CÁLCULO II
Funciones de varias variables

Prof. Ing. Silvia Seluy

Las **funciones de varias variables** son esenciales en muchos problemas importantes de la ciencia, la ingeniería, la economía, y otros.

Cualquier fórmula que proporcione una relación entre una magnitud a partir de los valores de otras magnitudes es, en realidad, una función.

Si se tiene una placa rectangular L y se determina la temperatura T en cada uno de sus puntos.

Fijado un sistema de referencia, T es una función que depende de las coordenadas (x,y) de cada uno de sus puntos.

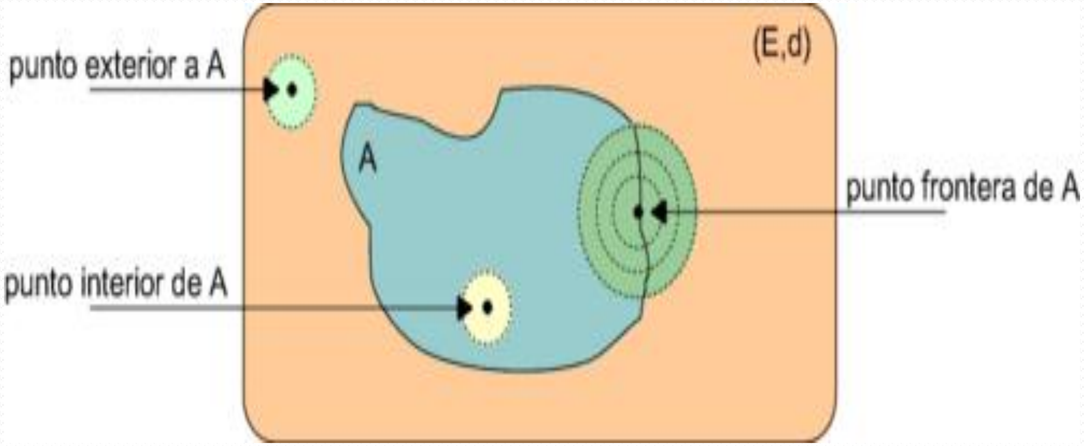
La función que describe este fenómeno es **T= f (x,y)** que representa una **función de dos variables**, en este caso las coordenadas del punto donde evaluamos la temperatura T.

DEFINICIÓN

- Sea D un conjunto de Rn. Una función f de D en R se llama un campo escalar o una función real de n variables.
- Si D es un conjunto no vacío del plano xy, una regla f que asigna un nº f(x,y) a cada punto (x,y) de D se llama función de dos variables.
- D: es el dominio de f y el conjunto de todos los valores f(x,y), se llama imagen.
- Para f(x,y), el dominio es una región del plano xy.
- Para f(x,y,z), el dominio es una región en el espacio.

PUNTOS: INTERIOR Y FRONTERA

Punto interior de A: un punto es interior, si es el centro de un disco de radio positivo, que está siempre completamente dentro de la región A.



Punto frontera: cuando es el centro de un disco con puntos que están fuera y dentro de la región A.

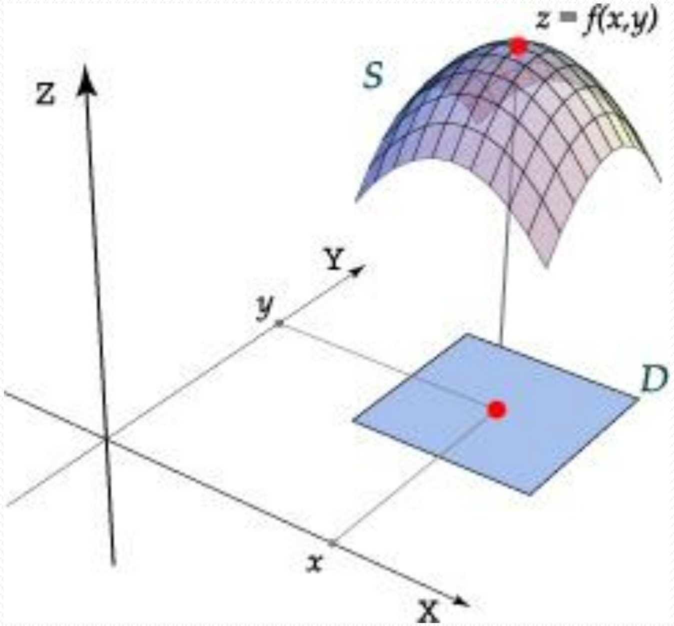
Los puntos interiores forman el interior de la región y los puntos frontera forman su frontera.

Región abierta: sus puntos son interiores.

Región cerrada: sus puntos son todos, frontera.

Gráfica de una función de dos variables

La gráfica de la función de dos variables, es el conjunto de los todos los puntos *(x,y,f(x,y))* del espacio tridimensional donde restringimos los valores (x,y) al dominio de f. Es decir, la **gráfica** es el conjunto de todos los puntos (x,y,z) tales que $z = f(x,y)$, también llamada **superficie** $\boldsymbol{z = f(x,y)}$.



CURVAS DE NIVEL

Una función de dos variables se puede visualizar como un campo escalar, que asigna al punto (x,y) el escalar $z = f(x,y)$.

El campo escalar se puede caracterizar por sus curvas de nivel a lo largo de las cuales el valor de f(x,y) es constante.

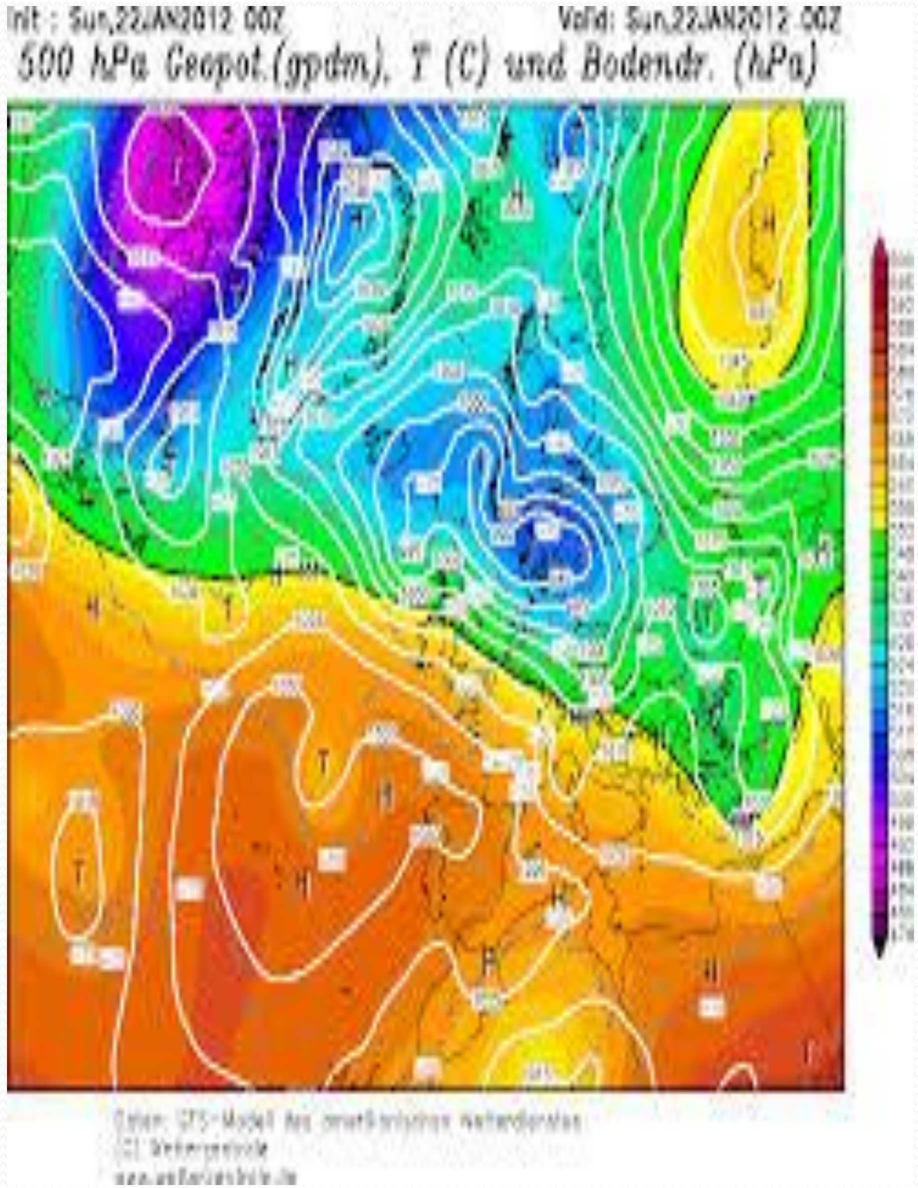
El conjunto de puntos del plano donde una función *f(x,y)* tiene un valor constante $f(x,y) = c$ es una curva de nivel de *f*.

<u>Mapa meteorológico</u>

El mapa muestra líneas llamadas curvas de nivel de igual presión ó **isobaras**.

Si las curvas de nivel son de igual temperatura, se llaman **isotermas.**

Si las curvas de nivel son valores de igual precipitación se llaman **isoyetas.**



MAPAS DE CONTORNO

Se utilizan para identificar regiones de la superficie terrestre donde las curvas de nivel representan la altura sobre el nivel del mar. Son llamados también **mapas topográficos**, y por ejemplo marcan la altura de cerros.

Describe la variación de z, con respecto a (x,y) por el espacio entre curvas.

Mucho espacio entre curvas Indican que z varía lentamente, y curvas muy próximas denotan gran variación en altura (z).

Trazar algunas curvas de nivel de la función $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 4$ para $c = 4$, $c = 3$, $c = 0$ y $c = -5$.

Solución

a) Para $c = 4$; $\quad -x^2 - y^2 + 4 = 4$; $\quad -x^2 - y^2 = 0$; $\quad x^2 + y^2 = 0$; $\quad$ (1)

la expresión (1) representa un punto cuando $f(x,y) = c = 4$

b) Para $c = 3$; $\quad -x^2 - y^2 + 4 = 3$; $\quad -x^2 - y^2 = -1$; $\quad x^2 + y^2 = 1$; $\quad$ (2)

la expresión (2) representa una circunferencia de radio $r = 1$.

c) Para $c = 0$; $\quad -x^2 - y^2 + 4 = 0$; $\quad -x^2 - y^2 = -4$; $\quad x^2 + y^2 = 4$; $\quad$ (3)

la expresión (3) representa una circunferencia de radio $r = 2$

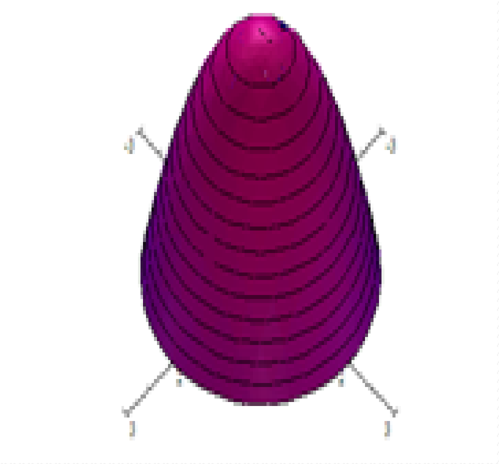
d) Para $c = -5$; $\quad -x^2 - y^2 + 4 = -5$; $\quad -x^2 - y^2 = -9$; $\quad x^2 + y^2 = 9$; $\quad$ (4)

la expresión (4) representa una circunferencia de radio $r = 3$

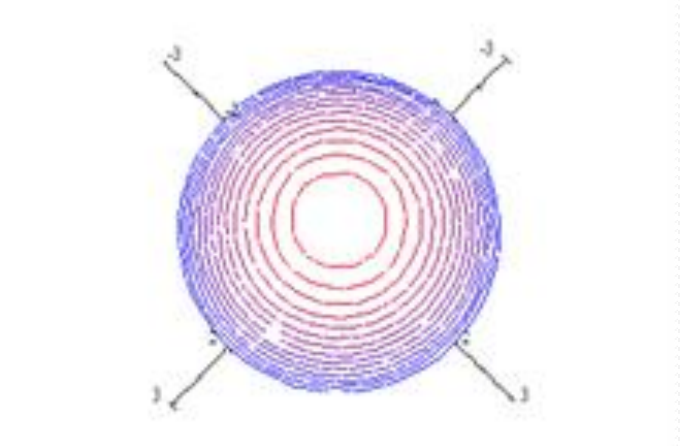
La superficie es un paraboloide abierto hacia abajo, su extremo máximo está en $z = 4$ y las curvas de nivel de la función son círculos. Tal como se ilustra a continuación en las figuras 1, 2 y 3.

Dibujos de curvas de nivel

- Las trazas horizontales son curvas de nivel.



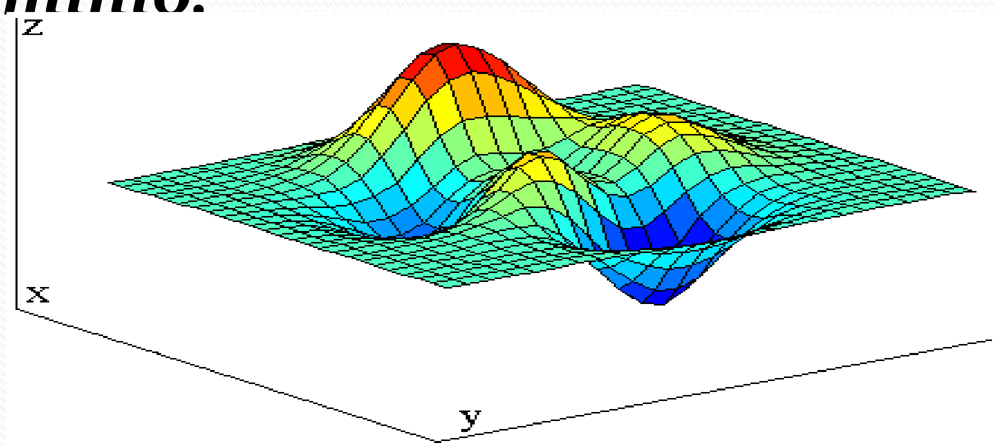
- Mapa de contorno

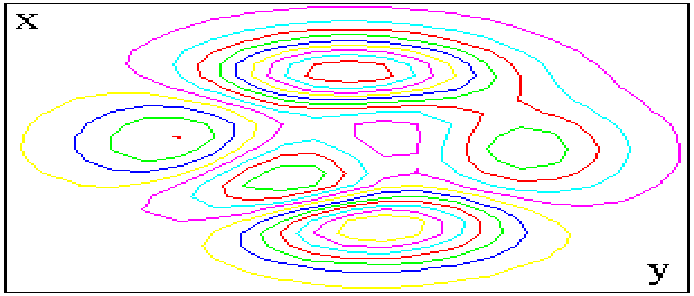


Superficies de nivel

- El conjunto de puntos (x,y,z) en el espacio donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $\boldsymbol{f(x,y,z) = c}$ es una **superficie de nivel de *f*.**

En estos casos, las gráficas tienen puntos (x,y,z,f(x,y,z)) que pertenecen al espacio de cuatro dimensiones, el cual no podemos representar y por ello, trabajamos con su dominio en el espacio tridimensional, correspondiente a la superficie que identifica dicho dominio.





Ejemplo

Describir las superficies de nivel de la función $f(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2$ (1)

Solución: Cada superficie de nivel tiene una ecuación de la forma $x^2+4y^2+z^2=k$ (2)

Por la naturaleza de la ecuación (2), k debe ser mayor o igual que cero. La expresión (2) es la ecuación de una familia de elipsoides concéntricos cuya forma estándar es:

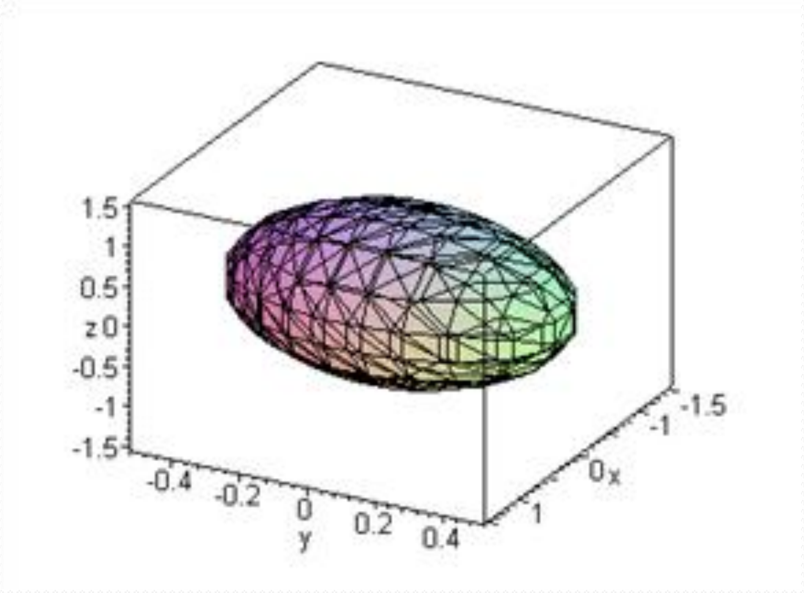
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Si $k = 1$.

$$x^2 + \frac{y^2}{(1/4)} + z^2 = 1$$

donde

$$a = 1,\ b = \sqrt{(1/4)} = \frac{1}{2},\ c = 1.$$



Si $k = 4$ entonces $$x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{4} = 1$$

donde $a = 2,\ \ b = 1,\ \ c = 2$

Tenemos que, si dibujamos la figura 1 y la figura 2 sobre un mismo eje de coordenadas la figura 1 estaría dentro de la figura 2 por ser concéntricas.