Trabajo Práctico 9 - Espacios vectoriales con producto interno

Santiago

1. Determinar en cada caso si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno

   (a) $V = \mathbb{R}^2; \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 3y_1y_2$

   Hay que verificar las tres condiciones del producto interno

   i. $\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
   Suponiendo (1) $u = (x_1, y_1), v = (x_2, y_2), w = (x_3, y_3) / u, v, w \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u + v, w \rangle &= \langle \alpha(x_1, y_1) + (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle && (1) \\
&= \langle (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2), (x_3, y_3) \rangle && \text{Prod y suma vec} \\
&= (\alpha x_1 + x_2)x_3 - (\alpha x_1 + x_2)y_3 - (\alpha y_1 + y_2)x_3 + 3(\alpha y_1 + y_2)y_3 && \text{Def P.I} \\
&= \alpha x_1x_3 + x_2x_3 - \alpha x_1y_3 - x_2y_3 - \alpha y_1x_3 - y_2x_3 + 3\alpha y_1y_3 + 3y_2y_3 && \text{Distributividad} \\
&= \alpha x_1x_3 - \alpha x_1y_3 - \alpha y_1x_3 + 3\alpha y_1y_3 + x_2x_3 - x_2y_3 - y_2x_3 + 3y_2y_3 && \text{Conmutatividad} \\
&= \alpha(x_1x_3 - x_1y_3 - y_1x_3 + 3y_1y_3) + x_2x_3 - x_2y_3 - y_2x_3 + 3y_2y_3 && \text{Factor común} \\
&= \alpha \langle (x_1, y_1), (x_3, y_3) \rangle + \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle && \text{Def P.I} \\
&= \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle && (1)
\end{aligned}$$

   ii. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ Como el conjugado no tiene sentido en $\mathbb{R}^2$, la condición se convierte en $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle && (1) \\
&= x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 3y_1y_2 && \text{Def P.I} \\
&= x_2x_1 - y_2x_1 - x_2y_1 + 3y_2y_1 && \text{Conmutatividad producto} \\
&= x_2x_1 - x_2y_1 - y_2x_1 + 3y_2y_1 && \text{Conmutatividad suma} \\
&= \langle (x_2, y_2), (x_1, y_1) \rangle && \text{Def P.I} \\
&= \langle v, u \rangle && (1)
\end{aligned}$$

   iii. $\langle u, u \rangle > 0 \; \forall u \neq 0$

$$\begin{aligned}
\langle u, u \rangle &= \langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle && (1) \\
&= x_1^2 - x_1y_1 - x_1y_1 + 3y_1^2 && \text{Def P.I} \\
&= x_1^2 - 2x_1y_1 + 3y_1^2 && \\
&= (x_1 - y_1)^2 + 2y_1^2 && \text{Completando cuadrados} \\
&> 0 \; \forall (x_1, y_1) = u \neq 0 &&
\end{aligned}$$

   Como se cumplen las tres condiciones, se puede decir que V es un espacio vectorial con producto interno.

   (b) $V = \mathbb{R}^{2x2}; \langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$

   (c) $V = \mathbb{C}^2; T \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}); \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = T(x_1, y_1)\overline{T(x_2, y_2)}$.

   (d) $V = \mathbb{C}[x]; \langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)\overline{q(t)}dt$

2. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-EV y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno sobre W. Probar que si $T \in L(V, W)$ es un monomorfismo de espacios vectoriales, entonces $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ dado por

$$\langle v_1, v_2 \rangle_T = \langle Tv_1, Tv_2 \rangle \quad \text{para } v_1, v_2 \in V$$

es un producto interno sobre V.

3. (a) Consideremos el operador rotación en $\mathbb{R}^2$ dado por $R_{\frac{\pi}{2}}$. Probar que para todo $x \in \mathbb{R}^2$, la norma de x con respecto al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$, coincide con la norma de x con respecto al producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{R_{\frac{\pi}{2}}}$ definido en el ejercicio anterior.

   (b) Probar que si $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno y $T \in L(V)$ es una isometría, entonces

$$\langle v, v \rangle = \langle v, v \rangle_T \quad \text{para todo } v \in V$$

   Comparar con el ejercicio 8 del TP 2.