TEORIA PARCIAL 1

FUNCIONES VECTORIALES

1) ¿Qué entiende por funciones vectoriales y cómo define su dominio?
Una función vectorial sobre un dominio D es una regla que asigna un vector en el espacio a cada elemento de D. Los dominios son intervalos de números reales que producen una curva en el espacio. El vector $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP} = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} + h(t)\vec{k}$ define a $\vec{r}$ como una función vectorial de variable real t en el intervalo I, con $t \in I$.

2) Defina límite y continuidad de una función vectorial.
Límite: Sea $\vec{r}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} + h(t)\vec{k}$ una función vectorial y $\vec{L}$ un vector. Decimos que $\vec{r}$ tiene límite $\vec{L}$ cuando t tiende a t_0 y escribimos $\lim_{t\to t_0} \vec{r}\,(t) = \vec{L}$ si para todo número $\epsilon > 0$, existe un correspondiente número $\delta > 0$ tal que para toda t $0 < |t - t_0| < \delta \ \rightarrow \left|\vec{r}(t) - \vec{L}\right| < \epsilon$.
Si $\vec{L} = L_1\vec{\imath} + L_2\vec{\jmath} + L_3\vec{k}$, entonces $\lim_{t\to t_0} \vec{r}\,(t) = \vec{L}$ precisamente cuando $\lim_{t\to t_0} f\,(t) = L_1$, $\lim_{t\to t_0} g\,(t) = L_2$ y $\lim_{t\to t_0} h\,(t) = L_3$
Continuidad: Una función vectorial $\vec{r}(t)$ es continua en un punto $t = t_0$ de su dominio si $\lim_{t\to t_0} \vec{r}\,(t) = \vec{r}(t_0)$. La función es continua si lo es en cada punto de su dominio.
De la ecuación $\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t\to t_0} f\,(t)\right)\vec{\imath} + \left(\lim_{t\to t_0} g\,(t)\right)\vec{\jmath} + \left(\lim_{t\to t_0} h\,(t)\right)\vec{k}$, vemos que $\vec{r}(t)$ es continua en $t = t_0$ si, y sólo si, cada una de sus funciones componentes es continua en tal punto.

3) Demuestre, recurriendo a las componentes, que si f es una función escalar diferenciable de t y si **u** es una función vectorial diferenciable de t, entonces (f.**u**)´(t) = f(t). **u**´(t) + f´(t) . **u**(t)
$$(f\cdot\vec{u}) = f\cdot x(t)\vec{\imath} + f\cdot y(t)\vec{\jmath} + f\cdot z(t)\vec{k} \rightarrow \frac{d}{dt}(f\cdot\vec{u}) = \left[\frac{df}{dt}x(t) + f\frac{dx}{dt}\right]\vec{\imath} + \left[\frac{df}{dt}y(t) + f\frac{dy}{dt}\right]\vec{\jmath} + \left[\frac{df}{dt}z(t) + f\frac{dz}{dt}\right]\vec{k} =$$
$$= \frac{df}{dt}\left[x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}\right] + f\left[\frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right] = \frac{df}{dt}\vec{u} + f\frac{d\vec{u}}{dt} = f'\cdot\vec{u} + f\cdot\vec{u}'$$

4) Demuestre la regla de la cadena aplicada a una función vectorial diferenciable $\vec{u}(s) = a(s)\vec{i} + b(s)\vec{j} + c(s)\vec{k}$ siendo s una función escalar diferenciable: $s = f(t)$.
Suponga que $\vec{u}(s) = x(s)\vec{\imath} + y(s)\vec{\jmath} + z(s)\vec{k}$ es una función vectorial diferenciable de s y que $s = f(t)$ es una función escalar diferenciable de t. Entonces,
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\vec{u}(s)] &= \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\\ &= \frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\vec{k}\\ &= \frac{ds}{dt}\cdot\left(\frac{dx}{ds}\vec{\imath} + \frac{dy}{ds}\vec{\jmath} + \frac{dz}{ds}\vec{k}\right) = \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}\\ &= f'(t)\cdot\vec{u}'\big(f(t)\big) \qquad , s = f(t).\end{aligned}$$

5) Demuestre matemáticamente y analice por qué en el movimiento de una partícula sobre una esfera con centro en el origen el vector posición de la partícula y su vector velocidad son ortogonales. Fundamente el análisis realizado.
El vector velocidad $\frac{d\vec{r}}{dt}$ siempre es tangente a la trayectoria del movimiento, entonces es perpendicular a $\vec{r}$. El vector y su primera derivada son ortogonales ya que con la longitud constante, el cambio en la función es sólo un cambio de dirección, y estos cambios de dirección ocurren en ángulos rectos. Analíticamente:
$$|\vec{r}(t)| = c$$
$$\sqrt{[\vec{r}(t)]^2} = c$$
$$[\vec{r}(t)]^2 = c^2$$
$$\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = c^2$$
$$\frac{d}{dt}[\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)] = 0$$
$$\vec{r}'^{(t)}\cdot\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{r}'^{(t)} = 0$$
$$2\left[\vec{r}'^{(t)}\cdot\vec{r}(t)\right] = 0$$
Los vectores $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t)$ son ortogonales debido a que su producto punto es cero. Por lo tanto, si $\vec{r}$ es una function vectorial diferenciable de t con longitude constant, entonces $\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$.

6) Suponga que la función escalar u(t) y la función vectorial **r**(t) están definidas para $a \le t \le b$. Si <u>u</u> y <u>**r**</u> son diferenciables en $[a,b]$, muestre que u**r** es diferenciable en $[a,b]$ y que $\frac{d}{dt}(u\vec{r}) = u\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r}\frac{du}{dt}$

VECTORES UNITARIOS (T,N,B)

7) Defina longitud de arco para una curva C en el espacio.
Una de las características de las curvas en el espacio es que tienen una longitud medible. Esto permite localizar puntos a lo largo de estas curvas mediante su distancia dirigida s, desde algún punto base. La longitud de una curva regular $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, $a \leq t \leq b$, recorrida exactamente una vez cuando t va desde $t = a$ hasta $t = b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

La raíz cuadrada de la ecuación anterior es el $|v|$, la longitud de un vector velocidad $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Entonces, la longitud de arco es:

$$L = \int_a^b |v|\, dt.$$

8) Defina vector tangente unitario **T**(t).
El vector unitario tangente de una curva regular $\vec{r}(t)$ es: $T = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Esta ecuación dice que $\frac{d\vec{r}}{ds}$ es el vector tangente unitario en la dirección del vector velocidad $\vec{v}$. El vector tangente unitario T es una función diferenciable de t siempre que $\vec{v}$ sea una función diferenciable de t.

9) Analice el significado del vector **T´**(t), y en ese sentido explique qué indica cuando:
   i. **T´**(t) = 0
   ii. **T´**(t) ≠ 0.

El vector unitario tangente T me indica la dirección del movimiento, entonces $T' = \frac{dT}{dt}$ me indica la variación del vector unitario T. Si $T'(t) = \vec{0}$, significa que no hay cambio de dirección de T (sería una recta). Si $T'(t) \neq \vec{0}$ indica que existe un vector normal principal N que es el vector unitario en la dirección de $T'(t)$.

10) Defina plano normal y plano osculador de la curva C en el punto P.
Plano Normal: es el plano delimitado por B y N y es ortogonal a T.
Plano Osculador: es el plano delimitado por T y N y es ortogonal a B.
Plano Rectificador: es el plano delimitado por T y B y es ortogonal a N.

11) Defina el vector normal unitario N en términos del vector T(s)

En un punto donde $\left|\frac{dT}{ds}\right| \neq 0$, el vector normal principal unitario de una curva regular en el plano es $N = \frac{1}{\left|\frac{dT}{ds}\right|} \cdot \frac{dT}{ds}$
El vector $\frac{dT}{ds}$ apunta en la dirección en que T gira al doblarse la curva. Por tanto, si observamos en la dirección en que la longitud de arco aumenta, el vector normal principal N apunta hacia el lado cóncavo de la curva.

12) Defina el vector normal unitario N en términos del vector T(t)

$N = \frac{dT/ds}{|dT/ds|} = \frac{(dT/dt)(dt/ds)}{|dT/dt||dt/ds|} = \frac{dT/dt}{|dT/dt|}$ $\qquad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt} > 0$ se cancela

13) Exprese el comportamiento de los vectores T, N y B en el movimiento de una partícula a lo largo de una curva **r**(t).
Cuando una partícula se mueve a lo largo de una curva regular en el plano, el vector $T = \frac{d\vec{r}}{ds}$ gira al doblarse la curva, es decir, T cambia de dirección (lo único que sucede es un cambio de dirección porque el módulo es constante). El vector N siempre apunta hacia el lado cóncavo de la curva. El vector B representa la tendencia del movimiento de la particula a girar fuera del plano creado por los vectores T y N en dirección perpendicular a dicho plano.

14) Que puede decir acerca de la torsión de una curva regular **r**(t)?. Justifique su respuesta.
La torsión de una curva regular mide cuánto se tuerce la curva. Si consideramos la curva como la trayectoria de un cuerpo en movimiento, el valor de la torsión nos dice qué tanto, la trayectoria de un cuerpo, rota o se sale de su plano de movimiento cuando el objeto se mueve.

15) Cómo define torsión de una curva regular?. Cuál es el significado de los elementos que componen dicha definición?
Sea $B = T \times N$, la torsión de una curva regular se define como $\tau = -\frac{dB}{ds} \cdot N$. La torsión nos dice qué tanto, la trayectoria de un cuerpo, rota o se sale de su plano de movimiento cuando el objeto se mueve.

16) Determine las componentes tangencial y normal de la aceleración en términos de las direcciones de T y N
Tomando $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = T \cdot \frac{ds}{dt}$ derivando miembro a miembro:
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(T \cdot \frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot T + \frac{ds}{dt} \cdot \left(k \cdot N \cdot \frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot T + k \cdot (\frac{ds}{dt})^2 \cdot N$ $\qquad \frac{dT}{ds} = k \cdot N$

La aceleración en términos de las componentes tangencial y normal se define como $\vec{a} = a_T T + a_N N$, donde $a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt}|\vec{v}|$ y $a_N = k \cdot (\frac{ds}{dt})^2 = k|\vec{v}|^2$.
La componente tangencial de la aceleración a_T, mide la razón de cambio de la magnitud de $\vec{v}$ (es decir, el cambio de rapidez). La componente normal de la aceleración a_N, mide la razón de cambio de la dirección de $\vec{v}$.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

LIMITE Y CONTINUIDAD

17) Defina límite de una función de varias variables.
Decimos que una función $f(x,y)$ tiende al límite L cuando (x,y) tiende a (x_0,y_0), y escribimos $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ si para cada número $\epsilon < 0$, existe un número correspondiente $\delta < 0$ tal que para todo (x,y) en el dominio de f, $|f(x,y) - L| < \epsilon$ siempre que $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$.
Ésta definición dice que la distancia entre $f(x,y)$ y L es arbitrariamente pequeña siempre que la distancia de (x,y) a (x_0,y_0) se haga suficientemente pequeña (pero no cero). Esta definición se aplica a puntos frontera (x_0,y_0) y a puntos interiores del dominio de f. El único requisito es que el punto (x,y) permanezca en el dominio en todo momento.

18) Defina continuidad de una función de varias variables
Una función $f(x,y)$ es continua en el punto (x_0,y_0) si:
    i. f está definida en (x_0,y_0),
    ii. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe,
    iii. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$
Una función es continua, si es continua en cada punto de su dominio. Para que el límite exista en un punto, el límite debe ser el mismo a lo largo de cualquier trayectoria de acercamiento. Por lo tanto si llegamos a encontrar trayectorias con valores distintos como límites, sabemos que la función no tendrá límite en el punto al que tiende.

19) Justifique por qué la existencia de todas las derivadas parciales de una función en un punto no garantiza la continuidad de la función en dicho punto.
La existencia de las derivadas parciales no basta para garantizar la continuidad de una función, la existencia de una derivada parcial sólo depende del comportamiento de la función a lo largo de un segmento de recta (en dos direcciones), mientras que la continuidad depende del comportamiento de la función en todas las direcciones.

20) Defina y relacione continuidad y diferenciabilidad parcial.

DERIVADAS PARCIALES

21) Defina derivada parcial con respecto a y, de una función de dos variables.
La derivada parcial con respecto a y de $f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0) es: $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} = \frac{d}{dy} f(x_0,y)|_{y=y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0)}{h}$ si el límite existe.

22) Qué representa geométricamente el número f_y (x_0, y_0)?
El número $f_y(x_0,y_0)$ representa la pendiente de la curva $z = f(x_0,y)$en el punto $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ del plano vertical $x = x_0$. La recta tangente a la curva en P es la recta en el plano $x = x_0$ que pasa por P con ésta pendiente. La derivada parcial da la razón de cambio de f con respecto a y en (x_0,y_0) cuando x se mantiene fija en el valor x_0. Ésta es la razón de cambio de f en la dirección de $\vec{j}$ en (x_0,y_0).

23) Relacione la continuidad en una función de varias variables con la existencia de sus derivadas parciales.
Si $z = f(x,y)$ es continua en (x_0,y_0) no necesariamente es diferenciable en (x_0,y_0). Si $z = f(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0) entonces es continua en (x_0,y_0). El diferencial es una "derivada fuerte", por lo tanto si $z = f(x,y)$ no es continua en un punto tampoco es diferenciable en ese punto.

24) Enuncie la condición necesaria y suficiente para que una función vectorial de dos variables, sea un gradiente.
Para que una función vectorial $\vec{r}$ sea un gradiente, sus componentes deben ser las derivadas parciales de $F(x,y)$ en un punto (x_0,y_0).
El vector gradiente de $f(x,y)$ en un punto $P_0(x_0,y_0)$ es el vector $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}$ el cual se obtiene al evaluar las derivadas parciales de f en P_0.

25) Defina función diferenciable en un punto P(x_0 , y_0 , z_0).
Una función $z = f(x,y)$ es diferenciable en el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ si $f_x(x_0,y_0,z_0)$, $f_y(x_0,y_0,z_0)$ y $f_z(x_0,y_0,z_0)$ existen y Δz satisface una ecuación de la forma $\Delta z = f_x(x_0,y_0,z_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0,y_0,z_0) \cdot \Delta y + f_z(x_0,y_0,z_0) \cdot \Delta z + \epsilon_1 \cdot \Delta x + \epsilon_2 \cdot$

$\Delta y + \epsilon_3 \cdot \Delta z$, donde cada $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$. Decimos que f es diferenciable si es diferenciable en cada punto de su dominio.

26) Defina función diferenciable y exprese su relación con gradiente.
La derivada de una función diferenciable f en la dirección de $\vec{u}$ en P_0 es el producto punto de $\vec{u}$ con el gradiente de f en P_0.

27) Enuncie el Teorema de la derivada cruzada o Teorema de Clairaut.
Si $f(x,y)$ y sus derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} están definidas en una región abierta que contiene a un punto (a,b), entonces $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.
Este teorema dice que para calcular una derivada parcial cruzada de segundo orden podemos derivar en cualquier orden, siempre que se cumplan las condiciones de continuidad.

28) Enuncie y demuestre el Teorema que establece la regla de la cadena para funciones de dos variables independientes.
Si $w = f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas f_x y f_y y si $x = x(t)$, $y = y(t)$ son funciones diferenciables de t, entonces la composición $w = f(x(t), y(t))$ es una función diferenciable de t y $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$.
demostración. la demostración consiste en mostrar que si x y y son diferenciables en $t = t_0$, entonces w es diferenciable en t_0 y $\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$ donde $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$. Los subíndices indican en dónde se calcula cada derivada. Sean Δx, Δy, y Δw los incrementos que resultan de variar t de t_0 a $t_0 + \Delta t$. Como f es diferenciable, $\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$ donde ϵ_1, $\epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x, \Delta y \to 0$. Para calcular $\frac{dw}{dt}$, dividimos esta ecuación entre Δt y hacemos que Δt tienda a cero. $\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$. Al hacer que Δt tienda a cero tenemos $\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}$.

29) Enuncie la regla de la cadena para una función de dos variables independientes y tres variables intermedias.
Suponga que $w = f(x,y,z)$, $x = g(r,s)$, $y = h(r,s)$, y $z = k(r,s)$. Si las cuatro funciones son diferenciables, entonces w tiene derivadas parciales con respecto a r y s, dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

30) Enuncie la regla de la cadena para una función de dos variables independientes y dos variables intermedias.
Suponga que $w = f(x,y)$, $x = g(r,s)$ y $y = h(r,s)$. Si las funciones son diferenciables, entonces w tiene derivadas parciales con respecto a r y s, dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

31) Enuncie la regla de la cadena para una función de dos variables independientes y una variable intermedia.
Suponga que $w = f(x)$ y x= $g(r,s)$. Si las funciones son diferenciables, entonces w tiene derivadas parciales con respecto a r y s, dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}$$

32) Enuncie el teorema para la derivación de una función dada implícitamente.
Suponga que $F(x,y)$ es diferenciable y que la ecuación $F(x,y) = 0$ define a y como una función diferenciable de x. Entonces, en cualquier punto donde $F_y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

DERIVADAS DIRECCIONALES

33) Exprese la definición vectorial de derivadas direccionales.
La derivada de f en $P_0(x_0, y_0)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$ es el número
$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}$$
si el límite existe.

34) Exprese la definición de derivadas direccionales en función del parámetro longitud de arco.
Comenzamos con la recta $x = x_0 + su_1$, $y = y_0 + su_2$, que pasa por $P_0(x_0, y_0)$, parametrizada con el parámetro de longitud de arco s que crece en la dirección del vector unitario $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$. Entonces,
$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\cdot\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\cdot\frac{dy}{ds}$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\cdot u_2$$
$$= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\cdot\vec{\imath} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\cdot\vec{\jmath}\right]\cdot[u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}]$$

35) Cómo relaciona el gradiente de una función f(**x**) con la derivada direccional?
La derivada de una función diferenciable f en la dirección de $\vec{u}$ en P_0 es el producto punto de $\vec{u}$ con el gradiente de f en P_0. Si $f(x, y)$ es diferenciable en una región abierta que contiene a $P_0(x_0, y_0)$, entonces
$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\vec{u},P_0} = (\nabla f)_{P_0}\cdot\vec{u}$$

36) Dé la interpretación geométrica de la derivada direccional.

La derivada direccional nos da la pendiente de recta tangente a la curva que se forma en la superficie por el plano vertical que pasa por P y P_0 que es paralelo al vector dirección $\vec{u}$

37) Enuncie y demuestre cómo define al gradiente en la expresión de la derivada direccional.
Supongamos las ecuaciones paramétricas de una recta que pasan por P_0 parametrizada con el parámetro longitud de arco que crece en la dirección del vector $\vec{u} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$. Entonces
$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot u_2$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{\jmath}\right)\cdot(u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath})$$
Por lo tanto el vector gradiente de una función diferenciable $f(x, y)$ en el punto P_0 es el vector que se obtiene al evaluar las derivadas parciales en el punto P_0,
$$\nabla f|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath}\bigg|_{P_0} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}\bigg|_{P_0}$$

38) Enuncie y demuestre tres propiedades importantes de la derivada direccional.
La derivada direccional $D_{\vec{u}}f = \nabla f\cdot\vec{u} = |\nabla f|\cdot\cos\theta$ tiene las siguientes propiedades:

i. La función f crece más rápidamente cuando $\cos\theta = 1$ o cuando $\vec{u}$ es la dirección de ∇f. Es decir, en cada punto P de su dominio, f crece más rápidamente en la dirección del vector gradiente ∇f en P. La derivada en esta dirección es $D_{\vec{u}}f = |\nabla f|\cdot\cos(0) = |\nabla f|$.
ii. La función f decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. La derivada en esta dirección es $D_{\vec{u}}f = |\nabla f|\cdot\cos(\pi) = -|\nabla f|$.
iii. Cualquier dirección $\vec{u}$ ortogonal a un gradiente $\nabla f \neq 0$ es una dirección de cambio nulo en f, pues en ese caso θ es igual a $\pi/2$ y $D_{\vec{u}}f = |\nabla f|\cdot\cos(\pi/2) = |\nabla f|\cdot 0 = 0$.

39) ¿Qué puede decir acerca del concepto del coeficiente de variación aplicado a derivadas parciales y el concepto aplicado a derivadas direccionales?
Las derivadas parciales suministran los coeficientes de variación de f en las direcciones $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.
Las derivadas direccionales dan el coeficiente de variación de la función según la dirección del vector $\vec{u}$ unitario.

40) ¿Qué representa el valor numérico de las derivadas parciales y el de la derivada direccional? Encuentra alguna diferencia en los conceptos? Explique

RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL - PLANOS TANGENTES Y DIFERENCIALES

41) Defina vector normal y demuestre dicho concepto.

Sea una función diferenciable f y una curva regular $f(t)$ entonces el ∇f es normal al vector tangente $\frac{d\vec{r}}{dt}$; es decir, el vector gradiente es normal a la curva. Si una función $f(x,y)$ es diferenciable y tiene un valor constante c a lo largo de una curva $\vec{r}(t)=x(t)\vec{\imath}+y(t)\vec{\jmath}$, haciendo que la curva sea una curva de nivel, entonces $f\big(x(t),y(t)\big)=c$. Si derivamos miembro a miembro con respecto a t tenemos:

$$\frac{df}{dt}\big(x(t),y(t)\big)=\frac{d}{dt}(c)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=0$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}\right)=0$$
$$\nabla f\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=0$$

Por lo tanto el vector gradiente es normal a $\frac{d\vec{r}}{dt}$.

42) Defina vector tangente y demuestre dicho concepto.

Un vector perpendicular al gradiente que llamaremos $\vec{t}(x_0,y_0)$ es un vector tangente y podemos expresarlo como

$$\vec{t}(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0}\vec{\imath}-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0}\vec{\jmath}$$

(se cambian las direcciones y el signo para encontrar un vector perpendicular al gradiente).

demostración. Si $\nabla f\cdot\vec{t}=0$, entonces el gradiente es perpendicular al vector tangente.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\imath}-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\jmath}\right)\to\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

43) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel f(x,y) = c en el punto $P(x_0,y_0)$

Una recta tangente es una recta que pasa por (x_0,y_0) y es perpendicular al gradiente. Un punto (x,y) pertenece a la recta tangente si, y sólo si

$$[(x-x_0)\vec{\imath}+(y-y_0)\vec{\jmath}]\cdot[\nabla f(x_0,y_0)]=0$$
$$[(x-x_0)\vec{\imath}+(y-y_0)\vec{\jmath}]\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}\right]=0$$
$$(x-x_0)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}=0$$
$$f_x)_{P_0}(x-x_0)+f_y)_{P_0}(y-y_0)=0$$

44) Determine la ecuación de la recta normal a la curva de nivel f(x,y) = c en el punto $P(x_0,y_0)$

La recta que pasa por (x_0,y_0) y es perpendicular al vector tangente $\vec{t}(x_0,y_0)$, es una recta normal. Un punto (x,y) está en la recta normal si, y sólo si, el vector director de la recta y el tangente son perpendiculares.

$$[(x-x_0)\vec{\imath}+(y-y_0)\vec{\jmath}]\cdot\left[\vec{t}(x_0,y_0)\right]=0$$
$$[(x-x_0)\vec{\imath}+(y-y_0)\vec{\jmath}]\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\imath}-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\jmath}\right)=0$$
$$(x-x_0)\vec{t}_y-(y-y_0)\vec{t}_x=0$$

45) Defina plano tangente y recta normal a la superficie S en el punto P.

Definimos el plano tangente en un punto sobre una superficie regular en el espacio a partir de las derivadas parciales de la función que define a la superficie. Sea $\vec{r}(t)=x(t)\vec{\imath}+y(t)\vec{\jmath}+z(t)\vec{k}$ una curva regular en la superficie de nivel $f(x,y,z)=c$ de una función diferenciable f, entonces $f\big(x(t),y(t),z(t)\big)=c$. Al derivar miembro a miembro con respecto a t tenemos

$$\frac{d}{dt}f\big(x(t),y(t),z(t)\big)=\frac{d}{dt}(c)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}=0$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dz}{dt}\vec{k}\right)=0$$
$$\nabla f\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=0$$

En todo punto a lo largo de la curva, ∇f es ortogonal al vector velocidad de la curva o de cada curva regular que pase por P_0, entonces los vectores velocidad en P_0 están en un plano común que es el plano tangente en P_0. Todos los vectores tangente s a las curvas están en el plano (que pasa por P_0) perpendicular a ∇f. Este es el plano tangente a la superficie en P_0. La recta normal a la superficie en P_0 es la recta que pasa por P_0 y es perpendicular al plano.

46) Cuál es la ecuación de un plano tangente horizontal? Por qué?

VALORES EXTREMOS

47) Enuncie el criterio de la derivada parcial segunda
Respuesta en la pregunta 52).

48) Defina:

i. Puntos críticos.
ii. Puntos estacionarios

i. Puntos críticos: un punto crítico en el interior del dominio de una función $f(x, y)$ es donde f_x y f_y se anulan, o bien en donde alguna de estas derivadas no existe.
ii. Puntos estacionarios: un punto estacionario de una función de varias variables reales, es un punto donde se anulan simultáneamente todas sus derivadas parciales. Esto lleva a que el gradiente en ese punto es el vector nulo y en él exista un plano tangente horizontal.

49) Defina puntos de silla.
Una función diferenciable $f(x, y)$ tiene un punto de silla en un punto crítico (a, b) si en cada disco abierto con centro en (a, b) existen puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) > f(a, b)$, y puntos del dominio (x, y) donde $f(x, y) < f(a, b)$
El punto correspondiente $\left(a, b, f(a, b)\right)$ sobre la superficie $z = f(x, y)$ se conoce como punto de silla de la superficie.
El punto de silla es el caso típico de la figura paraboloide-hiperbólico.

50) Defina extremos locales.
Sea $f(x, y)$ definida en una región R que contiene al punto (a, b). Entonces,

i. $f(a, b)$ es un valor máximo local de f si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los puntos del dominio (x, y) en un disco abierto con centro en (a, b).
ii. $f(a, b)$ es un valor mínimo local de f si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todos los puntos del dominio (x, y) en un disco abierto con centro en (a, b).

Los extremos locales también se conocen como extremos relativos y en ellos los planos tangentes son horizontales.

51) Enuncie y demuestre el criterio de la primera derivada para valores extremos locales.
Si $f(x, y)$ tiene un valor máximo o mínimo local en un punto interior (a, b) de su dominio, y si las primeras derivadas parciales existen en el punto, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$
demostración. Si f tiene un extremo local en (a, b), entonces la función $g(x) = f(x, b)$ tiene un extremo local en $x = a$. Por tanto, $g'(a) = 0$. Ahora $g'(a) = f_x(a, b)$, de modo que $f_x(a, b) = 0$. Un argumento similar con la función $h(y) = f(a, y)$ muestra que $f_y(a, b) = 0$.
Si sustituimos los valores $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ en la ecuación

$$f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - \left(z - f(a, b)\right) = 0$$

del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (a, b), la ecuación se reduce a

$$0 \cdot (x - a) + 0 \cdot (y - b) - z + f(a, b) = 0$$

o bien $z = f(a, b)$.

52) Enuncie y demuestre el criterio de la segunda derivada para valores extremos locales.
Suponga que $f(x, y)$ y sus primeras y segundas derivadas parciales son continuas en un disco con centro en (a,b) y que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Entonces

i. f tiene un máximo local en (a, b), si $f_{xx} < 0$ y $f_{xx} \cdot f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ en (a, b).
ii. f tiene un mínimo local en (a, b), si $f_{xx} > 0$ y $f_{xx} \cdot f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ en (a, b).
iii. f tiene un punto de silla en (a, b), si $f_{xx} \cdot f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ en (a, b).
iv. El criterio no es concluyente en (a, b), si $f_{xx} \cdot f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 0$ en (a, b). En este caso, debemos buscar otra forma de determinar el comportamiento de f en (a, b).

Si $f_{xx} \cdot f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ en el punto (a, b), entonces la superficie se curva de la misma forma en todas las direcciones: hacia abajo si $f_{xx} < 0$, lo que da lugar a un máximo local; y hacia arriba si $f_{xx} > 0$, lo que da lugar a un mínimo local.
Por otro lado, si $f_{xx} \cdot f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ eb (a, b), entonces la superficie se curva hacia arriba en algunas direcciones y hacia abajo en otras, de modo que obtenemos un punto de silla.

53) Defina extremos absolutos en regiones cerradas y acotadas
Para encontrar los extremos absolutos de una función continua $f(x, y)$ en una región cerrada y acotada R se deben enumerar los puntos interiores de R donde f puede tener máximos y mínimos locales, y evaluar f en estos puntos. También debemos evaluar los puntos frontera de R donde f tiene máximos y mínimos locales. Luego de haber evaluado todos estos puntos, el valor máximo será el máximo absoluto de f en R y el valor mínimo será el mínimo absoluto de f en R.

54) Enuncie y demuestre el teorema del gradiente ortogonal.

55) Fundamente geométricamente el método de los multiplicadores de Lagrange con una restricción.