UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°4

BASE y CAMBIO DE BASE

1. Hallar una base de los espacios propuestos y decir cuál es su dimensión.

a) El conjunto solución del sistema homogéneo
$$\begin{aligned} x + 6y + 4z &= 0 \\ 2x + 4y - z &= 0 \\ -1x + 2y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

b) El conjunto de las matrices simétricas de 2×2.

c) $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in R^5 \,/\, 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$.

2. Tomando la base hallada en el ejercicio 1. a)

a) Indique la dimensión del espacio

b) Describa geométricamente el conjunto solución del sistema.

c) Halle dos vectores del conjunto solución y dé sus coordenadas respecto de la base hallada.

3. a) En el Ejercicio 2 a), vimos que $B = \{(1, -1), (1, 2)\}$ es una base de R^2. Decir cuáles son las coordenadas del vector $(-1, 7)$ respecto de la base B.

b) Sean $B_1 = \{(1, 2), (1, -1)\}$ y $B_c = \{(1, 0), (0, 1)\}$ otras bases para R^2. Decir cuáles son las coordenadas de $(-1, 7)$ respecto de B_1 y respecto de B_c.

4. a) Encontrar las coordenadas del vector $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^3$ respecto de la base

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Usar el apartado a) para hallar las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ respecto de la base B.

5. Considerar la base B del subespacio H = $\{(x, y, z) \in R^3 / 3x - 2y + 6z = 0\}$ que se encontró en el Ejercicio 3 b).

a) Decir por qué es posible escribir el punto (2, 6, 1) como combinación lineal de los elementos de B.

b) Encontrar $[(2, 6, 1)]_B$.

c) Encontrar $[(2, 6, 1)]_{Bc}$, donde $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es la base canónica de R^3.

6. En R^3 se sabe que $[x]_{B1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ con $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Escriba x en términos de la base $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$.

7. Escribir el polinomio $4x^2 - x+5$ en términos de la base de P_3 formada por $\{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS EJERCICIOS

1. a) Geométricamente el sistema homogéneo contiene las ecuaciones de tres planos que pasan por el origen y se sabe que el conjunto solución del sistema es un subespacio de R^3. Por lo tanto el conjunto solución, S, puede ser:

- el conjunto formado sólo por el vector nulo de R^3 es decir S = $\{(0,0,0)\}$
- una recta que pasa por el origen de coordenadas
- un plano que pasa por el origen de coordenadas

En este caso no es posible que el conjunto solución sea R^3.

Resolviéndolo se tiene que $S = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 11/4 \\ -9/8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad / z \in R\right\}$.

Entonces una base de S es $B = \left\{\begin{pmatrix} 11/4 \\ -9/8 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ pues <u>genera</u> a S (esto se justifica por la resolución del sistema) y es <u>LI</u> pues es un conjunto formado por un único vector no nulo.

b) El conjunto de las S_{2x2} (matrices simétricas de 2×2).

$$S_{2x2} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2} \quad / \quad b = c\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_{2x2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces por lo demostrado anteriormente el conjunto M=$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ genera a S_{2x2}.

Demostremos que M es un conjunto linealmente independiente. Para ello buscamos los escalares de la combinación lineal de los elementos de M que resulta igual al elemento nulo de S2x2:

$$a\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a & b\\b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

Igualando las componentes de la matriz que están en la misma posición resulta $a=0, b=0, c=0$

Lo que demuestra que M es LI. Por lo tanto M es una base de S_{2x2} y dim S_{2x2}=3.

3. a) Buscamos los escalares para expresar el vector (-1,7) como combinación lineal de los vectores de B:

$$(-1,7)=a(1,-1)+b(1,2)\ (*)$$
$$(-1,7)=(a+b,-a+2$$

Igualando las componentes aparece un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:

$$-1=a+b \qquad\qquad 7=-a+2b$$

Resolviéndolo resulta que $a=-3, b=2$. De modo que $[(-1,7)]_B=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

b) Como B_1 es una base que tiene los mismos elementos que la base B del ítem a) sólo que el orden de los elementos es distinto, cambiamos el orden de las componentes del vector de coordenadas dado en a) de modo que en la primera componente colocamos el escalar que multiplica al primer vector de B_1 y en la segunda componente el escalar que multiplica al segundo vector de B_1 en (*). Así $[(-1,7)]_{B_1}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$.

El vector de coordenadas de cualquier vector de R^2 con respecto a B_c (la base canónica de R^2) es el mismo vector ya que para a y b números reales cualesquiera se verifica que $(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$

Por lo tanto $[(-1,7)]_{B_C}=\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$.

5. H = {(x, y, z) ∈ R^3 / 3x − 2y + 6z = 0} entonces

$$(x,y,z)\in H \Leftrightarrow 3x-2y+6z=0$$

Si despejamos una de las componentes de los vectores que pertenecen a H en función de las otras dos, por ejemplo z, se tiene que

$$z=\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}x.$$

Por lo tanto: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in$ H $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Luego la base de H es $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$ ya que genera a H y consta de dos vectores que son linealmente independientes porque no son múltiplos. (Lo anterior es la justificación completa de que *B* es una base de H).

a) Como (2, 6, 1) Є H (pues 3.2 – 2.6 + 6.1 = 0) y B genera a H entonces el vector (2, 6, 1) se puede escribir como combinación lineal de los vectores de la base B.

b) Para encontrar las coordenadas de (2, 6, 1) con respecto a la base B, debemos escribir al vector (2, 6, 1) como combinación lineal de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$.

Se plantea entonces $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ Resolviendo el sistema que resulta de igualar las componentes de los vectores de ambos miembros se obtiene que a = 2 y b = 6. Por lo tanto, $[(2, 6, 1)]_B = [2, 6]$. Notar que el vector de coordenadas del elemento de H tiene sólo dos coordenadas porque la base de H tiene dos vectores.

c) Como $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es la base canónica de R^3, las coordenadas del vector v=(2,6,1) son el mismo vector, es decir, $[(2, 6, 1)]_B = [2, 6\ 1]$.

(En este ítem se está mirando a (2,6,1) como elemento de R^3 que tiene dimensión 3. Por lo tanto el vector de coordenadas de (2,6,1) tiene sólo ahora tres coordenadas porque toda base de R^3 contiene tres vectores.

6. Para escribir a x en términos de $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ se necesita encontrar las coordenadas de x con respecto a B_2.

Empleando el vector de coordenadas de x con respecto a B_1, se sabe que:

$$x = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Expresaremos ahora a x como combinación lineal de los vectores de B_2:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolviendo en el segundo miembro e igualando las componentes de los vectores resultantesde ambos miembros, aparece un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$3a+b = 6$$

$$2b + c = -3$$

$$-b + 5c= 3$$

Resolviéndolo resulta $a = \frac{28}{11},\ b = \frac{-18}{11},\ c = \frac{3}{11}$

Por lo tanto $[x]_{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{28}{11} \\ \frac{-18}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix}$.