Universidad Nacional del Litoral
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas

ESTADÍSTICA

Ingeniería Informática

TEORÍA

Mg.Ing. Susana Vanlesberg
Profesor Titular

UNIDAD 7
REGRESIÓN Y CORRELACIÓN

Muchos problemas en la ingeniería y la ciencia implican la exploración de las relaciones entre dos o más variables.

Se va a considerar la diferencia entre relación funcional y relación estadística:

Relación funcional entre dos o más variables se expresa por una fórmula matemática, por ejemplo en el cálculo de la velocidad de caída de un cuerpo, $v = (2gh)^{1/2}$, conociendo la altura de caída h y la gravedad del lugar, es posible obtener un valor exacto de velocidad; es por lo tanto una relación **determinística**.

Relación estadística, si se ajusta una curva a observaciones, existe variación de los puntos en torno de la curva que relaciona a las variables. Generalmente es posible encontrar una relación media con cierto grado de precisión.

El estudio de la asociación entre variables se hace a través de dos aspectos:

Análisis de regresión: es el que permite encontrar el modelo que vincula a las variables en cuestión, brindando así un mecanismo de pronóstico.

Análisis de correlación: determina la medida del grado de exactitud de la relación entre variables.

Se analizará el caso de asociación lineal simple entre dos variables, pero pueden darse casos más complejos como por ejemplo relación no lineal, relación múltiple, etc.

El modelo de regresión es una manera de expresar formalmente los aspectos esenciales de la relación estadística entre las variables:

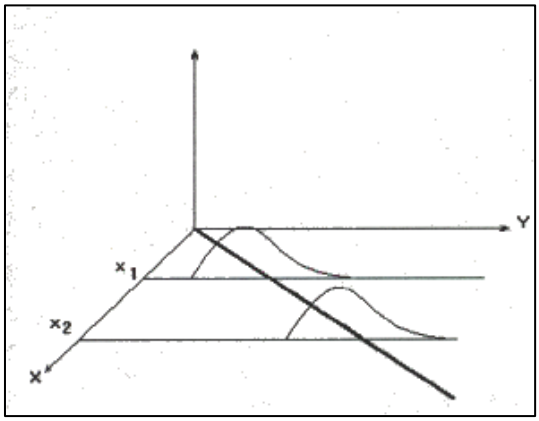
- La tendencia de la variable **y** (dependiente) a variar con la variable independiente de una manera sistemática.

- La dispersión de los puntos entorno a la curva que relaciona las variables.

Estos aspectos son contenidos en el modelo de regresión por enunciar lo siguiente:

- Existe una distribución de probabilidades de Y para cada valor de X: las variables X son fijas, es decir no aleatorias, mientras que las Y si lo son. Existen grupos de valores de Y para cada valor de la variable fija X, que se denominan **subpoblaciones**. Dependiendo del tipo de distribución de las variables aleatorias Y se clasifican en: -población tipo I es el caso en que la distribución de Y en cada subpoblación no está especificada; en el caso en que la distribución de Y en cada subpoblación es Normal se denomina población tipo II.

Las medias de estas distribuciones de probabilidad varían con la variación de x (variable fija).



Modelo de regresión bivariado

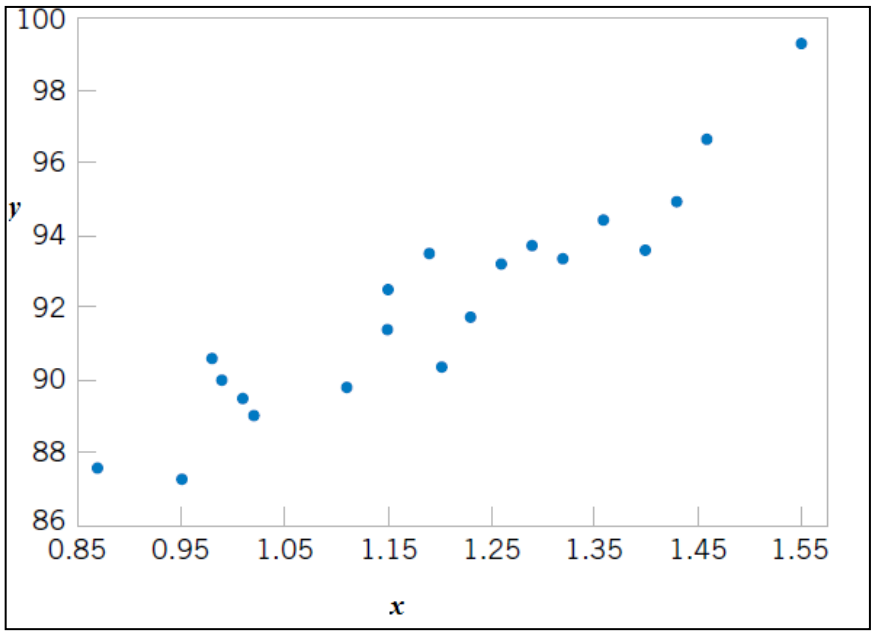


Figura N°1- Dispersiograma

La inspección del diagrama de dispersión indica que no hay una curva que pase exactamente por todos los puntos, pero es un fuerte indicio de que los puntos se encuentran dispersos al azar en torno a una línea recta. Por lo tanto, es razonable asumir que la media de la variable aleatoria Y está relacionada con x por la siguiente relación lineal:

$$E(Y/x) = \mu_{Y/x} = \alpha + \beta X_i \qquad (1)$$

α y **β** coeficientes de regresión.

Mientras que la media de Y es una función lineal de x, el valor observado y real no cae exactamente sobre una recta. La forma más adecuada para generalizar a un modelo lineal probabilístico es asumir que el valor esperado de Y es una función lineal de x, pero que para un valor fijo de x el real valor de Y está determinada por el valor medio de la función (el modelo lineal) más un término de error aleatorio, por ejemplo:

$$Y_i = \frac{\alpha + \beta X_i}{I} + \frac{\varepsilon_i}{II} \qquad (2)$$

donde ε_i es el término de error aleatorio.

siendo I la parte sistemática y II la parte estocástica, que hace que Y no pueda ser pronosticado exactamente como sucedería en un caso determinístico.

α y β son los parámetros del modelo.
Xi es la variable independiente, fija, conocida, variable explicativa.

Vamos a llamar a este modelo, **modelo de regresión lineal simple**, ya que cuenta con una sola variable independiente.

A veces, un modelo como este surgirá de una relación teórica. En otras ocasiones no vamos a tener ningún conocimiento teórico de la relación entre x e y, y la elección del modelo se basa en la inspección del diagrama de dispersión.

Para conocer más sobre este modelo, suponemos que podemos fijar el valor de x y observar el valor de la variable aleatoria Y. Ahora bien, si x es fijo, el componente aleatorio del lado derecho del modelo de la Ecuación (2) determina las propiedades de la variable dependiente Y.

Supongamos que la media y la varianza de ε son 0 y σ^2, respectivamente. Entonces:

$$E(Y/x) = E(\alpha + \beta x + \varepsilon) = \alpha + \beta x + E(\varepsilon) = \alpha + \beta x$$

Tener en cuenta que esta es la misma relación que en un principio escribimos empíricamente a partir de la inspección del diagrama de dispersión en la Figura Nº 1.

La varianza de Y dado x es:

$$Var(Y/x) = Var(\alpha + \beta x + \varepsilon) = Var(\alpha + \beta x) + Var(\varepsilon) = 0 + \sigma^2 = \sigma^2$$

Por lo tanto, el modelo de regresión es una línea de valores medios, es decir, el valor de la línea de regresión en cualquier valor de x es sólo el valor esperado de Y para que x.

La pendiente, puede ser interpretada como el cambio en la media de Y para un cambio unitario en x. Por otra parte, la variabilidad de Y para un valor particular de x se determina por la varianza del error $\in$, σ^2. Esto implica que hay una distribución de los valores Y para cada x, y que la varianza de esta distribución es la misma en cada x.

Significado de los parámetros α y β

α: intercepción de la línea de regresión con en eje Y.

β: pendiente de la recta, proporción de cambio en la media de la distribución de probabilidades de Y por unidad de incremento de X.

Es de destacar que el sentido con que son utilizados los términos **dependiente** e **independiente**, no es el mismo que el de dependencia e independencia de variables aleatorias.

Se dice que el modelo es de regresión simple cuando hay dos variables asociadas. Si esto no ocurre, el modelo es de regresión múltiple.

Se dice que el modelo es lineal si los parámetros y la variable independiente están elevados a la primera potencia. Si no es así, el modelo será no lineal.

¿Cómo puede asegurarse que el término de error $\in_i$ sea normalmente distribuido? Invocando el Teorema del Límite Central. Cuando existe una gran cantidad de causas independientes contribuyendo cada una con un pequeño efecto, la distribución de su suma es normal. En muchos casos en los que se aplica el análisis de regresión, las variables están influenciadas por un gran número de pequeños efectos independientes, por esto puede invocarse este teorema y justificar así la normalidad del término de error.

El modelo asume que la distribución de Y tiene igual varianza que el término de error, independientemente del valor de X. Esta propiedad se denomina *homoscedasticidad*.

Se asume independencia entre los términos de error. Esto significa que el resultado en alguna prueba no tiene efecto sobre el término de error de alguna otra prueba. ε no correlacionado con ε implica que Y_i no está correlacionado con Yj.

La completa especificación del modelo de regresión no solo incluye la forma del modelo (ecuación de regresión), sino una expresión de cómo son determinados los valores de la variable independiente y una especificación de la distribución de ε.

Cambiando los supuestos referidos a $\in$ y a X se obtienen distintos modelos de regresión. Por ejemplo, decir:

a) **ε** es una variable aleatoria independiente.

b) **ε** es una variable aleatoria, pero no independiente.

c) La distribución de **ε** no está especificada.

d) La distribución de **ε** es normal.

e) X es un conjunto de números fijos.

f) X es una variable aleatoria, pero su distribución no está especificada.
g) X es una variable aleatoria con distribución normal.

El modelo que se desarrollará considerará los supuestos a), d) y e) y, por lo tanto, se denominará modelo de regresión que tiene una población de Tipo II.

El modelo correspondiente a población Tipo I se basa en los supuestos a), c) y e)

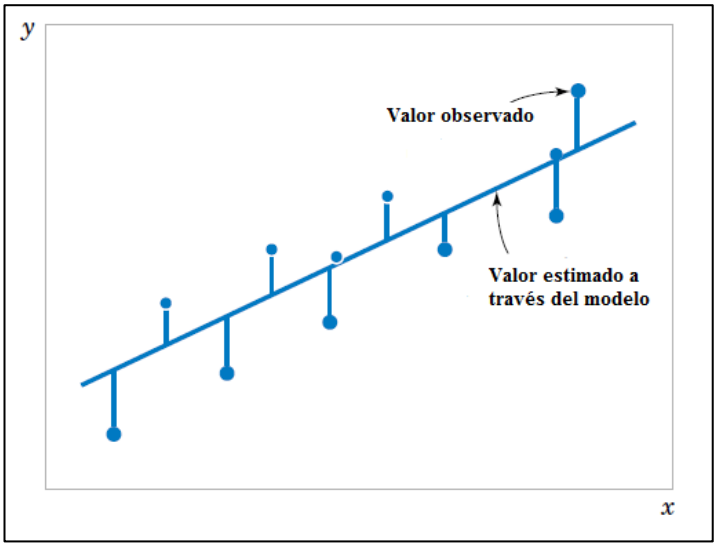
El modelo correspondiente a población Tipo III se basa en les supuestos a), c) y f).

El modelo correspondiente a población Tipo IV se basa en los supuestos a), d) y g).

La distribución de la variable Y, al ser una función lineal de $\in$, presenta su misma distribución.

Se trata de obtener el mejor estimador insesgado lineal del modelo planteado. El método empleado para esto es el de mínimos cuadrados. Una de las razones de su uso es la sencillez de su tratamiento matemático y, además, las estimaciones de α **y** β que produce son idénticas a las obtenidas por el método de máxima verosimilitud.

Estimación por el método de mínimos cuadrados



Se parte de considerar que la subpoblación de Y es normal, y que la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones respecto de la recta verdadera sea mínima:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - (\alpha + \beta X_i) \right]^2$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i \right)^2, con\_\hat{Y}_i = a + bX_i$$

$$luego \quad S = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - (a + bX_i) \right]^2$$

Los estimadores de α **y** β serán aquellos que minimicen el valor de S:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \alpha - \beta X_i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2 \sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - \alpha - \beta X_i)$$

Igualando a cero, aplicando sumatoria a todos los términos y reemplazando a α **y** β por a y b, se obtienen las siguientes ecuaciones normales, que conducen a obtener los estimadores a y b:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} Y_i - na - b \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \\ \sum_{i=i}^{n} X_i Y_i - a \sum_{i=1}^{n} X_i - b \sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación: $a = \bar{Y} - b\bar{X}$

Sustituyendo a en la segunda ecuación, se obtiene:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)\left(Y_i - \overline{Y} \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^2}$$

$$b = \frac{\text{COV}}{S_x^2}$$

Luego la recta de regresión es $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\, x$ (3)

Propiedades de los estimadores

Pueden considerarse a **a** y **b** como combinación lineal de las Y, que tienen distribución normal:

$$\hat{\beta} = b = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)\left(Y_i - \overline{Y} \right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X} \right)^2}$$

Las propiedades estadísticas de los estimadores de mínimos cuadrados $\hat{\alpha}\,; \hat{\beta}$ se pueden describir fácilmente.

Recordemos que hemos supuesto que el término de error $\in$ en el modelo Y es una variable aleatoria con media cero y varianza σ^2. Dado que los valores de x son fijos, Y es una variable aleatoria con media $\mu_{Y/x} = \alpha + \beta x$ y varianza σ^2. Por lo tanto, los valores de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ dependen de los valores observados, por lo que los estimadores de mínimos cuadrados de los coeficientes de regresión pueden ser considerados como variables aleatorias. Vamos a investigar las propiedades de los estimadores.
Debido a que β es una combinación lineal de las observaciones Yi, podemos utilizar las propiedades de la esperanza (Ver Anexo Cap. VII) para demostrar que el valor esperado de β es:

$$E(b) = \beta \qquad (4)$$

Por lo tanto **b** es un estimador insesgado de β, y su distribución es Normal ya que se consideró a b como combinación lineal de variables normales independientes.

Para obtener las varianza el análisis se basa en el hecho de que las Y_i son variables independientes, cada una con varianza σ^2, y que las K_i utilizadas antes son constantes, pues dependen de X_i y $\overline{X}$:

$$\sigma^2(b) = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} K_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} K_i{}^2 \sigma^2(Y_i)$$

$$como$$

$$\sigma^2(Y_i) = \sigma^2(\in) = \sigma^2, entonces$$

$$\sigma^2(b) = \sum_{i=1}^{n} K_i{}^2 \sigma^2$$

$$\sigma^2(b) = \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \qquad (5)$$

Se realizará algo similar para obtener la esperanza del estimador de α:

$$E(a) = E(\overline{Y} - b\overline{X}) = E(\overline{Y}) - E(b\overline{X}) = \alpha + \beta\overline{X} - \beta\overline{X} = \alpha$$

$$E(a) = \alpha \qquad (6)$$

Se comprueba así la insesgabilidad del estimador **a**, siendo su distribución Normal por ser también combinación lineal de variables normales independientes.

Se demuestra (Ver Anexo Cap VII) que la Varianza del estimador a es:

$$\sigma^2(a) = E(a - \alpha)^2$$

$$\sigma^2(a) = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \overline{X}^2 \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})}{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right)^2}\right]$$

$$\sigma^2(a) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \right] \qquad (7)$$

Han sido así obtenidos los valores medios y varianzas de los estimadores puntuales de la pendiente y ordenada al origen del modelo de regresión lineal simple.

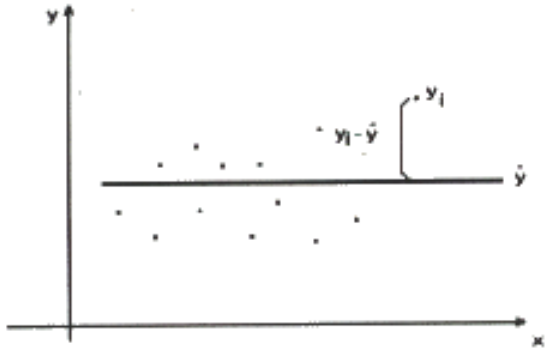
Varianza de la regresión

Se suele llamar ecuación predictiva a la ecuación de regresión muestral, ya que su principal objetivo es predecir valores medios de la variable dependiente asociados con un valor dado de la variable independiente. Pero para saber si es realmente conveniente utilizar esta ecuación para predicción, puede analizarse la variabilidad del valor pronosticado a través del modelo de regresión.

Una primera manera de analizar esta variabilidad puede ser a través de la inspección visual por trazar en el diagrama de puntos la recta obtenida. La medida numérica de la desviación de las observaciones respecto al modelo es el estimador de la varianza de la regresión de la población: $S^2_{y/x}$.

El análisis de la varianza de regresión se basa en la partición de la suma de cuadrados.

La variación de la variable dependiente Y_i generalmente se mide en términos de las desviaciones respecto al valor medio:

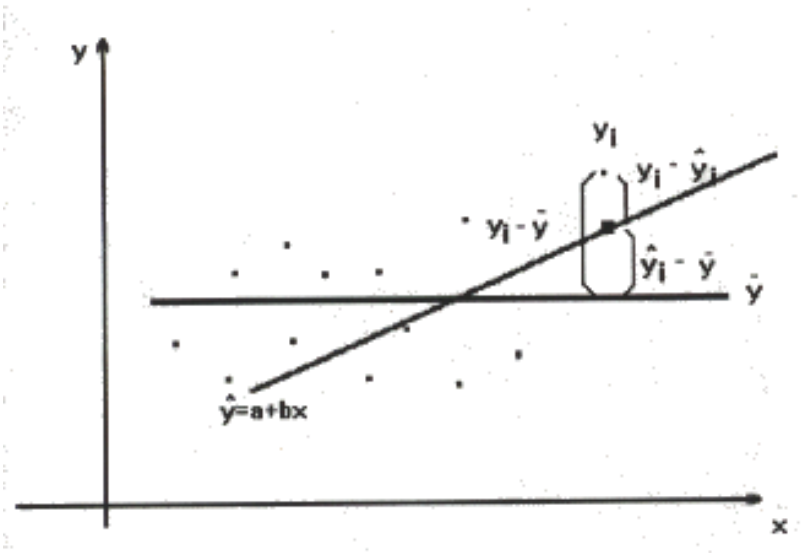


La medida de variación total es para todos los puntos:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2$$

Cuanto mayor es este valor, mayor es la variación de la curva ajustada respecto a las observaciones.

Utilizando el modelo ajustado, *la variación se da por la diferencia de los valores observados con los valores ajustados o estimados:*



$$Y_i-\hat{Y}_i$$

Por lo tanto la variación total será: **SSE** suma de desvíos cuadrados o suma de errores cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}\right)^2$$

Si este valor es igual a cero todos los puntos caen sobre el modelo ajustado; cuanto mayor sea, mayor será la variación o dispersión alrededor de la recta.

Particionando la suma total, o sea la dispersión respecto al valor medio, se obtiene:

$$\left(Y_i-\bar{Y}\right)=\left(\hat{Y}_i-\bar{Y}\right)+\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)$$

siendo:

$Y_i-\bar{Y}$ *: desviación total*

$\hat{Y}_i - \overline{Y}$ *: desviación de la recta respecto al valor medio*

$Y_i - \hat{Y}_i$ *: desviación respecto a la línea ajustada*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}i\right)^2\right)$$

desarrollando el último término de la suma:

$$\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = \left(Y_i - \overline{Y}\right) - \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)$$

$$\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = \left(Y_i - \left(a + b\overline{X}\right)\right) - \left(a + bX_i - \overline{Y}\right)$$

siendo $a = \overline{Y} - b\overline{X}$, $\overline{Y} = a + b\overline{X}$, $\hat{Y}_i = a + bX_i$

$$\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = \left(Y_i - \overline{Y}\right) - \left(\left(a + bX_i\right) - \left(a + b\overline{X}\right)\right)$$

$$\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = \left(Y_i - \overline{Y}\right) - a - bX_i + a + b\overline{X}$$

$$\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = \left(Y_i - \overline{Y}\right) - b\left(X_i - \overline{X}\right)$$

Como se quiere encontrar una expresión para la varianza de la estimación, a la expresión anterior se le deberá aplicar el operador esperanza y elevarla al cuadrado, y esto para todos los puntos, es decir sumatoria. Luego de estos pasos matemáticos, se obtiene la expresión de la varianza de la regresión:

$$S^2_{y/x} = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} \qquad (8)$$

La distribución en el muestreo de este estimador, recuérdese que la varianza estaba relacionada con la variable χ^2:

$$\chi^2_{n-2} = \frac{(n-2)S^2_{y/x}}{\sigma^2}$$

Esto sirve para realizar inferencias (construir intervalos de confianza o realizar test de hipótesis) respecto a los parámetros de la ecuación de regresión.

Predicción y pronóstico

Como ya se dijo, uno de los objetivos principales del análisis de regresión es la predicción. Pero es importante hacer notar claramente la diferencia entre predicción y pronóstico:

***Predicción*:** es la estimación del valor medio de Y dado un valor particular de X:

$$\hat{Y}_h = a + bX_h$$

a + bX es el estimador insesgado de α + βX, y su distribución es Normal, ya que es una combinación lineal de variables aleatorias normales. Por lo tanto, para poder encontrar un intervalo para cualquier punto de la recta de regresión poblacional, faltaría encontrar la varianza o error de la regresión. Para este caso, la variación depende de la variación en ambos estimadores, a y b:

$$\sigma^2\left(\hat{Y}_h\right) = \sigma^2\left(a + bX_h\right) = \sigma^2\left(\overline{Y} - b\overline{X} + bX_h\right) = \sigma^2\left(\overline{Y} + b(X_h - \overline{X}\right)$$

Como $\overline{Y}$ y b son variables independientes, y X_h y $\overline{X}$ son constantes, es posible hallar la varianza por términos:

$$\sigma^2\left(\hat{Y}_h\right) = \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2\left(b\left(X_h - \overline{X}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \left(X_h - \overline{X}\right)^2 \sigma^2\left(b\right) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{n} + \left(X_h - \overline{X}\right)^2 \sigma^2 \frac{1}{\sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2} = \qquad (9)$$

$$\sigma^2\left(\hat{Y}_h\right) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\left(X_h - \overline{X}\right)^2}{\sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right)$$

Siendo σ^2 la varianza de la regresión.

***Pronóstico*:** es la proyección de un solo valor de Y correspondiente a un valor de X particular:

$$\tilde{Y} = a + bX_h \qquad (10)$$

Se ve que las expresiones son las mismas, pero existen diferencias:

σ^2 *(error de pronóstico): consta de dos partes:*

1- σ^2 *del error de predicción (ya analizada)*

2- σ^2 *debida a errores casuales, tenida en cuenta por* σ^2

$$\sigma^2\left(Y_i - \hat{Y}_h\right) = \sigma_p^2 + \sigma^2 = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\left(X_h - \overline{X}\right)^2}{\sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right) + \sigma^2$$

$$\sigma^2\left(Y_i - \hat{Y}_h\right) = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(X_h - \overline{X}\right)^2}{\sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2}\right) \qquad (11)$$

Regresión no lineal

La regresión lineal no siempre da buenos resultados ya que veces la relación entre *Y* e *X* no es lineal. La estimación directa de los parámetros de funciones no-lineales es un proceso bastante complicado. No obstante, a veces se pueden aplicar las técnicas de regresión lineal por medio de transformaciones de las variables originales.

Por ejemplo los resultados de este análisis pueden proporcionar una buena indicación sobre el comportamiento de los costos para un banco "típico", aunque la naturaleza misma de un estudio de este tipo no puede arrojar resultados estrictamente aplicables a cada uno de los bancos considerados individualmente. No obstante, a pesar de esto, un estudio de este tipo de todas maneras puede ser muy útil, porque los resultados pueden proporcionar una "norma" o "estándar" contra el cual se pueden comparar los costos administrativos en un banco particular. En ausencia de un estudio de este tipo, un banco no tiene realmente un criterio para determinar si sus costos son "muy elevados," "aceptables," o "normales," ya que los bancos difieren enormemente en cuanto a cantidad de activos, número de sucursales, etc., de modo que el único criterio objetivo sería el de compararse con un banco de similar tamaño y características. Sin embargo, si se pudiera obtener una fórmula empírica que permita calcular un valor "normal" o "promedio" para los costos administrativos en función de unas pocas variables que permitan una medición numérica, entonces se podría fácilmente determinar si el banco en cuestión está "mejor" o "peor" que el banco "típico" a ese respecto.

Una función no-lineal que tiene muchas aplicaciones es la *función potencial*:

$$Y = A * X^b$$

donde *A* y *b* son constantes desconocidas. Si se aplica logaritmos, esta función tambiénpuede ser expresada como:

log(Y) = log(A) + *b* .log(X)

Considerando ahora la siguiente regresión lineal:

$\log(Y) = b_0 + b_1 \log(X)$

En esta regresión (denominada *regresión doble-log*), en lugar de calcular la regresión de Y en X, calculamos la regresión del *logaritmo* de *Y* vs el *logaritmo* de X.

Comparando estas dos ecuaciones, podemos apreciar que el coeficiente b_0 es un estimador de log(A), mientras que b_1 es un estimador de *b* (el exponente de la función potencial). Este modelo es particularmente interesante en aplicaciones econométricas, porque el exponente *b* mide la *elasticidad* de Y respecto de X.

CASO APLICADO

Desempleo y Crecimiento Económico

En 1963 el economista norteamericano Arthur M. Okun planteó un modelo macroeconómico para explicar la relación entre el crecimiento económico y las variaciones en la tasa de desempleo. Según este modelo, que se conoce hoy en día como la "ley de Okun," existe una relación lineal entre el *cambio* en la tasa de desempleo y la tasa de crecimiento del Producto Interno Bruto (PIB) real. En el cuadro adjunto se muestran datos anuales para la tasa de desempleo y el cambio porcentual en el PIB real en Alemania Occidental durante el período 1960-1981. Usar estos datos para estimar el modelo de Okun, y explicar el significado de los resultados obtenidos.

Año	Crecimiento PIB Real (%)	Desempleo (%)
1960	4.6	1.2
1961	5.1	0.9
1962	4.4	0.7
1963	3.1	0.9
1964	6.7	0.8
1965	5.5	0.7
1966	2.6	0.7
1967	-0.1	2.1
1968	5.9	1.5
1969	7.5	0.8
1970	5.1	0.7
1971	3.1	0.8
1972	4.2	1.1
1973	4.6	1.2
1974	0.5	2.6
1975	-1.7	4.8
1976	5.5	4.7
1977	3.1	4.6
1978	3.1	4.4
1979	4.2	3.8
1980	1.8	3.8

1981	0.1	5.5

Fuente: Frank Wolter, "From Economic Miracle to Stagnation: On the German Disease," en A. C. Harberger, ed., *World Economic Growth* (San Francisco: ICS Press, 1984), Table A-3, p. 119.

Medida del grado de asociación entre las variables

La medida del grado de relación entre dos variables se denomina **Coeficiente de Correlación ρ**.

Consideraciones a tener en cuenta en este análisis:

1 - Las variables X e Y son variables aleatorias, esto significa que no es fijo decir variable dependiente o independiente, cualquiera de las dos puede ser la variable independiente o a la inversa.

2 - Las variables proceden de una población Normal bivariada, o sea X e Y están distribuidas conjuntamente como Normal.

3 - X e Y tienen cada una distribución Normal:

$$X \approx N(\mu_x;\sigma_x) \qquad Y \approx N(\mu_y;\sigma_y)$$

4 - La relación entre X e Y es lineal; este supuesto implica decir que las medias de y para valores de X caen sobre la recta $Y_i = \alpha + \beta X_i$ de la misma manera que para $X_i = \alpha + \beta Y_i$.

5 - Si las dos rectas de regresión (con X dependiente o con Y dependiente) son iguales, quiere decir que la relación es perfecta.

El coeficiente de correlación poblacional se define como:

$$\rho = \frac{E(X-\mu_x)E(Y-\mu_y)}{\sqrt{E(X-\mu_x)^2 E(Y-\mu_y)^2}} = \frac{\text{cov}arianza}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (12)$$

Siendo μ_x , μ_y ,σ_x , σ_y , ρ, los parámetros de la distribución Normal bidimensional.

De la expresión de ρ puede decirse:

- se aprecia que un cambio en el orden de las variables no afecta su valor, luego es un número adimensional.

- la covarianza y de aquí ρ, serán positivos si grandes valores medios de X se asocian con grandes valores medios de Y (y pequeños valores medios con pequeños valores medios). Por el contrario si grandes valores medios se asocian con pequeños valores medios (o viceversa), la covarianza y por lo tanto ρ, serán negativos. En ambos casos puede decirse que existe al menos alguna vinculación o dependencia estocástica entre X e Y.

Específicamente el **coeficiente de correlación** es una medida de la dependencia lineal entre dos variables aleatorias. Dado solamente el valor de ρ, puede decirse que un alto valor implica dependencia estocástica alta y de esta manera se puede decir que existe entre X e Y una tendencia lineal conjunta. Lo cual no significa necesariamente relación de causa y efecto, mientras que un bajo valor implica que las variables no tienen un comportamiento lineal conjunto y esto no asegura que falte dependencia estocástica. Es por esto, que debe tenerse **CUIDADO EN SU INTERPRETACIÓN**.

Correlación espuria: suele aparecer cuando se busca normalizar los datos, dividiendo por algún factor, el cual es en sí mismo una variable aleatoria, las variables originales pueden ser independientes pero los pares formados por los cocientes pueden presentar alta correlación, cuando en realidad no existe.

Valores posibles de ρ

$$Cov(x,y) = E(x - \mu_x)E(y - \mu_y)$$

$$x \text{ e } y \text{ son } N(\mu, \sigma)$$

$Cov(x^*,y^*) = E(x^*)E(y^*)$, *las esperanzas son* 0 *y los desvìos* 1. *Luego:*

$$Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y) = E(x^*y^*)$$

$$\rho = \frac{Cov(xy)}{\sigma_x \sigma_y}. \text{ Siendo } \sigma_x \text{ y } \sigma_y \text{ iguales a } 1, \text{ luego:}$$

$$Var(x^* \pm y^*) = Var(x^*) + Var(y^*) \pm 2Cov \geq 0$$

$$1 + 1 \pm 2\rho \geq 0$$

$$2 \pm 2\rho \geq 0$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

Coeficiente de correlación muestral

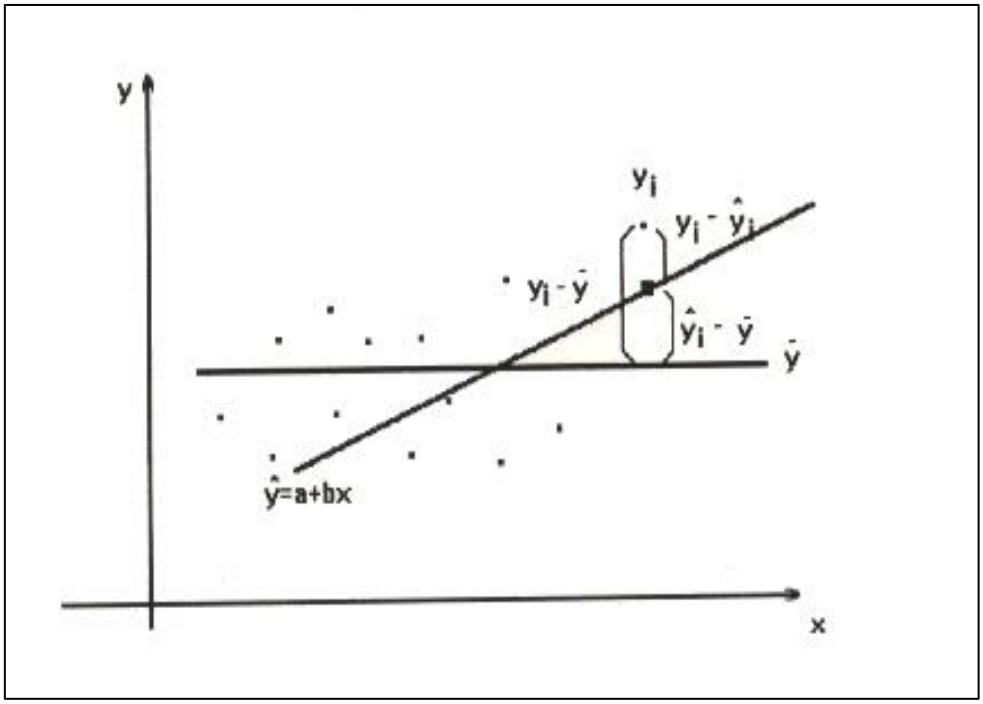
El estimador de ρ se obtiene considerando los momentos muestrales:

$$r = \hat{\rho} \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{m_{1,1}}{S_x S_y} \qquad (13)$$

Su variación es la misma que la del coeficiente de correlación poblacional.

Otro coeficiente usado en este análisis es el de determinación, que está relacionado con el de correlación.

Recordando el análisis de varianza ya realizado, se partirá de estas expresiones para obtener el **coeficiente de determinación**.



$$\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = \ (SCT)$$

$$\sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \ (SCR)$$

$$\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = \ (SCE)$$

$$SCR = \sum_i (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_i (a + bx_i - \bar{y})^2 = \sum_i (\bar{y} - b\bar{x} + bx_i - \bar{y})^2 =$$

$$= \sum_i \left[b(x_i - \bar{x})\right]^2 = b^2 \sum_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$SCT = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$$

$$SCE = SCT - SCR$$

$$Dividiendo por\ SCT:$$

$$\frac{SCE}{SCT} = \frac{SCT}{SCT} - \frac{SCR}{SCT}$$

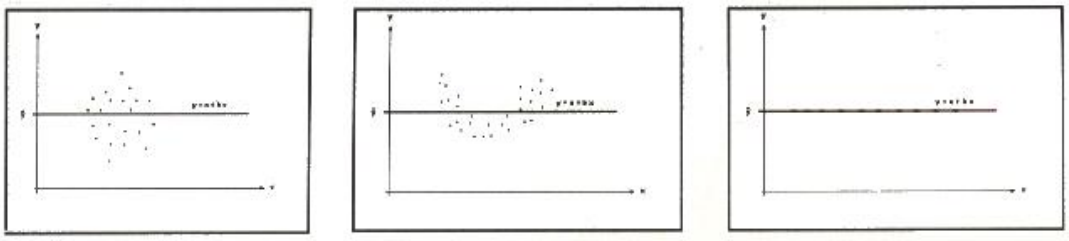
$$1 = \frac{SCR}{SCT} + \frac{SCE}{SCT}$$

$$r^2 = 1 - \frac{SCE}{SCT} = \frac{SCR}{SCT} \qquad (14)$$

$$r^2 = \frac{suma\ de\ cuadrados\ \text{explicados}}{suma\ de\ cuadrados\ total}$$

r^2 varía entre 0 y 1, ya que SCR es menor o igual que SCT.
Pueden hacerse algunos comentarios respecto de su valor:
Si SCE = 0, esto implica que SCR = SCT, lo que lleva a decir que r^2 es igual a 1. Esto significa que todos los puntos están sobre la recta estimada.
Si SCR = 0, implica que SCE = SCT, con lo cual $r^2 = 0$. Esto significa que la pendiente de la recta es igual a cero. Esto puede deberse a que la línea de regresión sea horizontal, y esto ser debido a distintas causas:

a) las observaciones se dispersan alrededor del valor medio en forma aleatoria.
b) las observaciones se dispersan alrededor de una curva tal que la línea mejor ajustada es una línea recta horizontal.
c) todas las observaciones tienen el mismo valor, cualquiera sea el valor de x.



Este coeficiente es también denominado **índice de correlación**, y se utiliza para medir el grado de asociación entre las variables cuando la regresión es lineal y no lineal.