Capítulo 1

Integrales sobre curvas

1.1. Integrales de campos escalares sobre curvas

Definición 1.1: Parametrización

Llamamremos **parametrización** a toda función $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2: Curva suave

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{C}$ es una **curva suave** $\iff$ existe una parametrización $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{C} = \alpha(I)$

Definición 1.3: Inmersión

Consideremos una parametrización $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Diremos que α es una **inmersión** $\iff \begin{cases} 1.\ \alpha \text{ es de clase } C^1 \\ 2.\ \alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I \end{cases}$

Definición 1.4: Curva regular

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{C}$ es una **curva regular** $\iff$ existe una inmersión $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{C} = \alpha(I)$

Definición 1.5: Curva simple

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{C}$ es una **curva simple** $\iff$ existe una inmersión $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{C} = \alpha(I)$ y además α es inyectiva en el interior de I

Definición 1.6: Curva cerrada

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{C}$ es una **curva cerrada** $\iff$ existe una inmersión $\alpha : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{C} = \alpha(I)$ y se cunple que $\alpha(a) = \alpha(b)$

Definición 1.7: Cambio de parámetros

Consideramos una función $h : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$.
Diremos que
h es un **cambio de parámetros** $\iff \begin{cases} 1)\ h \text{ es de clase } C^1 \\ 2)\ h'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I \end{cases}$

Proposición 1.1

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de clase C^1 de una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ y $h : I \to \mathbb{R}^3$ un cambio de parámetros, y sea $J = h(I)$.
Entonces
(1) la función

$$\beta \overset{\text{def}}{=} \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$$

es una parametrización de clase C^1 de la curva $\mathcal{C}$, llamada **reparametrización** de α a través del cambio de parámetros h.
(2) Si α es inyectiva entonces β también es inyectiva.
(3) Si α es una inmersión entonces β también es una inmersión.

Proposición 1.2

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ son dos inmersiones inyectivas de una misma curva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ entonces existe un cambio de parámetros $h : I \to \mathbb{R}$ con $h(I) = J$ tal que $\beta = \alpha \circ h^{-1}$

Definición 1.8: Integral de un campo escalar sobre una curva

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular simple y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{C}$. Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión de la curva $\mathcal{C}$ definimos la integral del campo escalar f sobre la curva $\mathcal{C}$ como:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f ds \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(\alpha(t)) \; ||\alpha'(t)||dt} \tag{1.1}$$

Teorema 1.1: Independencia respecto a la parametrización

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular simple y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{C}$.
Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ y $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ son dos inmersiones inyectivas de la curva $\mathcal{C}$ entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(\alpha(t))||\alpha'(t)||dt = \int_c^d f(\beta(s))||\beta'(s)||ds$$

Demostración
Por la proposición 1.1 y 1.2 sabemos que β es una reparametrización de α a través de un cambio de parámetros $h : [a, b] \to [c, d]$ esto es:

$$\alpha = \beta \circ h$$

Primer caso: Si $h'(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$ la función $h : [a, b] \to [c, d]$ es creciente y se cumple que

$$\begin{cases} h(a) = c \\ h(b) = d \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\alpha(t))||\alpha'(t)||dt \quad &= \int_a^b f(\beta(h(t)))||[\beta(h(t))]'||dt \\ &= \int_a^b f(\beta(h(t)))||\beta'(h(t))h'(t)||dt \\ &= \int_a^b f(\beta(h(t)))||\beta'(h(t))||h'(t)dt \\ &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(\beta(s)||\beta'(s)||ds \\ &= \int_c^d f(\beta(s)||\beta'(s)||ds \end{aligned}$$

Segundo caso: Si $h'(t) < 0 \quad \forall t \in [a, b]$ la función $h : [a, b] \to [c, d]$ es decreciente y se cumple que

$$\begin{cases} h(a) = d \\ h(b) = c \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\alpha(t))||\alpha'(t)||dt &= \int_a^b f(\beta(h(t)))||[\beta(h(t))]'||dt \\
&= \int_a^b f(\beta(h(t)))||\beta'(h(t))h'(t)||dt \\
&= -\int_a^b f(\beta(h(t)))||\beta'(h(t))||h'(t)dt \\
&= -\int_{h(a)}^{h(b)} f(\beta(s)||\beta'(s)||ds \\
&= -\int_d^c f(\beta(s)||\beta'(s)||ds \\
&= \int_c^d f(\beta(s)||\beta'(s)||ds
\end{aligned}$$

1.2. Integrales de campos vectoriales sobre curvas

Definición 1.9: Espacio de direcciones tangente

Sea $\mathcal{C}$ una curva regular y simple en $\mathbb{R}^3$ y $p \in \mathcal{C}$.
Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión inyectiva de la curva $\mathcal{C}$ existe un único $t \in I$ tal que

$$p = \alpha(t)$$

Definimos el **espacio de direcciones tangentes** $\mathcal{C}$ en p, y lo indicamos por $T_p(\mathcal{C})$, al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $\alpha(t)$, esto es

$$T_p(\mathcal{C}) \overset{\text{def}}{=} [\alpha'(t)]$$

Y diremos que
$v \neq 0$ es una **dirección tangente** a $\mathcal{C}$ en $p \iff v \in T_p(\mathcal{C})$

Definición 1.10: Orientación

Sea $\mathcal{C}$ una curva regular y simple en $\mathbb{R}^3$.
Un campo vectorial $\vec{T} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ es una **orientación** en $\mathcal{C} \iff$ cumple las siguientes propiedades:

1. $\vec{T}$ es continuo
2. $\vec{T}$ es un versor (esto es $||\vec{T}|| = 1$)
3. $\vec{T}(p)$ es una dirección tangente a $\mathcal{C}$ en p (esto es $\vec{T}(p) \in T_p(\mathcal{C})$)

Una **curva orientada** es una curva en la cual hemos elegido una orientación.

Definición 1.11: Integral de un campo vectorial sobre una curva

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular simple orientada por el campo continuo $\vec{T}$ de versores tangentes.
Consideremos un campo vectorial $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{C}$. Definimos la integral del campo vectorial $\vec{X}$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ como:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X} ds \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{T} ds$$

Proposición 1.3

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular simple orientada por el campo continuo $\vec{T}$ de versores tangentes y $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{C}$.
Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión de la curva $\mathcal{C}$ entonces

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \vec{X} ds = \pm \int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt} \tag{1.2}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{\mathcal{C}} \vec{X} ds &\overset{\text{def}}{=} \textstyle\int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{T} ds \\
&= \textstyle\int_a^b (\vec{X}(\alpha(t)) \cdot \vec{T}(\alpha(t))) ||\alpha'(t))|| dt \\
&= \pm \textstyle\int_a^b (\vec{X}(\alpha(t)) \cdot \frac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}) ||\alpha'(t))|| dt \\
&= \pm \textstyle\int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Integrales sobre superficies

2.1. Integrales de campos escalares sobre superficies

Definición 2.1: Parametrización

Llamaremos **parametriación** a toad función $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donde D es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.2: Superficie suave

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{S}$ es una **superficie suave** $\iff$ existe una parametrización $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{S} = \varphi(D)$ siendo D un conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.3: Inmersión

Consideremos una parametrización $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
Diremos que

φ es una **inmersión** $\iff \begin{cases} 1.\ \varphi \text{ es de clase } C^1 \\ 2.\ \varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) \neq 0 \end{cases}$

Definición 2.4: Superficie regular

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{S}$ es una **superficie regular** $\iff$ existe una inmersión
$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{S} = \varphi(D)$

Definición 2.5: Superficie simple

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{S}$ es una **superficie simple** $\iff$ existe una parametrización
$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{S} = \varphi(D)$ con φ **inyectiva en** D.

Definición 2.6: Integral de un campo escalar sobre una superficie

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y simple y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{S}$. Si $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión inyectiva que cuber a $\mathcal{S}$ definimos la integral del campo escalar f sobre la superficie $\mathcal{S}$ como:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} f dS \overset{\text{def}}{=} \iint_D f(\varphi(u,v))||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)||dudv} \tag{2.1}$$

Proposición 2.1

Sean v_1, v_2, w_1, w_2 vectores en $\mathbb{R}^3$ y A una matriz real 2×2 y las matrices V y W siendo conformadas por los vectores v_1, v_2 y w_1, w_2 puestos como columnas respectivamente, tales que

$$V = WA$$

entonces

$$v_1 \times v_2 = det(A)(w_1 \times w_2)$$

Proposición 2.2

Si φ es una reparametrización de ψ a través del cambio de parámetros h entonces

$$\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) = det(\mathbb{J}h(u,v))(\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t))$$

donde $(s,t) = h(u,v)$.

Demostración

Tenemos que

$$\varphi = \psi \circ h$$

y por la regla de la cadena

$$\mathbb{J}\varphi(u,v) = \mathbb{J}\psi(h(u,v)) \cdot \mathbb{J}h(u,v)$$
$$\iff \mathbb{J}\varphi(u,v) = \mathbb{J}\psi(s,t) \cdot \mathbb{J}h(u,v)$$

Aplicando la proposición 2.1 conluimos

$$\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) = det(\mathbb{J}h(u,v))(\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t))$$

Teorema 2.1: Independencia respecto a la parametrización

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular simple y $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{S}$.
Si $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ son dos inmersiones inyectivas de la superficie $\mathcal{S}$ entonces se cumple

$$\iint_D f(\varphi(u,v))||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)||\ dudv$$
$$=$$
$$\iint_E f(\psi(s,t))||\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t)||\ dsdt$$

Demostración

Tenemos que ψ es una reparametrización de φ a través de un cambio de parámetros $h : D \to E$, esto es:

$$\psi = \varphi \circ h$$

Aplicando el cambio de variables (en integral doble)

$$\begin{cases} (s,t) = h(u,v) \\ dsdt = |det(\mathbb{J}h(u,v))|dudv \end{cases}$$

se tiene que

$$\iint_E f(\psi(s,t))||\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t)||dsdt = \iint_E f(\psi(h(u,v))||\psi_s h((u,v)) \times \psi_t(h(u,v))|||det(\mathbb{J}h(u,v))|dudv$$

pero como $\varphi = \psi \circ h$

$$f(\psi(h(u,v))) = f(\varphi(u,v))$$

y utilizando la proposición 2.1 se deduce que

$$||\psi_s(h(u,v)) \times \psi_t(h(u,v))|| = ||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)||$$

sustituyendo obtenemos

$$\iint_D f(\varphi(u,v))||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)||\ dudv = \iint_E f(\psi(s,t))||\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t)||\ dsdt$$

2.2. Integrales de campos vectoriales sobre superficies

Definición 2.7: Espacio de direcciones normales

Sea $\mathcal{S}$ una superficie regular simple y orientable en $\mathbb{R}^3$ y $p \in \mathcal{S}$.
Si $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión inyectiva de la superficie $\mathcal{S}$ existe un único $(u, v) \in D$ tal que

$$p = \varphi(u, v)$$

Definimos el **espacio de direcciones normales** $\mathcal{S}$ en p, y llo indicamos por $[T_p(\mathcal{S})]^\perp$, al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)$, eso es

$$[T_p(\mathcal{S})]^\perp \overset{\text{def}}{=} gen(\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v))$$

Y diremos que
$\vec{n} \neq 0$ es una **dirección normal** a $\mathcal{S}$ en $p \iff \vec{n} \in [T_p(\mathcal{S})]^\perp$

Definición 2.8: Orientación

Sea $\mathcal{S}$ una superficie regular simple y orientable en $\mathbb{R}^3$ y $p \in \mathcal{S}$.
Un campo vectorial $\vec{n} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ es una **orientación** en $\mathcal{S} \iff$ cumple las siguientes propiedades:

1. $\vec{n}$ es continuo
2. $\vec{n}$ es un versor (esto es $||\vec{n}|| = 1$
3. $\vec{n}(p)$ es un vector normal a $\mathcal{C}$ en p (esto es $\vec{n}(p) \in [T_p(\mathcal{S})]^\perp$

Definición 2.9: Integral de un campo vectorial sobre una superficie

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular simple orientada por el campo continuo $\vec{n}$ de versores normales. consideremos un campo vectorial $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{S}$. Definimos la integral del campo vectorial $\vec{X}$ sobre la superficie $\mathcal{S}$ como:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \vec{X} dS \overset{\text{def}}{=} \iint_{\mathcal{S}} \vec{X} \cdot \vec{n} dS} \tag{2.2}$$

Proposición 2.3

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular orientada por el campo continuo $\vec{n}$ de versores normales a $\mathcal{S}$ y $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{S}$. Si $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión inyectiva de la $\mathcal{S}$ entonces

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \vec{X} dS = \pm \iint_D \vec{X}(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)) dudv} \tag{2.3}$$

donde el signo $\pm$ depende de si la superfice es compatible o no con la orientación de $\mathcal{S}$.

Demostración

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \vec{X} dS &\overset{\text{def}}{=} \iint_{\mathcal{S}} \vec{X} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iint_D \vec{X}(\varphi(u,v)) \cdot \vec{n}(\varphi(u,v)) \; ||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)|| dudv \\
&= \pm \iint_D \vec{X}(\varphi(u,v)) \cdot \tfrac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)||} \; ||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)|| dudv \\
&= \pm \iint_D \vec{X}(\varphi(u,v)) \cdot (\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)) dudv
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Teoremas clásicos del cálulo vectorial

Teorema 3.1: de la curva de Jordan

Toda curva cerrada y simple $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^2$ divide al propio $\mathbb{R}^2$ en dos conjuntos abiertos conexos y disjuntos A_1 y A_2 cuya frontera común es la curva $\mathcal{C}$. Además uno de ellos es acotada (se denomina "interior" de $\mathcal{C}$) y el otroes no acotada (se denomina "exterior" de $\mathcal{C}$).

Teorema 3.2: Green

Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple orientada en **sentido antihorario** y sea D la unión de la curva $\mathcal{C}$ con la región conexa "interior" a $\mathcal{C}$.
Si el campo $\vec{X} = (P, Q)$ es de clase C^1 en un abierto que contiene a D se cumple que

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}^+} \vec{X} ds = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy} \tag{3.1}$$

Demostración. para regiones elementales
Si consideramos los campos $\vec{P} \overset{\text{def}}{=} (P, 0)$ y $\vec{Q} \overset{\text{def}}{=} (0, Q)$ se tiene que

$$\vec{X} = (P, Q) = (P, 0) + (0, Q) = \vec{P} + \vec{Q}$$

y por la propiedad de linealidad de las integrales sobre curvas se cumple que

$$\int_{\mathcal{C}^+} \vec{X} ds = \int_{\mathcal{C}^+} \vec{P} ds + \int_{\mathcal{C}^+} \vec{Q} ds$$

Por otro lado, por la propiedad de linealidad de las integrales dobles, también se tiene que

$$\iint_D (Q_x - P_y)dxdy = \iint_D Q_x dxdy - \iint_D P_y dxdy$$

Por lo tanto bastará con probar que

$$\int_{\mathcal{C}^+} \vec{P}ds = -\iint_D P_y dxdy$$

$$\int_{\mathcal{C}^+} \vec{Q}ds = \iint_D Q_x dxdy$$

Primera parte

Como D es elemental lo podemos exresar de la siguiente manera:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\right\}$$

donde f_1 y f_2 son funciones de clase C^1 en el intervalo $[a,b]$. Evaluamos la integral doble en D

$$-\iint_D P_y(x,y)dxdy = -\int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} P_y(x,y)dy\right] dx = -\int_a^b \left[P(x,y)|_{f_1(x)}^{f_2(x)}\right] dx =$$

$$= -\int_a^b \left[P(x,f_2(x)) - P(x,f_1(x))\right] dx = \boxed{\int_a^b \left[P(x,f_1(x)) - P(x,f_2(x))\right] dx}$$

Por otro lado la curva $\mathcal{C}$ se puede descomponer en dos curvas $\mathcal{C} = \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_2$ y se cumple que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{P}ds = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{P}ds + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{P}ds$$

Siendo la curva $\mathcal{C}_1$ el gráfico de la función f_1 la podemos parametrizar por

$$\alpha_1 : \alpha_1(x) = (x, f_1(x))$$

con $x \in [a,b]$ que es compatible con la orientación de $\mathcal{C}_1$.
De esta manera

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec{P}ds = \int_a^b \vec{P}(\alpha_1(x)) \cdot \alpha_1'(x)dx = \int_a^b (P(\alpha_1(x),0) \cdot (1, f_1'(x))dx = \int_a^b (P(x,f_1(x)))dx$$

De forma análoga, siendo la curva $\mathcal{C}_2$ el gráfico de la función f_2 la podemos parametrizar por

$$\alpha_2 : \alpha_2(x) = (x, f_2(x))$$

con $x \in [a,b]$ que no es compatible con la orientación de $\mathcal{C}_2$.
Así

$$\int_{\mathcal{C}_2} \vec{P}ds = -\int_a^b (P(x,f_2(x)))dx$$

Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{P} ds = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{P} ds + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{P} ds = \int_a^b (P(x, f_1(x)))dx - \int_a^b (P(x, f_2(x)))dx$$

$$= \boxed{\int_a^b [P(x, f_1(x)) - P(x, f_2(x))]\, dx}$$

Podemos concluir que

$$\int_{\mathcal{C}^+} \vec{P} ds = -\iint_D P_y dxdy$$

El segundo caso es análogo. $\square$

Definición 3.1: Operador de Hamilton

El **operador de Hamilton** ∇ **"nabla"**

$$\nabla \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

es un operador que resulta util para expresar las nociones que veremos más adelante.

Definición 3.2: Rotor

Sea $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de calse C^1 en un abierto U de $\mathbb{R}^3$.
Se define el **rotor** del campo $\vec{X} = (P, Q, R)$ como el campo vectorial $Rot(\vec{X}) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$Rot(\vec{X}) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \tag{3.2}$$

<u>Observación</u>

$$Rot(\vec{X}) = \nabla \times \vec{X}$$

Teorema 3.3: Stokes

Sea $\mathcal{S}$ una superficie con borde $\partial\mathcal{S}$ la cual está orientada con el campo de versores normales $\vec{n}$. Si un campo $\vec{X} = (P, Q, R)$ es de clase C^1 en un abierto que contiene a la superficie $\mathcal{S}$ entonces se cumple que

$$\iint_{\mathcal{S}} Rot(\vec{X}) dS = \int_{\partial\mathcal{S}} \vec{X} ds \tag{3.3}$$

donde la curva borde $\partial\mathcal{S}$ está orientada con la orientación inducida por $\vec{n}$.

Demostración. Vamos a realizar la demostración para el caso en el que la superficie es el grafico de una función.
Supongamos que:

$$\mathcal{S} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\big\}$$

donde $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y D es un abierto contenido en U tal que su frontera es una curva $\mathcal{C}$ también contenida en U.

Sin pérdida de generalidad orientamos la superficie con la normal $\vec{n}$ exterior (tercera componente positiva).
$\vec{n}$ induce una orientación en $\partial\mathcal{S}$ y se orienta a $\mathcal{C}$ de la misma manera.
($\mathcal{C}$ es la proyección sobre el plano xy de la curva $\partial\mathcal{S}$ por construcción)

<u>Parametrización de la superficie</u>

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

con $(x, y) \in D$ que induce la normal en la superficie:

$$\varphi_x \times \varphi_y = (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1)$$

con tercer componente positiva $\Rightarrow \varphi$ es compatible con la normal $\vec{n}$.

<u>Parametrización de las curvas</u>

$$\alpha(t) = (x(t), y(t))$$

con $t \in [a, b]$ es una parametrización genérica de la curva $\mathcal{C}$.
Por lo tanto, $\gamma = \varphi \circ \alpha$ es una parametrización de $\partial\mathcal{S}$

$$\gamma(t) = \varphi(\alpha(t)) = \varphi(x(t),\ y(t)) = (x(t),\ y(t),\ f(x(t), y(t)))$$

Luego

$$\int_{\partial \mathcal{S}} \vec{X} ds = \int_a^b \vec{X}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\begin{pmatrix} \vec{X}(\gamma(t)) = (P(\gamma(t)),\ Q(\gamma(t)),\ R(\gamma(t))) & \text{pues } \vec{X} = (P, Q, R) \\ \qquad = (P(\varphi(\alpha(t))),\ Q(\varphi(\alpha(t))),\ R(\varphi(\alpha(t)))) & \text{pues } \gamma = \varphi \circ \alpha \\ \gamma'(t) = (x'(t),\ y'(t),\ f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)) & \\ \qquad = (x'(t),\ y'(t),\ f_x(\alpha(t))x'(t) + f_y(\alpha(t))y'(t)) & \text{pues } \alpha(t) = (x(t),\ y(t)) \end{pmatrix}$$

$$= \int_a^b (\ P(\varphi(\alpha(t))),\ Q(\varphi(\alpha(t))),\ R(\varphi(\alpha(t)))\ ) \cdot (x'(t),\ y'(t),\ f_x(\alpha(t))x'(t) + f_y(\alpha(t))y'(t))\, dt$$

operamos y agrupamos en $x'(t)$ e $y'(t)$

$$= \int_a^b [P(\varphi(\alpha(t))) + R(\varphi(\alpha(t)))f_x(\alpha(t))]\, x'(t) + [Q(\varphi(\alpha(t))) + R(\varphi(\alpha(t)))f_y(\alpha(t))]\, y'(t) dt$$

$$= \int_a^b (P(\varphi(\alpha(t))) + R(\varphi(\alpha(t)))f_x(\alpha(t)),\ Q(\varphi(\alpha(t))) + R(\varphi(\alpha(t)))f_y(\alpha(t))) \cdot (x'(t), y'(t)) dt$$

$$= \int_a^b (P \circ \varphi + (R \circ \varphi) f_x,\ Q \circ \varphi + (R \circ \varphi) f_y)(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

vamos a simplificar la notación usando $\vec{Y} = (F,\ G) \stackrel{\text{def}}{=} (P \circ \varphi + (R \circ \varphi) f_x,\ Q \circ \varphi + (R \circ \varphi) f_y)$

$$= \int_a^b (F, G)(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

$$= \int_a^b \vec{Y}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt$$

$$= \int_{\mathcal{C}} \vec{Y} ds$$

aplicando el Teorema de Green

$$= \iint_D G_x - F_y dx dy$$

Calculemos las derivadas G_x y F_y

$$G = (Q \circ \varphi) + (R \circ \varphi) f_y \Rightarrow G_x = (Q \circ \varphi)_x + (R \circ \varphi)_x f_y + (R \circ \varphi) f_{xy}$$

Pero

$$(Q \circ \varphi) = (Q(x, y, f(x, y))) \Rightarrow (Q \circ \varphi)_x = (Q_x \circ \varphi) + (Q_z \circ \varphi) f_x$$

y

$$(R \circ \varphi) = (R(x, y, f(x, y))) \Rightarrow (R \circ \varphi)_x = (R_x \circ \varphi) + (R_z \circ \varphi)f_x$$

entonces

$$G_x = (Q_x \circ \varphi) + (Q_z \circ \varphi)f_x + ((R_x \circ \varphi) + (R_z \circ \varphi)f_x)f_y + (R \circ \varphi)f_{xy}$$

De la misma forma se tiene que

$$F_y = (P_y \circ \varphi) + (P_z \circ \varphi)f_y + ((R_y \circ \varphi) + (R_z \circ \varphi)f_y)f_x + (R \circ \varphi)f_{xy}$$

de donde:

$$\begin{aligned} G_x - F_y &= [(Q_z \circ \varphi) - (R_y \circ \varphi)]f_x + [(R_x \circ \varphi) - (P_z \circ \varphi)]f_y + [(Q_x \circ \varphi) - (P_y \circ \varphi)] \\ &= [(Q_z - R_y) \circ \varphi]f_x + [(R_x - P_z) \circ \varphi]f_y + (Q_x - P_y) \circ \varphi \\ &= [(R_y - Q_z) \circ \varphi](-f_x) + [(R_x - P_z) \circ \varphi](-f_y) + (Q_x - P_y) \circ \varphi(1) \\ &= ([(R_y - Q_z) \circ \varphi] + [(R_x - P_z) \circ \varphi] + (Q_x - P_y) \circ \varphi) \cdot (-f_x, -f < y, 1) \\ &= ([(R_y - Q_z) \circ \varphi] + [(R_x - P_z) \circ \varphi] + (Q_x - P_y) \circ \varphi) \cdot (\varphi_x \times \varphi_y) \\ &\text{(observar que siendo } \vec{X} = (P, Q, R) \text{ entonces } Rot(\vec{X}) = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)) \\ &= Rot(\vec{X} \circ \varphi) \cdot (\varphi_x \times \varphi_y) \end{aligned}$$

De esta manera

$$\iint_D G_x - F_y dxdy = \iint_D Rot(\vec{X} \circ \varphi) \cdot (\varphi_x \times \varphi_y)dxdy = \iint_{\mathcal{S}} \vec{X} dS$$

$\square$

Definición 3.3: Divergencia

Sea $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto U de $\mathbb{R}^3$.
Se define la **divergencia** del campo $\vec{X} = (P, Q, R)$ como el campo escalar $Div(\vec{X}) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$Div(\vec{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{3.4}$$

Observación

$$Div(\vec{X}) = \nabla \cdot \vec{X}$$

Teorema 3.4: Gauss

Sea $\mathcal{S}$ una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ que es la frontera de un sólido E.
Si el campo $\vec{X} = (P, Q, R)$ es de clase C^1 en un abierto que contiene a $E \cup \mathcal{S}$ se cumple que

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{X} dS = \iiint_{\Omega} Div(\vec{X}) dxdydz \tag{3.5}$$

donde la superficie $\mathcal{S}$ debe estar orientada con la **normal exterior** al sólido E.

Demostración. para sólidos elementales
Si consideramos los campos $\vec{P} \overset{\text{def}}{=} (P, 0, 0)$,$\vec{Q} \overset{\text{def}}{=} (0, Q, 0)$,$\vec{R} \overset{\text{def}}{=} (0, 0, R)$ se tiene que

$$\vec{X} = (P, Q, R) = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}$$

Por la propiedad de linealidad de las integrales de superficie se cumple que:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{X} dS = \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{P} dS + \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{Q} dS + \iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{R} dS$$

Por otro lado, por la linealidad de las integrales triples se cumple:

$$\iiint\limits_{E} Div(\vec{X}) dxdydz = \iiint\limits_{E} P_x + Q_y + R_z dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{E} P_x dxdydz + \iiint\limits_{E} Q_y dxdydz + \iiint\limits_{E} R_z dxdydz$$

Bastará con probar que:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{P} dS = \iiint\limits_{E} P_x dxdydz$$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{Q} dS = \iiint\limits_{E} Q_y dxdydz$$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{R} dS = \iiint\limits_{E} R_z dxdydz$$

Demostraremos la tercer igualdad.
Siendo E un sólido elemental lo podemos representar de la siguiente manera:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, f_1(x, y) < z < g_1(x, y)\}$$

donde f_1 y g_1 son funciones de clase C^1 en el abierto D_1
Evaluando la integral triple en E:

$$\iiint\limits_E R_z(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{g_1(x,y)} R_x(x,y,z)dz \right) dxdy$$
$$= \iint\limits_D R(x,y,g_1(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))dxdy$$

Por otro lado la superficie $\mathcal{S}^+$ se puede descomponer en $\mathcal{S}_1$ (gráfico de f_1) y $\mathcal{S}_2$ (gráfico de g_1) y se cumple que: $\mathcal{S}^+ = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ y también que:

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{R}dS = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} \vec{R}dS + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} \vec{R}dS$$

$\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ están orientadas con tercera componente negativa y positiva respectivamente[1].
<u>Parametrizaciones</u>

$$\varphi_1 : \varphi_1(x,y) = (x,y,f_1(x,y))$$

con $(x,y) \in D_1$.

$$(\varphi_1)_x \times (\varphi_1)_y = \left(1, 0, \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1\right)$$

Como dijimos, $\vec{n}$ en $\mathcal{S}_1$ tiene componente negativa por lo que φ_1 <u>no</u> es compatible con la orientación. Así

$$\iint\limits_{\mathcal{S}_1} \vec{R}dS = -\iint\limits_{D_1} \vec{R}(\varphi_1(x,y)) \cdot ((\varphi_1)_x \times (\varphi_1)_y)\ dxdy$$
$$= -\iint\limits_{D_1} (0,0,R(\varphi_1(x,y))) \cdot (-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1)\ dxdy$$
$$= -\iint\limits_{D_1} R(x,y,f_1(x,y))dxdy$$

Análogamente, tenemos

$$\varphi_2 : \varphi_2(x,y) = (x,y,g_1(x,y))$$

con $(x,y) \in D_1$.

$$(\varphi_2)_x \times (\varphi_2)_y = \left(1, 0, \frac{\partial g_1}{\partial x}\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial g_1}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial g_1}{\partial x}, -\frac{\partial g_1}{\partial y}, 1\right)$$

[1]Si esto no se entiende avisar y se agrega mejor explicación

Como dijimos, $\vec{n}$ en $\mathcal{S}_2$ tiene componente positiva por lo que φ_2 <u>es</u> compatible con la orientación. Así

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\mathcal{S}_2} \vec{R} dS &= \iint\limits_{D_1} \vec{R}(\varphi_2(x,y)) \cdot ((\varphi_2)_x \times (\varphi_2)_y)\ dxdy \\ &= \iint\limits_{D_1} (0,0,R(\varphi_2(x,y))) \cdot (-\frac{\partial g_1}{\partial x}, -\frac{\partial g_1}{\partial y}, 1)\ dxdy \\ &= \iint\limits_{D_1} R(x,y,g_1(x,y)) dxdy\end{aligned}$$

Entonces

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{R} dS = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} \vec{R} dS + \iint\limits_{\mathcal{S}_2} \vec{R} dS = -\iint\limits_{D_1} R(x,y,f_1(x,y)) dxdy + \iint\limits_{D_1} R(x,y,g_1(x,y)) dxdy$$

$$\iint\limits_{\mathcal{S}^+} \vec{R} dS = \iiint\limits_{E} R_z dxdydz$$

Las otras igualdades son análogas. $\square$

Capítulo 4

Campos y potenciales

Definición 4.1: Campo gradiente

Sea $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un abierto U. Diremos que $\vec{X}$ es un **campo gradiente** en $U \iff$ existe una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que

$$\vec{X} = \nabla f \qquad \text{en } U \tag{4.1}$$

A la función f se le llama **potencial escalar** del campo X en U.

Teorema 4.1: Fundamental para campos gradientes

Sea $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un abierto U y $\mathcal{C}$ una curva regular y simple en U con origen en A extremos en B. Si $\vec{X}$ es un campo gradiente en U entonces

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X} ds = f(B) - f(A)$$

donde f es un potencial escalar del campo $\vec{X}$.

Demostración. Como $\vec{X}$ es un campo gradiente en U, existe un potencial escalar f tal que

$$\vec{X} = \nabla f$$

en U. Luego si consideramos una parametrización $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ de la curva $\mathcal{C}$ con $\alpha(a) = A$ y $\alpha(b) = B$

Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{X} ds &= \int\limits_{\mathcal{C}} \nabla f \; ds \\
&= \int\limits_{a}^{b} \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\
&= \int\limits_{a}^{b} [f(\alpha(t))]' dt && \text{por regla de la cadena} \\
&= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) \\
&= f(B) - f(A)
\end{aligned}$$

$\square$

Definición 4.2: Campo conservativo

Sea $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un abierto U. Diremos que $\vec{X}$ es un **campo conservativo** en $U \iff \int_{\mathcal{C}_1} \vec{X} ds = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{X} ds$ para todo par de curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ contenidas en U que tengan el mismo origen y el mismo final. Esto se llama la propiedad de **independencia de camino**.

Proposición 4.1

Sea $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un abierto U. Entonces $\vec{X}$ es un **campo conservativo** en $U \iff \int\limits_{\mathcal{C}} \vec{X} ds = 0$ para cualquier curva $\mathcal{C}$ cerrada y simple contenida en U.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada y simple contenida en U. Consideramos dos puntos cualesquiera A y B en $\mathcal{C}$ e indicamos por $\mathcal{C}_1$ al arco de A a B y $\mathcal{C}_2$ al arco de B a A.

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

Luego

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\mathcal{C}} \vec{X} ds &= \int\limits_{\mathcal{C}_1} \vec{X} ds + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \vec{X} ds \\
&= \int\limits_{\mathcal{C}_1} \vec{X} ds - \int\limits_{-\mathcal{C}_2} \vec{X} ds = 0
\end{aligned}$$

(como ambas curvas tiene mismo origen y mismo final, por la independencia de camino las integrales son iguales)

($\Leftarrow$) Consideramos un par de curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ contenidas en U que tienen el mismo origen A y el mismo final B.
Luego, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup (-\mathcal{C}_2)$ es una curva cerrada y simple en U y por hipótesis

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathcal{C}} \vec{X} ds = 0 &\iff \oint_{\mathcal{C}_1 \cup (-\mathcal{C}_2)} \vec{X} ds = 0 \\
&\iff \int_{\mathcal{C}_1} \vec{X} ds + \int_{-\mathcal{C}_2} \vec{X} ds = 0 \\
&\iff \int_{\mathcal{C}_1} \vec{X} ds = -\int_{-\mathcal{C}_2} \vec{X} ds \\
&\iff \int_{\mathcal{C}_1} \vec{X} ds = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{X} ds
\end{aligned}$$

□

Observación
Para curvas cerradas, en física se cambia $\int$ por $\oint$. En estas notas puede que se utilice esa notación en algun momento.

Definición 4.3: Campo cerrado

Sea $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 en un abierto U. Diremos que $\vec{X}$ es **cerrado** en $U \iff \mathbb{J}\vec{X}$ es una matriz simétrica en U.
Para el caso de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ tenemos que:

$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
$\vec{X} = (P, Q)$	$\vec{X} = (P, Q, R)$
$Q_x - P_y = 0$	$Rot(\vec{X}) = 0$

Definición 4.4: Campo rotor

Sea $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un abierto U. Diremos que $\vec{X}$ es un **campo rotor** en $U \iff$ existe un campo escalar $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que

$$\vec{X} = Rot(\vec{F}) \qquad \text{en } U$$

Al campo vectorial $\vec{F}$ se le llama **potencial vector** del campo $\vec{X}$ en U.

Observación Si $\vec{F}$ es un potencial vector de $\vec{X}$ en U. $\Rightarrow \vec{F} + \nabla g$ también es un potencial vector de $\vec{X}$ en U

$$Rot\left(\vec{F} + \nabla g\right) = Rot(\vec{F}) + Rot(\nabla g) = Rot(\vec{F})$$

También hay una analogía en cuanto a las propiedades entre los campos gradientes que vimos anteriormente y los campos rotores.
Sea $\vec{X}$ un campo rotor en $U \Rightarrow$

$$\iint_S \vec{X} dS = \int_{\partial S} \vec{F} ds$$