Probabilidades – Año 2022

Práctica 1: Experimentos Aleatorios. Espacio Muestral; eventos.

1. Asociar un espacio muestral a cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

   (a) Lanzar tres veces al aire una moneda y observar el lado que cae hacia arriba.

   (b) Lanzar tres veces al aire una moneda y observar el número total de caras.

   (c) Una urna contiene 2 bolillas blancas y una negra. Se sacan 2 bolillas al azar simultáneamente y se anotan los colores.

   (d) Idem que en el inciso anterior pero con reemplazo.

   (e) Se colocan al azar tres bolillas diferentes en tres urnas diferentes, pudiéndose poner más de una bolilla por urna.

   (f) Se arroja una moneda; si sale cara se arroja un dado, si sale ceca se lanzan dos dados.

   (g) Un viajante debe visitar cinco ciudades y traza su itinerario.

   (h) Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican en defectuosos (D) y no defectuosos (N). Se observan artículos y se anota su condición. Este proceso se continúa hasta que se produzcan dos artículos defectuosos consecutivos o hasta que se hayan verificado cuatro artículos cualesquiera.

   (i) Una caja con 12 lámparas tiene 4 unidades con filamentos rotos. Se las prueba hasta que se encuentre una quemada.

   (j) Un tanque de agua tiene una bomba cuyo motor se pone en funcionamiento automáticamente cuando el consumo hace que el volumen de agua baje hasta cierto nivel. Supongamos que esto puede ocurrir a lo sumo una vez al día. Cierto día se observa el motor durante 24 horas y se registra en qué instante ha comenzado a funcionar o si no lo ha hecho en todo el día.

2. Se examinan tres fusibles en secuencia, y se observa en cada caso si están o no defectuosos.

   (a) Describir el espacio muestral del experimento. ¿Cuántos elementos tiene?

   (b) Expresar por extensión los siguientes eventos:

      i. C: exactamente un fusible esta defectuoso.

      ii. D: a lo sumo un fusible esta defectuoso.

      iii. E: los tres fusibles estan en las mismas condiciones.

      iv. ¿Cuáles de los sucesos C, D o E son mutuamente excluyentes?.

      v. Sean los eventos A_i : el fusible $i - esimo$ esta defectuoso $i = 1, 2, 3$. Expresar los eventos anteriores en función de A_1, A_2 y A_3.

      vi. Sean los eventos B_i : hay exactamente i fusibles defectuosos con $i = 0, 1, 2, 3$.¿Cuántos elementos tiene cada B_i ?

3. Una instalación consta de dos calderas y un motor. Sea M el evento de que el motor está en buenas condiciones, mientras que los sucesos C_i ($i = 1, 2$) son los eventos de que la $i-$ésima caldera está en buenas condiciones. El evento I es que la instalación funcione. Si la instalación funciona cada vez que el motor y al menos una caldera están en buenas condiciones, exprese I e I^c mediante M, C_1 y C_2.

4. Se arrojan dos dados. Sean $E =$ "la suma de los números obtenidos es impar", $F =$ "sale el 1 al menos una vez", $G =$ "la suma es 5". Describir los eventos:

   (a) $E \cap F$ (b) EUF (c) $E \cap F^c$ (d) $F \cap G$ (e) $E \cap F \cap G$

5. Se realiza el siguiente experimento aleatorio: se lanza una moneda y un dado.

   (a) Definir un espacio muestral.

(b) Expresar explícitamente los siguientes sucesos:
A= "se obtiene un par y una cara"
B= "se obtiene un número primo"
C="se obtiene un número impar y una ceca"

(c) Encontrar expresiones para los siguientes eventos:

i. Sólamente ocurre B
ii. Ocurren tanto A como B pero no ocurre C
iii. Por lo menos dos ocurren
iv. Ocurre uno y no más
v. No ocurren más de dos.

6. En un estudio realizado con 900 profesionales, 25 años después de su graduación, se descubre que 300 de ellos tuvieron éxito profesional, 300 de ellos se radicaron en el extranjero y 100 de ellos tuvieron éxito y se radicaron en el extranjero. Hallar el número de personas en el grupo que de estas dos cosas hayan hecho:

(a) exactamente dos,
(b) por lo menos una,
(c) no más de una.

Probabilidad

7. Un experimento aleatorio tiene tres resultados posibles: a,b y c, con probabilidades p, p^2 y p, respectivamente. Hallar justificando apropiadamente, el/los valores válidos de p.

8. Una caja tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10. Una bola se elige al azar y una segunda bola se elige de las 9 restantes. Encontrar la probabilidad de que los números de las 2 bolas difieran en 2 o más.

9. Se carga un dado de manera que los números pares tienen el doble de probabilidad de salir que los impares; los pares son igualmente probables entre sí, y lo mismo sucede con los impares. Se arroja el dado una vez. Hallar la probabilidad que:

(a) Aparezca un número par.
(b) Aparezca un número impar
(c) Aparezca un número primo impar.

10. Sean A y B dos eventos tales que $P(A) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(A \cup B) = 0,7$. Hallar

(a) $P(B)$
(b) P(ocurra exactamente uno de los dos eventos)
(c) P(no ocurra ninguno de los dos eventos).

11. Sean A y B dos eventos. Suponiendo que $P(A) = x$, $P(B) = y$, $P(A \cap B) = z$. Expresar cada una de las siguientes probabilidades en términos de x, y, z.

(a) $P(A^c \cap B^c)$
(b) $P(A^c \cap B)$
(c) $P(A^c \cup B^c)$
(d) P(ocurra al menos uno de los dos eventos)
(e) P(ocurra a lo sumo uno de los dos eventos)

12. Durante un año las personas de una ciudad utilizan tres tipos de transportes: metro (M), autobús (A) y coche particular (C). Las probabilidades de que durante el año hayan usado unos u otros transportes son las siguientes: sólo metro $= 0,30$; sólo autobús $= 0,20$; sólo coche $= 0,15$; sólo metro y autobús $= 0,10$; sólo metro y coche $= 0,05$; sólo autobús y coche $= 0,06$; metro, autobús y coche $= 0,01$.

Calcular las siguientes probabilidades:

(a) Que una persona tome al menos dos medios de transporte.
(b) Que una persona viaje en metro y no en autobús.
(c) Que una persona viaje en metro o en coche y no en autobús.
(d) Que viaje en metro o en autobús y en coche.
(e) Que una persona vaya a pie.

13. Se selecciona un punto al azar en el interior de un círculo. Hallar la probabilidad de que el punto quede más cercano al centro que a la circunferencia.

14. Se escoge al azar un punto X sobre un segmento de recta AB con punto medio O. Hallar la probabilidad de que los segmentos de recta AX, XB y AO puedan formar un triangulo. (Recordar la propiedad triangular: *En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia*).

15. Supongamos que tres cartas numeradas 1, 2, 3, son alineadas al azar. Sean los eventos $A =$ "la carta 1 aparece en la primera posición" y $B =$ "la carta 2 aparece en la segunda posición".

    (a) Calcular $P(A)$ y $P(B)$.
    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos una coincidencia entre los números de las cartas y las posiciones que ocupan?

16. En cierta computadora un programa funciona correctamente el 80% de las veces, el 15% interrumpe la ejecución por errores en el propio programa y el 9% de las veces se interrumpe por errores en su entorno de trabajo, obviamente algunas veces deja de funcionar por ambas causas Sea:

    $B =${La siguiente interrupción es por problemas propios del programa}

    $A =${La siguiente interrupción es por errores en el entorno de trabajo}

    Calcular $P(A^c \cup B^c)$; $P(A^c \cap B^c)$ Y $P(A \cap B^c)$.

17. Probar que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$.

18. Sean $E_1, ..., E_n$ $n \geq 2$, eventos cualesquiera de S.

    (a) Probar: $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$
    (b) Probar que si cada E_i es un evento casi seguro (es decir que $P(E_i) = 1$), entonces $E_1 \cap ... \cap E_n$ es un evento casi seguro.

19. Un sistema de control está formado por 10 componentes. La falla de cualquiera de ellos provoca la del sistema. Se sabe que la probabilidad de falla de cada componente es < 0.0002. Probar que la probabilidad de que el sistema funcione es > 0.998.

20. Dados dos eventos A y B, mostrar que la probabilidad de que ocurran exactamente uno de ellos es $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

21. Sabiendo que $A \subset B$ y $P(A \cup B) = p$, $P(A \cap B) = q$, calcular: $P(A)$, $P(B)$ y $P(A^c \cap B)$.

22. Supongamos que $P(A) = 0,8$ y $P(B) = 0,3$. ¿Es correcto decir que $A \cap B = \emptyset$?¿Porqué?

23. Supongamos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.¿ Puedo asegurar que $A \cap B = \emptyset$?