

Práctica 2 - Cálculos combinatorios. Resultados igualmente probables.

Santiago

1. Consideremos mensajes enviados en código binario (0 y 1). ¿Cuántos mensajes es posible enviar con 10 dígitos o menos?

Con n dígitos hay 2^n posibles mensajes. Entonces, si tengo la posibilidad de enviar hasta 10 dígitos.

$$\# \text{mensajes} = \sum_{i=1}^{10} 2^i = 2^{11} - 1$$

2. Un experimentador está estudiando los efectos de la temperatura, la presión y el tipo de catalizador en la producción de cierta reacción química. Se consideran para las experiencias tres temperaturas diferentes, cuatro presiones distintas y cinco catalizadores diferentes. Si cualquier experimento particular implica utilizar una temperatura, una presión y un catalizador:

- (a) ¿Cuántos experimentos distintos son posibles realizar?

Hay 3 temperaturas, 4 presiones y 5 catalizadores. Entonces,

$$\# \text{experimentos} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

- (b) ¿Cuántos experimentos distintos existen que impliquen el uso de la temperatura más baja y las dos presiones más bajas?

Hay una única temperatura más baja, y hay una restricción a 2 presiones en particular, por ende

$$\# \text{experimentos}' = 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10$$

- (c) Suponga que se tiene que realizar cinco experimentos diferentes el primer día de experimentación y los experimentos se realizar al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se utilice un catalizador diferente en cada experimento?

Los casos favorables: el primer experimento no tiene restricción, entonces hay 5 opciones. Para el segundo, no puedo usar el catalizador del primero, así que hay 4 opciones, por los mismos motivos, para el tercero hay 3, para el cuarto 2 y para el quinto 1. Casos totales: no hay restricción alguna en los experimentos, así que siendo A = “no se repite el catalizador”, se tiene que

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{5!}{5^5}$$

3. Se lanzan dos dados, sea “ a ” el número del primer dado y “ b ” el del segundo. ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación $x^2 + ax + b^2 = 0$ tenga raíces reales?

Para que las raíces sean reales:

$$a^2 - 4b^2 \geq 0 \rightarrow a \geq 2b$$

Tenemos que el espacio muestral es

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Los casos favorables son

$$B = \{(2, 1)(3, 1)(4, 1)(5, 1)(6, 1)(4, 2)(5, 2)(6, 2)(6, 3)\}$$

Sea A = “la ecuación tiene raíces reales”

$$P(A) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{9}{36}$$

4. En una habitación, 10 personas tiene insignias numeradas del 1 al 10. Se eligen 3 personas al azar.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número menor de las insignias de las personas elegidas sea 5?

Los casos favorables involucran una selección de la insignia 5 y dos selecciones de números mayores. Hay $1 \cdot 5 \cdot 4$ casos favorables, mientras que los casos totales son $10 \cdot 9 \cdot 8$. Entonces

$$P(\text{menor de las insignias es } 5) = \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{20}{720} = \frac{1}{36}$$

- (b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número mayor de las insignias sea 5?

Para los casos favorables necesito sacar el 5, luego tengo que sacar dos insignias menores. Con lo cual hay $1 \cdot 4 \cdot 3$ casos favorables.

$$P(\text{mayor de las insignias es } 5) = \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{12}{720} = \frac{1}{60}$$

5. Se eligen al azar dos números entre los primeros números $1, 2, \dots, n$. ¿Cuál es la probabilidad que sean consecutivos si los escogemos con sustitución? ¿Y si lo hacemos sin sustitución?

Si es con sustitución, hay n opciones para el primero, si se seleccionó el 1 o n hay 1 opción para el segundo, para los $n - 2$ restantes hay 2. Los casos totales son n^2 , entonces

$$P(\text{consecutivos con sustitución}) = \frac{(n-2) \cdot 2 + 2 \cdot 1}{n^2} = \frac{2n-2}{n^2} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}$$

El caso sin sustitución sólo me cambia los casos totales

$$P(\text{consecutivos sin sustitución}) = \frac{2n-2}{n \cdot (n-1)} = \frac{2}{n}$$

6. Cinco hombres y cinco mujeres son ordenados de acuerdo a su nota de examen. Asumimos que no hay dos notas iguales y que todos los posibles 10! reordenamientos son igualmente probables.

- (a) Encontrar la probabilidad de que una mujer obtenga el tercer puesto.

En el tercer puesto puede haber tanto una mujer como un hombre, hay 5 casos favorables y 10 totales, entonces

$$P(\text{mujer en el tercer puesto}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

- (b) Encontrar la probabilidad de que el puesto más alto alcanzado por una mujer sea el sexto.

Para que esto sea posible, las mujeres deben ocupar los puestos 6,7,8,9 y 10. Por ende, tanto mujeres como hombres están restringidos a 5 posiciones.

$$P(\text{mujeres a lo último}) = \frac{5!5!}{10!}$$

7. En una canasta hay 30 manzanas de las cuales 5 están machucadas. Si elijo al azar, con orden y sin reemplazo 6 manzanas,

- (a) Defina un espacio muestral. ¿Cuántos elementos tiene? ¿Es equiprobable?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas estén machucadas?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera esté machucada?

8. En una fiesta se reparten al azar 10 caramelos entre 5 niños (un niño puede recibir más de un caramelo y obviamente otros niños pueden recibir caramelos). Mi sobrino se encuentra en el grupo de niños. ¿Cuál es la probabilidad de que mi sobrino quede sin caramelo? (Ayuda: es conveniente suponer que tanto los niños como los caramelos están numerados).

9. En una reunión hay 8 personas ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellas cumplan años el mismo día? ¿Qué suposiciones son necesarias para el cálculo realizado?

10. Al tirar tres dados se puede obtener una suma de 9 de seis formas distintas, a saber: 126;135;144;225;234;333 y una suma de 10 también de 6 formas diferentes, a saber: 136;145;226;235;244;334. Sin embargo, la experiencia dice que es más fácil obtener 10 que 9 ¿Por qué?

Nota: este problema lo resolvió Galileo en el siglo *XVII* a requerimiento de un jugador, el príncipe de Toscana.

11. Los dados, tal y como los conocemos actualmente, se hicieron muy populares en la edad media. Chevalier De Mere propuso un enigma matemático: ¿Qué es más probable? ¿sacar al menos un 6 en cuatro tiradas con un sólo dado, o sacar al menos un doble seis en 24 tiradas con dos dados?

12. Tres matrimonios han comprado boletos para el teatro y se sientan en una fila formada por sólo seis asientos. Si toman sus asientos de un modo aleatorio:
- (a) ¿cuál es la probabilidad de que Juan y Paula (marido y mujer) se sienten en los dos asientos de la extrema izquierda?
 - (b) ¿cuál es la probabilidad de que Juan y Paula terminen sentados en forma contigua?
 - (c) ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una de las esposas quede sentada junto a su marido?