Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas - UNLP

Álgebra lineal

Trabajo práctico N°8 - 2021

Funcionales lineales

Dualidad, subespacio anulador y aplicación traspuesta

1. Hallar la base dual de cada una de las siguientes bases:

   a) $B = \{(1, 0, -1); (1, 1, 0); (1, 0, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

   b) $B = \{(-i, 0); (1, 1 - i)\}$ base de $\mathbb{C}^2$.

   c) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

2. Consideremos los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (-1, -1, 0);\ \ v_2 = (0, 1, -2);\ \ v_3 = (1, 0, 1)\,.$$

   a) Probar que forman una base de $\mathbb{R}^3$ y hallar su base dual.

   b) Supongamos que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal tal que

$$f(v_1) = 1;\ \ f(v_2) = -f(v_1);\ \ f(v_3) = 3.$$

   Hallar explícitamente a $f(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. ¿Cuánto vale $f(3, 4, 0)$?

   c) Hallar un funcional lineal $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(v_1) = g(v_2) = 0;\ \ g(v_3) \neq 0.$$

3. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea f un funcional lineal sobre V, no nulo. ¿Qué dimensión tiene $\mathrm{N}(f)$?

4. Hallar un hiperespacio de $\mathbb{R}^2$ y uno de $\mathbb{R}^3$. Interpretar gráficamente.

5. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sean f y g funcionales lineales sobre V, tales que $h(x) = f(x)g(x)$ es un funcional lineal sobre V. Probar que, o bien $f = 0$, o bien $g = 0$.

   Sugerencia: Evaluar h en $c \cdot x$ para $c \in \mathbb{K}$.

6. Consideremos $\mathbb{C}_2[x]$ como el $\mathbb{C}$-EV de los polinomios de grado menor o igual a 2.

   a) Probar que $B^* = \{f_1, f_2, f_3\}$ es una base del dual de $\mathbb{C}_2[x]$, donde

$$f_k(p) = p(k - 1) \quad \text{para } p \in \mathbb{C}_2[x]\,.$$

b) Hallar una base de $\mathbb{C}_2[x]$, tal que B^* sea su base dual.

7. Hallar S° para cada uno de los siguientes casos:

   a) $S = \overline{\{(1,1,0,0,0);(2,-1,1,2,0)\}} \subset \mathbb{R}^5$.
   b) $S = \overline{\{(x,y,z) : x+y+2z=0 \wedge x-3z=0\}} \subset \mathbb{R}^3$.
   c) $S = \overline{\{1+x+x^2,\, 2+x^3+2x^4,\, x^3\}} \subset \mathbb{R}_4[x]$.

8. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $u=(2,3,1,1)$ y $v=(1,0,-1,2)$. ¿Qué funcionales lineales

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \quad (\text{para } c_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1,2,3,4)$$

   pertenecen a W°?

9. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita. Probar que:

   a) Si A y B son subconjuntos de V tales que $A \subseteq B$ entonces $B^\circ \subseteq A^\circ$.
   b) Si S y T son subespacios de V entonces,
      i. $(S+T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$.
      ii. $(S\cap T)^\circ = S^\circ + T^\circ$.
   c) Sean $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 - x_3 = 0 \wedge x_1+x_2+x_4=0\}$ y $T = \overline{\{(2,1,3,1)\}}$ subespacios de $\mathbb{R}^4$. Hallar una base para $(S+T)^\circ$ y una base para $(S\cap T)^\circ$.

10. Sean U, V y W $\mathbb{K}$-EV. Probar que:

    a) $(S+T)^t = S^t + T^t$ para $S,T \in L(U,V)$.
    b) $(\alpha T)^t = \alpha T^t$ para $\alpha \in \mathbb{K}$ y $T \in L(U,V)$.
    c) $(ST)^t = T^t S^t$ para $S \in L(V,U)$ y $T \in L(W,V)$.

11. Sea f un funcional lineal sobre $\mathbb{C}^2$, dado por $f(u,v) = au + bv$ $(a,b \in \mathbb{C})$. Hallar $g = T^t f = f \circ T$, para T dado por las transformaciones P_X, S_Y, H_2 ya conocidas.

12. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por

$$T(x,y) = (x+y, x, x-2y, y)\,.$$

    Calcular $T^t(f)$, para el funcional lineal f de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$f(s,t,u,v) = s - 2t + u + v\,.$$

13. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$T(x,y,z,w) = (x-y, x-z, x-w)\,.$$

    Calcular $T^t(g)$, para el funcional lineal g de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$g(t,u,v) = 3t + 4u - v\,.$$

14. Sea $T \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$.

    a) Hallar la representación matricial de $T^t \in L((\mathbb{R}^2)^*)$ en la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

    b) Hallar el núcleo y la imagen de T^t y analizar inyectividad, suryectividad y biyectividad.

15. Sea $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ (fija). Probar que

    a) $f_B(A) = \operatorname{tr}(B^t A)$ es un funcional lineal de $\mathbb{K}^{n\times n}$.

    b) $T(B) = f_B$ es una transformación lineal de $\mathbb{K}^{n\times n}$ en $(\mathbb{K}^{n\times n})^*$.

    c) T es un isomorfismo entre $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $(\mathbb{K}^{n\times n})^*$.