UNIVERSIDAD NACIONAL DEL LITORAL

FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS HÍDRICAS

ESTADÍSTICA

INGENIERÍA EN INFORMÁTICA

TEORÍA

MG. SUSANA VANLESBERG

- MODELOS PROBABILÍSTICOS

- **La aplicación de la teoría de probabilidad en situaciones concretas, cuando se presentan determinadas CARACTERÍSTICAS PARTICULARES, originó una serie de funciones de probabilidad especiales llamadas MODELOS PROBABILISTICOS que permiten resolver sencillamente esas situaciones.**

- Estos Modelos son funciones de probabilidad, por lo que cada uno DEBERÁ cumplir con todas las propiedades de una función de probabilidad.

- También poseen sus propias características que serán estudiadas en cada caso.

MODELOS PARA VARIABL ALEATORIA DISCRETA

- Modelo Binomial
- Modelo Poisson
- Modelo Hipergeométrico

MODELO BINOMIAL

- Se repiten una serie de pruebas de tipo **Bernoulli**.
- Esto es los resultados de los experimentos pueden separarse en dos categorías mutuamente excluyentes: ***éxito*** o ***fracaso*.** A la variable aleatoria X de tipo Bernoulli se le puede asignar valores (arbitrarios, pero muy prácticos) a los eventos éxito y fracaso.

- x=0 fracaso
- x=1 éxito

$$f(x)=\begin{cases} p, & x=1 \\ 1-p, & x=0 \end{cases}$$

- **Esta función deberá cumplir con las condiciones de una función de probabilidad**

- Características

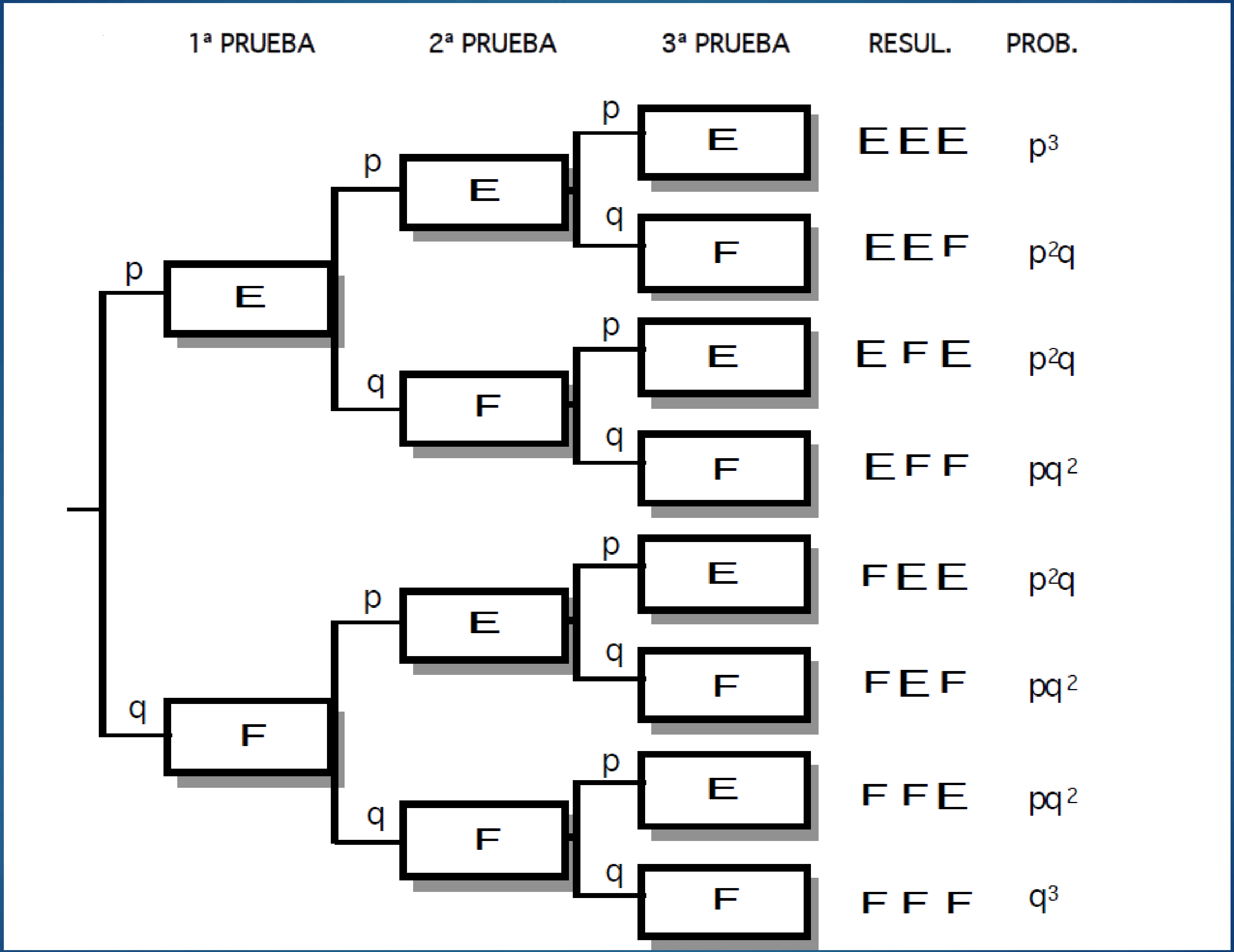
$$E(x) = \sum_{\forall x_i} x_i \, f(x_i) = p$$

$$Var = p(1-p)$$

- Si los resultados de las pruebas de tipo Bernoulli son independientes, con la probabilidad de éxito permaneciendo invariable en todas ellas, se origina el modelo **BINOMIAL**.

- Su función surge de considerar todas las combinaciones posibles de x éxitos en n pruebas con probabilidad del suceso en estudio constante e igual a p, siendo la probabilidad contraria q

- Para generalizar, si se consideran por ejemplo tres pruebas, n=3 :


1ª PRUEBA
2ª PRUEBA
3ª PRUEBA
RESUL.
PROB.
p
E
q
F
p
E
q
F
p
E
q
F
p
E
q
F
p
E
q
F
p
E
q
F
p
E
q
F
EEE p^3
EEF p^2q
EFE p^2q
EFF pq^2
FEE p^2q
FEF pq^2
FFE pq^2
FFF q^3

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^{x} (1 - p)^{n-x}$$

$$\text{coeficiente binomial} \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n - x)!}$$

- La función acumulativa:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall x_i \leq x} f(x_i)$$

Características

Binomial

$$E(X) = \sum_{x_i=0}^{n} x_i \, f(x_i) =$$

$$= 0.\frac{n!}{0!\,(n-0)!}p^0 q^n + 1.\frac{n!}{1!\,(n-1)!}p^1 q^{n-1} + \ldots + n.\frac{n!}{n!\,(n-n)!}p^n q^0 = = np(p+q)^{n-1}$$

$$E(x) = np$$

- La Varianza se puede obtener de forma sencilla por considerar a la variable aleatoria **X** como la suma de **n** variables independientes idénticamente distribuidas como Bernoulli, con esperanza **p** y varianza **p q**

$$Var(X) = npq$$

MODELO POISSON

- Si el número de pruebas **n** se incrementa y la probabilidad del evento de interés **p** se hace pequeña, con el número promedio de eventos en el intervalo total constante e igual a **p . n el modelo da lugar al modelo Poisson.**

- Considerando la función de probabilidad del modelo Binomial tomando en el límite sus parámetros:
- **$p \to 0$ y $n \to \infty$ y $\lambda = n \cdot p$**

$$\lambda = n\,p \quad \rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$$

$$f(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \frac{\lambda^{x}}{x!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \frac{n!}{(n-x)!\,n^{x}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{x}} \cong 1$$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!}$$

Características

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\ f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} =$$

$$= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{x(x-1)!}$$

$$si\ y = x - 1$$

$$luego \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!} = 1$$

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \lambda \left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^2 \lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{x(x-1)!} \right] =$$

$$= \lambda \left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{x \lambda^{x-1} e^{-\lambda}}{(x-1)!} \right] =$$

$$si\ y = x - 1$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(y+1) \lambda^y e^{-\lambda}}{y!} =$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{y\ \lambda^{y} e^{-\lambda}}{y!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y} e^{-\lambda}}{y!} =$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{y}}{y!} = 1$$

$$E(Y) + 1$$

$$luego:$$

$$E(X^2) = E(X) + 1 = \lambda + 1$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) =$$

$$\lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$Var(X) = \lambda$$

- Se vincula este modelo a aquellos eventos que ocurren en una unidad de tiempo. El período de tiempo en el que se realiza el análisis constituye una **secuencia de pruebas independientes cada una con distribución Binomial**.

- Si se tomara para el análisis un intervalo de tiempo igual al doble o al triple del inicial el parámetro es también igual al doble, al triple, etc., esto marca la dependencia del tiempo de análisis y por esto vinculado a los procesos estocásticos. Procesos estocásticos son aquellos en los que interesa la secuencia, en el tiempo, de ocurrencia de eventos.

- También se puede decir que un fenómeno para ser clasificado como proceso de Poisson debe cumplir con las siguientes condiciones:

- **a- Estacionariedad**: esto significa que la probabilidad de que ocurra un evento dado en un intervalo de tiempo muy pequeño Δt, es proporcional a ese tiempo e igual a $\lambda * \Delta t$.

- **b- No multiplicidad**: esto es que la probabilidad de que ocurran dos o más eventos en un intervalo de tiempo Δt es despreciable comparado con $\lambda * \Delta t$.

- **c- Independencia**: el número de eventos en algún intervalo de tiempo es independiente del número de eventos en algún otro intervalo de tiempo.

MODELO HIPERGEOMÉTRICO

- Surge cuando se realiza un **muestreo sin reposición** de una **población finita** que tiene sus elementos clasificados en dos categorías.
- Si **N** es el total de elementos de los cuales hay **k** de una categoría y **N-k** de otra, al realizar una extracción de **n** elementos, sin reposición, cada extracción que se realice posteriormente es dependiente del resultado de la extracción anterior con lo cual **va cambiando la probabilidad de éxito**.

- Para obtener la función de probabilidad se considera la definición de probabilidad: casos favorables sobre casos posibles:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

- Para obtener las características es posible decir que la variable aleatoria X es la suma de n variables xi como en el caso Binomial, pero con la diferencia que aquí las xi son dependientes.
- Para sumar las esperanzas no se necesita que las variables aleatorias sean independientes, entonces:

$$E(X) = E(x_1) + E(x_2) + \ldots.. + E(x_n)$$

- Cada E (xi) es la probabilidad de x en la i-ésima prueba: k/N , si no se sabe que ha ocurrido en pruebas anteriores o posteriores, entonces:

$$E(X) = n\left(\frac{k}{N}\right)$$

- La varianza en cambio no es aditiva para variables dependientes. Luego habrá un término que incluye un factor que proviene de considerar la variabilidad conjunta por el hecho de ser dependientes:

$$Var(X) = n * p * q * \left(\frac{N - n}{N - 1} \right)$$

- (N-n/ N-1) es un factor de corrección por muestreo sin reposición y que surge de considerar la varianza de n variables dependientes.

MODELOS PARA VARIABL ALEATORIA CONTINUA

- Modelo exponencial
- Modelo normal
- Modelo de valores extremos

MODELO EXPONENCIAL

- Este modelo se origina al considerar **el tiempo** hasta la primera ocurrencia de un evento que pueda ser considerado como proceso de Poisson.
- La variable aleatoria es ahora **tiempo transcurrido** hasta que se verifica la primera ocurrencia del tipo poisson.
- La probabilidad que T exceda algún valor particular **t** es lo mismo que decir que no se verificaron ocurrencias antes de este tiempo **t**.
- Es decir que la variable aleatoria N° de ocurrencias de tipo Poisson tome el valor 0 en ese período anterior a **t**
- Luego la siguiente expresión es válida:

$$P\,(T > t) = P(x = 0)$$

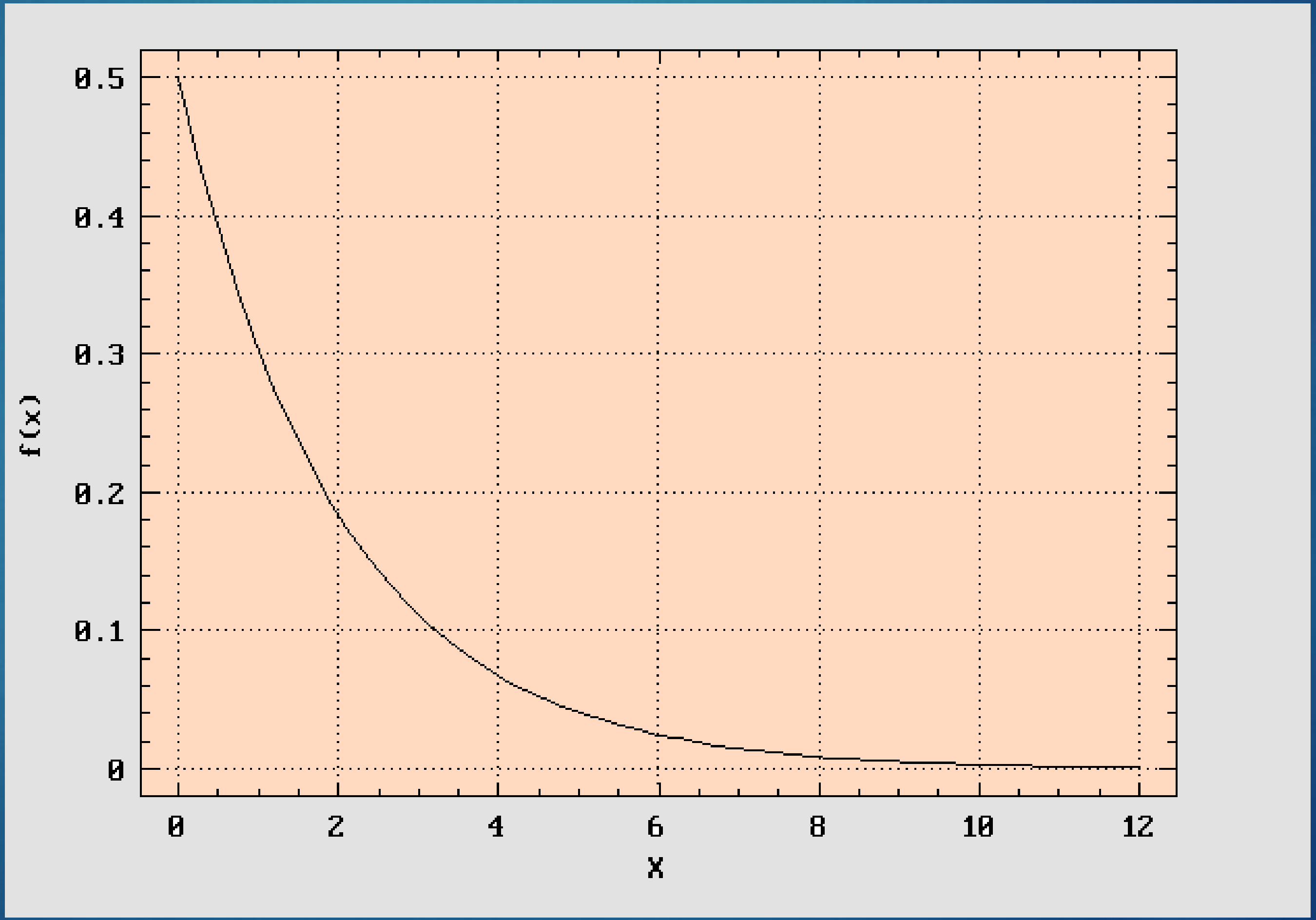
Notar que se incorpora el tiempo en el valor del parámetro para referir al período considerado e introducir la variable continua

$$P(x=0)=\frac{e^{-\lambda t}\lambda^0}{0!}=e^{-\lambda t}$$

$$\mathrm{F(t)} = \mathrm{P(T \leq t)} = 1 - \mathrm{P(T > t)} = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ con } t \geq 0$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

- Partiendo de un modelo para variable discreta se llegó a obtener un modelo para la nueva variable tiempo transcurrido hasta que ocurre un proceso o evento de tipo Poisson.
- La gráfica de la función de densidad es:



- **Se obtendrán también Esperanza y Varianza de la variable analizada con función del modelo exponencial:**

$$E(T) = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

$$\textit{Se resuelve tomando}$$

$$\mathrm{u} = \mathrm{t}\lambda \qquad \mathrm{du} = \lambda \mathrm{dt} \qquad \frac{\mathrm{du}}{\lambda} = dt$$

$$Var(T) = E(T^2) - E^2(T)$$

$$E(T^2) = \int_0^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

Se resuelve tomando

$$v = t^2 \qquad dv = 2tdt$$

$$Var(T) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

- **Una característica de los procesos de Poisson es que no tienen memoria. Esto significa que el comportamiento futuro es independiente de lo registrado en el presente o en el pasado.**

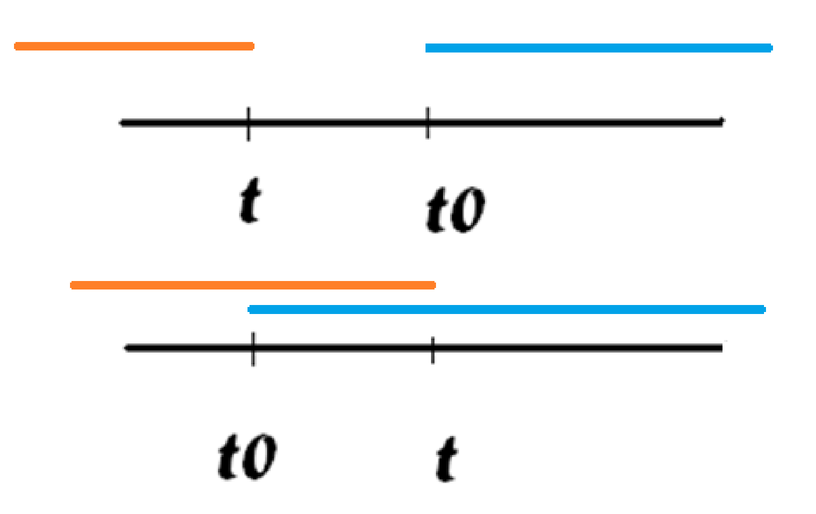
- Para comprender mejor este concepto se puede calcular la probabilidad condicional de que la variable tome un valor menor a un tiempo dado **t** dado que se sabe que fue mayor a un valor **t_0** que se toma como origen del tiempo en el que se comienza a considerar la ocurrencia o no de un evento tipo Poisson:

- **$P(T \leq t / T > t_0)$**

$$P(T \le t / T \ge t_0) = \frac{P(T \le t \cap T \ge t_0)}{P(T \ge t_0)}$$

para $\mathrm{t} < t_0$ el numerador es cero

para $\mathrm{t} \ge t_0$ es igual a $\mathrm{P}(t_0 \le T \le t)$



$$P(T \le t / T \ge t_0) = \frac{\mathrm{P}(t_0 \le T \le t)}{P(T \ge t_0)} =$$

$$= \frac{F(t) - F(t_0)}{1 - F(t_0)} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda t} - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})} = 1 - e^{-\lambda (t - t_0)}$$

$$P(T \le t / T \ge t_0) = 1 - e^{-\lambda T}$$

- Se verifica la independencia del origen que se considere, ya que la expresión obtenida vuelve a ser exponencial y con variable que vuelve a ser el intervalo de tiempo T

MODELO NORMAL

- Se lo conoce como **Modelo de las sumas.**
- En general la incertidumbre en algunas variables suele ser el resultado de efectos combinados de algunas causas que contribuyen pero que son difíciles de separar y observar.
- Se puede determinar un modelo para la variable resultante sin estudiar en detalle los efectos individuales, particularmente no es necesario conocer la distribución de las causas.

TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

- Es de gran utilidad y tiene mucho que ver con lo enunciado anteriormente.

Bajo condiciones generales, cuando el número de variables que intervienen en una suma que origina una variable dada, es cada vez más grande, la distribución de esta variable tiende a aproximarse al modelo Normal.

- Tiene una gran importancia y aplicación práctica ya que para poder aplicar su enunciado no es necesario conocer exactamente:

- - **las distribuciones marginales de cada variable que interviene en la suma**
- **- su número**
- **- su distribución conjunta**

- En muchos otros fenómenos la variación aleatoria se origina de un número de variaciones aditivas y este hecho hace que no sorprenda que se observe con frecuencia en la práctica que muchas variables tengan una distribución aproximadamente Normal.

- Este modelo tiene una función doble exponencial cuyos parámetros se pueden determinar estableciendo algunas condiciones, fundamentalmente que sea una función de probabilidad y luego adoptando el valor de la varianza como medida de dispersión.

$$f(x) = ke^{-c(x-m)^2} \quad , -\infty \leq x \leq \infty$$

- La función queda determinada completamente si se obtienen las constantes de su función.
- Debe cumplir con la condición de cierre para ser función de probabilidad por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\, e^{-c(x-\mu)^2}\, dx = 1$$

$$k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c(x-\mu)^2}\, dx = 1$$

$$\textit{llamando}\ \text{a}\ (x-\mu) = \text{y}, \quad \text{dx} = \text{dy},$$

$$k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c\, y^2}\, dy = 1$$

$$k = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}$$

- Para la otra constante se utiliza la expresión de la Varianza:

$$Var\ (x) = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\ e^{-c\,(x-\mu)^2}\, dx$$

- Resolviendo, luego:

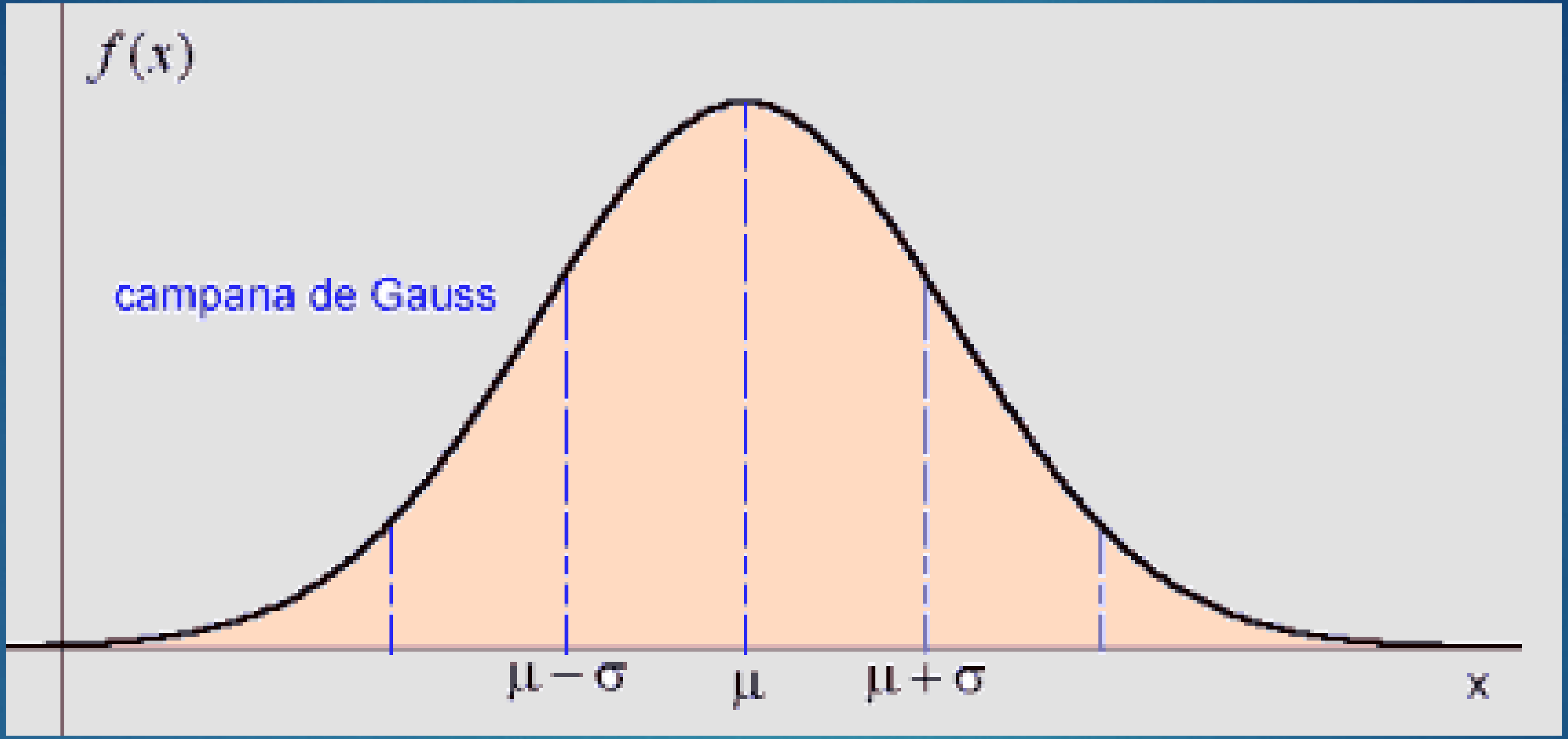
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2c} = \sigma^2$$

$$c = \frac{1}{2\sigma^2}$$

La función completa es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$-\infty \leq \mathrm{x} \leq \infty$$



f(x)
campana de Gauss
μ − σ
μ
μ + σ
x

CARACTERÍSTICAS

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \mu$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$siendo \quad \frac{x-\mu}{\sigma} = y \qquad \mathrm{x} = \sigma\,\mathrm{y} + \mu \qquad \mathrm{dx} = \sigma\,\mathrm{dy}$$

$$\mathrm{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\,\mathrm{y} + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{1}{2}y^2} \sigma\, dy = \mu$$

$$Var(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma}=y \qquad \mathrm{dy}=\frac{\mathrm{dx}}{\sigma}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^2 y^2 e^{-\frac{1}{2}y^2}\sigma\, dy=$$

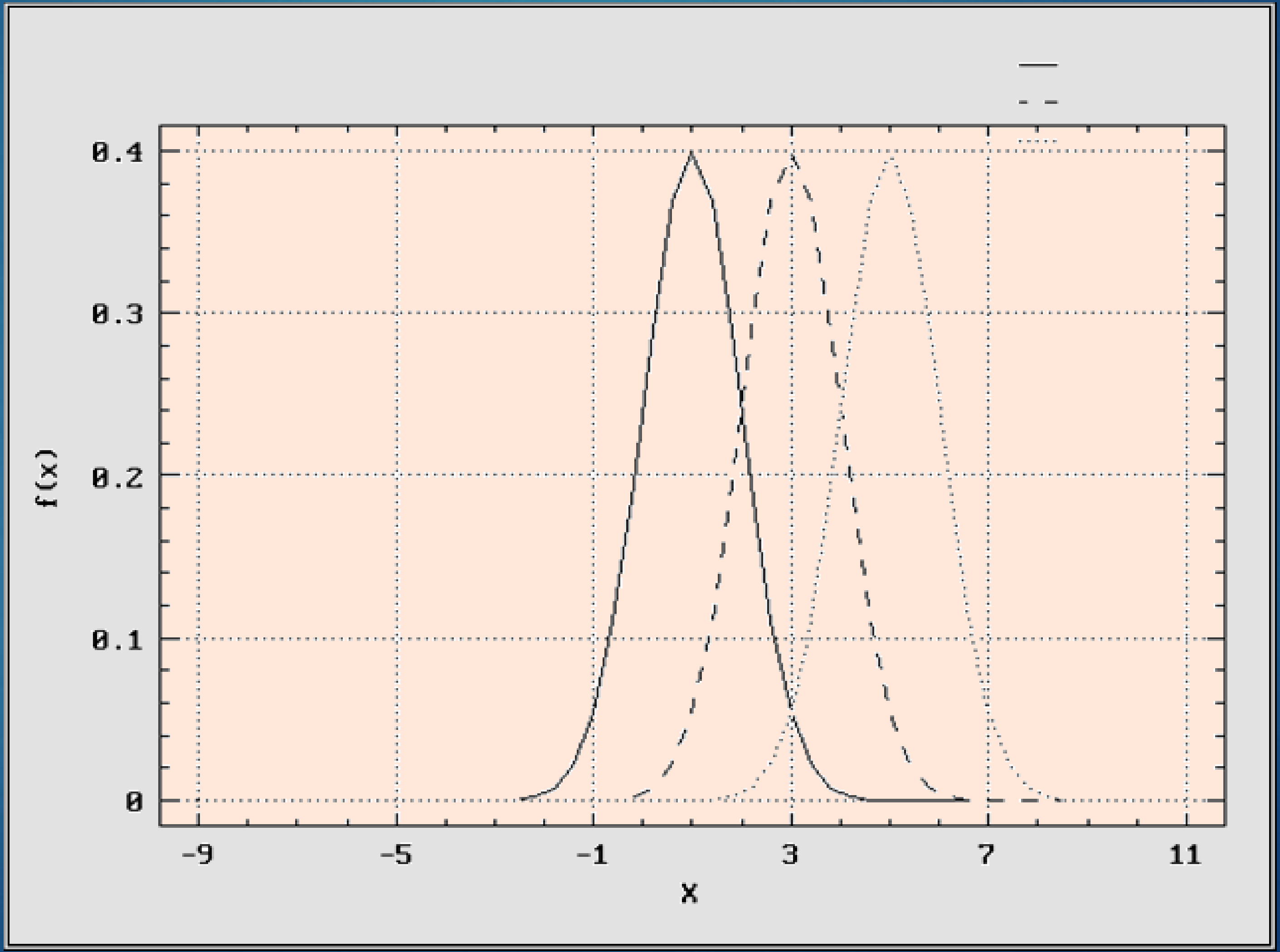
$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{1}{2}y^2} d\left(\frac{y^2}{2}\right)$$

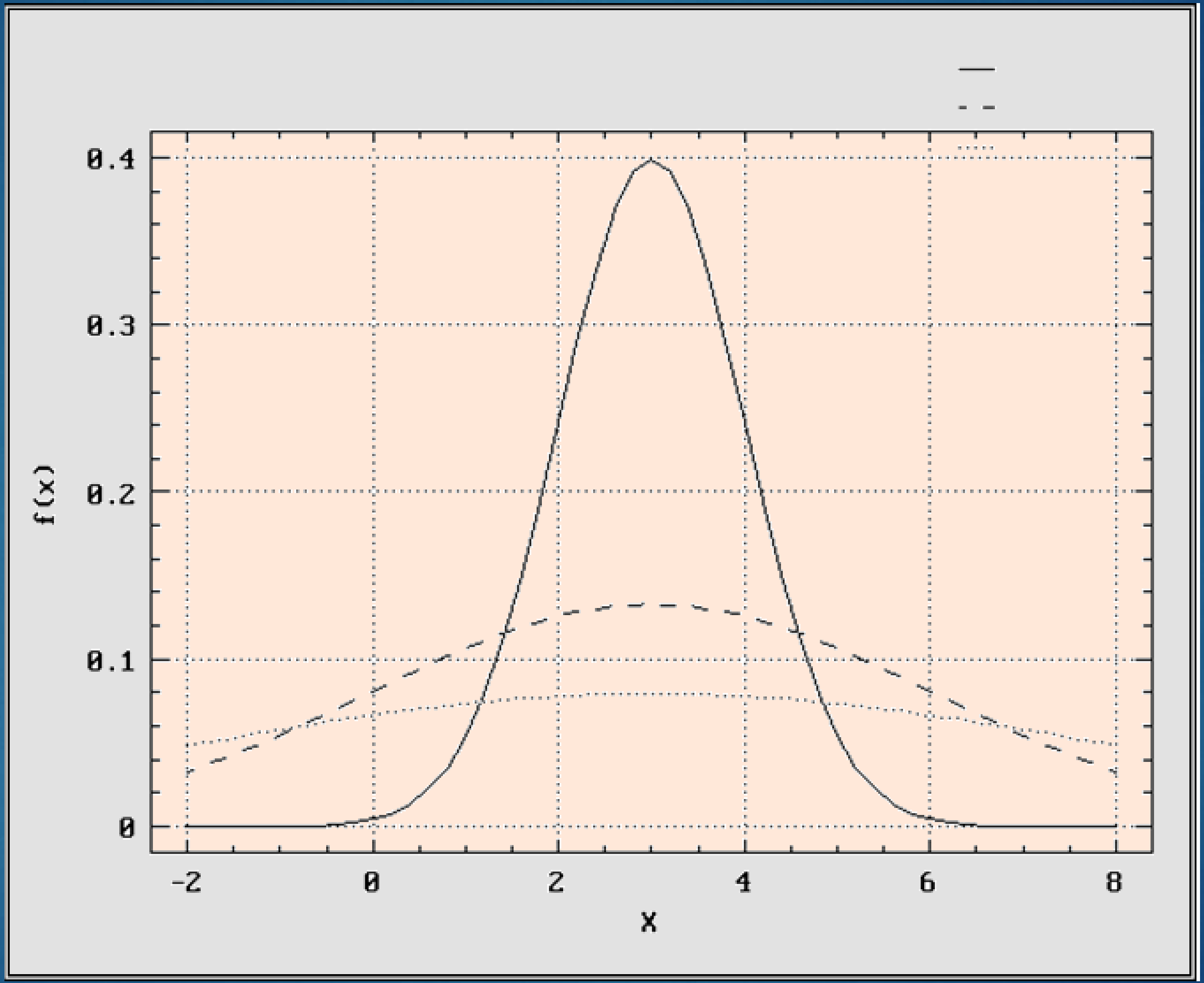
$$u = y \qquad \mathrm{dv} = e^{-\frac{1}{2}y^2} d\left(\frac{y^2}{2}\right) \Rightarrow v = -e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$Entonces, \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right\} = 1$$

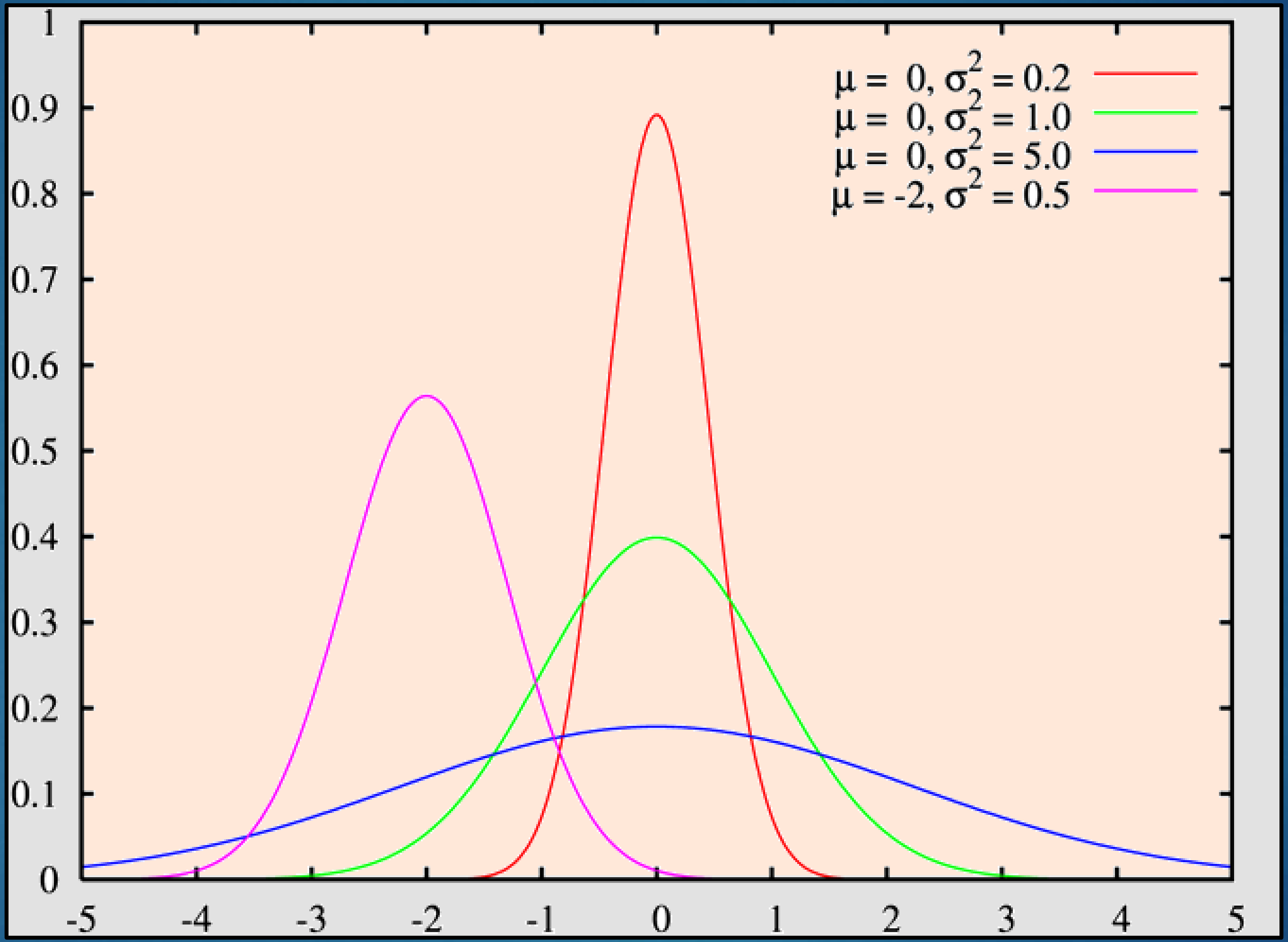
$$Var(X) = \sigma^2$$

FUNCIONES CON DISTINTAS CARACTERÍSTICAS





0.4
0.3
0.2
0.1
0
f(x)
-2
0
2
4
6
8
X



μ = 0, σ² = 0.2
μ = 0, σ² = 1.0
μ = 0, σ² = 5.0
μ = -2, σ² = 0.5
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Otras características

$$\mu_n = E(x-\mu)^n = \frac{n!}{2^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)!}\sigma^n \qquad \text{n} = 2, 4, \ldots$$

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$$

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4 = \frac{4!}{2^{\frac{4}{2}}\left(\frac{4}{2}\right)!}\sigma^4 = 3\sigma^4$$

$$K = 3$$

- Si se considera la suma de variables que son distribuidas Normales luego el resultado de esa suma es lógico que tenga también distribución Normal cuyos parámetros son los siguientes:

$$x_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$$
$$x_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$$

$$U = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\mathrm{E(U)} = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$

$$\sigma^2(U) = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$$

$$entonces \quad \mathrm{U} \sim \mathrm{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i ; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}\right)$$

Modelo Normal Estándar

Por necesidad de tabulación se generó este modelo. Se lo planteó con media $\mu=0$ y desvío $\sigma=1$, ya que para la gran combinación de posibles valores de los parámetros era imposible la tabulación.

También tiene un rol fundamental en la parte de Inferencia

$$z=(x-\mu)\ /\ \sigma$$

variable aleatoria estandarizada

$$E(z)=E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma}E(x-\mu)=\frac{1}{\sigma}\left[E(x)-E(\mu)\right]=\frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)$$

$$E(z)=0$$

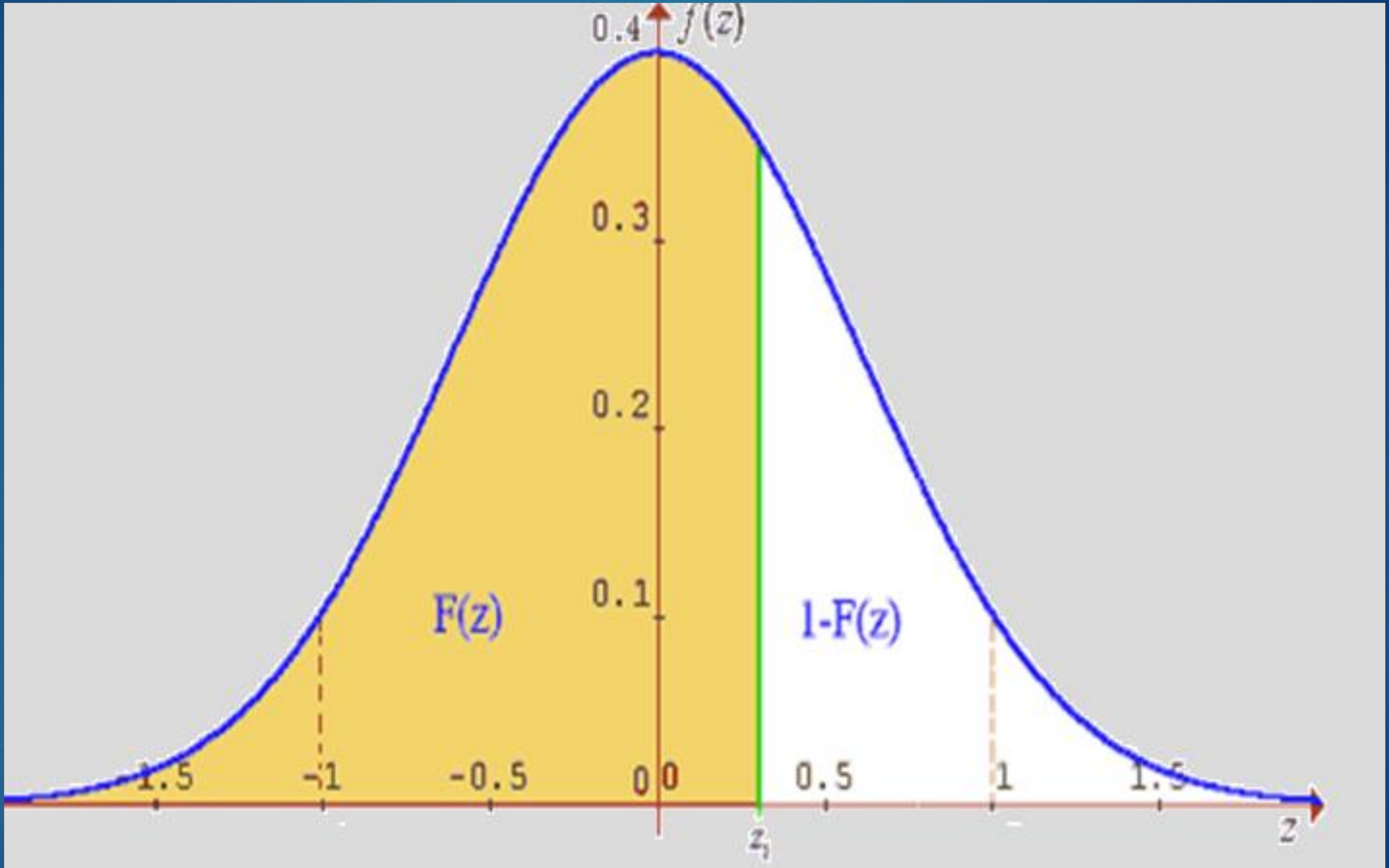
$$Var(z)=Var\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sigma^2}Var(x-\mu)=$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}Var(x)-0=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}$$

$$Var(\mu)=E\left[\mu-E(\mu)\right]^2=E(\mu-\mu)^2=0$$

$$Var(z)=1$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \qquad -\infty < z < +\infty$$


0.4
f(z)
0.3
0.2
0.1
F(z)
1-F(z)
-1.5
-1
-0.5
0
0
0.5
1
1.5
z_1
z

Tabla

z	0,00	0,01	0,02
0,0	0,5000	0,5040	0,5080
0,1	0,5398	0,5438	0,5478
0,2	0,5793	0,5832	0,5871
0,3	0,6179	0,6217	0,6255
0,4	0,6554	0,6591	0,6628
0,5	0,6915	0,6950	0,6985
0,6	0,7257	0,7291	0,7324
0,7	0,7580	0,7611	0,7642
0,8	0,7881	0,7910	0,7939
0,9	0,8159	0,8186	0,8212
1,0	0,8413	0,8438	0,8461
1,1	0,8643	0,8665	0,8686
1,2	0,8849	0,8869	0,8888
1,3	0,9032	0,9049	0,9066

MODELOS DE VALORES EXTREMOS

- En muchas situaciones prácticas especialmente en ingeniería, es de interés trabajar con el mayor o el menor valor de un número de variables aleatorias.
- Si la variable y es considerada el máximo de una serie de n variables aleatorias x_1 ... x_n es posible obtener series $\mathbf{y_t}$ que estarán compuestas por los máximos o mínimos.
- Es posible obtener una expresión para la probabilidad de que el máximo sea menor o igual que un valor dado.
- Si los valores de x son independientes, entonces:

$$F(y) = P(X_1 \le y)\,P(X_2 \le y) \ldots P(X_n \le y) =$$

$$= F_{x_1}(y)F_{x_2}(y) \ldots F_{x_n}(y)$$

- Si los xi son idénticamente distribuidos, es decir tienen la misma F(x), cuando n → ∞ se deriva el modelo buscado.
- De acuerdo a las características de la distribución inicial se originan tres tipos de modelos asintóticos de valores extremos

Modelo Tipo III - Weibull

- Surge cuando la distribución inicial está limitada en la dirección del valor extremo.
- La distribución de valores mínimos provenientes de distribuciones Log-Normal, Gamma pueden distribuirse como Modelo Tipo III.
- Es muy usado en distintas ciencias, ya que es común que las variables estén limitadas inferiormente por el cero; por lo tanto, es usado para el ajuste de valores mínimos.

- Este modelo se origina con las mismas consideraciones hechas para el Tipo I, a las cuales se les agrega las siguientes:
- -La distribución de los Xi está limitada superiormente por un valor **ω**.
- -La distribución de Xi es del siguiente tipo:

$$P(X \leq x) = 1 - c(\omega - x)^{k}$$

$$con \ \mathrm{x} \leq \omega, \mathrm{k} > 0$$

$$F(x) = e^{-\left(\frac{\omega - x}{\omega - \mu_0}\right)^k}, \quad \mathrm{x} < \omega$$

$$f(x) = \frac{k}{\omega - \mu_0}\left(\frac{\omega - x}{\omega - \mu_0}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{\omega - x}{\omega - \mu_0}\right)^k}$$

- Esta forma del modelo no es muy aplicada, quizá por el límite superior que presenta. Una transformación de la variable resulta en el conocido modelo de Weibull.
- Si se trabaja con el valor negativo de la variable z = -x, al estar x definida para valores menores que **ω**, z estará definida para valores mayores que **-ω**.
- **Al trabajar con los valores negativos de una serie y maximizarlos, se estará obtendiendo como extremo un valor mínimo, ya que el mayor valor de una serie negativa es el menor valor en valor absoluto.**

Llamando **-ω =ε** , y observando que las probabilidades de no excedencias (menor o igual) serán ahora de excedencias (mayor o igual), la función de probabilidad sería:

$$P(Z \geq z) = e^{-\left(\frac{z-\varepsilon}{\mu_0-\varepsilon}\right)^k}$$

parámetros de este modelo son μ_0, k y ε

$$F(Z)=P(Z\leq z)=1-e^{-\left(\frac{z-\varepsilon}{\mu_0-\varepsilon}\right)^k}$$

$$f(z)=\frac{k}{\mu_{0-}\varepsilon}\left(\frac{z-\varepsilon}{\mu_{0-}\varepsilon}\right)^{k-1}e^{-\left(\frac{z-\varepsilon}{\mu_{0-}\varepsilon}\right)^k}$$

parámetros de este modelo μ_0, k y ε

Características

$$E(x) = \mu = \varepsilon + (\mu_0 - \varepsilon)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

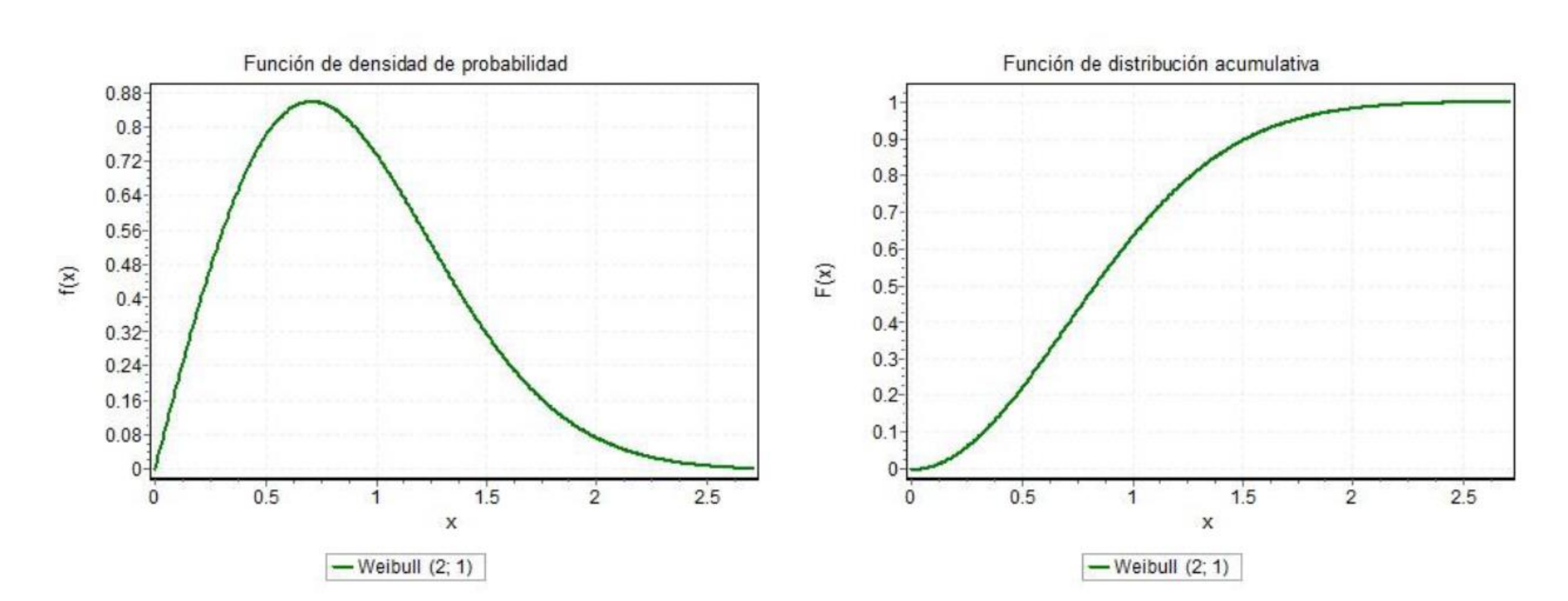
$$Var(x) = \sigma^2 = (\mu_0 - \varepsilon)^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]$$

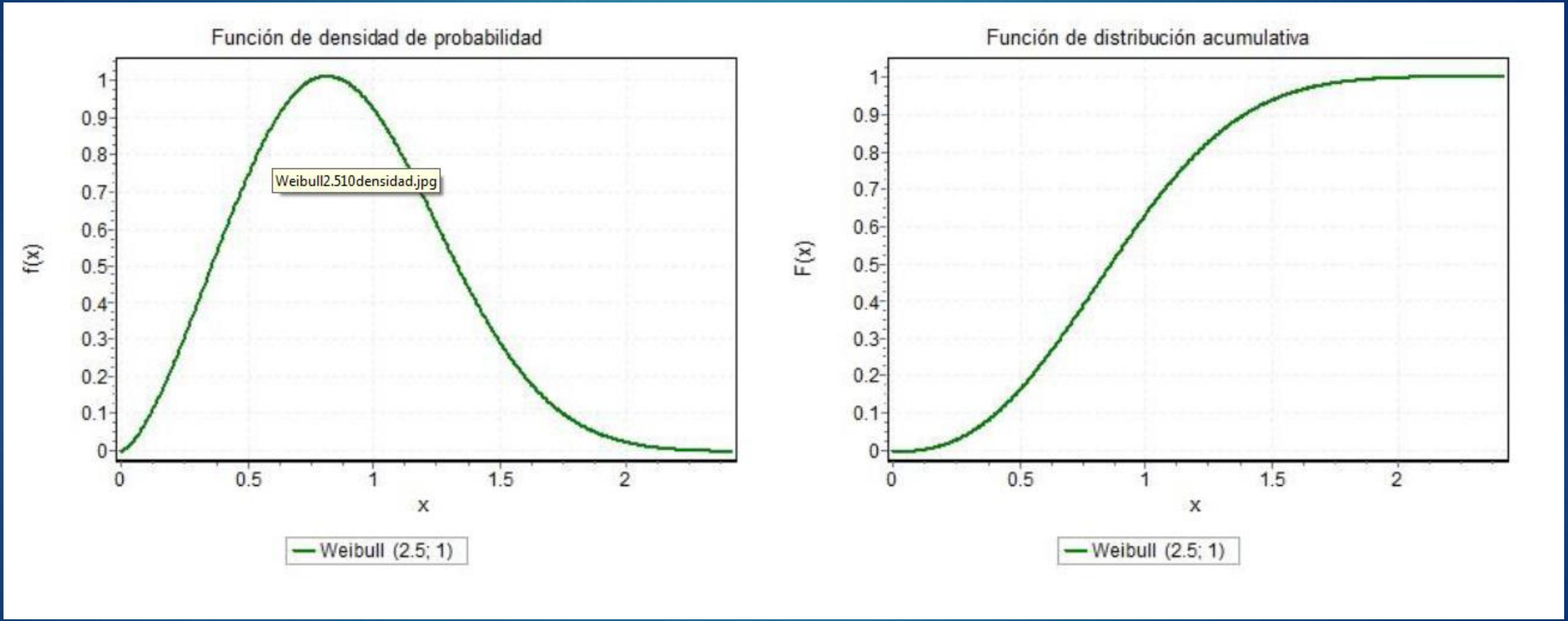
Generalmente es posible adoptar ε=0, lo cual suele no ser tan desacertado lo cual simplificaría las expresiones del modelo:

$$F(z) = 1 - e^{-\left(\frac{z}{\mu_0}\right)^k}$$

$$f(z) = \frac{k}{\mu_0}\left(\frac{z}{\mu_0}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{z}{\mu_0}\right)^k}$$

Gráficas


Función de densidad de probabilidad
f(x)
x
Weibull (2; 1)
Función de distribución acumulativa
F(x)
x
Weibull (2; 1)


Función de densidad de probabilidad
f(x)
x
Weibull2.510densidad.jpg
Weibull (2.5; 1)
Función de distribución acumulativa
F(x)
x
Weibull (2.5; 1)

RESOLVEMOS

- El departamento de servicio al cliente de una empresa ha estimado que 0.5% de quienes se comunican no es atendido de forma inmediata.
- Si de las 2000 personas que se comunicaron en un día dado (por ejemplo hoy), interesa saber que probabilidad hay de que por lo menos 5 no hayan sido atendido inmediatamente.

- El número de visitas a un sitio web puede considerarse que sigue un proceso de Poisson con una razón de tres por minuto. Interesa determinar la probabilidad de que transcurra más de un minuto sin recibir una visita.
- Si transcurren dos minutos sin una visita, ¿cuál es la probabilidad que se dé una visita en el siguiente minuto?

SEGUIMOS