Clase teórica de la semana del 9-5

Mario Garelik

Misceláneas previas.

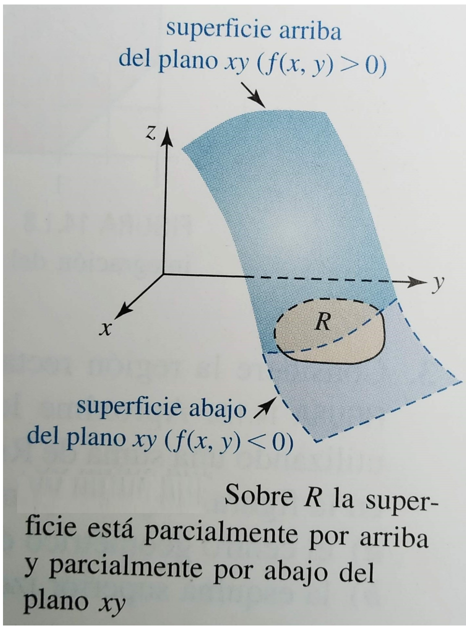
- De la caja temática *Material de estudio básico* en el aula virtual, recuperar el pdf de *Volúmenes por secciones transversales.*

Sección 15.1 - Integrales dobles e iteradas sobre rectángulos.

- **Ejercitación propuesta (pág. 836):** 1 – 28.
- Breve intro: rapidísimo repaso del concepto de suma de Riemann. Extenderemos las ideas a $\mathbb{R}^2$
- Repetir todo el proceso de particionado que hacíamos antes a lo que ahora llamaremos *cuadrículas.* Ahora $\Delta A_k = \Delta x_k \cdot \Delta y_k$ representa el área del *k-ésimo* rectángulo.
- Construcción de la n-ésima suma de Riemann. Definición de $||P||$. Relación entre $||P|| \to 0$ y n (número de rectangulitos de la cuadrícula) $\to \infty$.
- **Definición de función integrable.**
- La notación $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA$ y el significado de dA.
- La **continuidad como condición suficiente para la integrabilidad** de una f sobre un rectángulo R. Hay funciones discontinuas (de salto finito) en sólo un número finito de puntos o curvas suaves que también son integrables (no está en los alcances de este curso de Cálculo 2).
- **Integrales dobles como volumen.** La no negatividad de la función sobre el rectángulo como condición esencial para interpretar como volumen.
- El **método de rebanadas** o secciones transversales para el cálculo de volumen. Leer el pdf disponible en la página sin profundizar demasiado... sólo comprender de qué se trata el método
- *Problema: ¿en qué orden integrar?* Trabajar el ejemplo del volumen del sólido limitado arriba por el plano y abajo por el rectángulo utilizando el método de las secciones transversales.
- **Integral iterada o repetida.** En la notacion de la integral iterada, explicar cuál se integra primero y cuál después
- **El Teorema de Fubini:** muestra que la integral doble se calcula por integrales iteradas, y que no importa el orden en que se lo haga. Aplicarlo para ver el ejemplo 1 en clase.

Sección 15.2 - Integrales dobles sobre regiones generales.

- **Ejercitación propuesta (pág. 841):** 1-72.
- Idea: integrar sobre regiones un poco más generales que los rectángulos, en el sentido que ahora las fronteras de las regiones sobre las que se integra, dejan de ser segmentos de recta paralelos a los ejes coordenados.
- Extensión sin problemas del proceso de construcción del concepto de integral definida:
- Leer párrafo inicial en pág. 842, que refiere a las porciones que *se omiten* al realizar la cuadrícula en regiones con frontera curva (sólo existen problemas si la frontera es un fractal, por ejemplo, una Von Kosch).
  - Norma y partición.
  - Suficiencia de la continuidad para la integrabilidad. Tomar en consideración los requisitos que debe también cumplir la frontera de la región sobre la cual se integra (ver inicio pág. 842).
- **Condición bajo la que una integral doble es interpretable como volumen.** Enfatizar en que se pide no negatividad del integrando (y no del resultado de la integral). La figura de la derecha muestra una función $f(x, y)$ para la cual la integral doble sobre la región R no representa un volumen.



- **Los dos tipos de regiones:** tipo I y II.
- El cálculo de volumen sobre los dos tipos de regiones.
- La **forma más fuerte del Teorema de Fubini**. Lo de *más fuerte* remite a que ahora la región sobre la cual se integra ya no es un rectángulo
  - Ejemplo.
  - La elección de uno de los dos órdenes como conveniente respecto del otro. Ejemplo 2 (p. 844).
- **Propiedades de las integrales dobles.**
- Al inicio de pág. 847 dice que lo que subyace detrás de las propiedades de la integral doble es que la misma se comporta como una suma. Entonces ensaya la demo de la propiedad del múltiplo constante. Con estos lineamientos y usando propiedades de los límites vistas en Cálculo 1, *pueden demostrarse las demás propiedades!*

  - Llamativamente, para las propiedades de las integrales dobles sólo pide continuidad en la frontera de la región R. Debe pedir en todo R, y en la frontera de R en el caso que la R sea cerrada.
  - En el libro da, en página 847, la demo de la propiedad 1 de integrales.
  - En el video de teoría, vimos la demo de la suma... queda para ustedes el resto, **excepto la propiedad de aditividad, que no vemos la demo, sólo su uso** (ejemplo 4).
  - La propiedad de aditividad permite subdividir una región de integración general R en dos subregiones de R_1 y R_2, tales que $R = R_1 \cup R_2$ y en las que cada subregión tiene alguna de las fronteras constantes.

- Corregir error en ejemplo 4 (pág. 847): donde dice *"... y arriba de la región R acotada por la curva y=2"* debe decir: **acotada por la curva y=2$\sqrt{x}$**.

Sección 15.3 - Áreas por doble integración.

- **Ejercitación propuesta: (pág. 850):** 1 - 22.
- Deducción de la **definición de área** A de una región acotada en el plano como el caso particular $f(x, y) = 1$. Ejemplo 2.
- Definición de **valor promedio** de una función sobre una región. Analogías con Cálculo I. Ejemplo.
- **Teorema del valor medio para integrales dobles** (no está en Thomas). Si $f(x, y)$ es una función continua en una región cerrada, acotada y **conexa** R, entonces existe en R al menos un punto (x^*, y^*) tal que

$$f(x^*, y^*) \cdot \text{área}\, R = \iint_R f(x, y)\, dA$$

  - Una región es **conexa** cuando dos puntos cualesquiera de ella se pueden unir por una curva suave contenida totalmente en la región.
  - Interpretación geométrica: Si $f(x, y) \geq 0$ en R entonces la igualdad anterior nos dice que existe en R al menos un punto tal que el volumen del sólido limitado superiormente por el número $f(x^*, y^*)$ e inferiormente por R es igual al volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x, y)$ e inferiormente por R.