# Trabajo Práctico 5 - Formas canónicas elementales I

Santiago

1. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Probar que $2, 2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$ son autovalores de $A$ y hallar los autovectores correspondientes.

Para que un escalar $\lambda$ sea autovalor de $A$ se debe cumplir
$$Av = \lambda v \quad v \neq 0$$
Como me pide comprobar, bastaría con chequear la igualdad, pero en caso de querer encontrarlos, podemos pensar que
$$Av - \lambda v = 0 \to (A - \lambda I)v = 0 \to A - \lambda I = 0 \to det(A - \lambda I) = 0$$
Osea que tendríamos que calcular ese determinante, igualarlo a 0 y encontrar para qué valores de $\lambda$ se satisface la ecuación.

- $\lambda_1 = 2$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v = 2v \to \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \to x = -z, y = 0$$
Los $v = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$ son los autovectores asociados al autovalor 2.
- $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v = (2+\sqrt{2})v \to \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{2})x \\ (2+\sqrt{2})y \\ (2+\sqrt{2})z \end{pmatrix} \to y = -\sqrt{2}x, z = x$$
Los $v = (x, -\sqrt{2}x, x) = x(1, -\sqrt{2}, 1)$ son los autovectores asociados a $\lambda_2$.
- $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v = (2-\sqrt{2})v \to \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})x \\ (2-\sqrt{2})y \\ (2-\sqrt{2})z \end{pmatrix} \to y = \sqrt{2}x, z = x$$
Los $v = (x, \sqrt{2}x, x) = x(1, \sqrt{2}, 1)$ son los autovectores asociados a $\lambda_3$.

En caso de haber querido encontrar los autovalores de cero:
$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] + [-1(2-\lambda)]$$
Operando, se llega a
$$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(2-\sqrt{2}-\lambda)(2+\sqrt{2}-\lambda)$$
Se puede llegar al mismo resultado calculando $det(\lambda I - A)$, que quizás está mejor para visualizar el polinomio característico como estamos acostumbrados, obteniendo
$$det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda - 2 - \sqrt{2})(\lambda - 2 + \sqrt{2})$$

2. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz inversible ¿Puede ser $\lambda = 0$ un autovalor de $A$? Probar que si $\lambda$ es un autovalor de $A$, entonces $\lambda^{-1}$ es autovalor de $A^{-1}$ y además los autoespacios asociados a $\lambda$ y $\lambda^{-1}$ pertenecientes a $A$ y $A^{-1}$ respectivamente,

coinciden.

Si $\lambda = 0$ es autovalor $Av = 0 \rightarrow A^{-1}Av = 0 \rightarrow v = 0$. Esto contradice la definición de autovalor, ya que $v \neq 0$. Por lo tanto, $\lambda$ no puede ser 0.
Si $\lambda$ es autovalor de $A \rightarrow Av = \lambda v \rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \rightarrow Iv = \lambda A^{-1}v \rightarrow \frac{1}{\lambda}Iv = A^{-1}v \rightarrow \lambda^{-1}$ es autovalor de $A^{-1}$.
Los autoespacios asociados a $\lambda$ y $\lambda^{-1}$ son

$$E(\lambda) = N(A - \lambda I) \qquad E(\lambda^{-1}) = N(A^{-1} - \lambda^{-1}I)$$

Los vectores $v$ del autoespacio asociado a $\lambda$ cumplen

$$(A - \lambda I)v = 0 \rightarrow Av = \lambda Iv \rightarrow Av = \lambda v$$

Es decir, los vectores del autoespacio, son los autovectores. Por otra parte, los vectores $w$ del autoespacio asociado a $\lambda^{-1}$ cumplen

$$(A^{-1} - \lambda^{-1}I)w = 0 \rightarrow A^{-1}w = \lambda^{-1}Iw \rightarrow A^{-1}w = \lambda^{-1}w \rightarrow w = \lambda^{-1}Aw \rightarrow Aw = \lambda w$$

que es exactamente la misma condición de los elementos del autoespacio asociado a $\lambda$, con lo cual estos coinciden.

3. Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz triangular, entonces los autovalores de $A$ son los elementos de la diagonal.

Hay 2 tipos de matrices triangulares: superior e inferior. Supongamos una superior:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los autovalores, tengo que encontrar las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Al desarrolar el determinante por la primera columna:

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Al repetir este proceso $n$ veces, termino con:

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

Es decir, los autovalores de $A$ son los elementos de la diagonal principal.
Para las matrices triangular inferiores, se puede llegar a la misma conclusión con un análisis similar.

4. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ¿Puede tener $A$ más de $n$ autovectores linealmente independientes?

Los autovalores de $A$ son las raíces del polinomio característico, el mismo es un polinomio de grado $n$, entonces voy a tener a lo sumo $n$ soluciones. Por lo tanto, no es posible que hayan más de $n$.
También se puede pensar a $A$ como la representación matricial de alguna transformación lineal

$$T : V \rightarrow V \quad dim(V) = n$$

por el Corolario del **Lema 4.9** $T$ tiene a lo sumo $n$ autovalores distintos.

5. (a) Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que tenga un sólo autovalor.

Si pensamos a $A$ como la representación matricial de una transforamción lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, entonces las direcciones en las cuales los vectores son escalados, deben serlo en un mismo factor.

$$T(1,0) = (\lambda, 0) \quad T(0,1) = (0, \lambda)$$

Cuya representación matricial en la base canónica es

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Esta matriz, como se vio en el ejercicio 3, tiene un único autovalor: $\lambda$.

(b) Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que tenga un sólo autovalor con un autoespacio asociado de dimensión 1.

El autoespacio asociado a un autovalor está conformado por los autovectores asociados. Al ser de dimensión 1, éste debe ser una recta que contenga al origen. Sólo los vectores de esa recta van a ser escalados por un cierto $\lambda$. Propongo:

$$T(1,0) = (\lambda, 0) \quad T(0,1) = (\alpha, \beta)$$

Cuya representación matricial en la base canónica es

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Como pide un único autovalor, $\beta = \lambda$. Para que el autoespacio sea de dimensión 1:

$$E(\lambda) : \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \alpha y = 0$$

Si $\alpha = 0$ el autoespacio será $\mathbb{R}^2$, mientras que si $\alpha \neq 0 \to E(\lambda) = \overline{\{(1,0)\}}$. Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

(c) Contruir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que no tenga autovalores. ¿Puede hacer lo mismo para una matriz de $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

Se puede proponer la rotación presentado en la Práctica 2:

$$[R_{\frac{\pi}{2}}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La misma no tiene autovalores en $\mathbb{R}$. No puede hacerse lo mismo con matrices de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ya que siempre existirán raíces complejas para el polinomio característico.

6. Considerar las transformaciones lineales $R_{\frac{\pi}{2}}, S_Y, H_2$ y $P_X$ del ejercicio 11 de la práctica 2. Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios asociados. ¿Es alguna de ellas diagonalizable?

- $R_{\frac{\pi}{2}}$
  La representación matricial en la base canónica fue presentada en el ejercicio anterior:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  La misma no tiene autovalores, con lo cual tampoco tendrá autovectores, ni autoespacios y tampoco será diagonalizable ya que no existe una base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovectores.

- $S_Y$
  Tenemos que

  $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz triangular, los autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$. Para hallar los autoespacios asociados:

$$\begin{cases} E(-1): \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to y = 0 \to E(-1) = \overline{\{(1,0)\}} \\ E(1): \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x = 0 \to E(1) = \overline{\{(0,1)\}} \end{cases}$$

Por lo tanto, los autovectores asociados a $\lambda_1 = -1$ son de la forma $(x, 0)$, mientras que $(0, y)$ son los asociados a $\lambda_2 = 1$. Como $\{(1,0)(0,1)\}$ son base de $\mathbb{R}^2$, entonces $S_Y$ es diagonalizable.

- $H_2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Del ejercicio 5b, se sabe que tiene como autovalor a $\lambda = 2$ y $E(2) = \mathbb{R}^2$, los autovalores son todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ y como ya es una matriz diagonal, es diagonalizable.

- $P_X$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$. Para los autoespacios y autovectores:

$$\begin{cases} E(1): \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to y = 0 \to E(1) = \overline{\{(1,0)\}} \\ E(0): \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to x = 0 \to E(0) = \overline{\{(0,1)\}} \end{cases}$$

Es diagonalizable.

7. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea $T \in L(V)$. Probar que, si $\lambda$ y $\mu$ son dos autovalores de $T$ diferentes, entonces $N(T - \lambda I) \cap N(T - \mu I) = \{\vec{0}\}$.

Por el **Lema 4.9** los autovectores asociados a los distintos autovalores son li, entonces $\overline{\{v_\lambda\}} \cap \overline{\{v_\mu\}} = \{\vec{0}\} \to E(\lambda) \cap E(\mu) = \{\vec{0}\} \to N(T - \lambda I) \cap N(T - \mu I) = \{\vec{0}\}$

8. Sea $V$ un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea $T \in L(V)$. Supongamos que $\lambda$ es un autovalor de $T$ y que $v \in V$ es un autovector asociado a $\lambda$. Probar que si $p \in \mathbb{K}[x]$, entonces $p(T)v = p(\lambda)v$.

Si

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} p(T)v &= a_n T^n v + a_{n-1} T^{n-1} v + \cdots + a_1 T v + a_0 I v \\ &= a_n T^{n-1} T v + a_{n-1} T^{n-2} T v + \cdots + a_1 T v + a_0 v \\ &= a_n T^{n-1} \lambda v + a_{n-1} T^{n-2} \lambda v + \cdots + a_1 \lambda v + a v \\ &= a_n \lambda^n v + a_{n-1} \lambda^{n-1} v + \cdots + a_1 \lambda v + a v \\ &= p(\lambda) v \end{aligned}$$

9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar el polinomio minimal de $A$ considerando los coeficientes en $\mathbb{C}$, en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Z}_3$.

Como el minimal tiene las mismas raíces que el polinomio característico, empiezo calculando éste último

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2)$$

Para $\mathbb{C}$: $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2i)(\lambda + 2i) \rightarrow m_A(\lambda) = p_A(\lambda)$.
En el caso de $\mathbb{R}$, recordando que el minimal divide al característico y comparte raíces, concluimos que hay 2 posibilidades

$$m_A(\lambda) = p_A(\lambda), \quad m_A(\lambda) = (\lambda - 1)$$

Sin embargo, $(\lambda - 1)$ no anula a $A$, con lo cual $m_A(\lambda) = p_A(\lambda)$.

(b) Decir en cada caso si $A$ es diagonalizable.

Por el **Teorema 4.41** en $\mathbb{C}$ es diagonalizable, mientras que en $\mathbb{R}$ no.

10. Para cada una de las siguientes matrices hallar sus autovalores y autoespacios asociados. Decir si son diagonalizables y en caso de serlo hallar la matriz diagonal y el cambio de base correspondiente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

- $A$ :
  Como la matriz es triangular, los autovalores son los elementos de la diagonal principal. En este caso el único autovalor es $\lambda = 1$. Para hallar el autoespacio asociado, tengo que resolver

  $$\left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = z = 0$$

  Por lo tanto, el autoespacio asociado será:

  $$E(1) = \overline{\{(1, 0, 0)\}}$$

  No hay base de autovectores, entonces no es diagonalizable.

- $B$ :
  El polinomio característico es

  $$p_B(x) = (x + 2)^2(x - 4)$$

  Por lo tanto, los autovalores son

  $$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 4$$

  Por otra parte,

  $$E(-2) = \overline{\{(-1, 0, 1), (1, 1, 0)\}} \qquad E(4) = \overline{\{(1, 1, 2)\}}$$

  Como hay una base de autovectores, entonces $B$ es diagonalizable.

  $$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

- $C$ : El polinomio característico es:

  $$p_C(x) = (\lambda + 3)(\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

  Los autovalores son

  $$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = 4 \qquad \lambda_3 = -1$$

Los autoespacios son

$$E(-3) = \overline{\{(1,0,0)\}} \qquad E(4) = \overline{\{(0,1,1)\}} \qquad E(-1) = \overline{\{(0,1,6)\}}$$

La diagonalización es igual que en el caso anterior.

11. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que $A$ y $B$ tienen polinomios característicos diferentes, pero sus polinomios minimales coinciden.

12. Sea $T \in L(\mathbb{R}_2[x])$ dado por $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$.

   (a) Hallar la representación matricial de $T$ con respecto a la base usual de $R_2[x]$.

   (b) Hallar el polinomio característico y los autovalores de $T$.

   (c) ¿Es $T$ diagonalizable?

13. Sea $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por $T(x, y, z) = (x, x + y, z)$.

   (a) Hallar el polinomio característico y el minimal de $T$.

   (b) Calcular los autovalores y una base para cada autoespacio asociado.

   (c) Decir si $T$ es diagonalizable, justificando de dos maneras diferentes.

14. (a) Sea $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que:
   - Sus autovalores son 1 y -1.
   - $\{(0, 1, -1)\}$ es una base de $N(T + I)$ y $\{(0, 1, 1); (1, 0, 0)\}$ es una base de $N(T - I)$.

   ¿Se puede decir si $T$ es diagonalizable? Hallar el polinomio característico de $T$.

   (b) Sea $T \in L(\mathbb{R}^4)$ tal que:
   - Sus autovalores son 1 y -1.
   - $\{(0, -1, 0, 0)\}$ es una base de $N(T + I)$ y $\{(0, 0, 1, 1); (1, 0, 0, 0)\}$ es una base de $N(T - I)$.

   ¿Se puede decir si $T$ es diagonalizable?

15. ¿Cuáles son los posibles autovalores de una matriz $A$ si se sabe que $A = A^2$?

16. Decir para qué valores de $a$ y $b$ la siguiente matriz es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Sea $A$ una matriz cuadrada tal que $A \neq I$ y $A^3 - A^2 + A = I$. ¿Es $A$ diagonalizable sobre $\mathbb{C}$?¿Y sobre $\mathbb{R}$?

18. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es simétrica, entonces es semejante a una matriz diagonal.