Álgebra lineal

Trabajo práctico N°10 - 2022

Espacios vectoriales con producto interno II

Operadores

1. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con el producto interno dado por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 8x_2y_2 \,.$$

   Sea $T \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$, calcular T^*.

2. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita dotado con un producto interno. Probar que para $S, T \in L(V)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que:

   a) $(S + T)^* = S^* + T^*$.
   b) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
   c) $(ST)^* = T^* S^*$.
   d) $(T^*)^* = T$.
   e) Si T es inversible, entonces $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

3. Determinar si los siguientes operadores son autoadjuntos considerando en cada espacio vectorial el producto interno usual.

   a) La homotecia H_2 y la proyección P_Y sobre el eje y en $L(\mathbb{R}^2)$.
   b) $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por $T(x, y, z) = (x + y, x, -z)$.
   c) $T \in L(\mathbb{C}^{3\times 3})$ dado por $T(A) = A^t$.

4. Probar que si $T \in L(V, W)$ entonces

$$\mathrm{N}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp \quad \text{y} \quad \mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{N}(T)^\perp.$$

5. Sea $T \in L(\mathbb{R}^4)$ dado por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, 0)\,.$$

   a) Hallar T^*. ¿Es T un operador normal?
   b) Hallar el núcleo y la imagen de T^*.

6. Sea V un $\mathbb{C}$-EV dotado con un producto interno y sea $T \in L(V)$. Probar que

a) Si λ es un autovalor de T, entonces $\overline{\lambda}$ es un autovalor de T^*.

b) Si T es autoadjunto y λ es un autovalor de T, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Si T es normal, v_i es un autovector de T asociado al autovalor λ_i para $i = 1, 2$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.

7. Sea V un $\mathbb{K}$-EV dotado con un producto interno y sea W un subespacio de V. Probar que si $U \in L(V)$ es unitario y W es U-invariante, entonces $W^\perp$ es U-invariante.

8. Probar que si λ es un autovalor de una isometría $S \in L(V)$ entonces $|\lambda| = 1$. ¿Cuáles son los valores posibles para el determinante de S?

9. Hallar una matriz que sea normal pero que no sea ni unitaria ni autoadjunta.

10. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -2i & 4 \\ 2i & 8 & -2i \\ 4 & 2i & 5 \end{pmatrix}$. Probar que es autoadjunta y hallar una matriz unitaria U tal que $U^{-1}AU$ sea diagonal.

11. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sea W un subespacio de V.

    a) Si $v = w + w'$ con $w \in W$ y $w' \in W^\perp$, probar que $J : V \to V$ dado por

    $$J(v) = w - w' ,$$

    es un operador lineal autoadjunto y unitario.

    b) Consideremos $V = \mathbb{R}^3$ dotado con el producto interno usual y $W = \overline{\{(1, 0, 1)\}}$.

    i. Hallar la representación matricial de J en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

    ii. Hallar una base ortonormal de autovectores de J.

12. Consideremos a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-EV, dotado con el producto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea $J \in L(\mathbb{C}^2)$ tal que $[J]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Definimos

    $$[x, y]_J = \langle Jx, y \rangle \quad \text{para } x, y \in \mathbb{C}^2 .$$

    a) Probar que $J = J^* = J^{-1}$ y $J^2 = I$.

    b) Probar que:

    i. $[\alpha\, x + z, y]_J = \alpha\, [x, y]_J + [z, y]_J$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{C}^2$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

    ii. $\overline{[x, y]_J} = [y, x]_J$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{C}^2$.

    c) ¿Se puede decir que $[\cdot, \cdot]_J$ es un producto interno sobre $\mathbb{C}^2$?
    Sugerencia: considerar el vector $(1, 1)$.

    d) Hallar $[\cdot, \cdot]_J$ para los vectores de la base canónica de $\mathbb{C}^2$. Comparar con las propiedades del producto interno.

    e) Sea S un subespacio de $\mathbb{C}^2$, definimos

    $$S^{\perp_J} := \left\{ y \in \mathbb{C}^2 : [x, y]_J = 0, \ \forall x \in S \right\} .$$

    Hallar $S^{\perp_J}$ para $S = \overline{\{(1, 1)\}}$. Comparar con $S^\perp$.