Ejercicio 2

Dada la siguiente ecuación que modela la transferencia de calor en una barra

$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + G(x);\ \forall x \in [2,4];\ \rho c_p = 1;\ k = 2;\ G(x) = 100 * (4 - x)$

$T = 10|_{x=2};\ -k\frac{\partial T}{\partial x} = 1|_{x=4};\ T(x,0) = 0\,°C$

a) Utilizando el método de Elementos Finitos (Galerkin con funciones de forma lineales) y considerando un esquema temporal explícito, armar el stencil para un nodo ubicado en x=3 tomando de referencia una malla uniforme con Δx=0.5. Utilizar un paso temporal que asegure la estabilidad del método.

b) Si T=[10; 39.848; 52.149; 54.173; 52.962] es T^n. Calcular la solución en T^{n+1} utilizando un esquema implícito con Δt=0.1.

c) ¿Cuál es el valor de temperatura en el punto x=3.2 según el resultado obtenido en el punto b? Desarrolle cómo se llega al resultado.

d) ¿Cuál es el valor y la dirección del flujo de calor en el punto x=3.2 según el resultado obtenido en el punto b? Desarrolle cómo se llega al resultado.

4 elementos 5 nodos

a) En el esquema temporal explícito se utiliza theta = 0, es decir, resuelvo la expresión en el futuro utilizando valores actuales (en n). Esto es:

$$\rho c_p\left(\frac{T^{n+1}-T^n}{\Delta t}\right) = k\frac{d^2T^n}{dx^2} + G^n(x)$$

En primer lugar, se deben obtener las matrices K, C y el vector F. Luego, el sistema queda representado como

$$\rho c_p\, \underline{\underline{C}}\left(\frac{\underline{T}^{n+1}-\underline{T}^n}{\Delta t}\right) = \underline{\underline{K}}\,\underline{T}^n + \underline{F}$$

Para resolver el ejercicio, debo dejar las funciones en n de un lado y las funciones en n+1 del otro, de esta forma:

$$\underline{\underline{C}}\,\underline{T}^{n+1} = \underline{\underline{C}}\,\underline{T}^n + \frac{\Delta t}{\rho c_p}\underline{\underline{K}}\,\underline{T}^n + \frac{\Delta t}{\rho c_p}\underline{F}$$

$$\boxed{\underline{T}^{n+1} = \underline{\underline{C}}^{-1}\left[\frac{\Delta t}{\rho c_p}\underline{\underline{K}}\,\underline{T}^n + \frac{\Delta t}{\rho c_p}\underline{F}\right] + \underline{\underline{C}}\,\underline{T}^n}$$

Ahora si, calculo las matrices K y C. Dado que ambas matrices dependen de h, y para cada elemento las h son iguales, las matrices van a ser las mismas para todos los elementos

$$K^e = \frac{k}{h^2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \frac{2}{0.5}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -4\\ -4 & 4\end{bmatrix} \qquad C^e = \frac{ch}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/6 & 1/12\\ 1/12 & 1/6\end{bmatrix}$$

e1 e2 e3 e4 — 2 2.5 3 3.5 4

Es [1 0] por Dir

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix}1 & -4 & 0 & 0 & 0\\ -4 & 8 & -4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 8 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 8 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4\end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix}1/6 & 1/12 & 0 & 0 & 0\\ 1/12 & 1/3 & 1/12 & 0 & 0\\ 0 & 1/12 & 1/3 & 1/12 & 0\\ 0 & 0 & 1/12 & 1/3 & 1/12\\ 0 & 0 & 0 & 1/12 & 1/6\end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}}^{-1} = \begin{bmatrix}8 & -4 & -4 & 8 & -4\\ -4 & 8 & 8 & -16 & 8\\ -4 & 8 & -4 & 8 & -4\\ 8 & -16 & 8 & 8 & -4\\ -4 & 8 & -4 & -4 & 8\end{bmatrix}$$

Para el nodo x3 — Para el nodo x3 — Para el nodo x3

Calculo el vector F $\quad F = F_g + F_q + F_n \quad$ Como quiero ver F para x3, solo tengo en cuenta Fg

$N_1^{e2} = \frac{3-x}{0.5} = 6 - \frac{x}{0.5} \quad N_2^{e2} = \frac{x-2.5}{0.5} = \frac{x}{0.5} - 5$

$N_1^{e3} = \frac{3.5-x}{0.5} = 7 - \frac{x}{0.5} \quad N_2^{e3} = \frac{x-3}{0.5} = \frac{x}{0.5} - 6$

Para simplificar los cálculos, y sabiendo que las fuerzas externas dependen de x, utilizaré un valor medio de la función para cada elemento

$G(2.5) = 150 \quad G(3) = 100 \quad G(3.5) = 50 \qquad G(e2) = \frac{150+100}{2} = 125 \quad G(e3) = \frac{100+50}{2} = 75$

$$F_g^{e2} = \int N_i(125)\begin{cases}\int_{2.5}^{3}\left(6-\frac{x}{0.5}\right)125\,dx = 750x - 125x^2\Big|_{2.5}^{3} = 1125 - 1093.75 = 31.25\\ \int_{2.5}^{3}\left(\frac{x}{0.5}-5\right)125\,dx = 125x^2 - 625x\Big|_{2.5}^{3} = -750 + 781.25 = 31.25\end{cases}$$

$$F_g^{e3} = \begin{cases}\int_3^{3.5}\left(7-\frac{x}{0.5}\right)75\,dx = 525x - 75x^2\Big|_3^{3.5} = 918.75 - 900 = 18.75\\ \int_3^{3.5}\left(\frac{x}{0.5}-6\right)75\,dx = 75x^2 - 450x\Big|_3^{3.5} = -656.25 + 675 = 18.75\end{cases}$$

$F_g^{e2} = \begin{bmatrix}31.25\\ 31.25\end{bmatrix} \quad F_g^{e3} = \begin{bmatrix}18.75\\ 18.75\end{bmatrix} \quad F_g^{3} = \boxed{31.25 + 18.75} = 50$

Recién me doy cuenta de que voy a tener que calcular todo el vector igual porque tengo que multiplicar por la matriz C-1 para obtener el stencil del nodo 3

Si el problema fuera estacionario, el stencil quedaría $\quad -4T_{n-1} + 8T_n - 4T_{n+1} = 50$

Para los extremos: $\quad F^{e1} \rightarrow$ Solo calculo en el punto 2, ya que tiene condición dirichlet en el punto 1 T=10 $\quad N_2^{e1} = \frac{x-2}{0.5} = \frac{x}{0.5} - 4$

$G(2) = 200 \quad G(2.5) = 150 \quad G(e^1) = 175$

$$F^{e1}\begin{cases}10\\ \int_2^{2.5}\left(\frac{x}{0.5}-4\right)175\,dx = 175x^2 - 700\Big|_2^{2.5} = -656.25 + 700 = 43.75\end{cases} \qquad F^{e1} = \begin{bmatrix}10\\ 43.75\end{bmatrix}$$

$F^{e4} \rightarrow$ Calculo las dos componentes, pero a la del nodo 2 se le suma la condición de borde $\quad N_1^{e4} = \frac{4-x}{0.5} = 8 - \frac{x}{0.5} \quad N_2^{e4} = \frac{x-3.5}{0.5} = \frac{x}{0.5} - 7$

$G(4) = 0 \quad G(3.5) = 50 \quad G(e^4) = 25$

$$F_{ik}^{e4}\begin{cases}\int_{3.5}^{4}\left(8-\frac{x}{0.5}\right)25\,dx = 200x - 25x^2\Big|_{3.5}^{4} = 400 - 393.75 = 6.25\\ \int_{3.5}^{4}\left(\frac{x}{0.5}-7\right)25\,dx = 25x^2 - 175x\Big|_{3.5}^{4} = -300 + 306.25 = 6.25 + 1\end{cases}$$

Borde: $N_2 \cdot q = 1 \cdot 1 = 1 \qquad F^{e4} = \begin{bmatrix}6.25\\ 7.25\end{bmatrix}$

El vector F final queda:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix}10\\ 43.75+31.25\\ 31.25+18.75\\ 18.75+6.25\\ 7.25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 75\\ 50\\ 25\\ 7.25\end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{K}}\cdot T^n = \begin{bmatrix}4T_1^n - 4T_2^n\\ -4T_1^n + 8T_2^n - 4T_3^n\\ -4T_2^n + 8T_3^n - 4T_4^n\\ -4T_3^n + 8T_4^n - 4T_5^n\\ -4T_4^n + 4T_5^n\end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{K}}\cdot T^n + F = \begin{bmatrix}4T_1^n - 4T_2^n + 10\\ -4T_1^n + 8T_2^n - 4T_3^n + 75\\ -4T_2^n + 8T_3^n - 4T_4^n + 50\\ -4T_3^n + 8T_4^n - 4T_5^n + 25\\ -4T_4^n + 4T_5^n + 7.25\end{bmatrix}$$

Ahora si, el stencil para el nodo 3 queda

$$\boxed{T_3^{n+1} = \Delta t\left[-4(4T_1^n - 4T_2^n + 10) + 8(-4T_1^n + 8T_2^n - 4T_3^n + 75) - 4(-4T_2^n + 8T_3^n - 4T_4^n + 50) + 8(-4T_3^n + 8T_4^n - 4T_5^n + 25) - 4(-4T_4^n + 4T_5^n + 7.25)\right] + \frac{1}{12}\left[T_2^n + T_3^n + T_4^n\right]}$$

b) Con un esquema implícito, los cálculos cambian, quedando la ecuación como: $\frac{\rho c_p}{\Delta t}\underline{\underline{C}}\left[T^{n+1} - T^n\right] = \underline{\underline{K}}\,T^{n+1} + \underline{F} \Rightarrow \frac{\rho c_p}{\Delta t}\underline{\underline{C}}\,T^{n+1} - \underline{\underline{K}}\,T^{n+1} = \underline{F} + \frac{\rho c_p}{\Delta t}\underline{\underline{C}}\,T^n$

$$\underbrace{\left[\frac{\rho c_p}{\Delta t}\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{K}}\right]}_{\underline{\underline{K}}^*}T^{n+1} = \underline{F} + \frac{\rho c_p}{\Delta t}\underline{\underline{C}}\,T^n \Rightarrow \boxed{T^{n+1} = \underline{\underline{K}}^{*-1}\left[\underline{F} + \frac{\rho c_p}{\Delta t}\underline{\underline{C}}\,T^n\right]}$$

Del inciso anterior tenemos:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix}10\\ 75\\ 50\\ 25\\ 7.25\end{bmatrix} \quad \underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix}4 & -4 & 0 & 0 & 0\\ -4 & 8 & -4 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 8 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 8 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4\end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix}1/6 & 1/12 & 0 & 0 & 0\\ 1/12 & 1/3 & 1/12 & 0 & 0\\ 0 & 1/12 & 1/3 & 1/12 & 0\\ 0 & 0 & 1/12 & 1/3 & 1/12\\ 0 & 0 & 0 & 1/12 & 1/6\end{bmatrix}$$

$\rho c_p = 1 \quad \Delta t = 0.1 \quad \frac{1}{0.1}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{3} \quad \frac{1}{0.1}\cdot\frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

$$\underline{\underline{K}}^* = \begin{bmatrix}\frac{5}{3}-4 & \frac{5}{6}+4 & 0 & 0 & 0\\ \frac{5}{6}+4 & \frac{5}{3}-8 & \frac{5}{6}+4 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{6}+4 & \frac{5}{3}-8 & \frac{5}{6}+4 & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{6}+4 & \frac{5}{3}-8 & \frac{5}{6}+4\\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6}+4 & \frac{5}{3}-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{7}{3} & \frac{29}{6} & 0 & 0 & 0\\ \frac{29}{6} & -\frac{19}{3} & \frac{29}{6} & 0 & 0\\ 0 & \frac{29}{6} & -\frac{19}{3} & \frac{29}{6} & 0\\ 0 & 0 & \frac{29}{6} & -\frac{19}{3} & \frac{29}{6}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{29}{6} & -\frac{7}{3}\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K}}^{*-1} = \begin{bmatrix}0.554560 & 0.474615 & 0.149180 & -0.253418 & -0.524937\\ 0.474615 & 0.229125 & 0.072018 & -0.122340 & -0.253418\\ 0.149180 & 0.072018 & -0.042395 & 0.072018 & 0.149180\\ -0.253418 & -0.122340 & 0.072018 & 0.229125 & 0.474615\\ -0.524937 & -0.253418 & 0.149180 & 0.474615 & 0.554560\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{0.1}\underline{\underline{C}}\,\underline{T}^n = \begin{bmatrix}49.873\\ 84.9975\\ 121.8083\\ 132.2283\\ 132.3975\end{bmatrix} \qquad \underline{F} + \frac{1}{0.1}\underline{\underline{C}}\,\underline{T}^n = \begin{bmatrix}59.873\\ 159.9975\\ 171.8083\\ 157.2283\\ 139.6475\end{bmatrix} \qquad \boxed{T^{n+1} = \begin{bmatrix}10\\ 22.825\\ 45.327\\ 79.930\\ 105.720\end{bmatrix}}$$

c) Para obtener un valor dentro de un elemento, debo utilizar las funciones de forma. En este caso, el punto se encuentra dentro del elemento 3, por lo que:

e1 e2 e3 e4 — 2 2.5 3 3.5 4

$$T^{n+1}(3.2) = N_1^3(3.2)\,T_3^{n} + N_2^3(3.2)\,T_4^{n} = \underbrace{\frac{3.5-3.2}{0.5}\cdot 45.327}_{27.1962} + \underbrace{\frac{3.2-3}{0.5}\cdot 79.93}_{31.972} = \boxed{59.1682}$$

$N_2^{e3} = \frac{x-3}{0.5} \quad N_1^{e3} = \frac{3.5-x}{0.5}$

d) El flujo se obtiene como $-k\frac{dT}{dx}\Big|_{3.2}$ $\quad$ Sabiendo que T se calcula como $T(x) = N_1^e T_1^e + N_2^e T_2^e$ $\quad \begin{bmatrix}10\\ 22.825\\ 45.327\\ 79.930\\ 105.720\end{bmatrix}$

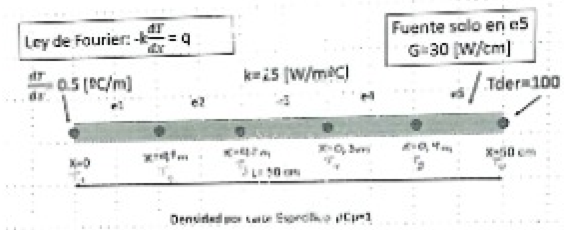
Y sabiendo también que sólo las funciones N dependen de x, entonces $\frac{dT}{dx} = \frac{dN_1}{dx}T_1 + \frac{dN_2}{dx}T_2$

$\frac{dN_1}{dx} = \frac{-1}{0.5} \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{0.5}$

Por lo tanto, el flujo es $\quad \boxed{q = -2\left(\frac{-45.327}{0.5} + \frac{79.930}{0.5}\right) = -138.412}$

Ejercicio 2

Dada la barra que se muestra en la siguiente figura



Trabajamos en metros (x=0 a x=0.5)

La fuente hay q' multiplicar por 10

Dividir la barra en 5 elementos de dos nodos (6 nodos en total) de 10 cm cada uno. En el elemento e5 hay una fuente G=30 W/cm constante (solo en ese elemento).

a) Calcular el valor de temperatura de cada nodo, considerando la ecuación del calor en estado estacionario y sin término reactivo.

b) Informar el valor de temperatura y el flujo de calor en el punto x=25 cm.

c) Ahora, considerando la ecuación con el término temporal, si en un determinado paso de tiempo se tiene: T_2=82.5, T_3=67.5 y T_4=74.5. Informe el valor de temperatura de T_3 en el siguiente paso de tiempo, utilizando un esquema implícito con Δt=0.05.

Si entra calor, la temp. debería aumentar. Si sale debería disminuir

La ecuación de calor en estado estacionario sin término reactivo de forma matricial para elementos finitos 1D se expresa como: $k\frac{d^2T}{dx^2} + Q = 0$

Por lo tanto, el sistema a resolver es: $\longrightarrow \underline{\underline{K}}\,\underline{T} = \underline{F}$

$\Delta x = 10\,cm = 0.1\,m \quad k = 25\ W/m°C \quad G = 300\ W/m$ en e5

Para calcular la temperatura en cada nodo, armo la matriz K y el vector F

$$e = \frac{k}{h^e}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}250 & -250\\ -250 & 250\end{bmatrix}$$

Como para todos los elementos k y h son iguales, entonces las matrices K son iguales.

$$K = \begin{bmatrix}250 & -250 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 500 & 500 & -250 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -250 & 500 & -250 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -250 & 500 & -250 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -250 & 500 & -250\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Dirichlet

El vector F si cambia entre elementos ya que tengo fuentes puntuales y la condición Neumann en el extremo izquierdo $\quad q = -k \cdot 0.5\,°C/m = -12.5$

$$F^{e1} = \begin{cases}\int_0^{0.1} N_1 \cdot q = \int_0^{0.1}\left(1 - \frac{x}{0.1}\right)\cdot -12.5\,dx = -12.5x - \frac{125}{2}x^2\Big|_0^{0.1} = -0.625\\ 0\end{cases} = \begin{bmatrix}-0.625\\ 0\end{bmatrix}$$

$F^{e2} = F^{e3} = F^{e4} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow$ Porque no hay fuente en estos elementos

$$F^{e5}\begin{cases}\int_{0.4}^{0.5} N_1 \cdot 3000\,dx = 1500x - 1500x^2\Big|_{0.4}^{0.5} = 375 - 360 = 15\\ 1\end{cases}$$

$\rightarrow$ Como Q es constante, hago $\frac{dx}{2}\cdot Q$ (sigue dando 150)

$N_1^{e5} = \frac{0.5-x}{0.1} = 5 - \frac{x}{0.1}$

$F^{e5} = \begin{bmatrix}15\\ 1\end{bmatrix}$ por Dirichlet

Main inciso a

```
##% Posicion de nodo inicial, final y cantidad de nodo
    en total (con las fronteras).
clear; clc;
x0 = 0; x1 = 0.5; n = 6;

% Nodo equiespaciado
xnode = linspace(x0, x1, n);

% Parametros
k = 25; c = 0;
G = 0;
sp = false;
cb_izq = [2, -12.5, -1];
cb_der = [1, 100, -1];
fElem = [5, 3000];

[T] = FuncLinealesModificada(xnode,sp,k,G,cb_izq
    ,cb_der,fElem);
disp('La dolución T es:');
disp(T);
```

$$F = \begin{bmatrix}-12.5\\ 0\\ 0\\ 0\\ 150\\ 100\end{bmatrix}$$

Ahora resuelvo el sistema

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{T} = \underline{F} \Rightarrow T = \begin{bmatrix}100.35\\ 100.4\\ 100.45\\ 100.5\\ 100.55\\ 100\end{bmatrix}$$

Haciendo los calculos me da (para verificar):

b) T(0.25) = 100,475

q(0.25) = -12,5

c) Si tenemos solo T2, T3 y T4, cómo asumis los otros valores de T? Como 0? Planteas toda la matriz completa como en el ejercicio que resolviste a la izquierda o analizas solo esa parte reducida que abarca T2, T3 y T4?

Para mi que cometieron de nuevo el error de olvidarse que el stencil en esquemas temporales incluye toda la matriz K, a diferencia del stencil del esquema estacionario

Número de Fourier (Fo)

Condición de estabilidad: $Fo = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.5 \rightarrow \Delta t \leq \frac{0.5\Delta x^2}{\alpha}$