Trabajo Práctico 11 - Formas bilineales

Santiago

1. Decir cuáles de las siguientes aplicaciones $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son bilineales.💀

   (a) $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 1$
   Por definición, una forma bilineal sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V(en este caso $\mathbb{R}^2$) es una función $\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que:

      i. $\mathcal{A}(\alpha u + v, w) = \alpha\mathcal{A}(u, w) + \mathcal{A}(v, w) \quad u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{K}$
      ii. $\mathcal{A}(u, \alpha v + w) = \alpha\mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(u, w) \quad u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{K}$

   Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que: $\mathcal{A}(\alpha u+v, w) = 1$ por defición, mientras que $\alpha\mathcal{A}(u, w)+\mathcal{A}(v, w) = \alpha \cdot 1+1 = \alpha + 1$, con lo cual no se cumple la primer condición y por ende $\mathcal{A}$ no es una forma bilineal.

   (b) $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + y_1)^2 - (x_1 - y_1)^2$
   Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \to \mathcal{A}(\alpha u + v, w) =$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha(u_1, u_2) + (v_1, v_2), (w_1, w_2)) && \text{Definición } u, v, w \\
&= ((\alpha u_1 + v_1, \alpha u_2 + v_2), (w_1, w_2)) && \text{Suma vec y Producto por escalar} \\
&= ((\alpha u_1 + v_1) + (\alpha u_2 + v_2))^2 - ((\alpha u_1 + v_1) - (\alpha u_2 + v_2))^2 && \text{Definición } \mathcal{A} \\
&= 4(\alpha u_1 + v_1)(\alpha u_2 + v_2) && \text{Suma en } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Por otra parte tenemos que $\alpha\mathcal{A}(u, w) + \mathcal{A}(v, w) =$

$$\begin{aligned}
&= \alpha\mathcal{A}((u_1, u_2), (w_1, w_2)) + \mathcal{A}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) && \text{Definición } u, v, w \\
&= \alpha((u_1 + u_2)^2 - (u_1 - u_2)^2) + (v_1 + v_2)^2 - (v_1 - v_2)^2 && \text{Definición } \mathcal{A} \\
&= \alpha(4u_1u_2) + 4v_1v_2 && \text{Suma en } \mathbb{R}
\end{aligned}$$

   Como no se cumple la primera condición, $\mathcal{A}$ no es una forma bilineal.

   (c) $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 - y_1)^2 + x_2y_2$
   Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \to \mathcal{A}(\alpha u + v, w) =$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha(u_1, u_2) + (v_1, v_2), (w_1, w_2)) && \text{Definición } u, v, w \\
&= ((\alpha u_1 + v_1, \alpha u_2 + v_2), (w_1, w_2)) && \text{Suma vec y Producto por escalar} \\
&= ((\alpha u_1 + v_1) - (\alpha u_2 + v_2))^2 + w_1w_2 && \text{Definición } \mathcal{A} \\
&= 2(\alpha u_1 + v_1)(\alpha u_2 + v_2) + w_1w_2
\end{aligned}$$

   Por el otro lado $\alpha\mathcal{A}(u, w) + \mathcal{A}(v, w) =$

$$\begin{aligned}
&= \alpha\mathcal{A}((u_1, u_2), (w_1, w_2)) + \mathcal{A}((v_1, v_2), (w_1, w_2)) && \text{Definición } u, v, w \\
&= \alpha((u_1 - u_2)^2 + w_1w_2) + (v_1 - v_2)^2 + w_1w_2 && \text{Definición } \mathcal{A}
\end{aligned}$$

   En donde se ve que no son iguales, con lo cual $\mathcal{A}$ no es una forma bilineal.

   (d) $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$
   Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \to \mathcal{A}(\alpha u + v, w) =$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha(u_1, u_2) + (v_1, v_2), (w_1, w_2)) && \text{Definición } u, v, w \\
&= ((\alpha u_1 + v_1, \alpha u_2 + v_2), (w_1, w_2)) && \text{Suma vec y Producto por escalar} \\
&= (\alpha u_1 + v_1)w_2 + (\alpha u_2 + v_2)w_1 && \text{Definición } \mathcal{A} \\
&= \alpha(u_1w_2 + u_2w_1) + v_1w_2 + v_2w_1 \\
&= \alpha\mathcal{A}(u, w) + \mathcal{A}(v, w) && \text{Definición } \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Se cumple la primera condición, ahora para la segunda: Sean $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \to \mathcal{A}(u, \alpha v + w) =$

$$\begin{aligned}
&= ((u_1, u_2), \alpha(v_1, v_2) + (w_1, w_2)) && \text{Definición } u, v, w \\
&= ((u_1, u_2), (\alpha v_1 + w_1, \alpha v_2 + w_2)) && \text{Suma vec y Producto por escalar} \\
&= u_1(\alpha v_2 + w_2) + u_2(\alpha v_1 + w_1) && \text{Definición } \mathcal{A} \\
&= \alpha(u_1 v_2 + u_2 v_1) + u_1 w_2 + u_2 w_1 && \\
&= \alpha\mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(u, w) && \text{Definición } \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Como se cumplen las dos condiciones se puede afirmar que $\mathcal{A}$ es una forma bilineal.

2. Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ y sea $\mathcal{A} : \mathbb{K}^{m\times m} \times \mathbb{K}^{m\times m} \to \mathbb{K}$ dada por

$$\mathcal{A}(X, Y) = tr(Y^t AX) \quad \text{para } X, Y \in \mathbb{K}^{m\times m}$$

Probar que $\mathcal{A}$ es una forma bilineal.
Sea $X, Y, Z \in \mathbb{K}^{m\times m}$ y $\alpha \in \mathbb{K} \to \mathcal{A}(\alpha X + Y, Z) =$

$$\begin{aligned}
&= tr(Z^t A(\alpha X + Y)) && \text{Definición } \mathcal{A} \\
&= tr(Z^t A\alpha X + Z^t AY) && \text{Distributividad} \\
&= tr(Z^t A\alpha X) + tr(Z^t AY) && \text{Propiedades de la traza} \\
&= \alpha tr(Z^t AX) + tr(Z^t AY) && \text{Propiedades de la traza} \\
&= \alpha\mathcal{A}(X, Z) + \mathcal{A}(Y, Z) && \text{Definición } \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Cumple la primer condición. Ahora $\mathcal{A}(X, \alpha Y + Z) =$

$$\begin{aligned}
&= tr((\alpha Y + Z)^t AX) && \text{Definición } \mathcal{A} \\
&= tr(((\alpha Y)^t + Z^t)AX) && \text{Propiedad de la traspuesta} \\
&= tr((\alpha Y)^t AX + Z^t AX) && \text{Distributividad} \\
&= tr((\alpha Y)^t AX) + tr(Z^t AX) && \text{Propiedades de la traza} \\
&= \alpha tr(Y^t AX) + tr(Z^t AX) && \text{Propiedades de la traza y traspuesta} \\
&= \alpha\mathcal{A}(X, Y) + \mathcal{A}(X, Z) && \text{Definición } \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Al cumplirse las dos condiciones, $\mathcal{A}$ es una forma bilineal.

3. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Probar que $Bil(V)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

4. Decir si las siguientes formas bilineales son simétricas:

   (a) $\mathcal{A} \in Bil(\mathbb{R}^2)$ dada por $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 3x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + y_1y_2$ Para que una forma bilineal sea simétrica se debe cumplir $\mathcal{A}(u, v) = \mathcal{A}(v, u) \forall u, v$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= 3x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + y_1y_2 && \text{Definición} \\
&= 3x_2x_1 + 2x_2y_1 + 2y_2x_1 + y_2y_1 && \text{Conmutatividad suma y prod} \\
&= \mathcal{A}((x_2, y_2)(x_1, y_1)) && \text{Definición}
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es simétrica.

   (b) $\mathcal{A} \in Bil(\mathbb{R}^2)$ dada por $\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + 4x_1y_2 - 3y_1x_2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= x_1x_2 + 4x_1y_2 + 3y_1x_2 && \text{Definición} \\
\mathcal{A}((x_2, y_2), (x_1, y_1)) &= x_2x_1 + 4x_2y_1 + 3y_2x_1 && \text{Definición}
\end{aligned}$$

   Se ve que $\mathcal{A}$ no es simétrica.

   (c) $\mathcal{A} \in Bil(\mathbb{R}^3)$ dada por $\mathcal{A}((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

$$\begin{aligned}
A((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) &= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 && \text{Definición} \\
&= x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1 && \text{Conmutatividad} \\
&= \mathcal{A}((x_2, y_2, z_2), (x_1, y_1, z_1)) && \text{Definición}
\end{aligned}$$

   Por ende, $\mathcal{A}$ es simétrica.

5. Para las formas bilineales simétricas del punto anterior, escribir una representación matricial en cualquier base que no sea la canónica del espacio vectorial involucrado. Hallar su rango.

   (a) Como estoy trabajando en $\mathbb{R}^2$, tomo de base a $B = \{(1,0),(0,-1)\}$. De la **Definición 9.6** se tiene que $A_{ij} =$

   $$\mathcal{A}(b_j, b_i) \text{ en donde } A = [\mathcal{A}]_B \rightarrow \begin{cases} A_{11} = \mathcal{A}((1,0),(1,0)) = 3 \\ A_{12} = \mathcal{A}((0,-1),(1,0)) = -2 \\ A_{21} = \mathcal{A}((1,0),(0,-1)) = -2 \\ A_{22} = \mathcal{A}((0,-1),(1,0)) = 1 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Se ve que } rg(A) = 2$$

   (c) En este caso como base elijo a $B = (1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$. Usando la misma definición que en el caso anterior:

   $$\begin{array}{lll} A_{11} = \mathcal{A}((1,0,0),(1,0,0)) = 1 & A_{21} = \mathcal{A}((1,0,0),(1,1,0)) = 1 & A_{31} = \mathcal{A}((1,0,0),(1,1,1)) = 1 \\ A_{12} = \mathcal{A}((1,1,0),(1,0,0)) = 1 & A_{22} = \mathcal{A}((1,1,0),(1,1,0)) = 2 & A_{32} = \mathcal{A}((1,1,0),(1,1,1)) = 2 \\ A_{13} = \mathcal{A}((1,1,1),(1,0,0)) = 1 & A_{23} = \mathcal{A}((1,1,1),(1,1,0)) = 2 & A_{33} = \mathcal{A}((1,1,1),(1,1,1)) = 3 \end{array}$$

   $$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad rg(A) = 3$$

6. Sea $\mathcal{A} \in Bil(V)$ simétrica. Probar que $\mathcal{A}$ es no degenerada si y sólo si $V^\perp = \{0\}$. Recordar que si S es un subconjunto de V, entonces

   $$S^\perp = \{v \in V : \mathcal{A}(v,s) = 0 \quad \forall s \in S\}$$

   $(\Rightarrow)$:
   $\mathcal{A} \in Bil(V)$ es simétrica y no degenerada $\Rightarrow \forall v \in V, v \neq \vec{0}, \exists u \in V / \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{A}(v,u) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A}(s,v) = 0 \Leftrightarrow s = \vec{0} \Rightarrow V^\perp = \{0\}$
   $(\Leftarrow)$:
   $\mathcal{A} \in Bil(V)$ es simétrica y $V^\perp = \{0\} \Rightarrow \mathcal{A}(s,v) = 0 \Leftrightarrow s = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{A}(u,v) = \mathcal{A}(v,u) = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}$
   $\Rightarrow \forall v \in V \exists u \in V - \{0\} / \mathcal{A}(u,v) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{A}$ es no degenerada.

7. Sea $\mathcal{A} \in Bil(\mathbb{R}^3)$ dada por

   $$\mathcal{A}((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = 3x_1x_2 + 4x_1y_2 + x_1z_2 + 4y_1x_1 + y_1y_2 + 6y_1z_2 + z_1x_2 + 2z_1y_2 + z_1z_2$$

   (a) ¿Es simétrica $\mathcal{A}$?¿Es antisimétrica?
   Sea $u = (0,1,0)$ y $v = (0,0,1) \Rightarrow \mathcal{A}(u,v) = 6$. Mientras que $\mathcal{A}(v,u) = 2$. Se concluye que no es simétrica ni antisimétrica.

   (b) Hallar $\mathcal{A}_{sim}$ y $\mathcal{A}_{ant}$ en $Bil(\mathbb{R}^3)$ tales que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{sim} + A_{ant}$
   De la **Proposición 9.18** y su demostración obtenemos que $\mathcal{A}_{sim} := \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^t)$ y $\mathcal{A}_{ant} := \frac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^t)$. Haciendo los cálculos se llega a

   $$\mathcal{A}_{sim} = 3x_1x_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_1z_2 + x_2z_1 + 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + y_1y_2 + 4y_1z_2 + 4y_2z_1 + z_1z_2$$
   $$\mathcal{A}_{ant} = 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 2x_1y_1 - 2x_2y_2 + 2y_1z_2 - 2y_2z_1$$

8. Sea $B = \{u,v\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathcal{A} \in Bil(\mathbb{R}^2)$ dada por

   $$\mathcal{A}(u,u) = \mathcal{A}(v,v) = 0 \quad \mathcal{A}(u,v) = -\mathcal{A}(v,u) = 1$$

   Probar que $\mathcal{A}(x,x) = 0$ para todo $x \in V$ y que $\mathcal{A}$ es no degenerada.
   La representación matricial de $\mathcal{A}$ en la base B queda determinada por:

   $$\begin{cases} A_{11} = \mathcal{A}(u,u) = 0 \\ A_{12} = \mathcal{A}(v,u) = -1 \\ A_{21} = \mathcal{A}(u,v) = 1 \\ A_{22} = \mathcal{A}(v,v) = 0 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad rg(A) = 2 \Rightarrow \mathcal{A} \text{ es no degenerada.}$$

   Usando la ecuación **9.1**:

   $$\mathcal{A}(x,x) = \begin{pmatrix} x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = 0$$

9. Sea $\mathcal{A} \in Bil(\mathbb{R}^2)$ dada por

   $$\mathcal{A}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2$$

   Hallar su forma cuadrática asociada.
   De la **Definición 9.19** tenemos que

$$Q : V \to \mathbb{K} / Q(v) = \mathcal{A}(v, v)$$

es la forma cuadrática asociada a una forma bilineal simétrica. Ya sabemos que es bilineal por el enunciado y además

$$\mathcal{A}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 = 2x_2x_1 + x_2y_1 + y_2x_1 = \mathcal{A}((x_2, y_2), (x_1, y_1))$$
$$\to Q(x, y) = 2x^2 + 2xy$$

10. Para cada una de las siguientes formas cuadráticas sobre $\mathbb{R}^2$, hallar la forma bilineal simétrica asociada y representarla matricialmente en la base canónica.

    (a) $Q(x, y) = \alpha x^2$ para $\alpha \in \mathbb{R}$
    De la **Proposición 9.21** se sabe que

    $$\mathcal{A}_{sim}(u, v) = \frac{1}{2}(Q(u + v) - Q(u) - Q(v))$$

    $$\begin{aligned} \mathcal{A}_{sim}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \tfrac{1}{2}[Q(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha(x_1 + x_2)^2 - \alpha x_1^2 - \alpha x_2^2] \\ &= \alpha x_1x_2 \end{aligned}$$

    $$\begin{cases} A_{11} = \mathcal{A}((1, 0), (1, 0)) = \alpha \\ A_{12} = \mathcal{A}((0, 1), (1, 0)) = 0 \\ A_{21} = \mathcal{A}((1, 0), (0, 1)) = 0 \\ A_{22} = \mathcal{A}((0, 1), (0, 1)) = 0 \end{cases} \quad \to A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

    (b) $Q(x, y) = \alpha y^2$
    Es un caso muy similar al anterior. Se llega a:

    $$\mathcal{A}_{sim}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \alpha y_1y_2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

    (c) $Q(x, y) = \alpha xy$ para $\alpha \in \mathbb{R}$

    $$\begin{aligned} \mathcal{A}_{sim}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \tfrac{1}{2}[Q(x_1 + x_2, y_1 + y_2) - Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_2)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\alpha(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - \alpha x_1y_1 - \alpha x_2y_2] \\ &= \tfrac{\alpha}{2}[x_1y_2 + x_2y_1] \end{aligned}$$

    $$\begin{cases} A_{11} = \mathcal{A}((1, 0), (1, 0)) = 0 \\ A_{12} = \mathcal{A}((0, 1), (1, 0)) = \frac{\alpha}{2} \\ A_{21} = \mathcal{A}((1, 0), (0, 1)) = \frac{\alpha}{2} \\ A_{22} = \mathcal{A}((0, 1), (0, 1)) = 0 \end{cases} \quad \to A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

    (d) $Q(x, y) = 2x^2 - \frac{1}{3}xy$
    Con el mismo proceso que los casos anteriores se llega a:

    $$\mathcal{A}_{sim}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2x_1x_2 - \tfrac{1}{6}(x_1y_2 + x_2y_1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

11. Probar que:

    (a) $Q(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2$ es una forma cuadrática definida positiva sobre $\mathbb{R}^2$
    Se debe cumplir que $Q(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tenemos que $Q(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2 = (x - 2y)^2 + y^2 > 0 \Rightarrow Q$ es definida positiva.

    (b) $Q(x, y, z) = 7x^2 + 4xy + y^2 - 8xz - 3z^2$ es una forma cuadrática indefinida sobre $\mathbb{R}^3$

    $$\begin{cases} Q(1, 1, 1) = 7 + 4 + 1 - 8 - 3 = 1 > 0 \\ Q(1, -2, 1) = 7 - 8 + 4 - 8 - 3 = -8 < 0 \end{cases} \quad \to Q \text{ es indefinida.}$$

    (c) $Q(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - 3z^2$ es una función cuadrática definida negativa sobre $\mathbb{R}^3$
    $Q(x, y, z) = -(x^2 + 2y^2 + 3z^2) < 0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow Q$ es definida negativa.

12. Sea V un $\mathbb{R}$-EV y Q una forma cuadrática sobre V tal que A es la matriz que representa en una base de B (fija) de V. Probar que si λ es un autovalor de A, entonces existe un autovector v asociado a λ tal que

    $$Q(v) = \lambda \|v\|^2$$

    Deducir que:

(a) Si Q es definida positiva, entonces todos los autovalores de A son positivos.
Si Q es definida positiva $\Rightarrow \lambda\|v\|^2 > 0 \quad \forall v \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda > 0$

(b) Si Q es definida negativa, entonces todos los autovalores de A son negativos.
Si Q es definida negativa $\Rightarrow \lambda\|v\|^2 < 0 \quad \forall v \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda < 0$

(c) Si Q es indefinido, entonces A tiene autovalores positivos y negativos.

(d) Analizar si vale la recíproca en alguno de los casos anteriores.

13. Mostrar que la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ asociada a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

es definida negativa.

$$\begin{aligned}
Q(v) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ -3y + 2z \\ 2y - 3z \end{pmatrix} \\
&= -x^2 - 3y^2 + 2yz + 2yz - 3z^2 \\
&= -x^2 - 3y^2 + 4yz - 3z^2 \\
&= -x^2 - 2(y-z)^2 - y^2 - z^2 \\
&= -(x^2 + 2(y-z)^2 + y^2 + z^2) < 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{\vec{0}\} \\
&\Rightarrow Q \text{ es definida negativa}
\end{aligned}$$