COMPLETAR EL CUADRADO

Irina Paucar Coradini – Victoria Carboni

Adscriptas a las cátedras de Cálculo I y II

El método de completamiento de cuadrados es una herramienta algebraica que permite convertir una expresión cuadrática[1],

$$x^2 + bx = c \qquad (1)$$

en otra equivalente de la forma,

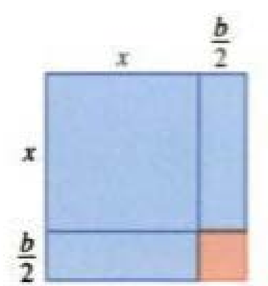
$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4} \qquad (2)$$

Para su aplicación, se debe sumar a ambos miembros de la expresión (1) el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ de forma de mantener la igualdad, resultando:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad (3)$$

Posteriormente, se factoriza el lado izquierdo obteniéndose la ecuación (2).

Geométricamente, este proceso se visualiza a través del siguiente gráfico,



En él, el área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Para completar el área total del cuadrado, simplemente se debe sumar al mismo un cuadrado pequeño de área $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, el cual se muestra en rojo. Se obtiene así el lado izquierdo de la ecuación (3).

[1] ***Observación.*** Si la ecuación cuadrática tiene el coeficiente principal distinto de 1, se saca el mismo como factor común y el completamiento de cuadrados se realiza dentro del paréntesis repitiendo el procedimiento antes detallado.

Esta herramienta se utiliza en geometría analítica para expresar, por ejemplo, las ecuaciones correspondientes a secciones cónicas (círculo, parábola, elipse, hipérbola) en su forma canónica, de utilidad para la identificación de sus elementos distinguidos.

A continuación, se presentan 2 ejemplos,

Ejemplo 1. Coeficiente principal igual a 1

$$x^2 - 8x + 13 = 0$$

$$x^2 - 8x = -13$$

Se pasa el término independiente al lado derecho de la ecuación

$$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$$

Se completa el cuadrado: se suma a ambos miembros $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$

$$(x-4)^2 = 3$$

Cuadrado perfecto

Ejemplo 2. Coeficiente principal distinto a 1

$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

$$3x^2 - 12x = -6$$

Se pasa el término independiente al lado derecho de la ecuación

$$3(x^2 - 4x) = -6$$

Se extrae como factor común el coeficiente principal [2]

$$3(x^2 - 4x + 4 - 4) = -6$$

Se completa el cuadrado dentro del paréntesis, sumando y restando $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$

$$3(x^2 - 4x + 4) - 12 = -6$$

$$3(x-2)^2 = -6 + 12$$

Por trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo

$$(x-2)^2 = 2$$

[2] ***Nota***. Una forma análoga para resolver el *ejemplo 2* es dividir la expresión por el coeficiente principal, de forma que el mismo sea igual a 1 y luego se procede con el método análogamente al *ejemplo 1*.