Clase teórica de la semana del 30-5

Mario Garelik

Sección 15.2 - Integrales de línea de campos vectoriales.

- **Práctica sección 15.2 (pág. 813-815):** 1 - 28 /// 31 - 40.
- Breve introducción: flujos de fluidos descriptos por campos de velocidades (direcciones).
  - Significado de vectores más largos en un campo direccional.
  - Se estudiarán ahora *campos vectoriales*, tanto bi como tridimensionales y su conexión con las integrales de línea.
- A menos que se especifique otra cosa, todo lo tratado vale tanto en R^2 como en R^3.
- Expresión de un campo vectorial: $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, donde P, Q y R son campos escalares.
- Ejemplo 1. Gráfico de un campo vectorial.
  - En vez de graficar vectores en puntos del plano al azar, se opta por graficar de manera sistemática vectores de una misma longitud. Esto se corresponde con graficarlos en las curvas de nivel $||\mathbf{F}|| = c$.
  - Para comenzar el trazo, se elige un valor de c y se representan varios vectores en la curva de nivel (circunferencia en este caso) resultante.
- Dejar como propuesto el trazo de algunos vectores del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.
- Leer con detenimiento el párrafo final de la página 809, que trata sobre el *escalamiento* que todo SAC realiza al momento de graficar campos vectoriales.
- Relación entre **campos vectoriales e integrales de línea**:

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

  es la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}$ a lo largo de C.
- Ejemplo 2.
- **Trabajo.**
  - Idea básica de trabajo.
    * Repaso de la expresión del producto escalar en términos del ángulo entre los dos vectores y de las desitintas expresiones para la componente de un vector sobre otro.

    * Expresión del trabajo W de una fuerza constante en la misma dirección del desplazamiento.
    * Expresión del trabajo W de una fuerza constante aplicada en un punto y en dirección de un ángulo θ respecto del desplazamiento (generalización del caso anterior).
  - Trabajo realizado por una fuerza que varía en maginitud pero no en dirección (como una integral de Cálculo I).
  - Generalización al trabajo de un campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, que varía tanto en magnitud como en dirección y que actúa en cada punto sobre una curva suave C desde un punto inicial A hasta un punto final B.

$$W = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_C \mathbf{F}d\mathbf{r}$$

  - El trabajo de una fuerza $\mathbf{F}$ sobre una curva suave C depende de la componente tangencial de $\mathbf{F}$

$$W = \int_C \mathbf{F}d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_C comp_T\, \mathbf{F}\, ds$$

  - Ejemplo 3.

- **Circulación.**
  - Idea de circulación de un campo vectorial $\mathbf{F}$ alrededor de C, que es cerrada y simple.
  - Interpretación de la circulación según su signo cuando $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un fluido.

- **Campo vectorial gradiente.**
  - Definición tanto para R^2 como para R^3. es un ejemplo de campo vectorial.
  - Ejemplo 4: mostrar cómo en la imagen del campo gradiente se ve que *si el punto inicial de un vector coincide con una curva de nivel, es perpendicular a ella.*

- **Campo vectorial conservativo.**
  - Definición. Función potencial.
    * **Aclaración importante:** en la definición de campo vectorial conservativo, Zill omite *localizar*. Esto significa que un campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo en una región Ω cuando existe una función potencial Φ definida en Ω que verifica $F = \nabla\Phi$.
    * Esto cobra particular relevancia en la consigna del ejercicio 36 de la sección 15.3. Para el campo vectorial propuesto

$$F(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j},$$

      su dominio es $\Omega = R^2 - \{(0, 0)\}$ Si bien la función $\Phi(x, y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ verifica que $F = \nabla\Phi$, no resulta una potencial para F: el problema radica en que esta igualdad no es cierta $\forall(x, y) \in \Omega$ (por ejemplo en los puntos $(x, 0)$, con $x \neq 0$).
  - Ejemplo 5.
  - No todo campo vectorial es conservativo. En la clase próxima se verá un criterio para determinar cuándo un campo vectorial lo es.

Sección 15.3 - Independencia de la trayectoria.

- **Ejercitación propuesta (pág. 823-824):** 1 – 36.
- Breve intro. Trayectoria = curva C suave a trozos entre A y B.
- Se supondrá que el campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ involucrado en el integrando es siempre continuo y sus funciones componentes P y Q tienen primeras derivadas parciales continuas en una región R en la cual está la curva C.
- Ejemplo 1: Una integral de línea entre dos puntos que no varía sobre cuatro trayectorias.
- **Teorema Fundamental de las integrales de línea.** Con demo.
  - Establece una relación del valor de una integral de línea cuando el integrando es un campos vectorial conservativo. Es un paralelo al Teorema Fundamental del Cálculo que vimos en Cálculo I.
- Definición de **independencia de la trayectoria**.
- Reformulación del Teoerema Fundamental expresándolo en términos de *independencia de la trayectoria.*
- Región **conexa**, **simplemente conexa**, **disconexa** y **múltiplemente conexa**.
- **Teorema** (con demo). Equivalencia de las nociones de *independencia de la trayectoria* y *campo vectorial conservativo* en toda región conexa abierta R.
- **Integrales alrededor de trayectorias cerradas.**
  - Teorema (con demo). **Condición necesaria y suficiente para la independencia de la trayectoria** cuando la trayectoria es cerrada en una región conexa abierta.
  - **Resumen:** si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo definido sobre una región conexa abierta y C es cualquier trayectoria cerrada en la región, entonces:

$$\mathbf{F} \text{ es conservativo} \Leftrightarrow \text{independencia de la trayectoria} \Leftrightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

- Teorema (con demo): **criterio para que un campo vectorial sea conservativo**.
  - Remarcar que para el recíproco, la región R de definición del campo $\mathbf{F}$ y de sus componentes P y Q debe ser *simplemente conexa* para poder utilizar el Teorema de Green (que se ve en la próxima sección) en la demostración.
- Ejemplos 3, 4 y 5: verificación de que los campos son conservativos.
- Ejemplo 6: cálculo de una función potencial a partir de su gradiente.
  - Mostrar que, por ser la integral independiente de la trayectoria, el cálculo de la $\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ puede realizarse sin encontrar previamente la función potencial ϕ.
- **Campos conservativos tridimensionales.**
  - La condición necesaria y suficiente en R^3.
  - Ejemplo.
- Leer el parrafito *Conservación de la energía* para entender el porqué del nombre *conservativo.*