

## Ecuación diferencial general para conducción de calor (2D)

La ecuación diferencial general para el problema de conducción de calor en coordenadas cartesianas en 2D (no estacionaria, reactiva y con fuente) es:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) + q = 0$$

o

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - c \phi + G = 0$$

Donde:

- $T(x, y, t)$ : temperatura en función del tiempo y las coordenadas.
- $\rho$ : densidad del material  $kg/m^3$
- $c$  capacidad calorífica  $(J/kg \cdot K)$
- $k$ : conductividad térmica  $(W/(m \cdot K))$
- $q$ : término fuente volumétrica  $(W/m^3)$

Sin condiciones de contorno, esta es la forma general de la ecuación.

## 2. Parámetros requeridos

### Parámetros requeridos para resolver el problema

1. **Propiedades del material:**
  - **Densidad ( $\rho$ ):**
  - **Capacidad calorífica ( $c$ ):**
  - **Conductividad térmica ( $k$ ):**
2. **Término fuente volumétrica ( $q$ ):**  $W/m^3$  (si existe).
3. **Condiciones iniciales:**
  - La distribución inicial de temperatura  $T(x, y, t) = 0$  debe estar definida en todo el dominio.
4. **Condiciones de frontera:**
  - **Condiciones de Dirichlet:** Temperatura prescrita en la frontera  $T(x, y) = T_b$
  - **Condiciones de Neumann:** Flujo de calor en la frontera  $-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_n$  donde  $q_n$  es el flujo
  - **Condiciones de Robin (mixtas):** Combinación de las anteriores  $-k \frac{\partial T}{\partial n} + h(T - T_\infty) = 0$   $h$  es un coef de convección

## 3. Método de residuos ponderados (Galerkin)

El método de Galerkin utiliza funciones de prueba  $N_i(x, y)$  que coinciden con las funciones de forma del elemento finito para aproximar la solución.

1. Multiplicamos la ecuación diferencial por una función peso  $N_i$  y la integramos sobre el dominio  $\Omega$

$$\int_{\Omega} N_i [\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) + q] d\Omega = 0$$

2. Aplicamos integración por partes al término  $-\nabla \cdot (k \nabla T)$

$$\int_{\Omega} N_i \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla N_i \cdot k \nabla T d\Omega - \int_{\Omega} N_i q d\Omega = 0$$

3. Este método genera un sistema de ecuaciones discretas.

#### 4. Ensamblaje para cada elemento

Para plantear lo que se debe resolver por cada elemento de la malla, dividimos el problema en términos locales (por elemento) antes de ensamblar el sistema global

Para cada elemento triangular de la malla, se utiliza una matriz de rigidez local  $K_e$  y un vector de cargas locales  $f_e$ . Estas matrices se ensamblan considerando las siguientes expresiones:

- Matriz de masa del elemento:  $M_e = \int_{\Omega} N_i N_j \rho c d\Omega$
- Matriz de rigidez del elemento  $K_e = \int_{\Omega} (k \nabla N_i) \cdot \nabla N_j d\Omega$
- Vector de cargas locales:  $f_e = \int_{\Omega} N_i q d\Omega$

Agrupando los terminos  $M^e \frac{\partial T^e}{\partial t} + K^e T^e = F^e$

Para un elemento triangular con tres nodos (funciones de forma lineales), el sistema tiene esta forma:

$$\begin{bmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e & M_{13}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e & M_{23}^e \\ M_{31}^e & M_{32}^e & M_{33}^e \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \\ T_3^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e & K_{13}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e & K_{23}^e \\ K_{31}^e & K_{32}^e & K_{33}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^e \\ T_2^e \\ T_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \end{bmatrix}$$

#### 5. Discretización temporal con el método $\theta$

El método  $\theta$  es una técnica de integración implícita-explicita definida por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t}$$

Con esto, la ecuación discretizada temporalmente es:

$$M \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + (1 - \theta)KT^n + \theta KT^{n+1} = F$$

Donde:

- $\theta = 0$  esquema explícito (Euler hacia adelante).
- $\theta = 1$  esquema implícito (Euler hacia atrás).
- $\theta = 1/2$  esquema de Crank-Nicholson.

## 6. Contribuciones a la matriz global

La matriz global se construye ensamblando las contribuciones locales de cada elemento al sistema global:

Las condiciones de contorno modifican el sistema mediante cambios en  $K_{ij}$  y  $f_i$ :

### a. Dirichlet (Temperatura prescrita en el nodo):

Si en un nodo  $j$  la temperatura está fijada como  $T_j = T_D$

1. Se eliminan las filas y columnas correspondientes a  $j$  en  $K$ , fijando los valores directamente en  $f$ .
2. Modificación:  $f_j = T_D$

### b. Neumann (Flujo de calor normal en el borde):

Se agrega un término al vector  $f^e$  debido al flujo de calor prescrito  $q_n$  en un borde  $\Gamma_e$

$$f_i^e = \int_{\Gamma_e} N_i q_n d\Gamma$$

1.  $q_n$ : Flujo normal de calor en el borde.
2.  $N_i$ : Función de forma evaluada en los nodos del borde.

### c. Robin (Condición mixta):

En un borde con transferencia convectiva y flujo dado por:

$$-q \cdot \vec{n} = h(T - T_\infty)$$

Se ajustan tanto la matriz  $K_{ij}^e$  como el vector  $f^e$ :

1. Modificación de  $K_{ij}^e$  en el borde:  $K_{ij}^e = \int_{\Gamma_e} h N_i N_j d\Gamma$
2. Modificación de  $f_i^e$  debido a  $T_\infty$ :  $f_i^e = \int_{\Gamma_e} h N_i T_\infty d\Gamma$

Una vez calculadas las contribuciones locales  $K^e$  y  $f^e$  para cada elemento  $e$ , se ensamblan en las matrices y vectores globales:

1. Matriz global:

$$K_{ij}^{\text{global}} = \sum_e K_{ij}^e$$

2. Vector global:

$$f_i^{\text{global}} = \sum_e f_i^e$$