

Trabajo Práctico 4,5 - Polinomios

Santiago

1. Sean $p, q, r \in \mathbb{K}[x]$, probar que:

(a) Si $p|q$ y $p|r$ entonces $p|(mq + nr)$ para todo $m, n \in \mathbb{K}[x]$.

Como $p|q$ y $p|r$

$$\rightarrow q = pa \quad y \quad r = pb \quad a, b \in \mathbb{K}[x]$$

Entonces, dado $m, n \in \mathbb{K}[x]$

$$mq = mpa \quad y \quad nr = npb$$

Al sumar las dos igualdades

$$mq + nr = mpa + npb$$

Sacando factor común

$$mq + nr = p(ma + nb)$$

Por lo tanto

$$p|(mq + nr)$$

(b) Si $p|q$ y $p|q + r$ entonces $p|r$.

$$\begin{aligned} p|q \wedge p|q + r &\rightarrow q = pa \wedge q + r = pb \\ &\rightarrow q + r - q = pb - pa \\ &\rightarrow r = p(b - a) \\ &\rightarrow p|r \end{aligned}$$

(c) Si $p|q$ y $gr(p) = gr(q)$ entonces existe $k \in \mathbb{K}$ tal que $p = kq$.

Primero, tenemos que $q = pk$. Y como $gr(p) = gr(q)$ ya que $gr(q) = gr(p) + gr(k) \rightarrow gr(k) = 0 \rightarrow k \in \mathbb{K}$

2. Determinar si los siguientes conjuntos de polinomios son subespacios de $\mathbb{K}[x]$.

(a) $\mathbb{K}^{(n)}[x] = \{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) \leq n\} \cup \{0\}$.

(b) $\{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) = n\} \cup \{0\}$.

(c) $\{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) \text{ es impar}\} \cup \{0\}$.

3. Raíces de polinomios de grado dos. Sea $p(x) = x^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$. Probar que

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \quad \text{para } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

si y sólo si $b^2 \geq 4c$.

4. Probar que en $\mathbb{R}[x]$ no existen polinomios no nulos tales que $p^2 + q^2 = 0$. ¿Ocurre lo mismo en $\mathbb{C}[x]$?

5. Sean $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ y $q(x) = 2x^2 + 4x - 1$, mostrar que no existen c y r en $\mathbb{Z}[x]$ tales que $p = cq + r$ y $gr(r) < gr(q)$.
¿Qué se puede decir de la existencia del algoritmo de división en $\mathbb{Z}[x]$?

6. Hallar el m.c.d. entre los siguientes polinomios de $\mathbb{R}[x]$.

(a) $p(x) = x^5 - 4x^4 - 3x + 1$ y $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

(b) $p(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ y $q(x) = x^2 - x + 2$.

(c) $p(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$ y $q(x) = x^3 - x^2 + 2x$.

7. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son ideales:

(a) $\{p \in \mathbb{K}[x] : gr(p) \geq 2\} \subset \mathbb{K}[x]$.

(b) $\{p(x^2 + 4) \in \mathbb{R}[x] : p \in \mathbb{R}[x]\} \subset \mathbb{R}[x]$.

(c) $p\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}[x]$, para $p \in \mathbb{K}[x]$.

(d) Dado $\alpha \in \mathbb{K}$, $\{p \in \mathbb{K}[x] : p(\alpha) = 0\} \subset \mathbb{K}[x]$.

8. En el álgebra de polinomios con coeficientes reales $\mathbb{R}[x]$, consideremos el ideal $M = (x - 1)\mathbb{R}[x] + (x^2 - 1)\mathbb{R}[x]$. Mostrar que $M = (x - 1)\mathbb{R}[x]$.

¿Cambia algo si reemplazamos al cuerpo \mathbb{R} por otro cuerpo arbitrario \mathbb{K} ?

9. Hallar el generador mónico de los siguientes ideales de $\mathbb{Q}[x]$.

(a) $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : p(1) = p(2) = 0\}$.

(b) $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : (x - \pi) | p\}$.

(c) $M = \{p \in \mathbb{R}[x] : p \text{ es divisible por } x^2 + 4 \text{ y } x^4 - 16\}$.

10. Sea $p(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

(a) Calcular $p(A)$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Probar que A y $p(A)$ conmutan.

11. Sean $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dada por $T(x, y, z) = (-x, -z, 2y)$ y $p(x) = x^2 + 3 \in \mathbb{R}[x]$.

(a) Hallar $p(T)$ y calcular $(pT)(1, 0, -1)$.

(b) Probar que $p(T) \in L(\mathbb{R}^3)$.

(c) Escribir la representación matricial de $p(T)$ en la base canónica de \mathbb{R}^3 .

(d) Probar que $[p(T)]_{\mathcal{E}} = p([T]_{\mathcal{E}})$.