ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°11

SEMEJANZA Y DIAGONALIZACIÓN

1. Sea T: $R^2 \to R^2$ / $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$

i) Calcular la representación matricial T respecto de B_1, la base canónica de R^2. Denotarla por A_T.

ii) Calcular la representación matricial T respecto de la base $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$. Denotarla por B_T.

iii) Verificar que los valores propios de A_T y de B_T son los mismos.

2. Determinar si cada afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, demostrar. Si es falsa exhibir un contraejemplo:

i) La matriz $E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es semejante a la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) La matriz $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

iii) Si A es una matriz diagonalizable, A^t también lo es.

iv) Los vectores propios de la matriz $M = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -28 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$ no forman una base de R^3.

3. Demostrar que si Ay B son matrices de nxn, semejantes, entonces A es invertible si y sólo si B es invertible.

4. Dada una matriz A de 4x4 singular y simétrica, indicar si es posible conocer las multiplicidades geométrica de todos sus valores propios sabiendo que dos de ellos son 8 y -5, con multiplicidades algebraicas 2 y 1 respectivamente. En caso de serlo, indique cuáles son. Si no es posible, explique porqué.

5. ¿Es cierto que si A es una matriz de nxn semejante a una matriz B y det(A)=-1 entonces det(B^4)=1?

6. Sea M una matriz de 4x4 singular y simétrica. Indicar si es posible conocer las multiplicidades geométricas de todos sus valores propios sabiendo que dos de ellos son 8 y 1 con multiplicidad algebraica dos y uno respectivamente. En caso de serlo, indicar cuáles son. Si no es posible, explicar por qué.

7. Sabiendo que A es una matriz de 3x3 y que sus valores propios son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 5/3$. determinar los valores propios de:

a) A^{-1} b) 4A c) A^2

(Para la resolución de este tipo de ejercicio deben estudiarse los resultados que aparecen desde el ejercicio 30 al 36 de la pág. 5 61 y 562 de Grossman (7° edición))

8. ¿Puede afirmarse que una matriz M de 5x5 es diagonalizable si se sabe que dos de sus valores propios son 3i y –i?. Justificar.

9. Sea A una matriz simétrica de 6x6. Si se sabe que dos de sus valores propios son λ_1=-1 y λ_2=5 tales que v(A)=3 y mg(λ_1=-1)=2. Calcular la multiplicidad algebraica de λ_2=5.

ALGUNOS EJERCICIOS RESUELTOS

1.-

i) Sea $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Calculando la imagen de los vectores de B_1 a través de T resulta

$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Entonces la representación matricial de T respecto de B_1 es

$$A_T = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

Como A_T es una matriz triangular superior sus VAP son los elementos de la diagonal principal.

Entonces λ=1 es VAP de A_T con multiplicidad algebraica 2.

ii) Calculemos la representación matricial de T respecto de B_2

$$T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \rightarrow \left[T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right]_{B2} = \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]_{B2} = \begin{pmatrix}-1\\4/5\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \rightarrow \left[T\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\right]_{B2} = \left[\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\right]_{B2} = \begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$$

Entonces es la matriz asociada a T con respecto B_2 a es $B_T = \begin{pmatrix}-1 & -5\\4/5 & 3\end{pmatrix}$.

Para calcular los VAP de B_T planteamos $p(\lambda) = \det\begin{pmatrix}-1-\lambda & -5\\4/5 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda)+4 =$

$-3 \pm 3\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$

Entonces $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 2.

iii) De manera que los VAP de A_T y B_T de son los mismos.

iv) Los VAP de la transformación T son los mismos que los de A_T y B_T son λ=1.

3. Sean A y B matrices de nxn semejantes. Entonces tienen el mismo determinante. Por lo tanto

A es una matriz invertible $\Leftrightarrow$ det A $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ det B $\neq$ 0 $\Leftrightarrow$ B es una matriz invertible.

4. Como A es una matriz singular o no invertible, por el Teorema de Resumen λ=0 es un VAP de A. Ya que A es simétrica entonces es diagonalizable, es decir, para cada VAP de A la multiplicidad algebraica coincide con la geométrica (*)

Por los datos λ=8 y λ=5 son otros VAP de A con multiplicidades algebraicas 2 y 1 respectivamente.

Por (*) entonces la multiplicidad de λ=8 y λ=5 es 2 y 1 respectivamente.

Finalmente, como la suma de las multiplicidades algebraicas de los VAP es 4 (porque A es de tamaño 4) la multiplicidad algebraica de λ=0 es 1. Aplicando nuevamente (*) la multiplicidad geométrica de λ=0 es, también, 1.

5. Sí, pues matrices semejantes tienen el mismo determinante. Entonces det(B)=-1. Por lo tanto $\det(B^4)= \det(B.B.B.B)= (\det B)(\det B)(\det B)(\det B)= (\det B)^4= (-1)^4= 1$.

6. Como M es singular o no invertible, uno de sus valores propios es $\lambda_3=0$.

Como además en simétrica, es diagonalizable y en consecuencia la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio coinciden.

Entonces $mg(\lambda_1=8)= ma(\lambda_1=8)= 2$ y $mg(\lambda_2=1)= ma(\lambda_2=1)=1$.

Ya que la suma de las multiplicidades algebraicas es 4, pues M es una matriz de 4x4:

$$ma(\lambda_1=8)+ ma(\lambda_2=1)+ ma(\lambda_3=0) = 4$$

$$2 + 1 + ma(\lambda_3=0)=4 \Rightarrow ma(\lambda_3=0) = 1$$

7.

Los valores propios de A^{-1} son ½, -1/2 y 3/5.

Los valores propios de 4A son 8, -8 y 20/3

Los valores propios de A^2 son 4, 4 y 25/9

8. Si sus valores propios son 3i y –i y como los valores propios ocurren en números complejos conjugados puede asegurarse que otros valores propios de M son los conjugados de los anteriores, es decir, -3i y i. Ya que el quinto valor propio no puede ser un número complejo (pues estaría también su conjugado) el otro valor propio de M es un número real. Debido a que todos los vap de M son distintos y, por lo tanto, para cada valor propio la multiplicidad aritmética y geométrica coinciden (es 1), puede afirmarse que M es una matriz diagonalizable.

9. Como A es una matriz simétrica entonces es diagonalizable. Por lo tanto para cada valor propio su multiplicidad algébrica y geométrica coinciden. Por lo anterior:

$$mg(\lambda_1=-1)= ma(\lambda_1=-1) =2 \quad \textit{(1)}$$

Como $v(A)=v(A-0I)= mg\,(\lambda=0)$ resulta que 0 también es un valor propio de A. Por dato $v(\lambda=0)=3$, resulta que:

$$mg\,(\lambda_3=0)= ma\,(\lambda_3=0)=3 \quad \textit{(2)}$$

Ya que la suma de las multiplicidades algebraicas debe ser 6 pues A es de 6x6:

$$ma(\lambda_1=-1)+ ma(\lambda_2=5)+ ma(\lambda_3=0)=6$$

Reemplazando *(1)* y *(2)* en la última igualdad, resulta:

$$2 + ma(\lambda_2=5)+ 3 = 6$$

Por lo tanto: $ma(\lambda_1=5)=1$.