# Trabajo Práctico 5 - Formas canónicas elementales I

Santiago

1. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Probar que $2, 2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$ son autovalores de $A$ y hallar los autovectores correspondientes.

2. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz inversible ¿Puede ser $\lambda = 0$ un autovalor de $A$? Probar que si $\lambda$ es un autovalor de $A$, entonces $\lambda^{-1}$ es autovalor de $A^{-1}$ y además los autoespacios asociados a $\lambda$ y $\lambda^{-1}$ pertenecientes a $A$ y $A^{-1}$ respectivamente, coinciden.

3. Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz triangular, entonces los autovalores de $A$ son los elementos de la diagonal.

4. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ¿Puede tener $A$ más de $n$ autovectores linealmente independientes?

5. (a) Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que tenga un sólo autovalor.

   (b) Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que tenga un sólo autovalor con un autoespacio asociado de dimensión 1.

   (c) Contruir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que no tenga autovalores. ¿Puede hacer lo mismo para una matriz de $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

6. Considerar las transformaciones lineales $R_{\frac{\pi}{2}}, S_Y, H_2$ y $P_X$ del ejercicio 11 de la práctica 2. Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios asociados. ¿Es alguna de ellas diagonalizable?

7. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea $T \in L(V)$. Probar que, si $\lambda$ y $\mu$ son dos autovalores de $T$ diferentes, entonces $N(T-\lambda I) \cap N(T-\mu I) = \{\vec{0}\}$.

8. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea $T \in L(V)$. Supongamos que $\lambda$ es un autovalor de $T$ y que $v \in V$ es un autovector asociado a $\lambda$. Probar que si $p \in \mathbb{K}[x]$, entonces $p(T)v = p(\lambda)v$.

9. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Hallar el polinomio minimal de $A$ considerando los coeficientes en $\mathbb{C}$, en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Z}_3$.

   (b) Decir en cada caso si $A$ es diagonalizable.

10. Para cada una de las siguientes matrices hallar sus autovalores y autoespacios asociados. Decir si son diagonalizalibles y en caso de serlo hallar la matriz diagonal y el cambio de base correspondiente.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que $A$ y $B$ tienen polinomios característicos diferentes, pero sus polinomios minimales coinciden.

12. Sea $T \in L(\mathbb{R}_2[x])$ dado por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$.

    (a) Hallar la representación matricial de $T$ con respecto a la base usual de $R_2[x]$.

    (b) Hallar el polinomio característico y los autovalores de $T$.

    (c) ¿Es $T$ diagonalizable?

13. Sea $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por $T(x, y, z) = (x, x + y, z)$.

    (a) Hallar el polinomio característico y el minimal de $T$.

    (b) Calcular los autovalores y una base para cada autoespacio asociado.

    (c) Decir si $T$ es diagonalizable, justificando de dos maneras diferentes.

14. (a) Sea $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que:

    - Sus autovalores son 1 y -1.
    - $\{(0, 1, -1)\}$ es una base de $N(T + I)$ y $\{(0, 1, 1); (1, 0, 0)\}$ es una base de $N(T - I)$.

    ¿Se puede decir si $T$ es diagonalizable? Hallar el polinomio característico de $T$.

    (b) Sea $T \in L(\mathbb{R}^4)$ tal que:

    - Sus autovalores son 1 y -1.
    - $\{(0, -1, 0, 0)\}$ es una base de $N(T + I)$ y $\{(0, 0, 1, 1); (1, 0, 0, 0)\}$ es una base de $N(T - I)$.

    ¿Se puede decir si $T$ es diagonalizable?

15. ¿Cuáles son los posibles autovalores de una matriz $A$ si se sabe que $A = A^2$?

16. Decir para qué valores de $a$ y $b$ la siguiente matriz es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Sea $A$ una matriz cuadrada tal que $A \neq I$ y $A^3 - A^2 + A = I$. ¿Es $A$ diagonalizable sobre $\mathbb{C}$?¿Y sobre $\mathbb{R}$?

18. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es simétrica, entonces es semejante a una matriz diagonal.