UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°2

COMBINACION LINEAL Y ESPACIO GENERADO

1. Sean v_1 y v_2 dos vectores del espacio R^3. ¿Puede ser que gen$\{v_1\}$= gen$\{v_1, v_2\}$? Justifique su respuesta.

2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \\ x - 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Describa geométricamente el espacio representado por el conjunto solución y halle un conjunto generador del mismo.

3. Determine los valores de 'a' para que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3a \\ a \end{pmatrix}$ pertenezca al espacio generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4. Sea U el espacio generado por las funciones $f(x) = x+1$ y $g(x) = 2x^2 - 2x + 3$. Determine si $h(x) = 6x^2 - 10x + 5$ pertenece o no a U.

RESOLUCION

1) Es posible que si v_1 y v_2 son dos vectores de R^3, gen $\{v_1\}$= gen $\{v_1, v_2\}$ pues si v_1 y v_2 son múltiplos generan la misma recta en el espacio.

Ejemplo: Sean v_1= (1,0,-2) y v_2=3v_1= (3,0,-6) entonces gen $\{v_1\}$= $\{ av_1$ con a $\in$ R$\}$ *(1)*

gen $\{v_1, v_2\}$ = $\{ bv_1+ cv_2$ con b,c $\in$ R$\}$= $\{bv_1+ c\, 3v_1$ con b,c $\in$ R$\}$= $\{ (b+ 3c)v_1$ con b, c $\in$ R$\}$= $\{ (b+ 3c)v_1$ con b,c $\in$ R$\}$= $\{ dv_1$ con d $\in$ R$\}$ *(2)*

Llamando d= b+ 3c

De (1) y (2): gen $\{v_1\}$= gen $\{v_1, v_2\}$

2) Escribiendo el sistema de ecuaciones en forma matricial

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

--------------------------- $R_2 \to R_2$-2 R_1

$R_3 \to R_3$- R_1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

---------------------- $R_2 \to$ 1/3 R_2

$R_3 \to R_3$ + 2 R_2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De la segunda fila resulta que: y – z = 0 $\Rightarrow$ y = z

De la primera fila: x – y +z =0 $\Rightarrow$ x = y – z= 0

Por lo tanto el conjunto solución es

S= $\{$(0, y, y) con y $\in$ R$\}$ = $\{$ y (0, 1, 1) con y $\in$ R$\}$= gen $\{$(0, 1, 1) $\}$

El sistema está formado por tres planos que pasan por el origen. El conjunto solución del sistema, intersección de los tres planos, es una recta de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathrm{R}$$

Al ser una recta del espacio que pasa por el origen, es un subespacio de R^3 generado por el vector dirección de la recta v=(0,1,1).

3) Observación: A fin de evitar confusiones consideremos que este ejercicio dice 'Determine los valores de 'α' para que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ pertenezca al espacio generado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$'.

<u>Resolución:</u>

Sea $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vector genérico de R^3. Veamos si el conjunto de vectores dado genera R^3 o un subespacio propio de R^3.

Consideremos:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Distribuyendo los escalares, sumando e igualando las componentes de los vectores de ambos miembros, resulta el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1 + 5a_2 + 2a_3 &= a \\ 2a_1 + 14a_2 - 2a_3 &= b \\ a_1 + 3a_2 + 5a_3 &= c \end{aligned}$$

Reescribiéndolo en forma matricial:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & a \\ 2 & 14 & -2 & b \\ 1 & 3 & 5 & c \end{array}\right.$$

-------------------- $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$

$R_3 \rightarrow R_3 - R_1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & a \\ 0 & 4 & -6 & b-2a \\ 0 & -2 & 3 & c-a \end{array}$$

-------------------- $R_3 \to R_3 + ½ R_2$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & a \\ 0 & 4 & -6 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & -2a+1/2b+c \end{array}$$

Entonces el sistema tiene solución si $-2a+\frac{1}{2}b+c=0$

Recordando que *las* incógnitas del sistema (*a* , *b* y *c*) son las coordenadas de un vector genérico de R^3, se concluye que el conjunto dado $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\14\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}\right\}$ genera vectores $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ de R^3 tales que sus coordenadas satisfacen la igualdad $-2a+\frac{1}{2}b+c=0$, es decir, genera vectores del plano de ecuación $-2a+\frac{1}{2}b+c=0$.

Entonces para que el vector $\begin{pmatrix}1\\3\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$ pertenezca al plano generado por el conjunto dado debe satisfacerse que:

$$-2.1+\frac{1}{2}.3\alpha+\alpha=0$$

$$\frac{5}{2}\alpha=2 \Rightarrow \alpha=\frac{4}{5}$$

4) Se debe determinar si existen escalares tales que la combinación lineal de f(x) y g(x) sea igual a h(x). Denotemos dichos escalares por a y b.

a f(x)+ b g(x)= h(x)

a (x+1) + b ($2x^2$-2x+3) = $6x^2$-10+5

$$ax+a+2bx^2-2bx+3b = 6x^2-10+5$$

$$2bx^2+ (a-2b)x + (a+3b) = 6x^2-10+5$$

Igualando los coeficientes de los polinomios del primer y segundo miembro resulta un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$6 = 2b$$

$$-10= a- 2b$$

$$5= a + 3b$$

Resolviéndolo se obtiene $a= -4$, $b=3$. Por lo tanto $h(x) \in \text{gen}\{f(x), g(x)\}$