Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Práctica N° 7: TRANSFORMACIONES LINEALES

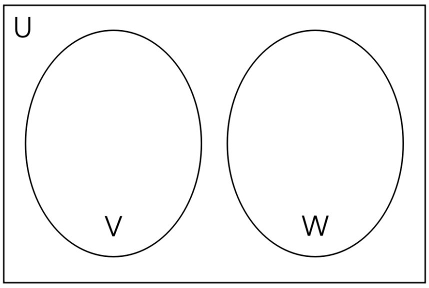
1) Si T es una transformación lineal con dominio en el espacio vectorial V y codominio en el espacio vectorial W:

a) Si u y v son vectores de V ¿es verdad que $u + v$ es también un elemento de V? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la imagen de u bajo T? ¿Cuál es la imagen de v bajo T? ¿Cuál es la imagen de $u+v$ bajo T?

c) ¿Es verdad que $T(u) + T(v)$ es también un elemento de W? ¿Por qué?

d) Representa los vectores u, v, $u + v$, $T(u)$, $T(v)$, $T(u + v)$ y $T(u) + T(v)$ en el diagrama de Venn:



Observación: La primera condición de linealidad consiste justamente en demostrar que para todo u y v de V se verifica que $T(u + v)$ *es igual* a $T(u) + T(v)$.

2) Determinar si la transformación dada es lineal o no:

a) $T : R^3 \to R^2 \,/\, T(x, y, z) = (x, y - z)$

b) $T : R^3 \to R^2 \,/\, T(x, y, z) = (1, z)$

c) $T : P_2 \to P_2 \,/\, T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1 + a_2x^2)$

d) $T : P_2 \to P_4 \,/\, T(p(x)) = [p(x)]^2$

e) $T : M_{nxn} \to M_{nxn} \,/\, T(A) = A \cdot B$, donde B es una matriz fija

f) $T : D_n \to D_n \,/\, T(D) = 2D^3$

g) $T : R_2 \to R \,/\, T(x, y) = x^2$

h) $T : P_2 \to M_{3x2} \,/\, T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 & 0 \\ 0 & -2a_0 \\ a_1 + 1 & 0 \end{bmatrix}$

3) Resolver los siguientes ítems:

a) Dado el conjunto $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right\}$:

i) Demostrar que B es una base de M_{2x2}.

ii) Calcular $T \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ sabiendo que:

$$T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} \qquad T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

b) Encontrar $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sabiendo que T es una transformación lineal de $T: R^2 \to R^3$ y:

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c) Sea $L: P_2 \to P_3$ una transformación lineal de la cual se sabe que $L(1) = 3$, $L(t) = t^2$ y $L(t^2) = t^3{+}3$. Hallar $L(p(t))$ y $L(-t^2+1)$.

4) Sea $C'[a,b]$ el conjunto de las funciones cuyas derivadas son continuas en el intervalo $[a,b]$. Demostrar que el operador D define una transformación lineal de $C'[a,b]$ a $C[a,b]$ tal que:

$$D(f(x)) = \tfrac{d}{dx}[f(x)]$$

5) Sea $T: P \to P$ definida por $T(p(x)) = \int_a^b p(x)\,dx$, donde $p(x)$ es una función polinomial. Demostrar que ésta es una transformación lineal de P en P, el espacio vectorial de las funciones polinómicas.

6) Aplicando las definiciones, encontrar el núcleo, imagen, rango y nulidad de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T: R^4 \to R^2 \,/\, T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ z-w \end{bmatrix}$

b) $T: P_2 \to R^3 \,/\, T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} 2a \\ a+b \\ a \end{pmatrix}$

c) $T: M_{2x2} \to M_{2x2} \,/\, T(A) = A \cdot B$, donde $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Además, obtener una base para el $Nu(T)$.

d) $T: R \to P_3 \,/\, T(a) = a + ax^3$. Además, obtener una base para la $Im(T)$ y su dimensión.

e) $T: P_2 \to R^2 \,/\, T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$

f) $T: R^3 \to P_2 \,/\, T(a,b,c) = 2a(x^2+1) - c(3x-1)$

g) $T: M_{2x2} \to P_2 \,/\, T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a+d)x^2 - b$

7) Proponer las siguientes transformaciones lineales:

a) Una de M_{3x3} en M_{2x2}. Encontrar el núcleo y decir por qué su dimensión no puede ser 0.

b) Tres de R^3 en R^3, que tengan nulidad 0, 1 y 2, respectivamente.

8) Considerar la transformación lineal $J: P_n \to U$:

a) Sea $J: P_n \to U$ la transformación lineal de la integral definida de 0 a 1 de un polinomio de grado n. ¿Qué espacio vectorial es U?

b) Sea $J: P_n \to U$ la transformación lineal de la integral indefinida de un polinomio de grado n. ¿Qué espacio vectorial es U?

9) Sea T la transformación lineal de P_2 en P_2 tal que si $p(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $T(p(x)) = x^2 \cdot p(0) + x \cdot p'(1)$. Encontrar el núcleo y la imagen de T y nombrar dos elementos de cada uno de dichos conjuntos.

Ejercitación adicional para seguir practicando:

10) Determinar si L es una transformación lineal o no:

a) $L : R^3 \to R^2 \,/\, L(x, y, z) = (x + 1, y - z)$

b) $L : P_2 \to P_1 \,/\, L(ax^2 + bx + c) = 2ax - b$

11) Encontrar el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal T:

$$T : M_{2x2} \to M_{2x2} \,/\, T\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

12) Sea $L : R^4 \to R^6$ una transformación lineal, si $\nu(L)$ es igual a 2 ¿cuánto vale $\rho(L)$?