ECUACIONES DIFERENCIALES – PRIMER PARCIAL 13/10/12

NOMBRE……………………………………………………………………CARRERA………

EJERCICIO 1:

La siguiente ecuación diferencial de primer orden se puede resolver por diferentes métodos según cómo se plantee:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy + x^2} \qquad (*)$$

a) Justifica por qué la ecuación (*) es homogénea. Luego, halla todas sus soluciones usando el método habitual para este tipo de ecuaciones y la solución particular que pasa por el punto $(-1, e)$.

b) ¿Cuáles son las variables dependiente e independiente de la ecuación (*)? Intercambia dichas variables y comprueba que la ecuación resultante es de Bernoulli. Realiza, entonces, un cambio de variables para convertir la ecuación conseguida en una lineal no homogénea. No es necesario resolver esta última.

c) Define factor integrante y demuestra que la ecuación (*) tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = x^p y^q$ para un determinado valor entero de p y q. Calcula dicho factor integrante y halla lo solución general de la ecuación, verificando que obtienes la misma que en el ítem a.

d) Enuncia el teorema de existencia y unicidad para un problema de valores iniciales de primer orden y demuestra que 1a función definida implícitamente por la ecuación $ye^{(x+y)/x} = 1$ es la solución del PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{xy + x^2} \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

, sin embargo, las hipótesis del teorema no se cumplen. ¿Son éstos dos hechos contradictorios? Justifica.

EJERCICIO 2:

a) Un tanque tiene inicialmente 40 litros de salmuera, con 2,5 kg disueltos de sal. Se introduce un flujo de salmuera de 8 litros por minuto, conteniendo 0,4 kg de sal por litro y la mezcla, perfectamente agitada. sale del tanque con el mismo flujo

   i) Determina la cantidad de sal contenida en el tanque, en cualquier instante t.

   ii) ¿Cuánta sal contiene al cabo de 10 minutos?

   iii) ¿Cuánta sal contendrá después de un intervalo de tiempo muy largo?

b) Cuando un circuito en serie sólo contiene un resistor y un inductor (circuito LR) la Ley de Kirchhoff establece que la suma de las caídas de voltaje, a través del inductor ($L\frac{di}{dt}$) y del resistor (iR) es igual al voltaje aplicado $E(t)$ al circuito, siendo L y R constantes positivas conocidas como inductancia y resistencia, respectivamente.

   i) Plantea la ecuación diferencial que describe la corriente $i(t)$ si la inductancia es de 20 henrios, la resistencia es de 2 ohmios y se aplica el voltaje $E(t) = \begin{cases} 120 & si \quad 0 \le t < 20 \\ 0 & si \quad t > 20 \end{cases}$

   ii) Determina la corriente si $i(0) = 0$.

EJERCICIO 3: Considera la ecuación diferencial $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 4\dfrac{d^2y}{dx^2} + 16\dfrac{dy}{dx} + 32y = 0.$

a) Averigua las raíces de la ecuación característica. *Nota:* puede serte útil saber que $y = 5xe^{-2x}$ es una solución particular.

b) Demuestra la independencia lineal de las soluciones asociadas a las raíces reales e indica en qué intervalo son li.

c) Encuentre la solución general.