Práctica 1 - Experimentos aleatorios. Espacio muestral; eventos

Santiago

1. Asociar un espacio muestral a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

   (a) Lanzar tres veces al aire una moneda y observar el lado que cae hacia arriba.

   El espacio muestral es el conjunto de resultados posibles de un experimento. En este caso particular, al tirar una moneda la misma puede caer con cara o cruz hacia arriba. Podemos denotar los siguientes eventos:

   A: Sale cara
   B: Sale cruz

   Entonces tenemos que:
   $$\Omega = \{AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BBA, BAB, BBB\}$$

   (b) Lanzar tres veces al aire una moneda y observar el número total de caras.

   Puede suceder que en los tres tiros no salga cara, también puede caer una vez, dos veces, e incluso tres. Por lo tanto:
   $$\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$$

   (c) Una urna contiene 2 bolillas blancas y una negra. Se sacan 2 bolillas al azar simultáneamente y se anotan los colores.

   Como estoy anotando los colores, no se distingue entre las dos bolillas blancas. Considerando los eventos

   N: negra
   B: blanca

   se tiene que
   $$\Omega = \{BB, BN\}$$

   (d) Idem que en el inciso anterior pero con reemplazo.

   En este caso, al poder reemplazar, está la posibilidad de sacar dos veces la negra.
   $$\Omega = \{BB, BN, NN\}$$

   Hay que dintinguir entre sacar blanco-negro y negro-blanco?

   (e) Se colocan al azar tres bolillas diferentes en tres urnas diferentes, pudiéndose poner más de una bolilla por urna.

   Si representamos cada resultado como
   $$(U_{B_1}, U_{B_2}, U_{B_3})$$
   siendo U_{B_i} la urna en donde se encuentra la bolilla i. Entonces
   $$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1,1),(1,1,2),(1,1,3),(1,2,1),(1,2,2),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2),(1,3,3),\\ &(2,1,1),(2,1,2),(2,1,3),(2,2,1),(2,2,2),(2,2,3),(2,3,1),(2,3,2),(2,3,3),\\ &(3,1,1),(3,1,2),(3,1,3),(3,2,1),(3,2,2),(3,2,3),(3,3,1),(3,3,2),(3,3,3)\}\end{aligned}$$

   Como hay un número considerable de resultados, quizás es más conveniente expresar el espacio muestral por comprensión:
   $$\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k = 1, 2, 3\}$$

   (f) Se arroja una moneda; si sale cara se arroja un dado, si sale ceca se lanzan dos dados.

   Si denominamos los siguientes eventos:

   A: cara
   B: ceca

$$\Omega = \{(A,i) : i \in \mathbb{N}/i < 7\} \cup \{(B,i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$$

(g) Un viajante debe visitar cinco ciudades y traza su itinerario.

Supongamos que las ciudades las enumeramos del 1 al 5.

$$\Omega = \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 : i_k \in [1;5], i_m \neq i_n \forall m \neq n\}$$

(h) Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican en defectuosos (D) y no defectuosos (N). Se observan artículos y se anota su condición. Este proceso se continúa hasta que se produzcan dos artículos defectuosos consecutivos o hasta que se hayan verificado cuatro artículos cualesquiera.

$$\Omega = \{DD, NDD, NNDD, DNDD, DNDN, DNND, DNNN, NNNN, NDND, NDNN, NNDN, NNND\}$$

(i) Una caja con 12 lámparas tiene 4 unidades con filamentos rotos. Se las prueba hasta que se encuentre una quemada.

Definimos los eventos:

Q: quemada
N: no quemada

Entonces,

$$\Omega = \{N^i Q : 0 \leq i \leq 8\}$$

(j) Un tanque de agua tiene una bomba cuyo motor se pone en funcionamiento automáticamente cuando el consumo hace que el volumen de agua baje hasta cierto nivel. Supongamos que esto puede ocurrir a lo sumo una vez al día. Cierto día se observa el motor durante 24 horas y se registra en qué instante ha comenzado a funcionar o si no lo ha hecho en todo el día.

X: se prendió la bomba en el momento X
N: no se prendió la bomba

Por lo tanto,

$$\Omega = \{X, N\}$$

2. Se examinan tres fusibles en secuencia, y se observa en cada caso si están o no defectuosos.

(a) Describir el espacio muestral del experimento. ¿Cuántos elementos tiene?

Sean los eventos:

D: defectuoso
N: no defectuoso

Entonces se tiene que

$$\Omega = \{DDD, DDN, DND, DNN, NDD, NDN, NND, NNN\}$$

y se observa que

$$\#\Omega = 8$$

(b) Expresar por extensión los siguientes eventos:

i. C : exactamente un fusible está defectuoso.

$$C = \{DNN, NDN, NND\}$$

ii. D : a lo sumo un fusible está defectuoso.

$$D = C \cup \{NNN\}$$

iii. E : los tres fusibles están en las mismas condiciones.

$$E = \{DDD, NNN\}$$

iv. ¿Cuáles de los sucesos C, D o E son mutuamente excluyentes?.

Se tiene que

$$C \cap D = C \qquad C \cap E = \varnothing \qquad D \cap E = \{NNN\}$$

Por lo tanto, C y E son mutuamente excluyentes.

v. Sean los eventos A_i : el fusible $i-$ésimo está defectuoso $i = 1, 2, 3$. Expresar los eventos anteriores en función de A_1, A_2, A_3.

$$C = \{A_1A_2^cA_3^c, A_1^cA_2A_3^c, A_1^cA_2^cA_3\}$$
$$D = C \cup \{A_1^cA_2^cA_3^c\}$$
$$E = \{A_1A_2A_3, A_1^cA_2^cA_3^c\}$$

vi. Sean los eventos B_i : hay exactamente i fusibles defectuosos con $i = 0, 1, 2, 3$. ¿Cuántos elementos tiene cada B_u?

$$B_0 = \{NNN\} \rightarrow \#B_0 = 1$$
$$B_1 = \{NND, NDN, DNN\} \rightarrow \#B_1 = 3$$
$$B_2 = \{NDD, DDN, DND\} \rightarrow \#B_2 = 3$$
$$B_3 = \{DDD\} \rightarrow \#B_3 = 1$$

3. Una instalación consta de dos calderas y un motor. Sea M el evento de que el motor está en buenas condiciones, mientras que los sucesos $C_i(i = 1, 2)$ son los eventos de que la $i-$ésima caldera está en buenas condiciones. El evento I es que la instalación funcione. Si la instalación funciona cada vez que el motor y al menos una caldera están en buenas condiciones, exprese I e I^c mediante M, C_1 y C_2.

$$I = \{MC_1C_2, MC_1^cC_2, MC_1C_2^c\} \qquad I^c = \{MC_1^cC_2^c, M^cC_1^cC_2^c, M^cC_1^cC_2, M^cC_1C_2^c, M^cC_1C_2\}$$

4. Se arrojan dos dados. Sean $E =$"la suma de los números obtenidos es impar", $F =$"sale el 1 al menos una vez", $G =$"la suma es 5". Descubrir los eventos:

(a) $E \cap F$

Primero voy a escribir los eventos mencionados

$$E = \{12, 14, 16, 21, 23, 25, 32, 34, 36, 41, 43, 45, 52, 54, 56, 61, 63, 65\}$$
$$F = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 31, 41, 51, 61\}$$
$$G = \{14, 23, 32, 41\}$$

Entonces,

$$E \cap F = \{12, 14, 16, 21, 41, 61\}$$

(b) $E \cup F$

$$E \cup F = \{12, 14, 16, 21, 23, 25, 32, 34, 36, 41, 43, 45, 52, 54, 56, 61, 63, 65, 11, 13, 15, 31, 51\}$$

(c) $E \cap F^c$

$$E \cap F^c = \{23, 25, 32, 34, 36, 43, 45, 52, 54, 56, 63, 65\}$$

(d) $F \cap G$

$$F \cap G = \{14, 41\}$$

(e) $E \cap F \cap G$

$$E \cap F \cap G = \{14, 41\}$$

5. Se realiza el siguiente experimento aleatorio: se lanza una moneda y un dado.

(a) Definir un espacio muestral.

La moneda puede resultar en cara o ceca, mientras que el dado en un natural menor o igual a 6.

$$X = \text{cara}$$
$$Y = \text{ceca}$$

Por lo tanto, el espacio muestral resulta ser

$$\Omega = \{X1, X2, X3, X4, X5, X6, Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6\}$$

(b) Expresar explícitamente los siguientes sucesos:
$A =$ "se obtiene un par y una cara".

$$A = \{X2, X4, X6\}$$

$B =$ "se obtiene un número primo".

$$B = \{X2, X3, X5, Y2, Y3, Y5\}$$

$C =$ "se obtiene un número impar y una ceca".

$$C = \{Y1, Y3, Y5\}$$

(c) Encontrar expresiones para los siguientes eventos:

i. Sólamente ocurre B.

"Se obtiene un número primo"

ii. Ocurren tanto A como B pero no ocurre C.

"Se obtiene cara y un dos"

iii. Por lo menos dos ocurren.

iv. Ocurre uno y no más.

v. No ocurren más de dos.

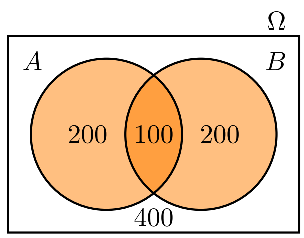
6. En un estudio realizado con 900 profesionales, 25 años después de su graduación, se descubre que 300 de ellos tuvieron éxito profesional, 300 de ellos se radicaron en el extranjero y 100 de ellos tuvieron éxito y se radicaron en el extranjero. Hallar el número de personas en el grupo que de estas dos cosas hayan hecho:

(a) exactamente dos.

Si se consideran los eventos

$$A = \text{es exitoso}$$
$$B = \text{radicado en el extranjero}$$

es posible realizar el siguiente diagrama de Venn



Hay 100 personas que son exitosas y están radicadas en el extranjero

(b) por lo menos una.

En el diagrama podemos ver que hay 400 personas que no lograron ninguna de las dos, así que son $500 (= 900 - 400)$ aquellas que al menos lograron una.

(c) no más de una.

Este grupo está conformado por las 200 personas que son exitosas pero no están en el extranjero y por las 200 personas radicadas en el extranjero pero no exitosas. Por lo tanto, hay 400 personas en total.

7. Un experimento aleatorio tiene tres resultados posibles: a, b y c, con probabilidades p, p^2 y p respectivamente. Hallar justificando apropiadamente el/los valores válidos de p.

Tenemos que el espacio muestral es

$$\Omega = \{a, b, c\}$$

Entonces, por axioma 3:

$$P(\Omega) = 1 = p(a) + p(b) + p(c) = p + p^2 + p$$
$$\to p^2 + 2p - 1 = 0$$
$$\to p = -1 \pm \sqrt{2}$$

Sin embargo, $-1 - \sqrt{2}$ implica una probabilidad negativa con lo cual

$$p = -1 + \sqrt{2}$$

8. Una caja tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Una bola se elige al azar y una segunda bola se elige de las 9 restantes. Encontrar la probabilidad de que los números de las 2 bolas difieran en 2 o más.

La primera bola puede ser cualquiera de las 10 en la caja mientras que la segunda es una entre nueve, por ende, hay

$$10 \cdot 9 = 90 \text{ casos totales}$$

Para determinar los casos favorables, se puede pensar de la siguiente forma: Si saco 1 o 10, tengo 8 bolas que cumplen lo pedido

$$B_1 = 1 \to B_2 = i, \quad i = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$
$$B_1 = 10 \to B_2 = j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

Mientras que con los otros números sólo tengo 7 opciones favorables ya que su anterior y siguiente no son válidos. Ej:

$$B_1 = 5 \to B_2 = k, \quad k = 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10$$

Teniendo en cuenta esto hay

$$8 \cdot 7 + 2 \cdot 8 = 72 \text{ casos favorables}$$

Por lo tanto, sea $A =$ las bolas difieren en 2 o más, se tiene que

$$P(A) = \frac{72}{90} =$$

También se podría haber pensado que

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

En donde A^c contempla los casos en donde las bolas difieren en 1. Nuevamente, hay que separar de la siguiente manera: Si saco 1 o 10, la siguiente debe ser 2 o 9 respectivamente, para el resto hay 2 opciones. Entonces,

$$P(A) = 1 - \frac{2 \cdot 1 + 8 \cdot 2}{90} = 1 - \frac{18}{90} = \frac{72}{90}$$

9. Se carga un dado de manera que los números pares tienen el doble de probabilidad de salir que los impares; los pares son igualmente probables entre sí, y lo mismo sucede con los impares. Se arroja el dado una vez. Hallar la probabilidad que:

(a) Aparezca un número par.

Tenemos que los impares son la mitad de probables que los pares. Si consideramos los eventos

$$A = \text{sale un número par}$$
$$B = \text{sale un número impar}$$

Entonces

$$P(A) = 2P(B)$$

Además, el espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y se sabe que

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{1, 3, 5\}$$

Por el axioma 3

$$P(A) = p(2) + p(4) + p(6) \qquad P(B) = p(1) + p(3) + p(5)$$

Y como cada par e impar tienen la misma probabilidad entre sí

$$P(A) = 6c \qquad P(B) = 3c$$

Al ser A y B disjuntos, por la propiedad 1

$$P(\Omega) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 9c = 1 \to c = \frac{1}{9}$$

Por lo tanto

$$P(A) = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9}$$

(b) Aparezca un número impar.

$$P(B) = 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$$

(c) Aparezca un número primo impar.

Los números primos impares que pueden salir en un dado son 3 y 5. Como los impares son igual de probables y $P(B) = \frac{3}{9} \to p(1) = p(3) = p(5) = \frac{1}{9}$

$$\to p(3) + p(5) = \frac{2}{9}$$

10. Sean A y B dos eventos tales que $P(A) = 0.5, P(A \cap B) = 0.2$ y $P(A \cup B) = 0.7$. Hallar

(a) $P(B)$

De la propiedad 5 se sabe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Entonces,

$$\begin{gathered} P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) \\ \to P(B) = 0.7 + 0.2 - 0.5 \\ \to P(B) = 0.4 \end{gathered}$$

(b) P(ocurra exactamente uno de los dos eventos)

La probabilidad de que suceda alguno de los dos eventos está dada por $P(A \cup B)$. A ésta hay que restarle la probabilidad de que sucedan los dos simultáneamente, Entonces

$$P(\text{ocurra exactamente uno de los dos eventos}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.5$$

(c) P(no ocurra ninguno de los eventos)

Se sabe que la probabilidad de que ocurra al menos uno es $P(A \cup B)$. Entonces

$$P(\text{no ocurra ninguna de los eventos}) = 1 - P(A \cup B) = 0.3$$

11. Sean A y B dos eventos. Suponiendo que $P(A) = x, P(B) = y, P(A \cap B) = z$. Expresar cada una de las siguientes probabilidades en términos de x, y, z.

(a) $P(A^c \cap B^c)$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) && \text{De Morgan} \\ &= 1 - P(A \cup B) && \text{Propiedad 2} \\ &= 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) && \text{Propiedad 5} \\ &= 1 - (x + y - z) && \text{Definición} \\ P(A^c \cap B^c) &= 1 - x - y + z \end{aligned}$$

(b) $P(A^c \cap B)$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P((A^c \cap B) \cup \varnothing) \\ &= P((A^c \cap B) \cup (B \cap B^c)) \\ &= P(B \cap (A^c \cup B^c)) && \text{Distributiva} \\ &= P(B \cap (A \cap B)^c) && \text{De Morgan} \\ &= P(B - (A \cap B)) && \text{Def Resta} \\ &= P(B) - P(A \cap B) && \text{Propiedad 3} \\ &= y - z \end{aligned}$$

(c) $P(A^c \cup B^c)$

$$\begin{aligned} P(A^c \cup B^c) &= P((A \cap B)^c) && \text{De Morgan} \\ &= 1 - P(A \cap B) && \text{Propiedad 2} \\ &= 1 - z \end{aligned}$$

(d) P(ocurra al menos uno de los dos eventos)

$$\begin{aligned} &= P(A \cup B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) && \text{Propiedad 5} \\ &= x + y - z \end{aligned}$$

(e) P(ocurra a lo sumo uno de los dos eventos)

$$\begin{aligned}&= 1 - P(A \cap B)\\ &= 1 - z\end{aligned}$$

12. Durante un año las personas de una ciudad utilizan tres tipos de transportes: metro (M), autobús (A) y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son las siguientes: sólo metro = 0,30; sólo autobús = 0,20; sólo coche = 0,15; sólo metro y autobús = 0,10; sólo metro y coche = 0,05; sólo autobús y coche = 0,06; metro,autobús y coche = 0,01.
Calcular las siguientes probabilidades:

(a) Que una persona tome al menos dos medios de transporte.

B = "la persona toma al menos dos medios de transporte"
B_{MA} = "la persona toma sólo metro y autobús"
B_{MC} = "la persona toma sólo metro y coche"
B_{AC} = "la persona toma sólo autobús y coche"
B_T = "la persona toma todos los medios de transporte"
Entonces tenemos que

$$P(B) = P(B_{MA} \cup B_{MC} \cup B_{AC} \cup B_T)$$

Como los eventos son mutuamente excluyentes

$$\begin{aligned}P(B) &= P(B_{MA}) + P(B_{MC}) + P(B_{AC}) + P(B_T)\\ &= 0,10 + 0,05 + 0,06 + 0,01\\ &= 0,22\end{aligned}$$

(b) Que una persona viaje en metro y no en autobús.

M = "la persona viaja en metro"
A = "la persona viaja en autobús"
Me interesa calcular $P(M - A) = P(M - (M \cap A)) = P(M) - P(M \cap A)$ debido a que $M \cap A \subset M$

$$\begin{aligned}P(M) - P(M \cap A) &= [P(\text{sólo en metro}) + P(B_{MA}) + P(B_{MC}) + P(T)] - [P(B_{MA}) + P(T)]\\ &= P(\text{sólo en metro}) + P(B_{MC})\\ &= 0,35\end{aligned}$$

(c) Que una persona viaje en metro o en coche y no en autobús.

C = "la persona viaja en coche"

$$\begin{aligned}P((M \cup C) - A) &= P((M \cup C) - ((M \cup C) \cap A))\\ &= P(M \cup C) - P((M \cup C) \cap A)\\ &= P(M) + P(C) - P(M \cap C) - P(M \cap A \cup C \cap A)\\ &= P(M) + P(C) - P(M \cap C) - P(M \cap A) - P(C \cap A) + P(M \cap A \cap C)\\ &= P(M) + P(C) - [P(B_{MC}) + P(T)] - [P(B_{MA}) + P(T)] - [P(B_{CA} + P(T))] + P(T)\\ &= P(M) + P(C) - P(B_{MC}) - P(B_{MA}) - P(B_{CA}) - 2P(T)\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}P(M) &= P(\text{sólo en metro}) + P(B_{MA}) + P(B_{MC}) + P(T) = 0,3 + 0,1 + 0,05 + 0,01 = 0,46\\ P(C) &= P(\text{sólo en coche}) + P(B_{CA}) + P(B_{MC}) + P(T) = 0,15 + 0,06 + 0,05 + 0,01 = 0,27\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}P((M \cup C) - A) &= 0,46 + 0,27 - 0,05 - 0,1 - 0,06 - 2 \cdot 0,01\\ &= 0,5\end{aligned}$$

(d) Que viaje en metro o en autobús y en coche.

$$
\begin{aligned}
P((M \cup A) \cap C) &= P(M \cap C \cup A \cap C) \\
&= P(M \cap C) + P(A \cap C) - P(M \cap C \cap A) \\
&= P(B_{MC}) + P(T) + P(B_{AC}) + P(T) - P(T) \\
&= P(B_{MC}) + P(B_{AC}) + P(T) \\
&= 0,05 + 0,06 + 0,01 \\
&= 0,12
\end{aligned}
$$

(e) Que una persona vaya a pie.

$E =$ “la persona va a pie”
$E^c =$ “la persona toma algún transporte” Se sabe que

$$P(E) = 1 - P(E^c)$$

En donde

$$
\begin{aligned}
P(E^c) &= P(M \cup A \cup C) \\
&= P(M) + P(A) + P(C) - P(MA) - P(MC) - P(AC) + P(AMC) \\
&= P(M) + P(A) + P(C) - P(B_{MA}) - P(T) - P(B_{MC}) - P(T) - P(B_{AC}) - P(T) + P(T) \\
&= P(M) + P(A) + P(C) - P(B_{MA}) - P(B_{MC}) - P(B_{AC}) - 2P(T)
\end{aligned}
$$

Se tiene que $P(A) = P(\text{sólo en autobús}) + P(B_{MA}) + P(B_{CA}) + P(T) = 0,37$. Entonces,

$$P(E^c) = 0,46 + 0,37 + 0,27 - 0,1 - 0,05 - 0,06 - 2 \cdot 0,01 = 0,87$$

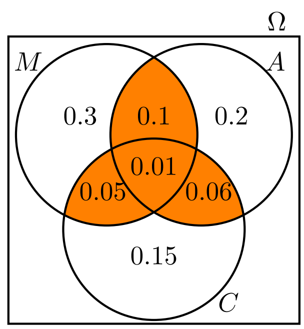
Por lo tanto

$$P(E) = 1 - 0,87 = 0,13$$

También se podría haber hecho un diagrama de Venn y analizar cada situación como sigue

i. La persona toma al menos dos medios de transporte

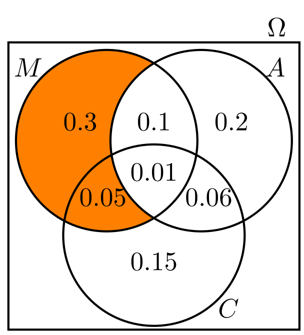
Si toma al menos dos, el sector de interés es



Con lo cual

$$P(\text{al menos dos transportes}) = 0,1 + 0,01 + 0,05 + 0,06 = 0,22$$

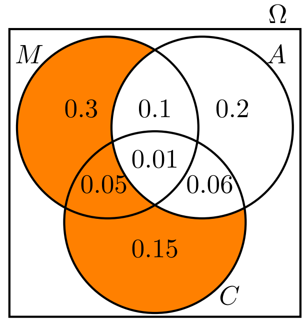
ii. Viaje en metro y no en autobús



De donde se sigue que

$$P(\text{metro y no autobús}) = 0,3 + 0,05 = 0,35$$

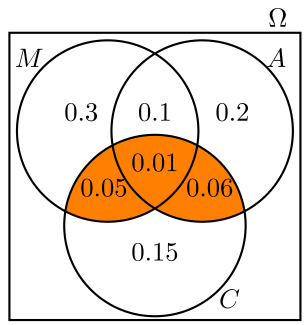
iii. Metro o coche y no autobús



Por ende

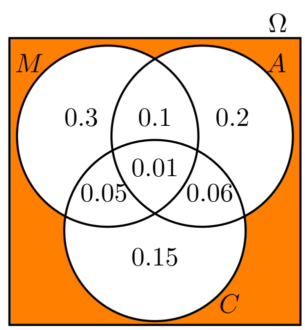
$$P(\text{metro o coche y no autobús}) = 0,3 + 0,05 + 0,15 = 0,5$$

iv. Metro o autobús y coche.



$$P(\text{metro o autobús y coche}) = 0,05 + 0,01 + 0,06 = 0,12$$

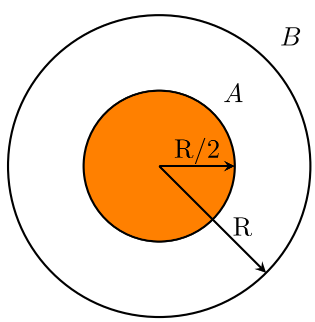
v. Que vaya a pie.



$$P(\text{vaya a pie}) = 1 - (0,3 + 0,1 + 0,2 + 0,05 + 0,01 + 0,06 + 0,15) = 0,13$$

13. Se selecciona un punto al azar en el interior de un círculo. Hallar la probabilidad de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.

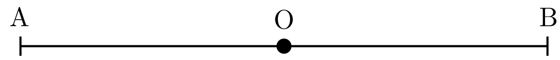
    Se tiene la siguiente situación



    En donde A es el área de interés, mientras que B es el área total. Entonces,

$$P(A) = \frac{\text{área } A}{\text{área } B} = \frac{\pi \cdot (R/2)^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{1}{4}$$

14. Se escoge al azar un punto X sobre un segmento de recta AB con punto medio O. Hallar la probabilidad de que los segmentos de recta AX, XB y AO puedan formar un triángulo. (Recordar la propiedad triangular: *En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia*).



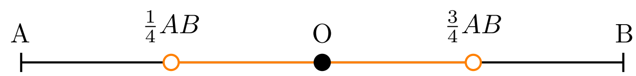
Se tiene que

$$AX + XB = AB \qquad AO = AB/2$$

De la propiedad triangular:

$$AX < XB + AO \to AX < AB - AX + AB/2 \to AX < \tfrac{3}{4}AB$$
$$AX > XB - XO \to AX > AB - AX - AB/2 \to AX > \tfrac{1}{4}AB$$

Entonces tenemos que el intervalo válido para X es el naranja:



$$P(\text{triángulo}) = \frac{d(\frac{1}{4}AB, \frac{3}{4}AB)}{d(A,B)} = \frac{1}{2}$$

15. Supongamos que tres cartas numeradas 1,2,3, son alineadas al azar. Sean los eventos $A =$“la carta 1 aparece en la primera posición” y $B =$“la carta 2 aparece en la segunda posición”

   (a) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.

   $$\Omega = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

   Para A la carta 1 debe estar en la posición 1, mientras que las otras no importan, con lo cual

   $$A = \{123, 132\}$$

   Para B pasa algo similar, la carta debe estar en la posición 2 mientras que el resto no interesa

   $$B = \{123, 321\}$$

   Para saber las probabilidades hago casos favorables sobre casos totales

   $$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{6} \qquad P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{2}{6}$$

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos una coincidencia entre los números de las cartas y las posiciones que ocupan?

   $$P(\text{al menos 1 coincidencia}) = \frac{\#\{123, 132, 321, 213\}}{\#\Omega} = \frac{4}{6}$$

16. En cierta computadora un programa funciona correctamente el 80% de las veces, el 15% interrumpe la ejecución por errores en el propio programa y el 9% de las veces se interrumpe por errores en su entorno de trabajo, obviamente algunas veces deja de funcionar por ambas causas. Sea:

$$B = \{\text{La siguiente interrupción es por problemas propios del programa}\}$$
$$A = \{\text{La siguiente interrupción es por errores en el entorno de trabajo}\}$$

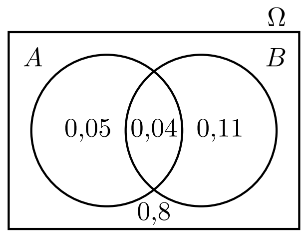
Calcular $P(A^c \cup B^c)$; $P(A^c \cap B^c)$ y $P(A \cap B^c)$.

$$\begin{aligned}
P(A^c \cup B^c) &= P((A \cap B)^c) \\
&= 1 - P(A \cap B) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cup B) \\
&= 1 - P(A) - P(B) + 1 - P((A \cup B)^c) \\
&= 2 - 0,09 - 0,15 - 0,8 \\
&= 0,96
\end{aligned}$$

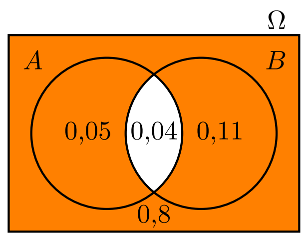
$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A - B) \\ &= P(A - (A \cap B)) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) - P(B) + P(A \cup B) \\ &= -P(B) + 1 - P((A \cup B)^c) \\ &= -0,15 + 1 - 0,8 \\ &= 0,05 \end{aligned}$$

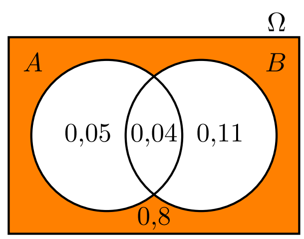
Quizás una forma más intuitiva de plantear el problema sea haciendo el diagrama de Venn, para ello primero calculamos $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,09 + 0,15 - 0,2$. Entonces:



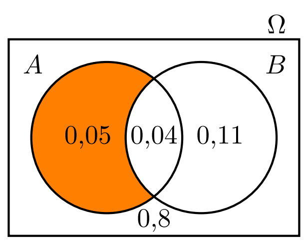
Para saber $P(A^c \cup B^c)$, hay que sumar las probabilidades en naranja:



Para saber $P(A^c \cap B^c)$:



Y finalmente, para $P(A \cap B^c)$:



17. Probar que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) && \text{Principio inclusión-exclusión} \\ &\geq P(A) + P(B) - 1 && P(A \cup B) \leq 1 \rightarrow -P(A \cup B) \geq -1 \end{aligned}$$

18. Sean $E_1, \dots, E_n$ $n \geq 2$, eventos cualesquiera de S.

(a) Probar $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P(E_i)$

Se define

$$\begin{aligned}
B_1 &= E_1 \\
B_2 &= E_2 - E_1 \\
B_3 &= E_3 - (E_1 \cup E_2) \\
&\vdots \\
B_n &= E_n - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)
\end{aligned}$$

Sean $B_k, B_m, k > m$. Entonces $B_k = E_k - \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} E_i\right), B_m = E_m - \left(\bigcup\limits_{i=1}^{m-1} E_i\right)$

$$\begin{aligned}
B_k \cap B_m &= E_k - \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right) \cap E_m - \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} E_i\right) && \text{Def} \\
&= E_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i\right)^c \cap E_m \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} E_i\right)^c && \text{Resta} \\
&= E_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} E_i^c\right) \cap E_m \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} E_i^c\right) && \text{De Morgan} \\
&= E_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} E_i^c\right) \cap \left(\bigcap_{i=m}^{k-1} E_i^c\right) \cap E_m \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} E_i^c\right) && k > m \\
&= E_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} E_i^c\right) \cap E_m^c \cap \left(\bigcap_{i=m+1}^{k-1} E_i^c\right) \cap E_m \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} E_i^c\right) \\
&= \varnothing && E_m^c \cap E_m \cap A = \varnothing \quad \forall A
\end{aligned}$$

Si $m > k$, se pueden invertir los lugares y se llega al mismo resultado. Como consecuencia:

$$B_k \cap B_m = \varnothing \qquad \forall k \neq m \tag{1}$$

Es decir, B_k y B_m son eventos independientes. Por otra parte, dado un n arbitrario

$$B_n = E_n - \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right) = E_n \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)^c \subseteq E_n$$

$$P(B_n) \leq P(E_n) \tag{2}$$

Además, vemos que si $n = 2$

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i=1}^{2} B_i\right) &= E_1 \cup E_2 - E_1 \\
&= E_1 \cup E_2 \cap E_1^c && \text{Resta} \\
&= (E_1 \cup E_2) \cap (E_1 \cup E_1^c) && \text{Distributiva} \\
&= (E_1 \cup E_2) \cap \Omega \\
&= E_1 \cup E_2 && \text{Intersección con el universo} \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{2} E_i\right)
\end{aligned}$$

Suponemos que funciona para un n arbitrario y comprobamos para $n+1$

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n+1} B_i &= \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \cup B_{n+1} & \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup B_{n+1} & \text{Hipótesis Inductiva} \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup E_{n+1} - \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) & \text{Def } B_{n+1} \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup \left[E_{n+1} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c\right] & \text{Resta} \\
&= \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup E_{n+1}\right] \cap \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)^c\right] & \text{Distributiva} \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap \left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right)\right] & \text{De Morgan} \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap \left[\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \cup E_1^c\right) \cap \cdots \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)\right) \cup E_n^c\right] & \text{Distributiva} \\
&= \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right) \cap [\Omega \cap \cdots \cap \Omega] & \text{En el término } j : E_j \cup E_j^c = \Omega \\
&= \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i & \text{Intersección universo}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \qquad \forall n \tag{3}$$

Con esto podemos ver que

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) & \text{Por 3} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(B_i) & \text{Por 1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i) & \text{Por 2}
\end{aligned}$$

(b) Probar que si cada E_i es un evento casi seguro (es decir que $P(E_i) = 1$), entonces $E_1 \cap \cdots \cap E_n$ es un evento casi seguro.

Está en la teoría.

19. Un sistema de control está formado por 10 componentes. La falla de cualquiera de ellos provoca la del sistema. Se sabe que la probabilidad de falla de cada componente es < 0.0002. Probar que la probabilidad de que el sistema funcione es > 0.998.

$F =$"El sistema funciona"
Se sabe que

$$P(F) = 1 - P(F^c) = 1 - P(\text{el sistema no funciona})$$

Para que el sistema no funcione, debe fallar por lo menos un componente, entonces si $A_i =$"el componente i falla", tenemos que

$$P(F) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{10} A_i\right)$$

Si suponemos que las fallas son independientes entre si:

$$P(F) = 1 - \sum_{i=1}^{10} P(A_i)$$

Como $P(A_i) < 0.0002 \to -P(A_i) > 0.0002$, por lo tanto

$$P(F) > 1 - 10 \cdot 0.0002 \to P(F) > 0.998$$

20. Dados dos eventos A y B, mostrar que la probabilidad de que ocurran exactamente uno de ellos es $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

    Para que ocurra solamente A, tiene que ocurrir A y no B. Mientras que para que ocurra solamente B, debe ocurrir B y no A. Se ve que son eventos disjuntos, entonces

$$\begin{aligned} P(A - B) + P(B - A) &= P(A - (A \cap B)) + P(B - (B \cap A)) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) && A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \end{aligned}$$

21. Sabiendo que $A \subset B$ y $P(A \cup B) = p, P(A \cap B) = q$, calcular: $P(A), P(B)$ y $P(A^c \cap B)$

$$\begin{gathered} A \subset B \to P(A \cup B) = P(B) \to P(B) = p \\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \to P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) \to P(A) = q \\ P(A^c \cap B) = P(B \cap A^c) = P(B - A) = P(B) - P(A) = p - q \end{gathered}$$

22. Supongamos que $P(A) = 0,8$ y $P(B) = 0,3$. ¿Es correcto decir que $A \cap B = \varnothing$?¿Por qué?

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) && \text{Principio de inclusión-exclusión} \\ &= 1,1 - P(A \cup B) \\ &\geq 1,1 - 1 && P(A \cup B) \leq 1 \to -P(A \cup B) \geq -1 \\ &= 0,1 \end{aligned}$$

    Por lo tanto, no es correcta la afirmación ya que $P(A \cap B) \geq 0,1$