UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL
FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°3

INDEPENDENCIA LINEAL

1) **Demostrar si a, b y c son números reales distintos de cero entonces los vectores $(1,a,a^2)$, $(1,b,b^2)$ y $(1,c,c^2)$ son L.I si $a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$.**

Resolución:

Como se trata de 3 vectores de R^3 dichos vectores se pueden escribir como las columnas de una matriz y aplicar el Teorema 5.4.5. Si el determinante de esta matriz no es cero los vectores son LI.

Sea A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. Aplicando la regla de Sarrus para calcular el determínate de A se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a & b \\ a^2 & b^2 & c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = (bc^2 + ca^2 + ab^2) - (ac^2 + cb^2 + ba^2)$$

Sacando paréntesis en la última expresión resulta: $|A| = bc^2 + ca^2 + ab^2 - ac^2 - cb^2 - ba^2$

Asociando los términos que tienen la misma potencia de a, b y c:

$$|A| = (b-a)c^2 + (c-b)a^2 + (a-c)b^2$$

Para que $|A|$ sea distinto de cero, cada término de la última expresión debe ser distinto de cero. En cada expresión hay un producto de una potencia de exponente dos y una diferencia o resta. Por lo tanto, la potencia así como la diferencia deben ser distintos de cero para que el término no sea cero.

Consideremos uno de los términos, pero en los otros vale lo mismo. Por ejemplo, en el primer término se tiene

$$(b-a)c^2$$

c^2 no es cero pues $c \neq 0$. Para que sea $b - a \neq 0$ debe ser $b \neq a$.

Razonando del mismo modo en los términos restantes, se justifica que los vectores dados son LI si **$a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$.**

2)

Responder si cada afirmación es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera demostrarla y en caso de ser falsa dar un contraejemplo.

a) *Todo subconjunto de un conjunto L.D es L.D*
b) *Todo subconjunto de un conjunto L.I es LI.*
c) *Si agrego un vector a un conjunto L.D entonces el conjunto sigue siendo L.D.*
d) *Si agrego un vector a un conjunto L.I entonces el conjunto sigue siendo L.I.*
e) *Si u, v y w son L.I entonces {u+v, u-v, v+w} es un conjunto L.I.*
f) *Sea* $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ *un conjunto L.I. y sea* $v \in gen\ \{v_1, v_2, .., v_n\}$, *entonces* $\{v_1, v_2, .., v_n, v\}$ *es un conjunto L.D.*

<u>Resolución:</u>

a) La afirmación es **falsa**.
Contraejemplo: Consideremos el siguiente conjunto formado por 3 vectores de R^2 $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}\right\}$. Este conjunto es LD porque la cantidad de vectores del conjunto es mayor que la dimensión del espacio (TEOREMA 2 de la sección 4.5 del libro). Sin embargo, el subconjunto $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right\}$ es LI: armando la combinación lineal $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ se obtiene que los escalares de la misma son ambos ceros: $c_1 = c_2 = 0$.

b) y c) Las dos afirmaciones son **verdaderas**.
En primer lugar, probaremos la afirmación c). Luego, usando c), demostraremos b).

Demostración de c):
Sean $S = \{v_1,\ldots,v_n\}$ un conjunto de vectores LD y $S_1 = \{v_1,\ldots,v_n,v_{n+1}\}$ de modo que $S \subseteq S_1$. Puesto que S es LD, existen escalares $\lambda_i \in R$, con $i = 1,\ldots, n$, no todos nulos, tal que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$. Entonces, la combinación lineal de los vectores de S_1 dada por $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} = \mathbf{0}$ no posee todos los escalares iguales a 0. Por lo tanto, S_1 es LD.

Demostración de b): La prueba es por el método del absurdo.
Sean S_1 un conjunto LI y S un conjunto LD tal que $S \subseteq S_1$.
Entonces, por la afirmación c), S_1 es LD (Absurdo).

El absurdo vino de suponer que $S \subseteq S_1$ es un conjunto LD. Por lo tanto, todo subconjunto de un conjunto LI es LI.

d) La afirmación es **falsa**.
Contraejemplo: Consideremos el siguiente conjunto LI de 2 vectores de R^2 $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Pero, el conjunto $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}\right\}$ es LD ya que está constituido por 3 vectores de 2 elementos (TEOREMA 2 de la sección 4.5 del libro).

Observación: Como hemos cambiado de edición en los últimos años, entre paréntesis debe decir por Teorema 5.4.2.

e) La afirmación es **verdadera**.
Demostración:
Debemos probar que si **0**= $\alpha_1(u+v)+\alpha_2(u-v)+\alpha_3(v+w)$ entonces $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$.
Planteamos la combinación lineal de los vectores u+v, u-v, v+w. Entonces distribuyendo los escalares y asociándolos posteriormente, resulta:

$$\mathbf{0}=\alpha_1(u+v)+\alpha_2(u-v)+\alpha_3(v+w)$$
$$\mathbf{0}=\alpha_1 u+\alpha_1 v+\alpha_2 u-\alpha_2 u+\alpha_3 v+\alpha_3 w$$
$$\mathbf{0}=(\alpha_1+\alpha_2)u+(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)v+\alpha_3 w$$

Por hipótesis, $u, v\ y\ w$ son L.I entonces

$$\alpha_1+\alpha_2=0$$
$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$$
$$\alpha_3=0$$

Como $\alpha_3=0$, se tiene de las 2 primeras ecuaciones que $\alpha_1=-\alpha_2$ y $\alpha_1=\alpha_2$, del cual deducimos que $\alpha_1=\alpha_2=0$. Por lo tanto, $\{u+v, u-v, v+w\}$ es un conjunto LI.

f) La afirmación es **verdadera**.
Demostración:
Sean $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ un conjunto LI y $v \in gen\{v_1, v_2, .., v_n\}$. Entonces, $v=\alpha_1 v_1+....+\alpha_n v_n$ para $\alpha_i \in R, i=1,...,n$ (1).
Luego, si restamos v miembro a miembro de (1) obtenemos que

$$0=\alpha_1 v_1+....+\alpha_n v_n-v.$$

Como el escalar que multiplica a v es (-1), el conjunto $\{v_1, v_2, .., v_n, v\}$ es LD.

3) Sea el vector u = (1, 0,3).

a) Sea $\mathrm{H}=\{v \in \Re^3 / u.v=0\}$. Demostrar que H es un subespacio de R^3.

b) Encontrar dos vectores LI en H. Denotárlos como x e y.

c) Calcular **w** = x *x* y, es decir el producto vectorial o cruz entre los vectores obtenidos en el ítem anterior.

d) Demostrar que w y *u* son linealmente dependientes en R^3.

<u>Resolución:</u>

a) Veamos el formato de los vectores v= (a,b,c) que son elementos de H.

De u. v=0 se obtiene que 1.a+0.b+3.c=0 $\Rightarrow$ a + 3c =0 $\Rightarrow$ a = -3c

Por lo tanto: H={v= (-3c, b, c) con b, c $\in$R} (**)

Demostremos que H es un subespacio de R^3:

- H $\subset$ R^3 por definición de H
- H $\neq \emptyset$ pues (-6,0,2) $\in$ H
- Sean (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) dos elementos de H. es decir:

  a_1=-3c_1 y a_2= -3c_2 (*)

  Veamos si $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$ es también un elemento de H o no.

  $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c2)= (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2)$

  Remplazando por las ecuaciones (*) y sacando factor común -3, se obtiene

  $a_1+a_2 = -3c_1-3c_2 = -3\,(c_1+c_2)$

  Lo anterior demuestra que $(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) \in$ H y, en consecuencia, que la suma es cerrada en H.
- Sea (a,b,c) $\in$ H (es decir en este vector se verifica que a=-3c) y $\alpha \in$ R.

  Entonces analicemos si α(a, b, c)= (αa, αb, αc) pertenece a H o no.

  αa= α (-3c)= -3 (αc) $\Rightarrow$ α(a, b, c) $\in$ H $\Rightarrow$ la multiplicación por escalares es cerrada en H.

Se demostró, entonces, que H es un subespacio de R^3.

b) Asignando valores a 'b' y a 'c' en (**), se obtienen vectores distintos de H.

Por ejemplo si c=1 y b=0 se obtiene x= (-3, 0,1).

Si c=-2 y b=1 se obtiene y= (6, 1,-2).

x e y son vectores LI en R^3 pues son dos vectores que no son múltiplos entre sí.

c) Calculando x x y se obtiene **w**=x x y= (-1,0,-3) (dejamos los cálculos a cargo del alumno).

d) Los vectores **w** y u son LDen R^3 pues son múltiplos ya que **w**=(-1)u.