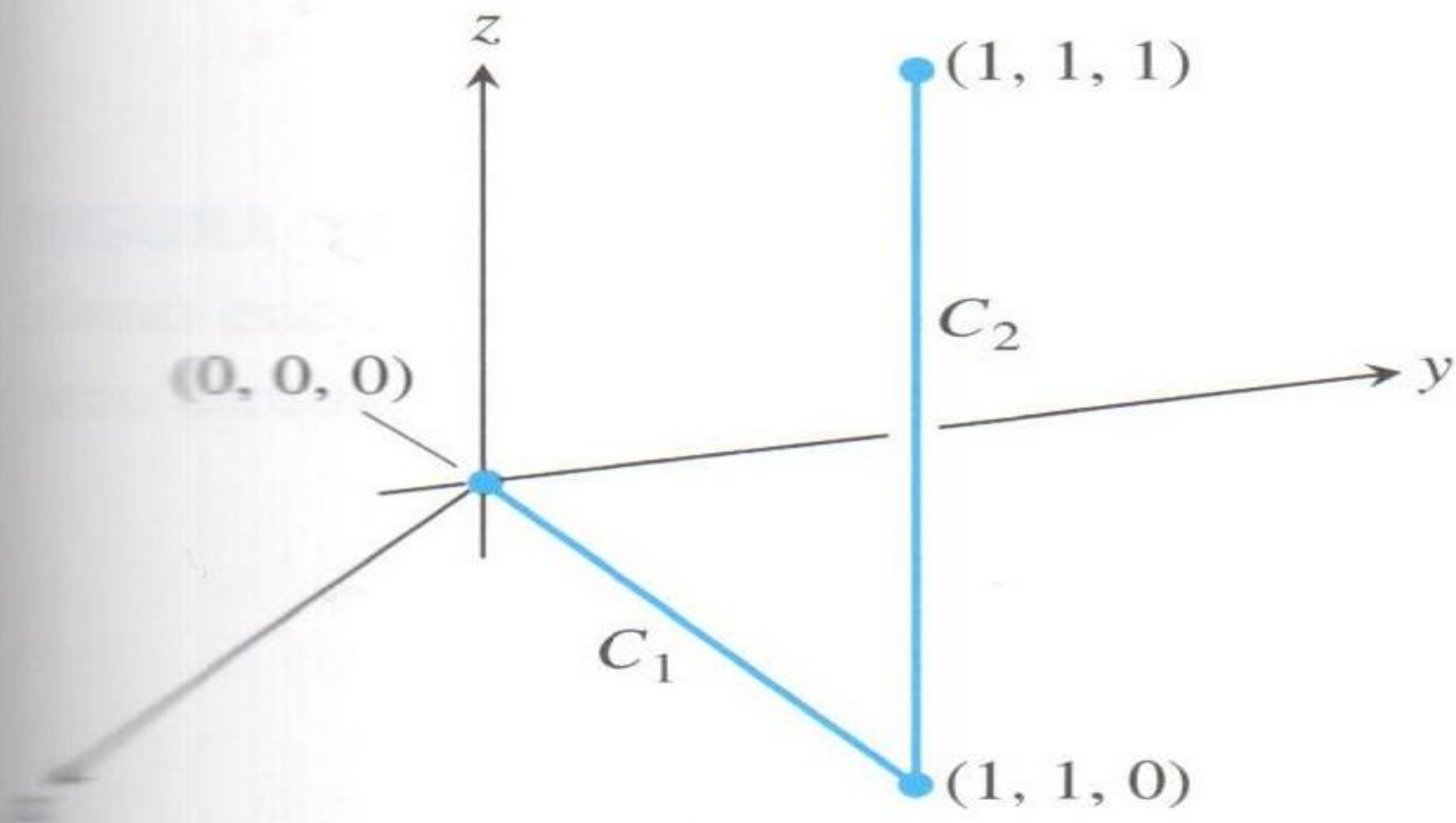


FIGURA 16.3 La trayectoria de integración del ejemplo 2.

INTEGRALES DE LÍNEA DE CAMPOS VECTORIALES

Una aplicación de las integrales de línea es calcular el trabajo realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas **F,** considerando que dicho movimiento es a lo largo de una curva C de dicho campo.

Para calcular el trabajo, se debe considerar la proyección de la fuerza que actúa en la misma dirección en que se mueve el objeto.

Esto conduce a que en cada punto de C, actuará la proyección del vector fuerza **F** sobre el vector unitario **T** , esto es **F.T** (Ej. 6 y 7)

$$W = \int_C \overline{F}(x,y,z).\overline{T}(x,y,z)ds$$

F . T ds = $\overline{F}\dfrac{\overline{r'}(t)}{\left|\overline{r'}(t)\right|}.\left|\overline{r'}(t)\right|dt = \overline{F}.\overline{r'}(t)dt = \overline{F}.d\overline{r}$

Orientación de la curva: en integrales de línea de funciones vectoriales , si se invierte la orientación de la curva, entonces el vector **T**(t) cambia a – **T** (t)

Definición de integral de línea de un campo vectorial

Sea **F** un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. La **integral de línea** de **F** sobre C es la dada por

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t),\ y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Integrales de línea en forma diferencial (Ej. 8 y9)

Una segunda forma de la integral de línea que se usa comúnmente proviene de la notación para campo vectorial empleada en la sección anterior. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de la forma $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ y C se representa como $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ suele expresarse como $M\,dx + N\,dy$.

$$
\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt \\
&= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j})\, dt \\
&= \int_a^b \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt}\right) dt \\
&= \int_C (M\,dx + N\,dy)
\end{aligned}
$$

Esta **forma diferencial** puede extenderse a tres variables. Los paréntesis suelen omitirse como se muestra a continuación.

$$\int_C M\,dx + N\,dy \qquad \text{y} \qquad \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

Observe cómo se usa esta notación diferencial en el ejemplo 8.

Seis formas distintas de escribir la integral de trabajo

$$\mathbf{W} = \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$ La definición

$$= \int_{t=a}^{t=b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$ Forma diferencial compacta

$$= \int_{a}^{b} \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt$$ Desarrollada para incluir a dt; enfatiza al parámetro t y al vector de velocidad $d\mathbf{r}/dt$

$$= \int_{a}^{b} \left(M\frac{dg}{dt} + N\frac{dh}{dt} + P\frac{dk}{dt}\right)dt$$ Enfatiza las funciones componentes

$$= \int_{a}^{b} \left(M\frac{dx}{dt} + N\frac{dy}{dt} + P\frac{dz}{dt}\right)dt$$ Abrevia los componentes de $\mathbf{r}$

$$= \int_{a}^{b} M\,dx + N\,dy + P\,dz$$ Se cancela dt; es la forma más común

Teorema fundamental de las integrales de línea

Sea C una curva suave por partes contenida en una región abierta R y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b.$$

Si $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo en R y M y N son continuas en R, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

donde f es una función de potencial de $\mathbf{F}$. Es decir, $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

Demostración Únicamente se presenta una demostración para curvas suaves. Para curvas suaves por partes se lleva a cabo este procedimiento, por separado, para cada porción suave. Como $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$, se concluye que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

$$= \int_a^b \left[f_x(x, y)\frac{dx}{dt} + f_y(x, y)\frac{dy}{dt} \right] dt$$

y, de acuerdo con la regla de la cadena (teorema 11.6), se tiene

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt}[f(x(t), y(t))]\, dt$$

$$= f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a)).$$

Este último paso es una aplicación del teorema fundamental del cálculo.

Repaso Teorema 11.6 que cita la demostración anterior

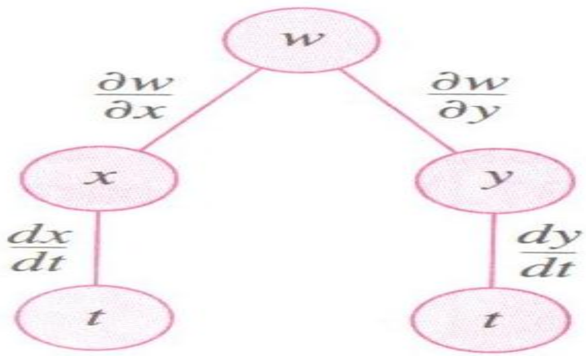
Se refiere a la Regla de la Cadena estudiada anteriormente:

TEOREMA 11.6 Regla de la cadena: una variable independiente

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función derivable de x y y. Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$ y g y h son funciones derivables de t, entonces w es una función derivable de t y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Ver figura 11.38.



Regla de la cadena: una variable independiente w es función de x y y, cada una de las cuales es función de t. Este diagrama representa la derivada de w respecto a t.

Figura 11.38

El Teorema fundamental de las I.L. en el espacio. Ej 2-3

En el espacio, el teorema fundamental de las integrales de línea toma la forma siguiente. Sea C una curva suave por partes en el interior de una región abierta Q y dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es conservativo y M, N y P son continuas, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

El teorema fundamental de las integrales de línea dice que si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo, entonces la integral de línea entre dos puntos cualesquiera es simplemente la diferencia entre los valores de la función de *potencial* f en estos puntos.

INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA (sin demo)

De las conclusiones del Teorema fundamental de las integrales de línea, se desprende que si el campo **F** es continuo y conservativo en una región abierta R, el valor de la integral de línea es el mismo por cualquier camino que se tome para ir desde un punto fijo hacia otro, en la región R. Esta afirmación significa que la integral de línea es **independiente de la trayectoria**, y es equivalente a decir que el campo **F**, es conservativo.

Propiedades de los campos conservativos

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ tiene primeras derivadas parciales continuas en una región R abierta conexa y C es una curva suave por partes en R, entonces las condiciones siguientes son equivalentes.

1. $\mathbf{F}$ es conservativo. Es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f.
2. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria.
3. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva *cerrada* C en R.

Ejemplo de trabajo realizado por un campo conservativo

Determinar el trabajo realizado por el campo conservativo

$$\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} = \nabla(xyz)$$

a lo largo de una curva suave C que une los puntos $A(-1, 3, 9)$ y $B(1, 6, -4)$.

Solución Con $f(x, y, z) = xyz$, tenemos

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla f \cdot d\mathbf{r} \qquad \mathbf{F} = \nabla f$$

$$= f(B) - f(A) \qquad \text{Teorema fundamental, parte 2}$$

$$= xyz|_{(1,6,-4)} - xyz|_{(-1,3,9)}$$

$$= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9)$$

$$= -24 + 27 = 3.$$

Ejemplo de campo no conservativo

Criterio de componentes para campos conservativos

Sea $\mathbf{F} = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo cuyas funciones componentes tienen sus primeras derivadas parciales continuas. Entonces, $\mathbf{F}$ es conservativo si, y sólo si,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}. \tag{2}$$

Mostrar que $\mathbf{F} = (2x - 3)\mathbf{i} - z\mathbf{j} + (\cos z)\mathbf{k}$ no es conservativo.

Solución Aplicamos el criterio de los componentes en las ecuaciones (2) y vemos de inmediato que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1.$$

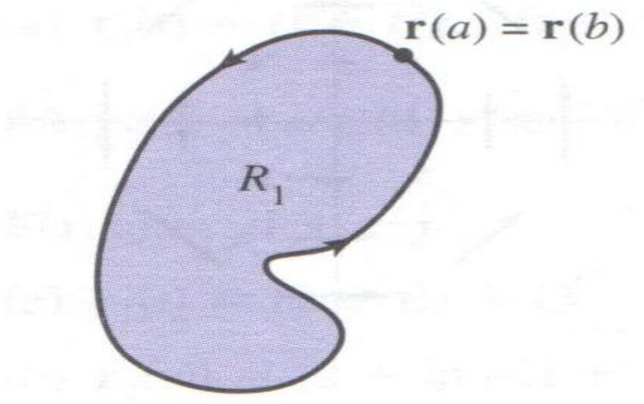
Como son diferentes, $\mathbf{F}$ no es conservativo. No requerimos más verificaciones. ■

EL TEOREMA DE GREEN

Debe su nombre al matemático inglés George Green (1793-1841).

El Teorema relaciona una integral doble sobre una región R, en el plano, simplemente conexa, con una integral de línea sobre la frontera de R.

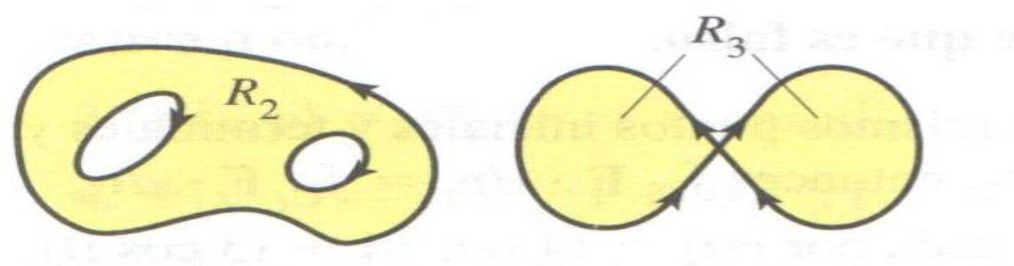
Región simplemente conexa: si su frontera es una curva cerrada simple y cuando dos puntos en la región se pueden unir por un camino poligonal en su interior.



Región simplemente conexa

Curva simple: si no se corta a sí misma.

Las curvas planas, simples, cerradas son Curvas de Jordan



Región no simplemente conexa

Enunciado del Teorema de Green:

Sea R una región simplemente conexa con una frontera C suave por partes, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (es decir, C hace sólo *un* recorrido de manera que la región se encuentra siempre a su *izquierda*). Si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contenga a R, entonces

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA.$$

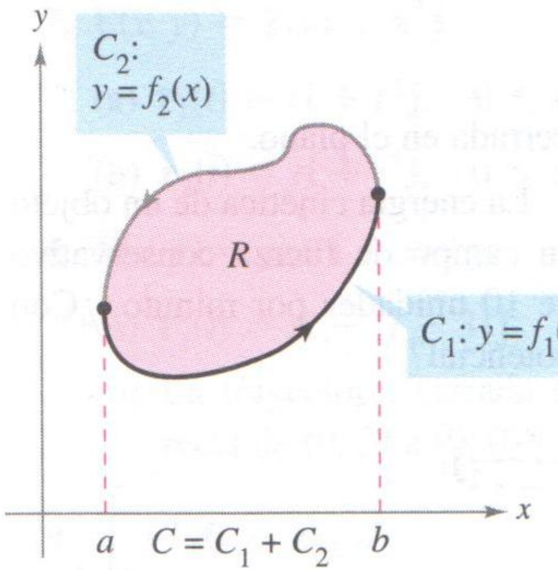
DEMOSTRACIÓN

Demostración Aquí únicamente se da una demostración para una región tanto vertical como horizontalmente simple, como se muestra en la figura 13.27.

$$\begin{aligned}\int_C M\,dx &= \int_{C_1} M\,dx + \int_{C_2} M\,dx\\ &= \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx + \int_b^a M(x, f_2(x))\,dx\\ &= \int_a^b [M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))]\,dx\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\int_R\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dA &= \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,dy\,dx\\ &= \int_a^b M(x, y)\Big]_{f_1(x)}^{f_2(x)}\,dx\\ &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\,dx.\end{aligned}$$



R es verticalmente simple.

Por lo tanto,

$$\int_C M\,dx = -\int_R\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dA.$$

De manera similar pueden usarse $g_1(y)$ y $g_2(y)$ para demostrar que $\int_C N\,dy = \int_R\int \partial N/\partial x\,dA$. Sumando las integrales $\int_C M\,dx$ y $\int_C N\,dy$, se llega a la conclusión dada en el teorema.

Ejemplo: Uso del teorema de Green

Use el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy$$

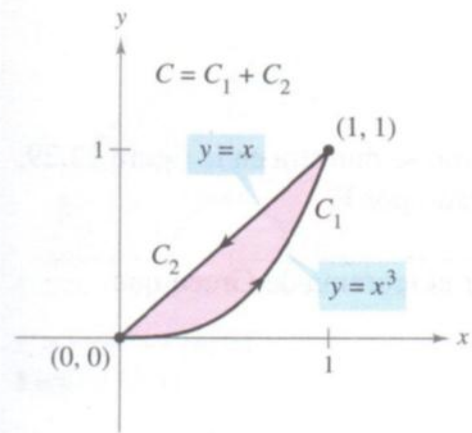
donde C es la trayectoria de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ a lo largo de la gráfica de $y = x^3$ y de $(1, 1)$ a $(0, 0)$ a lo largo de la gráfica de $y = x$, como se muestra en la figura 13.28.

Solución Dado que $M = y^3$ y $N = x^3 + 3xy^2$, se concluye que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2.$$

Aplicando el teorema de Green se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_C y^3\,dx + (x^3 + 3xy^2)\,dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\
&= \int_0^1 \int_{x^3}^{x} [(3x^2 + 3y^2) - 3y^2]\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_{x^3}^{x} 3x^2\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 3x^2y\Big]_{x^3}^{x}\,dx \\
&= \int_0^1 (3x^3 - 3x^5)\,dx \\
&= \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$



C es simple y cerrada y la región *R* se encuentra siempre a la izquierda de *C*.

TEOREMA 13.9 Integral de línea para un área

Si R es una región en el plano limitada por una curva C suave por partes cerra
da simple, orientada en dirección contraria a las manecillas del reloj, entonces
el área de R está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx.$$

EJEMPLO 6 Ampliación del teorema de Green a regiones con un orificio

Sea R la región interior a la elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$ y exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Evalúe la integral de línea

$$\int_C 2xy\,dx + (x^2 + 2x)\,dy$$

donde $C = C_1 + C_2$ es la frontera de R, como se muestra en la figura 13.33.

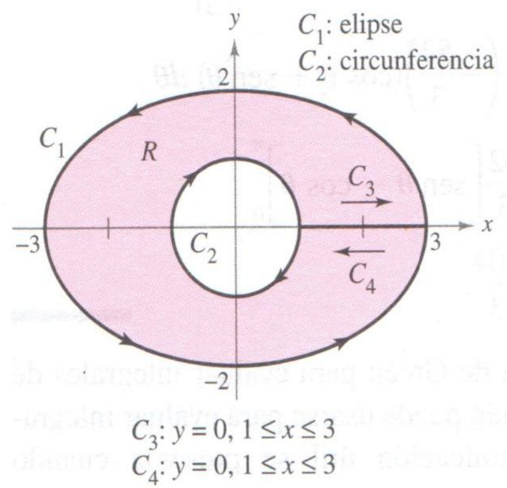


Figura 13.33

Solución Para empezar, se introducen los segmentos de recta C_3 y C_4 como se muestra en la figura 13.33. Observe que como las curvas C_3 y C_4 tienen orientaciones opuestas, las integrales de línea sobre ellas se cancelan. Además, puede aplicarse el teorema de Green a la región R usando la frontera $C_1 + C_4 + C_2 + C_3$, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_C 2xy\,dx + (x^2 + 2x)\,dy &= \int_R\!\!\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \\
&= \int_R\!\!\int (2x + 2 - 2x)\,dA \\
&= 2\int_R\!\!\int dA \\
&= 2(\text{área de } R) \\
&= 2(\pi ab - \pi r^2) \\
&= 2[\pi(3)(2) - \pi(1^2)] \\
&= 10\pi.
\end{aligned}$$

Dos formas alternativas de Green

El rotacional y la divergencia permiten expresar el Teorema de Green en dos versiones (formas) que serán muy útiles posteriormente.

1º Forma: la integral de línea de la componente tangencial de **F**, a lo largo de C es igual a la integral doble de la componente vertical del Rotacional de **F** sobre la región R, delimitada por C.

2º Forma: la integral de línea de la componente normal de **F**, a lo largo de C es igual a la integral doble de la divergencia de **F** sobre la región R delimitada por C

Formas alternativas del teorema de Green

Esta sección concluye con la deducción de dos formas vectoriales del teorema de Green para regiones en el plano. La extensión de estas formas vectoriales a tres dimensiones es la base del estudio de las secciones restantes de este capítulo. Si **F** es un campo vectorial en el plano, puede escribirse

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

de manera que, como se describió en la sección 13.1, el rotacional de **F** está dado por

$$\textbf{rot F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Por lo tanto,

$$(\textbf{rot F}) \cdot \mathbf{k} = \left[-\frac{\partial N}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial M}{\partial z}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\right] \cdot \mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Con las condiciones apropiadas sobre **F**, C y R el teorema de Green puede escribirse en la forma vectorial

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_R\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$= \int_R\int (\textbf{rot F}) \cdot \mathbf{k}\, dA. \qquad \text{Primera forma alternativa}$$

La extensión de esta forma vectorial del teorema de Green a superficies en el espacio da lugar al **teorema de Stokes**, que se analizará en la sección 13.8.

Para la segunda forma vectorial del teorema de Green, se suponen las mismas condiciones para **F**, C y R. Usando el parámetro longitud de arco s para C, se tiene $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}$. Por lo tanto, un vector unitario tangente **T** a la curva C está dado por

$$\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T} = x'(s)\mathbf{i} + y'(s)\mathbf{j}.$$

De la figura 13.34 puede verse que el vector unitario normal *exterior* **N** puede expresarse como

$$\mathbf{N} = y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j}.$$

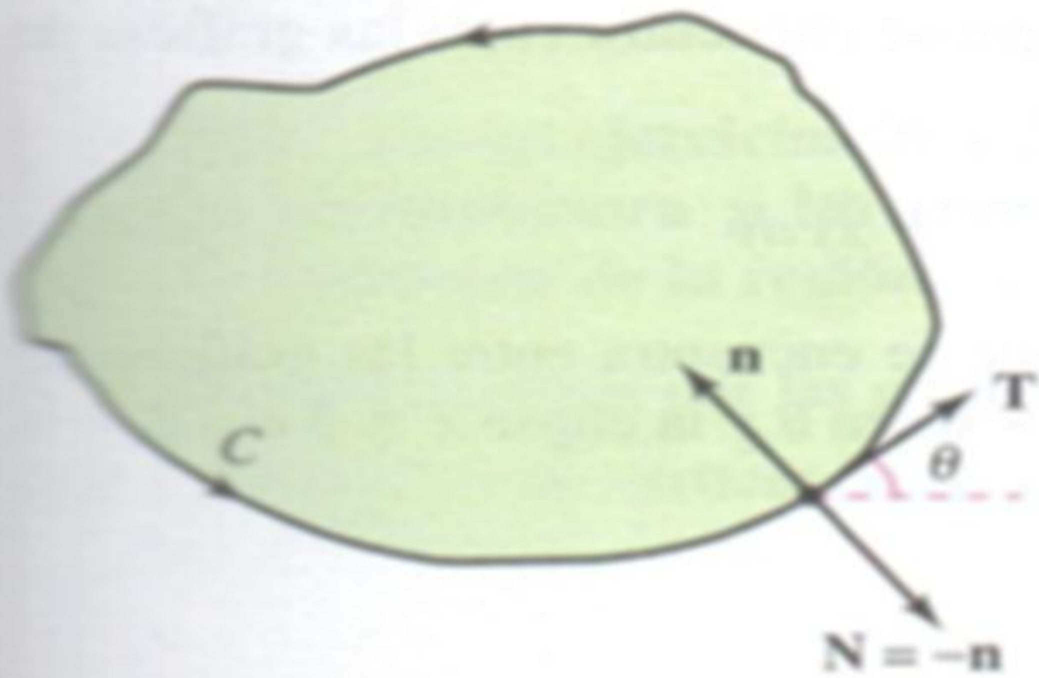
Así, dado $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, puede aplicarse el teorema de Green para obtener

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j})\cdot(y'(s)\mathbf{i} - x'(s)\mathbf{j})\,ds \\
&= \int_a^b \left(M\frac{dy}{ds} - N\frac{dx}{ds}\right) ds \\
&= \int_C M\,dy - N\,dx \\
&= \int_C -N\,dx + M\,dy \\
&= \int_R\int \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA \qquad \text{Teorema de Green} \\
&= \int_R\int \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,ds = \int_R\int \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA. \qquad \text{Segunda forma alternativa}$$

La extensión de esta forma para tres dimensiones se conoce como **teorema de la divergencia**, que se analizará en la sección 13.7. Las interpretaciones físicas de la divergencia y del rotacional se verán en las secciones 13.7 y 13.8.



$$\mathbf{T} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{n} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{j}$$

$$= -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{N} = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j}$$

Figura 13.34