Capítulo 1

Integrales sobre curvas

1.1. Integrales de campos escalares sobre curvas

Definición 1.1: Parametrización

Llamamremos **parametrización** a toda función $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, donde I es un intervalo en $\mathbb{R}$.

Definición 1.2: Curva suave

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{C}$ es una **curva suave** $\iff$ existe una parametrización $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{C} = \alpha(I)$

Definición 1.3: Inmersión

Consideremos una parametrización $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Diremos que α es una **inmersión** $\iff \begin{cases} 1.\ \alpha \text{ es de clase } C^1 \\ 2.\ \alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I \end{cases}$

Definición 1.4: Curva regular

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{C}$ es una **curva regular** $\iff$ existe una inmersión $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{C} = \alpha(I)$

Definición 1.5: Curva simple

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{C}$ es una **curva simple** $\iff$ existe una inmersión $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{C} = \alpha(I)$ y además α es inyectiva en el interior de I

Definición 1.6: Curva cerrada

Sea $\mathcal{C}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{C}$ es una **curva cerrada** $\iff$ existe una inmersión $\alpha : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{C} = \alpha(I)$ y se cunple que $\alpha(a) = \alpha(b)$

Definición 1.7: Cambio de parámetros

Consideramos una función $h : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$.
Diremos que
h es un **cambio de parámetros** $\iff \begin{cases} 1)\ h \text{ es de clase } C^1 \\ 2)\ h'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I \end{cases}$

Proposición 1.1

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de clase C^1 de una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ y $h : I \to \mathbb{R}^3$ un cambio de parámetros, y sea $J = h(I)$.
Entonces
(1) la función

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \circ h^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$$

es una parametrización de clase C^1 de la curva $\mathcal{C}$, llamada **reparametrización** de α a través del cambio de parámetros h.
(2) Si α es inyectiva entonces β también es inyectiva.
(3) Si α es una inmersión entonces β también es una inmersión.

Proposición 1.2

Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ y $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ son dos inmersiones inyectivas de una misma curva $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ entonces existe un cambio de parámetros $h : I \to \mathbb{R}$ con $h(I) = J$ tal que $\beta = \alpha \circ h^{-1}$

Definición 1.8: Integral de un campo escalar sobre una curva

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular simple y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{C}$. Si $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión de la curva $\mathcal{C}$ definimos la integral del campo escalar f sobre la curva $\mathcal{C}$ como:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} f ds \overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(\alpha(t)) \; ||\alpha'(t)|| dt} \tag{1.1}$$

Teorema 1.1: Independencia respecto a la parametrización

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular simple y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{C}$.
Si $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ y $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^3$ son dos inmersiones inyectivas de la curva $\mathcal{C}$ entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(\alpha(t))||\alpha'(t)||dt = \int_c^d f(\beta(s))||\beta'(s)||ds$$

Demostración
Por la proposición 1.1 y 1.2 sabemos que β es una reparametrización de α a través de un cambio de parámetros $h : [a,b] \to [c,d]$ esto es:

$$\alpha = \beta \circ h$$

Primer caso: Si $h'(t) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$ la función $h : [a,b] \to [c,d]$ es creciente y se cumple que

$$\begin{cases} h(a) = c \\ h(b) = d \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\alpha(t))||\alpha'(t)||dt &= \int_a^b f(\beta(h(t)))||[\beta(h(t))]'||dt \\ &= \int_a^b f(\beta(h(t)))||\beta'(h(t))h'(t)||dt \\ &= \int_a^b f(\beta(h(t)))||\beta'(h(t))||h'(t)dt \\ &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(\beta(s)||\beta'(s)||ds \\ &= \int_c^d f(\beta(s)||\beta'(s)||ds \end{aligned}$$

Segundo caso: Si $h'(t) < 0 \quad \forall t \in [a,b]$ la función $h : [a,b] \to [c,d]$ es decreciente y se cumple que

$$\begin{cases} h(a) = d \\ h(b) = c \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(\alpha(t))||\alpha'(t)||dt &= \int_a^b f(\beta(h(t)))||[\beta(h(t))]'||dt \\
&= \int_a^b f(\beta(h(t)))||\beta'(h(t))h'(t)||dt \\
&= -\int_a^b f(\beta(h(t)))||\beta'(h(t))||h'(t)dt \\
&= -\int_{h(a)}^{h(b)} f(\beta(s)||\beta'(s)||ds \\
&= -\int_d^c f(\beta(s)||\beta'(s)||ds \\
&= \int_c^d f(\beta(s)||\beta'(s)||ds
\end{aligned}$$

1.2. Integrales de campos vectoriales sobre curvas

Definición 1.9: Espacio de direcciones tangente

Sea $\mathcal{C}$ una curva regular y simple en $\mathbb{R}^3$ y $p \in \mathcal{C}$.
Si $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión inyectiva de la curva $\mathcal{C}$ existe un único $t \in I$ tal que

$$p = \alpha(t)$$

Definimos el **espacio de direcciones tangentes** $\mathcal{C}$ en p, y lo indicamos por $T_p(\mathcal{C})$, al subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $\alpha(t)$, esto es

$$T_p(\mathcal{C}) \overset{\text{def}}{=} [\alpha'(t)]$$

Y diremos que
$v \neq 0$ es una **dirección tangente** a $\mathcal{C}$ en $p \iff v \in T_p(\mathcal{C})$

Definición 1.10: Orientación

Sea $\mathcal{C}$ una curva regular y simple en $\mathbb{R}^3$.
Un campo vectorial $\vec{T} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ es una **orientación** en $\mathcal{C} \iff$ cumple las siguientes propiedades:

1. $\vec{T}$ es continuo
2. $\vec{T}$ es un versor (esto es $||\vec{T}|| = 1$)
3. $\vec{T}(p)$ es una dirección tangente a $\mathcal{C}$ en p (esto es $\vec{T}(p) \in T_p(\mathcal{C})$)

Una **curva orientada** es una curva en la cual hemos elegido una orientación.

Definición 1.11: Integral de un campo vectorial sobre una curva

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular simple orientada por el campo continuo $\vec{T}$ de versores tangentes.
Consideremos un campo vectorial $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{C}$. Definimos la integral del campo vectorial $\vec{X}$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ como:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{X} ds \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{T} ds$$

Proposición 1.3

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ una curva regular simple orientada por el campo continuo $\vec{T}$ de versores tangentes y $\vec{X} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{C}$.
Si $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión de la curva $\mathcal{C}$ entonces

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \vec{X} ds = \pm \int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt} \tag{1.2}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \vec{X} ds \quad & \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{C}} \vec{X} \cdot \vec{T} ds \\
& = \int_a^b (\vec{X}(\alpha(t)) \cdot \vec{T}(\alpha(t))) ||\alpha'(t))|| dt \\
& = \pm \int_a^b (\vec{X}(\alpha(t)) \cdot \tfrac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}) ||\alpha'(t))|| dt \\
& = \pm \int_a^b \vec{X}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt
\end{aligned}$$

Capítulo 2

Integrales sobre superficies

2.1. Integrales de campos escalares sobre superficies

Definición 2.1: Parametrización

Llamaremos **parametriación** a toad función $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donde D es un conjunto abierto y conexo en $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.2: Superficie suave

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{S}$ es una **superficie suave** $\iff$ existe una parametrización $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{S} = \varphi(D)$ siendo D un conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.3: Inmersión

Consideremos una parametrización $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.
Diremos que

$$\varphi \text{ es una } \textbf{inmersión} \iff \begin{cases} 1.\ \varphi \text{ es de clase } C^1 \\ 2.\ \varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) \neq 0 \end{cases}$$

Definición 2.4: Superficie regular

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{S}$ es una **superficie regular** $\iff$ existe una inmersión
$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathcal{S} = \varphi(D)$

Definición 2.5: Superficie simple

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.
Diremos que
$\mathcal{S}$ es una **superficie simple** $\iff$ existe una parametrización
$\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que $\mathcal{S} = \varphi(D)$ con φ **inyectiva en** D.

Definición 2.6: Integral de un campo escalar sobre una superficie

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y simple y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{S}$. Si $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una inmersión inyectiva que cuber a $\mathcal{S}$ definimos la integral del campo escalar f sobre la superficie $\mathcal{S}$ como:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} f dS \overset{\text{def}}{=} \iint_D f(\varphi(u,v))||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)||dudv} \tag{2.1}$$

Proposición 2.1

Sean v_1, v_2, w_1, w_2 vectores en $\mathbb{R}^3$ y A una matriz real 2×2 y las matrices V y W siendo conformadas por los vectores v_1, v_2 y w_1, w_2 puestos como columnas respectivamente, tales que

$$V = WA$$

entonces

$$v_1 \times v_2 = det(A)(w_1 \times w_2)$$

Proposición 2.2

Si φ es una reparametrización de ψ a través del cambio de parámetros h entonces

$$\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) = det(\mathbb{J}h(u,v))(\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t))$$

donde $(s,t) = h(u,v)$.

Demostración
Tenemos que

$$\varphi = \psi \circ h$$

y por la regla de la cadena

$$\mathbb{J}\varphi(u,v) = \mathbb{J}\psi(h(u,v)) \cdot \mathbb{J}h(u,v)$$
$$\iff \mathbb{J}\varphi(u,v) = \mathbb{J}\psi(s,t) \cdot \mathbb{J}h(u,v)$$

Aplicando la proposición 2.1 conluimos

$$\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) = det(\mathbb{J}h(u,v))(\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t))$$

Teorema 2.1: Independencia respecto a la parametrización

Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular simple y $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto U que contiene a $\mathcal{S}$.
Si $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\psi : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ son dos inmersiones inyectivas de la superficie $\mathcal{S}$ entonces se cumple

$$\iint_D f(\varphi(u,v))||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)||\ dudv$$
$$=$$
$$\iint_E f(\psi(s,t))||\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t)||\ dsdt$$

Demostración
Tenemos que ψ es una reparametrización de φ a través de un cambio de parámetros $h : D \to E$, esto es:

$$\psi = \varphi \circ h$$

Aplicando el cambio de variables (en integral doble)

$$\begin{cases} (s,t) = h(u,v) \\ dsdt = |det(\mathbb{J}h(u,v))|dudv \end{cases}$$

se tiene que

$$\iint_E f(\psi(s,t))||\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t)||dsdt = \iint_E f(\psi(h(u,v))||\psi_s h((u,v)) \times \psi_t(h(u,v))|||det(\mathbb{J}h(u,v))|dudv$$

pero como $\varphi = \psi \circ h$

$$f(\psi(h(u,v))) = f(\varphi(u,v))$$

y utilizando la proposición 2.1 se deduce que

$$||\psi_s(h(u,v)) \times \psi_t(h(u,v))|| = ||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)||$$

sustituyendo obtenemos

$$\iint_D f(\varphi(u,v))||\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)||\ dudv = \iint_E f(\psi(s,t))||\psi_s(s,t) \times \psi_t(s,t)||\ dsdt$$

2.2. Integrales de campos vectoriales sobre superficies

Definición 2.7: Espacio de direcciones normales

Definición 2.8: Orientación

Definición 2.9: Integral de un campo vectorial sobre una superficie

Proposición 2.3

Capítulo 3

Teoremas clásicos del cálulo vectorial

Teorema 3.1: de la curva de Jordan

Teorema 3.2: Green

Demostración

Definición 3.1: Operador de Hamilton

Definición 3.2: Rotor

Teorema 3.3: Stokes

Demostración

Definición 3.3: Divergencia

Teorema 3.4: Gauss

Demostración