Trabajo Práctico 5 - Formas canónicas elementales I

Santiago

1. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
Probar que $2, 2+\sqrt{2}$ y $2-\sqrt{2}$ son autovalores de A y hallar los autovectores correspondientes.

Para que un escalar λ sea autovalor de A se debe cumplir
$$Av = \lambda v \quad v \neq 0$$
Como me pide comprobar, bastaría con chequear la igualdad, pero en caso de querer encontrarlos, podemos pensar que
$$Av - \lambda v = 0 \to (A - \lambda I)v = 0 \to A - \lambda I = 0 \to det(A - \lambda I) = 0$$
Osea que tendríamos que calcular ese determinante, igualarlo a 0 y encontrar para qué valores de λ se satisface la ecuación.

- $\lambda_1 = 2$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v = 2v \to \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \to x = -z, y = 0$$
Los $v = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$ son los autovectores asociados al autovalor 2.
- $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v = (2+\sqrt{2})v \to \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{2})x \\ (2+\sqrt{2})y \\ (2+\sqrt{2})z \end{pmatrix} \to y = -\sqrt{2}x, z = x$$
Los $v = (x, -\sqrt{2}x, x) = x(1, -\sqrt{2}, 1)$ son los autovectores asociados a λ_2.
- $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v = (2-\sqrt{2})v \to \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y - z \\ -y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})x \\ (2-\sqrt{2})y \\ (2-\sqrt{2})z \end{pmatrix} \to y = \sqrt{2}x, z = x$$
Los $v = (x, \sqrt{2}x, x) = x(1, \sqrt{2}, 1)$ son los autovectores asociados a λ_3.

En caso de haber querido encontrar los autovalores de cero:
$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] + [-1(2-\lambda)]$$
Operando, se llega a
$$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(2-\sqrt{2}-\lambda)(2+\sqrt{2}-\lambda)$$
Se puede llegar al mismo resultado calculando $det(\lambda I - A)$, que quizás está mejor para visualizar el polinomio característico como estamos acostumbrados, obteniendo
$$det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda - 2 - \sqrt{2})(\lambda - 2 + \sqrt{2})$$

2. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz inversible ¿Puede ser $\lambda = 0$ un autovalor de A? Probar que si λ es un autovalor de A, entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1} y además los autoespacios asociados a λ y λ^{-1} pertenecientes a A y A^{-1} respectivamente,

coinciden.

Si $\lambda = 0$ es autovalor $Av = 0 \to A^{-1}Av = 0 \to v = 0$. Esto contradice la definición de autovalor, ya que $v \neq 0$. Por lo tanto, λ no puede ser 0.
Si λ es autovalor de $A \to Av = \lambda v \to A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \to Iv = \lambda A^{-1}v \to \frac{1}{\lambda}Iv = A^{-1}v \to \lambda^{-1}$ es autovalor de A^{-1}.
Los autoespacios asociados a λ y λ^{-1} son

$$E(\lambda) = N(A - \lambda I) \qquad E(\lambda^{-1}) = N(A^{-1} - \lambda^{-1}I)$$

Los vectores v del autoespacio asociado a λ cumplen

$$(A - \lambda I)v = 0 \to Av = \lambda Iv \to Av = \lambda v$$

Es decir, los vectores del autoespacio, son los autovectores. Por otra parte, los vectores w del autoespacio asociado a λ^{-1} cumplen

$$(A^{-1} - \lambda^{-1}I)w = 0 \to A^{-1}w = \lambda^{-1}Iw \to A^{-1}w = \lambda^{-1}w \to w = \lambda^{-1}Aw \to Aw = \lambda w$$

que es exactamente la misma condición de los elementos del autoespacio asociado a λ, con lo cual estos coinciden.

3. Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz triangular, entonces los autovalores de A son los elementos de la diagonal.

Hay 2 tipos de matrices triangulares: superior e inferior. Supongamos una superior:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los autovalores, tengo que encontrar las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Al desarrolar el determinante por la primera columna:

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11}) \begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \lambda - a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Al repetir este proceso n veces, termino con:

$$p(\lambda) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33})\dots(\lambda - a_{nn})$$

Es decir, los autovalores de A son los elementos de la diagonal principal.
Para las matrices triangular inferiores, se puede llegar a la misma conclusión con un análisis similar.

4. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ¿Puede tener A más de n autovectores linealmente independientes?

5. (a) Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que tenga un sólo autovalor.

   (b) Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que tenga un sólo autovalor con un autoespacio asociado de dimensión 1.

(c) Contruir una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que no tenga autovalores. ¿Puede hacer lo mismo para una matriz de $\mathbb{C}^{2\times 2}$?

6. Considerar las transformaciones lineales $R_{\frac{\pi}{2}}, S_Y, H_2$ y P_X del ejercicio 11 de la práctica 2. Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios asociados. ¿Es alguna de ellas diagonalizable?

7. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea $T \in L(V)$. Probar que, si λ y μ son dos autovalores de T diferentes, entonces $N(T-\lambda I) \cap N(T-\mu I) = \{\vec{0}\}$.

8. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea $T \in L(V)$. Supongamos que λ es un autovalor de T y que $v \in V$ es un autovector asociado a λ. Probar que si $p \in \mathbb{K}[x]$, entonces $p(T)v = p(\lambda)v$.

9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Hallar el polinomio minimal de A considerando los coeficientes en $\mathbb{C}$, en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Z}_3$.

(b) Decir en cada caso si A es diagonalizable.

10. Para cada una de las siguientes matrices hallar sus autovalores y autoespacios asociados. Decir si son diagonalizalibles y en caso de serlo hallar la matriz diagonal y el cambio de base correspondiente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probar que A y B tienen polinomios característicos diferentes, pero sus polinomios minimales coinciden.

12. Sea $T \in L(\mathbb{R}_2[x])$ dado por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$.

(a) Hallar la representación matricial de T con respecto a la base usual de $R_2[x]$.

(b) Hallar el polinomio característico y los autovalores de T.

(c) ¿Es T diagonalizable?

13. Sea $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por $T(x, y, z) = (x, x + y, z)$.

(a) Hallar el polinomio característico y el minimal de T.

(b) Calcular los autovalores y una base para cada autoespacio asociado.

(c) Decir si T es diagonalizable, justificando de dos maneras diferentes.

14. (a) Sea $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que:
    - Sus autovalores son 1 y -1.
    - $\{(0,1,-1)\}$ es una base de $N(T+I)$ y $\{(0,1,1);(1,0,0)\}$ es una base de $N(T-I)$.

    ¿Se puede decir si T es diagonalizable? Hallar el polinomio característico de T.

    (b) Sea $T \in L(\mathbb{R}^4)$ tal que:
    - Sus autovalores son 1 y -1.
    - $\{(0,-1,0,0)\}$ es una base de $N(T+I)$ y $\{(0,0,1,1);(1,0,0,0)\}$ es una base de $N(T-I)$.

    ¿Se puede decir si T es diagonalizable?

15. ¿Cuáles son los posibles autovalores de una matriz A si se sabe que $A = A^2$?

16. Decir para qué valores de a y b la siguiente matriz es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. Sea A una matriz cuadrada tal que $A \neq I$ y $A^3 - A^2 + A = I$. ¿Es A diagonalizable sobre $\mathbb{C}$?¿Y sobre $\mathbb{R}$?

18. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es simétrica, entonces es semejante a una matriz diagonal.