Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

Práctica N° 1: ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

1) Determinar en los siguientes conjuntos, el vector nulo con la operacion suma habitual entre ellos, donde $a, b, c, d \in R$:

a) $R^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\}$

b) $M_{2x2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$

c) $P_2 = \{p(x) = ax^2 + bx + c\}$

2) Se sabe que R^2 y R^3 son espacios vectoriales con las operaciones habituales de suma y multiplicación por un escalar. Determinar en cada ítem si R^2 y R^3, con las nuevas operaciones, son espacios vectoriales o no. Si alguno no lo es, mencionar uno de los axiomas que no se cumplen:

a) $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$
$k \otimes (x, y) = (2kx, 2ky)$

b) $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$
$k \otimes (x, y) = (kx, ky)$

c) $(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
$k \otimes (x, y, z) = (x, 1, z)$

3) En R^2 se define la suma como $(a, b) \oplus (c.d) = (ac, bd)$ y la multiplicación por un escalar en la forma ordinaria:

a) Demostrar que R^2 es cerrado bajo esta adición y multiplicación por un escalar.

b) ¿Es R^2, con dichas operaciones, un espacio vectorial? Justificar.

c) ¿Cuál es el vector cero en esta suma?

d) Si $(a, b) \neq (0, 0)$, encontrar el inverso aditivo de (a, b).

Observación: Este ejercicio es un ejemplo de que, dependiendo de la operación suma definida, el vector cero puede ser distinto del tradicionalmente considerado

4) En los siguientes ítems determinar si el subconjunto H dado del espacio vectorial V, con la suma y el producto usual, es un subespacio de V:

a) $V = R^3; H = \{(s, 3s, 2s) ; \mathbf{s} \in R\}$

b) $V = M_{2x2}; H = \left\{ A \in M_{2x2}/A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a+b \end{bmatrix}; a, b \in R \right\}$

c) $V = R^2; H = \{(x, y)/y \geq 0\}$

d) $V = R^3; H =$ es el eje y.

e) $V = M_{2x2}; H = \left\{ A \in M_{2x2}/A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{bmatrix}; \alpha, \beta \in R \right\}$

f) $V = M_{nxn}; H = \{S \in M_{nxn}/S$ es simétrica$\}$

g) $V = P_4; H = \{p(x) \in P_4/p(10) = 1\}$

h) $V = P_4; H = \{p(x) \in P_4/$ grado de $p(x) = 4$

i) $H = \left\{(x, y, z)/\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}\right\}$

5) Razonar y resolver los siguientes ítems:

a) Dada la matriz A de tamaño $2x2$, probar que las matrices de M_{2x2} que conmutan con ella en el producto (es decir, el conjunto de las matrices B de $2x2$ tales que $AB = BA$) constituyen un subespacio vectorial de M_{2x2}.

b) Sea $\mathbf{u}$ un vector no nulo de R^3. Argumentar porqué el conjunto de los vectores $\mathbf{w}$ de R^3 que son perpendiculares a $\mathbf{u}$, junto con el vector $(0, 0, 0)$, son un subespacio de R^3.

c) Dada A una matriz de orden n. Demostrar que el conjunto $R = \{\mathbf{x} \in R^n \ / \ A\mathbf{x} = 0\}$ es un subespacio de R^n.

6) Sea F el espacio vectorial de funciones de R en R y sea $I = \{f(x) \in F / f(x) = f(-x)\}$ el conjunto de las funciones pares.

a) Probar que el conjunto I es subespacio de F.

b) Y si I es el conjunto de las funciones impares, ¿es subespacio de F?

7) Sea H un subespacio de R^n, con $n \in N$, y A una matriz invertible de nxn. Demostrar que el conjunto $J = A\mathbf{x} \ / \ \mathbf{x} \in H$ es también un subespacio de R^n.

8) Considerar $M = \left\{(a, a^2, a^3)\right\}$

a) ¿El elemento nulo de R^3 pertenece a M?

b) ¿Es M un subespacio de R^3?

Observación: Este ejercicio es un ejemplo de que la presencia del vector nulo en un subconjunto de un espacio vectorial no implica que dicho subconjunto sea un subespacio. Es decir, la presencia del vector nulo de V (O_V) en un subconjunto de V es condición necesaria pero no suficiente para asegurar que éste último sea un subespacio de V.

9) Dados A y B, determinar si A, B y $A \cup B$ son subespacios de R^3:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 3y - z = 0 \right\} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + 2y + 5z = 0 \right\}$$

10) Si $H_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & -x \\ y & z \end{bmatrix}; x, y, z \in R \right\}$ y $H_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -a & c \end{bmatrix}; a, b, c \in R \right\}$:

a) Definir $H_1 \cap H_2$.

b) ¿Es $H_1 \cap H_2$ un subespacio de M_{2x2}? Justificar, según corresponda, enunciando propiedades o mostrando un contraejemplo.

c) ¿Es $H_1 \cup H_2$ un subespacio de M_{2x2}? Justificar, según corresponda, enunciando propiedades o mostrando un contraejemplo.

11) Dados S_1 y S_2, definir $S_1 \cup S_2$ y demostrar o justificar si es o no un subespacio de P_3.

$$S_1 = \{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \ / \ a_2 = a_3\}$$

$$S_2 = \{p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \ / \ a_3 = 0\}$$

12) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta:

a) El conjunto de funciones $I = \{f(x) = ax + b / a, b \in R; b > 0\}$ es un subespacio de las funciones continuas de R en R.

b) Si V es un espacio vectorial, $H \subset V$ y $0_V \in H$, entonces H es un subespacio de V.

c) R^2 es subespacio de R^3.

13) Sea el espacio vectorial $A = \{f/f$ es una función con dominio en $[a,b]; a,b \in R; a < b\}$:

a) Denotando $C[a,b]$ al conjunto de las funciones continuas en $[a,b]$. ¿Es éste un subespacio de A con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar usuales?

b) Sea $D[a,b]$ el conjunto de las funciones derivables con dominio en $[a,b]$. ¿Es éste un subespacio vectorial de $C[a,b]$? Justificar.

Observación: en este ejercicio encontrarás tres espacios vectoriales incluidos, es decir, que $D[a,b] \subset C[a,b] \subset A$ (el símbolo $\subset$ se lee como incluido o contenido").

14) Determinar para que valor de k, el conjunto S es un subespacio de $C[a,b]$. Justificar.

$$S = \left\{ f \in C[a,b] \ / \int_a^b f(x)\, dx = k \right\}$$

15) Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto U de un espacio vectorial V sea un subespacio, es que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ se encuentre en U para todo par de escalares a y b, y todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en U.

16) Determinar si cada conjunto es o no subespacio vectorial de R^2:

a) $R = \{(a+b, a+b+2) : a,b \in R\}$

b) $T = \{(a+1, a+1) : a \in R\}$

17) En el espacio vectorial de las matrices M_{2x2} con términos reales, inventa un ejemplo de subespacio (que no hayas visto en otro lugar).

18) ¿Para qué valor de k el conjunto $L = \{(x_1, x_2, \ldots, xn) \in R^n \ / \ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k\}$ es un subespacio de R^n?

19) Determinar si S, T y $S \cap T$ son subespacios de R^4:

$$S = \left\{ \begin{array}{c} x + y - z - t = 0 \\ 2x + 2y - z - t = 0 \end{array} \right\} \qquad T = \left\{ \begin{array}{c} x - y = 0 \\ z - t = 0 \end{array} \right\}$$

20) Dados $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \in M_{2x2} : a,b \in R \right\}$ y $B = \left\{ \begin{bmatrix} d & 0 \\ c & d+c \end{bmatrix} \in M_{2x2} : c,d \in R \right\}$:

a) Encontrar la intersección de los subespacios vectoriales A y B.

b) ¿Es $A \cap B$ un subespacio de M_{2x2}?