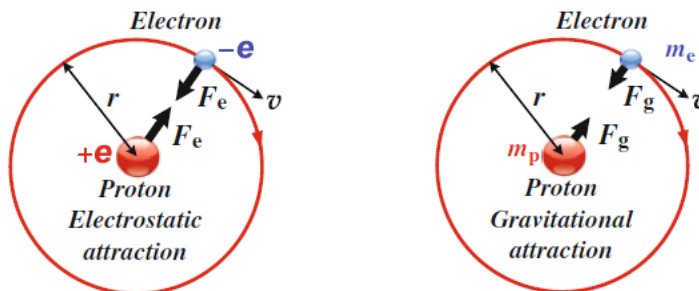


## Capítulo 21: CARGA ELÉCTRICA Y CAMPO ELÉCTRICO

**Ejercicio 1.** En el modelo clásico del átomo de Hidrógeno propuesto por Niels Bohr, el electrón gira alrededor del protón estacionario describiendo una órbita circular de radio  $r = 0.053 \text{ nm}$ , como se ve en la figura debajo. (a) Hallar la magnitud de la fuerza electrostática de atracción,  $F_e$ , entre el electrón y el protón. (b) Hallar la magnitud de la fuerza de atracción gravitacional entre el electrón y el protón,  $F_g$ , y luego hallar la relación  $F_e/F_g$ .



### Solución:

(a) El átomo de Hidrógeno consta de un protón en su centro y un electrón que orbita alrededor de él a una distancia  $r = 0,053 \text{ nm}$ . La fuerza electrostática puede determinarse mediante la Ley de Coulomb entre ambas cargas, que como poseen signos opuestos esa fuerza será atractiva.

El cualquier punto de la trayectoria del electrón  $F_e$  es:

$$\vec{F}_e = \frac{q_e^- q_e^+}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \text{N}}} (0,053 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2} \hat{r} = 8,19 \cdot 10^{-8} \text{ N } \hat{r}$$

Esta fuerza de origen eléctrico es generada por ambas cargas de signos opuestos por lo tanto es una fuerza atractiva, y apunta siempre hacia el centro de órbita donde se encuentra el protón.

(b) La fuerza gravitatoria  $F_g$  es siempre atractiva y depende de las masas del electrón y del protón, de la constante de gravitación y de la distancia que las separa, de la siguiente manera:

$$\vec{F}_g = \frac{G m_e^- m_p^+}{r^2} \hat{r} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}}{\text{kg}^2} (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}) (1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg})}{(0,053 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2} \hat{r} = 3,52 \cdot 10^{-47} \text{ N } \hat{r}$$

Finalmente, la relación entre la fuerza eléctrica y la gravitatoria, en este tipo de escalas atómicas, es favorable a la fuerza eléctrica, y la relación  $F_e/F_g = 2,32 \cdot 10^{39}$  haciendo que la fuerza gravitatoria sea despreciable respecto a la eléctrica.

**Ejercicio 2.** Determinar el campo eléctrico resultante en los puntos A y B, de acuerdo a la distribución de cargas mostradas en la figura, donde Q1 y Q2 son cargas puntuales. Q1 tiene una carga de  $-50 \mu\text{C}$ , y Q2  $+50 \mu\text{C}$ .

En este caso, se determina el campo eléctrico generado por cada carga en el punto A y luego se aplica el principio de superposición para hallar el campo eléctrico resultante. Para determinarlo en el punto B se procede de igual manera.

Luego en el punto A se tiene el campo  $E_{A1}$  debido a la carga Q1, como esta carga es negativa el campo eléctrico apunta hacia Q1; pero también se tiene el campo  $E_{A2}$  debido a la carga Q2, que como es positiva

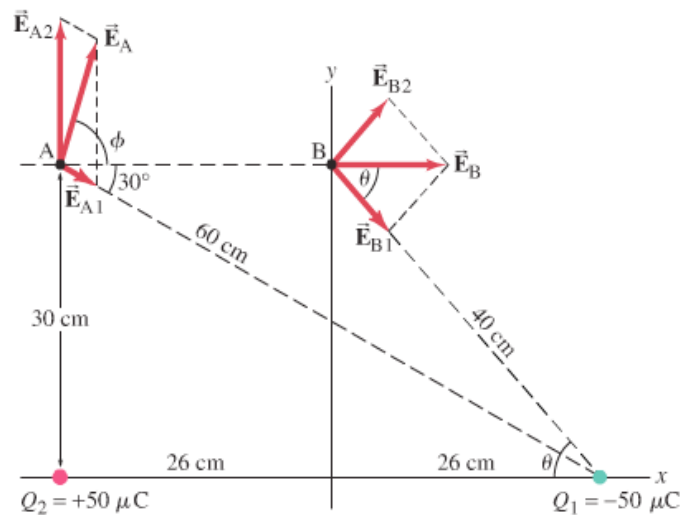
genera un campo eléctrico saliente desde Q2. Entonces, la fórmula para determinar el campo eléctrico es la siguiente:

$$\vec{E}_{A1} = \frac{Q1}{4\pi\epsilon_0 r_{A1}^2} \hat{r} \quad \vec{E}_{A2} = \frac{Q2}{4\pi\epsilon_0 r_{A2}^2} \hat{r}$$

La magnitud de cada campo:

$$E_{A1} = \frac{50^{-6} \text{ C}}{4\pi \cdot 8,85^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \text{N}} (0,6 \text{ m})^2} = 1,25^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_{A2} = \frac{50^{-6} \text{ C}}{4\pi \cdot 8,85^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \text{N}} (0,3 \text{ m})^2} = 5,0^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$



Para hallar el campo eléctrico en A se considera un sistema de referencia con origen en A que crece hacia arriba (+y) y hacia la derecha (+x), de manera que se debe descomponer el valor obtenido de cada campo de acuerdo con el sistema de referencia.

En sentido x ( $E_{Ax}$ ):

$$E_{Ax} = E_{A1x} + E_{A2x} = 1,25^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} (\cos 30^\circ) + 0 = 1,083^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

En sentido y ( $E_{Ay}$ ):

$$E_{Ay} = E_{A1y} + E_{A2y} = 1,25^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} (\sin 330^\circ) + 5,0^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} = 4,375^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Finalmente,  $E_A$ :

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{Ax} + \vec{E}_{Ay} = \sqrt{E_{Ax}^2 + E_{Ay}^2} = \sqrt{20,31^{12} \frac{\text{N}^2}{\text{C}^2}} = 4,51^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

La dirección del campo eléctrico resultante es la siguiente:

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{E_{Ay}}{E_{Ax}} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{4,375 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{C}}}{1,083 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{C}}} \right) = 76,1^\circ$$

Para hallar el campo eléctrico en el punto B, se procede idénticamente al caso anterior, con un sistema de referencia con origen en B que crece hacia arriba (+y) y hacia la derecha (+x). Nuevamente se determinan las magnitudes de los campos eléctricos que producen tanto Q1 como Q2 en B. También, al igual que ocurre en A, el campo generado por Q1 está dirigido hacia Q1 mientras que el campo generado por Q2 es saliente de la misma carga.

$$\vec{E}_{B1} = \frac{Q1}{4\pi\epsilon_0 r_{B1}^2} \hat{r} \quad \vec{E}_{B2} = \frac{Q2}{4\pi\epsilon_0 r_{B2}^2} \hat{r}$$

Existe un eje de simetría en el eje (y) que pasa por el punto B, y que se encuentra a la mitad de la distancia que separa Q1 de Q2; por lo tanto, esto indica que las magnitudes de los campos eléctricos generados en B por Q1 y por Q2 serán iguales, debido a que la magnitud de cada carga es la misma y la distancia de c/u respecto al punto B también.

La magnitud de cada campo será:

$$E_{B1} = \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \text{N}} (0,4 \text{ m})^2} = 2,81 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

$$E_{B2} = \frac{50 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \text{N}} (0,4 \text{ m})^2} = 2,81 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Para determinar las componentes respecto a cada eje, se debe definir el ángulo de inclinación  $\theta$ .

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{30 \text{ cm}}{26 \text{ cm}} \right) = 49,1^\circ$$

En sentido x ( $E_{Bx}$ ):

$$E_{Bx} = E_{B1x} + E_{B2x} = 2,81 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} [(\cos(360^\circ - 49,1^\circ)) + (\cos 49,1^\circ)] = 3,68 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

En sentido y ( $E_{By}$ ):

$$E_{By} = E_{B1y} + E_{B2y} = 2,81 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}} [(\sin(360^\circ - 49,1^\circ)) + (\sin 49,1^\circ)] = 0 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Finalmente,  $E_B$ :

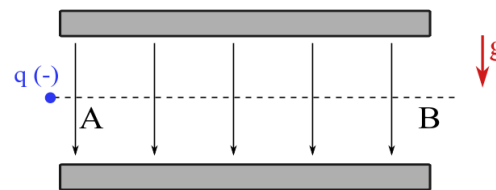
$$\vec{E}_B = \vec{E}_{Bx} + \vec{E}_{By} = \sqrt{E_{Bx}^2 + 0} = \sqrt{13,54 \cdot 10^{12} \frac{\text{N}^2}{\text{C}^2}} = 3,68 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

La dirección del campo eléctrico resultante en B es la del eje (+x).

**Ejercicio 3.**

Dadas las siguientes placas infinitas que establecen un campo eléctrico uniforme  $E(1000\text{N/C})$ .

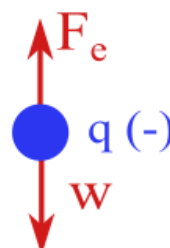
- a) ¿Qué tipo de cargas tienen las placas?  
b) Una partícula con masa  $m$  desconocida y carga  $q = -10\mu\text{C}$  recorre el trayecto AB en línea recta. Considerando la gravedad  $g$ , ¿Es posible esta trayectoria recta AB? ¿Cuál es el valor de la masa?



a) La placa superior tiene carga positiva dado que el campo eléctrico es saliente y la inferior negativa dado que el campo eléctrico es entrante.

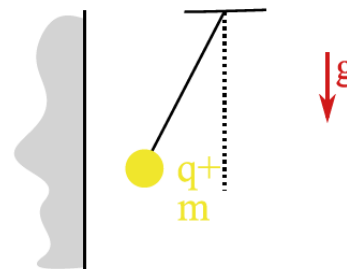
b) Es posible la trayectoria A-B en línea recta. Para ello se debe cumplir el siguiente balance de fuerzas sobre la partícula. Al no existir fuerza en la dirección horizontal, la partícula conserva la velocidad inicial. Note que la fuerza eléctrica actúa en la dirección contraria al campo eléctrico.

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ F_e - w &= 0 \\ Eq - mg &= 0 \\ m &= \frac{Eq}{g} = \frac{1000 \frac{\text{N}}{\text{C}} 10 \times 10^{-6} \text{ C}}{9.81 \text{ m/s}^2} \approx 1 \text{ gr}\end{aligned}$$

**Ejercicio 4.**

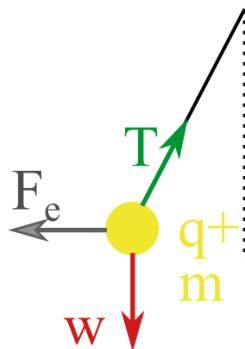
Dada una pared infinitamente larga y profunda.

- a) ¿Tiene carga la pared? ¿De qué tipo (+/-)?  
b) Grafique líneas de campo  $E$  teniendo en cuenta que la carga  $q$  es despreciable respecto a la carga de la placa. Realice el diagrama de cuerpo libre en la masa  $m$ .  
d) Si se conoce el ángulo, la carga de  $q+$  y  $E$ , ¿Se puede calcular la masa?:



a) Dado que la masa con carga positiva es atraída hacia la pared la misma debe tener carga negativa, de lo contrario se repele.

b) Dado que la placa tiene carga eléctrica negativa, el campo eléctrico se dirige hacia la misma. Como la placa es infinitamente larga el campo se provoca como líneas perpendiculares a la misma. Las figuras a continuación muestran el campo eléctrico de la placa y el diagrama de cuerpo libre sobre el cuerpo.



c) Si, consideramos el eje x horizontal e y vertical:

$$-F_e + T \sin(\alpha) = 0 \rightarrow T \sin(\alpha) = Eq$$

$$T \cos(\alpha) - mg = 0 \rightarrow T \cos(\alpha) = mg$$

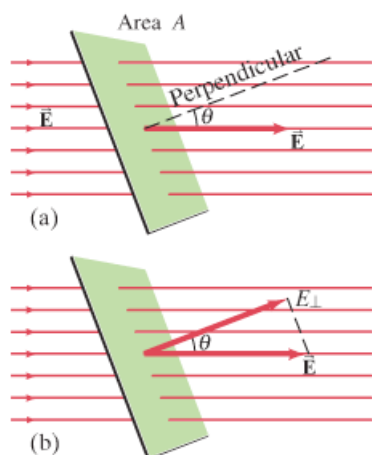
Así,  $\tan(\alpha) = \frac{Eq}{mg}$  y se puede obtener la masa:

$$m = \frac{Eq}{\tan(\alpha) g}$$

## Capítulo 22: LEY DE GAUSS

### Flujo Eléctrico

Considere un campo eléctrico uniforme  $E$  que penetra en un área  $A$  dada, como se muestra en la figura 1. Recuerde que las líneas del campo eléctrico están más juntas cuando el campo eléctrico es fuerte, y muy separadas cuando el campo es débil. Por tanto, el número total de líneas que penetran en la superficie es proporcional a  $E$  y  $A$ . Este producto escalar se llama flujo eléctrico y se lo denomina  $\Phi_E$ .



$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = |E| \cdot |A| \cos \theta = \left[ \frac{N}{C} \cdot m^2 \right]$$

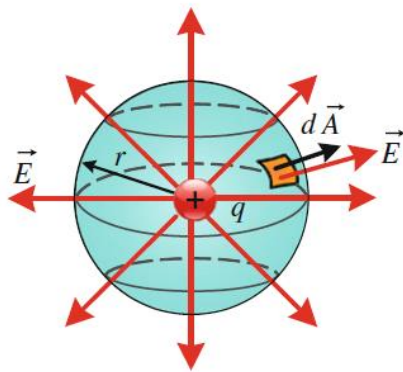
Como el número de líneas de campo que atraviesan una determinada área es indicativo de la magnitud del campo eléctrico, de igual forma ocurre con el flujo eléctrico. Es decir que, si una mayor cantidad de líneas de campo eléctrico atraviesa el área, mayor será el flujo; mientras que, si el área es atravesada por una menor cantidad de líneas, el flujo eléctrico es menor.

En términos generales, cuando el campo no es uniforme se puede expresar al flujo eléctrico  $\Phi_E$  como la integral sobre una superficie cerrada del campo eléctrico que atraviesa un diferencial de área.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

**Ejemplo 1.** Encuentre el flujo eléctrico a través de una esfera de radio  $r$  que encierra en su centro: (a) una carga positiva  $+q$  (figura 2), y (b) una carga negativa  $-q$  (figura 3).

(a) Considerando la carga  $+q$ , esta producirá un campo eléctrico saliente desde  $q$  y a una misma distancia  $r$  de la carga el campo eléctrico será constante e igual a:



$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Phi_E = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint |\hat{r}| \cdot |d\vec{A}| \cos 0^\circ$$

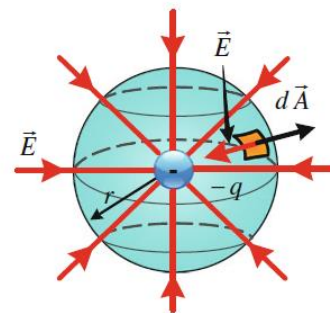
$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(b) En este caso la carga  $-q$  producirá un campo eléctrico entrante, pero la forma de resolverlo es similar, donde lo que cambia es el signo del campo eléctrico y también del flujo porque el diferencial de área sigue apuntando hacia afuera de la superficie.

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint |\hat{r}| \cdot |d\vec{A}| \cos 180^\circ$$

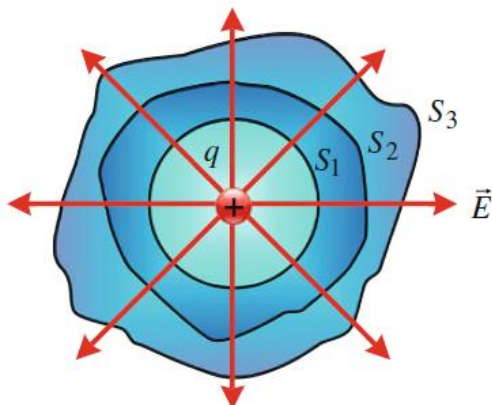
$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 (-1) = \frac{-q}{\epsilon_0}$$



## Ley de Gauss

Esta ley resulta una herramienta similar a la ley de Coulomb para determinar el campo eléctrico, pero es más efectiva cuando existen formas de simetría en las cargas. Un aspecto central de la ley de Gauss es una hipotética superficie cerrada llamada superficie Gaussiana definida por el usuario para la resolución de un problema.

Por ejemplo, considerando varias superficies Gaussianas cerradas que rodean la carga  $+q$ , como se muestra en la figura 4. El número de líneas de campo eléctrico que atraviesan la superficie esférica  $S_1$  es el mismo que el número de líneas que atraviesan las superficies no esféricas  $S_2$  y  $S_3$ . Por lo tanto, el flujo eléctrico a través de cualquier superficie Gaussiana que rodea la carga puntual  $+q$  es igual a  $+q$  dividido  $\epsilon_0$ .



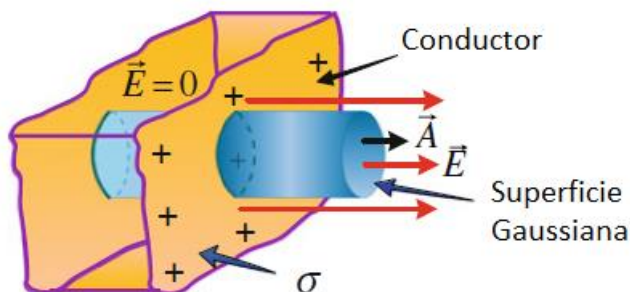
Ley de Gauss:

El flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta dentro de la superficie ( $Q_{enc}$ ) dividida por la permitividad del espacio libre  $\epsilon_0$ , y equivale a la siguiente fórmula:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

## Aplicaciones de Ley de Gauss

**Ejercicio 2.** Usando la ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico justo fuera de la superficie de un conductor que tiene una densidad de carga superficial  $+\sigma$ . Donde  $\sigma = +Q/A$ .



Dentro del conductor no existen cargas ya que las mismas se desplazan hacia el borde superficial, por lo tanto, el campo eléctrico es 0.

La superficie del conductor se encuentra con una densidad de carga  $+\sigma$  generando líneas de campo salientes y perpendiculares a la superficie del conductor, como se aprecia por las flechas rojas de la figura 5.

Para poder aplicar la ley de Gauss, en primer lugar, se considera una pequeña sección plana de la superficie del conductor para descartar la curvatura. Luego, se construye una superficie Gaussiana con forma cilíndrica normal al conductor como se muestra en la Fig. 5 en color azul; donde un extremo del cilindro está dentro del conductor mientras que el otro extremo está fuera y cada extremo tiene un área  $A$ .

El campo eléctrico  $\mathbf{E}$  dentro del conductor es cero y el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  justo fuera de la superficie del conductor debe ser perpendicular a la superficie. Si esto no fuera cierto, el componente de campo a lo largo de la superficie del conductor forzaría a los electrones libres a moverse, violando el equilibrio electrostático del conductor.

Para encontrar el flujo neto a través de esta superficie Gaussiana cilíndrica, se debe considerar cada una de las 4 caras del cilindro.

(Cara 1) Como  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  dentro del conductor, entonces el flujo a través del extremo del cilindro dentro del conductor es  $\Phi_E = 0$ .

(Cara 2) Por la misma razón, el flujo a través de la superficie curva del cilindro dentro del conductor es  $\Phi_E = 0$ .

(Cara 3) Como el campo  $\mathbf{E}$  es perpendicular a la normal  $\mathbf{n}$  de la superficie curva del cilindro fuera del conductor, el producto escalar  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}A = 0$  por estar a  $90^\circ$  ambos vectores, luego  $\Phi_E = 0$ .

(Cara 4) Como el campo  $\mathbf{E}$  es paralelo a la normal  $\mathbf{n}$  del extremo del cilindro que está fuera del conductor, el producto escalar  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}A = EA$  por estar a  $0^\circ$  ambos vectores, y el flujo allí es  $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}A$ .

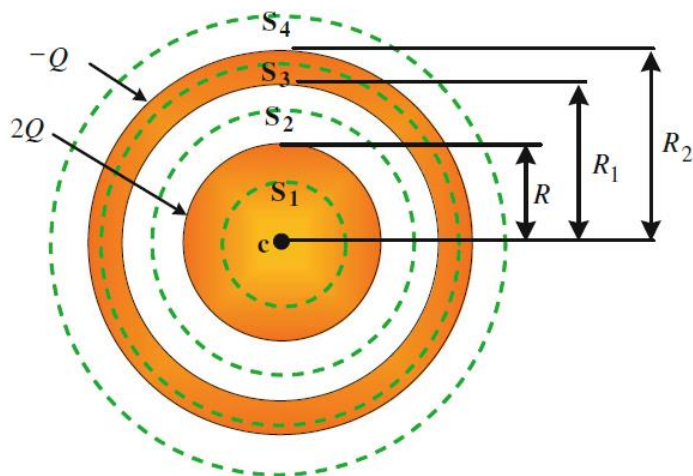
Por tanto, el flujo neto a través de la superficie Gaussiana cilíndrica es  $\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}A$ . Dado que  $Q_{enc} = \sigma A$ , podemos encontrar el campo eléctrico justo fuera de la superficie del conductor de la siguiente manera:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_E = E \cdot A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

**Ejercicio 3.** La figura 6 presenta una esfera conductora de radio  $R$  tiene una carga neta de  $+2Q$ . Una cáscara esférica conductora de radio interior  $R_1$  ( $R_1 > R$ ) y radio exterior  $R_2$  lleva una carga neta negativa  $-Q$ . Esta cáscara es concéntrica con la esfera conductora. Encuentre la magnitud del campo eléctrico a una distancia

r del centro común para las siguientes situaciones: (a) para  $r < R$ , (b) para  $R < r < R_1$ , (c) para  $R_1 < r < R_2$ , y (d)  $r > R_2$ . Graficar en E vs r.



Las distribuciones de carga consideradas se caracterizan por ser esféricamente simétricas alrededor del centro común c. Luego las soluciones ameritan considerar superficies Gaussiana esférica y concéntricas, como  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  y  $S_4$ . Además, el campo eléctrico dentro de un conductor es cero y todo el exceso de carga estará completamente en la superficie exterior del conductor aislado.

(a) En esta región, la esfera Gaussiana  $S_1$  con la condición  $r < R$  no encierra ninguna carga, ya que no hay carga dentro del conductor en esta región, es decir,  $Q_{enc} = 0$ ; entonces,  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$ .

(b) La esfera Gaussiana  $S_2$  con la condición  $R < r < R_1$  encierra toda la carga de la esfera y  $Q_{enc} = +2Q$ , luego la ley de Gauss dice que:

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{+2Q}{\epsilon_0}$$

$$E_2 \cdot (4\pi r^2) = \frac{+2Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{+2Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(c) La esfera Gaussiana  $S_3$  con la condición  $R_1 < r < R_2$ , encierra la cáscara conductora con carga neta  $-Q$ . Pero, en el conductor el campo eléctrico debe ser 0, es decir  $\mathbf{E}_3 = \mathbf{0}$ ; entonces, según la ley de Gauss, la carga neta  $Q_{enc}$  también debe ser cero. Luego, para que esto se cumpla, se debe establecer una carga inducida  $-2Q$  en la superficie interna de la cáscara para cancelar la carga  $+2Q$  en la esfera sólida, también encerrada por  $S_3$ . Además, como la carga neta en toda la cáscara es  $-Q$ , su superficie exterior deberá llevar una carga inducida  $+Q$ .

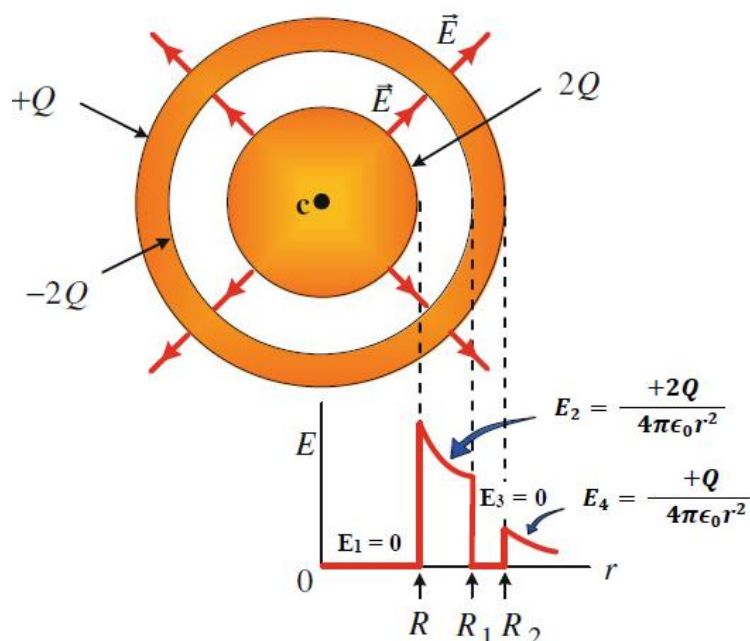
(d) En esta región, la esfera gaussiana  $S_4$  con la condición  $r > R_2$ , encierra todas las cargas, tanto de la esfera como de la cáscara, y la carga neta es  $Q_{enc} = 2Q - Q = Q$ . Luego usando ley de Gauss podemos hallar el valor del campo  $E_4$ .

$$\oint \vec{E}_4 \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{2Q - Q}{\epsilon_0}$$

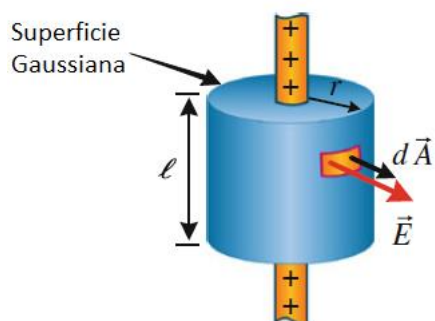
$$E_4 \cdot (4\pi r^2) = \frac{+Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E_4 = \frac{+Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Gráficamente, en la figura 7 se muestra el comportamiento del campo eléctrico versus la distancia r desde el centro de la esfera; así como la distribución de cargas en los conductores.





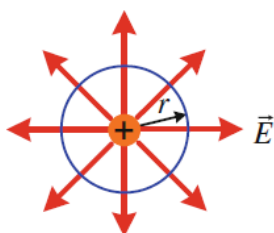
**Ejercicio 4.** Usando la ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico a una distancia  $r$  de una varilla larga y delgada que tiene una carga uniforme por unidad de longitud  $+\lambda$ . Donde  $\lambda = +Q / \ell$ .



El campo eléctrico fuera de la varilla es radial y se encuentra en un plano perpendicular a la varilla. Además, el campo tiene la misma magnitud en todos los puntos a la misma distancia radial de la varilla.

De acuerdo a esto se puede construir una superficie Gaussiana cilíndrica de radio  $r$  arbitrario y una altura  $\ell$ . El cilindro tendría sus extremos perpendiculares a la varilla como se muestra en la Figura 8.

Vista de arriba



Claramente en ambas caras de los extremos de la superficie cilíndrica Gaussiana no hay flujo eléctrico porque el producto escalar entre el vector  $\vec{E}$  y la normal a la superficie  $\vec{n}$  es igual a 0, ya que son perpendiculares ( $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ ), luego  $\Phi_E = 0$ .

Por otro lado, la superficie curva del cilindro Gaussiano, definida a una distancia  $r$ , tiene una normal  $\vec{n}$  que es paralela al campo eléctrico  $\vec{E}$  en toda la misma, a esa distancia  $r$  del centro de la varilla el campo es constante. Luego aplicando ley de Gauss se obtiene:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{\ell \lambda}{\epsilon_0}$$

$$E \cdot (2\pi r)\ell = \frac{\ell \lambda}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{(2\pi r)\epsilon_0}$$