Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

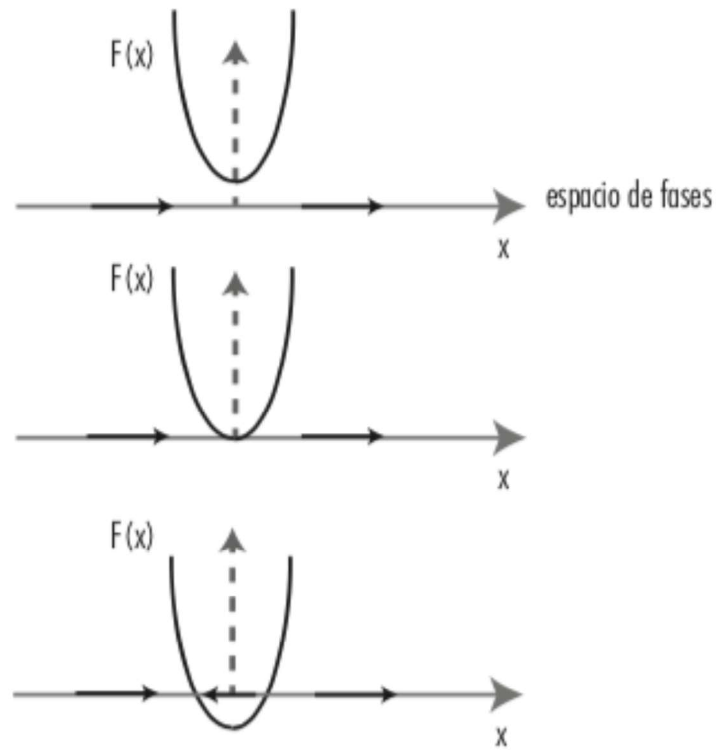
Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

¿Que son las bifurcaciones? Cambios cualitativos en el flujo (conjunto de soluciones) ante cambios de parametros.

$$\frac{dx}{dt} = r + x^2 \quad r \in \mathbb{R}$$



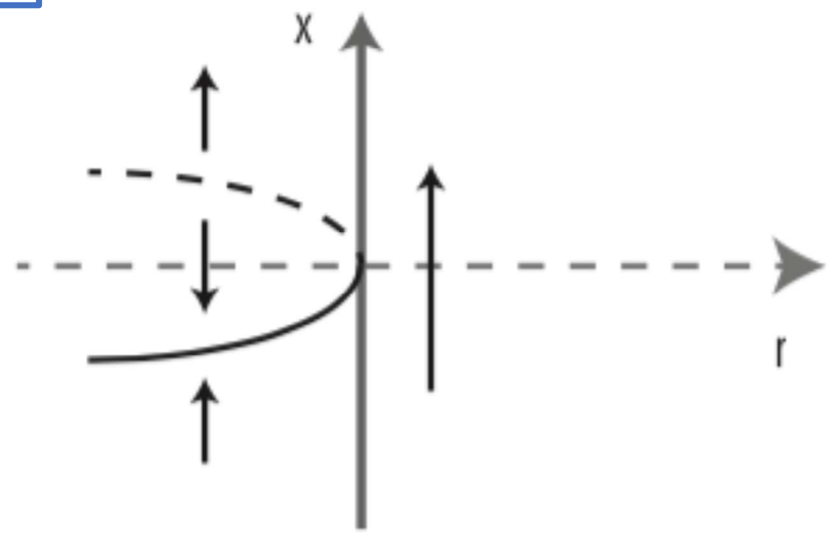
¿Como se representan las bifurcaciones?

Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

Diagrama de bifurcaciones

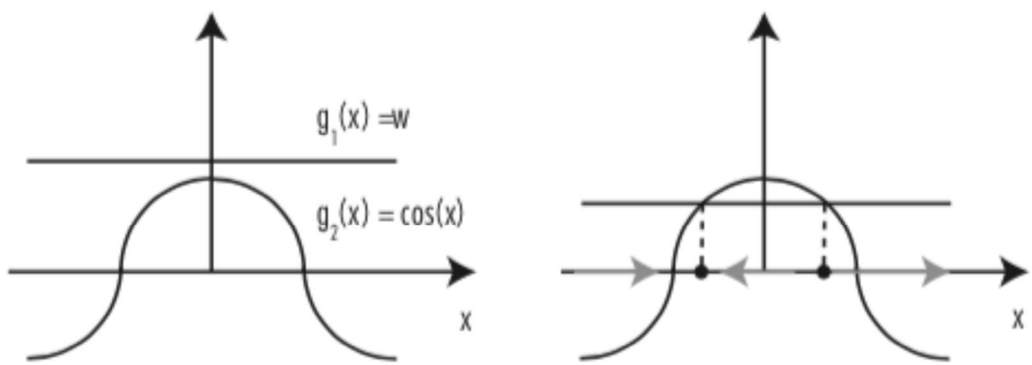


¿**Puede un tipo de bifurcacion aparecer en distintas ecuaciones**?

Ejemplo. Sea el campo vector

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = \omega - \cos(x)$$
$$r \in \mathbb{R}, \quad x \in S^1 \quad .$$

¿Puede un tipo de bifurcacion aparecer en distintas ecuaciones?



También podemos hacer un análisis distinto para estudiar la estabilidad del sistema. Notemos que podemos "descomponer" al campo vector en dos términos (esto es, $\frac{dx}{dt} = \omega\text{-}\cos(x) = g_1(x)\text{-}g_2(x)$, con $g_1(x) \equiv \omega, g_2(x) \equiv \cos(x)$), la condición de tangencia entre estas puede expresarse así:

$$\frac{d(\omega)}{dx} = 0 = \frac{d(\cos(x))}{dx}, \quad de\ donde\ x = 0\ o\ x = \pi.$$
$$Así, \quad si \quad \omega = 1 \ \Rightarrow x = 0.$$

De este modo, en el entorno de $\omega = 1, x = 0$, podemos escribir un sistema dinámico en el cual el campo vector se simplifica mediante el truncado del desarrollo de Taylor del término exponencial:

$$\frac{dx}{dt} = \omega - \cos(x) = 1 + \epsilon - \left\{1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots\right\} = \epsilon + \frac{x^2}{2!} + O(4)$$
$$\boxed{\frac{dx}{dt} \approx \epsilon + \frac{x^2}{2!}.}$$

Es esta una estrategia que nos pueda servir para estudiar ecuaciones "sencillas", paradigmaticas, que representen a la original?

4. UN PRIMER INTENTO DE FORMALIZACIÓN

Sea $F = F(x, r)$ con $x, r \in \mathbb{R}$. Desarrollemos el campo vector en el entorno de un punto estacionario x^*, para valores del parámetro cercanos al valor r_c, el parámetro para el cual ocurre la bifurcación;

$$\frac{dx}{dt} = F(x,r) = F(x^*, r_c) + (x - x^*)\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x^*,r_c)} + (r - r_c)\left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_{(x^*,r_c)} + \frac{1}{2}(x - x^*)^2 \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{(x^*,r_c)} + \cdots$$

¿**Puede un tipo de bifurcacion aparecer en distintas ecuaciones**?

Ejemplo. Para el campo vector

$$\frac{dx}{dt} = -x + S(\rho + cx)$$

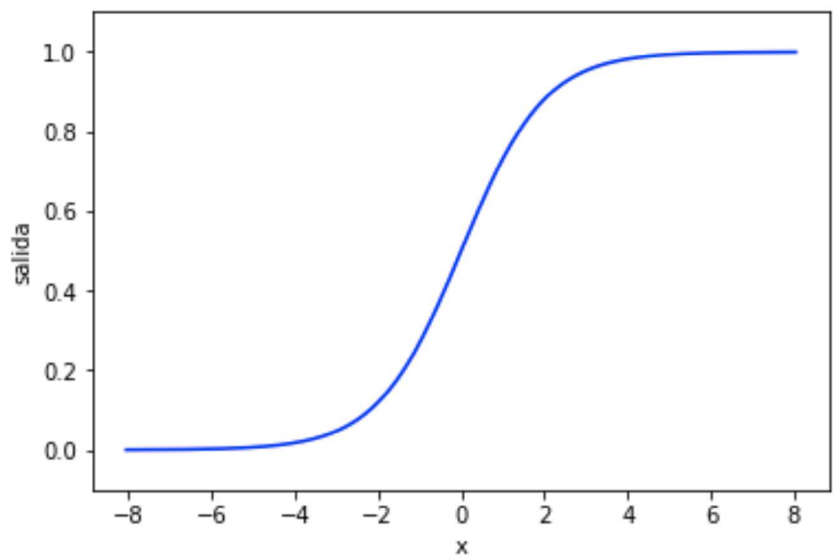
$$S(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad ,$$

Modelado del continuo

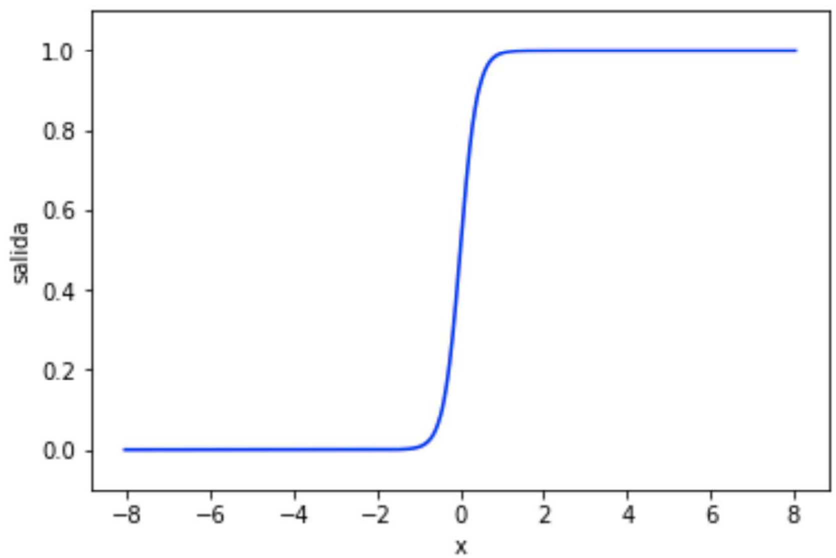
G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

$$S(x) = 1/(1+e^{-x})$$



$$S(cx) = 1/(1+e^{-cx}), \quad c>1$$

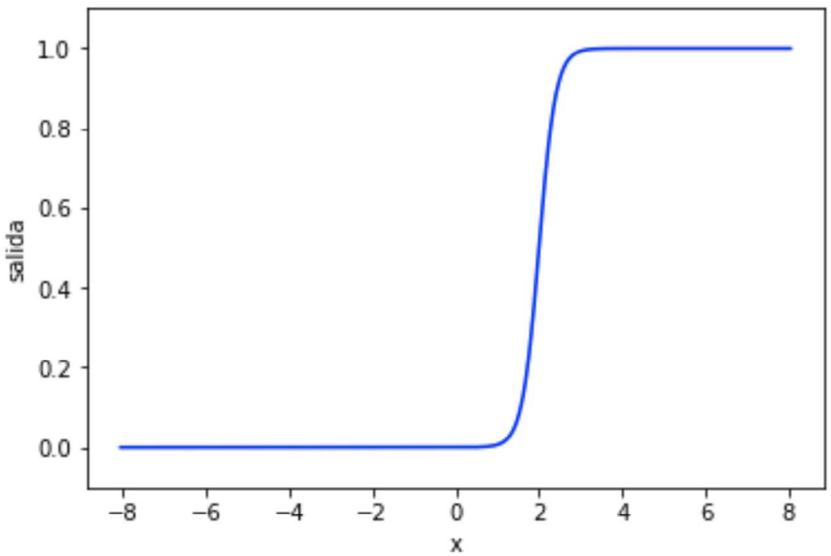


Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

$S(\rho + cx) = 1/(1+e^{-(cx+\rho)}), \quad c>1 \quad \rho<0$

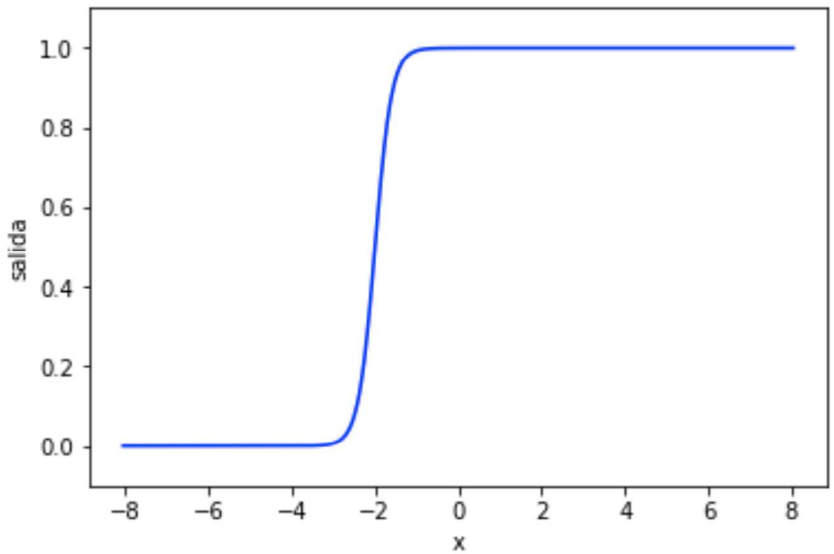


Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

$S(\rho + cx) = 1/(1+e^{-(cx+\rho)}), \quad c>1 \quad \rho>0$



¿Puede un tipo de bifurcacion aparecer en distintas ecuaciones?

$$\frac{dx}{dt} = -x + S(\rho + cx)$$
$$S(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad .$$

Miremos los puntos fijos…

Los podemos pensar como los ceros del campo vector, o lo que es lo mismo, como las intersecciones entre la recta y=x, y la curva y=S(rho+cx) .

$$\frac{dx}{dt} = -x + S(\rho + cx)$$
$$S(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad .$$

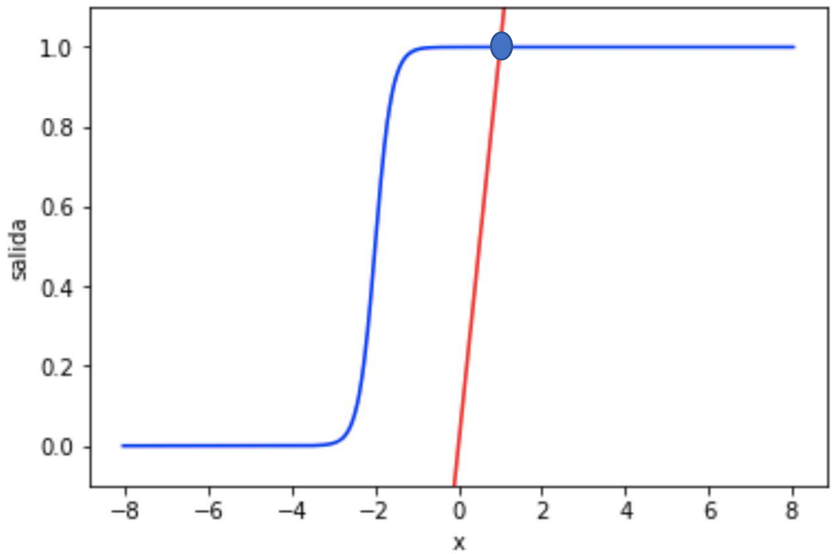
Miremos los puntos fijos…

Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

$S(\rho + cx) = 1/(1+e^{-(cx+\rho)})$, $c>1$ $\rho>0$



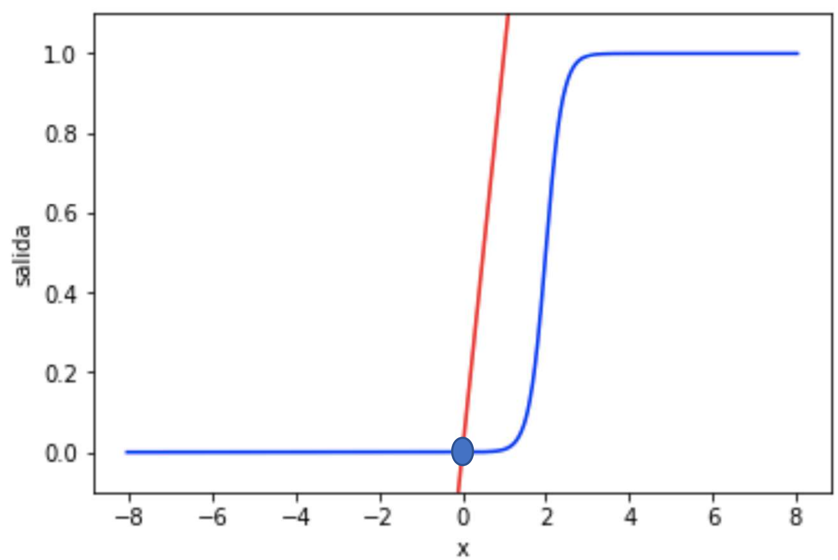
$$\frac{dx}{dt} = -x + S(\rho + cx)$$

Modelado del continuo

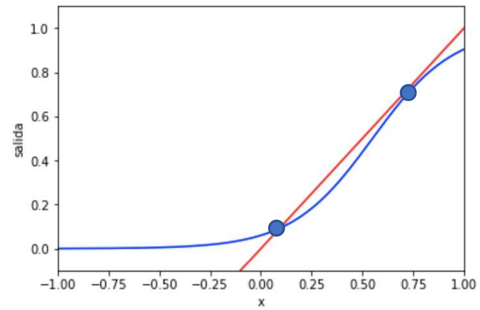
G. M

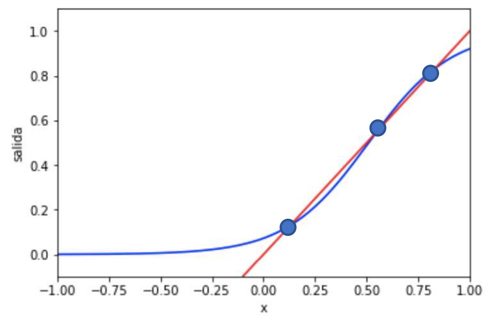
Laboratorio de sistemas dinamicos

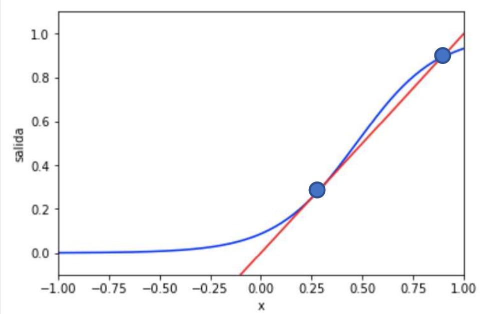
$S(\rho + cx) = 1/(1+e^{-(cx+\rho)})$, $c>1$ ρ chico



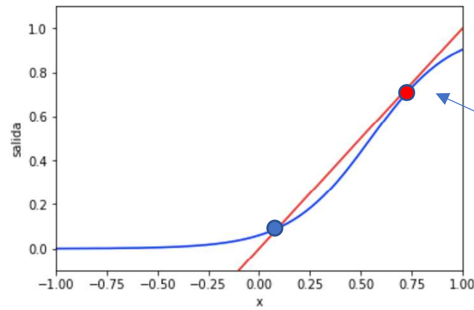
Para un c suficientemente grande, al aumentar el valor de ρ, nos encontramos con un rango de parametros ρ en el cual existen tres puntos fijos



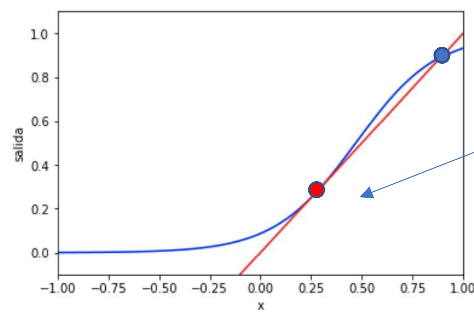




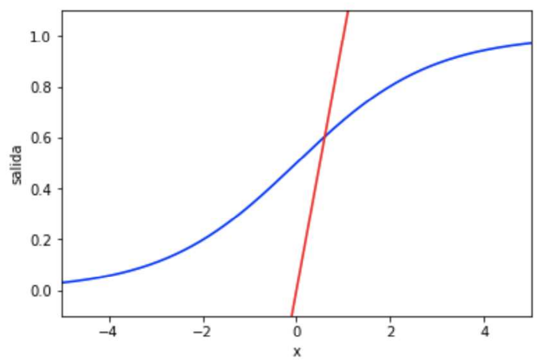
Aumentamos ρ



En estos dos casos, para el punto rojo se cumplen dos condiciones. La primera, es obvia: que el campo vector es nulo, porque es un punto fijo. Pero ademas, se cumple que la pendiente de la sigmoidea en ese punto vale 1, porque es tangente a la recta y=x



Atencion: para que todo este zoologico ocurra,
El valor de c debe ser lo suficientemente grande como para
Que la pendiente en el argumento cero de la sigmoidea
Tenga pendiente mayor que 1

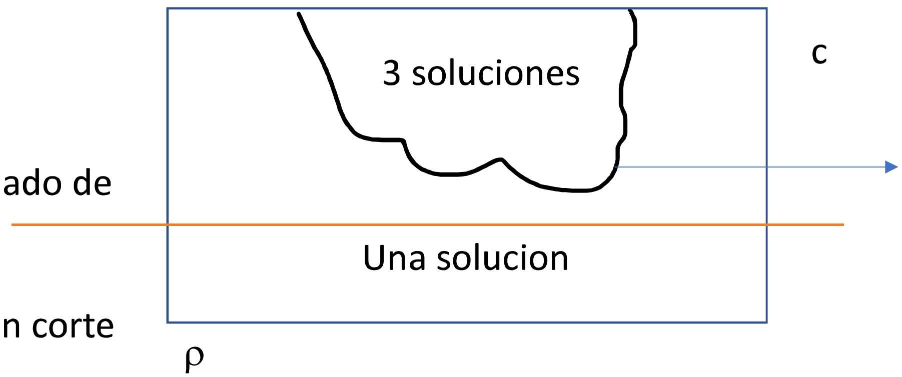


Si c es chico, habra un
solo punto fijo siempre, o sea,
para cualquier valor de rho

Un valor dado de c

es hacer un corte

en la direccion de la linea naranja

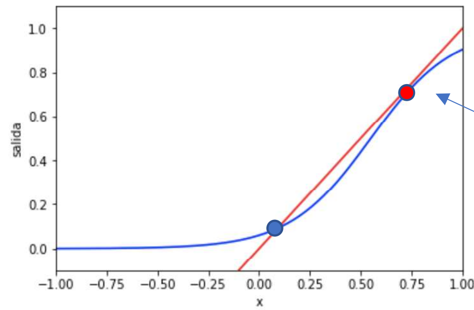


Cualquier punto de esta frontera, en el espacio de parámetros, permite que se cumplan estas dos condiciones para un punto del espacio de fases::

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = 0 = -x + S(\rho + cx),}$$

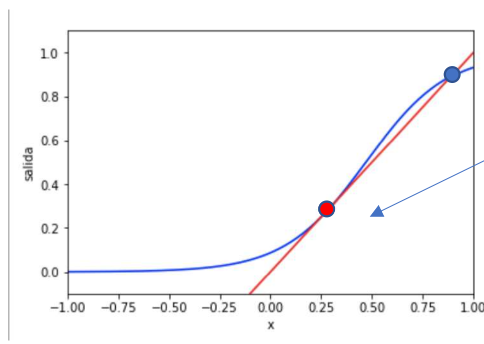
mientras que la condición de que está ocurriendo una bifurcación se escribe como

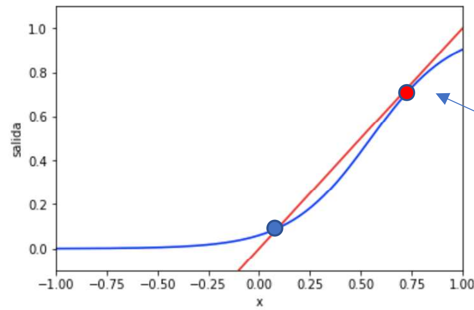
$$\boxed{\frac{dS(y)}{dy}(c) - 1 = 0,}$$



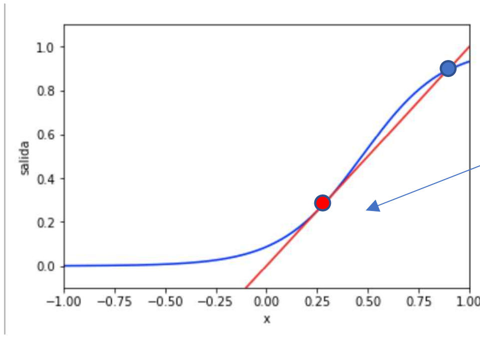
Tanto el punto fijo azul como el rojo satisfacen la primera condición, pero solo el rojo satisfice la segunda, que es la condición de “bifurcación” (cambio cualitativo de flujo ante cambio de parámetros)

Para un valor de c,
Habra distintos valores de rho
En los cuales hay una “tangencia”





Notemos que cambiando al valor de c, cambiara la posicion de los puntos fijos donde ocurren ambas transiciones. valores de c grandes, dara que uno es cercano a cero y otro a uno. Valores chicos de c, dara que ambas ocurren para un mismo punto, a mitad de camino.



$$\boxed{x = \frac{1}{1 + e^{-(\rho + cx)}}}$$

$$\boxed{1 = \frac{c}{(1 + e^{-(\rho+cx)})^2} e^{-(\rho+cx)}.}$$

De la primera despejamos para obtener:

$$e^{-(\rho+cx)} = \frac{1-x}{x},$$

que reemplazada en la segunda condición da

$$\boxed{c = \frac{1}{x(1-x)}.}$$

Por otro lado, tomando logaritmo en la expresión que despejamos, tenemos

$$\rho + cx = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

$$\boxed{\rho = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{1}{1-x}.}$$

De este modo, tenemos dos condiciones que vinculan a tres números reales. Los puntos estacionarios pueden tomar valores entre 0 y 1, de modo que una manera de *ordenar el problema* es encontrar las funciones $c(x)$ y $r(x)$ para las cuales se cumplen estas dos condiciones. Dicho de otro modo, variando x entre 0 y 1 podemos generar las curvas (ρ,c), en las cuales ocurren las bifurcaciones. Más precisamente, se cumplen las siguientes condiciones:

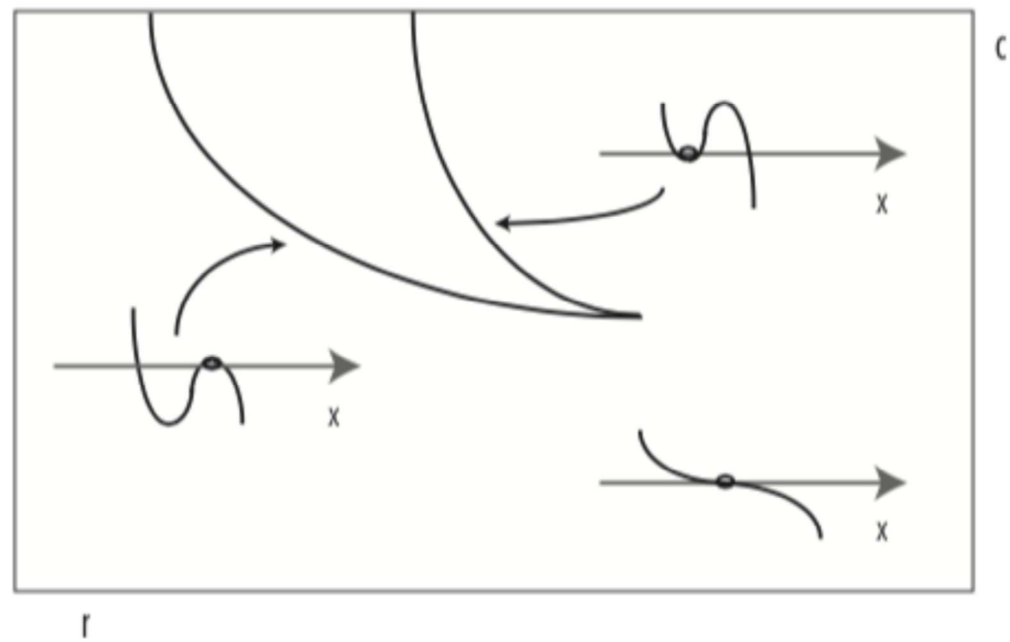
$$x = \frac{1}{1+e^{-(\rho+cx)}}$$

$$1 = \frac{c}{(1+e^{-(\rho+cx)})^2}\, e^{-(\rho+cx)}.$$

Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos



En cada una de estar dos curvas, que se unen en una cuspide, ocurre una bifurcacion de nodo como la del comienzo de nuestra discusion

Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos

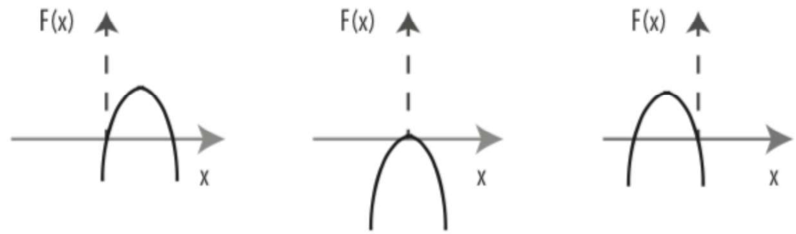
Este analisis parece un poco tortuoso…

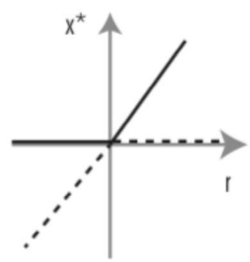
No seria interesante que pudiesemos llevar las ecuaciones de este problema, a la Ecuacion sencilla con la que empezamos nuestra discusion?

Antes de ver como llevar nuestra ecuacion a una ecuacion sencilla, veamos algunas otras de estas ecuaciones “paradigmaticas”

Spoiler: cerca de la “cuspide”, $x' = a + bx - x^3$

$$\frac{dx}{dt} = rx - x^2.$$

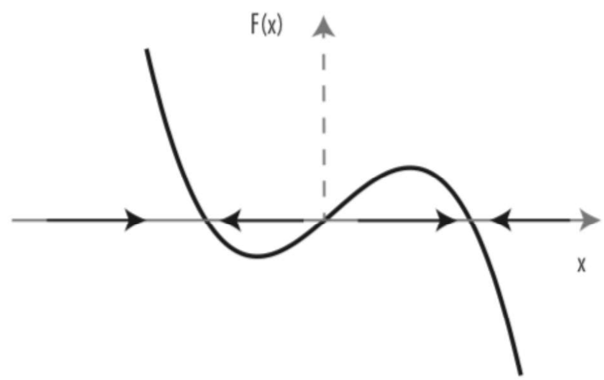




El último sistema dinámico sencillo que presentaremos en esta introducción es

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3$$

con $x, \mu \in \mathbb{R}$.



$$\frac{d(-x)}{dt} = \mu(-x) - (-x)^3 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = \mu(x) - x^3.$$

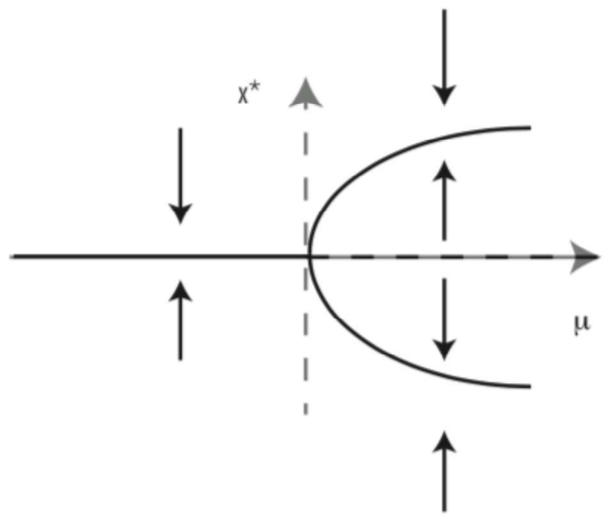
Podemos calcular la estabilidad de estas soluciones estudiando el problema linealizado (siempre bajo la hipótesis de que las soluciones del sistema linealizado dan una buena idea de cómo serán las trayectorias del sistema original);

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mu\varepsilon - 3x^2|_{x=\pm\sqrt{\mu}}\varepsilon = -2\mu\varepsilon,$$

Modelado del continuo

G. M

Laboratorio de sistemas dinamicos



Ruptura espontanea de la simetria: las soluciones Tienen menos simetria que las ecuaciones.