Métodos de integración

Repaso

Repaso de conceptos

Definición de antiderivada. *Una función F es una* ***antiderivada*** *de f en un intervalo I si $F^{'}(x) = f(x)$ para toda x en I.*

Teorema: Representación de las antiderivadas. *Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y solo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para toda x en I, donde C es una constante.*

Ejemplo. a) Encuentre una antiderivada, F, de $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$. ¿Es única?

b) Encuentre la antiderivada, F, de la función dada en ***a)*** que cumpla la condición F(1)=1/2. ¿Existe solamente una solución?

Solución. a) Una antiderivada, F, de f viene dada por:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x}\right) dx = \boldsymbol{\frac{x^2}{2} + x + \ln x + C}$$

b) Si además, F(1)=1/2 entonces reemplazando en la F(x) obtenida en el ítem anterior se tiene que C=-1 por lo que $\boldsymbol{F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln x - 1.}$

Guía de Repaso: Integración básica

3. $\int \frac{(t^2-a)(t^2-b)}{\sqrt{t}}\,dt$

Solución. Mediante operaciones algebraicas, expresamos el integrando de una forma equivalente,

$$\frac{(t^2-a)(t^2-b)}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}}(t^4-(a+b)t^2+ab) = t^{\frac{7}{2}}-(a+b)t^{\frac{3}{2}}+abt^{-\frac{1}{2}}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{(t^2-a)(t^2-b)}{\sqrt{t}}\,dt \\ &= \int \left[t^{\frac{7}{2}}-(a+b)t^{\frac{3}{2}}+abt^{-\frac{1}{2}}\right]dt \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9}t^{9/2}-\frac{2}{5}(a+b)t^{\frac{5}{2}}+2abt^{1/2}+C}\end{aligned}$$

Guía de Repaso: Integración básica

11. $\int \sec x \tan x \; dx$

Solución. Como

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left((\cos x)^{-1}\right) = -(\cos x)^{-2}(-\sin x) = \sec x \tan x$$

Se tiene que $\sec x$ es una antiderivada de $\sec x \tan x$, por tanto

$$\int \sec x \tan x \; dx = \boldsymbol{\sec x + C}$$

Guía de Repaso: Integración por sustitución

Regla de sustitución. *Si $u = g(x)$ es una función diferenciable cuyo rango es un intervalo I, y f es continua sobre I, entonces*

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du$$

Observemos que, si $u = g(x)$ entonces $du = g'(x)dx$, de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du de (1) como diferenciales.

Guía de Repaso: Integración por sustitución

12. $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

Solución. Como $x^4 = (x^2)^2$ llamamos $u = x^2$ de modo que $du = 2x\, dx$ y la integral dada se transforma,

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2}\arctan(u) + C = \boldsymbol{\frac{1}{2}\arctan(x^2) + C}$$

Guía de Repaso: Integración por sustitución

19. $\int sen^5 x\, cos^2 x\, dx$

Solución.

$$\int sen^5 x\, cos^2 x\, dx = \int sen^4 x\, sen\, x\, cos^2 x\;\, dx$$

$$= \int (sen^2 x)^2 cos^2 x\, sen\, x\, dx = \int (1 - cos^2 x)^2 cos^2 x\, sen\, x\, dx$$

Llamamos $u = \cos x \Rightarrow du = -sen\, x\, dx$, por lo que la íltima integral se transforma:

$$-\int (1-u^2)^2 u^2\, du = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) du = -\frac{u^3}{3} + \frac{2}{5}u^5 - \frac{u^7}{7} + C$$

$$= -\frac{1}{3}cos^3 x + \frac{2}{5}cos^5 x - \frac{1}{7}cos^7 x + C$$

Guía de Repaso: Integración por partes

Fórmula de integración por partes.

$$\int u\ dv = uv - \int v\, du$$

Guía de Repaso: Integración por partes

10. $\int sen^2x\ dx$, Usar $sen^2x + cos^2x = 1$.

Solución. Sea

$$u = sen\ x \qquad dv = sen\ x\ dx$$

Entonces, $du = \cos x\ dx \qquad v = -\cos x$

Y por tanto,

$$\int sen^2x\ dx$$

$$= -sen\ x \cos x + \int cos^2x\ dx = -sen\ x\ \cos x$$

$$+ \int (1 - sen^2x)dx = -sen\ x \cos x + x - \int sen^2x\, dx$$

Esto se puede considerar como una ecuación que debe resolverse para la integral desconocida. Si se resuelve, resulta

$$2\int sen^2x\ dx = -sen\ x \cos x + x$$

Y al dividir entre 2 y sumar la constante de integración obtenemos

$$\int sen^2x\ dx = \boldsymbol{-\frac{1}{2} sen\ x \cos x + \frac{1}{2}x + C}$$

Guía de Repaso: Integración por partes

13. $\int \arctan x \; dx$. Usar que $arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Solución. Sea $u = \arctan x \;\; y \;\; dv = dx$. Entonces, $du = \frac{1}{1+x^2}dx \;\; y \;\; v = x$. Al integrar por partes obtenemos,

$$(2) \int \arctan x \; dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Para resolver $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ utilizamos el método de sustitución: si llamamos $z = 1 + x^2$ entonces $dz = 2x \; dx$ y la integral se transforma:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2} \ln|z| + C = \ln\sqrt{1+x^2} + C$$

Por consiguiente, sustituyendo en (2)

$$\int \arctan x \; dx = \boldsymbol{x \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C}$$