Práctica 1 - Números reales

Santiago

1. (Propiedad arquimediana). Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$. Mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$nx > y$$

Supóngase que no se cumple la propiedad, entonces

$$y \geq nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si se define el siguiente conjunto

$$A = \{nx : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

se tiene que y es una cota superior de A. Como éste es subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces tiene supremo

$$\alpha = sup(A)$$

Además, como $x > 0$

$$\alpha - x < \alpha$$

en donde $\alpha - x$ no es una cota superior, por ende

$$\exists z \in A / \alpha - x < z = mx, \quad m \in \mathbb{N}$$

Entonces,

$$\alpha - x < mx \Rightarrow \alpha < (m+1)x \in A$$

lo cual implica que α no es cota superior (Absurdo). Por lo tanto, la afirmación inicial era cierta.

2. ($\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$). Mostrar que si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < p < y$$

Como $x < y$, $y - x > 0$ y la propiedad arquimediana establece

$$n(y - x) > 1, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Además, sean $1, nx, -nx \in \mathbb{R}$, la misma propiedad proporciona $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tales que

$$m_1 > nx \qquad m_2 > -mx$$

Entonces

$$-m_2 < nx < m_1$$

y $\exists m \in \mathbb{Z} / -m_2 \leq M \leq m_1$ tal que

$$m - 1 \leq nx < m$$

Combinando las desigualdades se obtiene

$$nx < m \leq 1 + nx < ny$$

Como $n > 0$,

$$x < \frac{m}{n} < y$$

3. (a) Se consideran los intervalos $\left[0, \frac{1}{n}\right)$, donde n recorre todos los números naturales. ¿Existe algún número que pertenezca a todos ellos?

$$0 \in \left[0, \tfrac{1}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) La misma pregunta pero ahora con los intervalos $\left(0, \frac{1}{n}\right)$

Sea $A = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{n}\right) \right\}$, supóngase que existe $x \in A$, entonces

$$0 < x < \tfrac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si se estudia un n en particular, como $x > 0$ y $x, \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$, por la propiedad arquimediana

$$\exists m \in \mathbb{N}/mx > \tfrac{1}{n}$$

Entonces, se tiene que

$$0 < x < \tfrac{1}{n} < mx$$

Como $m > 0$

$$\tfrac{0}{m} < \tfrac{x}{m} < \tfrac{1}{nm} < \tfrac{mx}{m}$$

Entonces

$$\tfrac{1}{nm} < x$$

Por lo tanto,

$$x \notin \left(0, \tfrac{1}{nm}\right)$$

lo cual contradice la suposición inicial.

4. Sea A un conjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente. Definamos $-A := \{-x/x \in A\}$. Probar que

$$\text{inf}A = \text{-sup}(-A), \quad \text{sup}A = \text{-inf}(-A)$$

$inf(A)$ es cota inferior de A, es decir $inf(A) \leq a$ para todo $a \in A$. Se sigue que $-inf(A) \geq -a$ para todo $-a \in -A$. Por ende, $-inf(A)$ es cota superior de $-A$. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -inf(A)$, entonces $-x > inf(A)$. Como $-x$ no es cota inferior de A, existe un $a_0 \in A$ tal que $-x > a_0 > inf(A)$, entonces $x < -a_0$ y $-a_0 \in -A$. Se sigue que x no es cota superior de $-A$. Debido a que x es un real arbitrario tal que $x < -inf(A)$(cota superior de $-A$) y $x \notin (-A)^u$ se concluye que $-inf(A) = sup(-A)$.
La otra igualdad se puede probar de una manera muy similar.