Departamento de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas - UNLP

Álgebra lineal

Trabajo práctico N°9 - 2022

Espacios vectoriales con producto interno I

1. Determinar en cada caso si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno.

   a) $V = \mathbb{R}^2$; $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 3y_1y_2$.

   b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$.

   c) $V = \mathbb{C}^2$; $T \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$; $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = T(x_1, y_1)\, \overline{T(x_2, y_2)}$.

   d) $V = \mathbb{C}[x]$; $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}\, dt$.

2. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-EV y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre W. Probar que si $T \in L(V, W)$ es un monomorfismo de espacios vectoriales, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ dado por

$$\langle v_1, v_2 \rangle_T = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle \quad \text{para } v_1, v_2 \in V\,,$$

   es un producto interno sobre V.

3. *a*) Consideremos el operador rotación en $\mathbb{R}^2$ dado por $R_{\frac{\pi}{2}}$. Probar que para todo $x \in \mathbb{R}^2$, la norma de x con respecto al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$, coincide con la norma de x con respecto al producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R_{\frac{\pi}{2}}}$ definido en el ejercicio anterior.

   b) Probar que si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno y $T \in L(V)$ es una isometría, entonces

$$\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle_T \quad \text{para todo } v \in V\,.$$

   Comparar con el ejercicio 8 del TP 2.

4. Consideremos $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual y sean $v_1 = (1, 2)$ y $v_2 = (-1, 1)$.

   a) Probar que existe $w \in \mathbb{R}^2$ tal que $\langle v_1, w \rangle = -1$ y $\langle v_2, w \rangle = 3$. ¿Es único?

   b) Si $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, probar que

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^2\,.$$

5. *a*) Consideremos el $\mathbb{R}$-EV, $\mathbb{R}^{n\times m}$. Probar que la aplicación

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(B^t A) \quad \text{para } A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}\,,$$

   es un producto interno para $\mathbb{R}^{n\times m}$.

b) Consideremos ahora a $\mathbb{C}^{n\times m}$ como $\mathbb{C}$-EV y la aplicación

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^t A) \quad \text{para } A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}\,,$$

¿es un producto interno para $\mathbb{C}^{n\times m}$? ¿De qué manera se puede arreglar para que lo sea?

6. Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno y sea S un subconjunto de V, probar que $S^\perp$ es un subespacio de V y que

$$(S^\perp)^\perp = \overline{S}\,.$$

7. ¿Qué dimensión tiene el subespacio de $\mathbb{R}^6$ que es ortogonal a los vectores $(1, 1, -2, 3, 4, 5)$ y $(0, 0, 1, 1, 0, 7)$?

8. Consideremos $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual.

   a) Hallar el subespacio ortogonal de $W = \{(x, y, z) : 3x - y + 2z = 0\}$.

   b) Hallar una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $(1, -1, 2)$.

   c) Sea $B = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Hallar a partir de B, una base B' que sea ortonormal y calcular las coordenadas de $(2, -1, 3)$ en esta nueva base.

9. Sea $V = \mathbb{R}_3[x]$ dotado con el producto interno

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt \quad \text{para } p, q \in V\,.$$

   a) Sean $p(x) = x + 2$ y $q(x) = x^2 - 2x - 3$. Calcular $\langle p, q\rangle$, $\|p\|$ y $\|q\|$.

   b) Aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a $B = \{1, x, x^2, x^3\}$, para obtener una base ortonormal de V.

   c) ¿Qué sucede si hacemos lo mismo para la base B ordenada de la siguiente manera, $B' = \{x, 1, x^2, x^3\}$?

10. Hallar una base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Consideremos $\mathbb{C}^{2\times 2}$ como $\mathbb{C}$-EV dotado con el producto interno

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(\overline{B}^t A) \quad \text{para } A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}\,,$$

   a) Hallar la distancia entre

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 2i & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Hallar el complemento ortogonal del subespacio de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ generado por A y B.

12. Sea V un $\mathbb{C}$-EV dotado con un producto interno. Probar que la norma determinada por el producto interno cumple la llamada ”ley del paralelogramo”

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \text{para todo } v, w \in V\,.$$

13. **Optativo.** Determinar qué condiciones debe cumplir una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para que

$$\langle x, y\rangle = x^t B y\,,$$

sea un producto interno sobre $\mathbb{R}^n$.

Sugerencia. Hacerlo primero para un n chico, por ejemplo 3.