Clase teórica de la semana del 2-5

Mario Garelik

Recomendaciones especiales.

- Leer el pdf relativo al Método de Lagrange disponible en la página. Alerta sobre la incompletitud del método en determinar si el extremo local encontrado es máximo o mínimo y brinda pautas acerca de cómo proceder para esclarecerlo.
- En las próximas clases comenzaremos con integración. Es recomendable usar el material del volumen 1 de Thomas referido al cálculo de volúmenes por secciones transversales, sección 6.1 (pp. 308 – 310). No se verá en clases, pero se lo referenciará. Se recomienda, por tanto, lectura solos en casa. **Está como material de estudio aparte en la página de la materia.**

Sección 14.7 - Valores extremos y puntos de silla.

- **Ejercitación propuesta (pág. 808):** 1 – 64.
- **Leer en la descripción del video pequeño comentario.** La aclaración fue realizada en clase presencial.
- Breve intro referida a que los procedimientos de Cálculo I para el cálculo de extremos relativos de una función son extensibles a varias variables. entonces:
  - Funciones continuas en regiones cerradas y acotadas alcanzan en ellas sus extremos absolutos (Wierstrass is back!).
  - Cobra relevancia la consideración de los puntos que anulan las derivadas parciales o que hacen que alguna o ambas no existan, y los puntos de frontera.
  - A pesar de la viñeta anterior, y al igual que en una variable, la anulación o no existencia de las derivadas paraciales en punto del dominio, no aseguran la presencia de un extremo.
- **Definición de extremos locales o relativos.** La importancia en la definición de la existencia de un disco abierto que contenga al punto.
  - Con la definición dada en Thomas, tener en cuenta que un punto de frontera puede ser un extremos relativo: al tomar un disco abierto centrado en él, basta considerar los puntos del mismo que se encuentran en el dominio de la función (esto es lo aclarado en la descripción del video).
  - En la figura 14.38 se propone un ejemplo con *cimas* y *fondos de valles* como ejemplo de extremos relativos en el cuadrado $|x| \leq \frac{3\pi}{2}$; $|y| \leq \frac{3\pi}{2}$.
  - Posición de los planos tangentes (cuando existen) en cimas y valles.

- **Criterio de la primera derivada para extremos locales.**
  - Es la versión *varias variables* del Teorema de Fermat que vimos en Cálculo I. Pero incorporamos (no está en Thomas) considerar el caso en que alguna o las dos derivadas parciales no exista en el punto $P(a, b)$.
  - **Cuidado.** El teorema sólo aplica para puntos $P(a, b)$ *interiores* al dominio de la función.
  - Con demo.
  - Brinda una condición necesaria para que un punto sea extremo local.
  - Falsedad del recíproco. Para contraejemplificar basta encontrar una función que en el punto crítico tenga un punto de silla.
  - Utilidad del contrarrecíproco para justificar la no existencia de extremos locales en el dominio de una función
  - Deducción de la ecuación del plano tangente en caso de existencia y nulidad de las derivadas parciales. Interpretación geométrica.
  - No siempre en un extremo local habrá un plano tangente ¿sólo en qué casos?
- **Punto crítico.** Definición e importancia de ser *interior al dominio.* No puede ser frontera.
- **Punto de silla.** Definición e importancia de la expresión *en cada disco abierto* como *cuantificador universal.* Corregir en la definición que da Thomas: cambiar *de alguna* por *o ambas.*
- Ejemplos.
  - Ejemplo 1: reconocimiento del paraboloide trasladado a partir de la ecuación. Solución.
  - Ejemplo 2: reconocimiento del paraboloide hiperbólico a partir de la ecuación. Solución.
- **Criterio de la segunda derivada para extremos locales.**
  - OJO: como se ve, el método sólo funciona en $\mathbb{R}^{\nvDash}$.
  - Idea: proponer condiciones complementarias a la nulidad de las derivadas parciales en el punto para poder decidir si es extremo relativo o punto de silla.
  - Enunciado. Ser minucioso en lo que se pide.
  - Debilidades:
    - el teorema no funciona para puntos frontera (donde podría existir extremos), sólo para interiores.
    - Tampoco funciona para puntos en los que las derivadas parciales no existen.
    - Paralelismo con Cálculo I.
  - Discriminante o Hessiano. Interpretación geométrica.
  - Ejemplos 3 y 4. En ambos observar que las funciones involucradas no son superficies conocidas.

- **Máximos y mínimos en regiones limitadas cerradas.**
  - Teniendo en cuenta las debilidades del criterio de la segunda derivada para extremos, se completa el proceso a la búsqueda en las fronteras si la región es cerrada y acotada.
  - Descripción del proceso de búsqueda entre los *interiores*, los de *frontera*.
  - Ejemplo 5.
- Ejemplo 6: vuelven los problemas de optimización! Encontrar los extremos de una función sujeta a una condición o ligadura. Este ejemplo, muy simple, sugiere el método que aprendemos en la siguiente sección.

Sección 14.8 - Multiplicadores de Lagrange.

- **Ejercitación propuesta (pág. 818):** 1 – 40, 44.
- Breve introducción al tema.
- Desarrolla dos ejemplos (1 y 2):
  - En el ejemplo 1: sustituye la restricción en la función y procede como se vio antes, utilizando el criterio de la primera derivada.
- El *método de sustitución* no siempre resulta sencillo de aplicar.
  - En el ejemplo 2, muestra que, en ocasiones, sustituir puede conducir a soluciones *extrañas*.
    * En la 1ª alternativa de solución, obtiene los extremos para valores que *no están en el cilindro*.
    * Arregla la situación cuando propone el 2º método para solucionar, en donde recurre a la geometría.
    * Explicar porqué propuso como superficie *restricción* a una esfera.
- La 2ª solución al ejemplo 2, motiva el desarrollo del siguiente método.
- **Método de los multiplicadores de Lagrange**.
  - En el desarrollo del método, la función f puede ser de dos o tres variables.
  - Idea general: los extremos de una función $f(x, y, z)$ cuyas variables están sujetas a la restricción $g(x, y, z) = 0$, se encuentran sobre la superficie $g = 0$ en aquellos puntos en los que: $\nabla f = \lambda \nabla g$.
  - **Teorema previo: el teorema del gradiente ortogonal.** (Con demo).
    * Notar que lo único en que difiere el teorema y su corolario es en el ámbito de aplicación: $\mathbb{R}^3$ para el teorema y $\mathbb{R}^2$ para el corolario.
    * En función de lo anterior, una demo vectorial, cubre ambos casos. Esto es: si llamamos $P_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ entonces, por regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f \cdot \mathbf{v}$$

Pero f tiene un extremo relativo en P_0, **respecto de sus valores sobre** C (tener bien claro esto) por lo que la derivada anterior se anula en t_0 y así:

$$\nabla f(P_0) \perp \mathbf{v}(t_0)$$

. Dado que $\mathbf{v}(t_0)$ es tangente a C, $\nabla f(P_0) \perp C$.

- **El Método de los multiplicadores de Lagrange** (Con demo - pie de pág. 814).
- Enunciado dado en clases **(sustituir el de inicio de pág. 815).**

Sea g una función continuamente diferenciable de dos o tres variables, definida en un subconjunto del dominio de una función diferenciable f y tal que $\nabla g \neq \boldsymbol{0}$ para todo punto sobre la superficie $g(x, y, z) = 0$. Si P_0 maximiza o minimiza a $f(x, y, z))$ sujeta a la condición de ligadura $g(x, y, z) = 0$, entonces $\nabla f(P_0)$ y $\nabla g(P_0)$ son paralelos, esto es: existe un escalar λ tal que:

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$$

λ se conoce como multiplicador de Lagrange.

- Lo mismo vale para $\mathbb{R}^2$, sólo sustituir superficie de nivel por curva de nivel.
- Demostración: seguir la del pie de página 814, que está correcta.
  * Un detalle a tener en cuenta en la demo: el significado de que un vector sea ortogonal a una superficie en un punto P_0 de ella, es que el vector resulta ortogonal a todas las curvas suaves de la superficie que pasan por ese punto (ver gráfico en pág. 792 - Thomas).
- En determinados casos, la función f puede estar sujeta a dos restricciones:

$$g_1(x, y, z) = 0 \quad \text{y}$$
$$g_2(x, y, z) = 0$$

En tales casos, tendremos dos multiplicaodres de lagrange: λ y μ tales que:

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g_1(P_0) + \mu \nabla g_2(P_0)$$

  * Interpretación geométrica: leer detenidamente la geometría de las soluciones a los ejemplos 3 y 4 de teoría.
- El ejercicio 41 de la sección muestra que la condición dada en el Teorema de Lagrange (el paralelismo de los gradientes en el punto $\mathbf{x}_0$) es necesaria pero no suficiente.