Trabajo Práctico 4 - Representación matricial de transformaciones lineales

Santiago

1. Considerar las transformaciones lineales $R_{\frac{\pi}{2}}, S_Y, H_2$ y P_X del ejercicio 11 de la práctica 2 y escribir su representación matricial con respecto a la base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$

- $R_{\frac{\pi}{2}}(x,y) = (-y,x)$

$$[R_{\frac{\pi}{2}}]_B = \big([R_{\frac{\pi}{2}}(1,1)]_B \quad [R_{\frac{\pi}{2}}(1,-1)]_B\big)$$
$$\rightarrow [R_{\frac{\pi}{2}}]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tomamos un vector arbitrario de $\mathbb{R}^2$, la transformación lo afecta de la siguiente manera

$$[R_{\frac{\pi}{2}}]_B[v]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

En la Figura 1 se observa la transformación de dos vectores.

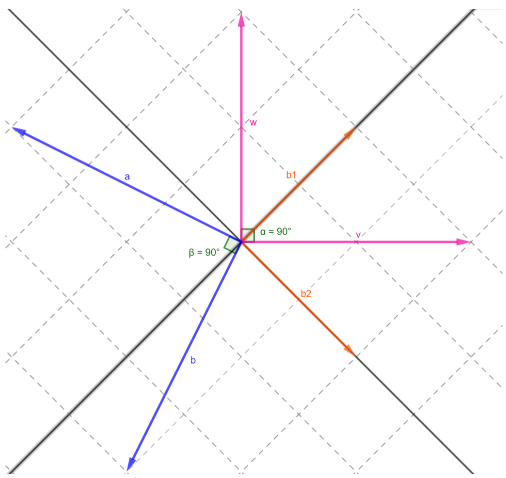

Figura 1. Transformación bajo $R_{\frac{\pi}{2}}$ de v y a en el sistema de coordenadas B.

- $S_Y(x,y) = (-x,y)$

$$[S_Y]_B = ([S_Y(1,1)]_B \quad [S_Y(1,-1)]_B)$$
$$\rightarrow [S_Y]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

En la Figura 2 se observan las transformaciones de los mismos dos vectores de la Figura 1, ahora bajo S_Y

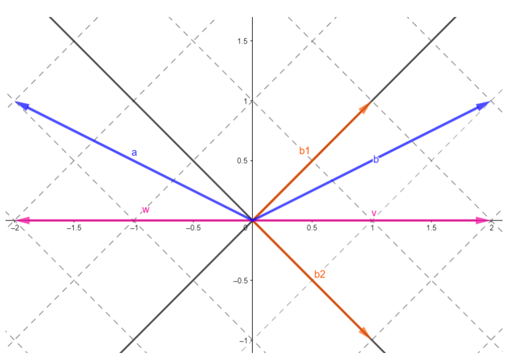

Figura 2. Transformación bajo S_Y de v y a en el sistema de coordenadas B.

- $H_2(x, y) = (2x, 2y)$

$$[H_2]_B = ([H_2(1,1)]_B \quad [H_2(1,-1)]_B)$$
$$\to [H_2]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En la Figura 3, se observa esta transformación.

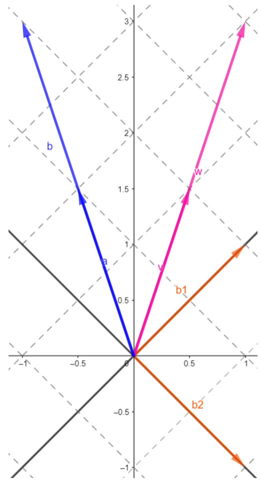

Figura 3. Transformación bajo H_2 de v y a en el sistema de coordenadas B.

Un dato a tener en cuenta es que

$$[H_2]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = [H_2]_{\mathcal{E}}$$

Supongamos el caso de la transformación más general: H_k y supongamos una base cualquiera de $\mathbb{R}^2$, denominada $\tilde{B} = \{b_1, b_2\}$. Si quiero encontrar la representación matricial de H_k en la base $\tilde{B}$:

$$[H_k]_{\tilde{B}} = ([H_k(b1)]_{\tilde{B}} \quad [H_k]_{\tilde{B}}) = ([kb_1]_{\tilde{B}} \quad [kb_2]_{\tilde{B}}) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la representación matricial en cualquier base es la misma.¿Se puede sacar alguna conclusión de esto?

- $P_X(x, y) = (x, 0)$

$$[P_X]_B = ([P_X(1,1)]_B \quad [P_X(1,-1)]_B)$$
$$\to [P_X]_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la transformación lineal dada por $T(x, y, z) = (z, y + z, x + y + z)$.

   (a) Hallar la reprenstación matricial de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$[T]_{\mathcal{E}} = ([T(1,0,0)]_{\mathcal{E}} \quad [T(0,1,0)]_{\mathcal{E}} \quad [T(0,0,1)]_{\mathcal{E}})$$
$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Sea $B = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (1, 3, 5)\}$. Hallar las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{E},B}$ y $P_{B,\mathcal{E}}$

Para encontrar $P_{\mathcal{E},B}$ tenemos que

$$P_{\mathcal{E},B} = ([(1,1,0)]_{\mathcal{E}} \quad [(1,2,3)]_{\mathcal{E}} \quad [(1,3,5)]_{\mathcal{E}})$$
$$\to P_{\mathcal{E},B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Mientras que

$$P_{B,\mathcal{E}} = ([(1,0,0)]_B \quad [(0,1,0)]_B \quad [(0,0,1)]_B)$$

$$\to P_{B,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Hallar la reprensentación matricial de T con respecto a la base B.

$$[T]_B = ([T(1,1,0)]_B \quad [T(1,2,3)]_B \quad [T(1,3,5)]_B)$$

$$\begin{cases} [T(1,1,0)]_B = [(0,1,2)]_B = P_{B,\mathcal{E}} \cdot (0,1,2)^T \\ [T(1,2,3)]_B = [(3,5,6)]_B = P_{B,\mathcal{E}} \cdot (3,5,6)^T \\ [T(1,3,5)]_B = [(5,8,9)]_B = P_{B,\mathcal{E}} \cdot (5,8,9)^T \end{cases}$$

$$\to [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, la transformación lineal dada por $T(x,y) = (3x+y, -y, x+y)$. Consideremos $B = \{(1,1), (-1,0)\}$ y $\tilde{B} = \{(1,0,1), (1,-1,0), (0,2,1)\}$, bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Hallar la matriz $[T]_{\tilde{B},B}$, es decir, la matriz de la transformación T con respecto a las bases B y $\tilde{B}$.

$$[T]_{\tilde{B},B} = ([T(1,1)]_{\tilde{B}} \quad [T(-1,0)]_{\tilde{B}}) = ([(4,-1,2)]_{\tilde{B}} \quad [(-3,0,-1)]_{\tilde{B}})$$

Para hallar las coordenadas de un vector en la base $\tilde{B}$, calculo $P_{\tilde{B},\mathcal{E}}$

$$P_{\tilde{B},\mathcal{E}} = ([(1,0,0)]_{\tilde{B}} \quad [(0,1,0)]_{\tilde{B}} \quad [(0,0,1)]_{\tilde{B}}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{cases} [4,-1,2]_{\tilde{B}} = P_{\tilde{B},\mathcal{E}} \cdot (4,-1,2)^T = (1,3,1) \\ [-3,0,-1]_{\tilde{B}} = P_{\tilde{B},\mathcal{E}} \cdot (-3,0,-1)^T = (1,-4,-2) \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$[T]_{\tilde{B},B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la transformación lineal dada por $T(x,y,z) = (2y+z, x-4y, 3x)$.

(a) Hallar $[T]_B$ para la base $B = \{(1,1,1); (1,1,0); (1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$[T]_B = ([T(1,1,1)]_B \quad [(1,1,0)]_B \quad [(1,0,0)]_B)$$

$$\to [T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Probar que $[T(v)]_B = [T]_B[v]_B$, para $v \in \mathbb{R}^3$.

Por un lado se tiene que

$$[T(v)]_B = [T(x,y,z)]_B = [(2y+z, x-4y, 3x)]_B = \begin{pmatrix} 3x \\ -2x-4y \\ -x+6y+z \end{pmatrix}$$

Por el otro lado

$$[T]_B[v]_B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ -2x-4y \\ -x+6y+z \end{pmatrix}$$

5. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación lineal dada por $T(x,y) = (y,0)$. Consideremos la base $B = \{(1,i), (-i,2)\}$ de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-EV.

(a) Hallar la representación matricial de T con respecto a las bases $\mathcal{E}$ y B.

$$[T]_{B,\mathcal{E}} = ([T(1,0)]_B \quad [T(0,1)]_B)$$
$$\to [T]_{B,\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

(b) Hallar la representación matricial de T con respecto a las bases B y $\mathcal{E}$.

$$[T]_{\mathcal{E},B} = ([T(1,i)]_{\mathcal{E}} \quad [T(-i,2)]_{\mathcal{E}})$$
$$\to [T]_{\mathcal{E},B} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Hallar la representación matricial de T con respecto a la base B. Calcular el determinante y la traza.

$$[T]_B = ([T(1,i)]_B \quad [T(-i,2)]_B)$$
$$\to [T]_B = \begin{pmatrix} 2i & 4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$$
$$tr([T]_B) = 0 \qquad det([T]_B) = 0$$

(d) Elegir otra base de $\mathbb{C}^2$ y hallar la representación matricial de T con respecto a esa base. ¿Puede decir cuánto valen el determinante y la traza sin hacer las cuentas? Justificar.

Propongo $\tilde{B} = \{(i,0),(0,1)\}$

$$[T]_{\tilde{B}} = ([T(i,0)]_{\tilde{B}} \quad [T(0,1)]_{\tilde{B}})$$
$$\to [T]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La traza y el determinante son propias de la transformación, así que no importa la base, el resultado siempre será el mismo.

6. Consideremos a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-EV y sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(z) = \bar{z}$.

(a) Probar que T es una transformación lineal.

Sean $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= \overline{\alpha u + v} \\ &= \overline{\alpha u} + \overline{v} \\ &= \overline{\alpha}\overline{u} + \overline{v} \\ &= \alpha\overline{u} + \overline{v} \\ &= \alpha T(u) + T(v) \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.

(b) Hallar la representación matricial $[T]_B$ para la base $B = \{1, i\}$ y $[T]_{\tilde{B}}$ para la base $\tilde{B} = \{1+i, 1-i\}$.

$$\begin{cases} [T]_B = ([T(1)]_B \quad [T(i)]_B) & \to [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ [T]_{\tilde{B}} = ([T(1+i)]_{\tilde{B}} \quad [T(1-i)]_{\tilde{B}}) & \to [T]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(c) Hallar $P_{B,\tilde{B}}$ y $P_{\tilde{B},B}$.

$$\begin{cases} P_{B,\tilde{B}} = ([(1+i)]_B \quad [(1-i)]_B) & = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ P_{\tilde{B},B} = ([(1)]_{\tilde{B}} \quad [(i)]_{\tilde{B}}) & = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(d) Probar que $[T]_{\tilde{B}} = P_{\tilde{B},B}[T]_B P_{B,\tilde{B}}$,

$$P_{\tilde{B},B}[T]_B P_{B,\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con lo cual se demuestra la igualdad.

7. Sea $T : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3$, la transformación lineal dada por

$$T(ax^2 + bx + c) = (a + 2b + c, a + b, 2a + b - c).$$

(a) Hallar una representación matricial de T.

La más sencilla que se me ocurre es con respecto a $\mathcal{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $B = \{1, x, x^2\}$

$$[T]_{\mathcal{E},B} = \left([T(1)]_{\mathcal{E}} \quad [T(x)]_{\mathcal{E}} \quad [T(x^2)]_{\mathcal{E}}\right)$$
$$\to [T]_{\mathcal{E},B} = ([(1,0,-1)]_{\mathcal{E}} \quad [(2,1,1)]_{\mathcal{E}} \quad [(1,1,2)]_{\mathcal{E}})$$
$$\to [T]_{\mathcal{E},B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Hallar la dimensión del núcleo y de la imagen.

$N(T) = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : T(p) = (0,0,0)\}$. Si $p(x) = ax^2 + bx + c$. Entonces, me fijo en resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} c + 2b + a = 0 \\ b + a = 0 \\ -c + b + 2a = 0 \end{cases} \to \begin{cases} b = -a \\ c = a \end{cases} \to p(x) = a(x^2 - x + 1)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$N(T) = \overline{\{x^2 - x + 1\}} \to dim(N(T)) = 1$$

Por el teorema de la dimensión:

$$dim(Im(T)) = 2$$

(c) Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^3$ tal que $W \oplus Im(T) = \mathbb{R}^3$. Hallar $T^{-1}(W)$.

Para que una transformación tenga inversa, la misma debe ser un isomorfismo, pero como $N(T) \neq \{\vec{0}\}$, T no lo es.

8. (a) Sean V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión 5 y $B = \{b_1, \ldots, b_5\}$ una base (ordenada) de V. Supongamos también que $T \in L(V)$.

1) Hallar la representación matricial de T en la base B si

$$T(b_j) = \begin{cases} b_{j+1} & \text{si } j = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{si } j = 5 \end{cases}$$

$$[T]_B = ([T(b_1)]_B \quad [T(b_2)]_B \quad [T(b_3)]_B \quad [T(b_4)]_B \quad [T(b_5)]_B)$$
$$\to [T]_B = ([b_2]_B \quad [b_3]_B \quad [b_4]_B \quad [b_5]_B \quad [0]_B)$$
$$\to [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Probar que $T^5 = 0$ pero $T^4 \neq 0$.

Para hallar T^4 puedo hacer el producto matricial de T consigo misma 4 veces, obteniendo:

$$T^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde se ve que T^4 no es la transformación nula. Sin embargo

$$T^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) **Optativo.** Supongamos ahora que $dim(V) = n$ y que $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es una base (ordenada) de V. Hallar la representación matricial de T en la base B si

$$T(b_j) = \begin{cases} b_{j+1} & \text{si } j = 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{si } j = n \end{cases}$$

Probar que ocurre lo mismo que en el inciso anterior, es decir $T^n = 0$ pero $T^{n-1} \neq 0$
Sugerencia: Notar que $b_j = T^{j-1}(b_1)$ y probar que $T^n(b_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, n$.

Se sabe que

$$[T]_B = ([T(b_1)]_B \quad [T(b_2)] \quad \ldots \quad [T(b_n)]_B)$$

De la definición de T

$$[T]_B = ([b_2]_B \quad [b_3] \quad \ldots \quad [b_{n-1}]_B)$$

Por ende,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al transformar un elemento arbitrario $v \in V$, obtenemos

$$T(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si lo vuelvo a transformar:

$$T^2(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, al repetir el proceso $n-1$ y n veces:

$$T^{n-1}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad T^{n}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) **Optativo.** Supongamos que $S \in L(V)$ es cualquier operador lineal tal que $S^n = 0$ y $S^{n-1} \neq 0$. Probar que existe una base (ordenada) de V, tal que la representación matricial de S en esa base, coincide con la matriz hallada en el ítem anterior.

Si defino $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base de V, entonces existe una única transformación que cumple

$$S(b_j) = \begin{cases} b_{j+1} & \text{si } j = 1, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{si } j = n \end{cases}$$

cuya representación matricial coincide con $[T]_B$

(d) **Optativo.** Supongamos que si $M, N \in \mathbb{K}^{n\times n}$ son tales que $M^n = N^n = 0, M^{n-1} \neq 0$ y $N^{n-1} \neq 0$, entonces M y N son semejantes.

M y N son semajantes si existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$M = P^{-1}NP$$

Del ejercicio anterior, sabemos que existe una base ordenada tal que $N = [T]_{B_1}$ y $M = [S]_{B_2}$ cuyas representaciones matriciales coinciden, y sabemos que

$$[S]_{B_2} = P_{B_2,B_1}[T]_{B_1}P_{B_1,B_2}$$

Siendo $P_{B_1,B_2} = P^{-1}_{B_2,B_1}$

9. Sean $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\tilde{B} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ tal que

$$[T]_{\tilde{B},B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar $T(3b_1 + 2b_2 - b_3)$ y decir cuáles son sus coordenadas en la base $\tilde{B}$.

$$[T(3b_1 + 2b_2 - b_3)]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Hallar una base para el núcleo y otra para la imagen de T.

Para el núcleo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x = y = z = 0 \to N(T) = \{\vec{0}\}$$

Un elemento de la imagen cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Por el teorema de la dimensión, sabemos que $dim(Im(T)) = 3$, por lo tanto una base de $Im(T)$ es

$$B = \{(1, -1, 2, 3), (-2, 1, 1, -2), (1, 1, 4, 5)\}$$

(c) Hallar $T^{-1}(c_1 - 3c_3 - c_4)$.

Como T no es un isomorfismo, no tiene inversa.