Elemento Barra

Es una estructura que permite ver cómo afecta la fuerza a los cuerpos. Es un elemento básico 1D elástico de longitud L^e y área A^e.

Las barras trabajan a tracción y compresión. Estas fuerzas provocan el desplazamiento de los nodos/nudos ($u(x)$) y la deformación de la barra.
La deformación está dada por:
$$\epsilon = \frac{\mu_2 - \mu_1}{dx} = \frac{d\mu(x)}{dx}$$

Un concepto que se usa en los problemas de barras es la tensión, que se define como:

$$\boxed{\sigma = E \cdot \epsilon = E \cdot \frac{\mu_2 - \mu_1}{L^e}}$$

Dado que las tensiones se distribuyen uniformemente:

$$N = A^e E \frac{\mu_2 - \mu_1}{L^e} \longrightarrow \text{Ley de fuerzas normales de la barra}$$

Tomando una barra de sección transversal de área A y módulo de elasticidad E sometida a tracción o compresión, debido a una carga longitudinal distribuida por unidad de longitud q(x):

- Tomo un pequeño diferencial x y planteo equilibrio de fuerzas

$$\sum X = 0,$$

$$-N + (N + dN) + q(x) = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dx} + q(x) = 0$$

- Reemplazando N en la ecuación, obtenemos la ED de gobierno:

$$\frac{d}{dx}\left(AE \frac{d\mu(x)}{dx}\right) + q(x) = 0 \xrightarrow{\text{Si E y A son constantes}} \boxed{EA \frac{d^2\mu}{dx^2} + q(x) = 0}$$

- Matricialmente tenemos:

$$q^e = \begin{pmatrix} R_1^e \\ R_2^e \end{pmatrix} = K^e \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1^e \\ \mu_2^e \end{pmatrix} - \frac{(b\ell)^e}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{K}}\, \underline{a}^e - \underline{f}^e$$

b: carga distribuida externa

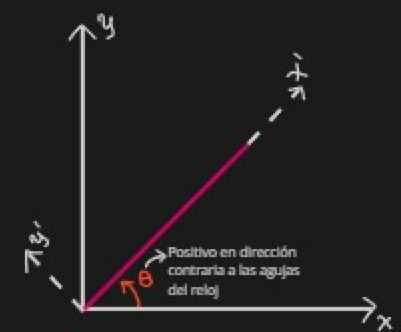
$R_1^e = -R_2^e = N$

$\frac{AE}{L}$: Constante de la barra

Caso 2D

En 2D, voy a tener dos sistemas coordenados, el sistema local de cada barra, y el global que puede estar en una dirección diferente. Para realizar los cálculos en estructuras 2D, vamos a utilizar las fórmulas que ya vimos para cada barra, y después las pasamos a coordenadas globales con una matriz de rotación.

Para poder utilizar la matriz de rotación, tenemos que "rellenar" los espacios correspondientes al eje y con 0



1. La matriz local de rigidez (en coordenadas locales) es:

$$\mathbf{K}_e^{\text{local}} = k_e \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. La matriz de transformación $\mathbf{T}$ es:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix}$$

3. Al realizar la multiplicación $\mathbf{T}^T \mathbf{K}_e^{\text{local}} \mathbf{T}$, se obtiene la matriz global de rigidez de la barra en el sistema global:

$$\mathbf{K}_e^{\text{global}} = k_e \begin{bmatrix} C^2 & CS & -C^2 & -CS \\ CS & S^2 & -CS & -S^2 \\ -C^2 & -CS & C^2 & CS \\ -CS & -S^2 & CS & S^2 \end{bmatrix}$$