Trabajo Práctico 3 - Transformaciones lineales II

Santiago

1. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-EV y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos también que S_V y S_W son subespacios de V y W, respectivamente. Probar que $N(T)$, $T(S_V) := \{w \in W : w = T(v) \text{ para } v \in S_V\}$ y $T^{-1}(S_W) := \{v \in V : T(v) \in S_W\}$ son subespacios vectoriales de V y W según corresponda.

- $N(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$
  Dados $\alpha \in \mathbb{K}, u, v \in N(T)$
  i. $0_V \in N(T)$ ya que toda transformación lineal $T : V \to W$ cumple $T(0_V) = 0_W$
  ii. $T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0 \to u + v \in N(T) \quad \forall u, v \in N(T)$
  iii. $T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha\dot{0} = 0 \to \alpha u \in N(T) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, u \in N(T)$

  Por lo tanto, $N(T)$ es un subespacio vectorial de V.
- $T(S_V) := \{w \in W : w = T(v) \text{ para } v \in S_V\}$
  Dados $\alpha \in \mathbb{K}, u, v \in T(S_V)$
  i. S_V es subespacio de V, entonces $0_V \in S_V \to 0_W \in T(S_V)$ ya que $0_W = T(0_V)$
  ii. $u + v = T(a) + T(b), \quad a, b \in S_V$ ya que $u, v \in T(S_V) \to u + v = T(a + b)$ por aditividad. Entonces $u + v \in T(S_V)$
  iii. $\alpha u = \alpha T(a) = T(\alpha a) \to \alpha u \in T(S_V)$

  Por lo tanto, $T(S_V)$ es un subespacio vectorial de W.
- $T^{-1}(S_W) := \{v \in V : T(v) \in S_W\}$
  Sean $\alpha \in \mathbb{K}, u, v \in T^{-1}(S_W)$
  i. $0_V \in T^{-1}(S_W)$ ya que $T(0_V) = 0_W \in S_W$ por ser subespacio de W
  ii. $T(u), T(v) \in S_W \to T(u) + T(v) \in S_W \to T(u + v) \in S_W \to u + v \in T^{-1}(S_W)$
  iii. $T(u) \in S_W \to \alpha T(u) \in S_W \to T(\alpha u) \in S_W \to \alpha u \in T^{-1}(S_W)$

  Por lo tanto, $T^{-1}(S_W)$ es un subespacio vectorial de V

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

   (a) Probar que T es una transformación lineal.

   Dados $\rho \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
T(\rho u + v) &= T(\rho(u_x, u_y, u_z) + (v_x, v_y, v_z)) \\
\text{Prod por escalar y suma en } \mathbb{R}^3 &= T(\rho u_x + v_x, \rho u_y + v_y, \rho u_z + v_z) \\
\text{Definición T} &= (\rho u_x + v_x + \rho u_y + v_y, \rho u_x + v_x + \rho u_z + v_z) \\
\text{Suma en } \mathbb{R}^2 &= (\rho u_x + \rho u_y, \rho u_x + \rho u_z) + (v_x + v_y, v_x + v_z) \\
\text{Prod por escalar en } \mathbb{R}^2 &= \rho(u_x + u_y, u_x + u_z) + (v_x + v_y, v_x + v_z) \\
\text{Definición T} &= \rho T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

   Por lo tanto, T es una transformación lineal.

   (b) Hallar el núcleo de T ¿Qué dimensión tiene?

$N(T) = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) = (0,0)\}$. Para hallarlo, planteo:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x,y,z) \\ &= (x+y, x+z) \\ &\to \begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \\ &\to x = -y = -z \\ &\to v = (-y,y,y) \\ &\to v = y(-1,1,1) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N(T) = \overline{\{(-1,1,1)\}}$ y $dim(N(T)) = 1$.

(c) Hallar la imagen de T ¿Qué dimensión tiene?

$Im(T) = \{T(v) \in \mathbb{R}^2 : v \in \mathbb{R}^3\}$. Sea $w \in Im(T), w = (x+y, x+z) = x(1,1) + y(1,0) + z(0,1)$. Por lo tanto, $\{(1,1),(1,0),(0,1)\}$ generan $Im(T)$. Como $(1,1)$ es combinación lineal de los otros dos, los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ generan a $Im(T)$, por lo tanto, $Im(T) = \mathbb{R}^2 \to dim(Im(T)) = 2$.

(d) Sea $C = \{(x,y) : x = 1\}$. Hallar $T^{-1}(C)$ ¿Es un subespacio?¿Contradice esto el ejercicio anterior?¿Por qué?

$T^{-1}(C) = \{v \in \mathbb{R}^3 : T(v) \in C\}$. Tengo que encontrar vectores de $\mathbb{R}^3$ que al ser transformados formen parte de C.
$T(x,y,z) = (x+y, x+z) = (1,b) \to x+y = 1 \to C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 1\}$
No es subespacio ya que $(0,0,0) \notin C$, esto no contradice el ejercicio anterior. Ya que lo que se había demostrado es que $T^{-1}(S_W)$ es subespacio para S_W subespacio del codominio, cosa que C no cumple.

3. Para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 8 de la práctica 2, determinar su núcleo e imagen. Además analizar inyectividad, suryectividad y biyectividad.

(b) $T : \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}^{3\times1}$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 3y-2z \\ 2z \end{pmatrix}$.

- Núcleo
  $N(T) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times1} : T(A) = 0_{\mathbb{R}^{3\times1}}\}$

$$\begin{pmatrix} 2x-3y \\ 3y-2z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2x-3y=0 \\ 3y-2z=0 \\ 2z=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

  Por lo tanto,

$$N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- Imagen
  $Im(T) = \{T(A) \in \mathbb{R}^{3\times1} : A \in \mathbb{R}^{3\times1}\}$. Los elementos de la imagen tienen la forma

$$B = \begin{pmatrix} 2x-3y \\ 3y-2z \\ 2z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  Por lo tanto,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

  es un conjunto generador de la imagen. Además, se puede comprobar que el mismo es linealmente independiente. Con lo cual, $Im(T) = \mathbb{R}^{3\times1}$.

- Inyectividad
  Para que T sea inyectiva, el núcleo debe estar conformado únicamente por el elemento nulo del dominio, lo cual es cierto. Por lo tanto T es inyectiva.
- Suryectividad
  Para que T sea suryectiva, la imagen debe coincidir con el codominio. Es este caso se cumple, así que T es suryectiva.
- Biyectividad
  Como T es inyectiva y suryectiva, entonces también es biyectiva.

(c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0)$.

- Núcleo
  Como todo elemento de $\mathbb{R}^4$ se transforma en el elemento neutro de $\mathbb{R}^2$, $N(T) = \mathbb{R}^4$.
- Imagen
  La transformada me devuelve únicamente el vector nulo, entonces $Im(T) = \{(0, 0)\}$
- Inyectividad
  Como $N(T) \neq \{(0, 0)\}$, no es inyectiva.
- Suryectividad
  Imagen y codominio no coinciden, entonces no es suryectiva.
- Biyectividad Al no ser ni inyectiva ni suryectiva, tampoco es biyectiva.

(e) La función traza $tr : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}$ dada por $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

- Núcleo
  $N(T) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : tr(A) = 0\} \to \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0 \to a_{11} = -\sum_{i=2}^{n} a_{ii} \to$
  $$N(T) = \left\{ A \in \mathbb{C}^{n\times n} : a_{11} = -\sum_{i=2}^{n} a_{ii} \right\}$$
- Imagen
  La transformación me devuelve un complejo, el cual es la suma de los elementos de la diagonal principal, como estos elementos pueden ser cualquier número, su transformada también. $Im(T) = \mathbb{C}$
- Inyectividad
  No es inyectiva ya que $N(T) \neq \{0_{\mathbb{C}^{n\times n}}\}$.
- Suryectividad
  Como la imagen coincide con el codominio, es suryectiva.
- Biyectividad
  Si bien es suryectiva, el hecho de que no sea inyectiva provoca que T no sea biyectiva.

4. Sea V un $\mathbb{K}$-EV y $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que son equivalentes:

   (a) $N(T) \cap Im(T) = 0$

   (b) Si $T(T(v)) = 0$, entonces $T(v) = 0$ para $v \in V$

- $(a \Rightarrow b)$
  Arrancamos con la hipótesis $N(T) \cap Im(T) = 0$. $v \in V \to T(v) \in Im(T)$. Supongamos que
  $$T(T(v)) = 0$$
  es decir, la transformada de un elemento de la imagen es el elemento neutro. Por definición, $N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$, por ende, $T(v) \in N(T) \to T(v) \in N(T) \cap Im(T)$ y como por hipótesis, la intersección es nula, tenemos que
  $$T(v) = 0$$
- $(b \Rightarrow a)$
  Tenemos que $T(T(v)) = 0 \to T(v) = 0$ para $v \in V$. En palabras, si la transformada de un elemento $T(v)$ de la imagen me da el elemento neutro, entonces $T(v)$ es el elemento neutro. Supongamos que

$N(T) \cap Im(T) \neq 0$. Entonces existe un elemento $x \neq 0$ que cumple $T(x) = 0$ y $T(y) = x$ para algún $y \in V \to$ por hipótesis si $T(T(y)) = 0 \to T(y) = 0 \to x = 0$. Con lo cual si ese elemento x existe, tiene que ser el 0

$$\to N(T) \cap Im(T) = 0$$

Por lo tanto $a \Leftrightarrow b$

5. **Extensión de transformaciones lineales.** Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea U un subespacio propio de V. Probar que si $S : U \to W$ es una transformación linal, entonces existe $T : V \to W$ tal que,

$$Tu = Su \quad \forall u \in U.$$

Supongamos que

$$B_U = \{b_1, \ldots, b_m\} \text{ es una base de } U$$
$$B_V = \{b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n\} \text{ es una base de } V$$
$$B_W = \{w_1, \ldots, w_k\} \text{ es una base de } W$$

La transformación S queda unívocamente determinada por los transformados de la base de U. Como no se sabe cuáles son las transformaciones, planteo de manera general

$$\begin{cases} S(b_1) = x_1 \\ \quad \vdots \\ S(b_m) = x_m \end{cases} \qquad x_1, \ldots, x_m \in W$$

Los transformación T también queda determinada de manera única por los transformados de la base del dominio, en este caso V. Los transformados pueden ser cualquier elemento de W. Sin embargo, por conveniencia se elegirán los transformados de los primeros m elementos de la base de manera que coincidan con los transformados de S, el resto pueden ser cualquier $x \in W$.

$$\begin{cases} T(b_1) = x_1 \\ \quad \vdots \\ T(b_m) = x_m \\ T(b_{m+1}) = x_{m+1} \\ \quad \vdots \\ T(b_n) = x_n \end{cases} \qquad x_1, \ldots, x_n \in W$$

Hasta este punto, tengo las dos transformaciones lineales, resta comprobar la igualdad planteada. Para ello, hay que recordar que cada $u \in U$ se escribe como

$$u = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i \qquad c_i \in \mathbb{K}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$S(u) = S\left(\sum_{i=1}^{m} c_i b_i\right)$$

Como S es transformación lineal, se cumple que

$$S(u) = \sum_{i=1}^{m} c_i S(b_i) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} c_i T(b_i) = T(u)$$

Con lo cual, queda demostrado que

$$Su = Tu \qquad \forall u \in U$$

6. Determinar en cada caso una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido.

   (a) $(1, 1, 0) \in N(T)$ y $dim(Im(T)) = 1$.

Del teorema de las dimensiones:

$$dim(\mathbb{R}^3) = dim(N(T)) + dim(Im(T)) \rightarrow dim(N(T)) = 2$$

Elijo como base de $\mathbb{R}^3$ a $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. Una transformación está determinada por los transformados de la base y como quiero que $dim(N(T)) = 2$ y que además el $(1,1,0) \in N(T)$

$$T(1,1,1) = (0,0,0)$$
$$T(1,1,0) = (0,0,0)$$
$$T(1,0,0) = (1,0,0)$$

Un vector de $\mathbb{R}^3$ se escribe $(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) \rightarrow$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = y - z \\ \gamma = x - y \end{cases}$$

Por lo tanto

$$T(x,y,z) = zT(1,1,1) + (y-z)T(1,1,0) + (x-y)T(1,0,0)$$
$$T(x,y,z) = (x-y,0,0)$$

(b) $N(T) \cap Im(T) = \overline{\{(1,1,2)\}}$.

Propongo $dim(N(T)) = 2 \rightarrow dim(Im(T)) = 1$. Para satisfacer la intersección:

$$T(1,1,2) = (0,0,0)$$
$$T(0,1,0) = (0,0,0)$$
$$T(0,0,1) = (1,1,2)$$

Un vector $v \in \mathbb{R}^3$ puede escribirse $v = (x,y,z) = \alpha(1,1,2) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2\alpha + \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y - x \\ \gamma = z - 2x \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$T(x,y,z) = xT(1,1,2) + (y-x)T(0,1,0) + (z-2x)T(0,0,1)$$
$$T(x,y,z) = (z-2x, z-2x, 2z-4x)$$

(c) $N(T) \neq \{(0,0,0)\}, Im(T) \neq \{(0,0,0)\}$ y $N(T) \cap Im(T) = \{(0,0,0)\}$.

Propongo

$$\begin{cases} T(1,0,0) = (0,0,0) \\ T(0,1,0) = (0,0,0) \\ T(0,0,1) = (0,0,1) \end{cases} \rightarrow T(x,y,z) = (0,0,z)$$

En donde $Im(T) = \overline{\{(1,0,0),(0,1,0)\}}$ y $N(T) = \overline{\{(0,0,1)\}}$.

7. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal tal que $Im(T^2) = Im(T)$. Probar que $Im(T) \cap N(T) = \{0\}$.

Supongamos que $Im(T) \cap N(T) \neq \{0\}$, entonces existe $x \in V$:

$$T(x) = 0, \qquad x = T(y) \tag{1}$$

Como $Im(T^2) = Im(T)$, resulta que $dim(Im(T^2)) = dim(Im(T))$. Por el teorema de las dimensiones:

$$dim(V) = dim(Im(T)) + dim(N(T)) \qquad dim(V) = dim(Im(T^2)) + dim(N(T^2))$$

(Al usar el teorema de las dimensiones con T^2, estoy asumiendo que ésta es una transformación lineal, más

abajo se muestra que efectivamente lo es.)
Esto lleva a

$$dim(N(T^2)) = dim(N(T))$$

Sea un elemento $n \in N(T) \to T(n) = 0 \to T^2(n) = 0 \to n \in N(T^2) \to N(T) \subset N(T^2)$ y como las dimensiones coinciden,

$$N(T^2) = N(T)$$

De (1) se obtiene que $T^2(y) = 0 \to y \in N(T^2) \to y \in N(T) \to T(y) = x = 0$. Por lo tanto, el elemento x de la intersección debe ser el 0.

T^2 es una transformación lineal.
Sea $u, v \in V, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
T^2(\alpha u + v) &= T(T(\alpha u + v)) && \text{Definición } T^2 \\
&= T(\alpha T(u) + T(v)) && \text{Linealidad de } T \\
&= \alpha T(T(u)) + T(T(v)) && \text{Linealidad de } T \\
&= \alpha T^2(u) + T^2(v) && \text{Definición } T^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T^2 es una transformación lineal.

8. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-EV. Supongamos que V es de dimensión finita y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar que:

   (a) T es inyectiva si, y sólo si, $dim(Im(T)) = dim(V)$.

   - $(\Rightarrow)$
     Si T es inyectiva, entonces $N(T) = \{0\} \to dim(N(T)) = 0$. Por el teorema de las dimensiones $dim(V) = dim(Im(T)) + dim(N(T))$

     $$\to dim(V) = dim(Im(T))$$

   - $(\Leftarrow)$
     Los pasos anteriores valen para ambas direcciones.

   (b) T es suryectiva si, y sólo si, $dim(Im(T)) = dim(W)$.

   - $(\Rightarrow)$
     T es suryectiva $\to W = Im(T) \to dim(W) = dim(Im(T))$
   - $(\Leftarrow)$
     $dim(Im(T)) = dim(W)$, como $Im(T)$ es subespacio de W, $Im(T) = W \to T$ es suryectiva.

   (c) Supongamos que $dim(V) = dim(W)$. Luego, $N(T) = \{0\}$ si, y sólo si, T es suryectiva.

   $N(T) = \{0\} \Leftrightarrow dim(N(T)) = 0 \Leftrightarrow dim(V) = dim(W) = dim(Im(T)) \Leftrightarrow W = Im(T) \Leftrightarrow T$ es suryectiva.

9. Sean $R_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $L_A : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$, dados por

$$R_A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)A \quad \text{y} \quad L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Probar que $R_A \in L(\mathbb{R}^3)$ y $L_A \in L(\mathbb{R}^{3\times 1})$.

- R_A
  Dado $u, v \in \mathbb{R}^3, \sigma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} R_A(\sigma u + v) &= (\sigma u + v)A && \text{Definición } R_A \\ &= (\sigma u)A + vA && \text{Distributividad de matrices} \\ &= \sigma u A + vA && \text{Producto por escalar en matrices} \\ &= \sigma R_A u + R_A v && \text{Definición } R_A \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $R_A \in L(\mathbb{R}^3)$
- L_A Sean $B, C \in \mathbb{R}^{3\times 1}, \sigma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} L_A(\sigma B + C) &= A(\sigma B + C) && \text{Definición } L_A \\ &= A\sigma B + AC && \text{Distributividad de matrices} \\ &= \sigma AB + AC && \text{Producto por escalar} \\ &= \sigma L_A B + L_A C && \text{Definición } L_A \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $L_A \in L(\mathbb{R}^{3\times 1})$

(b) Hallar el núcleo y la imagen de R_A y L_A. Analizar, en ambos casos, inyectividad, suryectividad y biyectividad.

- R_A
  $N(R_A) = \{v \in \mathbb{R}^3 : R_A(v) = \vec{0}\}$

$$(x, y, z)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} = (0,0,0) \to \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \\ -4x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \to x = y = z = 0$$

  $N(T) = \{(0,0,0)\}$, entonces es inyectiva, con lo cual es un monomorfismo. Como $R_A \in L(\mathbb{R}^3)$, es un epimorfismo y un isomorfismo. Por lo tanto, es suryectiva y biyectiva.
- L_A
  $N(L_A) = \{B \in \mathbb{R}^{3\times 1} : L_A(B) = 0\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \\ -4x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

  Tengo el mismo sistema que antes, con lo cual se van a cumplir las mismas propiedades.

10. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión n y sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ un conjunto finito de vectores de V. Definimos $E : \mathbb{K}^m \to V$ como la transformación dada por
$$E(k_1, \ldots, k_m) = k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m.$$

(a) Probar que E es lineal.

Sean $\alpha \in \mathbb{K} \quad x, y \in \mathbb{K}^m$

$$\begin{aligned} E(\alpha x + y) &= E(\alpha(x_1, \ldots, x_m) + (y_1, \ldots, y_m)) \\ &= E(\alpha x_1 + y_1, \ldots, \alpha x_m + y_m) && \text{Suma y prod por escalar en } \mathbb{K}^m \\ &= (\alpha x_1 + y_1)v_1 + \cdots + (\alpha x_m + y_m)v_m && \text{Definición } E \\ &= \alpha x_1 v_1 + y_1 v_1 + \cdots + \alpha x_m v_m + y_m v_m && \text{Distributividad en } V \\ &= \alpha(x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m) + y_1 v_1 + \cdots + y_m v_m && \text{Prod por esc y conmut en } V \\ &= \alpha E(x) + E(y) && \text{Definición } E \end{aligned}$$

Por lo tanto, E es lineal.

(b) Probar que E es inyectiva si, y sólo si, S es un conjunto de vectores linealmente independientes.

E es inyectiva, $\Leftrightarrow N(E) = \{0\} \Leftrightarrow E(k_1, \ldots, k_m) = k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m = 0 \Leftrightarrow k_1 = \cdots = k_m = 0$
$\Leftrightarrow S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es un conjunto li.

(c) Probar que E es suryectiva si, y sólo si, S es un conjunto de vectores que generan V.

- E es suryectiva $\Rightarrow Im(E) = V \Rightarrow$ como la imagen está generada por S, S genera a V.
- Si S genera a V, un $v \in V$ cumple $v = k_1 v_1 + \cdots + k_m v_m$, los elementos de $Im(E)$ también están generados por S, como ambos espacios están generados por el mismo conjunto, $Im(E) = V \Rightarrow E$ es suryectiva.

11. Considerar cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 11 de la práctica 2.

(a) Hallar su representación matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

a) $R_\alpha(x, y) = (x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha)$

$$[R_\alpha]_\mathcal{E} = ([R_\alpha(1,0)]_\mathcal{E} \quad [R_\alpha(0,1)]_\mathcal{E})$$
$$\to [R_\alpha]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

b) $S_Y(x, y) = (-x, y)$

$$[S_Y]_\mathcal{E} = ([S_Y(1,0)] \quad [S_Y(0,1)]_\mathcal{E})$$
$$\to [S_Y]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $H_k(x, y) = (kx, ky)$

$$[H_k]_\mathcal{E} = ([H_k(1,0)] \quad [H_k(0,1)]_\mathcal{E})$$
$$\to [H_k]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

d) $P_X(x, y) = (x, 0)$

$$[P_X]_\mathcal{E} = ([P_X(1,0)] \quad [P_X(0,1)]_\mathcal{E})$$
$$\to [P_X]_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Determinar su núcleo e imagen y la dimensión de ambos. Verificar que la dimensión del núcleo más la de la imagen coincide con la dimensión del espacio de partida.

a) Para el núcleo: $[R_\alpha]_\mathcal{E} \cdot (x \quad y)^T = \vec{0} \to \begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0 \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \to x = y = 0$

$$\to N(R_\alpha) = \{(0,0)\}$$

Todo elemento de la imagen es $[R_\alpha]_\mathcal{E} \cdot (x \quad y)^T = (x \cos\alpha - y \sin\alpha, x \sin\alpha + y \cos\alpha)$
$= x(\cos\alpha, \sin\alpha) + y(-\sin\alpha, \cos\alpha)$

$$Im(R_\alpha) = \overline{\{(\cos\alpha, \sin\alpha), (-\sin\alpha, \cos\alpha)\}}$$

La imagen está generada por esos dos vectores, que como se vio con el núcleo, son li. Entonces, $dim(Im(R_\alpha)) = 2$. Se cumple que

$$2 = dim(\mathbb{R}^2) = dim(Im(R_\alpha)) + dim(N(R_\alpha)) = 2 + 0$$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x = y = 0$

$$\to N(S_Y) = \{(0,0)\}$$

Sea $v \in Im(S_Y) \to v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto,

$$Im(S_Y) = \overline{\{(-1,0), (0,1)\}}$$

Se cumple que

$$2 = dim(Im(S_Y)) + dim(N(S_Y)) = 2 + 0$$

c) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x = y = 0$

$$\to N(H_k) = \{(0,0)\}$$

suponiendo que $k \neq 0$

Sea $v \in Im(H_k) \to v = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = kx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + ky \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por lo tanto,

$$Im(H_k) = \overline{\{(1,0),(0,1)\}}$$

Se cumple que

$$2 = dim(Im(H_k)) + dim(N(H_k)) = 2 + 0$$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x = 0$

$$\to N(P_X) = \overline{\{(0,1)\}} \to dim(N(P_X)) = 1$$

Sea $v \in Im(P_X), v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\to Im(P_X) = \overline{\{(1,0)\}} \to dim(Im(P_X)) = 1$$

Se cumple que

$$2 = dim(\mathbb{R}^2) = dim(Im(P_X)) + dim(N(P_X)) = 1 + 1$$

(c) Analizar inyectividad, suryectividad y biyectividad.

En los primeros tres casos, $N(T) = \{0\} \to$ son inyectivas, como la dimensión de la imagen coincide con el codominio y además es subespacio de éste, $Im(T) = \mathbb{R}^2 \to$ son suryectivas, con lo cual, son biyectivas.
En el caso de P_X, $N(P_X) \neq \{0\}$ y $Im(P_X) \neq \mathbb{R}^2$, entonces no es ni iyectiva, ni suryectiva y menos biyectiva.