MECÁNICA COMPUTACIONAL – INGENIERÍA EN INFORMÁTICA

PRIMER PARCIAL – 14 de octubre de 2016

Dr. Norberto Marcelo Nigro – Msc. Gerardo Franck – Ing. Diego Sklar

Ejercicio 1 30 ptos

Dada la siguiente ecuación diferencial que modela la transferencia de calor sobre una barra,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v(x)\frac{\partial T}{\partial x} = k(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x), \quad \forall x \in [1,2]$$

$$q(0,t) = 1; \quad T(1,t) = 10; \quad T(x,t) = 0$$

Si $k(x)=2x$, $v(x)=-10x$ y $Q(x)=x^2$, entonces:

5 ptos
a) Explique cómo determinar el paso de tiempo (Δt) máximo para poder utilizar un esquema temporal explícito, si $\Delta x=0.1$.

5 ptos
b) Explique cómo determinar el máximo Δx tal que el problema pueda ser resuelto mediante diferencias centradas para el término convectivo.

10 ptos
c) Aplicando diferencias finitas con aproximaciones de segundo orden, muestre cómo quedaría el stencil en x=1, utilizando un esquema temporal implícito.

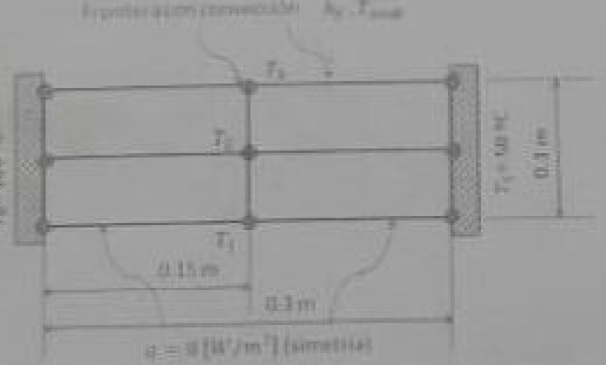
10 ptos
d) Aplicando volúmenes finitos con aproximaciones de segundo orden, muestre cómo quedaría el stencil en el primer centro de celda, utilizando un esquema temporal implícito.

Ejercicio 2 50 ptos

Dada la siguiente ecuación diferencial $\nabla.(k\nabla T) + Q = 0$ que modela la transferencia de calor sobre una aleta disipadora de espesor t=0.01 [m], entonces:

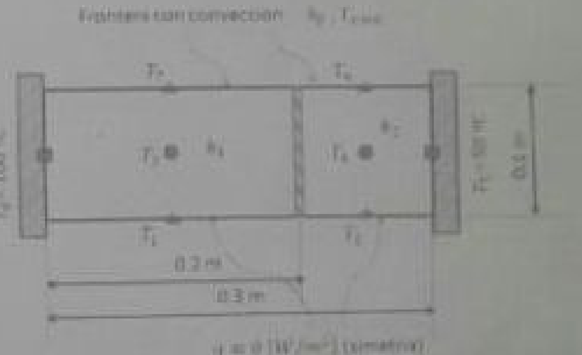
a) Resolver por diferencias finitas dadas las condiciones de borde y datos generales de la figura 1. 25 ptos

b) Resolver por volúmenes finitos dadas las condiciones de borde y datos generales de la figura 2. Corroborar conservación de energía. 25 ptos



DATOS:
$k_1 = 14$ [W/m K] $\quad h_f = 10$ [W/m² K] $\quad T_{amb} = 30$ ºC $\quad Q = 100$ [W/m³] (fuente)

Figura 1: Malla de Diferencias Finitas



DATOS:
$k_1 = 14$ [W/m K] $\quad h_f = 10$ [W/m² K] $\quad Q = 100$ [W/m³] (fuente)
$k_2 = 42$ [W/m K] $\quad T_{amb} = 30$ ºC

Figura 2: Malla de Volúmenes Finitos

Ejercicio 3 20 ptos

5ptos a) En el método de volúmenes finitos, la aproximación de la integral de superficie $Fe = \int_{S_e} f \, dS \approx f_e S_e$ es:

- ☐ De primer orden de precisión.
- ☐ De segundo orden de precisión.
- ☐ De tercer orden de precisión.
- ☐ De cuarto orden de precisión.

5ptos b) El método de volúmenes finitos es:

- ☐ Un método integral.
- ☐ Un método diferencial.
- ☐ Las dos anteriores.

5 ptos c) En el método de volúmenes finitos, la aproximación de la integral de volumen $Q_p = \int_{\Omega} q \, d\Omega \approx q_p \Delta\Omega$ donde q_p es el valor de q en el centro del volumen de control y $\Delta\Omega$ es el volumen de dicho volumen de control (celda), es:

- ☐ En general, de segundo orden de precisión.
- ☐ En general, de cuarto orden de precisión.
- ☐ Exacta si q es constante o varía linealmente.
- ☐ En general, de primer orden de precisión.

5 ptos d) En la interpolación upwind (UDS) para aproximar el valor de la variable en la "cara este" de la celda, la expresión correcta es:

- ☐ $f_e = f_P \quad si \ (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n})_e > 0.$
- ☐ $f_e = f_E \quad si \ (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n})_e < 0.$
- ☐ f_e variable en la frontera.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v(x)\frac{\partial T}{\partial x} = k(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q(x), \quad \forall x \in [1,2] \qquad \frac{\partial T}{\partial t} - Q(x) = k(x)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v(x)\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q(1,t) = 1; \quad T(2,t) = 10; \quad T(x,0) = 0 \qquad -k\nabla T\Big|_{x=1} = 1$$

Si k(x)=2x, v(x)=-10x y Q(x)=x^2, entonces:

- Explique cómo determinar el paso de tiempo (Δt) máximo para poder utilizar un esquema temporal explícito, si Δx=0.1.
- Explique cómo determinar el máximo Δx tal que el problema pueda ser resuelto mediante diferencias centradas para el término convectivo.
- Aplicando diferencias finitas con aproximaciones de segundo orden, muestre cómo quedaría el stencil en x=1 utilizando un esquema temporal implícito.
- Aplicando volúmenes finitos con aproximaciones de segundo orden, muestre cómo quedaría el stencil en el primer centro de celda, utilizando un esquema temporal implícito.

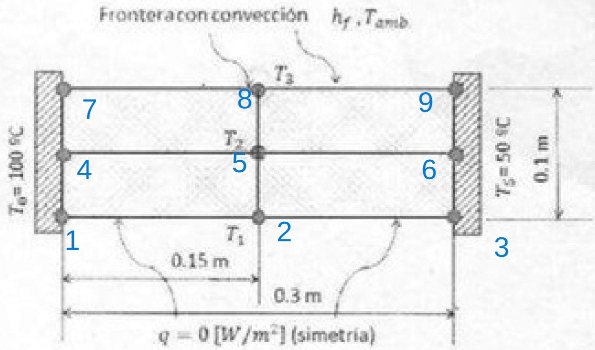
aproximaciones de segundo orden en el espacio!

Ejercicio 2

Dada la siguiente ecuación diferencial $\nabla.(k\nabla T) + Q = 0$ que modela la transferencia de calor sobre una aleta disipadora de espesor t=0.01 [m], entonces:

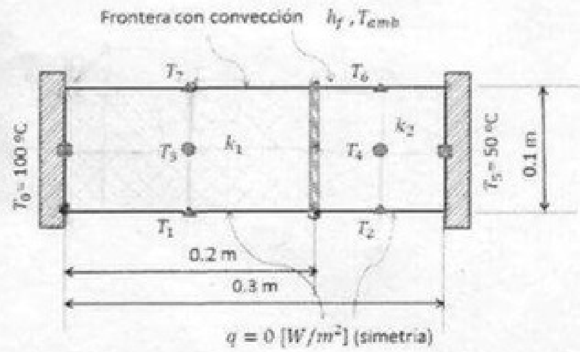
a) Resolver por diferencias finitas dadas las condiciones de borde y datos generales de la figura 1.

b) Resolver por volúmenes finitos dadas las condiciones de borde y datos generales de la figura 2. Corroborar conservación de energía.



DATOS:
k_1 = 14 [W/m K] h_f = 10 [W/m^2 K] T_{amb} = 30 ºC $Q = 100\ [W/m^3]$ (fuente)

Figura 1: Malla de Diferencias Finitas



DATOS:
k_1 = 14 [W/m K] h_f = 10 [W/m^2 K] k_2 = 42 [W/m K] T_{amb} = 30 ºC $Q = 100\ [W/m^3]$ (fuente)

Figura 2: Malla de Volúmenes Finitos