Práctica: Larson - Sección 7.8

Series de Taylor y Maclaurin

Dra. Penélope Cordero

Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas
Universidad Nacional del Litoral

¿Qué ejercicios de práctica debo hacer?

✓ Ejercicios Propuestos:

- **Pág. 500**: 1 al 8 /// 11-12 /// 21 al 26 /// 61 al 63.

✓ En este video:

- Ejercicio 7.
- Ejercicio 8.
- Ejercicio 11.
- Ejercicio 12.
- Ejercicio 24.
- Ejercicio 63.

Ejercicio 7 use la definición para hallar la serie de Taylor (centrada en c) para la función.

$f(x) = \sin 2x$; $c = 0$.

Solución: Por definición la serie de Maclaurin (Taylor centrada en 0) está dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

En este caso consideramos la función $f(x) = \sin 2x$, con lo cual, calculando las derivadas sucesivas obtenemos:

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = \sin 2x & \Rightarrow & f(0) = 0 \\
f'(x) = 2\cos 2x & \Rightarrow & f'(0) = 2 \\
f''(x) = -4\sin 2x & \Rightarrow & f''(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) = -8\cos 2x & \Rightarrow & f^{(3)}(0) = -8 \\
f^{(4)}(x) = 16\sin 2x & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = 0 \\
f^{(5)}(x) = 32\cos 2x & \Rightarrow & f^{(5)}(0) = 32 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

A partir de la definición de serie de Maclaurin, reemplazando los valores obtenidos, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \\ &= 0 + 2x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{8}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{32}{5!}x^5 + ... \\ &= \frac{2^1}{1!}x - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5 - \frac{2^7}{7!}x^7 + ... \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}\end{aligned}$$

Por lo tanto la serie de Maclaurin para $f(x) = \sin 2x$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

EJERCICIO 8 USE LA DEFINICIÓN PARA HALLAR LA SERIE DE TAYLOR (CENTRADA EN c) PARA LA FUNCIÓN.

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$; $c = 0$.

Solución: Como buscamos la serie de Taylor centrada en 0, hallamos la serie de Maclaurin. En este caso consideramos la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ y calculamos las derivadas sucesivas en 0:

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) = \ln(x^2+1) & \Rightarrow & f(0) = 0 \\
f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} & \Rightarrow & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} & \Rightarrow & f''(0) = 2 \\
f^{(3)}(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} & \Rightarrow & f^{(3)}(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = -\frac{12(x^4-6x^2+1)}{(x^2+1)^4} & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = -12 \\
f^{(5)}(x) = \frac{48x(x^4-10x^2+5)}{(x^2+1)^5} & \Rightarrow & f^{(5)}(0) = 0 \\
f^{(6)}(x) = \frac{240(x^6-15x^4+15x^2-1)}{(x^2+1)^6} & \Rightarrow & f^{(6)}(0) = 240 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

A partir de la definición de serie de Maclaurin, reemplazando los valores obtenidos, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \\
&= 0 + 0x + \frac{2}{2!}x^2 - \frac{0}{3!}x^3 + \frac{-12}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{240}{6!}x^6 + ... \\
&= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{12}{4!}x^4 + \frac{240}{6!}x^6 + ... \\
&= \frac{1}{1}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - ... \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la serie de Maclaurin para $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}$$

EJERCICIO 11 DEMUESTRE QUE PARA TODO x LA SERIE DE MACLAURIN PARA LA FUNCIÓN DADA CONVERGE A LA FUNCIÓN.

$f(x) = \cos x$.

Solución: Se sabe, a partir de la *Tabla de las series de potencias para funciones elementales* (pag. 497), que la serie de Maclaurin para la función $\cos x$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

A partir del *Teorema de convergencia de las series de Taylor*, sabemos que si $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ para toda x, entonces la serie de Maclaurin para $f(x) = \cos x$ converge y es igual a $f(x)$.

Donde $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1}$ con z dependiendo de x y de n.
En nuestro caso, para $f(x) = \cos x$, se tiene que:

$$f^{(n+1)} \cos x = \pm \cos x \qquad \text{o} \qquad f^{(n+1)} \cos x = \pm \sin x$$

Entonces para todo z se satisface que $\left|f^{n+1}(z)\right| \leq 1$.

Por lo tanto

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dado que para cualquier x, cuando n tiene a infinito, la función factorial crece más rápido que la función exponencial, resulta que $\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. (Notar que este límite depende sólo de n y no del valor que toma la variable x).

Por lo tanto, a partir del *Teorema de compresión para sucesiones*, resulta que para toda x,

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

Finalmente, por el *Teorema de convergencia de las series Taylor*, obtenemos que

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 12 demuestre que para todo x la serie de Maclaurin para la función dada converge a la función.

$f(x) = e^{-2x}$.

Solución: Calculando las derivadas sucesivas de la función e^{-2x}, tenemos

$$f(x) = e^{-2x} \qquad f^{(4)}(x) = 16e^{-2x}$$
$$f'(x) = -2e^{-2x} \qquad f^{(5)}(x) = -32e^{-2x}$$
$$f''(x) = 4e^{-2x} \qquad \vdots$$
$$f^{(3)}(x) = -8e^{-2x} \qquad f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$$

Por lo tanto, evaluando en 0, la serie de Maclaurin para e^{-2x} resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n$$

Veamos, a partir del *Teorema de convergencia de las series de Taylor*, que la serie obtenida converge a e^{-2x} para todo x.

Consideremos el residuo dado por $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$ con z dependiendo de x y de n. En nuestro caso, vimos que la forma general de la derivada n-ésima de $f(x) = e^{-2x}$ es $f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$, entonces

$$f^{(n+1)}(z) = (-2)^{n+1} e^{-2z}$$

$$0 \leq |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| = \left| \frac{(-2)^{n+1} e^{-2z}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq e^{-2z} \frac{|2x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dado que para cualquier x, cuando n tiene a infinito, la función factorial crece más rápido que la función exponencial, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-2z} \frac{|2x|^{n+1}}{(n+1)!} = e^{-2z} \lim_{n\to\infty} \frac{|2x|^{n+1}}{(n+1)!} = e^{-2z} \cdot 0 = 0$$

.
(Notar que este límite depende sólo de n y no del valor que toma la variable x).

Por lo tanto, a partir del *Teorema de compresión para sucesiones*, resulta que para toda x, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.
Finalmente, por el *Teorema de convergencia de las series Taylor*, obtenemos que

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 24 ENCUENTRE LA SERIE DE MACLAURIN PARA LA FUNCIÓN DADA. (USE LA TABLA DE SERIES DE POTENCIAS PARA FUNCIONES ELEMENTALES.)

$f(x) = \cos 4x.$

Solución: A partir de la *Tabla de las series de potencias para funciones elementales* (pag. 497), se sabe que:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Es decir, la serie de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}$ converge a la función $\cos x$ con un intervalo de convergencia igual a la recta real.
Como el intervalo de convergencia de $f(x) = \cos x$ es $\mathbb{R}$, podemos reemplazar x por $4x$ (si x es un número real, $4x$ también lo es), y obtenemos:

$$\cos(4x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^4}{4!} - \frac{(4x)^6}{6!} + \dots$$

En este caso, la serie de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}$ converge a la función $\cos 4x$ en un intervalo de convergencia igual al dominio de $\cos 4x$, es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 63 explique como usar la serie

$$g(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para hallar la serie para cada función dada. No necesita hallar la serie.

(a) $f(x) = e^{-x}$

(b) $f(x) = e^{3x}$

(c) $f(x) = xe^x$

(d) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$

Solución: Sabemos que la serie de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge a la función $g(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Para obtener una serie de potencias para $f(x) = e^{-x}$, es suficiente con evaluar $g(x)$ en $-x$, de modo que $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si sustituímos x por $3x$ en la representación de e^x, obtenemos una serie de potencias para e^{3x} dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) Dado que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, multiplicando por x miembro a miembro, obtenemos:

$$xe^x = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} x \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

(b) Siguiendo el mismo razonamiento que en el apartado (b), tenemos que

$$g(2x) = e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \qquad \text{y} \qquad g(-2x) = e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!}$$

Por lo tanto, sumando ambas funciones resulta:

$$\begin{aligned} e^{2x} + e^{-2x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2x)^n}{n!} + \frac{(-2x)^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n + (-2x)^n}{n!} \end{aligned}$$

Donde el intervalo de convergencia de la serie, es la intersección de los intervalos de convergencia para ambos sumandos. En este caso, la convergencia es para todo $x \in \mathbb{R}$.