Respuestas Practica N°5

Espacios vectoriales Asociados a una Matriz

1) a) $N_A = \left\{ v \in R^2 / v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\left(N_A = \text{origen } R^2 \right)$

b) $N_B = \left\{ v \in R^2 / v = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{x}{2} \end{pmatrix} \right\}$ $\left(N_A = \text{recta } y = -\frac{1}{2} x \text{ en } R^2 \right)$

c) $N_C = \left\{ v \in R^2 / v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$ $\left(N_A = R^2 \right)$

2)

a) $N_A = \left\{ v \in R^2 / v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\nu_A = \dim N_A = 0$

$Im\, A = \left\{ v \in R^2 / v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$ $\rho_A = \dim Im\, A = 2$

Base $Im\, A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$C_A = Im\, A = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Base $C_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(*) $\boxed{Im\, A = C_A = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = R^2}$

b) $N_A = \left\{ v \in R^4 / v = \begin{pmatrix} 2z - w \\ -z \\ z \\ w \end{pmatrix} \right\}$ Base $N_A = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\nu_A = \dim N_A = 2$

$Im\, A = \left\{ v \in R^3 / v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \right\}$ Base $Im\, A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\rho_A = \dim Im\, A = 2$

$C_A = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

⊛ $\operatorname{Im} A = C_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

3) a) $\rho_B = 3 \quad \nu_B = 2$

b) $\rho_C = 4 \quad \nu_C = 0$

c) $\rho_D = 2 \quad \nu_D = 1$

4) – $N_A = \left\{v \in R^4 \,/\, v = \begin{pmatrix}-2y-3w\\y\\-2w\\w\end{pmatrix}\right\}$ Base $N_A = \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\0\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\nu_A = \dim N_A = 2$

– $\operatorname{Im}_A = C_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-3\\1\end{pmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

– $\operatorname{Im} A = \left\{v \in R^3 \,/\, v = \begin{pmatrix}x\\y\\5x-2y\end{pmatrix}\right\}$ Base $\operatorname{Im} A = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$

$\rho_A = \dim \operatorname{Im} A = 2$

– $\operatorname{Im} A =$ plano: $5x - 2y - z = 0$

– $R_A = \text{gen}\left\{(1,2,-1,1),(1,2,1,5)\right\} =$

5)

a) Base $= \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$

b) Base $= \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-2\\0\\2\\2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\3\end{pmatrix}\right.$

6) a) rango $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ = rango $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{array}\right] = 1$ Compatible

Matriz Coeficiente escalonada : $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Sistema Compatible Indeterm.

Solución : $\left\{ x \; ; \; \frac{4-x}{2} \right\}$

solución particular : $x = 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}$

verificación del vector de términos Ind. para la solución particular $x = 1$; $y = \frac{3}{2}$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

b) Matriz coef : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b : $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

rango $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq$ rango $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] = 3$

Sistema Incompatible

8) Demo:

$$\rho_A = \dim C_A = \dim R_A = \dim C_{A^t} = \rho_{A^t}$$

9) - $C_{m \times 6}$ y $C\vec{x} = 0$ comp. determinado $\Rightarrow$ C tiene todos sus columnas L.I $\therefore \rho_C = 6$

- Como $\nu_{C^t} = 2$ y $C^t_{6 \times m}$ y $\rho_C = \rho_{C^t} \Rightarrow$

$\rho_{C^t} = 6$ y $\rho_{C^t} + \nu_{C^t} = m \;\therefore\; 6 + 2 = m$

$\boxed{m = 8}$

10) a) $A_{4\times 3}$ y $\rho_A = 2$ salen de los datos

Como $\rho_A + \nu_A = n \rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\rho_A} + \nu_A = 3 \Rightarrow \boxed{\nu_A = 1}$

b) $A_{5\times 4}$ y $\dim C_{A^t} = \rho_{A^t} = 3$ sale de los datos

Como $\rho_A + \nu_A = 4$ y $\rho_A = \rho_{A^t} = 3 \rightarrow$

$3 + \nu_A = 4 \rightarrow \nu_A = 1$

11) a) $N_A = \left\{ v \in \mathbb{R}^5 \,/\, v = \begin{pmatrix} x_5 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \right\}$ Base $N_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\nu_A = 2}$

b) Si $A_{3\times 5}$ y $\nu_A = 2 \rightarrow \rho_A + \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\nu_A} = 5$

$\rightarrow \boxed{\rho_A = 3}$

12) a) Falso. Las matrices de cambio de base son invertibles y de rango completo $\rightarrow \nu_C = 0$

d) Falso Si A es simétrica $\Rightarrow A = A^t$

$\therefore C_A = R_{A^t}$ y $\dim C_A = \dim R_A$

c) Verdadero

Ej: Sea $A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . B = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$

$$A . B = \begin{bmatrix} am + bn \\ cm + dn \end{bmatrix} = m \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

b) Es falso por que $\vec{u} \in R_A \rightarrow \vec{u} \in R^3$

$\therefore$ $u = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \in R^4$ no puede $\in$ al R_A.

($v \in N_A$ y $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ es un vector del N_A

ya q' $A \cdot v = \vec{0}$)

e) <u>Falso</u>

(N_A y $R_A \in R^3$ ya q' A es de 3×4

y $C_A \in R^3$)