Trabajo Práctico 4,5 - Polinomios

Santiago

1. Sean $p, q, r \in \mathbb{K}[x]$, probar que:

   (a) Si $p|q$ y $p|r$ entonces $p|(mq + nr)$ para todo $m, n \in \mathbb{K}[x]$.

   Como $p|q$ y $p|r$
   $$\rightarrow q = pa \quad \text{y} \quad r = pb \qquad a, b \in \mathbb{K}[x]$$
   Entonces, dado $m, n \in \mathbb{K}[x]$
   $$mq = mpa \quad \text{y} \quad nr = npb$$
   Al sumar las dos igualdades
   $$mq + nr = mpa + npb$$
   Sacando factor común
   $$mq + nr = p(ma + nb)$$
   Por lo tanto
   $$p|(mq + nr)$$

   (b) Si $p|q$ y $p|q + r$ entonces $p|r$.

   $$\begin{aligned} p|q \wedge p|q + r &\rightarrow q = pa \wedge q + r = pb \\ &\rightarrow q + r - q = pb - pa \\ &\rightarrow r = p(b - a) \\ &\rightarrow p|r \end{aligned}$$

   (c) Si $p|q$ y $gr(p) = gr(q)$ entonces existe $k \in \mathbb{K}$ tal que $p = kq$.

   Primero, tenemos que $q = pk$. Y como $gr(p) = gr(q)$ ya que $gr(q) = gr(p) + gr(k) \rightarrow gr(k) = 0 \rightarrow k \in \mathbb{K}$

2. Determinar si los siguientes conjuntos de polinomios son subespacios de $\mathbb{K}[x]$.

   (a) $\mathbb{K}^{(n)}[x] = \{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) \leq n\} \cup \{0\}$.

   i. El polinomio nulo pertenece al conjunto.
   ii. Sean $a, b \in \mathbb{K}^{(n)}[x] \rightarrow gr(a + b) \leq max\{gr(a), gr(b)\} \leq n \rightarrow a + b \in \mathbb{K}^{(n)}[x]$
   iii. Sean $a \in \mathbb{K}^{(n)}[x], \lambda \in \mathbb{K} \rightarrow gr(\lambda a) = gr(\lambda) + gr(a) \leq n \rightarrow \lambda a \in \mathbb{K}^{(n)}[x]$

   Por lo tanto, $\mathbb{K}^{(n)}[x]$ es un subespacio.

   (b) $\{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) = n\} \cup \{0\}$.

   Supongamos $a = x^3 + x^2$ y $b = -x^3 \rightarrow a + b = x^2$, el cual no forma parte del conjunto. Con lo cual, no es subespacio.

   (c) $\{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) \text{ es impar}\} \cup \{0\}$.

   El mismo contraejemplo del inciso anterior funciona en este caso.

3. *Raíces de polinomios de grado dos.* Sea $p(x) = x^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$. Probar que
$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \quad \text{para} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$
si y sólo si $b^2 \geq 4c$.

- $\Rightarrow$
  Las raíces de p son: $\lambda_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$. Para que $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \to b^2 \geq 4c$
- $\Leftarrow$
  Si $b^2 \geq 4c \to$ llamando λ_1 y λ_2 a las raíces de p tenemos que $p(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

4. Probar que en $\mathbb{R}[x]$ no existen polinomios no nulos tales que $p^2 + q^2 = 0$. ¿Ocurre lo mismo en $\mathbb{C}[x]$?

Sean $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$ con $a_n \neq 0, b_m \neq 0$. Entonces,

$$p^2(x) = a_n^2 x^{2n} + \cdots + a_0^2 \quad \text{y} \quad q^2(x) = b_m^2 x^{2m} + \cdots + b_0^2$$

Para que la suma sea 0, necesito que todos coeficientes de $p^2(x)$ sean los opuestos de $q^2(x)$. Sin embargo, como $a_n \neq, b_m \neq 0 \to a_n^2 + b_m^2 \neq 0$ ya que $a_n, b_m \in \mathbb{R}$.
Diferente es el caso de los complejos: si $p(x) = 1$ y $q(x) = i \to p^2(x) + q^2(x) = 1^2 + i^2 = 0$.

5. Sean $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ y $q(x) = 2x^2 + 4x - 1$, mostrar que no existen c y r en $\mathbb{Z}[x]$ tales que $p = cq + r$ y $gr(r) < gr(q)$. ¿Qué se puede decir de la exitencia del algoritmo de división en $\mathbb{Z}[x]$?

La división arroja el siguiente resultado

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & -3x^2 & & +1 = \left(2x^2+4x-1\right)\left(x-\frac{7}{2}\right) + 15x - \frac{5}{2} \\ -2x^3 & -4x^2 & +x & \\ \hline & -7x^2 & +x & +1 \\ & 7x^2 & +14x & -\frac{7}{2} \\ \hline & & 15x & -\frac{5}{2} \end{array}$$

En donde se ve que ni c ni r pertenecen a $\mathbb{Z}[x]$. Por lo tanto, el algoritmo de la división no aplica.

6. Hallar el m.c.d. entre los siguientes polinomios de $\mathbb{R}[x]$.
   (a) $p(x) = x^5 - 4x^4 - 3x + 1$ y $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

   El máximo común divisor es el generador mónico $d \in \mathbb{K}[x]$ del ideal

   $$M = \{(x^5 - 4x^4 - 3x + 1)f + (3x^2 + 2x + 1)g \quad f, g \in \mathbb{K}[x]\}$$

   Por el **Corolario 3.19**, sabemos que d divide a $p(x)$ y $q(x)$. Al factorizar los polinomios, estos no comparten ninguna raíz, por ende

   $$mcd(p,q) = 1$$

   (b) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ y $q(x) = x^2 - x + 2$.

   En este caso sucede lo mismo.

   (c) $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ y $q(x) = x^3 - x^2 + 2x$.

   En este caso también.

7. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son ideales:
   (a) $\{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) \geq 2\} \subset \mathbb{K}[x]$.

   Como el polinomio nulo no pertenece al conjunto, éste no es un subespacio, entonces no es un ideal.

   (b) $\{p(x^2+4) \in \mathbb{R}[x] : p \in \mathbb{R}[x]\} \subset \mathbb{R}[x]$.

   Primero me fijo si es subespacio. Si al conjunto lo llamo M
   i. $0 \in M$ ya que $0 = 0(x^2+4), 0 \in \mathbb{R}[x]$
   ii. Sea $m_1, m_2 \in M \to m_1 + m_2 = p_1(x^2+4) + p_2(x^2+4) \quad p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$
   $\to m_1 + m_2 = (p_1+p_2)(x^2+4) \quad p_1 + p_2 \in \mathbb{R}[x] \to m_1 + m_2 \in M$
   iii. Sea $\lambda \in \mathbb{R}, m \in M \to \lambda m = \lambda p(x^2+4) \to \lambda m \in M$

   Por lo tanto, M es subespacio.

Ahora, sea $m \in M, f \in \mathbb{R}[x], mf = p(x^2+4)f = pf(x^2+4) \in M$. Por ende, M es un ideal.

(c) $p\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[x]$, para $p \in \mathbb{K}[x]$.

Es el ideal principal generado por p. Está en la teoría.

(d) Dado $\alpha \in \mathbb{K}, \{p \in \mathbb{K}[x] : p(\alpha) = 0\} \subset \mathbb{K}[x]$.

Primero me fijo si es subespacio. Si al conjunto lo llamo M

i. $0 \in M$ ya que $0(\alpha) = 0$

ii. Sea $m_1, m_2 \in M \to (m_1 + m_2)(\alpha) = m_1(\alpha) + m_2(\alpha) = 0 + 0 = 0 \to m_1 + m_2 \in M$

iii. Sea $\lambda \in \mathbb{R}, m \in M \to (\lambda m)(\alpha) = \lambda m(\alpha) = \alpha 0 = 0 \to \lambda m \in M$

Por ende, M es subespacio.
Sea $f \in \mathbb{K}[x], (fp)(\alpha) = f(\alpha)p(\alpha) = f(\alpha)0 = 0 \to fp \in M$. Por lo tanto, M es un ideal.

8. En el álgebra de polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$, consideremos el ideal $M = (x-1)\mathbb{R}[x] + (x^2-1)\mathbb{R}[x]$. Mostrar que $M = (x-1)\mathbb{R}[x]$.
¿Cambia algo si reemplazamos al cuerpo $\mathbb{R}$ por otr cuerpo arbitrario $\mathbb{K}$?

Considerando de entrada al cuerpo $\mathbb{K}$, tenemos que $x - 1 = (x-1)1 + (x^2-1)0 \to M = (x-1)\mathbb{K}[x]$

9. Hallar el generador mónico de los siguientes ideales de $\mathbb{R}[x]$.

(a) $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(1) = p(2) = 0\}$.

$$d = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

(b) $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : (x-\pi)|p\}$.

$$d = x - \pi$$

(c) $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : p \text{ es divisible por } x^2+4 \text{ y } x^4-16\}$.

$$d = (x^4+4)(x^4-16) = x^8 - 12x^4 - 64$$

10. Sea $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

(a) Calcular $p(A)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$p(A) = I + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}$$

(b) Probar que A y $p(A)$ conmutan.

$$Ap(A) = p(A)A = \begin{pmatrix} 21 & -33 \\ -33 & 54 \end{pmatrix}$$

11. Sean $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dada por $T(x,y,z) = (-x, -z, 2y)$ y $p(x) = x^2 + 3 \in \mathbb{R}[x]$.

(a) Hallar $p(T)$ y calcular $(pT)(1, 0, -1)$.

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to p([T_{\mathcal{E}}]) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to (pT)(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Probar que $p(T) \in L(\mathbb{R}^3)$.

$p(T)(x, y, z) = (4x, y, z)$. A partir de acá es fácil comprobar que $p(T) \in L(\mathbb{R}^3)$

(c) Escribir la representación matricial de $p(T)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$[p(T)]_E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Probar que $[p(T)]_{\mathcal{E}} = p([T]_{\mathcal{E}})$.

Ya se mostró.