Álgebra lineal

Trabajo práctico N°$4, 5$ - 2022

Polinomios

1. Sean $p, q, r \in \mathbb{K}[x]$, probar que:
   a) Si $p|q$ y $p|r$ entonces $p|(mq + nr)$ para todo $m, n \in \mathbb{K}[x]$.
   b) Si $p|q$ y $p|q + r$ entonces $p|r$.
   c) Si $p|q$ y $\mathrm{gr}(p) = \mathrm{gr}(q)$ entonces existe $k \in \mathbb{K}$ tal que $p = k\,q$.

2. Determinar si los siguientes conjuntos de polinomios son subespacios de $\mathbb{K}[x]$.
   a) $\mathbb{K}^{(n)}[x] = \{p \in \mathbb{K}[x] : \mathrm{gr}(p) \leq n\} \cup \{0\}$.
   b) $\{p \in \mathbb{K}[x] : \mathrm{gr}(p) = n\} \cup \{0\}$.
   c) $\{p \in \mathbb{K}[x] : \mathrm{gr}(p) \text{ es impar}\} \cup \{0\}$.

3. *Raíces de polinomios de grado dos.* Sea $p(x) = x^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$. Probar que
   $$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \quad \text{para} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\,,$$
   si y sólo si $b^2 \geq 4c$.

4. Probar que en $\mathbb{R}[x]$ no existen polinomios no nulos tales que $p^2 + q^2 = 0$. ¿Ocurre lo mismo en $\mathbb{C}[x]$?

5. Sean $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ y $q(x) = 2x^2 + 4x - 1$, mostrar que no existen c y r en $\mathbb{Z}[x]$ tales que $p = cq + r$ y $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(q)$. ¿Qué se puede decir de la existencia de algoritmo de división en $\mathbb{Z}[x]$?

6. Hallar el m. c. d. entre los siguientes polinomios de $\mathbb{R}[x]$.
   a) $p(x) = x^5 - 4x^4 - 3x + 1$ y $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
   b) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ y $q(x) = x^2 - x + 2$.
   c) $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ y $q(x) = x^3 - x^2 + 2x$.

7. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son ideales:
   a) $\{p \in \mathbb{K}[x] : \mathrm{gr}(p) \geq 2\} \subset \mathbb{K}[x]$.
   b) $\{p\,(x^2 + 4) \in \mathbb{R}[x] : p \in \mathbb{R}[x]\} \subset \mathbb{R}[x]$.
   c) $p\,\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[x]$, para $p \in \mathbb{K}[x]$.
   d) Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, $\{p \in \mathbb{K}[x] : p(\alpha) = 0\} \subset \mathbb{K}[x]$.

8. En el álgebra de polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$, consideremos el ideal $M = (x-1)\mathbb{R}[x] + (x^2-1)\mathbb{R}[x]$. Mostrar que $M = (x-1)\mathbb{R}[x]$.

   ¿Cambia algo si reemplazamos al cuerpo $\mathbb{R}$ por otro cuerpo arbitrario $\mathbb{K}$?

9. Hallar el generador mónico de los siguientes ideales de $\mathbb{Q}[x]$.

   a) $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(1) = p(2) = 0\}$.

   b) $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : (x-\pi)|p\}$.

   c) $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : p \text{ es divisible por } x^2+4 \quad \text{y} \quad x^4-16\}$.

10. Sea $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

    a) Calcular $p(A)$ para
    $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

    b) Probar que A y $p(A)$ conmutan.

11. Sean $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dada por $T(x,y,z) = (-x,-z,2y)$ y $p(x) = x^2+3 \in \mathbb{R}[x]$.

    a) Hallar $p(T)$ y calcular $(pT)(1,0,-1)$.

    b) Probar que $p(T) \in L(\mathbb{R}^3)$.

    c) Escribir la representación matricial de $p(T)$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

    d) Probar que $[p(T)]_{\mathcal{E}} = p\left([T]_{\mathcal{E}}\right)$.