Cálculo II 2022
FICH - UNL
Comisión 4

Thomas Vol. 2 Sección 13.4

Curvatura y vectores normales de una curva.

Ejercicio 5.
Fórmula de la curvatura para la gráfica de una función en el plano xy.

(a) La gráfica $y = f(x)$ en el plano xy automáticamente tiene la parametrización $x = x$, $y = f(x)$ y la fórmula vectorial $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$. Use esta fórmula para demostrar que si f es una función de x dos veces derivable, entonces

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}.$$

Solución: Recordemos la fórmula para el cálculo de la curvatura dada en la pag. 729:

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{T}'| \qquad\qquad \text{donde } \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

En primer lugar hallemos el vector tangente unitario $\mathbf{T}$. Si $\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\,\mathbf{j}$$

y en consencuencia $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + (f'(x))^2}$. Por lo tanto obtenemos que

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}\,\mathbf{i} + \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}\,\mathbf{j}$$

Para obtener $\mathbf{T}'$ recordemos que $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right) = -\dfrac{1}{2u^{3/2}}u'$ y $\dfrac{d}{du}\sqrt{u} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$. Para derivar cada una de las funciones componentes, aplicaremos la regla de la cadena derivando respecto de x.

1) Por un lado, aplicando regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}\right) &= -\frac{1}{2[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}(2f'(x)f''(x)) \\ &= -\frac{f'(x)f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

Notar que al derivar el argumento de la raíz, en el paso anterior, nos queda $(1+(f'(x))^2)' = 0 + 2f'(x)f''(x)$.

2) Para la función componente en $\mathbf{j}$ necesitamos derivar un cociente, entonces resulta:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\right) &= \frac{f''(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} - f'(x)\frac{2f'(x)f''(x)}{2\sqrt{1+(f'(x))^2}}}{1+(f'(x))^2} \\
&= \frac{f''(x)[1+(f'(x))^2]^{1/2} - \frac{(f'(x))^2 f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{1/2}}}{1+(f'(x))^2} \\
&= \frac{\frac{f''(x)[1+(f'(x))^2]-(f'(x))^2 f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{1/2}}}{1+(f'(x))^2} \\
&= \frac{f''(x)[1+(f'(x))^2]-(f'(x))^2 f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1+(f'(x))^2)} \\
&= \frac{f''(x)[1+(f'(x))^2-(f'(x))^2]}{[1+(f'(x))^2]^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1+(f'(x))^2)} \\
&= \frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1+(f'(x))^2)} \\
&= \frac{f''(x)}{[(1+(f'(x))^2)]^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo cada expresión obtenida, podemos dar la forma de la derivada para el vector tangente unitario:

$$
\mathbf{T}' = -\frac{f'(x)f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{f''(x)}{[(1+(f'(x))^2)]^{3/2}}\,\mathbf{j}
$$

Para calcular la curvatura, necesitamos encontrar el módulo del vector $\mathbf{T}'$:

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{T}'| &= \sqrt{\left(-\frac{f'(x)f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{(f'(x))^2(f''(x))^2}{([1+(f'(x))^2]^{3/2})^2} + \frac{(f''(x))^2}{([1+(f'(x))^2]^{3/2})^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(f'(x))^2(f''(x))^2}{[1+(f'(x))^2]^3} + \frac{(f''(x))^2}{[(1+(f'(x))^2]^3}} \\
&= \sqrt{\frac{(f'(x))^2(f''(x))^2+(f''(x))^2}{[(1+(f'(x))^2]^3}} \\
&= \sqrt{\frac{[(f'(x))^2+1](f''(x))^2}{[(1+(f'(x))^2]^3}} \\
&= \sqrt{\frac{(f''(x))^2}{[(1+(f'(x))^2]^2}} = \frac{|f''(x)|}{1+(f'(x))^2}
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustituyendo $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + (f'(x))^2}$ y $|\mathbf{T}'| = \dfrac{|f''(x)|}{1 + (f'(x))^2}$ en la fórmula para la curvatura, resulta:

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{1}{|\mathbf{v}|}|\mathbf{T}'| \\
\kappa &= \frac{1}{[1^2 + (f'(x))^2]^{1/2}} \cdot \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]} \\
\kappa &= \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}
\end{aligned}$$