ÁLGEBRA LINEAL

AÑO 2020

Ejercitación Complementaria N°5
Espacios Vectoriales Asociados a una Matriz

1. Determine los cuatro espacios vectoriales asociados a la matriz y la dimensión de cada uno de ellos:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Determinamos el espacio nulo de A: ν_A

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 3x - y + z = 0 \\ 3x + z = y \end{array}$$

$$\nu_A = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, y = 3x + z\} = \{(x, 3x+z, z) \text{ con } x, z \in R\} = gen\{(1,3,0),(0,1,1)\} \therefore \nu(A) = 2$$

- Determinamos ahora el espacio Imagen de A el cual es igual al Espacio Columna de A: $\text{Imagen } A = Col\ A$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & x \\ -6 & 2 & -2 & y \\ -3 & 1 & -1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & y+2x \\ 0 & 0 & 0 & z+x \end{array}\right)$$

El sistema anterior tiene solución si:

$$y + 2x = 0 \to y = -2x$$
$$z + x = 0 \to z = -x$$

$$\text{Imagen } A = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, y = -2x,\ z = -x\} = \{(x, -2y, -x) \text{ con } x \in R\} = gen\{(1,-2,-1)\}$$

$C_A = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, y = -2x,\ z = -x\}$

Entonces: $\rho(A) = \dim CA = 1$

2. Determine si el siguiente sistema es compatible o no. En el caso de ser compatible determinado verifique que el vector de términos independientes es combinación de las columnas de la matriz. En el caso de ser compatible indeterminado elija una solución particular y verifique que el vector de términos independientes es combinación de las columnas de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como $Rango\ de\ A = Rango\ de\ [A/b]$ el sistema es compatible indeterminado. Buscamos el conjunto solución:

$$5x_2 - 3x_3 = -1 \rightarrow x_2 = \frac{-1}{5} + \frac{3}{5}x_3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1 \rightarrow x_1 = x_2 - x_3 + 1 = \frac{-1}{5} + \frac{3}{5}x_3 - x_3 + 1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}x_3$$

$$S = \left\{ \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x_3, \frac{-1}{5} + \frac{3}{5}x_3, x_3 \right) \text{con } x_3 \in R \right\}$$

Elijamos una solución particular: $x_3 = 1$. Entonces $x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{2}{5}$

Se verifica que :

$$\frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Determine si cada afirmación es verdadera o falsa. En todos los casos justifique:

a) Si A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ entonces ν(A)=1.

b) Si M = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, el vector $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in N_M$.

c) La nulidad de la matriz M del ítem b) es 2.

d) Si A es una matriz de 5x4 y la nulidad de su transpuesta es 3 entonces ν(A)=2.

e) Si ν(A)+ρ(A) = 4con A una matriz de 4x4 entonces A es invertible.

f) El espacio columna de la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 6 \end{pmatrix}$ es un plano del espacio.

a) Verdadero. Se puede demostrar calculando el espacio nulo de A. Otro modo: aplicando Gauss a la matriz A resulta la matriz equivalentes por renglones:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como B tiene 3 pivotes resulta que ρ(B)=3 y ν(B)=cant. de columnas – ρ(B) = 4-3 = 1. Ya que A es equivalente por renglones con B también ρ(A)=3 y ν(A)=1.

b) Falso, el vector v no pertenece al espacio nulo de M pues N_M es un subespacio de R^4. No es posible efectuar el producto Mv pues M es de 3x4 y v es de 3x1.

c) Debemos calcular el espacio nulo de M para conocer la dimensión de dicho espacio, que es la nulidad de M.

Aplicando operaciones elementales a la matriz M resulta la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente a la forma escalonada reducida es:

$$x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 = 0$$
$$x_3 + x_4 = 0$$

Seleccionando a x_2 y x_4 como variables libres resulta que

$$x_1 = -2x_2 - 3\,x_4$$
$$x_3 = -x_4$$

Por lo tanto el espacio solución del sistema de ecuaciones M**x**=0 consta de todos los vectores **x** de la forma:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_4 \\ 0 \\ x_4 \\ -x_4 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el espacio nulo de M está generado por los dos vectores de R^4 que aparecen en la última expresión de la igualdad anterior. Es decir:

$$N_M = gen\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Como además $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ es un conjunto linealmente independiente pues consta de dos vectores que no son múltiplos, entonces $\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ es una base de N_M.

Por lo tanto dim $N_M = \nu(M) = 2$. Se concluye que la afirmación es verdadera.

d) (Primero razona, aplica propiedades, haz cálculos, etc. Luego sabrás si la respuesta es verdadera o no)

Como A es 5x4 entonces A^t es de 4x5. Se sabe que para toda matriz la nulidad más el rango es igual a la cantidad de columnas. Entonces

$$\nu(A^t)+\rho(A^t) = 5 \qquad (*)$$
$$\nu(A)+\rho(A) = 4 \qquad (**)$$

Reemplazando en (*) que $\nu(A^t) = 3$ resulta $\rho(A^t) = 2$.

Se sabe, además, que $\rho(A^t) = \rho(A)$. Por lo tanto reemplazando que $\rho(A) = 3$ en (**) resulta $\nu(A)+ 3 = 4 \Rightarrow \nu(A)=1$.

La afirmación, entonces, es falsa.

e) Falso. Existen diferentes pares de números naturales que suman 4. Entonces las distintas posibilidades que verifican la igualdad $\nu(A)+\rho(A) = 4$ son:

$$\nu(A) = 0 \text{ y } \rho(A) = 4$$
$$\nu(A) = 1 \text{ y } \rho(A) = 3$$
$$\nu(A) = 2 \text{ y } \rho(A) = 2$$
$$\nu(A) = 4 \text{ y } \rho(A) = 0$$

Y sólo en el primer caso puede asegurarse que A es una matriz invertible aplicando los teoremas

$$A \text{ de nxn es invertible } \Leftrightarrow \nu(A)=0$$
$$A \text{ de nxn es invertible } \Leftrightarrow \rho(A)=0$$

f) Como A es una matriz de 3x4 entonces CA es un subespacio de R^3. Por lo tanto puede ser el conjunto que contiene sólo al vector nulo de R^3, una recta o un plano que pasa por el (0, 0, 0) o R^3. Apliquemos operaciones elementales a la matriz dada $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & 1\\-2 & -5 & 7 & 3\\3 & 7 & -8 & 6\end{pmatrix}$

$R_2 \to R_2 + R_1 \qquad R_3 \to R_3 - 3/2\, R_1 \qquad \begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & 1\\0 & -1 & 5 & 4\\0 & 1 & -5 & 9/2\end{pmatrix}$

$R_3 \to R_3 + R_2 \qquad \begin{pmatrix}2 & 4 & -2 & 1\\0 & -1 & 5 & 4\\0 & 0 & 0 & 17/2\end{pmatrix}$

Las columnas que contienen los tres pivotes forman una base de ésta última matriz. Pero las columnas <u>correspondientes</u> de A son las que forman una base para C_A. Entonces una base para C_A es $B=\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-5\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$. Como dim $C_A=3$ entonces $C_A = R^3$. La afirmación es falsa.