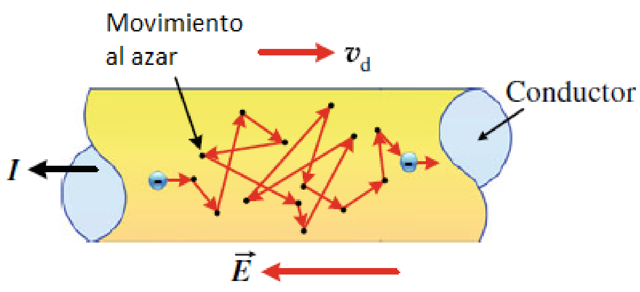
Ejercicio 1. El número de electrones libres en un alambre de cobre (C_u) de 3 m de longitud y 2 mm de diámetro es de 7,964 10^{23}. Si la corriente que lleva el alambre es de 1 A, (a) hallar la velocidad de deriva v_d. (b) Hallar el valor del campo eléctrico E.



Cuando existe un campo eléctrico E en un conductor, por ejemplo, como se muestra en la figura a la izquierda, como el movimiento de los electrones libres no tiene una dirección definida, sino que presentan un movimiento aleatorio donde su dirección va cambiando en forma continua debido a colisiones que se producen con otros electrones; la velocidad con que se mueven en el conductor se denomina velocidad de deriva (v_d).

(a) Luego para determinar su valor usamos la expresión de la densidad de corriente:

$$J = \frac{I}{A} = q\,.\,n\,.\,v_d$$

Donde la relación entre la corriente I y el área transversal A del alambre se denomina densidad de corriente J. La igualdad contiene la velocidad de deriva v_d, el valor de la carga q, y la densidad volumétrica de carga n, es decir la cantidad de carga por unidad de volumen del alambre. Con esto podemos despejar el valor de la velocidad de deriva:

$$v_d = \frac{I}{q\,.\,n\,.\,A}$$

De acuerdo con los datos del problema, en todo el volumen del alambre existen 7,964 10^{23} electrones, luego se debe determinar la cantidad de carga por unidad de volumen (n), donde:

$$n = \frac{\#\ \text{electrones}}{volumen} = \frac{7{,}964\ 10^{23}}{3m\,.\,(\pi.\frac{(0{,}002m)^2}{4})} = 8{,}45\ 10^{28}\ \frac{1}{m^3}$$

Finalmente, la velocidad de deriva v_d es:

$$v_d = \frac{I}{q\,.\,n\,.\,A} = \frac{1\ C/s}{1{,}6\ 10^{-19}C\,.\,8{,}45\ 10^{28}\ \frac{1}{m^3}\,.\,(\pi.\frac{(0{,}002m)^2}{4})} = \mathbf{2{,}354\ 10^{-5}\ m/s}$$

Este es un valor muy pequeño con el que se mueve la carga en el conductor, intuitivamente uno supone mayor velocidad. Para tener una idea de esa velocidad tan baja considerando el valor de la velocidad de deriva obtenido v_d, por ejemplo, el tiempo que demoraría un electrón o protón en recorrer la longitud del cable de 3 m a esa velocidad, sería:

$$t = \frac{l}{v_d} = \frac{3\ m}{2{,}354\ 10^{-5}\ m/s} = 127442{,}7\ s\ \equiv 1{,}475\ días$$

(b) Para determinar el valor del campo eléctrico E, usamos la definición de la densidad de corriente J que relaciona la corriente y el área transversal del alambre. Además, existe una expresión que relaciona al campo eléctrico con J:

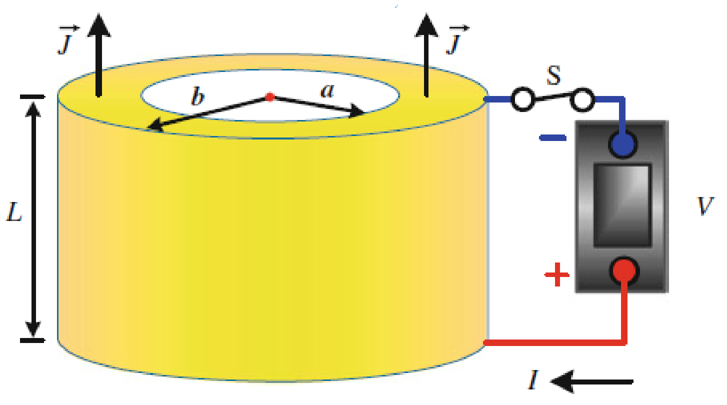
$$E = \rho . J = \rho . \frac{I}{A}$$

Donde ρ es la resistividad del material, para este caso se trata de cobre (Cu) a una temperatura ambiente de 20 °C, entonces el valor de ρ =1,7 10^{-8} Ω.m, con lo que el valor del campo resulta:

$$E = \rho . J = 1{,}7\ 10^{-8}\ \Omega . m . \frac{1\ A}{(\pi . \frac{(0{,}002 m)^2}{4})} = \mathbf{5{,}4\ 10^{-3}\ V/m}$$

El campo eléctrico coincide con el sentido de la corriente, es decir desde la terminal positiva a la negativa, y también coincide con la densidad de corriente J que, al igual que el campo, es un vector.

Ejercicio 2. Una carcasa cilíndrica de longitud L = 20 cm está hecha de aluminio y tiene un radio interior a = 2 mm y un radio exterior b = 4 mm, conectado a una fuente como se muestra en la figura. Suponer que la carcasa tiene una densidad de corriente uniforme J = 2 10^{5} A m^{-2} en la dirección de la longitud del cable. (a) ¿Cuál es la corriente I a través de la carcasa? (b) ¿Cuál es la resistencia R de la carcasa y la diferencia de potencial V?



Como se considera que el material es isotrópico, la densidad de corriente es uniforme a través de la sección de la corona cilíndrica como muestra la figura. Luego, como se conoce el valor de J se puede usar la definición de la densidad de corriente, y despejar el valor de la corriente de la siguiente fórmula:

$$J = \frac{I}{A}$$

(a) Para ello primero se define el área transversal de la corona:

$$A = \pi\,(b^2 - a^2) = \pi\,((0{,}004\ m)^2 - (0{,}002\ m)^2) = 3{,}77\ 10^{-5}\ m^2$$

Entonces la corriente I será:

$$I = J . A = 2{,}0\ 10^5 \frac{\mathrm{A}}{m^2}\ 3{,}77\ 10^{-5}\ m^2 = \mathbf{7{,}54\ A}$$

(b) Para determinar cuál es el valor de la resistencia R en la corona del cilindro, se utiliza la relación que define a la resistencia como el producto de la resistividad y la longitud del alambre, en este caso cilindro, divido por el área transversal del mismo.

$$R = \rho . \frac{L}{A}$$

Donde el valor de la resistividad para el material aluminio (Al) es ρ = 2,82 10^{-8} Ω.m, entonces la resistencia será:

$$R = 2{,}82\ 10^{-8}\ \Omega . m \ \ \frac{0{,}20\ m}{3{,}77\ 10^{-5}\ m^2} = \mathbf{1{,}50\ 10^{-4}\Omega}$$

Conociendo el valor de la resistencia R y la corriente que circula, se puede determinar cuál es el valor del potencial V aplicando la Ley de Ohm:

$$V = I . R = 7{,}54\ A\ \ 1{,}50\ 10^{-4}\ \Omega = \mathbf{1{,}13\ 10^{-3}\ V}$$

Ejercicio 3. Se mantiene una diferencia de potencial de 220 V a través de un calentador eléctrico que está hecho de un cable de nique-cromo de resistencia 20 Ω. (a) Determinar la corriente I en el cable y la potencia P nominal del calentador. (b) A un precio estimado de $ 5,0 por kilovatio-hora (KW.h) de electricidad, ¿cuál es el costo de mantener encendido el calentador durante 2 hs?

(a) Como el calentador se encuentra conectado a una red que mantiene un potencial de 220 V en forma constante, y conociendo el valor de la resistencia del calentador, utilizando la Ley de Ohm se determina el valor de la corriente I:

$$V = I . R \rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{220\ V}{20\ \Omega} = \mathbf{11\ A}$$

Luego, la potencia nominal del calentador será:

$$P = V . I = 220\ V\ 11\ A = \mathbf{2420\ W}\ \equiv \mathbf{2{,}42\ KW}$$

(b) Para determinar el costo de mantener encendido durante 2 hs en forma continua el calentador, se debe determinar la cantidad de energía que necesita consumir el calentador en 2 hs. Luego:

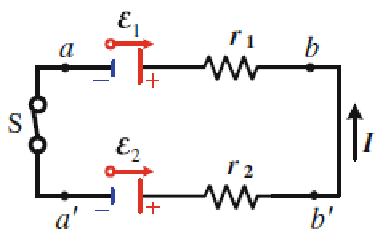
$$E = P . t = 2{,}42\ KW . 2\ hs = 4{,}84\ KW . h$$

Finalmente, el costo surge de multiplicar la energía consumida en 2 horas por el precio de la energía que entrega la red por hora:

$$Co = E . Pr = 4{,}84\ KW . h\ \ \$\ 5{,}0/KW . h = \$\ \mathbf{24{,}2}$$

Esto implica que durante 2 hs de encendido el calentador consumió energía de la red a un costo de $ 24,2. Si se mantiene este ritmo de encendido durante 30 días, el equivalente a un mes, el costo del consumo seria de $726.

Ejercicio 4. Una batería que tiene una fem $\mathcal{E}_1 = 9$ V y una resistencia interna $r_1 = 0{,}02\ \Omega$ está conectada a una segunda batería de $\mathcal{E}_2 = 12$ V y $r_2 = 0{,}04\ \Omega$, de manera que sus terminales similares estén conectados, vea la figura debajo. Encuentre la corriente en el circuito y el voltaje terminal en cada batería.



Como ambas baterías se encuentran conectadas a través de las mismas terminales, es decir positivo con positivo y negativo con negativo, esto implica que el voltaje que genera una se va a encontrar con el voltaje que genera la otra. Luego podemos considerar que la que tiene mayor potencial es la que determinará el sentido de la corriente en el circuito, es decir antihorario.

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 12\,V - 9\,V = 3\,V$$

Entonces, para determinar la corriente se utiliza la ecuación que contiene a la fem $\mathcal{E}$, en este caso la fem total $\mathcal{E}_{tot}$, la corriente I y las resistencias internas de cada batería.

$$V = \mathcal{E} - I\,r \;\rightarrow\; \mathcal{E}_{tot} = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) - I\,(r_2 + r_1)$$

$$I = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{(r_2 + r_1)} = \frac{3\,V}{(0{,}04\,\Omega + 0{,}02\,\Omega)} = \mathbf{50\,A}$$

La corriente que circula por el circuito es 50 A en sentido antihorario. Para determinar el voltaje terminal de cada batería, se utiliza nuevamente la ecuación del potencial de la fem con resistencia interna:

$$V = \mathcal{E} - I\,r$$

Luego para cada batería, por ejemplo, V_{ba} para la batería 1 y $V_{b'a'}$ para la batería 2, entonces:

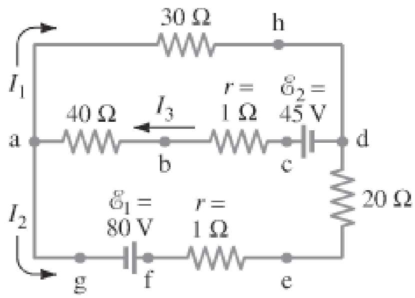
$$V_{ba} = V_b - V_a = \mathcal{E}_1 + I\,r_1 = 9\,V + 50A\,.\,0{,}02\Omega = 10\text{ V}$$

La diferencia entre las terminales de la primera batería es 10 V, esto implica que el potencial en b es mayor que en a ($V_b > V_a$).

$$V_{b'a'} = V_{b'} - V_{a'} = \mathcal{E}_2 - I\,r_2 = 12\,V - 50A\,.\,0{,}04\Omega = 10\text{ V}$$

La diferencia entre las terminales de la segunda batería es 10 V, esto implica que el potencial en a’ es mayor que en b’ ($V_{a'} > V_{b'}$).

Ejercicio 5. Calcular las corrientes I_1, I_2 e I_3 del circuito de la figura.

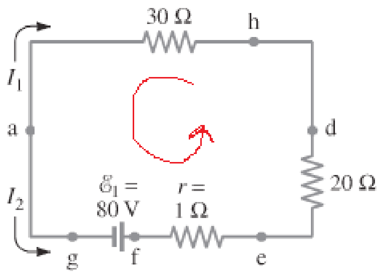


Para resolver los valores de las corrientes, se aplican las reglas de espiras (1) y las reglas de nodos (2). Entonces en una espira cerrada, cualquiera que elijamos, se debe cumplir que:

$$\oint \bar{E}.\bar{dl} = 0$$

Es decir que la sumatoria de las caídas de potencial alrededor de una espira cerrada debe ser 0.

La otra regla dice que en un nodo la suma de todas las corrientes que entran debe ser igual a todas las corrientes que salen del mismo, es decir que la corriente neta en un nodo es 0.



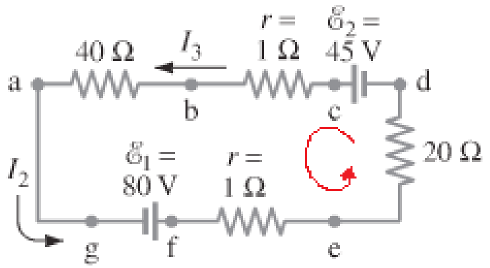
$$\sum I = 0$$

Por ejemplo, podemos comenzar considerando la espira definida por el contorno del circuito, y ahí aplicamos la regla (1), partiendo de la batería de fem 80 V y siguiendo un sentido antihorario:

$$\text{(a)} \quad 80V - (I_2\,.\,1\Omega) - (I_2.\,20\Omega) + (I_1.\,30\Omega) = 0$$

Aquí consideramos que la corriente I_2 se mantiene hasta el punto *d* donde existe un nodo y donde parte de la corriente se desvía a lo largo del alambre *da*, en tal caso luego del punto *d* la corriente será I_1 y con sentido horario, por eso aumenta el potencial al pasar por el resistor de 30 Ω de acuerdo con el sentido de cálculo adoptado.

Debemos ahora considerar otra espira cerrada ya que tenemos dos incógnitas en la ecuación (a).



Consideramos la espira inferior y repetimos el mecanismo que aplicamos a la espira anterior, es decir que contabilizamos los cambios de potencial comenzando desde un punto y volviendo al mismo, y la suma debe ser 0.

(b) $$80V - (I_2\,.\,1\Omega) - (I_2.\,20\Omega) + 45\ V - (I_3.\,1\Omega) - (I_3.\,40\Omega) = 0$$

Nuevamente, existen más incógnitas que ecuaciones por lo que planteamos en el nodo *d* que es equivalente a plantearlo en el nodo *a* la regla (2) de las corrientes, entonces:

(c) $$I_3 = I_1 + I_2$$

Ahora tenemos 3 ecuaciones y 3 incógnitas, entonces podemos resolver las incógnitas de las corrientes, podemos reescribir la ecuación (b) y reemplazar la corriente I_3 por la ecuación (c):

$$125V - (I_2\,.\,21\Omega) - (I_1 + I_2)\,.\,41\Omega = 0$$

$$125V - (I_2\,.\,62\Omega) = I_1\,.\,41\Omega = 0$$

$$I_1 = \frac{125\ V - (I_2\,.\,62\Omega)}{41\Omega}$$

$$I_1 = 3{,}049\ A - 1{,}51.\,I_2$$

Esa expresión de la corriente I_1 se reemplaza en la ecuación (a) para poder hallar el valor de I_2 y luego I_1 e I_3:

$$80V - (I_2\,.\,21\Omega) + 30\Omega\,.\,(3{,}049\ A - 1{,}51.\,I_2) = 0$$

$$80V - I_2.\,(21\Omega + 45{,}3\Omega) + 91{,}47\ V = 0$$

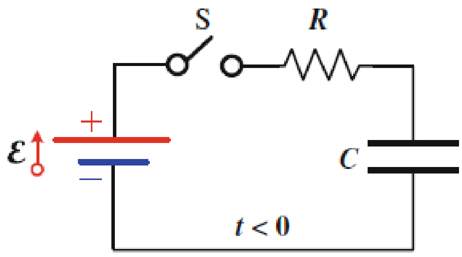
$$I_2 = \frac{171\ V}{66{,}3\Omega} = \mathbf{2{,}58\ A}$$

$$I_1 = 3{,}049\ A - 1{,}51.\,(2{,}58\ A) = \mathbf{-0{,}85\ A}$$

$$I_3 = -0{,}85\ A + 2{,}58\ A = \mathbf{1{,}73\ A}$$

Los valores obtenidos permiten establecer que tanto las corrientes I_2 como I_3 estaban supuestas en el sentido correcto, no así la corriente I_1 que supusimos en sentido horario y el resultado negativo indica que tendrá sentido opuesto.

Ejercicio 6. En el circuito de la figura, sea R = 2 kΩ, Ɛ = 10 V y C = 1μF. El capacitor está descargado antes de cerrar el interruptor S. a) Encuentre la constante de tiempo del circuito τ. Después de cerrar S, en t = 0, encuentre la corriente máxima en el circuito I_{max} y encuentre la carga máxima Q en el capacitor en t = ∞. (b) Encuentre la carga *q(t)* y la corriente en función del tiempo *i(t).*



(a) Como el capacitor se encuentra descargado, una vez que se cierre el interruptor comenzará a cargarse. La constante de tiempo del capacitor se define de la siguiente forma:

$$\tau = R\,.\,C = 2\,\mathrm{k\Omega}\,.\,1\mu\mathrm{F} = \mathbf{2\;10^{-3}\;s} \equiv \mathbf{2\;ms}$$

En este tiempo τ de 2 milisegundos el capacitor consiguió obtener el 63% de su carga total, es decir que da una idea de qué tan rápido se carga el capacitor. Una vez que se cierra el interruptor S, el capacitor que se encuentra descargado no opone resistencia a la corriente y la corriente es máxima, entonces:

$$I_{max} = I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{10\,V}{2000\,\Omega} = \boldsymbol{0,005\,A} \equiv \boldsymbol{5\,mA}$$

Una vez que transcurrió un tiempo suficientemente largo (t = ∞) el capacitor se cargó totalmente y cada una de sus placas tiene una carga Q:

$$C = \frac{Q}{\mathcal{E}} \rightarrow Q = C\,.\,\mathcal{E} = 1\mu\mathrm{F}\,.\,10\,\mathrm{V} = \mathbf{10\mu C}$$

(b) La ecuación de carga *q(t)* de un capacitor en función del tiempo es la siguiente:

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

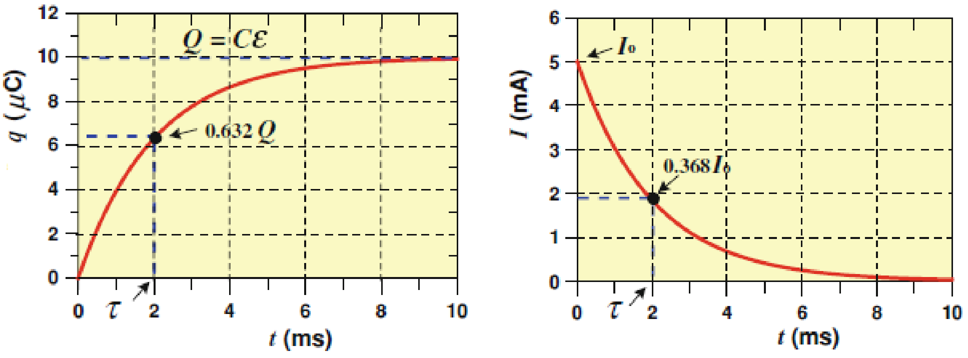
$$q(t) = 10\mu\mathrm{C}\left(1 - e^{-\frac{t}{2ms}}\right)$$

La ecuación de la corriente *i(t)* surge de derivar a la ecuación de la carga *q(t)* respecto al tiempo.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = I_0\left(e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i(t) = 5\,mA\left(e^{-\frac{t}{2ms}}\right)$$

Las gráficas de *q(t)* y de *i(t)* se presentan a continuación.



Referencias:

➔ Giancoli, D. C. (2005). Physics: principles with applications Sixth Edition.

➔ Radi, H. A., & Rasmussen, J. O. (2012). *Principles of physics: for scientists and engineers*. Springer Science & Business Media.