6.3.5. Barra de area variable sometida a su peso propio

La figura nos muestra una barra de sección cuadrada variable de lado L1 en el extremo superior, constante hasta una altura H2 de la base, y de lado $L_2 = \frac{1}{2}L_1$ en el extremo inferior, siendo $H_2 = 2/3(H_1 + H_2)$. La barra es de acero cuya densidad es de 7800 Kg/m3 y módulo de Young del orden de 200 GPa. Estando sometida la barra al peso propio, y asumiendo que L1 = 20 milímetros y la altura es de 2 metros, calcule:

1. el estado tensional en función de la coordenada vertical
2. el estado de deformaciones en función de la coordenada vertical
3. el desplazamiento de la sección superior de la barra

Siendo la tensión límite que resiste el material de aproximadamente 500 MPa, ¿cuál sería el máximo peso que se le puede apoyar en su parte superior sin que se rompa?

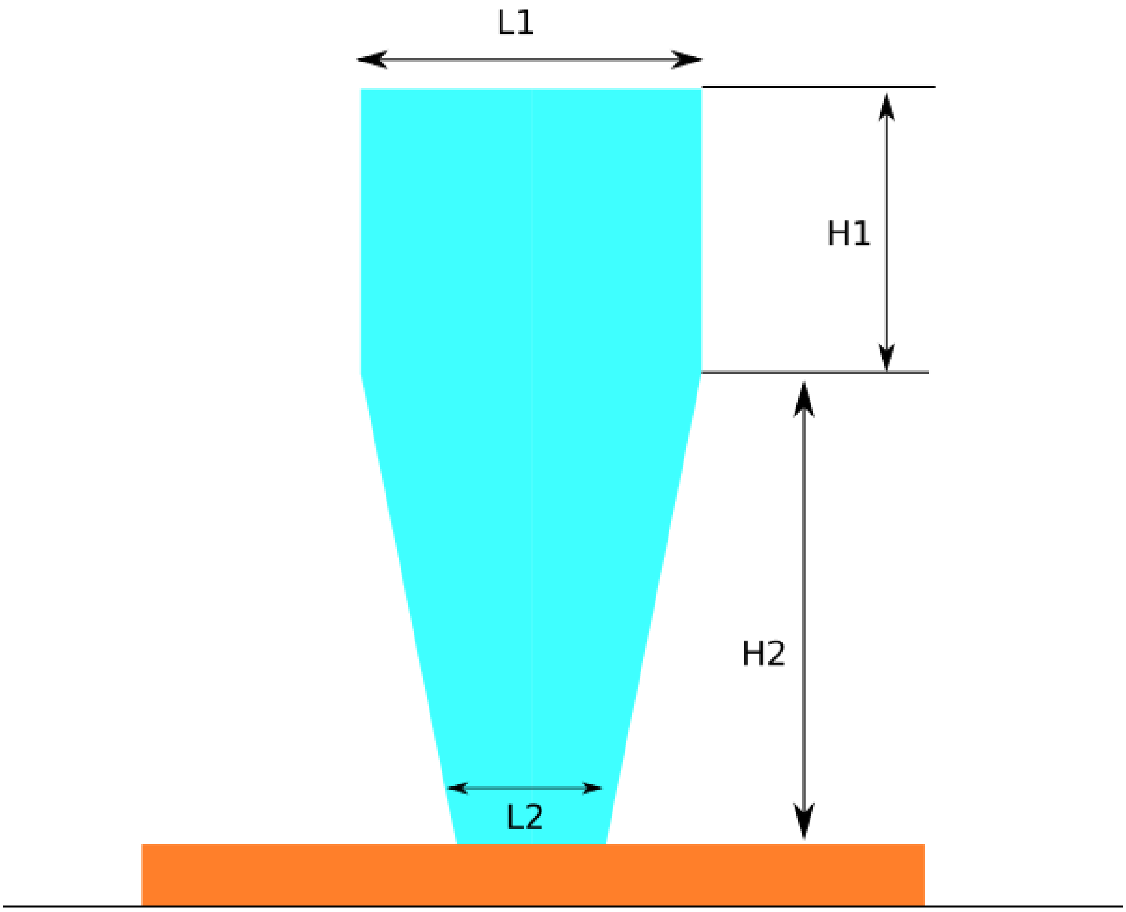

Figura 6.11: Barra de area variable sometida a su peso propio

Como siempre en problemas donde hay una única barra con alguna propiedad variable a lo largo de su longitud arrancamos estimando el estado de carga a lo largo de su longitud, es decir $N(y)$ en este caso. Como el estado de carga es el peso propio y este es una fuerza distribuida dada por la gravedad, es decir $b(y) = \rho\, g\, A(y)$, lo cual nos da una fuerza por unidad de longitud medida en N/m. Al estar fijada en su extremo inferior y libre en el superior el estado de carga se expresa como:

$$N(y) = \int_{H_1+H_2}^{y} b(y)dy = \int_{H_1+H_2}^{y} \rho\, g\, A(y)dy$$

Siendo el área variable de sección cuadrada de lado $L(y)$ variable, entonces esa área variable se expresa como:

$$A(y) = \begin{cases} L(y)^2 = \left(L_1 \frac{y}{H_2} + L_2(1 - \frac{y}{H_2})\right)^2 & 0 \leq y \leq H_2 \\ L(y)^2 = L_1^2 & H_2 \leq y \leq H_1 + H_2 \end{cases} \tag{6.32}$$

Por lo que la carga en función de la altura queda expresada como:

$$N(y) = \begin{cases} \int_{H_1+H_2}^{y} \rho\, g\, L_1^2 dy = \rho\, g\, L_1^2 (y - (H_1 + H_2)) & H_2 \leq y \leq H_1 + H_2 \\ -\rho\, g\, L_1^2\, H_1 + \int_{H_2}^{y} \rho\, g \left(L_1 \frac{y}{H_2} + L_2(1 - \frac{y}{H_2})\right)^2 dy & 0 \leq y \leq H_2 \end{cases} \tag{6.33}$$

Si graficamos esta función tenemos

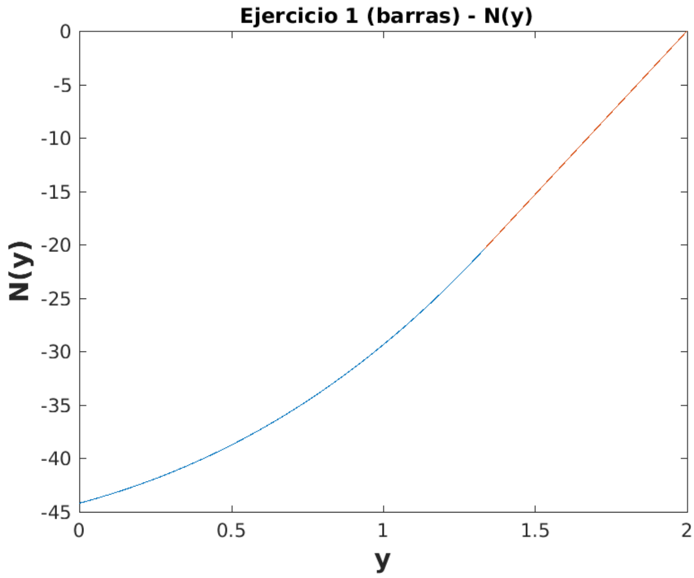

Figura 6.12: Estado de carga de la barra en cada sección de altura y $(N(y))$

La expresión análitica para $N(y)$ con $0 \leq y \leq H_2$ se puede escribir como:

$$N(y) = \frac{\left(g\,\rho\,(\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2)^2\right)}{\left(3\,\mathrm{H}_2{}^2\right)}\, y^3 + \frac{\left(\mathrm{L}_2\, g\,\rho\ (\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2)\right)}{\mathrm{H}_2}\, y^2 + \left(\mathrm{L}_2{}^2\, g\,\rho\right)\, y - \frac{g\,\rho\,\left(\mathrm{H}_2\,\mathrm{L}_1{}^2 + \mathrm{H}_2\,\mathrm{L}_1\,\mathrm{L}_2 + \mathrm{H}_2\,\mathrm{L}_2{}^2\right)}{3}$$

Para las tensiones tenemos que dividir la carga por el area, punto a punto, y eso nos da:

$$\sigma(y) = \frac{N(y)}{A(y)} = \begin{cases} \sigma^{top}(y) = \frac{N(y)}{A(y)} & H_2 \leq y \leq H_1 + H_2 \\ \sigma^{bot}(y) = \frac{N(y)}{A(y)} & 0 \leq y \leq H_2 \end{cases} \tag{6.34}$$

Ya que la expresión analítica nos muestra un polinomio completo de tercer grado al dividir por una cuadrátca genera una función racional del tipo

A continuación obtenemos las deformaciones simplemente dividiendo por una constante como el módulo de Young , es decir:

$$\epsilon(y) = \frac{\sigma(y)}{E}$$

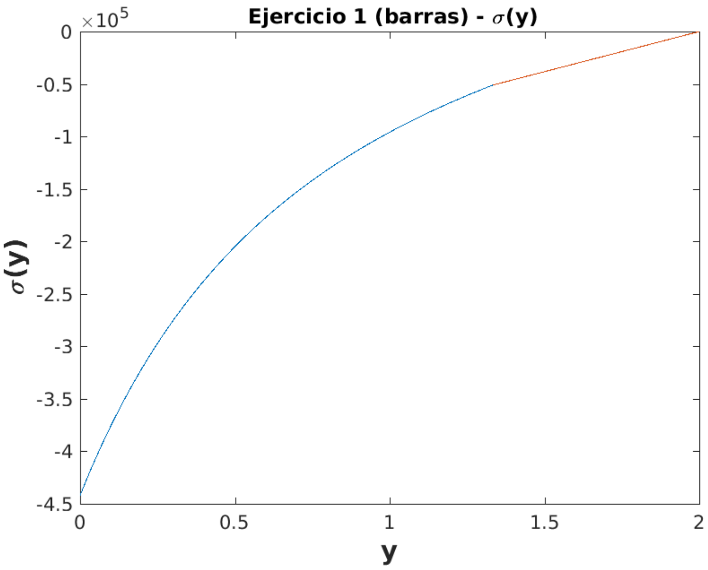

Figura 6.13: Estado de tensiones de la barra en cada sección de altura y $(\sigma(y))$

lo cual lo único que hace es escalar las tensiones en un factor de 10^{-11} con lo cual nos da deformaciones del orden de 10^{-6}, es decir de uno en 10 mil por ciento.

Para calcular los desplazamientos debemos integrar estas deformaciones en la vertical, es decir:

$$u(y) - u(0) = \int_0^y \epsilon(y)\, dy = \begin{cases} \int_0^y \frac{\sigma^{bot}(y)}{E}\, dy & 0 \leq y \leq H_2 \\ u(H_2) + \int_{H_2}^y \frac{\sigma^{top}(y)}{E}\, dy & H_2 < y \leq H_1 + H_2 \end{cases} \tag{6.35}$$

Como $u(0) = 0$ por estar apoyado sobre el piso, entonces los desplazamientos lucen como:

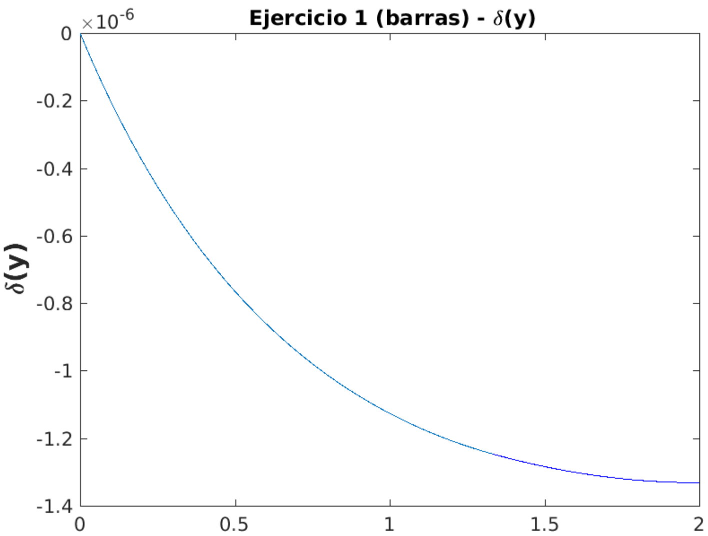

Figura 6.14: Desplazamientos de la barra en cada sección de altura y $(\delta(y))$

En cuanto a qué carga adicional se puede apoyar encima a la barra sin que se alcance la tensión máxima de fluencia simplemente hay que agregar a la carga normal $N(y)$ la carga P y rehacer todas las cuentas anteriores buscando que se alcance la tensión límite para identificar a la misma.

Una estimación preliminar podría ser tomar la tensión máxima actual que se da en el apoyo $y = 0$ y que vale $4{,}4211\,10^5$ Pa, restarsela a la tensión máxima admisible, lo cual daría el extra tensión disponible para ser absorbido por la carga a aplicar y dividirlo por el area en el apoyo que vale $L_2^2 = 10^{-4}\,m^2$. O sea

$$P = (500\,10^8 - 4{,}4211\,10^5)\,10^{-4} \approx 49956$$