CÁLCULO II

EL MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ing. SILVIA G. SELUY

Lagrange

Biografía

Joseph Louis Lagrange, bautizado como Giuseppe Lodovico Lagrangia, también llamado Giuseppe Luigi Lagrangia o Lagrange (25 de enero de 1736 en Turín - 10 de abril de 1813 en París) fue un matemático, físico y astrónomo italiano que después vivió en Rusia y Francia. Lagrange trabajó para Federico II de Prusia, en Berlín, durante veinte años. Lagrange demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en astronomía.

Lagrange

Definición

En los problemas de optimización, los multiplicadores de Lagrange, nombrados así en honor a Joseph Louis Lagrange, son un método para trabajar con funciones de varias variables que nos interesa maximizar o minimizar, y está sujeta a ciertas restricciones. Este método reduce el problema restringido en n variables en uno sin restricciones de n + 1 variables cuyas ecuaciones pueden ser resueltas.

Lagrange

Campo de aplicación

Economía:

La optimización reprimida desempeña un papel central en la economía. Por ejemplo, el problema selecto para un consumidor se representa como uno de maximizar una función de utilidad sujeta a una coacción de presupuesto . El multiplicador Lagrange tiene una interpretación económica como el precio de la oposición asociado con la coacción, en este ejemplo la utilidad marginal de ingresos . Otros ejemplos incluyen la maximización de la ganancia para una firma, junto con varias aplicaciones macro-económicas.

Lagrange

Campo de aplicación

Teoría de control :

En la teoría de control óptimo , los multiplicadores de Lagrange se interpretan como constates variables, y los multiplicadores de Lagrange se formulan de nuevo como la minimización del hamiltoniano , en el principio mínimo de Pontryagin.

Lagrange

Objetivos:

Visualizar algunas superficies cuádricas y curvas de nivel para distintos valores de la variable z.

- Identificar, a través de los simuladores, los puntos (x,y) sobre la curva correspondiente a la función restricción donde la función principal tiene extremos.
- Interpretar gráficamente los resultados obtenidos empleando el método de multiplicadores de Lagrange.

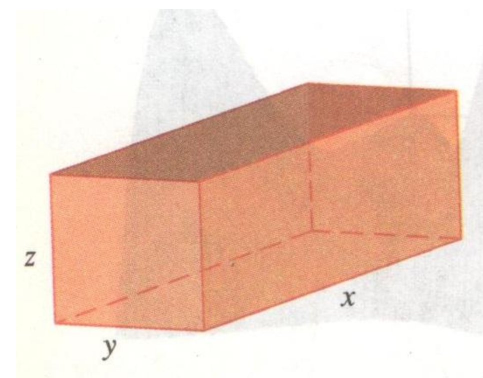
PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Una caja rectangular sin tapa se va a fabricar con 12 m^2 de cartulina.

Encontrar el volumen máximo de dicha caja.

SOLUCIÓN

El volumen de la caja dada, se expresa como $V = x.y.z$



Se puede obtener el área total de la caja, representada por el área de los cuatro lados y del fondo (porque no tiene tapa): $2xz + 2yz + xy = 12$

Al resolver la ecuación para z, tenemos:

Para 2xz + 2yz + xy =12, $z = \frac{(12 - xy)}{2(x + y)}$

Por lo tanto la expresión de volumen, quedaría:

$$V = xy\frac{(12 - xy)}{2(x + y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Al calcular las derivadas parciales e igualando a cero, se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 12 - 2xy - x^2 = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 12 - 2xy - y^2 = 0$$

Por lo tanto x = y (en este caso positivas).

Resolviendo las ecuaciones, x= y=2; z=1

El volumen V = 4 m^3, es máximo

En el ejemplo anterior se ha maximizado la función volumen, sujeta a la restricción $2xz+2yz+xy=12$ que expresa que el área debe ser de 12 m^2

Ahora se utilizará el Método de Lagrange para maximizar/minimizar una función general $f(x,y,z)$ sujeta a una restricción o condición adicional de la forma $g(x,y,z) = k$.

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Para encontrar los valores máximos y mínimos de *f (x,y,z) limitada por g(x,y,z)* = *k* (suponiendo que esos valores extremos existan, $\vec{\nabla} g \neq \vec{0}$ en la superficie *g(x,y,z)* = *k)*.

a) Se determinan todos los valores de x, y, z, λ

tales que: $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y,z)$

$$g(x,y,z) = k$$

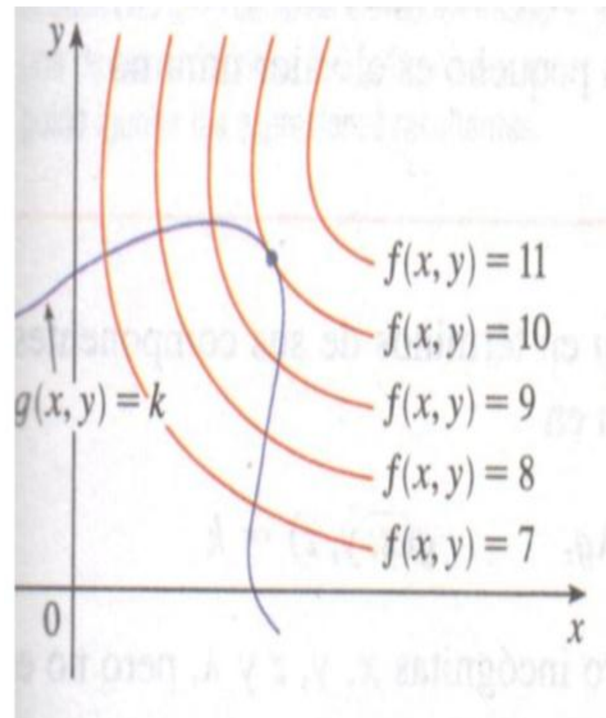
b) Se evalúa x en todos los (x,y,z) que son resultado del paso a). El mayor es el <u>valor máximo de f</u> y el menor es el <u>valor mínimo de f.</u>

Bases geométricas del Método

Funciones de dos variables:

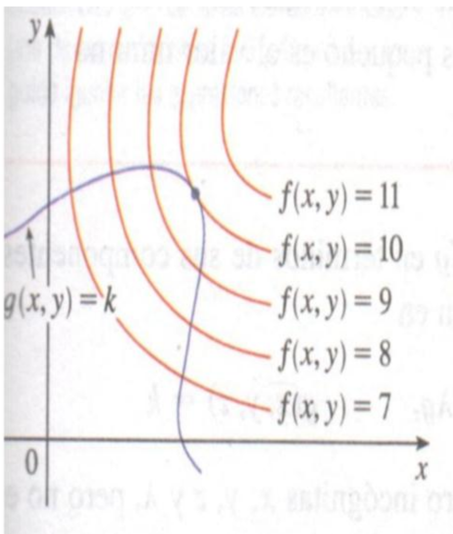
Se desea encontrar los valores extremos de $z = f(x,y)$, *sujetos a una restricción de la forma* $g(x,y) = k$.

Es decir, se buscan los valores extremos de f(x,y)cuando el Punto (x,y) está está limitado a pertenecer a la curva de nivel g(x,y) = k, son las curvas de ecuaciones $F(x,y) = c = 7,8\ldots$



Maximizar $f(x,y)$ sujeta a $g(x,y) = k$, *sirve para determinar el valor más grande de c tal que la curva de nivel $f(x,y)= c$, corte de $g(x,y) = k$.*

Esto sucede cuando las curvas se tocan, cuando tienen una recta tg común. En este caso, las rectas normales en (xo,yo) donde se tocan, son idénticas.



Como consecuencia, para algún λ *(escalar) los vectores gradientes son paralelos y se cumple:*

$$\boxed{\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0)}$$

En tres variables, se aplica el mismo argumento.

- El problema consiste en encontrar los valores extremos de *f(x,y,z) limitados por g(x,y,z)* = *k.*
- *Por consiguiente el punto (x,y,z) está restringido a ser parte de la superficie de nivel S cuya ecuación es g(x,y,z)* = *k.*
- *Las superficies de nivel son las f(x,y,z)* = *c y si el valor máximo es f(xo,yo,zo)* = *c, la superficie de nivel f(x,y,z)* = *c es tg a la superficie de nivel g(x,y,z)* = *k por lo que sus vectores gradientes son paralelos.*

Ejemplo de aplicación:

Retomamos el ejemplo: Una caja rectangular sin tapa se va a fabricar con 12 m^2 de cartulina. Encontrar el volumen máximo de dicha caja.

SOLUCIÓN:

- La función objetivo: $V = xyz$

- Sujeta a la restricción:

$$g(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy = 12$$

Por el Método de Lagrange, se buscan los valores x, y, z, λ, tales que $\bar{\nabla} V = \lambda \bar{\nabla} g$ y $g(x,y,z) = 12$

Las ecuaciones resultantes son:

$V_x = \lambda g_x$ $V_y = \lambda g_y$ $V_z = \lambda g_z$; $2xz + 2yz + xy = 12$

$yz = \lambda(2z+y)$

$xz = \lambda(2z+x)$

$xy = \lambda(2x+2y)$

$2xz+2yz+xy=12$

De aquí multiplicamos a la primera por x, la segunda por y , la tercera por z:

$$xyz = \lambda(2xz + xy)$$

$$xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$$xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

Observamos que $\lambda \neq 0$ porque $\lambda = 0$ significaría que $yz = xz = xy = 0$, debido a que (2), (3) y (4), lo cual contradice (5). Como consecuencia, de (6) y (7) tenemos

$$2xz + xy = 2yz + xy$$

lo cual da $xz = yz$. Pero $z \neq 0$ (puesto que $z = 0$ daría $V = 0$), así que $x = y$.

$$2yz + xy = 2xz + 2yz$$

lo cual da $2xz = xy$, así que $y = 2z$ (en vista de que $x \neq 0$). Si ahora hacemos que $x = y = 2z$ en (5), obtenemos

$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$

Puesto que x, y y z son positivos, tenemos por tanto $z = 1$, $x = 2$ y $y = 2$, como antes.

EJEMPLO 2 Halle los valores extremo de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Se nos ha pedido calcular los valores extremo de f sujeta a las restricciones $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Con los multiplicadores de Lagrange resolvemos las ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g(x, y) = 1$, que pueden escribirse como

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

o bien como

o bien como

9 $$2x = 2x\lambda$$

10 $$4y = 2y\lambda$$

11 $$x^2 + y^2 = 1$$

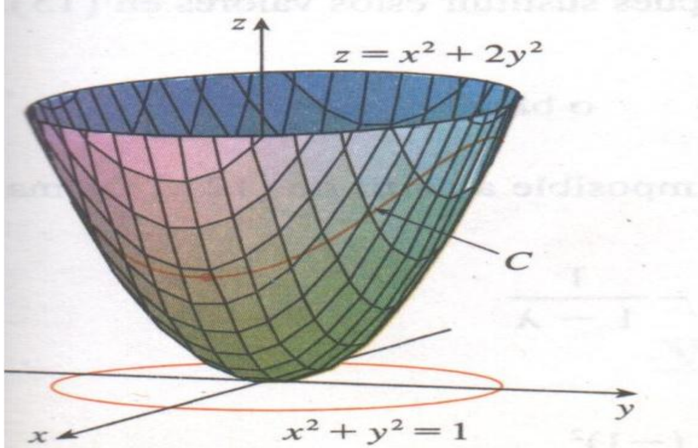
A partir de (9) tenemos que $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces (11) da $y = \pm 1$
$\lambda = 1$, entonces $y = 0$ de (10), de modo que (11) da $x = \pm 1$. Como consecuen
f tal vez tiene valores extremo en los puntos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

evaluar f en esos cuatro puntos, encontramos que

$$f(0,1) = 2 \qquad f(0,-1) = 2 \qquad f(1,0) = 1 \qquad f(-1,0) = 1$$

Por consiguiente, el valor máximo de f en el círculo $x^2 + y^2 = 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(\pm 1, 0) = 1$. Al comprobar esto en la figura 2, los valores parecen razonables.

■ En términos geométricos, en el ejemplo 2 e piden los puntos más alto y más bajo en la urva C de la figura 2 que se encuentra en el araboloide $z = x^2 + 2y^2$ y directamente rriba del círculo de restricción $x^2 + y^2 = 1$.



■ ■ La geometría que apoya en la utilización de los multiplicadores de Lagrange del ejemplo 2 se presenta en la figura 3. Los valores extremo de $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ corresponden a las curvas de nivel que tocan el círculo $x^2 + y^2 = 1$.