Cálculo II

Prof. Ing. Silvia Seluy

TEMA: FUNCIONES VECTORIALES

FUNCIONES VECTORIALES (F.V.)

DEFINIDAS SOBRE UN DOMINIO (D) MEDIANTE UNA REGLA QUE *ASIGNA* UN VECTOR EN EL ESPACIO,
A CADA ELEMENTO DE D.

D: INTERV. DE NÚMEROS REALES

Una expresión de la forma:

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k} \qquad t \in I$$

representa una curva vectorial, con

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

La curva **r**(t) en el espacio, está formada por los puntos

$$\mathbf{(x, y, z)=(f(t), g(t), h(t))}$$

- **r**(t) describe la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre ella.

- Las funciones: f(t) , g(t) , h(t) son componentes del vector posición de la partícula.

Límites

DEFINICIÓN DE LÍMITE DE F. V.

- Sea la f.v. $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k} \quad t \in I$

- Sea L, su límite.

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = L \qquad Si \quad \forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, \partial > 0$$

$$0 < |t - t_0| < \partial \quad \Rightarrow \quad |\vec{r}(t) - L| < \varepsilon$$

Límites

Si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = L \qquad t \in I$

Entonces $L = L_1 \vec{i} + L_2 \vec{j} + L_3 \vec{k}$

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} f(t)\vec{i} + \lim_{t \to t_0} g(t)\vec{j} + \lim_{t \to t_0} h(t)\vec{k}}$$

Funciones con componentes reales

Continuidad

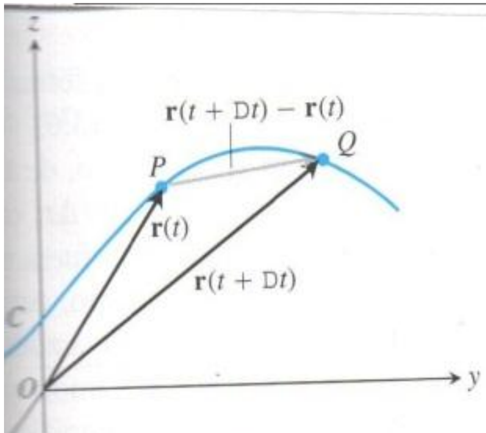
DEFINICIÓN PARA F. V.

- La f.v. $\boxed{\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}}$ $t \in I$

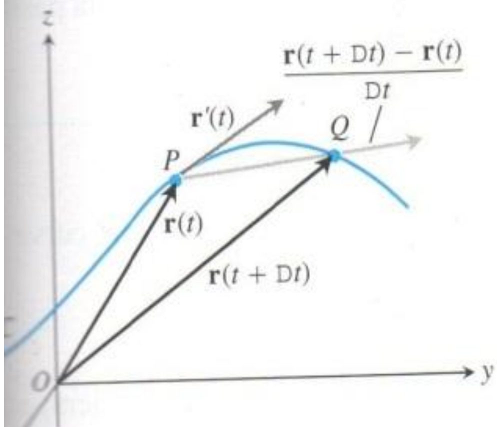
ES CONTINUA EN UN PUNTO

$t = t_0$ **de su dominio si :**

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)}$$



(a)



(b)

RA 13.5 Cuando $\Delta t \to 0$, el punto ende al punto P a lo largo de la curva n el límite, $\overrightarrow{PQ}/\Delta t$ se convierte en el or tangente $\mathbf{r}'(t)$.

Derivadas y movimiento

Suponga que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio y que f, g y h son funciones diferenciables (derivables) de t. Entonces, la diferencia entre las posiciones de la partícula en el instante t y el instante $t + \Delta t$ es

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

(figura 13.5a). En términos de componentes,

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \\
&= [f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} + h(t + \Delta t)\mathbf{k}] \\
&\quad - [f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}] \\
&= [f(t + \Delta t) - f(t)]\mathbf{i} + [g(t + \Delta t) - g(t)]\mathbf{j} + [h(t + \Delta t) - h(t)]\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Cuando Δt tiende a cero, parecen ocurrir tres cosas en forma simultánea. Primero, Q tiende a P a lo largo de la curva. Segundo, la recta secante PQ parece tender a una posición límite, tangente a la curva en P. Y tercero, el cociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ (figura 13.5b) tiende al límite

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{j} \\
&\quad + \left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\right]\mathbf{k} \\
&= \left[\frac{df}{dt}\right]\mathbf{i} + \left[\frac{dg}{dt}\right]\mathbf{j} + \left[\frac{dh}{dt}\right]\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

DERIVADA-DEFINICIÓN

La f.v. $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k} \qquad t \in I$ es derivable en t, si cada una de sus componentes es también derivable en t.

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t} =$$

$$= f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

DERIVADA-Int. geométrica

Para $\Delta t > 0$ el vector:

$$\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t} \text{ es paralelo a } \overrightarrow{PQ}$$

Cuando $\Delta t \to 0$ el vector dado, se convierte en tangente en P.

El vector $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0$ garantiza que la curva tenga tg en cada punto.

DERIVADA-Int. geométrica

Curva regular cuando $\frac{d\bar{r}}{dt} \neq 0$ siempre y además es continua.

Curva regular por partes: cuando la forma un número finito de curvas regulares.

DEFINICIONES Velocidad, dirección, rapidez, aceleración

Si **r** es el vector posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva regular en el espacio, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

es el **vector velocidad** de la partícula, tangente a la curva. En cualquier tiempo t, la dirección de **v** es la **dirección del movimiento**, la magnitud de **v** es la **rapidez** de la partícula y la derivada $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, cuando existe, es el **vector aceleración** de la partícula. En resumen,

1. La velocidad es la derivada de la posición: $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$.
2. La rapidez es la magnitud de la velocidad: $\text{Rapidez} = |\mathbf{v}|$.
3. La aceleración es la derivada de la velocidad: $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$.
4. El vector unitario $\mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ es la dirección del movimiento en el tiempo t.

Reglas de derivación para funciones vectoriales

Sean **u** y **v** funciones vectoriales diferenciables de t, **C** un vector constante, c un escalar y f una función escalar diferenciable.

1. *Regla de la función constante:* $$\frac{d}{dt}\mathbf{C} = \mathbf{0}$$

2. *Reglas de los múltiplos escalares:* $$\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\mathbf{u}'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

3. *Regla de la suma:* $$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$$

4. *Regla de la resta:* $$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) - \mathbf{v}'(t)$$

5. *Regla del producto punto:* $$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$$

6. *Regla del producto cruz:* $$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$$

7. *Regla de la cadena:* $$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$$

Demostración del producto cruz

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}\, x\, \vec{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{u}(t+h)\, x\, \vec{v}(t+h) - \vec{u}(t)\, x\, \vec{v}(t)}{h}$$

Sumando y restando $\vec{u}(t)\ x\ \vec{v}(t+h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\vec{u}(t+h)\, x\, \vec{v}(t+h) - \vec{u}(t)\, x\, \vec{v}(t+h) + \vec{u}(t)\, x\, \vec{v}(t+h) - \vec{u}(t)\, x\, \vec{v}(t)}{h}$$

Saco f.c. $\vec{v}(t+h)$ y $\vec{u}(t)$

Demostración del producto cruz

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t)}{h} \, x \, \vec{v}(t+h) + \vec{u}(t) \, x \, \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t)}{h} \right] x \lim_{h \to 0} [\vec{v}(t+h)]] + \lim_{h \to 0} [\vec{u}(t)] \, x \lim_{h \to 0} \left[\frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h} \right]$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\vec{u} \, x \, \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \, x \, \vec{v} + \vec{u} \, x \, \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Regla de la cadena

Sea **u** (s), una función vectorial diferenciable y sea s= f(t) una función escalar diferenciable de t.

Si $\vec{u}(s) = a(s)\vec{i} + b(s)\vec{j} + c(s)\vec{k}$, entonces a,b y c son funciones diferenciables de t y al aplicar la regla de la cadena:

Regla de la cadena (2)

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(s) = \frac{d}{dt}a(s)\vec{i} + \frac{d}{dt}b(s)\vec{j} + \frac{d}{dt}c(s)\vec{k}$$

$$= \frac{da}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{i} + \frac{db}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{j} + \frac{dc}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{k}$$

$$= \frac{ds}{dt}\left(\frac{da}{ds}\vec{i} + \frac{db}{ds}\vec{j} + \frac{dc}{ds}\vec{k}\right)$$

$$= \frac{ds}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{ds}\right) \boxed{= f'(t).\vec{u}'(f(t))}$$

F.V. DE MAGNITUD CTE.

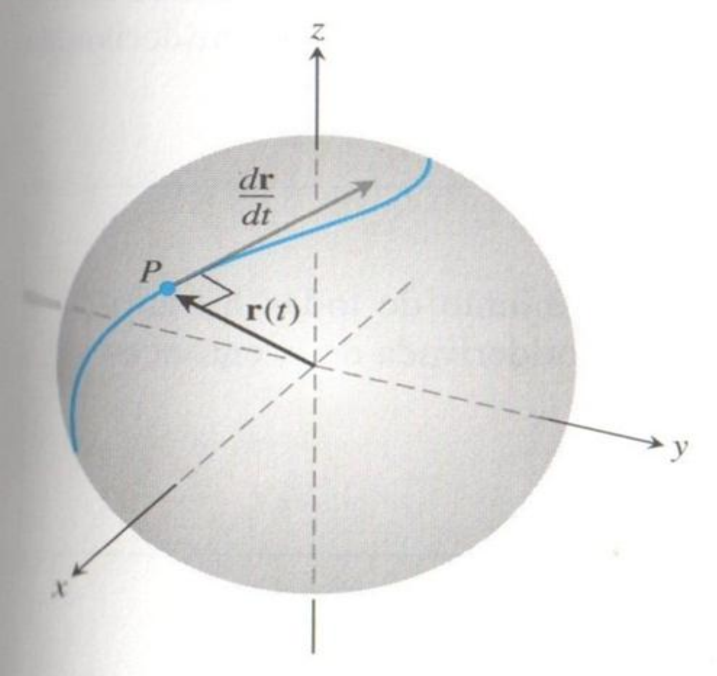


FIGURA 13.8 Si una partícula se mueve sobre una esfera de modo que su posición r sea una función diferenciable del tiempo, entonces $\mathbf{r}\cdot(d\mathbf{r}/dt) = 0$.

El vector posición y su primera derivada son ortogonales.

$$\left|\vec{r}(t)\right| = cte \quad \Rightarrow \sqrt{\vec{r}(t)^2} = C$$

Y $\quad \vec{r}^{\,2}(t) = C^2 \quad \Rightarrow \vec{r}(t).\vec{r}(t) = C^2$

Derivando ambos miembros:

$$\Rightarrow \vec{r}(t).\vec{r}\,'(t) = 0 \qquad \boxed{\Rightarrow \vec{r}(t).\frac{d\vec{r}}{dt} = 0}$$

INTEGRAL INDEFINIDA

Una f.v. **R**(t) es antiderivada de la f.v. **r**(t) en el intervalo I, si d**R**/dt = **r** en cada punto de I.

La integral indefinida de r con respecto a t es el conjunto de todas las antiderivadas de r:

$$\boxed{\int \bar{r}(t)\,dt = \bar{R} + C}$$

INTEGRAL DEFINIDA

Si las componentes de

$$\boxed{\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}} \qquad t \in I$$

Son integrables en [a,b], también lo es r y la integral definida de r desde a hasta b es:

$$\boxed{\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\vec{k}}$$