Álgebra lineal

Trabajo práctico N°2 - 2022

Coordenadas, cambio de base, transformaciones lineales I

1. Sea $B = \{1 + x,\, 1 + x^2,\, x + x^2\}$.

   a) Probar que B es una base para $\mathbb{R}_2[x]$.

   b) Encontrar las coordenadas de $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ en la base B.

   c) Hallar las coordenadas de los elementos de B en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$.

   d) Escribir a los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ como combinación lineal de los elementos de B.

2. Sean $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, 1, 0),\, (1, 1, 1),\, (0, 1, 1)\}$.

   a) Hallar la matriz $P_{\mathcal{E},B}$ de cambio de base de B en $\mathcal{E}$.

   b) Hallar la matriz $P_{B,\mathcal{E}}$ de cambio de base de $\mathcal{E}$ en B.

   c) Comprobar que la matriz hallada en el ítem *a*) es la inversa de la del ítem *b*).

   d) Comprobar que $P_{B,\mathcal{E}}\,[(1, 2, 0)]_{\mathcal{E}} = [(1, 2, 0)]_B$.

3. Sea $\mathcal{E} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ (como $\mathbb{R}$-EV) y sean

$$u_1 = e_2 - e_1\,,\ u_2 = e_3 - e_2\,, \cdots,\ u_{n-1} = e_n - e_{n-1}\,,\ u_n = e_n\,.$$

   a) Probar que $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

   b) Hallar las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{E},B}$ y $P_{B,\mathcal{E}}$ para $n = 3$.

   c) Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $[v]_B = P_{B,\mathcal{E}}[v]_{\mathcal{E}}$.

4. *a*) Hallar una base de $\mathbb{C}_3[x]$ que no sea la canónica.

   b) Hallar la matriz de cambio de base de $B = \{1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x^3\}$ en la base hallada en el ítem anterior.

   c) ¿Cuáles son las coordenadas de $3x^3 - x + 2$ en la base B?

5. Considerar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

   - $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
   - $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Probar que B_1 y B_2 son bases para $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Hallar la matriz de cambio de base de B_2 en la base B_1.

c) ¿Cuáles son las coordenadas de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en la base B_2?¿Y en la base B_1?

6. Hallar las matrices de cambio de base P_{B_1,B_2} y P_{B_2,B_1} para cada uno de los siguientes casos.

a) En $\mathbb{R}^3$, $B_1 = \{(5,3,1),(1,-3,-2),(1,2,1)\}$ y $B_2 = \{(-2,1,0),(-1,-3,0),(-2,-3,1)\}$.

b) En $\mathbb{C}_3[x]$, $B_1 = \{1, x-1, x^2-x, x^3\}$ y $B_2 = \{x, x-1, x^2, x^3+1\}$.

7. Sea $B_1 = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Si

$$P_{B_2,B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar los vectores de la base B_2.

8. Determinar si las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (x-y, x^2, 2z)$.

b) $T : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 3y-2z \\ 2z \end{pmatrix}$.

c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0)$.

d) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(z) = \bar{z}$.

e) La función traza $\operatorname{tr} : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ dada por $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

f) La función determinante $\det : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$.
Sugerencia: Considerar primero el caso $n = 2$.

9. Sean U y V dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, y sea $L(U,V)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de U en V. Probar que $L(U,V)$ es un $\mathbb{K}$-EV con las operaciones dadas por:

- $(S+T)(u) = S(u) + T(u)$ para $S, T \in L(U,V)$ y $u \in U$.
- $(\alpha T)(u) = \alpha \cdot T(u)$ para $T \in L(U,V)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in U$.

10. Sobre la homogeneidad y aditividad de las transformaciones lineales.

a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2,\ \alpha \in \mathbb{R},$$

pero que f no sea lineal.

b) Dar un ejemplo de una función $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$g(u+v) = g(u) + g(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{C}\,,$$

pero que g no sea lineal.

11. a) Sea $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función que define la rotación en un ángulo α (fijo) en sentido antihorario, es decir

$$R_\alpha(x, y) = (x\,\cos(\alpha) - y\,\operatorname{sen}(\alpha), x\,\operatorname{sen}(\alpha) + y\,\cos(\alpha)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

1) Probar que R_α es una transformación lineal para cualquier valor del ángulo α fijo.
2) Determinar la imagen por $R_{\frac{\pi}{2}}$ de $P = (0, 3)$, $Q = (3, 1)$ y $S = (1, -1)$. Graficar el triángulo PQS y su transformado en el mismo sistema de coordenadas.

b) Sea $S_Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función simetría respecto del eje y, es decir

$$S_Y(x, y) = (-x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

1) Probar que S_Y es una transformación lineal.
2) Determinar la imagen por S_Y de $A = (0, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (4, 3)$ y $D(2, 0)$. Graficar el rectángulo $ABCD$ y su transformado en el mismo sistema de coordenadas.

c) Sea $H_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función homotecia de razón $k \in \mathbb{R}$ (fijo), es decir

$$H_k(x, y) = (kx, ky) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

1) Probar que H_k es una transformación lineal para cualquier valor de $k \in \mathbb{R}$ fijo.
2) Determinar la imagen por H_2 de $A = (0, -1)$, $B = (1, 2)$ y $C = (3, 1)$. Graficar el triángulo ABC y su transformado en el mismo sistema de coordenadas.

d) Sea $P_X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función proyección sobre el eje x.

1) Hallar una expresión analítica para P_X y probar que es una transformación lineal.
2) Determinar la imagen por P_X de $A = (0, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (4, 3)$ y $D(2, 0)$. Graficar el rectángulo $ABCD$ y su transformado, en el mismo sistema de coordenadas.

12. Se dice que una transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una isometría si preserva distancias, es decir

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \operatorname{dist}(T(P), T(Q)) \quad \forall\, P, Q \in \mathbb{R}^n\,.$$

Analizar cuáles de las transformaciones del ejercicio anterior, son isometrías.

13. a) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (-5, 3)$ y $T(-1, 1) = (5, 2)$. Determinar $T(5, 3)$ y $T(-1, 2)$.

b) Determinar si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1) = (2,6)$, $T(-1,1) = (2,5)$ y $T(2,7) = (5,3)$.

Optativos

1. Sea $V = \{p \in \mathbb{Z}_2[x] : \operatorname{gr}(p) \leq 3\}$.

   a) Probar que V es un $\mathbb{Z}_2$-subespacio vectorial de $\mathbb{Z}_2[x]$.

   b) Probar que $B_1 = \{1, 1+x, x^2, x^3+1\}$ y $B_2 = \{1,\ 1+x\ , 1+x+x^2\ , x^3\}$ son bases de V.

   c) Hallar las coordenadas de $p = x + x^2 + x^3$ en cada una de las bases del ítem anterior.

2. Analizar si $T : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ dada por $T(a,b) = (a,b) \odot (0,1)$ (pensando a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}_2$-EV) es una transformación lineal, donde

$$(a,b) \odot (c,d) = (ac+bd, ad+bc+bd) \quad \text{para todo } (a,b),\ (c,d) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\,.$$