

Introducción al Diseño de Filtros Digitales

Diego Milone

Procesamiento Digital de Señales
Ingeniería Informática FICH-UNL

6 de abril de 2016

Organización de la clase

Introducción

- Concepto y clasificación de filtros
- Filtros ideales y filtros realizables

Diseño de filtros IIR

- Algoritmos de diseño IIR
- Diseños analógicos básicos
- Transformaciones en frecuencia

Diseño de filtros FIR

- Propiedades de los filtros FIR
- Filtros de fase lineal
- Métodos de diseño FIR

Modulación

- Conceptos básicos

Organización de la clase

Introducción

Concepto y clasificación de filtros

Filtros ideales y filtros realizables

Diseño de filtros IIR

Algoritmos de diseño IIR

Diseños analógicos básicos

Transformaciones en frecuencia

Diseño de filtros FIR

Propiedades de los filtros FIR

Filtros de fase lineal

Métodos de diseño FIR

Modulación

Conceptos básicos

Concepto

- ¿Qué es un filtro?

Concepto

- ¿Qué es un filtro?
- Filtros vs. Sistemas

Concepto

- ¿Qué es un filtro?
- Filtros vs. Sistemas
- Ejemplos...

Clasificación de los filtros

- Respuesta al impulso
 - IIR (recursivos, AR/ARMA)
 - FIR (no-recursivos, MA)

Clasificación de los filtros

- Respuesta al impulso
 - IIR (recursivos, AR/ARMA)
 - FIR (no-recursivos, MA)
- Banda de paso
 - Pasa-Bajos
 - Pasa-Altos
 - Pasa-Banda
 - Rechaza-Banda
 - Multibanda

Clasificación de los filtros

- Adaptativos vs. estáticos
- Filtros de fase lineal
- Filtros para compensación de fase

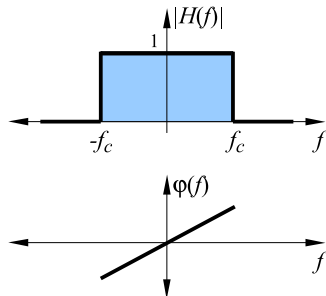
Clasificación de las técnicas de diseño

- Filtros IIR
 - Prototipos analógicos
 - Butterworth
 - Chebyshev I y II
 - Elípticos
 - Bessel
 - Diseño digital directo (Yule-Walk)

Clasificación de las técnicas de diseño

- Filtros IIR
 - Prototipos analógicos
 - Butterworth
 - Chebyshev I y II
 - Elípticos
 - Bessel
 - Diseño digital directo (Yule-Walk)
- Filtros FIR
 - Método de Fourier + Ventaneo
 - Otros (mínimos cuadrados, minimax, etc)

Filtro pasa bajos ideal

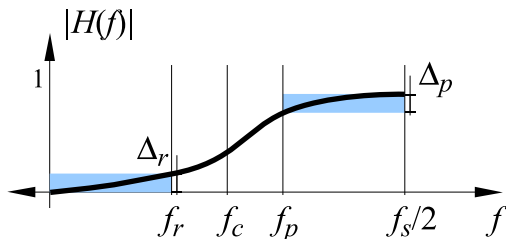


- Magnitud
- Fase
- Frecuencia de corte (-3 dB)

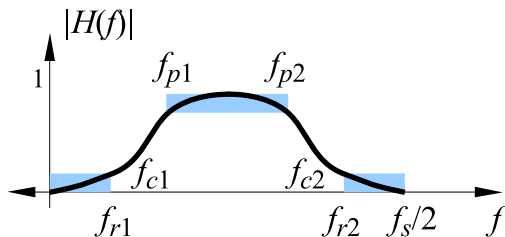
The figure shows a plot of the magnitude of the frequency response $|H(f)|$ versus frequency f . The curve starts at 1 and decreases. Two shaded regions represent the passband and stopband. The passband is between f_p and f_r , and the stopband is between f_r and $f_s/2$. The magnitude at f_p is $1 - \Delta_p$, and the magnitude at $f_s/2$ is Δ_r .

- Filtro pasa bajos
 - Bandas de paso, rechazo y transición
 - Tolerancias en las bandas de paso y rechazo
 - Frecuencias de paso, corte y rechazo
 - Fase

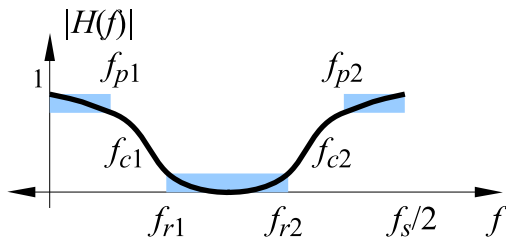
Filtros realizables



- Filtro pasa altos
 - Bandas de paso, rechazo y transición
 - Tolerancias en las bandas de paso y rechazo
 - Frecuencias de paso, corte y rechazo
 - Fase



- Filtro pasa banda
 - Bandas de paso, rechazo y transición
 - Tolerancias en las bandas de paso y rechazo
 - Frecuencias de paso, corte y rechazo
 - Fase



Filtros digitales vs. analógicos

- ++ Estabilidad (componentes electrónicos)
- ++ Precisión
- Frecuencia limitada por la conversión A/D (\Rightarrow costos)

Organización de la clase

Introducción

Concepto y clasificación de filtros

Filtros ideales y filtros realizables

Diseño de filtros IIR

Algoritmos de diseño IIR

Diseños analógicos básicos

Transformaciones en frecuencia

Diseño de filtros FIR

Propiedades de los filtros FIR

Filtros de fase lineal

Métodos de diseño FIR

Modulación

Conceptos básicos

Algoritmos de diseño IIR

- Método 1
 - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
 - Transformación en frecuencia (analógica, en s)
 - Transformación conforme (bilineal)

Algoritmos de diseño IIR

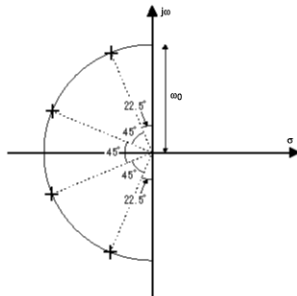
- Método 1
 - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
 - Transformación en frecuencia (analógica, en s)
 - Transformación conforme (bilineal)
- Método 2
 - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
 - Transformación conforme (bilineal)
 - Transformación en frecuencia (digital, en z)

Diseño analógico: Butterworth

- Función de transferencia
- Tolerancias en la banda de paso y rechazo
- Forma de la respuesta en frecuencia
- Diseño:
 - Especificaciones típicas (w_p , A y K_0)
 - Fórmula para la estimación del orden (N)

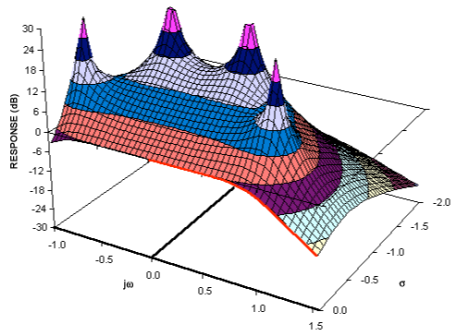
Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$



Filtro de Butterworth

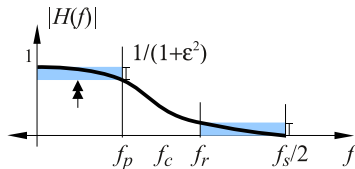
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$



Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$

$$\text{si } |\omega| \leq \omega_P \Rightarrow |H(j\omega)|^2 > \frac{1}{1+\epsilon^2}$$

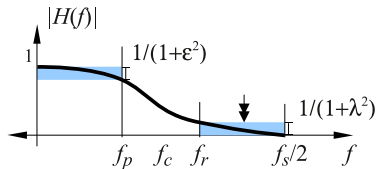


Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$

$$\text{si } |\omega| \leq \omega_P \Rightarrow |H(j\omega)|^2 > \frac{1}{1+\epsilon^2}$$

$$\text{si } |\omega| \geq \omega_R \Rightarrow |H(j\omega)|^2 < \frac{1}{1+\lambda^2}$$



Filtro de Butterworth

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{\omega}{\omega_P} \right)^{2N}}$$

$$\text{si } |\omega| \leq \omega_P \Rightarrow |H(j\omega)|^2 > \frac{1}{1+\epsilon^2}$$

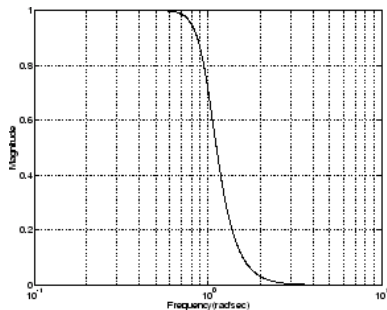
$$\text{si } |\omega| \geq \omega_R \Rightarrow |H(j\omega)|^2 < \frac{1}{1+\lambda^2}$$

$$\text{si } N \rightarrow \infty$$

$$\omega_R \rightarrow \omega_P$$

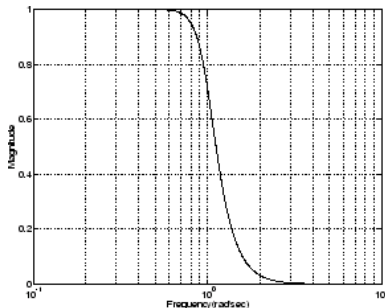
$$\epsilon \rightarrow 0$$

$$\lambda \rightarrow \infty$$



Características del filtro de Butterworth

- Respuesta monotónicamente decreciente
- Respuesta máximamente plana cerca de $\omega = 0$
- Fase tendiendo a $-N\pi/2$ para $\omega \rightarrow \infty$



Diseño Butterworth

- Datos
 - ω_p : frecuencia de corte
 - A : relación de atenuación máxima
 - K_0 : relación de ancho de transición
- Se requiere
 - N : orden del filtro

Ecuación de diseño Butterworth

Se debe cumplir:

$$N > \frac{\log A}{\log \left(\frac{1}{K_0} \right)}$$

siendo:

$$A = \frac{\lambda}{\epsilon} = \sqrt{\frac{10^{0,1A_R-1}}{10^{0,1A_P-1}}}$$

$$K_0 = \frac{\omega_P}{\omega_R}$$

Diseño analógico: Chebyshev

- Función de transferencia tipo I y tipo II
- Forma de la respuesta en frecuencia
- Tolerancias en la banda de paso y rechazo
- Fórmula para la estimación del orden (N)

Filtro de Chebyshev tipo I

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

Filtro de Chebyshev tipo I

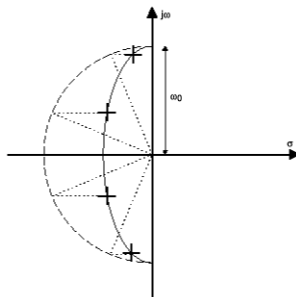
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

Polinomio de Chebyshev:

$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x)$$

$$V_0 = 1$$

$$V_1 = x$$



Filtro de Chebyshev tipo I

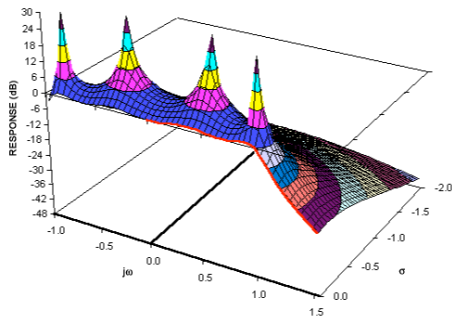
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

Polinomio de Chebyshev:

$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x)$$

$$V_0 = 1$$

$$V_1 = x$$



Filtro de Chebyshev tipo I

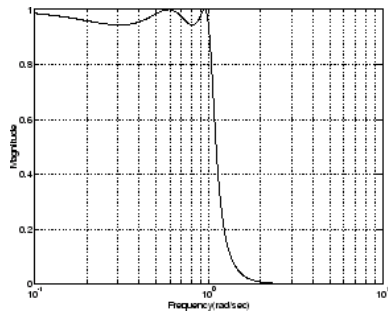
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

Polinomio de Chebyshev:

$$V_N(x) = 2xV_{N-1}(x) - V_{N-2}(x)$$

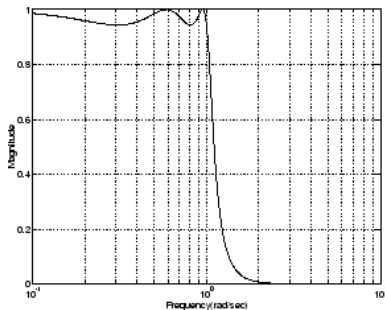
$$V_0 = 1$$

$$V_1 = x$$



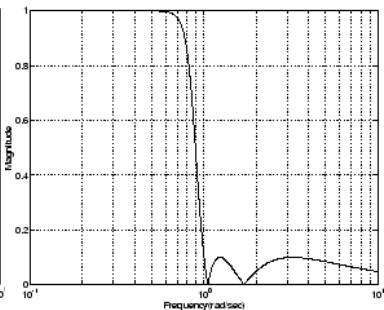
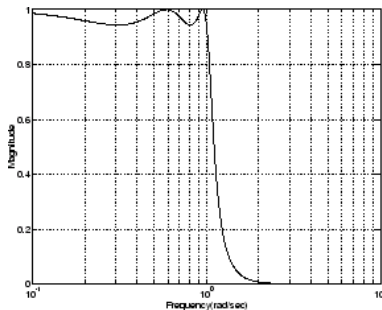
Características de los filtros de Chebyshev

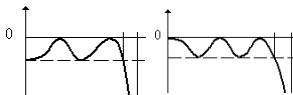
- Tipo I: ondulaciones en la banda de paso y monotónico decreciente en la banda de rechazo



Características de los filtros de Chebyshev

- Tipo I: ondulaciones en la banda de paso y monótonico decreciente en la banda de rechazo
- Tipo II: ondulaciones en la banda de rechazo y monótonico decreciente en la banda de paso





Ecuación de diseño Chebyshev (tipos I y II)

Se debe cumplir:

$$N > \frac{\cosh^{-1} A}{\cosh^{-1} \left(\frac{1}{K_0} \right)}$$

siendo:

$$A = \frac{\lambda}{\epsilon} = \sqrt{\frac{10^{0,1A_R-1}}{10^{0,1A_P-1}}}$$

$$K_0 = \frac{\omega_P}{\omega_R}$$

Diseño analógico: filtros elípticos

- Función de transferencia
- Forma de la respuesta en frecuencia
- Tolerancias en la banda de paso y rechazo
- Fórmula para la estimación del orden (N)

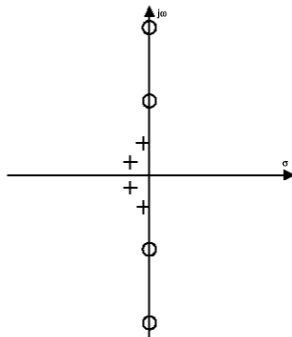
Filtros elípticos

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F_N^2 \left(\frac{\omega}{\omega_P} \right)}$$

Filtros elípticos

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

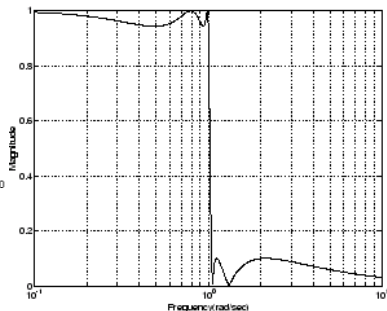
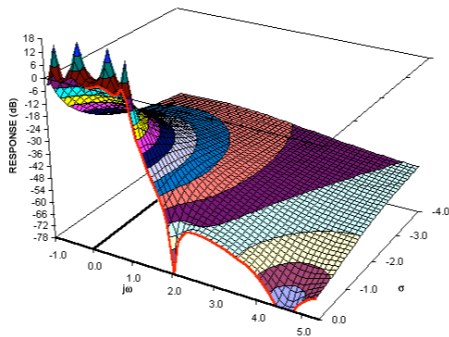
$F_N(x)$: función elíptica Jacobiana



Filtros elípticos

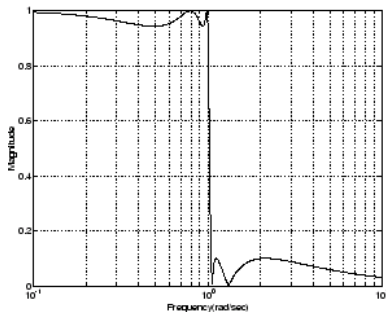
$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 F_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_P}\right)}$$

$F_N(x)$: función elíptica Jacobiana



Características de los filtros elípticos

- Ondulaciones en las bandas de paso y rechazo
- Corte más abrupto que los anteriores (para igual orden)
- Diferentes formas para orden par o impar



Ecuación de diseño para filtros elípticos

Se debe cumplir:

$$N > \frac{\log(16A)}{\log\left(\frac{1}{q}\right)}$$

siendo:

$$q = q_0 + 2q_0^5 + 15q_0^9 + 150q_0^{13}$$

$$q_0 = \frac{1 - (1 - K_0^2)^{0,25}}{2 \left[1 + (1 - K_0^2)^{0,25} \right]}$$

Algoritmos de diseño IIR

- Método 1
 - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
 - Transformación en frecuencia (analógica, en s) \Leftarrow
 - Transformación conforme (bilineal)
- Método 2
 - Diseño analógico (filtro P-Bajos normalizado)
 - Transformación conforme (bilineal)
 - Transformación en frecuencia (digital, en z) \Leftarrow

Transformaciones en frecuencia “analógica”

- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-bajos $s \rightarrow \frac{s}{\omega_P}$

Transformaciones en frecuencia “analógica”

- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-bajos $s \rightarrow \frac{s}{\omega_P}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-altos $s \rightarrow \frac{\omega_P}{s}$

Transformaciones en frecuencia “analógica”

- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-bajos $s \rightarrow \frac{s}{\omega_P}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-altos $s \rightarrow \frac{\omega_P}{s}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-banda $s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_{P1}\omega_{P2}}{s(\omega_{P2} - \omega_{P1})}$

Transformaciones en frecuencia “analógica”

- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-bajos $s \rightarrow \frac{s}{\omega_P}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-altos $s \rightarrow \frac{\omega_P}{s}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-banda $s \rightarrow \frac{s^2 + \omega_{P1}\omega_{P2}}{s(\omega_{P2} - \omega_{P1})}$
- Pasa-bajos \rightarrow Rechaza-banda $s \rightarrow \frac{s(\omega_{P2} - \omega_{P1})}{s^2 + \omega_{P1}\omega_{P2}}$

Transformaciones en frecuencia “digital”

- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-bajos $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$

$$\alpha = \frac{\sin((\omega_N - \omega_P)/2)}{\sin((\omega_N + \omega_P)/2)}$$

Transformaciones en frecuencia “digital”

- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-bajos $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-altos $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$

$$\alpha = -\frac{\cos((\omega_N+\omega_P)/2)}{\cos((\omega_N-\omega_P)/2)}$$

Transformaciones en frecuencia “digital”

- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-bajos $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-altos $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-banda $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$

$$\alpha = \frac{\cos((\omega_{P2} + \omega_{P1})/2)}{\cos((\omega_{P2} - \omega_{P1})/2)}$$

$$k = \cos((\omega_{P2} - \omega_{P1})/2) \tan(\omega_N/2)$$

Transformaciones en frecuencia “digital”

- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-bajos $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-1}-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-altos $z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1}+\alpha}{1+\alpha z^{-1}}$
- Pasa-bajos \rightarrow Pasa-banda $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2}-\frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1}+1}$
- Pasa-bajos \rightarrow Rechaza-banda $z^{-1} \rightarrow \frac{z^{-2}-\frac{2\alpha}{1+k}z^{-1}+\frac{1-k}{1+k}}{\frac{1-k}{1+k}z^{-2}-\frac{2\alpha}{k+1}z^{-1}+1}$

$$\alpha = \frac{\cos((\omega_{P2} + \omega_{P1})/2)}{\cos((\omega_{P2} - \omega_{P1})/2)}$$

$$k = \tan((\omega_{P2} - \omega_{P1})/2) \tan(\omega_N/2)$$

Organización de la clase

Introducción

Concepto y clasificación de filtros

Filtros ideales y filtros realizables

Diseño de filtros IIR

Algoritmos de diseño IIR

Diseños analógicos básicos

Transformaciones en frecuencia

Diseño de filtros FIR

Propiedades de los filtros FIR

Filtros de fase lineal

Métodos de diseño FIR

Modulación

Conceptos básicos

Filtros FIR: ventajas y desventajas

- ++ Se puede lograr fase lineal
- ++ Presentan mayor estabilidad
- ++ Diseño hardware eficiente
- ++ Frecuencias de corte abruptas
- ++ Cortos transitorios de inicialización
- Requieren más cálculos

Filtros FIR: relaciones importantes

- Coeficientes FIR
- Respuesta al impulso
- Convolución
- Sistemas MA

$$y[n] = \sum_{k=0}^P b_k x[n - k]$$

Filtros FIR: relaciones importantes

- Coeficientes FIR
- Respuesta al impulso
- Convolución
- Sistemas MA

$$y[n] = \sum_{k=0}^P b_k x[n-k]$$

$$x * h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

Filtros FIR: relaciones importantes

- Coeficientes FIR
- Respuesta al impulso
- Convolución
- Sistemas MA

$$y[n] = \sum_{k=0}^P b_k x[n-k]$$

$$x * h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

Fase lineal: interpretación gráfica

- Descomposición de una onda cuadrada en dos componentes senoidales
- Aplicación de un filtro de fase constante a ambas componentes por superposición
- Aplicación de un filtro de fase lineal a ambas componentes por superposición
- Filtro sin fase lineal (y con magnitud constante) deforma la onda en el tiempo

Fase lineal: interpretación gráfica

Fase lineal: definiciones

- Definiciones de módulo y fase
- Definición de retardo de fase

$$\tau_{\phi}(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega}$$

- Definición de retardo de grupo

$$\tau_{\gamma}(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

- Fase lineal:

$$\phi(\omega) = \tau\omega$$

(... τ_{ϕ} y τ_{γ} constantes ...)

Diseño FIR por Fourier y ventaneo

1. Especificación de los requerimientos (mód. y fase)
2. Muestreo de la respuesta en frecuencia
3. Aplicación de la TDF inversa
4. Truncado temporal (ventanas temporales)
5. Corrección de amplitud
6. Corrección para obtener la causalidad

Truncado y ventaneo temporal

Objetivos:

- Reducción del orden del filtro resultante
- Reducción de los artefactos del truncado
 - reducción de los lóbulos laterales
 - “reducción” del ancho en el lóbulo central

Interpretación gráfica

Ventanas

- Ventana rectangular: $\omega_R[n] = 1$

Ventanas

- Ventana rectangular: $\omega_R[n] = 1$
- Ventana de Hanning: $\omega_h[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N)$

Ventanas

- Ventana rectangular: $\omega_R[n] = 1$
- Ventana de Hanning: $\omega_h[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Hamming: $\omega_H[n] = \frac{27}{50} - \frac{23}{50} \cos(2\pi n/N)$

Ventanas

- Ventana rectangular: $\omega_R[n] = 1$
- Ventana de Hanning: $\omega_h[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Hamming: $\omega_H[n] = \frac{27}{50} - \frac{23}{50} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Bartlett:

$$\omega_B[n] = \begin{cases} 2n/N & \text{si } 0 < n \leq N/2 \\ 2 - 2n/N & \text{si } N/2 < n \leq N \end{cases}$$

Ventanas

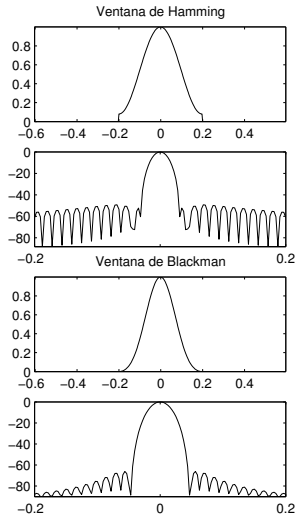
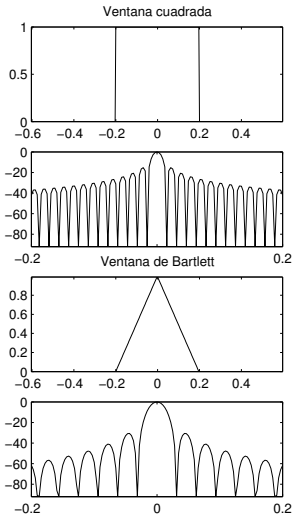
- Ventana rectangular: $\omega_R[n] = 1$
- Ventana de Hanning: $\omega_h[n] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Hamming: $\omega_H[n] = \frac{27}{50} - \frac{23}{50} \cos(2\pi n/N)$
- Ventana de Bartlett:

$$\omega_B[n] = \begin{cases} 2n/N & \text{si } 0 < n \leq N/2 \\ 2 - 2n/N & \text{si } N/2 < n \leq N \end{cases}$$

- Ventana de Blackman:

$$\omega_K[n] = \frac{21}{50} - \frac{1}{2} \cos(2\pi n/N) + \frac{2}{25} \cos(4\pi n/N)$$

Ventanas



Ventanas: ancho del lóbulo central

- Rectangular: $4\pi/N$
- Bartlet: $8\pi/N$
- Hanning: $8\pi/N$
- Hamming: $8\pi/N$
- Blackman: $12\pi/N$

Ventanas: relación de energía entre lóbulos laterales y central

- Rectangular: -13 dB
- Bartlet: -25 dB
- Hanning: -31 dB
- Hamming: -41 dB
- Blackman: -57 dB

Organización de la clase

Introducción

Concepto y clasificación de filtros

Filtros ideales y filtros realizables

Diseño de filtros IIR

Algoritmos de diseño IIR

Diseños analógicos básicos

Transformaciones en frecuencia

Diseño de filtros FIR

Propiedades de los filtros FIR

Filtros de fase lineal

Métodos de diseño FIR

Modulación

Conceptos básicos

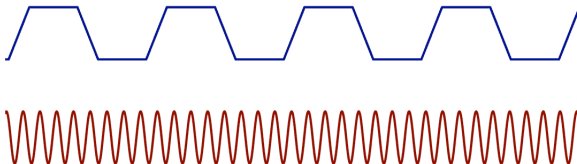
Modulación: conceptos básicos

- Modulación en amplitud (sinusoidal)
- Demodulación sincrónica y asincrónica
- Multiplexado en frecuencia
- Modulación en frecuencia

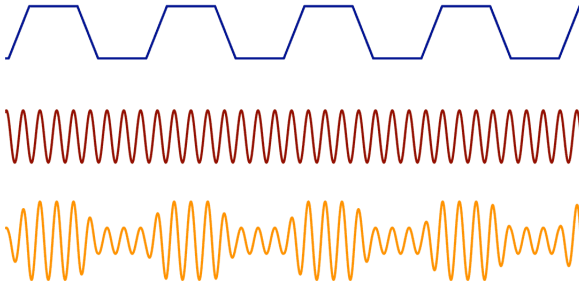
Modulación en amplitud



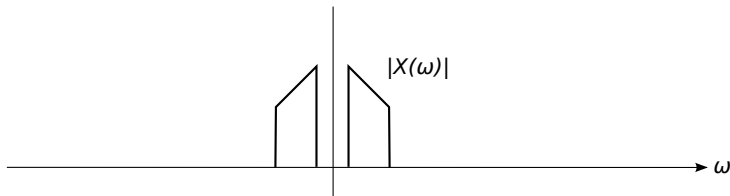
Modulación en amplitud



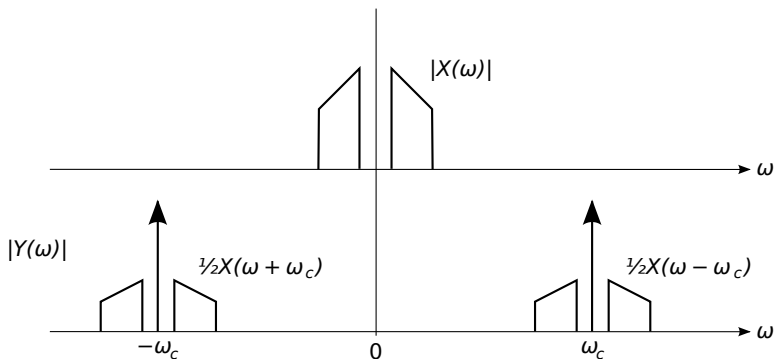
Modulación en amplitud



Modulación en amplitud



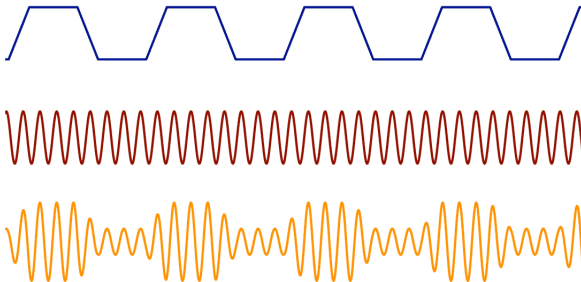
Modulación en amplitud



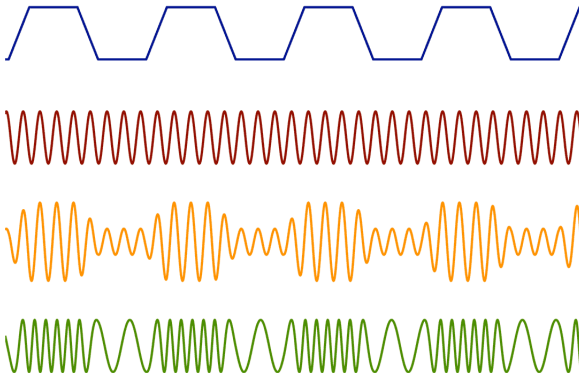
Multiplexado en frecuencia

Demodulación sincrónica y asincrónica

Modulación en amplitud



Modulación en frecuencia



Bibliografía básica

- D.J. DeFatta, J.J. Lucas, W.S. Hodgkiss, Digital Signal Processing: A System Design Approach (Capítulos 4 y 5), John Wiley, 1988.
- R. Kuc, Introduction to Digital Signal Processing (Capítulos 6, 7, 8 y 9), Mcgraw-Hill, 1988.
- A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, Signals and Systems (modulación en amplitud y en frecuencia, Secciones 7.1,7.2,7.3,7.5,7.6), Prentice-Hall, 1999.