Trabajo Práctico 8 - Funcionales lineales

Santiago

1. Hallar la base dual de cada una de las siguientes bases:

   (a) $B = \{(1,0,-1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$

   Del **Teorema 6.4** sabemos que la base dual $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ debe cumplir $f_i(b_j) = \delta_{ij}$, siendo b_j los elementos de la base B. Un funcional lineal sobre $\mathbb{R}^3$ es de la forma: $f(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$. Como voy a necesitar 3 funcionales, tengo que $f_i(x,y,z) = \alpha_i x + \beta_i y + \gamma_i z, i = 1,2,3$.

   $$\begin{cases} f_1(1,0,-1) = \alpha_1 - \gamma_1 = 1 \\ f_1(1,1,0) = \alpha_1 + \gamma_1 = 0 \\ f_1(1,0,0) = \alpha_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_2(1,0,-1) = \alpha_2 - \gamma_2 = 0 \\ f_2(1,1,0) = \alpha_2 + \gamma_2 = 1 \\ f_2(1,0,0) = \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f_3(1,0,-1) = \alpha_3 - \gamma_3 = 0 \\ f_3(1,1,0) = \alpha 3 + \gamma_3 = 0 \\ f_3(1,0,0) = \alpha_3 = 1 \end{cases}$$
   $$\to B^* = \{f_1(x,y,z) = -z; f_2(x,y,z) = y; f_3(x,y,z) = x+y+z\}$$

   (b) $B = \{(-i,0),(1,1-i)\}$ base de $\mathbb{C}^2$

   También se puede proseguir de la siguiente manera. Un elemento $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ se escribe
   $$(x,y) = \alpha(-i,0) + \beta(1,1-i) \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}$$
   De la ecuación se obtiene que:
   $$\beta = y\tfrac{1+i}{2}, \quad \alpha = xi + y\tfrac{1-i}{2}$$
   $$\text{por linealidad} \to \begin{cases} f_1(x,y) = \alpha f_1(-i,0) + \beta f_1(1,1-i) = xi + y\frac{1-i}{2}\cdot 1 + y\frac{1+i}{2}\cdot 0 = xi + y\frac{1-i}{2} \\ f_2(x,y) = \alpha f_2(-i,0) + \beta f_2(1,1-i) = xi + y\frac{1-i}{2}\cdot 0 + y\frac{1+i}{2}\cdot 1 = y\frac{1+i}{2} \end{cases}$$
   $$\to B^* = \{f_1(x,y) = xi + y\tfrac{1-i}{2}; f_2(x,y) = y\tfrac{1+i}{2}\}$$

   (c) $B = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

   Dado un $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, A = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

   De donde se llega a $\begin{cases} x_1 = a - d \\ x_2 = -b \\ x_3 = -b - c \\ x_4 = d \end{cases} \to B^* = \{f_1(A) = a-d, f_2(A) = -b, f_3(A) = -b-c, f_4(A) = d\}$

2. Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

   $$v_1 = (-1,-1,0); \quad v_2 = (0,1,-2); \quad v_3 = (1,0,1)$$

   (a) Probar que forman una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar su base dual.

   $\vec{0} = x_1(-1,-1,0) + x_2(0,1,-2) + x_3(1,0,1) \to \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_1 = x_2 \\ 2x_2 = x_3 \end{cases} \to x_1, x_2, x_3 = 0 \to$ son li.

   Como v_1, v_2, v_3 son vectores li de $\mathbb{R}^3$, estos forman una base de $\mathbb{R}^3$

   Sea $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z) = \alpha(-1,-1,0) + \beta(0,1,-2) + \gamma(1,0,1) \to \begin{cases} \alpha = x - 2y - z \\ \beta = x - y - z \\ \gamma = 2x - 2y - z \end{cases}$

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = \alpha f_1(-1,-1,0) + \beta f_1(0,1,-2) + \gamma f_1(1,0,1) = x - 2y - z \\ f_2(x,y,z) = \alpha f_2(-1,-1,0) + \beta f_2(0,1,-2) + \gamma f_2(1,0,1) = x - y - z \\ f_3(x,y,z) = \alpha f_3(-1,-1,0) + \beta f_3(0,1,-2) + \gamma f_3(1,0,1) = 2x - 2y - z \end{cases} \rightarrow B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$$

(b) Supongamos que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que

$$f(v_1) = 1; \quad f(v_2) = -f(v_1); \quad f(v_3) = 3$$

Hallar explícitamente a $f(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.¿Cuánto vale $f(3,4,0)$?

La **Ecuación 6.3** nos dice que

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(b_i) f_i$$
$$\rightarrow f(x,y,z) = x - 2y - z + (-1)(x - y - z) + 3(2x - 2y - z)$$
$$\rightarrow f(x,y,z) = 6x - 7y - 3z$$
$$\rightarrow f(3,4,0) = -10$$

(c) Hallar un funcional lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(v_1) = g(v_2) = 0; \quad g(v_3) \neq 0$$

Propongo $g(v_3) = 1 \rightarrow g(x,y,z) = 0(x - 2y - z) + 0(x - y - z) + 2x - 2y - z \rightarrow g(x,y,z) = 2x - 2y - z$

3. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea f un funcional lineal sobre V, no nulo.¿Qué dimensión tiene $N(f)$?

Como f es una transformación lineal, tengo que

$$dimV = dimIm(f) + dimN(f)$$

Los funcionales lineales siempre devuelven un escalar

$$\rightarrow dimIm(f) = 1$$

además se tiene que V es de dimensión finita $\rightarrow dimV = n$. Esto nos permite llegar a

$$dimN(f) = n - 1$$

4. Hallar un hiperespacio de $\mathbb{R}^2$ y uno de $\mathbb{R}^3$. Interpretar gráficamente.

De la **Definición 6.6** sabemos que para que un subespacio sea un hiperespacio es necesario que $dimW = n-1$

- En $\mathbb{R}^2$, cualquier recta que pase por el origen me serviría. En particular el eje de ordenadas cumple con los requisitos. Además, se puede pensar que W es el núcleo de un funcional lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, osea que
$$f(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) : x = 0$$
Como un vector de $\mathbb{R}^2$ se escribe $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \rightarrow f(x,y) = xf(1,0) + yf(0,1) \rightarrow f(x,y) = xf(1,0)$, siendo $f(1,0) = \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow f(x,y) = \alpha x$ es un funcional lineal que cumple las características mencionadas.
- En $\mathbb{R}^3$, cualquier plano que contenga al origen cumple la función.

5. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sean f y g funcionales lineales sobre V, tales que $h(x) = f(x)g(x)$ es un funcional lineal sobre V. Probar que, o bien $f = 0$, o bien $g = 0$

Sugerencia: Evaluar h en $c \cdot x$ para $c \in \mathbb{K}$
Como f y g son funcionales lineales sobre V,
$$f : V \to \mathbb{K} \quad g : V \to \mathbb{K}$$
Además, se tiene que $h(x) = f(x)g(x)$ es un funcional lineal sobre V
$$h : V \to \mathbb{K}$$
Para que h sea un funcional lineal debe cumplir linealidad
$$h(cx) = ch(x) \quad c \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} h(cx) &= f(cx)g(cx) && \text{Definición} \\ &= cf(x)cg(x) && \text{Linealidad} \\ &= c^2 f(x)g(x) && \text{Conmutatividad} \\ &= c^2 h(x) && \text{Definición} \end{aligned}$$

Llego a tener la siguiente igualdad: $c^2 h(x) = ch(x)$, entonces $f(x) = 0 \vee g(x) = 0$. Faltaría comprobar si la linealidad en la suma me impone alguna otra restricción. Sean $v, w \in V$

$$h(v + w) = f(v + w)g(v + w)$$

Debido a las condiciones previas, se tienen dos posibles caminos:

- $f(x) = 0 \to h(v + w) = 0 \cdot (g(v) + g(w)) = 0g(v) + 0g(w) = f(v)g(v) + f(w)g(w) = h(v) + h(w)$
- $g(x) = 0 \to h(v + w) = (h(v) + h(w)) \cdot 0 = f(v)0 + f(w)0 = f(v)g(v) + f(w)g(w) = h(v) + h(w)$

Se ve que si $f = 0 \vee g = 0, h$ es un funcional lineal sobre V

6. Consideremos $\mathbb{C}_2[x]$ como el $\mathbb{C}$-EV de los polinomios de grado menor o igual a 2.

   (a) Probar que $B* = \{f_1, f_2, f_3\}$ es una base del dual de $\mathbb{C}_2[x]$, donde

$$f_k(p) = p(k-1) \quad \text{para } p \in \mathbb{C}_2[x]$$

Un $p \in \mathbb{C}_2[x]$ se escribe como $p(x) = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} f_1(p) = p(0) = c \\ f_2(p) = p(1) = a + b + c \\ f_3(p) = p(2) = 4a + 2b + c \end{cases}$$

Para que sean una base del dual tienen que pertenecer al dual (lo cual es cierto ya que $f_i : \mathbb{C}_2[x] \to \mathbb{C}, i = 1, 2, 3$) y deben ser li.

$$0 = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = \alpha c + \beta(a + b + c) + \gamma(4a + 2b + c) \to \begin{cases} (\alpha + \beta + \gamma)c = 0 \\ (\beta + 2\gamma)b = 0 \\ (\beta + 4\gamma)a = 0 \end{cases} \to \alpha = \beta = \gamma = 0 \to$$

son li.

   (b) Hallar una base de $C_2[x]$, tal que $B*$ sea su base dual.

$B = \{b_1, b_2, b_3\} \quad b_i = r_i x^2 + s_i x + t_i$

$$\begin{cases} f_1(b_1) = b_1(0) = 1 \to t_1 = 1 \\ f_2(b_1) = b_1(1) = 0 \to r_1 + s_1 + 1 = 0 \\ f_3(b_1) = b_1(2) = 0 \to 4r_1 + 2s_1 + 1 = 0 \\ f_1(b_2) = b_2(0) = 0 \to t_2 = 0 \\ f_2(b_2) = b_2(1) = 1 \to r_2 + s_2 = 1 \\ f_3(b_2) = b_2(2) = 0 \to 4r_2 + 2s_2 = 0 \\ f_1(b_3) = b_3(0) = 0 \to t_3 = 0 \\ f_2(b_3) = b_3(1) = 0 \to r_3 + s_3 = 0 \\ f_3(b_3) = b_3(2) = 1 \to 4r_3 + 2s_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} b_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 \\ b_2(x) = -x^2 + 2x \\ b_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x \end{cases}$$

7. Hallar S° para cada uno de los siguientes casos:

   (a) $S = \overline{\{(1, 1, 0, 0, 0); (2, -1, 1, 2, 0)\}} \subset \mathbb{R}^5$

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$. Como $f \in S^\circ$

$$\to \begin{cases} f(1, 1, 0, 0, 0) = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ f(2, -1, 1, 2, 0) = 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \alpha_3 = 3\alpha_2 - 2\alpha_4 \end{cases}$$

Tengo 3 variables independientes: α_2, α_4 y α_5

$$\begin{cases} \alpha_2 = 1, \alpha_4 = \alpha_5 = 0 \to \alpha_1 = -1, \alpha_3 = 3 \to f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \alpha_4 = 1, \alpha_2 = \alpha_5 = 0 \to \alpha_1 = 0, \alpha_3 = -2 \to f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -2x_3 + x_4 \\ \alpha_5 = 1, \alpha_2 = \alpha_4 = 0 \to \alpha_1 = 0, \alpha_3 = 0 \to f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_5 \end{cases}$$

$$\to S^\circ = \overline{\{f_1, f_2, f_3\}}$$

(b) $S = \overline{\{(x, y, z) : x + y + 2z = 0 \wedge x - 3z = 0\}} \subset \mathbb{R}^3$

Sea $s \in S \to s = (x, y, z) = (3z, -5z, z) = z(3, -5, 1) \to S = \overline{\{(3, -5, 1)\}}$, entonces los funcionales lineales que anulen a S cumplen: $f(3, -5, 1) = 0$. Sea $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z \to f(3, -5, 1) = 3\alpha - 5\beta + \gamma$. Tomando a α y β como independientes

$$\begin{cases} \alpha = 1, \beta = 0 \to \gamma = -3 \to f_1(x, y, z) = x - 3z \\ \alpha = 0, \beta = 1 \to \gamma = -5 \to f_2(x, y, z) = y + 5z \end{cases}$$

$$\to S^\circ = \overline{\{f_1, f_2\}}$$

(c) $S = \overline{\{1 + x + x^2, 2 + x^3 + 2x^4, x^3\}} \subset \mathbb{R}_4[x]$

Un funcional lineal de $(R_4[x])^*$ es de la forma

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \epsilon e$$

Un $f \in S^\circ$ cumple

$$\begin{cases} f(1 + x + x^2) = \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ f(2 + x^3 + 2x^4) = 2\alpha + \delta + 2\epsilon = 0 \\ f(x^3) = \delta = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha = -\beta - \gamma \\ \epsilon = \beta + \gamma \\ \delta = 0 \end{cases}$$

Tengo dos variables independientes: β, γ

$$\begin{cases} \beta = 1, \gamma = 0 \to \alpha = -1, \epsilon = 1, \delta = 0 \to f_1(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = -a + b + e \\ \beta = 0, \gamma = 1 \to \alpha = -1, \epsilon = 1, \delta = 0 \to f_2(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = -a + c + e \end{cases}$$

$$\to S^\circ = \overline{\{f_1, f_2\}}$$

8. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $u = (2, 3, 1, 1)$ y $v = (1, 0, -1, 2)$. ¿Qué funcionales lineales

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \text{ (para } c_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, 3, 4)$$

pertenecen a W°?

Se sabe que

$$W = \{f \in (\mathbb{R}^4)^* : f(w) = 0 \quad \forall w \in W\}$$

$$\begin{cases} f(2, 3, 1, 1) = 2c_1 + 3c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ f(1, 0, -1, 2) = c_1 - c_3 + c_4 \end{cases} \to \begin{cases} c_4 = c_2 + c_3 \\ c_1 = -2c_2 - c_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2 = 1, c_3 = 0 \to c_1 = -2, c_4 = 1 \to f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1 + x_2 + x_4 \\ c_2 = 0, c_3 = 1 \to c_1 = -1, c_4 = 1 \to f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + x_3 + x_4 \end{cases}$$

Los funcionales lineales que pertenecen a W° son de la forma

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha(-2x_1 + x_2 + x_4) + \beta(-x_1 + x_3 + x_4)$$
$$\to f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2\alpha - \beta)x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + (\alpha + \beta)x_4 \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

9. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita. Probar que:

(a) Si A y B son subconjuntos de V tales que $A \subseteq B$ entonces $B^\circ \subseteq A^\circ$

Si $A = B \to B^\circ = A^\circ$. Si $A \subset B$ tenemos que

$$B^\circ = \{f \in V^*/f(b) = 0 \quad \forall b \in B\}$$
$$A^\circ = \{g \in V^*/f(a) = 0 \quad \forall a \in A\}$$

Dado un $a \in A$, como $A \subset B \to a \in B \to f(a) = 0$. Dado un $f \in B^\circ, f(v) = 0 \quad \forall v \in B$, como $A \subset B$, $f(w) = 0 \quad \forall w \in A \to f \in A^\circ \to B^\circ \subset A^\circ$. Del resultado de la igualdad y la inclusión, se obtiene que

$$B^\circ \subseteq A^\circ$$

(b) Si S y T son subespacios de V entonces,

i. $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$

$$(S+T)^\circ = \{f \in V^*/f(s+t) = 0 \quad \forall s \in S, t \in T\}$$
$$S^\circ \cap T^\circ = \{g \in V^*/g(s) = 0 \quad \forall s \in S \quad \wedge \quad g(t) = 0 \quad \forall t \in T\}$$

$(\subset)$

Sea $f \in (S+T)^\circ, s \in S$ y $t \in T$

$$\begin{aligned} f(s) &= f(s+0) && \text{Elemento neutro} \\ &= 0 && s \in S, 0 \in T \text{ por ser subespacio} \to s+0 \in S+T \end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0+t) && \text{Elemento neutro} \\ &= 0 && t \in T, 0 \in S \text{ por ser subespacio} \to 0+t \in S+T \end{aligned}$$

Con lo cual, $f(s) = f(t) = 0 \quad \forall s \in S, t \in T$. Por lo tanto $(S+T)^\circ \subset S^\circ \cap T^\circ$

$(\supset)$

Sea $g \in S^\circ \cap T^\circ, s \in S$ y $t \in T$, tengo que $g(s) = g(t) = 0$. Entonces $g(s+t) = g(s) + g(t) = 0 + 0 = 0 \to g \in (S+T)^\circ \to (S+T)^\circ \supset S^\circ \cap T^\circ$

De los dos análisis, se concluye que $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$

ii. $(S \cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$

$$(S \cap T)^\circ = \{f \in V^* : f(v) = 0 \quad \forall v \in (S \cap T)\}$$
$$S^\circ + T^\circ = \{g \in V^* : g(v) = h(v) + k(v), h \in S^\circ, k \in T^\circ\}$$

Sea $f \in S^\circ + T^\circ \to f = h+k, h \in S^\circ, k \in T^\circ \to f(v) = (h+k)(v) = h(v)+k(v) = 0 \quad \forall v \in S \cap T \to f \in (S \cap T)^\circ \to (S \cap T)^\circ \supset S^\circ + T^\circ (1)$

En vez de probar la inclusión hacia el otro lado, (lo cual no me estaría saliendo), voy a tratar de ver que las dimensiones coinciden:

$\dim V = n$, $\dim S = m_1$, $\dim T = m_2 \to \dim S^\circ = n - m_1$, $\dim T^\circ = n - m_2$.

Tenemos que

$$\dim(S^\circ + T^\circ) = \dim S^\circ + \dim T^\circ - \dim(S^\circ \cap T^\circ) = 2n - m_1 - m_2 - dim(S^\circ \cap T^\circ)$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \dim(S \cap T)^\circ &= \dim V - \dim(S \cap T) = n - \dim(S \cap T) = n + \dim(S+T) - m_1 - m_2 \\ &= 2n - m_1 - m_2 - \dim(S+T)^\circ \end{aligned}$$

Como se demostró en el inciso anterior, $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ \to \dim\ (S+T)^\circ = \dim(S^\circ \cap T^\circ)$, con lo cual $\dim(S^\circ + T^\circ) = \dim(S \cap T)^\circ (2)$. De (1) y (2) se concluye que

$$S^\circ + T^\circ = (S \cap T)^\circ$$

(c) Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - x_3 = 0 \wedge x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$ y $T = \overline{\{(2,1,3,1)\}}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$. Hallar una base para $(S+T)^\circ$ y una base para $(S \cap T)^\circ$

Un $s \in S$ cumple $s = (x_3, -x_3 - x_4, x_3, x_4) = x_3(1,-1,1,0) + x_4(0,-1,0,1)$

$$\to S = \overline{\{(1,-1,1,0),(0,-1,0,1)\}}$$

Por lo tanto un $v \in S+T$ se escribe $v = a(1,-1,1,0) + b(0,-1,0,1) + c(2,1,3,1)$

$$\begin{cases} f(1,-1,1,0) = a - b + c = 0 \\ f(0,-1,0,1) = -b + d = 0 \\ f(2,1,3,1) = 2a + b + 3c + d \end{cases} \to \begin{cases} a = 5d \\ b = d \\ c = -4d \end{cases}$$

Eligiendo $d = 1$, tenemos que $a = 5, b = 1, c = -4 \to f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 \to B = \{f\}$

$S \cap T = \{\vec{0}\} \to (S \cap T)^{\circ} = (\mathbb{R}^4)^* \to$ una base del anulador es
$B_1 = \{f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1, f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2, f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3, f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4\}$

10. Sean U, V y W K-EV. Probar que:

    (a) $(S+T)^t = S^t + T^t$ para $S, T \in L(U, V)$.

    $(S+T)^t(g)v = g(S+T)v = gSv + gTv = (g \circ S)v + (g \circ T)v = (S^t g + T^t g)v \to (S+T)^t = S^t + T^t$

    (b) $(\alpha T)^t = \alpha T^t$ para $\alpha \in \mathbb{K}$ y $T \in L(U, V)$

    $(\alpha T)^t g = g(\alpha T) = \alpha g T = \alpha T^t g \to (\alpha T)^t = \alpha T^t$

    (c) $(ST)^t = T^t S^t$ para $S \in L(V, U)$ y $T \in (W, V)$

    $(ST)^t g = g(ST) = (g(S))T = T^t g(S) = T^t S^t g \to (ST)^t = T^t S^t$

11. Sea f un funcional lineal sobre $\mathbb{C}^2$, dado por $f(u, v) = au + bv (a, b \in \mathbb{C})$. Hallar $g = T^t f = f \circ T$, para T dado por las transformaciones P_X, S_Y, H_2 ya conocidas.

    - $g_1(x, y) = f \circ P_x = f(P_x) = f(x, 0) = ax \to g_1(x, y) = ax$
    - $g_2(x, y) = f \circ S_y = f(S_y) = f(-x, y) = -ax + by \to g_2(x, y) = -ax + by$
    - $g_3(x, y) = f \circ H_2 = f(H_2) = f(2x, 2y) = 2ax + 2by \to g_3(x, y) = 2ax + 2by$

12. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por

    $$T(x, y) = (x + y, x, x - 2y, y)$$

    Calcular $T^t(f)$, para el funcional lineal f de $\mathbb{R}^4$ dado por

    $$f(s, t, u, v) = s - 2t + u + v$$

    $T^t f(x, y) = f(T)(x, y) = f(x + y, x, x - 2y, y) = x + y - 2x + x - 2y + y = 0 \to T^t f = 0$

13. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

    $$T(x, y, z, w) = (x - y, x - z, x - w)$$

    Calcular $T^t(g)$, para el funcional lineal g de $\mathbb{R}^3$ dado por

    $$g(t, u, v) = 3t + 4u - v$$

14. Sea $T \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$

    (a) Hallar la representación matricial de $T^t \in L((\mathbb{R}^2)^*)$ en la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

    (b) Hallar el núcleo y la imagen de T^t y analizar inyectividad, suryectividad y biyectividad.

15. Sea $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$(fija). Probar que

    (a) $f_B(A) = tr(B^t A)$ es un funcional lineal de $\mathbb{K}^{n \times n}$.

    (b) $T(B) = f_B$ es una transformación lineal de $\mathbb{K}^{n \times n}$ en $(\mathbb{K}^{n \times n})^*$.

(c) T es un isomorfismo entre $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $(\mathbb{K}^{n\times n})^*$.