Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Práctica N° 8: MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

1) Para cada transformación lineal T encontrar:

i) Su representación matricial A_T con respecto a las bases canónicas de los espacios involucrados.

ii) $Nu(T)$ e $Im(T)$, base del núcleo y base de la imagen de T, nulidad y rango de T, usando A_T.

iii) La imagen del elemento indicado usando A_T, si se lo solicita.

a) $T : R^2 \to R^3 \,/\, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x+y \\ y \end{pmatrix}$

b) $T : R^3 \to P_2 \,/\, T(a,b,c) = a + bx + cx^2$. Hallar $T(1,0,3)$.

c) $T : P_2 \to P_3 \,/\, T(a + bx + cx^2) = b - bx + ax^3$. Hallar $T(2 + x^2)$.

d) $T : R^2 \to R^2 \,/\, T(v) = proy_H\, v$, donde $H = gen\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$. Hallar $T(2,1)$.

e) $T : P_4 \to P_2 \,/\, T(p(x)) = p''(x)$

f) $T : M_{2x2} \to M_{2x2} \,/\, T(A) = A \cdot B$, donde $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Hallar $T\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2) Hallar la matriz asociada a cada transformación lineal de V en W, respecto de las bases dadas B_1 de V y B_2 de W.

a) $T : R^2 \to R^2 \,/\, T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 2x+y \end{pmatrix}$ $\qquad B_1 = B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

b) $T : P_2 \to P_3 \,/\, T(p(x)) = x \cdot p(x)$ $\qquad B_1 = \{1, x, x^2\}$ $\qquad B_2 = \{1, 1+x, x^2, 1-x^3\}$

3) Para la transformación lineal indicada y para el vector v dado, encontrar $T(v)$ y las coordenadas de $T(v)$ respecto de la base B_2 , usando la matriz de transformación respecto de las bases B_1 y B_2.

a) Para la transformación del 2*a*) y $v = (20, 24)$.

b) Para la transformación del 2*b*) y $v = 7 + 2x - 3x^2$.

4) Sea $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} / \, a, b, d \in R\right\}$ y $T : P_2 \to W$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a+c & 3b \\ 3b & 2a+2c \end{bmatrix}$.

a) Encontrar la matriz asociada a T respecto de las bases: $B_1 = \{1, x, x^2\}$ y $B_2 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

b) Determinar las coordenadas de $T(p(x))$ en la base B_2, siendo $p(x) = 3x^2 - 2x + 4$ usando la matriz de transición obtenida en *a*).

5) Sea $T : R^2 \to R^2 \,/\, T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$:

a) Hallar la representación matricial de T con respecto a la base canónica de R^2.

b) Hallar la representación matricial de T con respecto a las bases $B_1 = B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

c) Hallar la representación matricial de T con respecto a las bases B_1 y B_2:

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \qquad B_2 = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Observación: Este ejercicio muestra que una misma transformación lineal tiene asociadas distintas representaciones matriciales según sean las bases fijadas en los espacios inicial y final de la aplicación.

6) Sea T de R^2 en R^3 la transformación lineal cuya matriz asociada con respecto a las bases canónicas es A_T. Indicar si alguno(s) de los vectores v_1, v_2 y v_3 pertenece a la imagen de T:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7) Sea $T : R^2 \to R^2$ la transformación lineal cuya matriz asociada con respecto a la base canónica de cada espacio es A_T:

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Para cada $(x, y, z) \in R^3$, calcular $T(x, y, z)$.

b) Hallar el núcleo de T, una base y su dimensión usando A_T.

c) Hallar la imagen de T, una base y su dimensión usando A_T.

8) Demostrar que si $T : V \to W$ es una transformación lineal con $dim\, V = dim\, W$, entonces:

a) Si $Nu(T) = 0_V$, entonces $Im(T) = W$.

b) Si $\nu(T) = dim\, V$, entonces $Im(T) = 0_W$.

Ejercitación adicional para seguir practicando:

9) Sea $L : P_1 \to P_2$ definida por $L(p(t)) = t \cdot p(t) + p(0)$ y sean $S = \{t, 1\}$ y $S' = \{t+1, t-1\}$ bases de P_1 y $T = \{t^2, t, 1\}$ y $T' = \{t^2+1, t-1, t+1\}$ bases de P_2.

a) Determinar A_L con respecto a las bases S y T con respecto a las bases S' y T'

b) Determinar $L(-3t + 3)$ utilizando las matrices obtenidas en *a*) y la definición de L.