Práctica 1 - Experimentos aleatorios. Espacio muestral; eventos

Santiago

1. Asociar un espacio muestral a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

   (a) Lanzar tres veces al aire una moneda y observar el lado que cae hacia arriba.

   El espacio muestral es el conjunto de resultados posibles de un experimento. En este caso particular, al tirar una moneda la misma puede caer con cara o cruz hacia arriba. Podemos denotar los siguientes eventos:

   A: Sale cara
   B: Sale cruz

   Entonces tenemos que:

   $$\Omega = \{AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BBA, BAB, BBB\}$$

   (b) Lanzar tres veces al aire una moneda y observar el número total de caras.

   Puede suceder que en los tres tiros no salga cara, también puede caer una vez, dos veces, e incluso tres. Por lo tanto:

   $$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$$

   (c) Una urna contiene 2 bolillas blancas y una negra. Se sacan 2 bolillas al azar simultáneamente y se anotan los colores.

   Como estoy anotando los colores, no se distingue entre las dos bolillas blancas. Considerando los eventos

   N: negra
   B: blanca

   se tiene que

   $$\Omega = \{BB, BN\}$$

   (d) Idem que en el inciso anterior pero con reemplazo.

   En este caso, al poder reemplazar, está la posibilidad de sacar dos veces la negra.

   $$\Omega = \{BB, BN, NN\}$$

   Hay que dintinguir entre sacar blanco-negro y negro-blanco?

   (e) Se colocan al azar tres bolillas diferentes en tres urnas diferentes, pudiéndose poner más de una bolilla por urna.

   Si representamos cada resultado como

   $$(U_{B_1}, U_{B_2}, U_{B_3})$$

   siendo U_{B_i} la urna en donde se encuentra la bolilla i. Entonces

   $$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3),\\ &(2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3),\\ &(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)\}\end{aligned}$$

   Como hay un número considerable de resultados, quizás es más conveniente expresar el espacio muestral por comprensión:

   $$\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k = 1, 2, 3\}$$

(f) Se arroja una moneda; si sale cara se arroja un dado, si sale ceca se lanzan dos dados.

Si denominamos los siguientes eventos:

A: cara
B: ceca

$$\Omega = \{(A, i) : i \in \mathbb{N}/i < 7\} \cup \{(B, i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(g) Un viajante debe visitar cinco ciudades y traza su itinerario.

Supongamos que las ciudades las enumeramos del 1 al 5.

$$\Omega = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 : i_k \in [1; 5], i_m \neq i_n \forall m \neq n\}$$

(h) Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican en defectuosos (D) y no defectuosos (N). Se observan artículos y se anota su condición. Este proceso se continúa hasta que se produzcan dos artículos defectuosos consecutivos o hasta que se hayan verificado cuatro artículos cualesquiera.

$$\Omega = \{DD, NDD, NNDD, DNDD, DNDN, DNND, DNNN, NNNN, NDND, NDNN, NNDN, NNND\}$$

(i) Una caja con 12 lámparas tiene 4 unidades con filamentos rotos. Se las prueba hasta que se encuentre una quemada.

Definimos los eventos:

Q: quemada
N: no quemada

Entonces,

$$\Omega = \{N^i Q : 0 \leq i \leq 8\}$$

(j) Un tanque de agua tiene una bomba cuyo motor se pone en funcionamiento automáticamente cuando el consumo hace que el volumen de agua baje hasta cierto nivel. Supongamos que esto puede ocurrir a lo sumo una vez al día. Cierto día se observa el motor durante 24 horas y se registra en qué instante ha comenzado a funcionar o si no lo ha hecho en todo el día.

X: se prendió la bomba en el momento X
N: no se prendió la bomba

Por lo tanto,

$$\Omega = \{X, N\}$$

2. Se examinan tres fusibles en secuencia, y se observa en cada caso si están o no defectuosos.

(a) Describir el espacio muestral del experimento. ¿Cuántos elementos tiene?

Sean los eventos:

D: defectuoso
N: no defectuoso

Entonces se tiene que

$$\Omega = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$$

y se observa que

$$\#\Omega = 8$$

(b) Expresar por extensión los siguientes eventos:

i. C : exactamente un fusible está defectuoso.

$$C = \{DNN, NDN, NND\}$$

ii. D : a lo sumo un fusible está defectuoso.

$$D = C \cup \{NNN\}$$

iii. E : los tres fusibles están en las mismas condiciones.

$$E = \{DDD, NNN\}$$

iv. ¿Cuáles de los sucesos C, D o E son mutuamente excluyentes?.

Se tiene que

$$C \cap D = C \qquad C \cap E = \varnothing \qquad D \cap E = \{NNN\}$$

Por lo tanto, C y E son mutuamente excluyentes.

v. Sean los eventos A_i : el fusible $i-$ésimo está defectuoso $i = 1, 2, 3$. Expresar los eventos anteriores en función de A_1, A_2, A_3.

$$C = \{A_1 A_2^c A_3^c, A_1^c A_2 A_3^c, A_1^c A_2^c A_3\}$$
$$D = C \cup \{A_1^c A_2^c A_3^c\}$$
$$E = \{A_1 A_2 A_3, A_1^c A_2^c A_3^c\}$$

vi. Sean los eventos B_i : hay exactamente i fusibles defectuosos con $i = 0, 1, 2, 3$. ¿Cuántos elementos tiene cada B_u?

$$B_0 = \{NNN\} \to \#B_0 = 1$$
$$B_1 = \{NND, NDN, DNN\} \to \#B_1 = 3$$
$$B_2 = \{NDD, DDN, DND\} \to \#B_2 = 3$$
$$B_3 = \{DDD\} \to \#B_3 = 1$$

3. Una instalación consta de dos calderas y un motor. Sea M el evento de que el motor está en buenas condiciones, mientras que los sucesos $C_i (i = 1, 2)$ son los eventos de que la $i-$ésima caldera está en buenas condiciones. El evento I es que la instalación funcione. Si la instalación funciona cada vez que el motor y al menos una caldera están en buenas condiciones, exprese I e I^c mediante M, C_1 y C_2.

$$I = \{MC_1C_2, MC_1^cC_2, MC_1C_2^c\} \qquad I^c = \{MC_1^cC_2^c, M^cC_1^cC_2^c, M^cC_1^cC_2, M^cC_1C_2^c, M^cC_1C_2\}$$