EJERCICIO 4:

Utilice el método de diferencias divididas de Newton para resolver el siguiente problema de interpolación de Hermite. Buscamos el polinomio que ajusta a los siguientes valores: $p(1)=2$, $p'(1)=3$, $p(2)=6$, $p'(2)=7$, $p''(2)=8$

Polinomio de Hermite:

Suponga que tenemos $n+1$ números distintos x_0, x_1,…, x_n en $[a,b]$ y enteros no negativos m_0, m_1,…, m_n, y $m = máx\ \{m_0, m_1, \dots, m_n\}$. El **polinomio osculante** que aproxima una función $f\ \epsilon\ C^m[a,b]$ en x_i, para cada $i=0,\dots, n$, es el polinomio de **menor grado** que tiene los mismos valores que la función f y todas sus derivadas de orden menor o igual que m_i en cada x_i. El grado de este polinomio osculante es el máximo

$$M = \sum_{i=0}^{n} m_i + n$$

Ya que el número de condiciones que se satisfacen es $\sum_{i=0}^{n} m_i + (n+1)$ y un polinomio de grado M tiene M+1 coeficientes que se puedan usar para satisfacer estas condiciones.

Sean x_0, x_1,…, x_n $n+1$ números distintos en $[a,b]$ y para cada $i = 0,1, \dots, n$, sea m_i un entero no negativo. Suponga que $f\ \epsilon\ C^m[a,b]$ donde $m = máx\ m_i\ 0 \le i \le m_i$.

Polinomio de Hermite:

El **polinomio osculante** que se aproxima a f es el polinomio $P(x)$ de menor grado, tal que:

$$\frac{d^k P(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k f(x_i)}{dx^k} \quad para\ cada\ i = 0,1, \dots, n\ y\ k = 0,1, \dots, m_i$$

- $n = 0$ el polinomio osculante que se aproxima a f es el m_0-*ésimo* polinomio de Taylor para f en x_0.
- $m_i = 0$ para cada i, el polinomio osculante es el n-*ésimo* polinomio de Lagrange que interpola f en $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Polinomio de Hermite:

Cuando $m_i = 1$, para cada $i = 0,1,\dots,n$ nos da los **polinimios de Hermite**. Para una función f determinada, estos polinomios concuerdan con f en $x_0, x_1,\dots, x_n$. Además, puesto que sus primeras derivadas concuerdan con las de f, tienen la misma "forma" que la función en $(x_i, f(x_i))$, en el sentido en el que las *rectas tangentes* al polinomio y la función concuerdan.

Teorema: Si $f \in C^1[a,b]$ y $x_0, x_1,\dots, x_n \in [a,b]$ son distintos, el único polinomio de menor grado que concuerda con f y f' en $x_0, x_1,\dots, x_n$ es el polinomio de Hermite de grado a lo sumo $2n+1$ dado por:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j)\, \hat{H}_{n,j}(x),$$

Donde cada $L_{n,j}(x)$ denota el j-ésimo coeficiente del polinomio de Lagrange de grado n, y

$$H_{n,j}(x) = [1 - 2(x - x_j)L'_{n,j}(x)]L^2_{n,j}(x) \text{ y } \hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j)L^2_{n,j}(x)$$

Además, si $f \in C^{2n+2}[a,b]$, entonces:

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{(x-x_0)^2 \dots (x-x_n)^2}{(2n+2)!} f^{2n+2}(\xi(x))$$

Polinomio de Hermite usando diferencias divididas:

Este método utiliza la conexión entre la n-ésima diferencia dividida y la n-ésima derivada de *f.* Suponga que los diferentes números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ están dados junto con los valores de f y f' en estos números. Defina una nueva sucesión $z_0, z_1, \ldots, z_{2n+1}$ mediante: $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ para cada i=0, 1, …,n y construya la tabla de diferencias divididas.

Puesto que $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ para cada i, no podemos definir $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ con la fórmula de diferencias divididas. Sin embargo, si suponemos, con base en el teorema 3.6 (Burden 10ma edición), que la sustitución razonable en estas situaciones es $f[z_{2i}, z_{2i+1}] = f'(z_{2i}) = f'(x_i)$.

Es decir: $\underbrace{f[x_i, x_i, \ldots, x_i]}_{k \text{ veces}} = \dfrac{f^k(x_i)}{k!}$

$$f[z_0, z_1, \ldots, z_k] = \begin{cases} \dfrac{f^k(x_0)}{k!} & si\ z_0 = z_1 = \cdots = z_k \\ \dfrac{(f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_k])}{x_0 - x_k} & si\ z_0 \neq z_k \end{cases}$$

EJERCICIO 4:

Utilice el método de diferencias divididas de Newton para resolver el siguiente problema de interpolación de Hermite. Buscamos el polinomio que ajusta a los siguientes valores: *p(1)=2, p'(1)=3, p(2)=6, p'(2)=7, p''(2)=8*

x_0 *p(1)=2,*
p'(1)=3,
x_1 *p(2)=6,*
p'(2)=7,
p''(2)=8

$$f[z_0,z_1,z_2] = f[x_0,x_0,x_1] = \frac{4-3}{2-1}$$

$$f[z_2,z_3,z_4] = f[x_1,x_1,x_1] = \frac{f''[x_1]}{2!}$$

zi	xi	f[zi]	f[zi,zi+1]	f[zi,zi+1,zi+2]	f[zi,zi+1,zi+2, zi+3]	f[zi,zi+1,zi+2, zi+3,zi+4]
Z0	1	2				
Z1	1	2	3			
Z2	2	6	4	1		
Z3	2	6	7	3	2	
Z4	2	6	7	4	1	-1

$$f[z_0,z_1] = f[x_0,x_0] = \frac{f'[x_0]}{1!}$$

$$f[z_1,z_2] = f[x_0,x_1] = \frac{6-2}{2-1}$$

EJERCICIO 4:

z	$f(z)$	Primeras diferencias divididas	Segundas diferencias divididas
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$		
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$	
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$	
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$	
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$	
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$	
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$		

EJERCICIO 4:

$$P_H = 2 + 3(x-1) + 1(x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) + (-1)(x-1)^2(x-2)^2$$

$$\boxed{P_H = -x^4 + 8x^3 - 20x^2 + 23x - 8}$$

Comprobación:

p(1)=2,
p’(1)=3,
p(2)=6,
p’(2)=7,
p’’(2)=8

$$P_H(1) = -(1)^4 + 8(1)^3 - 20(1)^2 + 23(1) - 8 = -1 + 8 - 20 + 23 - 8 = 2$$

$$P_H{}'(1) = -4(1)^3 + 24(1)^2 - 40(1) + 23 = 3$$

$$P_H(2) = -(2)^4 + 8(2)^3 - 20(2)^2 + 23(2) - 8 = -16 + 64 - 80 + 46 - 8 = 6$$

$$P_H'(2) = -4(2)^3 + 24(2)^2 - 40(2) + 23 = -32 + 96 - 80 + 23 = 7$$

$$P_H''(2) = -12(2)^2 + 48(2) - 40 = -48 + 96 - 40 = 8$$