Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas - UNLP

Álgebra lineal

Trabajo práctico N°6 - 2022

Formas canónicas elementales II

Proyecciones, subespacios invariantes y operadores nilpotentes

1. Sea A una matriz tal que $A^2 = A$ pero $A \neq I, 0$.
   a) Hallar el polinomio minimal de A.
   b) Probar que A es semejante a la matriz diagonal $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde $r = \mathrm{Rg}(A)$.

2. Sea $T \in L(\mathbb{R}^4)$ tal que
$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   a) Probar que los únicos autovalores de T son 0 y 1, pero T no es una proyección.
   b) ¿Es diagonalizable T?
   c) Sea S un operador diagonalizable que tiene como únicos autovalores al 0 y al 1 ¿Se puede afirmar que S es una proyección?

3. Probar que los siguientes operadores son proyecciones:
   a) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dado por $T(ax^2 + bx + c) = c$.
   b) $\mathrm{diag} : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ dado por
$$(\mathrm{diag}(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ii} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \text{para } i, j = 1, \cdots, n.$$

4. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
   (la matriz del ejercicio 1 del TP 5) y supongamos que $A = [T]_{\mathcal{E}}$ para $T \in L(\mathbb{C}^3)$. Hallar tres subespacios no nulos de $\mathbb{C}^3$ que sean invariantes por T y tales que $\mathbb{C}^3$ se pueda escribir como suma directa de ellos.

5. a) Descomponer a $\mathbb{R}^3$ como suma de directa de subespacios W_1, W_2, W_3.

b) Hallar las proyecciones P_1, P_2, P_3 correspondientes a cada uno de los subespacios del inciso a, respectivamente.

c) Hallar el polinomio minimal y el característico de $\sqrt{2}P_1 + \pi P_2 + 3P_3$.

d) ¿Es $\sqrt{2}P_1 + \pi P_2 + 3P_3$ un operador diagonalizable? Hallar sus autovalores y autoespacios correspondientes.

6. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
una representación matricial de $T \in L(\mathbb{C}^4)$ (pensando a $\mathbb{C}^4$ como $\mathbb{C}$-EV)

    a) Hallar el polinomio característico de T y el minimal. ¿Es T diagonalizable?

    b) Hallar dos subespacios de $\mathbb{C}^4$ que sean T-invariantes y tales que su suma directa sea $\mathbb{C}^4$.

7. Sea $T \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que
$$[T]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

    a) Probar que $W_1 = \overline{\{(1,0)\}}$ es T-invariante.

    b) Probar que no existe un subespacio W_2 de $\mathbb{R}^2$ que sea T-invariante y que además $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

    a) Si $T \in L(\mathbb{R}^2)$ es tal que $[T]_{\mathcal{E}} = A$ ¿existe algún subespacio propio de $\mathbb{R}^2$ que sea T-invariante?

    b) Si $S \in L(\mathbb{C}^2)$ (pensando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-EV), es tal que $[S]_{\mathcal{E}} = A$ ¿existe algún subespacio propio de $\mathbb{C}^2$ que sea S-invariante?

9. Sean V un $\mathbb{K}$-EV y $T, S \in L(V)$.

    a) Sea W un subespacio de V que es invariante por T y S. Probar que W también es invariante por los operadores $T + S$ y $T \circ S$.

    b) Supongamos que $S \circ T = T \circ S$. Probar que si λ es un autovalor de T, entonces el autoespacio asociado a λ es S-invariante.

10. ¿Se puede afirmar que un operador lineal tiene como único autovalor al cero, es nilpotente?

11. Sea $N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tal que $N^2 = 0$. Probar que, o bien $N = 0$, o bien N es semejante a la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. Sea V un $\mathbb{K}$-EV tal que $\dim(V) = n$ y $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ es una base (ordenada) de V. Sea $T \in L(V)$ dado por

$$T(b_j) = \begin{cases} b_{j+1} & \text{si } j = 1, \cdots, n-1\,, \\ 0 & \text{si } j = n\,. \end{cases}$$

   a) Probar que el único autovalor de T es cero.

   b) Probar que T es nilpotente.

   c) ¿Cuánto vale la traza de T? ¿Y el determinante?

   Sugerencia: recordar el ejercicio optativo del TP 4.

13. Sea V un $\mathbb{K}$-EV tal que $\dim(V) = n$. Probar que si $N \in L(V)$ es nilpotente, entonces $p_N(x) = x^n$.