

# Trabajo Práctico 5 - Formas canónicas elementales I

Santiago

1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Probar que  $2$ ,  $2 + \sqrt{2}$  y  $2 - \sqrt{2}$  son autovalores de  $A$  y hallar los autovectores correspondientes.

Para que un escalar  $\lambda$  sea autovalor de  $A$  se debe cumplir

$$Av = \lambda v \quad v \neq 0$$

Como me pide comprobar, bastaría con chequear la igualdad, pero en caso de querer encontrarlos, podemos pensar que

$$Av - \lambda v = 0 \rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \rightarrow A - \lambda I = 0 \rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

Osea que tendríamos que calcular ese determinante, igualarlo a 0 y encontrar para qué valores de  $\lambda$  se satisface la ecuación.

- $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v = 2v \rightarrow \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \rightarrow x = -z, y = 0$$

Los  $v = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$  son los autovectores asociados al autovalor 2.

- $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v = (2 + \sqrt{2})v \rightarrow \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 + \sqrt{2})x \\ (2 + \sqrt{2})y \\ (2 + \sqrt{2})z \end{pmatrix} \rightarrow y = -\sqrt{2}x, z = x$$

Los  $v = (x, -\sqrt{2}x, x) = x(1, -\sqrt{2}, 1)$  son los autovectores asociados a  $\lambda_2$ .

- $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v = (2 - \sqrt{2})v \rightarrow \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 - \sqrt{2})x \\ (2 - \sqrt{2})y \\ (2 - \sqrt{2})z \end{pmatrix} \rightarrow y = \sqrt{2}x, z = x$$

Los  $v = (x, \sqrt{2}x, x) = x(1, \sqrt{2}, 1)$  son los autovectores asociados a  $\lambda_3$ .

En caso de haber querido encontrar los autovalores de cero:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)[(2 - \lambda)^2 - 1] + [-1(2 - \lambda)]$$

Operando, se llega a

$$\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(2 - \sqrt{2} - \lambda)(2 + \sqrt{2} - \lambda)$$

Se puede llegar al mismo resultado calculando  $\det(\lambda I - A)$ , que quizás está mejor para visualizar el polinomio característico como estamos acostumbrados, obteniendo

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda - 2 - \sqrt{2})(\lambda - 2 + \sqrt{2})$$

2. Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  una matriz invertible ¿Puede ser  $\lambda = 0$  un autovalor de  $A$ ? Probar que si  $\lambda$  es un autovalor de  $A$ , entonces  $\lambda^{-1}$  es autovalor de  $A^{-1}$  y además los autoespacios asociados a  $\lambda$  y  $\lambda^{-1}$  pertenecientes a  $A$  y  $A^{-1}$  respectivamente,

coinciden.

Si  $\lambda = 0$  es autovalor  $Av = 0 \rightarrow A^{-1}Av = 0 \rightarrow v = 0$ . Esto contradice la definición de autovalor, ya que  $v \neq 0$ . Por lo tanto,  $\lambda$  no puede ser 0.

Si  $\lambda$  es autovalor de  $A \rightarrow Av = \lambda v \rightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \rightarrow Iv = \lambda A^{-1}v \rightarrow \frac{1}{\lambda}Iv = A^{-1}v \rightarrow \lambda^{-1}$  es autovalor de  $A^{-1}$ .

Los autoespacios asociados a  $\lambda$  y  $\lambda^{-1}$  son

$$E(\lambda) = N(A - \lambda I) \quad E(\lambda^{-1}) = N(A^{-1} - \lambda^{-1}I)$$

Los vectores  $v$  del autoespacio asociado a  $\lambda$  cumplen

$$(A - \lambda I)v = 0 \rightarrow Av = \lambda Iv \rightarrow Av = \lambda v$$

Es decir, los vectores del autoespacio, son los autovectores. Por otra parte, los vectores  $w$  del autoespacio asociado a  $\lambda^{-1}$  cumplen

$$(A^{-1} - \lambda^{-1}I)w = 0 \rightarrow A^{-1}w = \lambda^{-1}Iw \rightarrow A^{-1}w = \lambda^{-1}w \rightarrow w = \lambda^{-1}Aw \rightarrow Aw = \lambda w$$

que es exactamente la misma condición de los elementos del autoespacio asociado a  $\lambda$ , con lo cual estos coinciden.

3. Probar que si  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  es una matriz triangular, entonces los autovalores de  $A$  son los elementos de la diagonal.

Hay 2 tipos de matrices triangulares: superior e inferior. Supongamos una superior:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los autovalores, tengo que encontrar las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Al desarrollar el determinante por la primera columna:

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Al repetir este proceso  $n$  veces, termino con:

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

Es decir, los autovalores de  $A$  son los elementos de la diagonal principal.

Para las matrices triangular inferiores, se puede llegar a la misma conclusión con un análisis similar.

4. Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  ¿Puede tener  $A$  más de  $n$  autovectores linealmente independientes?

Los autovalores de  $A$  son las raíces del polinomio característico, el mismo es un polinomio de grado  $n$ , entonces voy a tener a lo sumo  $n$  soluciones. Por lo tanto, no es posible que hayan más de  $n$ .

También se puede pensar a  $A$  como la representación matricial de alguna transformación lineal

$$T : V \rightarrow V \quad \dim(V) = n$$

por el Corolario del **Lema 4.9**  $T$  tiene a lo sumo  $n$  autovalores distintos.

5. (a) Construir una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  que tenga un sólo autovalor.

Si pensamos a  $A$  como la representación matricial de una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , entonces las direcciones en las cuales los vectores son escalados, deben serlo en un mismo factor.

$$T(1, 0) = (\lambda, 0) \quad T(0, 1) = (0, \lambda)$$

Cuya representación matricial en la base canónica es

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Esta matriz, como se vio en el ejercicio 3, tiene un único autovalor:  $\lambda$ .

- (b) Construir una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  que tenga un sólo autovalor con un autoespacio asociado de dimensión 1.

El autoespacio asociado a un autovalor está conformado por los autovectores asociados. Al ser de dimensión 1, éste debe ser una recta que contenga al origen. Sólo los vectores de esa recta van a ser escalados por un cierto  $\lambda$ . Propongo:

$$T(1, 0) = (\lambda, 0) \quad T(0, 1) = (\alpha, \beta)$$

Cuya representación matricial en la base canónica es

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Como pide un único autovalor,  $\beta = \lambda$ . Para que el autoespacio sea de dimensión 1:

$$E(\lambda) : \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha y = 0$$

Si  $\alpha = 0$  el autoespacio será  $\mathbb{R}^2$ , mientras que si  $\alpha \neq 0 \rightarrow E(\lambda) = \overline{\{(1, 0)\}}$ . Por lo tanto,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

- (c) Construir una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  que no tenga autovalores. ¿Puede hacer lo mismo para una matriz de  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ ?

Se puede proponer la rotación presentado en la Práctica 2:

$$[R_{\frac{\pi}{2}}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La misma no tiene autovalores en  $\mathbb{R}$ . No puede hacerse lo mismo con matrices de  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  ya que siempre existirán raíces complejas para el polinomio característico.

6. Considerar las transformaciones lineales  $R_{\frac{\pi}{2}}, S_Y, H_2$  y  $P_X$  del ejercicio 11 de la práctica 2. Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios asociados. ¿Es alguna de ellas diagonalizable?

- $R_{\frac{\pi}{2}}$

La representación matricial en la base canónica fue presentada en el ejercicio anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La misma no tiene autovalores, con lo cual tampoco tendrá autovectores, ni autoespacios y tampoco será diagonalizable ya que no existe una base de  $\mathbb{R}^2$  formada por autovectores.

- $S_Y$

Tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como es una matriz triangular, los autovalores son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 1$ . Para hallar los autoespacios asociados:

$$\begin{cases} E(-1) : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = 0 \rightarrow E(-1) = \overline{\{(1, 0)\}} \\ E(1) : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 0 \rightarrow E(1) = \overline{\{(0, 1)\}} \end{cases}$$

Por lo tanto, los autovectores asociados a  $\lambda_1 = -1$  son de la forma  $(x, 0)$ , mientras que  $(0, y)$  son los asociados a  $\lambda_2 = 1$ . Como  $\{(1, 0)(0, 1)\}$  son base de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $S_Y$  es diagonalizable.

- $H_2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Del ejercicio 5b, se sabe que tiene como autovalor a  $\lambda = 2$  y  $E(2) = \mathbb{R}^2$ , los autovalores son todos los vectores de  $\mathbb{R}^2$  y como ya es una matriz diagonal, es diagonalizable.

- $P_X$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 0$ . Para los autoespacios y autovectores:

$$\begin{cases} E(1) : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = 0 \rightarrow E(1) = \overline{\{(1, 0)\}} \\ E(0) : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x = 0 \rightarrow E(0) = \overline{\{(0, 1)\}} \end{cases}$$

Es diagonalizable.

7. Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -EV de dimensión finita y sea  $T \in L(V)$ . Probar que, si  $\lambda$  y  $\mu$  son dos autovalores de  $T$  diferentes, entonces  $N(T - \lambda I) \cap N(T - \mu I) = \{\vec{0}\}$ .

Por el **Lema 4.9** los autovectores asociados a los distintos autovalores son li, entonces  $\overline{\{v_\lambda\}} \cap \overline{\{v_\mu\}} = \{\vec{0}\} \rightarrow E(\lambda) \cap E(\mu) = \{\vec{0}\} \rightarrow N(T - \lambda I) \cap N(T - \mu I) = \{\vec{0}\}$

8. Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -EV de dimensión finita y sea  $T \in L(V)$ . Supongamos que  $\lambda$  es un autovalor de  $T$  y que  $v \in V$  es un autovector asociado a  $\lambda$ . Probar que si  $p \in \mathbb{K}[x]$ , entonces  $p(T)v = p(\lambda)v$ .

9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Hallar el polinomio minimal de  $A$  considerando los coeficientes en  $\mathbb{C}$ , en  $\mathbb{R}$  y en  $\mathbb{Z}_3$ .

- (b) Decir en cada caso si  $A$  es diagonalizable.

10. Para cada una de las siguientes matrices hallar sus autovalores y autoespacios asociados. Decir si son diagonalizables y en caso de serlo hallar la matriz diagonal y el cambio de base correspondiente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que  $A$  y  $B$  tienen polinomios característicos diferentes, pero sus polinomios minimales coinciden.

12. Sea  $T \in L(\mathbb{R}_2[x])$  dado por  $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$ .

(a) Hallar la representación matricial de  $T$  con respecto a la base usual de  $\mathbb{R}_2[x]$ .

(b) Hallar el polinomio característico y los autovalores de  $T$ .

(c) ¿Es  $T$  diagonalizable?

13. Sea  $T \in L(\mathbb{R}^3)$  dado por  $T(x, y, z) = (x, x + y, z)$ .

(a) Hallar el polinomio característico y el minimal de  $T$ .

(b) Calcular los autovalores y una base para cada autoespacio asociado.

(c) Decir si  $T$  es diagonalizable, justificando de dos maneras diferentes.

14. (a) Sea  $T \in L(\mathbb{R}^3)$  tal que:

- Sus autovalores son 1 y -1.
- $\{(0, 1, -1)\}$  es una base de  $N(T + I)$  y  $\{(0, 1, 1); (1, 0, 0)\}$  es una base de  $N(T - I)$ .

¿Se puede decir si  $T$  es diagonalizable? Hallar el polinomio característico de  $T$ .

(b) Sea  $T \in L(\mathbb{R}^4)$  tal que:

- Sus autovalores son 1 y -1.
- $\{(0, -1, 0, 0)\}$  es una base de  $N(T + I)$  y  $\{(0, 0, 1, 1); (1, 0, 0, 0)\}$  es una base de  $N(T - I)$ .

¿Se puede decir si  $T$  es diagonalizable?

15. ¿Cuáles son los posibles autovalores de una matriz  $A$  si se sabe que  $A = A^2$ ?

16. Decir para qué valores de  $a$  y  $b$  la siguiente matriz es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Sea  $A$  una matriz cuadrada tal que  $A \neq I$  y  $A^3 - A^2 + A = I$ . ¿Es  $A$  diagonalizable sobre  $\mathbb{C}$ ? ¿Y sobre  $\mathbb{R}$ ?

18. Probar que si  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es simétrica, entonces es semejante a una matriz diagonal.