Práctica: Larson - Sección 3.3

Trazado de curvas

Dra. Penélope Cordero

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

¿Qué ejercicios de práctica debo hacer?

✓ Ejercicios Propuestos:

- **Pág. 177**: 3 al 14 /// 16 al 40.
- **Pág. 185**: 9 al 15 /// 21 al 26 /// 28 al 36.

✓ En este video:

- Ejercicio 10.
- Ejercicio 16.
- Ejercicio 40.

Criterio para funciones crecientes y decrecientes

Teorema 3.5 (pag. 170)

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

1. Si $f'(x) > 0$ para toda x en $(a, b) \Rightarrow f$ es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para toda x en $(a, b) \Rightarrow f$ es decreciente en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) = 0$ para toda x en $(a, b) \Rightarrow f$ es constante en $[a, b]$.

Identifique los intervalos abiertos en los que la función es creciente o decreciente.

10. $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2}{x+1}}$

Solución:

☑ Veamos si y satisface las hipótesis del Teorema 3.5:

✓ y está definida en $\mathbb{R} - \{-1\}$ y es continua en $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$.

✓ y es derivable en $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty) \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.

☑ Determinamos los números críticos de y.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x = 0 \quad & \text{Igualación a 0 de } y' \\ & & x = 0,\ -2 \quad & \text{Números críticos} \end{aligned}.$$

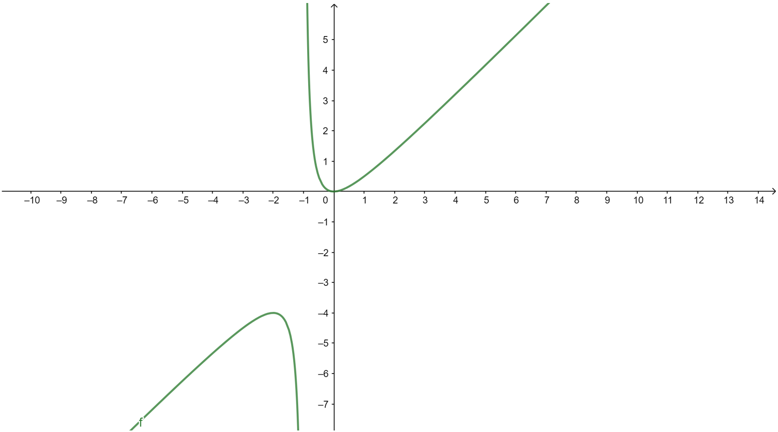
Sigue ↓

Analizamos el signo de $y' = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ en los intervalos determinados por:
- los números críticos ($x=-2$ y $x=0$),
- los valores para los cuales y no está definida ($x=-1$).

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
Valor de prueba	$x=-3$	$x=-\frac{3}{2}$	$x=-\frac{1}{2}$	$x=1$
Signo de y'	$f'(-3)=\frac{3}{4}>0$	$f'(-\frac{3}{2})=-3<0$	$f'(-\frac{1}{2})=-3<0$	$f'(1)=\frac{3}{4}>0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

Sigue ↓

Comprobamos los resultados obtenidos ingresando la función en la calculadora gráfica de GeoGebra:



Identifique los intervalos abiertos en los que la función es creciente o decreciente.

16. $\boldsymbol{f(x) = \cos^2 x - \cos x, \quad 0 < x < 2\pi.}$

Solución:

☑ Veamos si f satisface las hipótesis del Teorema 3.5:

✓ f está definida en toda la recta real y es continua.

✓ f es derivable $\quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sin x(1 - 2\cos x)$.

☑ Determinamos los números críticos de f:

$$
\begin{array}{llll}
f'(x) = \sin x(1 - 2\cos x) = 0 & \Leftrightarrow & \sin x = 0 \text{ o } \cos x = \frac{1}{2} & \text{Igualación a 0 de } f' \\
& \Leftrightarrow & x = 0, \pi, 2\pi \text{ o } x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi & 0 < x < 2\pi \\
& & x = \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi & \text{Números críticos}
\end{array}
$$

Sigue ↓

Ejercicio 16 (Pag. 177)

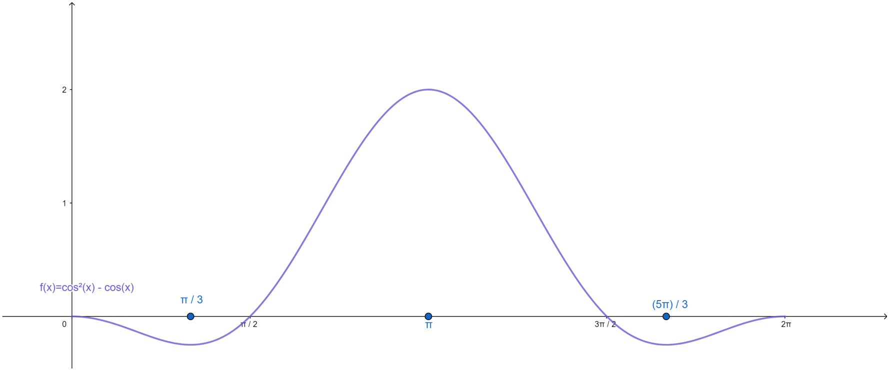
Analizamos el signo de $f'(x) = \sin x(1 - 2\cos x)$ en los intervalos determinados por los números críticos ($x = \frac{\pi}{3}$, $x = \pi$ y $x = \frac{5}{3}\pi$)

Intervalo	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$	$\left(\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right)$
Valor de prueba	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{2}$	$x = \frac{3}{2}\pi$	$x = \frac{7}{4}\pi$
Signo de $f'(x)$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) =< 0$	$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$	$f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) < 0$	$f'\left(\frac{7}{4}\pi\right) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Sigue ↓

Ejercicio 16 (Pag. 177)

Comprobamos los resultados obtenidos ingresando la función en la calculadora gráfica de GeoGebra:



Criterio de la primera derivada

Teorema 3.6 (pag. 172)

Sea c un número crítico de la función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en este intervalo, salvo posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede ser clasificada como sigue:

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo ni un máximo relativo.

Encuentre los intervalos abiertos en los que la función es creciente o decreciente y localice todos los extremos relativos.

40. $\boldsymbol{f(x) = (x-1)e^x}$

Solución:

☑ Notar que f es continua y derivable en toda la recta real.

☑ Determinamos los números críticos de f.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-1)e^x \\
f'(x) &= xe^x = 0 && \text{Igualación a 0 de } f'(x) \quad . \\
x &= 0 && \text{Números críticos}
\end{aligned}
$$

Sigue ↓

Analizamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por los números críticos ($x = 0$), y aplicamos el *criterio para funciones crecientes y decrecientes*:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Valor de prueba	$x = -1$	$x = 1$
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = -e^{-1} < 0$	$f'(1) = e > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente

Teniendo en cuenta el *criterio de la primera derivada*, como $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $c = 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(0, -1)$.

Sigue ↓

Ejercicio 40 (Pag. 177)

Use una aplicación gráfica para confirmar los resultados: