Práctica 1 - Números reales

Santiago

1. (Propiedad arquimediana). Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$. Mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$nx > y$$

Supóngase que no se cumple la propiedad, entonces

$$y \geq nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si se define el siguiente conjunto

$$A = \{nx : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

se tiene que y es una cota superior de A. Como éste es subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces tiene supremo

$$\alpha = sup(A)$$

Además, como $x > 0$

$$\alpha - x < \alpha$$

en donde $\alpha - x$ no es una cota superior, por ende

$$\exists z \in A / \alpha - x < z = mx, \quad m \in \mathbb{N}$$

Entonces,

$$\alpha - x < mx \Rightarrow \alpha < (m+1)x \in A$$

lo cual implica que α no es cota superior (Absurdo). Por lo tanto, la afirmación inicial era cierta.

2. ($\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$). Mostrar que si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < p < y$$

Como $x < y$, $y - x > 0$ y la propiedad arquimediana establece

$$n(y - x) > 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Además, sean $1, nx, -nx \in \mathbb{R}$, la misma propiedad proporciona $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$m_1 > nx \qquad m_2 > -mx$$

Entonces

$$-m_2 < nx < m_1$$

y $\exists m \in \mathbb{Z} / -m_2 \leq M \leq m_1$ tal que

$$m - 1 \leq nx < m$$

Combinando las desigualdades se obtiene

$$nx < m \leq 1 + nx < ny$$

Como $n > 0$,

$$x < \frac{m}{n} < y$$