Sección 6.6

Formas indeterminadas y regla de L'Hòpital

Ejercicio 10

Evalúe el límite, empleando la regla de L'Hòpital si es necesario.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1}$$

Solución***. Forma indeterminada 0/0***

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{d}{dx}[\ln x^2]}{\frac{d}{dx}[x^2 - 1]} = \lim_{x \to 1} \frac{2x/x^2}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2} = 1$$

Ejercicio 22

Evalúe el límite, empleando la regla de L'Hòpital si es necesario.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

Solución. ***Forma indeterminada*** ∞/∞**.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/2(x^2+1)^{-1/2}2x} = \lim_{x\to\infty} 2\sqrt{x^2+1} = \infty$$

Ejercicios 27-34

En los ejercicios 27-34, (a) describa el tipo de forma indeterminada (si la hay) que se obtiene mediante sustitución directa. (b) Evalúe el límite usando la regla de L'Hòpital si es necesario. (c) Emplee una aplicación gráfica para representar gráficamente la función y verifique el resultado del inciso (b).

Ejercicio 29.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$$

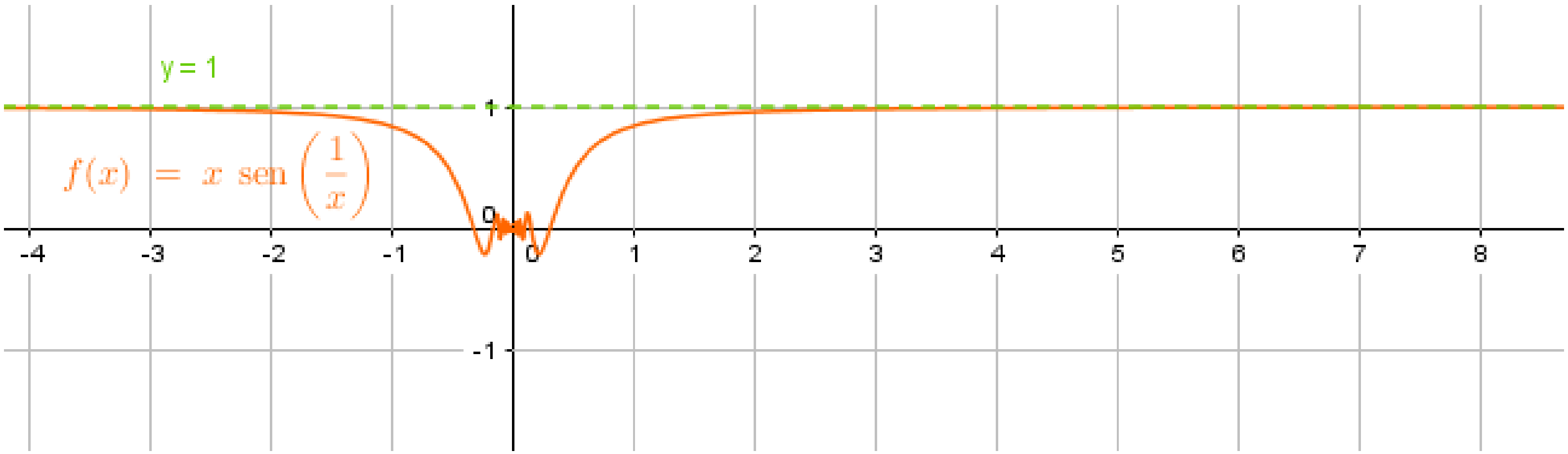
Solución. Como mediante sustitución directa se obtiene la *forma indeterminada* $0.\infty$**,** se trata de reescribir el límite de manera que se obtenga la forma $0/0$ ó ∞/∞. En este caso, podemos reescribir el límite para ajustar a la primera indeterminación $0/0$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)(-x^2)}{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=1.$$

Luego,

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=1}$$

Ejercicio 29



Ejercicio 30

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x + x)^{2/x}$$

Solución. Como mediante sustitución directa se tiene la forma indeterminada 1^∞, se procede como sigue. Suponemos que el límite existe y es igual a y.

$$y = \lim_{x\to 0^+}(e^x + x)^{2/x}$$

Tomando logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\ln y = \ln\left[\lim_{x\to 0^+}(e^x + x)^{2/x}\right]$$

Como la función logaritmo natural es continua, puede escribirse

$$\ln y = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2}{x}\ln(e^x + x)\right] \quad \text{Forma indeterminada } \infty.0$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln(e^x + x)}{x} \quad \text{Forma indeterminada } 0/0$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2(e^x + 1)}{(e^x + x)} \quad \text{Regla de L'Hópital}$$

$$= 4.$$

Luego, $\ln y = 4$ por tanto $y = e^4$, con lo que se obtiene:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+}(e^x + x)^{2/x} = e^4}$$

Ejercicio 34

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$$

Solución. Como mediante sustitución directa se tiene la forma indeterminada ∞^0, se procede como sigue. Suponemos que el límite existe y es igual a y.

$$y=\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$$

Tomando logaritmos naturales a ambos lados de la ecuación se obtiene,

$$\ln y=\ln\left[\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}\right]$$

Como la función logaritmo natural es continua, puede escribirse,

$\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]$ Forma indeterminada $0.\infty$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}$ Forma indeterminada∞/∞

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x}$

$=0.$

Luego, $\ln y=0$ entonces $y=1$, con lo que se obtiene

$$\mathbf{\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}=1}$$

Ejercicio 56

En el siguiente ejercicio se emplea de manera incorrecta la regla de L'Hòpital. Describa el error.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(\pi x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\pi\, cos(\pi x)}{1}=\pi$$

Solución. Mediante la sustitución directa se obtiene la indeterminación $1/0$, por lo que no puede aplicarse L'Hòpital. El resultado de dicho límite es $\pm\infty$, pero para ver el signo efectuamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{sin(\pi x)-1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{sin(\pi x)-1}{x}=+\infty$$