PROF. DR. NELSON JOSÉ FREITAS DA SILVEIRA - DCC

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

24 de agosto de 2020

2

Transcrito com muito zelo por José Carlos Tobias da Silva.

Conteúdo

NOTAS DE AULA 1

Conjuntos

1.1 Conceitos

1.1.1 Conjuntos

Sinônimo de agrupamento, coleção, classe, etc. representado com letras maiúsculas.

Exemplo 1:

A,B,F

1.1.2 Elementos

Objetos que constituem determinado conjunto, são chamados de elementos do con junto e representados por letras minúsculas.

Exemplo 2:

a, b, f

1.1.3 Pertinência

Um elemento pode pertencer ou não a um conjunto. Para indicar pertinência, utiliza mos o símbolo ∈, e quando não pertence utilizamos o ∉.

- X ∈ A (Lê-se: X pertence a A)
- X *6*∈ B (Lê-se: X não pertence a B)

*Tais símbolos são usados para representar a relação de elemento com conjunto.

1.2 Representação de um conjunto

Um conjunto pode ser representado por 2 formas:

1.2.1 Por enumeração

Podemos representar um conjunto enumerando seus elementos.

Exemplo 1: Conjunto dos números positivos pares, menores que 10:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

1.2.2 Por propriedade

Podemos representar por meio de uma prioridade que caracteriza seus elementos.

Exemplo 2:

- $A = \{x \mid x \in N \text{ e } x < 8\}$
- $B = \{x \mid x \text{ é vogal}\}$

A propriedade permite estabelecer se um dado elemento, pertence ou não a um conjunto.

1.2.3 Exemplos

Exemplo 1: Sendo $N = \{0, 1, 2, 3,...\}$, dar por enumeração, os seguintes conjuntos:

a) $A = \{x \in N \mid x = 3k, k \in N\}$

- **Solução**: É determinado pela expressão $x = 3k$, com $k \in N$, logo:

$$k = 0 \Longrightarrow x = 3 \cdot 0 = 0$$
$$k = 1 \Longrightarrow x = 3 \cdot 1 = 3$$
$$k = 2 \Longrightarrow x = 3 \cdot 2 = 6$$
$$...$$

Logo: $A = \{0, 3, 6,...\}$

b) $B = \{x \in N \mid x = 2^k, k \in N\}$

- **Solução**: Os elementos são determinados pela expressão $x = 2^k$, com $k \in N$, logo:

$$k = 0 \Longrightarrow x = 2^0 = 1$$
$$k = 1 \Longrightarrow x = 2^1 = 2$$
$$k = 2 \Longrightarrow x = 2^2 = 4$$
$$\ldots$$

Logo: B = {1, 2, 4,...}

Exemplo 2: Representar o conjunto A = {0, 4, 8, 12,...} por meio de uma propriedade.

• **Solução**: Os elementos de A variam de 4 em 4, logo:

$$A = \{x \in N \mid x = 4k, k \in N\}$$

Exercício: Escrever por enumeração o conjunto:

$$A = \{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

• **Solução**: Os elementos de A são raízes da equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$$
$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$
$$x = 2 \text{ ou } x = 3$$

Logo, A = {2, 3}.

1.3 Diagrama de Venn

Toda figura utilizada para representar um conjunto é chamada diagrama de Venn.

Exemplo 1: O conjunto A = {1, 2, 3, 4} pode ser representado por:

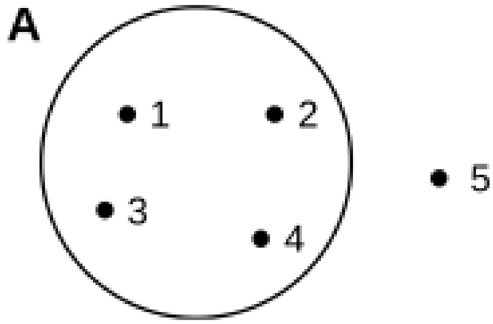


Figura 1.1: Demonstração de membros de um conjunto.

Observe que:

2 ∈ A (ponto interno a A)

5 ∉ A (ponto externo a A)

1.4 Igualdade entre conjuntos

Sejam:

A = {1, 2, 3, 4} e

B = {4, 3, 2, 1}

Nota-se que A e B possuem os mesmo elementos. Para:

A = {*x*|*x* é par e menor que 10} e

B = {2, 4, 6, 8}

Novamente A e B possuem os mesmo elementos.

Logo, A = B, pois possuem os mesmos elementos. A negação da igualdade é indi cada por A *6*= B.

Exemplo 1:

A = {1, 3, 5})

B = {0, 1, 4, 8} A *6*= B (1.1)

1.5 Conjunto unitário

Definição: chama-se conjunto unitário aquele que possui um único elemento.

Exemplo 1:

1. Conjunto das soluções da equação: 3*x* +1 = 10
   • **Solução**: {3}
2. Conjunto dos estados brasileiros que fazem fronteira com o Uruguai: •
   Solução: {Rio Grande do Sul}

1.6 Conjunto vazio

Definição: Conjunto que não possui elemento algum. O símbolo usual para o conjunto vazio é *;*. Um conjunto vazio é obtido quando descrevemos um conjunto através de uma propriedade P logicamente falsa.

Exemplo 1:

1. {*x*|*x 6*= *x*} = *;*
2. {*x*|*x* é ímpar e múltiplo de 2 } = *;*
3. {*x*|*x* < 0 e *x* > 0} = *;*

1.7 Principais símbolos lógicos

• |: tal que

• ∃ : existe ao menos um

• ∃ !: existe um único

• ∀ : qualquer que seja ou para todo

• =⇒ : implicação ou então

• ⇐⇒ : equivalente ou se e somente se

1.8 Subconjuntos

Definição: Dados 2 conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B, se e somente se, cada elemento do conjunto A, é também um elemento do conjunto B. Indicamos por:

$$A \subset B \text{ (Lê-se A está contido em B)}$$

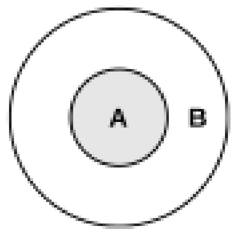


Figura 1.2: Demonstração de um conjunto A contido em um conjunto B.

Em símbolos:

$$A \subset B \Longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

Exemplo 1:

- $\{a,b\} \subset \{a,b,c,d\}$
- $\{a\} \subset \{a,b\}$
- $\{a,b\} \subset \{a,b\}$
- $\{x|x \text{ é inteiro e par}\} \subset \{x|x \text{ é inteiro}\}$

Também podemos escrever $B \supset A$ (Lê-se B contém A).

Com a notação $A \not\subset B$, indicamos que A não está contido em B, logo, existe ao menos 1 elemento de A que não pertence a B.

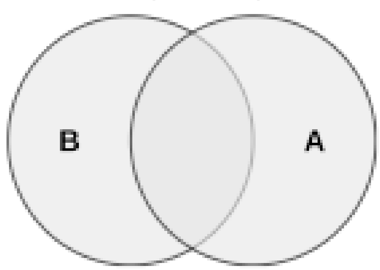


Figura 1.3: $A \not\subset B$ Figura 1.4: $A \not\subset B$

Com a igualdade de conjuntos podemos representar como:

$$A = B \Longleftrightarrow (\forall x)(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

Todo elemento de A é elemento de B e vice-versa, ou seja, $A \subset B$ e$B \subset A$, logo: $A = B \Longleftrightarrow (A \subset B \text{ e } B \subset A)$

1.9 Exercícios Propostos

1. Dados A = {1, 2, 3, 4} e B = {2, 4}, pede-se:

   a) Reescrever com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

   1^o) 3 é elemento de A
   - **Solução**: $3 \in A$

   2^o) 1 não está em B
   - **Solução**: $1 \notin B$

   3^o) B é parte de A
   - **Solução**: $B \subset A$ ou $A \supset B$

   4^o) B é igual a A
   - **Solução**: *;*

   5^o) 4 pertence a B
   - **Solução**: $4 \in B$

   b) Classificar as sentenças anteriores em V ou F

1^o) (V)

2^o) (V)

3^o) (V)

4^o) (F)

5^o) (V)

2. Sendo A = {1,2}, B = {2,3}, C = {1,3,4} e D = {1,2,3,4}, classificar em V ou F cada sentença abaixo e justificar

   a) $A \subset D$:

   b) $A \subset B$:

   c) $B \subset C$:

   d) $D \supset B$:

   e) $C = D$:

   f) A *6*⊂ C:

1.9.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. (V), pois $1 \in A$, $1 \in D$, $2 \in A$ e $2 \in D$.

2. (F), pois $1 \in A$ e $1 \notin B$.

3. (F), pois $2 \in B$ e $2 \notin C$.

4. (V), pois $2 \in B$ e $2 \in D$, $3 \in B$ e $3 \in D$.

5. (F), pois $2 \in D$ e $2 \notin C$.

6. (V), pois $2 \in A$ e $2 \notin C$.

NOTAS DE AULA 2

Conjuntos

2.1 Conjunto Universo

Definição: O conjunto que contém todos os outros conjuntos chama-se conjunto universo (U).

2.2 Conjunto das partes

Definição: O conjunto formado por todos os subconjuntos de um conjunto A é deno minado conjunto das partes de A, sendo indicado por P(A), onde:

$$P(A) = \{x \mid x \in A\}$$

Exemplo 1: Se A = {*a*} os elementos de P(A) são *;* e {*a*}, isto é:

$$P(A) = \{;, \{a\}\}$$

Se A = {*a*,*b*} os elementos de P(A) são *;*, {*a*}, {*b*} e {*a*,*b*} isto é:

$$P(A) = \{;, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$

Se A = {1, 2, 3}, os elementos de P(A) são:

{;, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}} = P(A)

Logo, |P(A)| = 2^n onde *n* é o número de elementos do conjunto.

2.3 Reunião de conjuntos

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se reunião de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

O conjunto A ∪ B (lê-se A união B) é formado pelos elementos que pertencem a pelos menos um dos conjuntos A ou B.

Exemplos 1:

- $\{a,b\} \cup \{c,d\} = \{a,b,c,d\}$
- $\{a,b\} \cup \{a,b,c,d\} = \{a,b,c,d\}$
- $\{a,b,c\} \cup\ ; = \{a,b,c\}$

Em diagrama:

a) A = {0, 1, 2, 3, 4}
B = {1, 3, 5, 7}
A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}

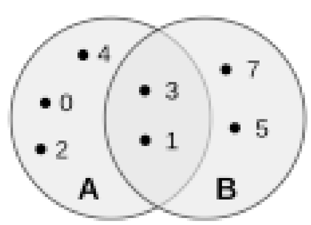


Figura 2.1: Diagrama de Venn para A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}

b) A = {0, 1, 2}

B = {0, 1, 2, 3, 4}

A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4} = B

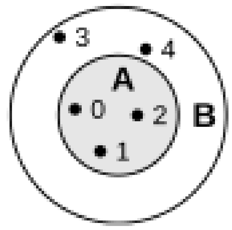


Figura 2.2: Diagrama de Venn para A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4} = B

2.3.1 Intersecção de conjuntos

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se intersecção de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertençam a A e B.

A∩B = {*x* | *x* ∈ A e *x* ∈ B}

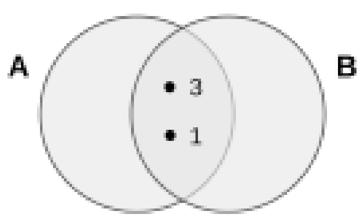
Exemplos:

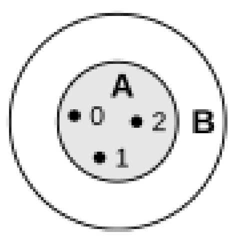
A∩B = {1, 3}

Exemplo 1: A = {0, 1, 2, 3, 4} B = {1, 3, 5, 7}

Exemplo 2: A = {0, 1, 2} B = {0, 1, 2, 3, 4}

A∩B = {0, 1, 2} = A

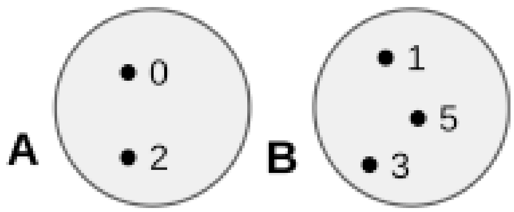




Exemplo 3: A = {0, 2}

B = {1, 3, 5}

A∩B = *;*



2.3.2 Diferença de conjuntos

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

$$A-B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplo 1:

a) $\{a,b,c\}-\{b,c,d,e\} = \{a\}$

b) $\{a,b,c\}-\{b,c\} = \{a\}$

c) $\{a,b\}-\{c,d,e,f\} = \{a,b\}$

d) $\{a,b\}-\{a,b,c,d,e\} = ;$

2.3.3 Complementar de B em A

Definição: Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se complementar de B em relação a A, o conjunto $A - B$, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.

Símbolo:

$$C^B_A \text{ou } A$$

Esta simbologia indica **"o complemento de B em relação a A"**. Notemos que C^B_A só é definido para $B \subset A$ e aí temos:

$$C^B_A = A-B$$

Exemplo 1::

a) Se $A = \{a,b,c,d,e\}$ e $B = \{c,d,e\}$, então:

$$C^B_A = A-B = \{a,b\}$$

b) Se A = {*a*,*b*,*c*,*d*} = B então:

$$C^{B}_{A} = ;$$

Observação: O complementar de B em relação a A é o que falta para B ficar igual a A.

2.4 Propriedades

2.4.1 Inclusão ($\subset$)

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1. $; \subset A$

2. $A \subset A$ (reflexiva)

3. $A \subset B$ e $B \subset A \Longrightarrow A = B$ (anti-simétrica)

4. $A \subset B$ e $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ (transitiva)

2.4.2 União ($\cup$)

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1. $A \cup A = A$ (idempotente)

2. $A \cup ; = A$ (elemento neutro)

3. $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)

4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

2.4.3 Intersecção ($\cap$)

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1. $A \cap A = A$ (idempotente)

2. $A \cap U = A$ (elemento neutro)

3. A∩B = B∩ A (comutativa)

4. A∩(B∩C) = (A∩B)∩C (associativa)

2.5 Exercícios Propostos

1. Construir o conjunto das partes do conjunto A = {*a*,*b*,*c*,*d*}

2. Dados os conjuntos A = {1,2,3}, B = {3,4} e C = {1,2,4} determinar o conjunto X tal que:

   a) X ∪B = A∪C:

   b) X ∩B = *;*:

2.5.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. *n*P(A) = 2^4 = 16, logo:

P(A) ={*;*, {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*d*},
{*a*,*b*}, {*a*,*c*}, {*a*,*d*}, {*b*,*c*},
{*b*,*d*}, {*c*,*d*}, {*a*,*b*,*c*}, {*a*,*b*,*d*},
{*b*,*c*,*d*}, {*c*,*d*,*a*}, {A}}

2. a) X ∪B = {1, 2, 3, 4}, então, os possíveis elementos de X são:

1, 2, 3 e 4

b) X ∩B = *;* =⇒ 3 ∉ X e 4 ∉ X

Conclusão:

X = {1, 2}

NOTAS DE AULA 3

Conjuntos Numéricos

3.1 Conjunto dos Números Naturais N

N = {0, 1, 2, 3, 4, 5,...}

Um subconjunto importante de N é o conjunto N^*:

N = {1, 2, 3, 4, 5, 6,...} ==⇒ zero foi excluído

Ordenando sobre uma reta, temos:

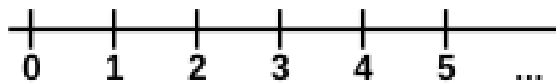


Figura 3.1: Demonstração de N sobre a reta real

3.2 Conjunto dos Números Inteiros Z

Z = {...,−3.−2,−1, 0, 1, 2, 3,...}

Além do N convém destacar os seguintes subconjuntos de Z:

- $Z^* = Z - \{0\}$
- Z_+ = Conjunto dos inteiros positivos
- Z_- = Conjunto dos inteiros negativos

Observe que $Z_+ = N$.
Ordenando Z sobre uma reta, temos:

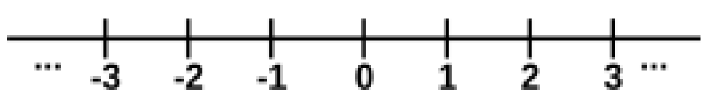


Figura 3.2: Demonstração de Z sobre a reta real

3.3 Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$

Acrescentando as frações positivas e negativas aos números inteiros, teremos os núme ros racionais Q.

Então: $-2, -\frac{5}{4}, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{3}{5}, 1, \frac{3}{2}$ por exemplo são números racionais. Todo número racional pode ser colocado na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Exemplo 1:

- $-2 = -\frac{2}{1} = -\frac{4}{2} = -\frac{6}{3}$
- $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$
- $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$

Assim podemos escrever:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0 \right\}$$

Consideremos a representação decimal de um número racional $\frac{a}{b}$, que se obtém dividindo-se a por b

1. $\frac{1}{2} = 0,5$ $\quad -\frac{5}{4} = -1,25$ $\quad \frac{75}{20} = 3,75$
   Estes exemplos referem-se aos decimais exatos ou finitos.

2. $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$ $\quad \frac{7}{6} = 1,1666\ldots$ $\quad \frac{6}{7} = 0,857142857142\ldots$
   Estes exemplos referem-se aos decimais periódicos ou infinitos.

Então todo decimal exato ou periódico pode ser representado na forma de um número racional $\frac{a}{b}$. Os números racionais podem ser expressos sobre a reta, como segue:

Observando o gráfico notamos que:

1. Entre dois inteiros nem sempre existe outro inteiro

2. Entre dois racionais sempre existe outro racional

3.4. Números Irracionais $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ 27

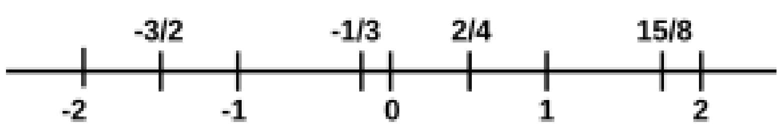


Figura 3.3: Reta real com números racionais Q.

3.4 Números Irracionais $R-Q$

Consideremos, por exemplo, os número $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, e vamos determinar sua representação decimal:

$$\sqrt{2} = 1,14142135...$$

$$\sqrt{3} = 1,73205080...$$

Observamos que existem decimais infinitos, não periódicos, as quais damos o nome de <u>números irracionais</u> que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$.

Um número irracional bastante conhecido é o número $\pi = 3,1415926535....$

3.5 Exercícios Resolvidos

1. Assinale V ou F a cada uma das seguintes afirmações:

a) $-7 \in N$:
   - **Solução**: (F)

b) $\sqrt{2} \in Q$:
   - **Solução**: (F)

c) $4 \in Z$:
   - **Solução**:(V)

d) $-6 \in Q$:
   - **Solução**: (V)

e) $\sqrt{10} \in$ {irracionais}:
   - **Solução**: (V)

f) $3\pi \in Q$:
   - **Solução**: (F)

g) $-\pi \in$ {irracionais}:
   - **Solução**: (V)

h) $\frac{1}{2} \in Z$:
   - **Solução**: (F)

i) $\sqrt{-5} \in R-Q$:
   - **Solução**: (F)

j) $\sqrt{9} \in Q$:
   - **Solução**: (V)

k) $\sqrt[3]{8} \in N$:
   - **Solução**: (V)

l) $0,16666... \in Q$:
   - **Solução**: (V)

m) $0,202002000... \in Q$:
   - **Solução**: (V)

n) $\frac{4}{9} \in Q$:
   - **Solução**: (V)

p) $-2 \in Z$:
   - **Solução**: (V)

q) $\pi \in$ {irracionais}:
   - **Solução**: (V)

o) 0, 010010001... $\in$ R−Q: • **Solução**: (F)

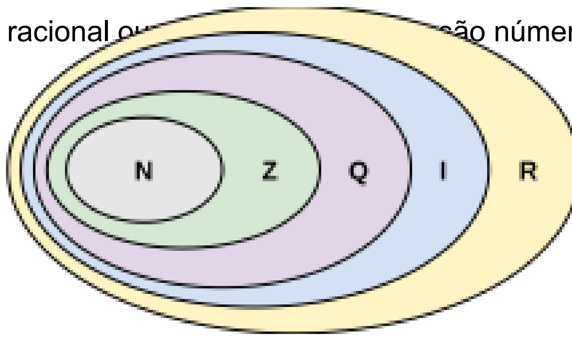
r) $\pi^3 \in$ Q:
• **Solução**: (F)

3.6 Números Reais R

Dados Q e {irracionais}, define-se o conjunto dos números reais como: R =

Q ∪ {irracionais} = {*x* | *x* é racional ou ... são números

reais:



- Os N
- Os Z
- Os Q
- Os {irracionais} *indicados pela letra I no diagrama

Figura 3.4: Representação dos conjuntos numéricos

Como subconjuntos importantes de R temos: •

$R^* = R - \{0\}$

• R_+ = = Conjunto dos reais positivos • R_- = =

Conjunto dos reais negativos Logo

chegamos a representação da reta real:

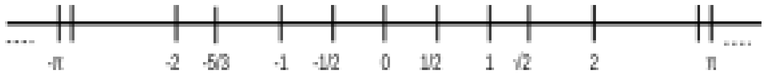


Figura 3.5: Representação da reta nos números reais

3.7 Relação de ordem no conjunto R

Sejam dois números reais quaisquer a e b:

- Entre a e b, poderá ocorrer uma e somente uma das relações:

$$a = b \text{ ou } a > b \text{ ou } a < b$$

- $a \leq b$ (lê-se a menor ou igual a b)
- $a \geq b$ (lê-se a maior ou igual a b)
- Um número real c está entre a e b se e somente se $a < c$ e $c < b$. Podemos representar como: $a < c < b$.

3.8 Exercícios Propostos

1. Usando a notação de desigualdade, escreva as seguintes relações:

   a) x está situado à direita de 10 na reta real:

   b) y está situado entre -1 e 6 na reta real:

   c) x está situado à esquerda de -2 na reta real:

   d) z é um número positivo, ou seja, está situado à direita de 0 na reta real:

   e) x está situado entre 2 e 7 na reta real:

   f) x é um número negativo, ou seja, está situado à esquerda de 0 na reta real:

3.8.1 Solução dos Exercícios Propostos

1. a) $x > 10$ b) $-1 < y < 6$ c) $x < -2$ d) $z > 0$ e) $2 < x < 7$ f) $x < 0$

NOTAS DE AULA 4

Intervalos

Dados dois números reais a e b, com $a < b$, definimos:

a) Intervalo aberto de extremos a,b é o conjunto:

$$]a,b[= \{x \in \mathrm{R} \mid a < x < b\}$$

Figura 4.1: Representação gráfica para $]a,b[$

b) Intervalo fechado de extremos a,b é o conjunto:

$$[a,b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Figura 4.2: Representação gráfica para $[a,b]$

c) Intervalo fechado à esquerda (ou aberto à direita) de extremos a,b é o conjunto:

$$[a,b[= \{x \in \mathrm{R} \mid a \leq x < b\}$$

d) Intervalo fechado à direita (ou aberto à esquerda) de extremos a,b é o conjunto:

$$]a,b] = \{x \in \mathrm{R} \mid a < x \leq b\}$$

Figura 4.3: Representação gráfica para $[a,b[$

Figura 4.4: Representação gráfica para $]a,b]$

4.1 Exemplos

Exemplo 1: $]2, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$, intervalo aberto

Exemplo 2: $[-1, 4] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$, intervalo fechado

Exemplo 3: $[\frac{2}{5}, 7[= \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} \leq x < 7\}$, intervalo fechado à esquerda

Exemplo 4: $]-\frac{1}{3}, \sqrt{2}] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x \leq \sqrt{2}$, intervalo fechado à direita

Definimos como <u>intervalos infinitos</u> os seguintes subconjuntos de R, com sua re presentação na reta real:

1^o. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =]a,+\infty[$

Figura 4.5: Representação gráfica para $x > a$

2^o. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a,+\infty[$

Figura 4.6: Representação gráfica para $x \geq a$

3^o. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =]-\infty,a[$

Figura 4.7: Representação gráfica para $x < a$

4^o. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} =]-\infty, a]$

Figura 4.8: Representação gráfica para $x \leq a$

5^o. Logo, o intervalo $]-\infty, +\infty = \mathbb{R}$.

4.2 Sistema Cartesiano

Definição: É um sistema constituído por dois eixos, *x* e *y*, perpendiculares entre si. O eixo *x* é denominado eixo das abscissas.

O eixo *y* é denominado eixo das ordenadas.

Estes eixos dividem o plano em quadrantes.

Exemplo 1: Localização no plano do ponto P com coordenadas $(x, y) = (a,b)$:

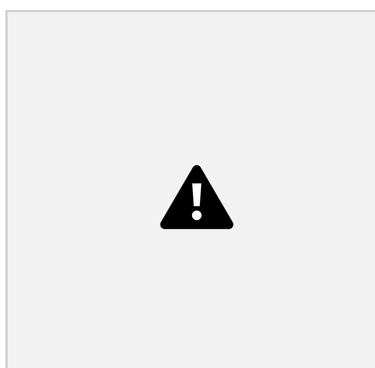


Figura 4.9: Demonstração do plano cartesiano com ponto P de coordenadas $(x, y) = (a,b)$

4.2.1 Par Ordenado

Definição: Para cada elemento *a* e cada elemento *b*, admitiremos a existência de um terceiro elemento (a,b) que denominamos par ordenado de modo que se tenha:

$$(a,b) = (c,d) \Longleftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

Exemplos:

Exemplo 1: Localize os pontos no plano cartesiano:
A(0, 2),B(0,−3),C(2, 5),D(−3, 4)

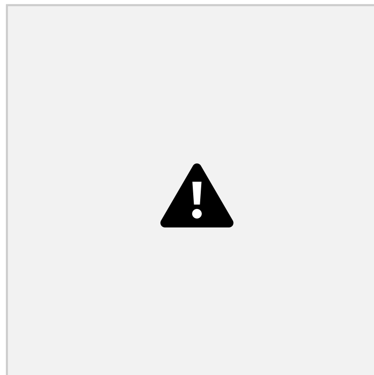


Figura 4.10: Localização dos pontos A, B, C e D no plano cartesiano

Exemplo 2: Calcular x e y de modo que os pares ordenados $(x+y, x-y)$ e (3, 5) sejam iguais:

Então:

$$\begin{cases} x + y = 3 \text{ (I)} \\ x - y = 5 \text{ (II)} \end{cases} \quad 2x = 8 \text{ (I + II)} \tag{4.1}$$

$$x = 4 \tag{4.2}$$

Pela equação (I) $(x + y = 3)$:

$$\begin{aligned} 4 + y &= 3 \\ y &= 3 - 4 \\ y &= -1 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Então $(x + y, x - y) = (4-1, 4+1) = (3, 5)$.

4.3 Exercícios Propostos

1. Descrever, conforme a notação da teoria dos conjuntos, os seguintes intervalos:

a) $[-1, 3]$

b) $[0, 2[$

c) $]-3, 4[$

d) $]-\infty, 5[$

e) $[1,+\infty[$

2. Utilizando a representação gráfica dos intervalos sobre a reta real, determinar $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo $A = [0, 3]$ e $B = [1, 4]$

3. Descrever os seguintes conjuntos:

a) $[0, 2] \cap [1, 3]$

b) $[0, 2] \cap]1, 3[$

c) $]-1, \frac{2}{3}[\cap]0, \frac{4}{3}[$

d) $]-\infty, 2] \cap [0,+\infty[$

4. Determinar os seguintes conjuntos:

a) $[-1, 3] \cup [0, 4]$

b) $]-2, 1] \cup]0, 5[$

c) $[-1, 3] \cup [3, 5]$

d) $[-\frac{1}{2}, 0[\cup]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}]$

5. Sendo $A = [0, 5[$ e $B =]1, 3[$, determinar C^B_A

4.3.1 Solução dos Exercícios Propostos

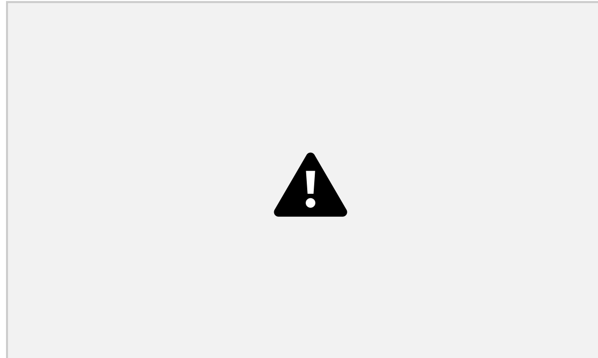
1. a) $[-1, 3] = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 3\}$

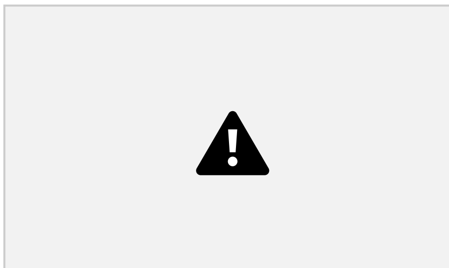
b) $[0, 2[= \{x \in R \mid 0 \leq x < 2\}x$

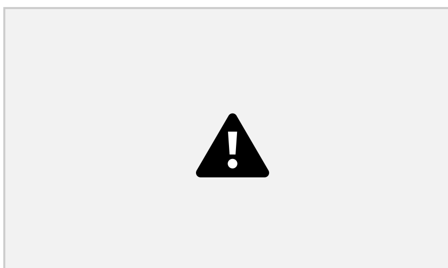
c) $]-3, 4[= \{x \in R \mid -3 < x < 4\}$

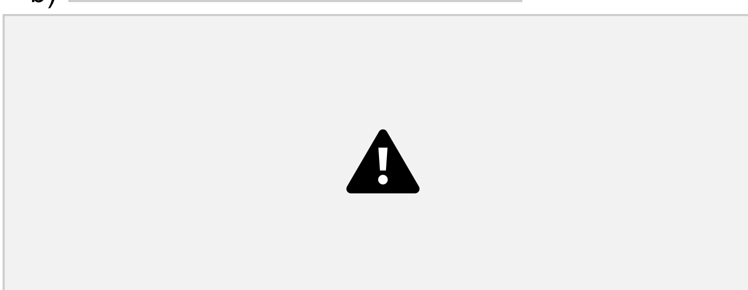
d) $]-\infty, 5[= \{x \in R \mid x < 5\}$

e) $[1,+\infty[= \{x \in R \mid x \geq 1\}$

2. 

3. a) 

b) 

5. 

Logo, $C^B_A = [0, 1] \cup [3, 5[$

NOTAS DE AULA 5

Produto Cartesiano

Definição: Sejam dois conjuntos não vazios A e B, denomina-se produto cartesiano de A por B o conjunto formado pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Observações:

1. Se A = *;* ou B = *;* por definição: A×B = *;*, isto é, A× *;* = *;* ou *;* ×B = *;*

2. Se A = B, podemos escrever o produto cartesiano A×A como A^2, isto é, $A \times A = A^2$

3. Sendo A e B não vazios, temos A×B *6*= B× A. Ou seja, não há comutatividade

4. Se A e B são conjuntos finitos com *m* e *n* elementos respectivamente, então A×B é um conjunto finito com *m* ×*n* elementos

5. Se A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então A×B é um conjunto infinito

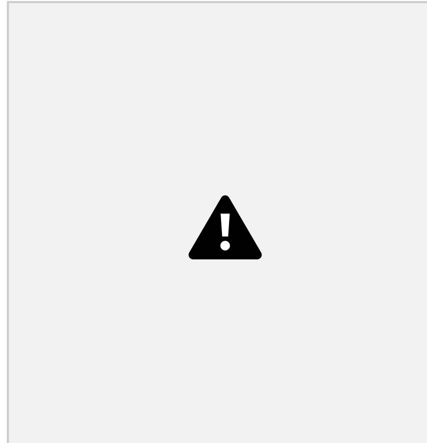
5.0.1 Exemplos

Exemplo 1: Se A = {1, 2, 3} e B = {1, 2} temos:

A×B = {1, 1, (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)}

B× A = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)}

As representações no plano cartesiano são as seguintes:



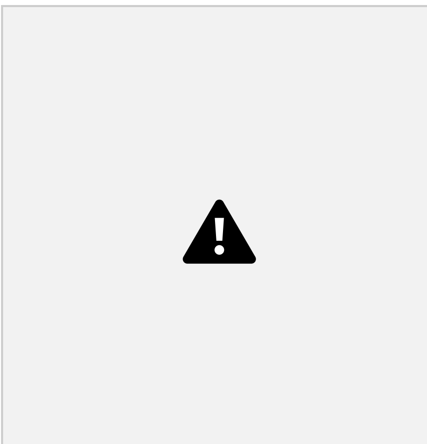


Figura 5.1: Representação de A×B Figura 5.2: Representação de B× A **Exemplo 2**: Se A = {x ∈ R | 1 ≤ x < 3 e B = {2}, logo A×B = {(x, 2)|x ∈ A e 2 ∈ B.

A representação gráfica de A×B dá como resultado o conjunto de pontos paralelo ao eixo x da figura abaixo:

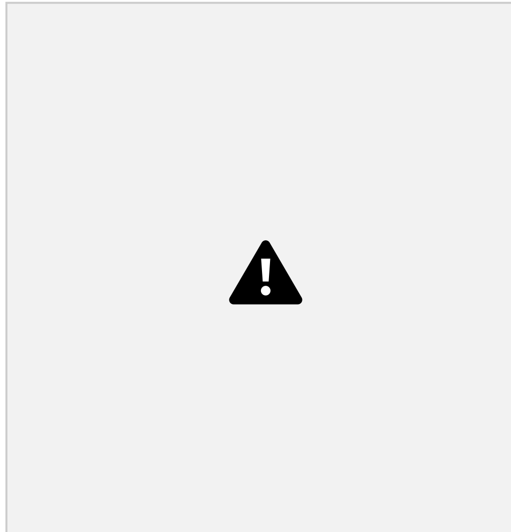


Figura 5.3: Representação no plano cartesiano de $A \times B = \{(x, 2) \mid x \in A \text{ e } 2 \in B\}$

Exemplo 3: Se $A = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 5\}$ temos $A \times B = \{(x, y) \in R^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 \leq y \leq 5\}$.

Graficamente é representado por um retângulo, distinto do anterior:

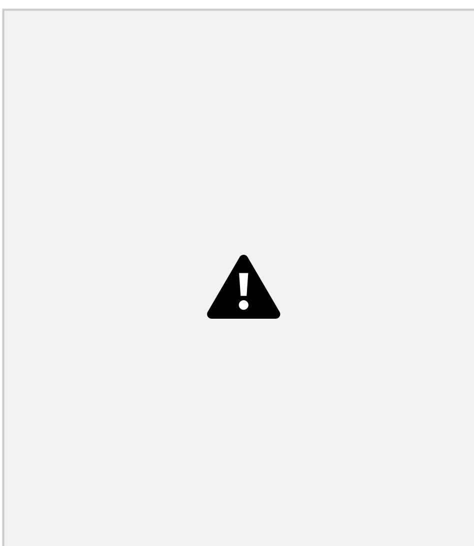


Figura 5.4: Representação no plano cartesiano de A×B

Observação: Como A e B são intervalos e produto cartesiano, neste caso será o conjunto dos pontos do plano hachurado na figura.

5.0.2 Exercícios Resolvidos

1. Dados $A = \{1,3,4\}$, $B = \{-2,1\}$ e $C = \{1,2\}$, determine e represente-os pelo gráfico cartesiano

   a) $A \times B$
      - **Solução**: $A \times B = \{(1,-2), (1, 1), (3,-2), (3, 1), (4,-2), (4, 1)\}$

   b) $B \times C$
      - **Solução**: $B \times C = \{(-2, 1), (-2, 2), (1, 1), (1, 2)\}$

   c) B^2
      - **Solução**: $B^2 = \{(-2,-2), (-2, 1), (1,-2), (1, 1)\}$

5.0.3 Exercícios Propostos

1. Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ e $C = \{1, 2\}$ determine:

   a) $A \times (B - C)$

   b) $B \times C^{C}_{A}$

   c) $(A - B) \times (A - C)$

2. Dados os conjuntos:

$$A = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 3\}$$
$$B = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 2\}$$
$$C = \{x \in R \mid -4 \leq x \leq 1\}$$

   Representar graficamente os produtos:

   a) $A \times B$

   b) $A \times C$

   c) $B \times C$

d) $C \times B$

Solução dos Exercícios Propostos

1. a) $\{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6)\}$

   b) $\{(2, 3), (4, 3), (6, 3)\}$

   c) $\{(1, 3), (3, 3)\}$

5.1 Número de Elementos do Produto Cartesiano

Observe:

• $A = \{0, 1, 2\} \Longrightarrow n(A) = 3$

• $B = \{2, 4\} \Longrightarrow n(B) = 2$

• $A \times B = \{(0, 2), (0, 4), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4)\}$

ä $A \times B \Longrightarrow n(A \times B) = 3.2 = 6$

Logo:

$$n(A \times B) = n(A).n(B)$$

Exemplo 1: Sabendo que $\{(1,2),(4,2)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 9$, represente pelos elementos o conjunto A^2.

• **Solução**: A^2 representa o quadrado do número de elementos de A, logo:

$$n(A^2) = [n(A)]^2 \Longrightarrow [n(A)]^2 = 9 \Longrightarrow n(A) = 3$$

Se A é um conjunto de 3 elementos, $(1,2) \in A^2$ e $(4,2) \in A^2$, logo concluímos que $A = \{1, 2, 4\}$, sendo assim:

$$\begin{aligned} A^2 = A \times A = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 4),\\ &(2, 1), (2, 2), (2, 4),\\ &(4, 1), (4, 2), (4, 4)\} \end{aligned}$$

Exercício: Se $\{(1,-2), (3, 0)\} \subset A^2$ e $n(A^2) = 16$, represente A^2 pelos seus elementos.

5.2 Relação Binária

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se relação binária de A em B todo sub conjunto R de A×B:

$$\text{R é uma relação binária de A em B} \Longleftrightarrow R \subset A \times B$$

Se eventualmente os conjuntos A e B forem iguais, todo subconjunto de A × A é chamado de relação binária em A.

$$\text{R é relação binária em A} \Longleftrightarrow R \in A \times A$$

Nomenclatura:

- A, conjunto de partida da relação R
- B, conjunto de chegada ou contradomínio da relação R
- Quando o par $(x, y) \in R$, escrevemos xRy
- Quando o par $(x, y) \notin R$ escrevemos x✓Ry.

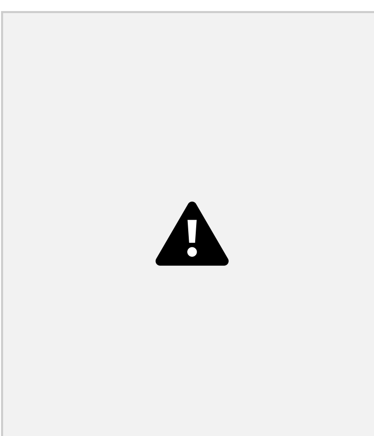
5.2.1 Exemplos

Exemplo 1: Se A = {1,2,3,4,5} e B = {1,2,3,4} quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) \mid x < y\}$ de A em B?

• **Solução**: Temos:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

Exemplo 2: Se A = {1,2,3,4,5} e B = {1,2,3,4,5,6} quais os elementos da relação binária R de A em B, assim definida: $xRy \Longleftrightarrow y = x + 2$



o: Fazem parte da relação todos os pares ordenados (x, y), tais que x $\in$ B tal que $y = x + 2$. Utilizando as representações gráficas, temos:

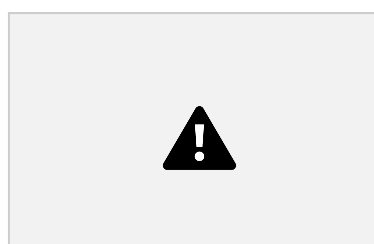


Figura 5.6: Domínio e imagem de R

Figura 5.5: Representação de ARB

NOTAS DE AULA 6

Domínio e Imagem

Definição: Se R é uma relação de A em B

- Chama-se domínio de R o conjunto D de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

$$x \in D \Longleftrightarrow \exists\, y, y \in B \mid (x, y) \in R$$

- Chama-se imagem de R o conjunto Im de todos os segundo elementos dos pares ordenados pertencentes a R.

$$y \in \mathrm{I}m \Longleftrightarrow \exists\, x, x \in A \mid (x, y) \in R$$

Da definição, temos:

$$D \subset A \text{ e } \mathrm{I}m \subset B$$

6.0.1 Exemplos

Exemplo 1: Se A = {0,2,3,4} e B = {1,2,3,4,5,6} qual é o domínio e imagem da relação R = $\{(x, y) \in A \times B \mid y$ é múltiplo de $x\}$

• **Solução**: Pelo esquema das flechas, notamos que D é o conjunto dos elementos de A, dos quais partem flechas e quem Im é o conjunto dos elementos de B aos quais chegam as flechas, logo:

R = {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4)}

D = {2, 3, 4} e Im = {2, 3, 4, 6}

Exemplo 2: Se $A = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \in R \mid 1 \leq y \leq 4\}$ qual o domínio e a imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$?

• **Solução**: Pela representação cartesiana temos:

$$D = \{x \in R \mid 1 \leq x \leq 2\} \text{ e}$$

$$\mathrm{I}m = \{y \in R \mid 2 \leq x \leq 4\}$$

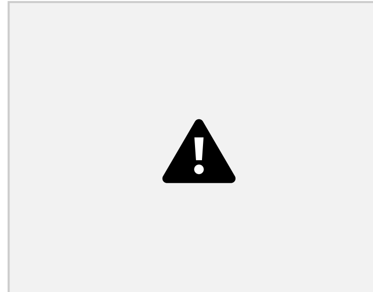


Figura 6.1: Representação de conjuntos para A×B

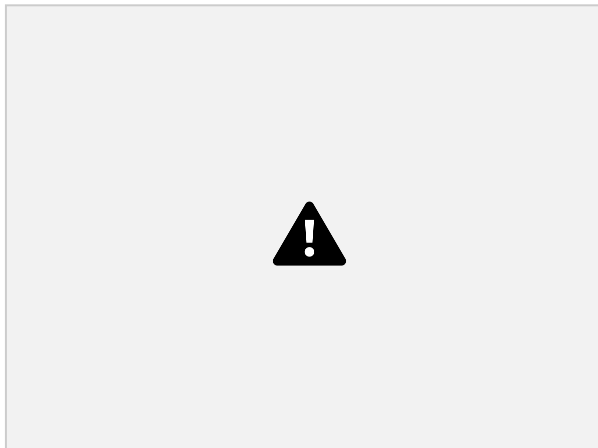


Figura 6.2: Representação cartesiana da relação R

6.0.2 Exercícios Resolvidos

1. Estabelecer o domínio(D) e a imagem(I*m*) das seguintes relações:

   a) $\{(1, 1), (1, 3), (2, 4)\}$

   $$D = \{1, 2\}$$
   $$Im = \{1, 3, 4\}$$

   b) $\left\{(2, 1), (1, -3), (5, \sqrt{2})\right\}$

   $$D = \{1, 2, 5\}$$
   $$Im = \left\{-3, 1, \sqrt{2}\right\}$$

c) $\{(1+\sqrt{2}, 2), (1-\sqrt{3}, 1)\}$

$$D = \{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{3}\}$$
$$Im = \{1, 2\}$$

2. Sejam os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ e $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ e R a relação binária de A e B, definida por:

$$x\mathrm{R}y \iff x = y^2$$

Pede-se:

a) Enumerar os pares ordenados de R

$$\mathrm{R} = \{(0, 0), (1,-1), (1, 1), (4,-2), (4, 2)\}$$

b) Enumerar os elementos do domínio e imagem de R

$$D = \{0, 1, 4\}$$
$$Im = \{-2,-1, 0, 1, 2\}$$

c) Fazer o gráfico cartes

y^2	x	(x, y)
$(-2)^2$	4	$(4,-2)$
$(-1)^2$	1	$(1,-1)$
$(0)^2$	0	$(0, 0)$
$(1)^2$	1	$(1, 1)$
$(2)^2$	4	$(4, 2)$

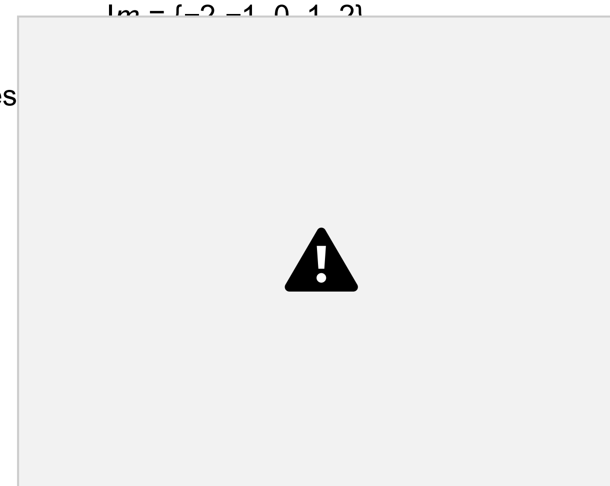


Figura 6.3: Representação gráfica da relação R entre os conjuntos A e B.

6.1 Relação Inversa

Definição: Seja uma relação binária R de A em B, consideramos o conjunto R^{-1} = {(y,x) ∈ B× A | (x, y) ∈ R}

Como R^{-1}é um subconjunto de B× A, então R^{-1}é uma relação binária de B em A a qual chamamos de relação inversa de R.

$$(y,x) \in R^{-1} \Longleftrightarrow (x, y) \in R$$

Ou seja, da definição que R^{-1}é o conjunto dos pares ordenados obtidos à partir dos pares ordenados de R, invertendo-se a ordem dos termos em cada par.

6.1.1 Exemplos

Exemplo 1: Se A = {2,3,4,5} e B = {1,3,5,7}, quais são os elementos de R, sendo R = {(x, y) ∈ A×B | $x < y$} e de R^{-1}?

• **Solução**:

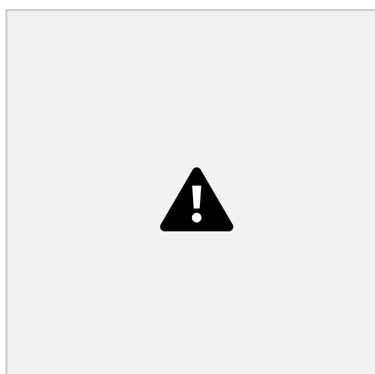


Figura 6.4: Esquema de flechas para ($x < y$)

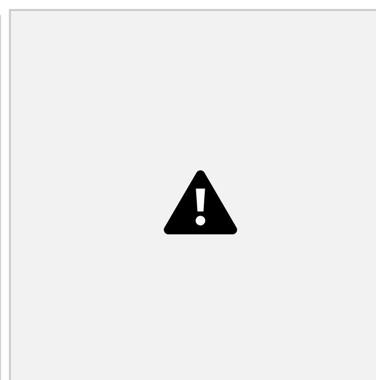


Figura 6.5: Esquema de flechas para ($y > x$)

$$R = \{(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (5, 7)\}$$
$$R^{-1} = \{(3, 2), (5, 2), (7, 2), (5, 3), (7, 3), (5, 4), (7, 5)\}$$

6.1.2 Propriedades

1. D(R^{-1} = Im(R)

2. $Im(R^{-1}) = D(R)$

3. $(R^{-1})^{-1} = R$

6.2 Funções

Definição: Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B, se e so mente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$.

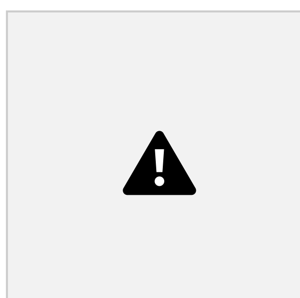
$$f \text{ é aplicação de A em B} \Longleftrightarrow (\forall x \in A, \exists y \in B \mid (x, y) \in f)$$

Com o auxílio do esquema de flechas, que condições deve satisfazer uma relação f de A em B para ser aplicação:

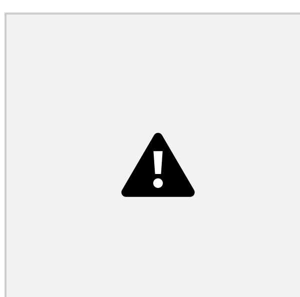
1. Todo $x \in A$ participe de pelo menos um par $(x, y) \in f$, isto é, todo elemento de A deve servir como ponto de partida de flecha

2. É necessário que cada elemento $x \in A$ participe de apenas um único par $(x, y) \in f$, isto é, cada elemento de A deve servir como ponto de partida de uma única flecha

1. Se existir um elemento de A do qual não parta flecha alguma



2. Se existir um elemento de A do qual partam 2 ou mais flechas



Observação: Uma relação f não é aplicação (ou função) se não satisfazer uma das condições acima.

NOTAS DE AULA 7

Polinômios

Definição: Um polinômio em x é qualquer expressão na forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$
$$f_1(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a^x{}_1 + a_0$$

Onde n é um número inteiro não negativo e a_n 6= 0. Os número $a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são números reais chamados <u>coeficientes</u>. O grau do polinômio é n. O coeficiente principal é a_n e a_0 é o termo independente.

7.1 Nomenclatura

Os polinômios com um, dois ou três termos são chamados monômios, binômios ou trinômios, respectivamente.

A forma padrão de um polinômio é com potências de x na <u>ordem crescente</u>.

Exemplo 1:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2$$

Onde: $a_0 = 2$ (termo independente) ,$a_1 = 1, a_2 = 5$,
$a_3 = 3$ e $a_4 = 1$ tendo-se o grau do polinômio igual a 4.

Exemplo 2: Identifique os polinômios pelos termos que os compõe:

a) $3x$ = monômio

b) $5abc$ = monômio

c) $3x + y$ = binômio

d) $5ab + 3cd^2$ = binômio

e) $x^2 + 3x + 7$ = trinômio

f) $3ab + 4xy - 10y$ = trinômio

Observações: Os trinômios são compostos por três monômios (3 termos), separa dos por operação de soma ou subtração.

Chama-se valor numérico de f em x a imagem de x pela função f , assim como por exemplo, dado o polinômio:

$$f(x) = 2 + x + x^2 + 3x^3$$

Onde o valor de $x = 2$, então:

$$f(2) = 2+(2)+(2)^2 +3(2)^3$$
$$f(2) = 2+2+4+24$$
$$f(2) = 32$$

Logo, a imagem de f no ponto $x = 2$ é 32.

Em particular, se x é um número real e f é um polinômio, tal que $f(x) = 0$ dizemos que x é "uma raiz"ou "um zero"de f . Por exemplo, os número -2 e -1 são raízes de:

$$f(x) = 2x + 3x^2 + x^3$$

pois:

$$f(-2) = 2(-2)+3(-2)^2 +(-2)^3 = 0$$
$$f(-1) = 2(-1)+3(-1)^2 +(-1)^3 = 0$$

7.2 Igualdade

Definição: Dizemos que dois polinômios f e g são igual (ou idênticos) quando assu mem valores numéricos iguais para todo $x \in$ R, ou seja:

$$f = g \Longrightarrow f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

7.3 Exercícios Resolvidos

1. Quais das expressões abaixo representam um polinômio na variável x?

   a) $x^5 + x^3 + 2$, Sim

   b) $0x^4 + 0x^2$, Sim

c) 3, Sim

d) $x^{\frac{5}{2}} + 3x^2$, Não

e) $(\sqrt{x})^4 + x + 2$, Sim

f) $x\sqrt{x} + x^2$, Não

g) x^{15}, Sim

h) $x + 2$, Sim

i) $x^2 + 2x + 3$, Sim

2. Dada a função polinomial

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

pede-se para calcular: $f(-3)$, $f(2x)$ e $f(f(-1))$

• **Solução**:
Temos que:

$$f(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 + (-3) + 1 = -20$$

$$f(2x) = (2x)^3 + (2x)^2 + (2x) + 1 = 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

$$f(f(-1)) \Longrightarrow$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$f(f(-1)) = f(0) = 1$$

7.4 Operações

7.4.1 Adição

Dados dois polinômios f e g, onde:

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n}$$

$$g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n}$$

Chama-se soma de f com g o polinômio:

$a_i x^i$ $b_i x^i$

$(f+g)(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots+(a_n+b_n)x^n$

isto é: $(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i$

Exemplo 1: Somar $f(x) = 4+3x+x^2$ e $g(x) = 5+3x^2+x^4$:

$$f(x) = 0x^4+0x^3+1x^2+3x+4$$
$$g(x) = 1x^4+0x^3+3x^2+0x+5$$

$$(f+g)(x) = 1x^4+0x^3+4x^2+3x+9$$

7.4.2 Substração

Dados dois polinômios f e g, segue pela definição anterior de adição, que: $(f-g)(x) = (a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+\ldots+(a_n-b_n)x^n$

isto é: $(f-g)(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i-b_i)x^i$

7.4.3 Multiplicação

Dados dois polinômios f e g, onde:

$f = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n = \sum_{i=0}^{n}$

$g = b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n = \sum_{i=0}^{n}$

polinômio:

$a_i x^j b_i x^j$

$i=0$

Chama-se produto $f.g$ o

$$(f.g)(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_0 + a_0b_2)x^2 + ... + a_mb_nx^{m+n}$$

Exemplo 1:

1. Multiplicar $f(x) = 3x^3 + 2x + x$ e $g(x) = 6x^2 + 5x + 4$, temos:

$$(f.g)(x) = (3x^3 + 2x + x)(6x^2 + 5x + 4)$$
$$(f.g)(x) = 3x^3(6x\text{š}+5x + 4) + 2x(6x^2 + 5x + 4) + x(6x^2 + 5x + 4)$$
$$= 18x^5 + 15x^4 + 12x^3 + 12x^3 + 10x^2 + 8x + 6x^3 + 5x^2 + 4x$$
$$= 18x^5 + 15x^4 + 30x^3 + 15x^2 + 12x$$

NOTAS DE AULA 8

Polinômios - Continuação

Aviso: Estudar os dispositivos práticos 1 e 2 página 55F do livro Fundamentos de matemática elementar: Polinômios.

8.1 Propriedades

as operações seguem as propriedades:

1. Associativa: $f\,(g\,h) = (f\,g\,)h, \forall f\,,\, g\,,h \in$ P
2. Comutativa:$f\,g = g\,f\,, \forall f\,,\, g \in$ P
3. Elemento Neutro: $\exists\, en \in$ P | $f\,.en = f\,, \forall f \in$ P
4. Distributiva: $f\,(g\,+h) = f\,g + f\,h, \forall f\,,\, g\,,h \in$ P

8.2 Divisão

Definição: Dados dois polinômios f (dividendo) e g 6= 0 (divisor), dividir f por g é determinar dois outros polinômios q (quociente) e r (resto), de modo que se atenda as seguintes condições:

i) $q.g + r = f$

ii) $\delta r < \delta g$ (ou $r = 0$ para divisão exata)

Dividendo Divisor

Resto Quociente

Tabela 8.1: Método da chave para divisão de números reais e para polinômios

8.2.1 Método da Chave

O método da chave descreve o procedimento usado para divisões de números reais, ou seja:

Logo, para divisão de polinômios usando tal método, temos:

$f\,(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ dividendo

$g\,(x) = x - 4$ divisor

Logo:

$2x^3 -7x^2 +4x -1 \quad x -4$

$-2x^3 +8x^2 \quad 2x^2 + x +8$

$x^2 +4x -1$

$-x^2 +4x$

$8x -1$

$-8x +32$

31

Tabela 8.2: Divisão de polinômios f por g utilizando método da chave

Logo, a divisão de f por g nos dá $2x^2 + x +8$ como coeficiente e resto $r = 31$. Neste tipo de divisão, r é um polinômio constante, pois:

$$\delta g = 1 \Longrightarrow \delta r = 0 \text{ ou } r = 0$$

Notemos, finalmente que:

$$\begin{aligned} f(4) &= 2(4)^3 -7(4)^2 +4(4)-1 \\ &= 128-112+16-1 \\ &= 31 = r \end{aligned}$$

8.2.2 Exercícios Resolvidos

1. Dividir $f(x) = 3x^5 -6x^4 +13x^3 -9x^2 +11x -1$ por $g(x) = x^2 -2x +3$. •
   Solução:
   Temos a operação dada por:

$3x^5 -6x^4 +13x^3 -9x^2 +11x -1 \quad x^2 -2x +3$

$-3x^5 +6x^4 -9x^3 \quad 3x^3 +4x -1$

$4x^3 -9x^2 +11x -1$

$-4x^3 +8x^2 -12x$

$-x^2 - x -1$

$x^2 -2x +3$

$-3x +2$

Com resultado:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 3x^3 +4x -1 + \frac{-3x +2}{x^2 -2x +3}$$

2. Determinar a de modo que a divisão de $f(x) = x^4 -2ax^3 +(a+2)x^2 +3a +1$ por $g(x) = x -2$ apresente resto igual a 7.

• **Solução**:

Quando temos a divisão de um polinômio f com $\delta f \geq 1$, por um outro polinômio g com $\delta g = 1$, notamos que f aplicada à raiz de g, nos dá o resto da divisão de f po g. Assim:

$$g(x) = x -2$$
$$0 = x -2$$
$$x = 2 \Longrightarrow f(2) = 7$$

E assim:

$$(2)^4 -2a(2)^3 +(a+2)(2)^2 +3a +1 = 7$$
$$16-16a +4a +8+3a +1 = 7$$

$$-9a + 25 = 7$$
$$-9a = -18$$
$$a = \frac{18}{9}$$
$$a = 2$$

8.2.3 Exercícios Propostos

1. Dividir $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 6x + 7$ por $g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

Solução dos Exercícios Propostos

1.

8.3 Produtos Notáveis

Os produtos notáveis obedecem a leis especiais de formação, e por isso sua utilização permite agilizar determinados tipos de cálculos que, pelas regras normais da multipli cação de expressões, ficariam mais longos. Os produtos notáveis apresentam-se em grande número e dão origem a um conjunto de identidades de grande aplicação.

8.3.1 Quadrado da soma de dois termos

Seja $a,b \in$ R, tais que:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

8.3.2 Quadrado da diferença de dois termos

Seja $a,b \in$ R, tais que:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

8.3.3 Cubo da soma de dois termos

Seja $a,b,c \in$ R, tais que:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

notemos que o número de termos é 4, pois obedecemos $n + 1$, com $n = 3$ neste caso. O sinal de positivo se mantém e decrescemos a potência a partir do primeiro elemento *a* e a partir do primeiro elemento*b*.

8.3.4 Cubo da diferença de dois termos

Seja $a,b \in$ R, tais que:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

8.3.5 Produto da soma pela diferença de dois termos

O produto da soma pela diferença dos mesmos dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo, ou seja:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

8.3.6 Exemplos

Exemplo 1: $(x + 7)^2 = x^2 + 2x7 + 7^2 = x^2 + 14x + 49$

Exemplo 2: $(x - 4)^2 = x^2 + 2x4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$

Exemplo 3: $(x + 7)^3 = x^3 + 3x^27 + 3x7^2 + 7^3 = x^3 + 21x^2 + 147x + 343$

Exemplo 4: $(x - 4)^3 = x^3 - 3x^24 + 3x4^2 + 4^2 = x^3 - 12x^2 + 48x + 16$

Exemplo 5: $(x + 7)(x - 7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$

8.4 Triângulo de Pascal

Para se obter a soma ou diferença de dois termos elevados à potências superiores, utilizamos um método prático chamado de triângulo de Pascal. Logo, segue:

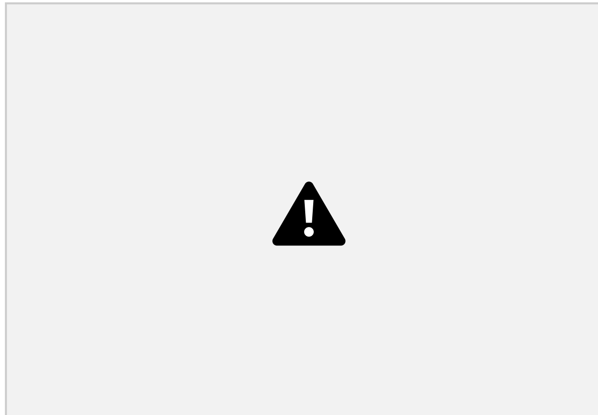


Figura 8.1: Triângulo de Pascal

8.4.1 Exemplos de uso

Exemplo 1: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Exemplo 2: $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Os produtos notáveis têm aplicação direta na fatoração para cálculo usando funções polinomiais.

NOTAS DE AULA 9

Funções e Não Funções

1. A relação de f de A em R, com $A = \{x \in R \mid -1 \leq x \leq 3\}$ é função pois toda reta vertical conduzida pelos pontos $x \in A$ encontra o gráfica de f num só ponto.

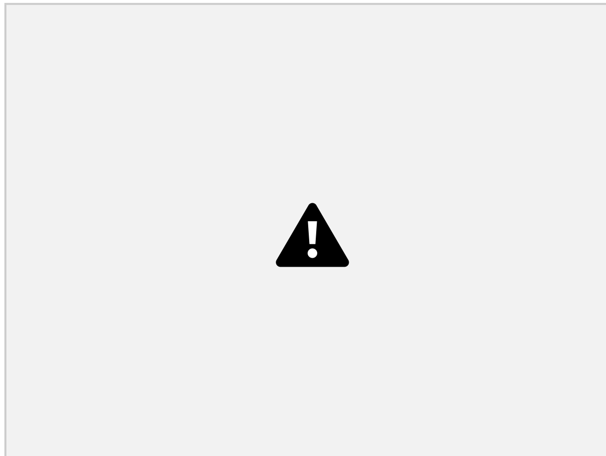
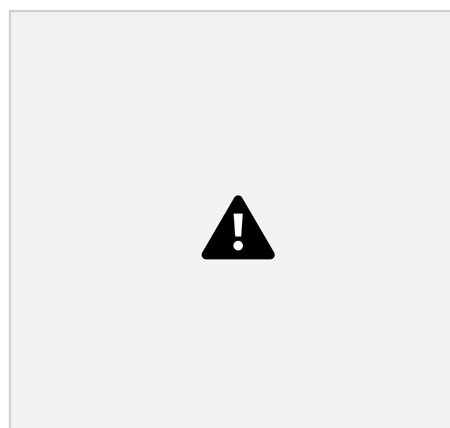


Figura 9.1: Demonstração de função *f*

2. A relação *f* de A em R, onde A = $\{x \in R \mid -2 \leq x \leq 2\}$ não é função, pois há retas verticais que encontra o gráfico de *f* em 2 pontos.



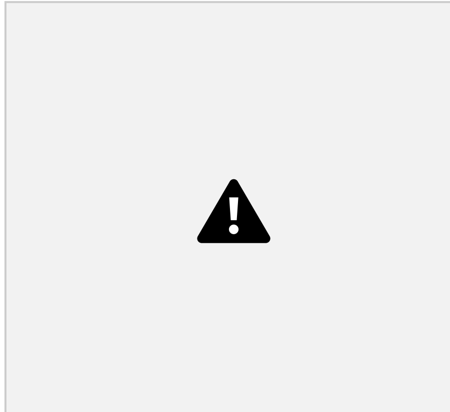


Figura 9.2: A = {x ∈ R | −2 ≤ x ≤ 2}

3. A função f de A em R, com A = {x ∈ R | 0 ≤ x ≤ 4} não é função de A em R, pois a reta vertical conduzida pelo ponto (1,0) não encontra o gráfico de f . Se f fosse função de B em R, onde B = {x ∈ R | 2 ≤ x ≤ 4} poderíamos observar uma função f .

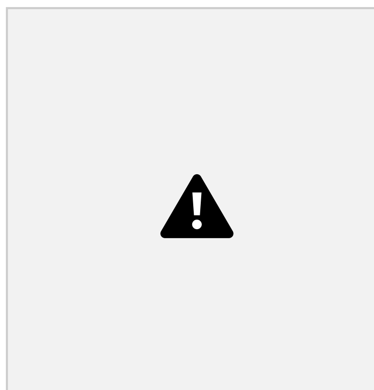
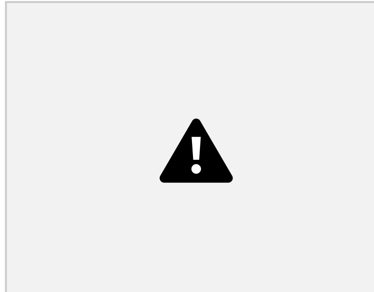
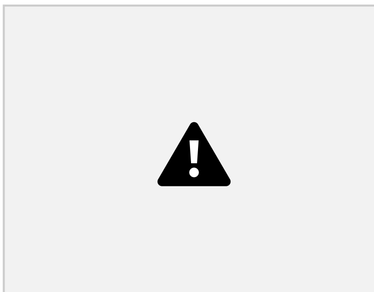


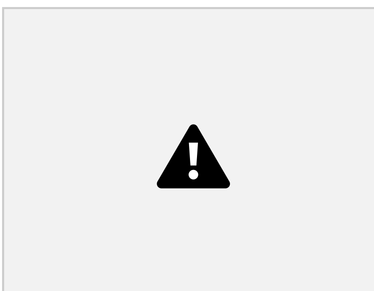
Figura 9.3: Função f de A em R

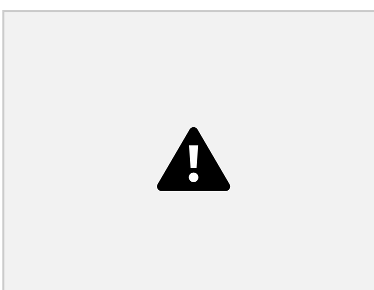
9.1 Exercícios Resolvidos

1. Quais dos esquemas abaixo definem uma função de A = {0,1,2} em B = {−1,0,1,2}?

a) 

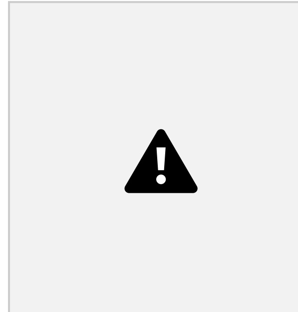
b) 

c) 

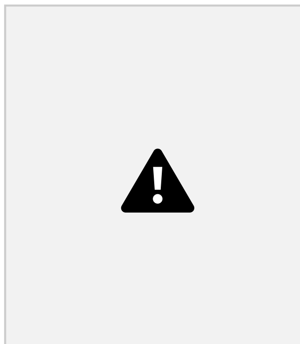
d) 

• **Solução**: Esta é a alternativa correta, pois o conjunto de partida é A = {0,1,2} e o conjunto de che gada é B = {−1, 0, 1, 2}.

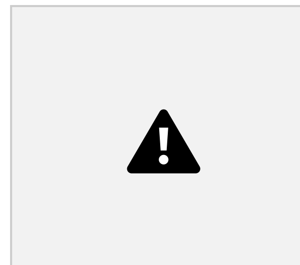
2. Quais das relações de R em R, cujos gráficos aparecem abaixo, são funções? Justifique.

a) 

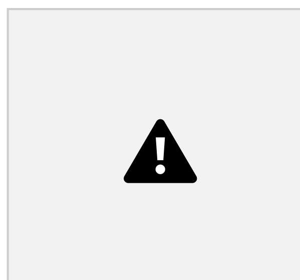
• **Solução**: É função.

b) 

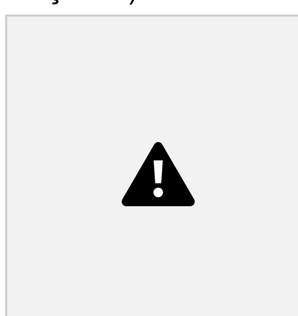
• **Solução**: Não é função.

c) 

• **Solução**: Não é função.

d) 

• **Solução**: É função.

e) 

• **Solução**: É função.

f)

• **Solução**: Não é função.

9.2 Notação de Funções

Existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual dado $x \in A$ determina-se $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, então $f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ e $f(x) = y$ e significa que dados ons conjuntos A e B a função f tem a lei de correspondência $y = f(x)$. Indicando tal correspondência $y = f(x)$, temos:

$$
\begin{aligned}
f : A &\mapsto B \\
x &\mapsto f(x)
\end{aligned}
\qquad \text{ou } f : A \overset{f}{\longmapsto} B \quad x \mapsto f(x)
$$

9.2.1 Exemplos

Exemplo 1: Associa $x \in A$ e $y \in B$ tal que $y = 2x$:

• **Solução**:

$$
\begin{aligned}
f : A &\mapsto B \\
x &\mapsto 2x
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: A cada $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, associa $y = x^2$:

• **Solução**:

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\
x &\mapsto x^2
\end{aligned}
$$

Exemplo 3: A cada $x \in \mathbb{R}_+$ e $y \in \mathbb{R}$ associa $y = \sqrt{x}$:

• **Solução**:

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R}_+ &\mapsto \mathbb{R} \\
x &\mapsto \sqrt{x}
\end{aligned}
$$

9.2.2 Exercícios Resolvidos

1. Seja a função:

$$f : R \mapsto R$$
$$x \mapsto 2x + 1$$

então calcule a imagem de 0 pela aplicação f.

$$f(0) = 2(0)+1$$
$$f(0) = 1$$

2. Qual a notação das seguintes funções de R em R:

   a) f associa a cada número real ao seu oposto:
      • **Solução**:

$$f : R \mapsto R$$
$$x \mapsto -x$$

   b) g associa cada úmero real ao seu cubo:
      • **Solução**:

$$g : R \mapsto R$$
$$x \mapsto x^3$$

9.2.3 Exercícios Propostos

1. Seja a função:

$$f : R \mapsto R$$
$$x \mapsto 2x + 1$$

então calcule a imagem de -2 pela aplicação de f.

2. Qual a notação das seguintes funções de R em R:

   a) h associa a cada número real ao seu quadrado menos -1:

b) *k* associa a cada número real ao número 2:

Solução dos Exercícios Propostos

1.

$$
\begin{aligned}
f(-2) &= 2(-2)+1 \\
&= -4+1 \\
f(-2) &= -3
\end{aligned}
$$

2. a)

$$
\begin{aligned}
h : R\ 7&\to R \\
x\ 7&\to x^2 - 1
\end{aligned}
$$

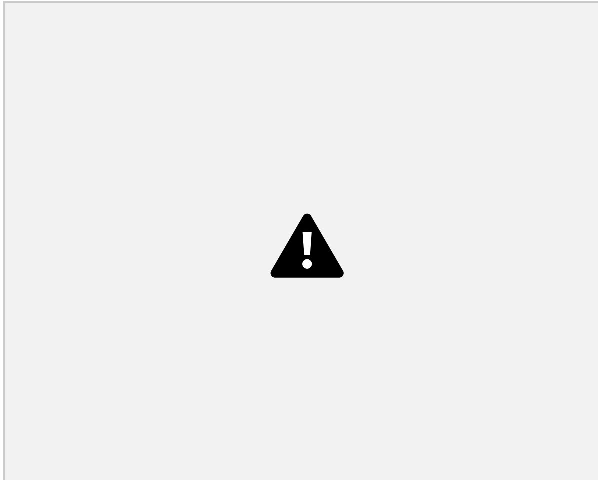
b)

$$
\begin{aligned}
k : R\ 7&\to R \\
x\ 7&\to 2
\end{aligned}
$$

9.3 Domínio e Imagem de Funções

Definição: Domínio é o conjunto D dos elementos $x \in$ A, para os quais $\exists\, y \in$ B | $(x, y) \in f$. Domínio é o conjunto de partida, D = A.

Imagem é o conjunto I*m* dos elementos $y \in$ B, para os quais $\exists\, x \in$ A | $(x, y) \in f$. Imagem é o subconjunto do contradomínio, logo notado por I*m* $\subset$ B.



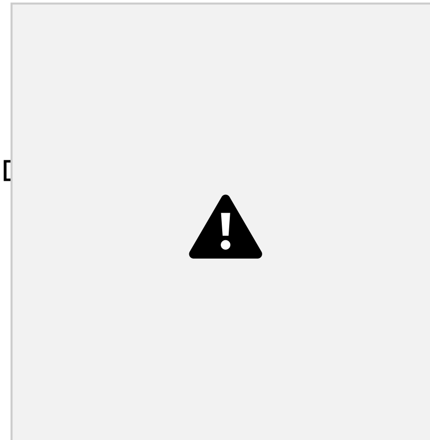
Pela representação cartesiana, temos:

- D é o conjunto dos pontos da abscissa, tais que as retas verticais conduzidas por estes pontos interceptam o gráfico de *f* .

- I*m* é o conjunto dos pontos da ordenada, tais que as retas horizontais conduzidas por esses pontos interceptam o gráfico de *f* .

9.3.1 Exemplos

Exemplo 1: D = $\{x \in R \mid -2 \leq x \leq 1\}$ I*m* = $\{y \in R \mid 0 \leq y \leq 4\}$

Exemplo 2: D  $\in \mathbb{R} \mid -1 \le y \le 4\}$

Exemplo 3: D = $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 0$ ou $1 < y < 2\}$

Exemplo 4: D = $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$ Im = $\{1, 2\}$

9.3.2 Exercícios Propostos

1. Dar o domínio da seguintes funções reais:

a) $f(x) = 3x + 2$;

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$;

e) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x-3}$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$;

f) $f(x) = \frac{1}{x+2}$;

Solução dos Exercícios Propostos

1. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

d) $D(f) = \mathbb{R}$

e) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ f) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

NOTAS DE AULA 10

Função do Primeiro Grau

10.1 Função Constante

Definição: Uma aplicação de f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função constante, quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa sempre o elemento $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto k \end{aligned}$$

O gráfico da função constante é uma reta passando pelo ponto $(0,k)$

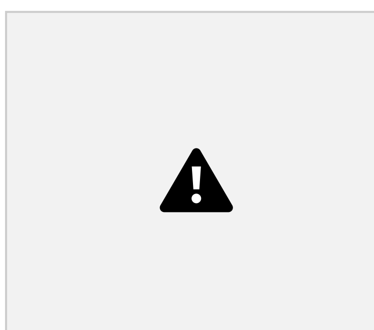


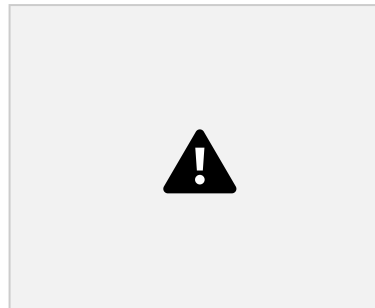
Figura 10.1: $Im = \{k\}$

10.1.1 Exemplos

Construir os gráficos das aplicações de R em R definida por:

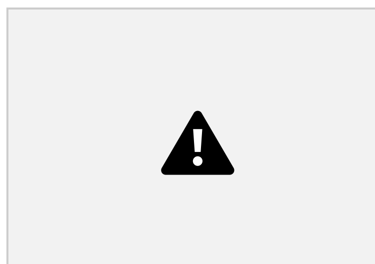
Exemplo 1: $y = 3$

• **Solução**:



Exemplo 2: $y = -1$

• **Solução**:



10.2 Função Identidade

Definição: *f* : R 7→ R recebe o nome de função identidade quando cada elemento *x* ∈ R, associa o próprio *x*, isto é:

f : R 7→ R

x 7→ *x*

O gráfico é uma reta que contém as bissetrizes de 1^oe 3^o quadrantes:

10.3 Função Linear

Definição: *f* : B 7→ R recebe o nome de função linear quando a cada elemento *x* ∈ R associa o elemento de *ax* ∈ R dado:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax, a \neq 0$$

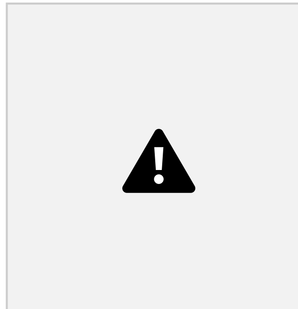
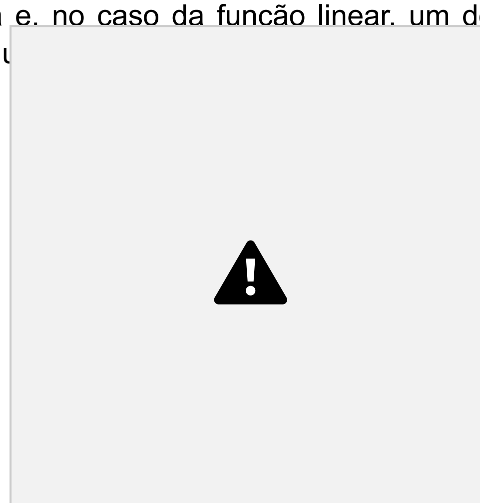


Figura 10.2: Im = $\mathbb{R}$

10.3.1 Exemplos

Exemplo 1: Construir o gráfico da função $y = 2x$ considerando que dois pontos destintos determinam uma reta e, no caso da função linear, um dos pontos é a origem, logo basta atribuir a x u ... ondente $y = 2x$.



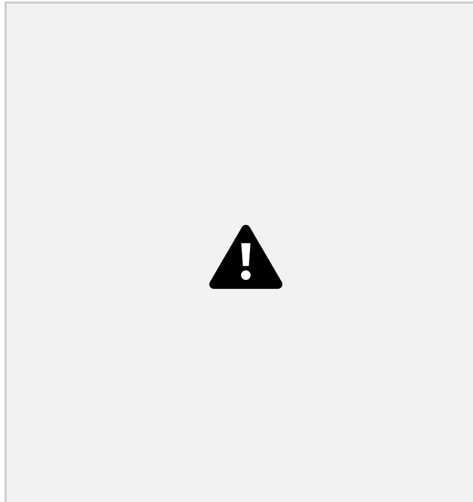
• **Solução**:

x	$2x$
0	0
1	2

Pelos pontos P(0, 0 e Q(1, 2), traçamos a reta PQ que é o gráfico da função. **Exemplo 2**: Construir o gráfico da função $y = -2x$. Logo, temos:

• **Solução**:

x	$2x$
0	0
1	−2

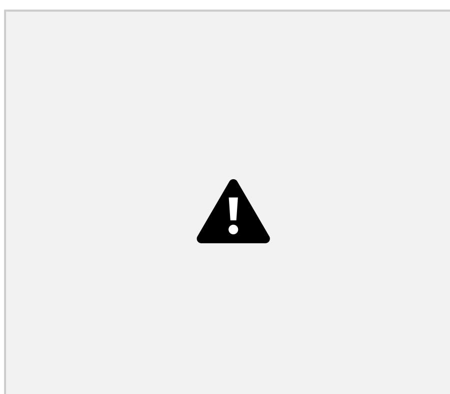


10.3.2 Exercícios Resolvidos

1. Construir o gráfico das funções de R em R

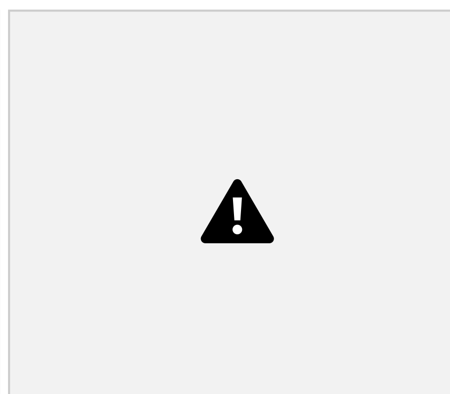
a) $y = 2$

• **Solução**:



b) $y = \sqrt{2}$

• **Solução**:



10.3.3 Exercícios Propostos

1. Construir, num mesmo sistema cartesiano, so gráficos das funções

(a) $y = x$

(b) $b = 3x$

Solução dos Exercícios Propostos 1.

10.4 Função Afim

(c) $y = -x$ (d) $y = -3x$

Definição: f : R 7→ R recebe o nbome de função afim quando cada $x \in$ R estiver a ssociado a um elemento ($ax + b$) $\in$ R, com a 6= 0, ou seja:

f : R 7→ R
x 7→ $ax + b$,a 6= 0

10.4.1 Exemplos

Exemplo 1: $y = 3x + 2$

- **Solução**: $a = 3$ e $b = 2$

Exemplo 2: $-2x + 1$

- **Solução**: $a = -2$ e $b = 1$

Exemplo 3: $y = x - 3$

- **Solução**: $a = 1$ e $b = -3$

Exemplo 4: $y = 4x$

- **Solução**: $a = 4$ e $b = 0$

10.4.2 Exercícios Propostos

1. Construir o gráfico cartesiano das funções de R em R:

   a) $y = 2x - 1$

   b) $y = x + 2$

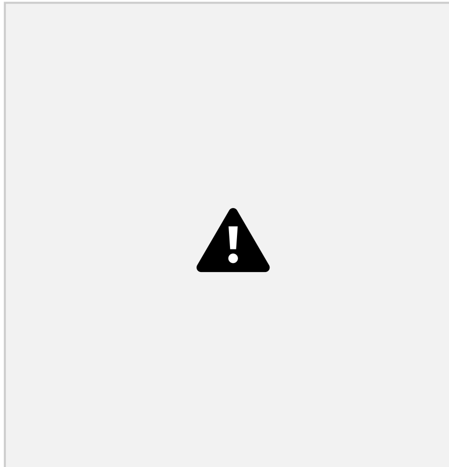
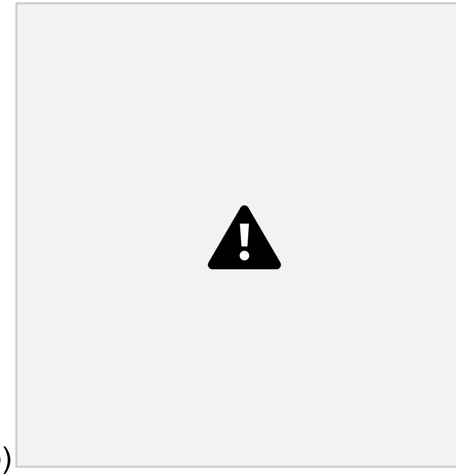
   c) $y = 3x + 2$

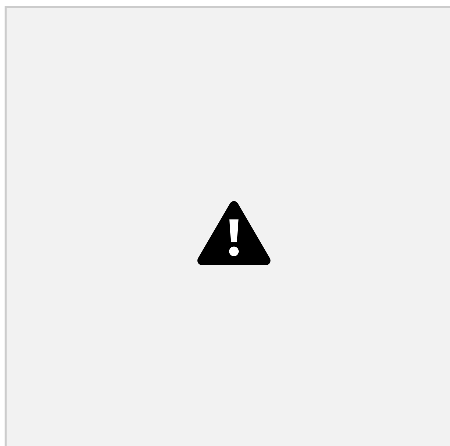
   d) $y = \frac{2x-3}{2}$

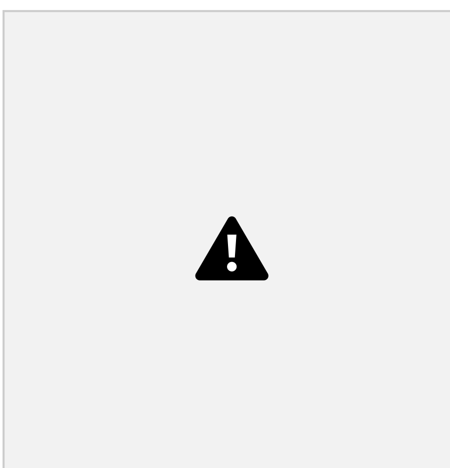
2. Resolver analiticamente e graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = -3 & \text{(I)} \\ 2x + 3y = 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Solução dos Exercícios Propostos

1. a)  b) 

c)  d)



2. Temos duas maneiras distintas para resolução: a) por substituição e b) por adição. a) $x - y = -3 \Longrightarrow x = y - 3$. Substituindo em (II), temos:

$$2(y-3)+3y = 4$$

$$2y-6+3y = 4$$

$$5y = 10$$
$$y = 2$$

Logo, substituindo $y = 2$ em (I), temos:

$$x - 2 = -3$$
$$x = -1$$

Assim $(x, y) = (-1, 2)$

b) Multiplicando-se (I) por 3 e somando-se as duas expressões termo a termo, obtemos:

$$\begin{cases} 3x - 3y = -9 \text{ (I)} \\ 2x + 3y = 4 \text{ (II)} \end{cases} \Longrightarrow 5x = -5$$

Então, substituindo-se $x = -1$ em (I) e/ou (II) temos:

$$\text{(I) } -1 - y = -3 \Longrightarrow -y = -2 \Longrightarrow y = 2$$
$$\text{(II) } 2(-1) + 3y = 4 \Longrightarrow -2 + 3y = 4 \Longrightarrow 3y = 6 \Longrightarrow y = 2$$

Assim $(x, y) = (-1, 2)$

NOTAS DE AULA 11

Função do Primeiro Grau

11.1 Coeficientes da Função Afim

O coeficiente a da função $f(x) = ax+b$, é denominado coeficiente angular ou declividade da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente b da função $f(x) = ax+b$ é denominado coeficiente linear.

11.1.1 Exercícios Resolvidos

1. Obter a equação da reta que passa pelo ponto (1,3) e tem coeficiente angular igual a 2.

• **Solução**
A equação de interesse é $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$. Se o coeficiente angular é 2, temos $a = 2$.

Substituindo-se $x = 1$, $y = 3$ e $a = 2$ em $y = ax + b$, temos:

$$3 = (2)(1) + b$$

$$b = 1$$

Logo, a equação procurada é:

$$y = 2x + 1$$

2. Obter a equação da reta que passa pelo ponto $(-2,4)$ e tem coeficiente angular ingual a -3.

• **Solução**

Se $x = -2$, $y = 4$ e $a = -3$, logo $f(x) = ax + b$ ou $y = ax + b$ é gual a: 4

$$= (-3)(-2) + b$$

$$b = -2$$

Logo, a equação procurada é:

$$y = -3x - 2$$

3. Obter a equação da reta que passa pelo ponto $(-2,1)$ e tem coeficiente linear igual a 4.

• **Solução**

Tendo-se $y = ax + b$, logo $x = -2$, $y = 1$ e $b = 4$ nos dando:

$$1 = a(-2) - 4$$

$$a = \frac{3}{2}$$

E assim:

$$y = \frac{3}{2}x + 4$$

11.2 Zero da Função Afim

O zero de uma função é todo ponto x, onde a função é nula, ou seja, a imagem no ponto x é igual a zero.

$$x \text{ é zero de } y = f(x) \Longleftrightarrow f(x) = 0$$

Logo, para determinarmos o zero da função afim, basta resolver a equação do primeiro grau:

$$ax + b = 0$$

Que apresenta uma única solução dada por:

$$x = -\frac{b}{a}$$

De fato, resolvendo a equação, temos:

$$ax + b = 0 \overset{a \neq 0}{\Longleftrightarrow} ax = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Exemplo 1