

# Trabajo Práctico 4,5 - Polinomios

Santiago

1. Sean  $p, q, r \in \mathbb{K}[x]$ , probar que:

(a) Si  $p|q$  y  $p|r$  entonces  $p|(mq + nr)$  para todo  $m, n \in \mathbb{K}[x]$ .

Como  $p|q$  y  $p|r$

$$\rightarrow q = pa \quad y \quad r = pb \quad a, b \in \mathbb{K}[x]$$

Entonces, dado  $m, n \in \mathbb{K}[x]$

$$mq = mpa \quad y \quad nr = npb$$

Al sumar las dos igualdades

$$mq + nr = mpa + npb$$

Sacando factor común

$$mq + nr = p(ma + nb)$$

Por lo tanto

$$p|(mq + nr)$$

(b) Si  $p|q$  y  $p|q + r$  entonces  $p|r$ .

$$p|q \wedge p|q + r \rightarrow q = pa \wedge q + r = pb$$

$$\rightarrow q + r - q = pb - pa$$

$$\rightarrow r = p(b - a)$$

$$\rightarrow p|r$$

(c) Si  $p|q$  y  $gr(p) = gr(q)$  entonces existe  $k \in \mathbb{K}$  tal que  $p = kq$ .

Primero, tenemos que  $q = pk$ . Y como  $gr(p) = gr(q)$  ya que  $gr(q) = gr(p) + gr(k) \rightarrow gr(k) = 0 \rightarrow k \in \mathbb{K}$

2. Determinar si los siguientes conjuntos de polinomios son subespacios de  $\mathbb{K}[x]$ .

(a)  $\mathbb{K}^{(n)}[x] = \{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) \leq n\} \cup \{0\}$ .

i. El polinomio nulo pertenece al conjunto.

ii. Sean  $a, b \in \mathbb{K}^{(n)}[x] \rightarrow gr(a + b) \leq \max\{gr(a), gr(b)\} \leq n \rightarrow a + b \in \mathbb{K}^{(n)}[x]$

iii. Sean  $a \in \mathbb{K}^{(n)}[x], \lambda \in \mathbb{K} \rightarrow gr(\lambda a) = gr(\lambda) + gr(a) \leq n \rightarrow \lambda a \in \mathbb{K}^{(n)}[x]$

Por lo tanto,  $\mathbb{K}^{(n)}[x]$  es un subespacio.

(b)  $\{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) = n\} \cup \{0\}$ .

Supongamos  $a = x^3 + x^2$  y  $b = -x^3 \rightarrow a + b = x^2$ , el cual no forma parte del conjunto. Con lo cual, no es subespacio.

(c)  $\{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) \text{ es impar}\} \cup \{0\}$ .

El mismo contraejemplo del inciso anterior funciona en este caso.

3. Raíces de polinomios de grado dos. Sea  $p(x) = x^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$ . Probar que

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \quad \text{para} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

si y sólo si  $b^2 \geq 4c$ .

- $\Rightarrow$   
Las raíces de  $p$  son:  $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ . Para que  $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \rightarrow b^2 \geq 4c$
- $\Leftarrow$   
Si  $b^2 \geq 4c \rightarrow$  llamando  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  a las raíces de  $p$  tenemos que  $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

4. Probar que en  $\mathbb{R}[x]$  no existen polinomios no nulos tales que  $p^2 + q^2 = 0$ . ¿Ocurre lo mismo en  $\mathbb{C}[x]$ ?

Sean  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$  y  $q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$  con  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$ . Entonces,

$$p^2(x) = a_n^2 x^{2n} + \dots + a_0^2 \quad \text{y} \quad q^2(x) = b_m^2 x^{2m} + \dots + b_0^2$$

Para que la suma sea 0, necesito que todos coeficientes de  $p^2(x)$  sean los opuestos de  $q^2(x)$ . Sin embargo, como  $a_n \neq 0, b_m \neq 0 \rightarrow a_n^2 + b_m^2 \neq 0$  ya que  $a_n, b_m \in \mathbb{R}$ .

Diferente es el caso de los complejos: si  $p(x) = 1$  y  $q(x) = i \rightarrow p^2(x) + q^2(x) = 1^2 + i^2 = 0$ .

5. Sean  $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$  y  $q(x) = 2x^2 + 4x - 1$ , mostrar que no existen  $c$  y  $r$  en  $\mathbb{Z}[x]$  tales que  $p = cq + r$  y  $gr(r) < gr(q)$ . ¿Qué se puede decir de la existencia del algoritmo de división en  $\mathbb{Z}[x]$ ?

La división arroja el siguiente resultado

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 \phantom{+ 0x + 0} + 1 = (2x^2 + 4x - 1) \left(x - \frac{7}{2}\right) + 15x - \frac{5}{2} \\ - 2x^3 - 4x^2 \phantom{+ 0x + 0} + x \\ \hline \phantom{2x^3 - 3x^2} - 7x^2 \phantom{+ 0x + 0} + x + 1 \\ \phantom{2x^3 - 3x^2} \phantom{- 7x^2} 7x^2 + 14x - \frac{7}{2} \\ \hline \phantom{2x^3 - 3x^2} \phantom{- 7x^2} \phantom{7x^2 + 14x} 15x - \frac{5}{2} \end{array}$$

En donde se ve que ni  $c$  ni  $r$  pertenecen a  $\mathbb{Z}[x]$ . Por lo tanto, el algoritmo de la división no aplica.

6. Hallar el m.c.d. entre los siguientes polinomios de  $\mathbb{R}[x]$ .

(a)  $p(x) = x^5 - 4x^4 - 3x + 1$  y  $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ .

(b)  $p(x) = x^4 - 2x^3 + 1$  y  $q(x) = x^2 - x + 2$ .

(c)  $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$  y  $q(x) = x^3 - x^2 + 2x$ .

7. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son ideales:

(a)  $\{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) \geq 2\} \subset \mathbb{K}[x]$ .

(b)  $\{p(x^2 + 4) \in \mathbb{R}[x] : p \in \mathbb{R}[x]\} \subset \mathbb{R}[x]$ .

(c)  $p\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[x]$ , para  $p \in \mathbb{K}[x]$ .

(d) Dado  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\{p \in \mathbb{K}[x] : p(\alpha) = 0\} \subset \mathbb{K}[x]$ .

8. En el álgebra de polinomios con coeficientes reales  $\mathbb{R}[x]$ , consideremos el ideal  $M = (x - 1)\mathbb{R}[x] + (x^2 - 1)\mathbb{R}[x]$ . Mostrar que  $M = (x - 1)\mathbb{R}[x]$ .

¿Cambia algo si reemplazamos al cuerpo  $\mathbb{R}$  por otro cuerpo arbitrario  $\mathbb{K}$ ?

9. Hallar el generador mónico de los siguientes ideales de  $\mathbb{Q}[x]$ .

(a)  $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(1) = p(2) = 0\}$ .

(b)  $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : (x - \pi) | p\}$ .

(c)  $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : p \text{ es divisible por } x^2 + 4 \text{ y } x^4 - 16\}$ .

10. Sea  $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ .

(a) Calcular  $p(A)$  para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Probar que  $A$  y  $p(A)$  conmutan.

11. Sean  $T \in L(\mathbb{R}^3)$  dada por  $T(x, y, z) = (-x, -z, 2y)$  y  $p(x) = x^2 + 3 \in \mathbb{R}[x]$ .

(a) Hallar  $p(T)$  y calcular  $(pT)(1, 0, -1)$ .

(b) Probar que  $p(T) \in L(\mathbb{R}^3)$ .

(c) Escribir la representación matricial de  $p(T)$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

(d) Probar que  $[p(T)]_{\mathcal{E}} = p([T]_{\mathcal{E}})$ .