

ECUACIONES DIFERENCIALES – EXAMEN FINAL 25/7/11

NOMBRE:.....**CONDICIÓN:**.....

*Atención: Los alumnos regulares deben realizar solo los ejercicios marcados con**

Ejercicio 1:

a) Demuestra que si $dy/dx = f(x,y)$ es homogénea, entonces la ecuación diferencial puede escribirse como $dy/dx = g(y/x)$, de aquí que se sugiere una solución para resolverla.

* b) Emplea la idea del ítem (a) para resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} -(x^4 + 3x^2y^2 + y^4)dx + x^5ydy = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2:

* a) Un tanque está parcialmente lleno con 1000 litros de salmuera con 10 kg de sal disuelta. Entra salmuera con $\frac{1}{2}$ kilogramo de sal por litro a razón de 6 litros/min. El contenido del tanque está bien mezclado y de él sale a razón de 4 litros/min. Calcula la cantidad de kg de sal que hay en el tanque a los 30 minutos.

* b) Un circuito RCL tiene $R = 180$ ohmios, $C = 1/280$ faradios, $L = 20$ henrios y un voltaje aplicado de $E(t) = 10 \sin t$. Suponiendo que no hay carga $q(t)$ inicial en el condensador sino una corriente $i(t)$ inicial de 1 amperio para $t = 0$ cuando se aplica por primera vez al voltaje ($q' = i$). Halle la carga resultante en el condensador. (Recuerde que por la *Ley de Kirchhoff*:

$$iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0$$

Ejercicio 3:

* a) La ecuación característica de $y'' - 2y' + y = 0$ tiene dos raíces iguales a uno. Muestra cómo se deduce la segunda solución y_2 que es linealmente dependiente con $y_1 = e^x$.

b) Enuncia el principio de superposición para ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

* c) Utiliza el principio de superposición y la combinación de los métodos coeficientes indeterminados y variación de parámetros para encontrar la solución general de $y'' - 2y' + y = 4x^2 - 3 + x^{-1}e^x$.

Ejercicio 4:

a) Considera la ecuación diferencial $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$ donde p , q y r son polinomios.

i) ¿Cuándo se dice que la solución es de tipo Frobenius alrededor de $x = a$?

ii) ¿Qué forma tiene la solución y donde converge?

b) i) Muestra que las raíces indiciales de la singularidad de $y'' + (3/x)y' - 2y = 0$ difiere en un número entero.

* ii) Aplica el método de Frobenius para encontrar una solución en forma de serie con la raíz indicial mayor.

Ejercicio 5:

Resuelve por dos métodos diferentes el sistema
la misma solución.

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -2y(t) \\ \frac{dy}{dt} = y(t) - \frac{dx}{dt} \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 10 \quad y(0) = 5 \end{cases} \quad \text{y comprueba que llegas a}$$