Cálculo II

INTEGRALES TRIPLES

Prof. Ing. Silvia Seluy

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS RECTANGULARES

La integral de una función *f(x,y,z)* sobre una región D, cerrada y acotada en el espacio, puede definirse tomando en D, celdas rectangulares, obtenidas mediante planos paralelos a los ejes coordenados.

Consideramos la k-ésima, de las n celdas, de dimensiones $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ y en ella, tomamos el punto (x_k, y_k, z_k) para formar la suma de Riemann:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$$

$$\Delta V_k = \Delta x_k . \Delta y_k . \Delta z_k$$

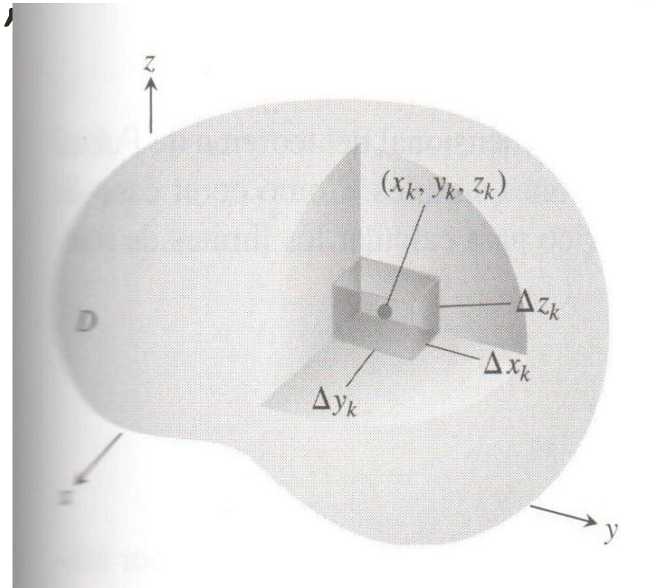


FIGURA 15.27 Partición de un sólido con celdas rectangulares de volumen ΔV_k.

- Al dividir D en celdas cada vez más pequeñas

cuando f es continua y la frontera de D está formada por un número finito de superficies regulares unidas por curvas regulares, f es integrable, y se obtiene el límite finito:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{\|P\| \to 0} S_n = \iiint_D f(x, y, z)\, dV}$$

Llamado integral triple de *f* sobre D

con $dV = dxdydz$

Volumen de una región en el espacio

- Cuando f toma el valor constante 1, entonces las fórmulas dadas se convierten en :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 1\,\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

- Cuando $\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ tienden a cero, aumenta el número de celdas y cubren mayor parte de D, por lo que se define al volumen como:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = V = \iiint_D dV}$$

Es el **volumen de una región D**, cerrada y acotada en el espacio.

Cálculo de los límites de integración en int. triples

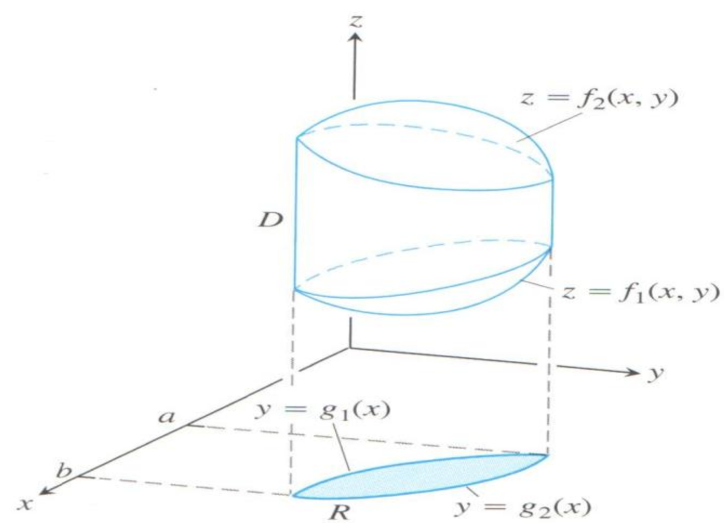
Para obtener una integral triple por iteraciones simples se utiliza una versión tridimensional del Teorema de Fubini:

Para evaluar

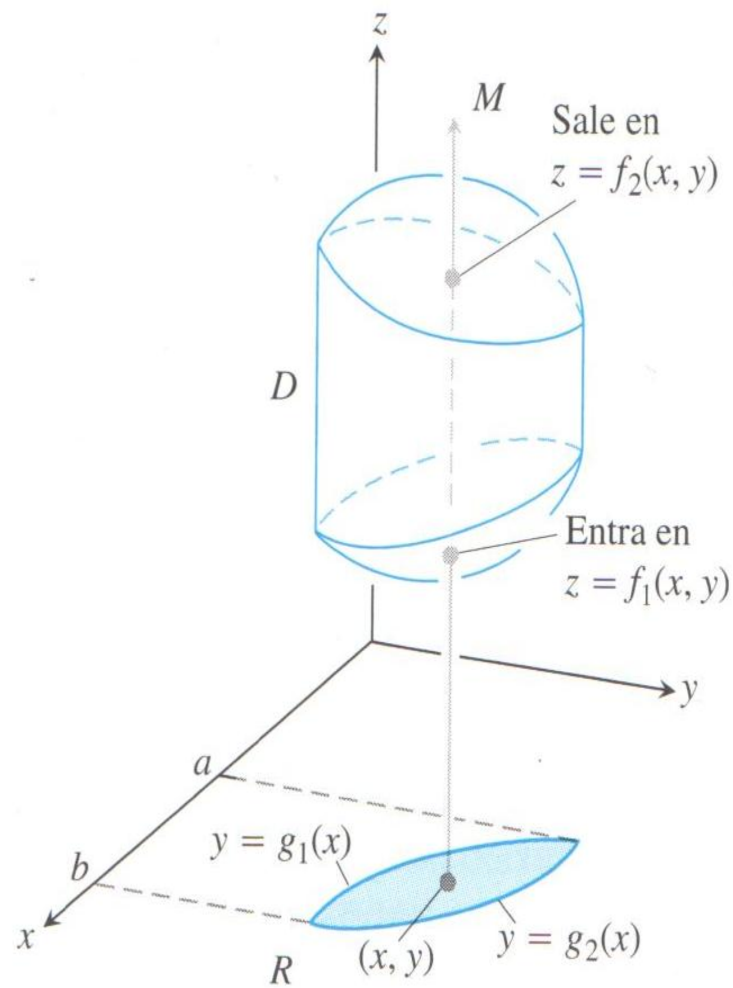
$$\iiint_D F(x, y, z)\, dV$$

sobre una región D, primero integramos con respecto a z, luego con respecto a y y por [illegible] mo con respecto a x.

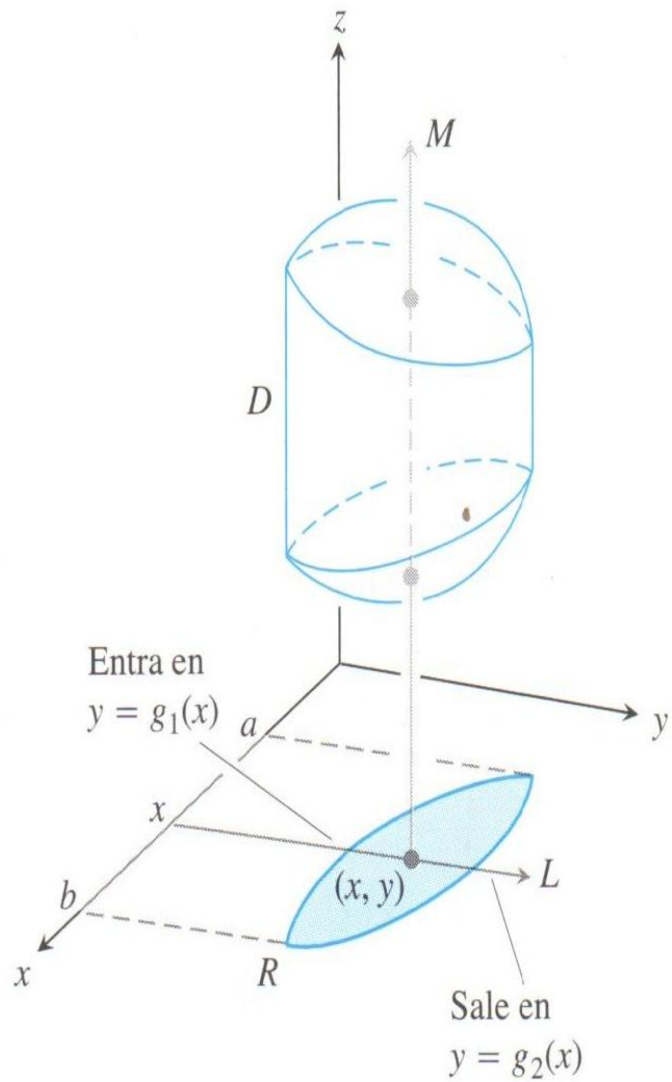
1. *Haga un bosquejo*: Trace la región D junto con su "sombra" R proyectada [illegible] mente sobre el plano xy. Marque las superficies de las fronteras superior e infer[illegible] la región D y las curvas de las fronteras superior e inferior de la región plana R.



2. *Determine los límites de integración en z*: Trace una recta M, paralela al eje z, que p[...] se por un punto típico (x, y) en R. Cuando z crece, M entra a D en $z = f_1(x, y)$ y sa[...] en $z = f_2(x, y)$. Éstos son los límites de integración en z.



3. *Determine los límites de integración en y*: Trace una recta L paralela al eje y, que pase por (x, y). Cuando y crece, L entra a R en $y = g_1(x)$ y sale en $y = g_2(x)$. Éstos son los límites de integración en y.



4. *Determine los límites de integración en x*: Elija los límites en x que incluyan todas las rectas paralelas al eje y que pasen por R ($x = a$ y $x = b$ en la figura anterior). Éstos son los límites de integración en x. La integral es

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

Siga procedimientos similares si cambia el orden de integración. La "sombra" de la región D está en el plano de las dos últimas variables con respecto a las que se realiza la integración iterada.

y ^ x

El procedimiento anterior es aplicable siempre que la región sólida D esté acotada por arriba y abajo por una superficie, y cuando la región "sombra" R esté acotada por una curva superior y una inferior. No es aplicable a regiones con agujeros complicados, aunque a veces tales regiones pueden subdividirse en regiones más simples para las que sí puede aplicarse el procedimiento.

Ejemplo: cálculo de un volumen

Calcular el volumen de la región D encerrada por las superficies $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$.

Solución El volumen es

$$V = \iiint_D dz\,dy\,dx,$$

la integral de $F(x, y, z) = 1$ sobre D. Para determinar los límites de integración y evaluar la integral, primero trazamos la región. Las superficies (figura 15.28) se cortan en el cilindro elíptico $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ o $x^2 + 2y^2 = 4$, $z > 0$. La frontera de la región R, la proyección de D sobre el plano xy, es una elipse con la misma ecuación: $x^2 + 2y^2 = 4$.

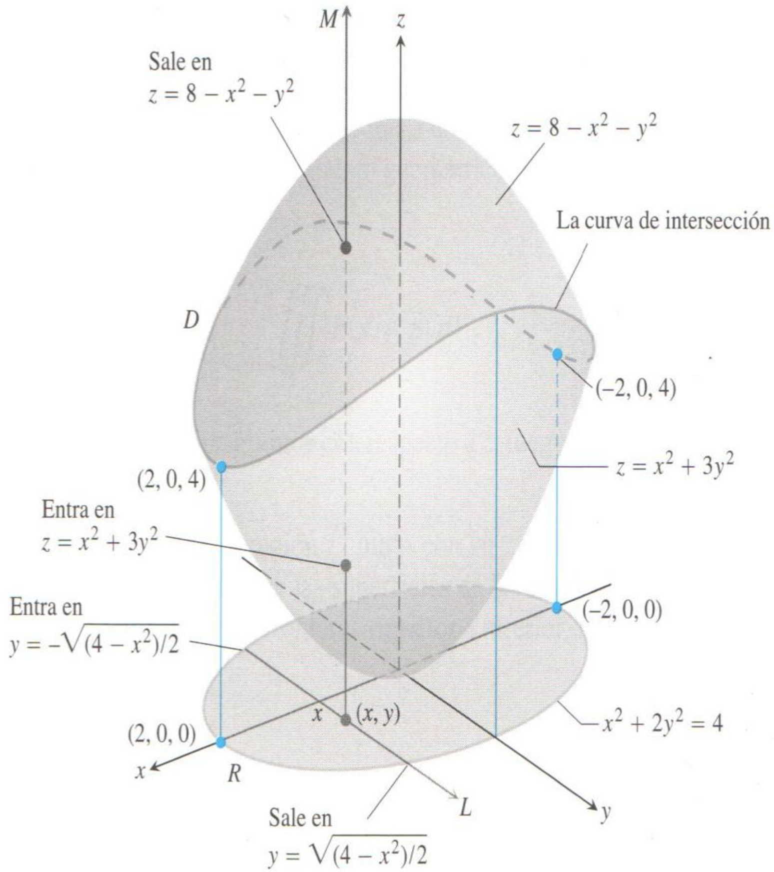


FIGURA 15.28 El volumen de la región encerrada por dos paraboloides, calculado en el ejemplo 1.

La frontera "superior" de R es la curva $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$. La frontera inferior es la curva $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$.

Ahora determinamos los límites de integración en z. La recta M, paralela al eje pasa por un punto típico (x, y) en R, entra a D en $z = x^2 + 3y^2$ y sale en $z = 8 - x^2$

Luego encontramos los límites de integración en y. La recta paralela al eje y qu por (x, y), entra a R en $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ y sale en $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$.

Por último, hallamos los límites de integración en x. Cuando L barre R, el val varía de $x = -2$ en $(-2, 0, 0)$ hasta $x = 2$ en $(2, 0, 0)$. El volumen de la región D e

$$V = \iiint\limits_D dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[(8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}} dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(2(8 - 2x^2)\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} \right) dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[8\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4 - x^2}{2}\right)^{3/2} \right] dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^{3/2}\, dx$$

$$= 8\pi\sqrt{2}.$$ Después de integrar con la sustitución $x = 2 \operatorname{sen} u$.

Propiedades de las integrales triples

Si $F = F(x, y, z)$ y $G = G(x, y, z)$ son continuas, entonces

1. *Múltiplo constante:* $\displaystyle\iiint_D kF\,dV = k\iiint_D F\,dV$ (k arbitrario)

2. *Suma y resta:* $\displaystyle\iiint_D (F \pm G)\,dV = \iiint_D F\,dV \pm \iiint_D G\,dV$

3. *Dominación:*

(a) $\displaystyle\iiint_D F\,dV \geq 0$ si $F \geq 0$ en D

(b) $\displaystyle\iiint_D F\,dV \geq \iiint_D G\,dV$ si $F \geq G$ en D

4. *Aditividad:* $\displaystyle\iiint_D F\,dV = \iiint_{D_1} E\,dV + \iiint_{D_2} F\,dV$

si D es la unión de dos regiones no traslapadas D_1 si D_2.