PROBABILIDAD

A través del análisis de ejemplos propuestos se irán reconociendo y empleando los siguientes conceptos, que por último se definirán:

- experimento
- experimento o fenómeno aleatorio
- conjunto de resultados asociados con el experimento
- características comunes de los experimentos o fenómenos aleatorios.

EXPERIMENTO ALEATORIO Y CONJUNTO O ESPACIO DE RESULTADOS

Supongamos tener ciertos experimentos aleatorios que llamaremos $\mathbf{E_i}$ y encontremos para cada uno de ellos el conjunto de resultados posibles que denominaremos $\mathbf{S_i}$

1) Si...$\mathbf{E_i}$ es el experimento que consiste en arrojar un dado correcto y observar la cara superior del mismo, los resultados que pueden obtenerse son: *que aparezca el número 1 en la cara superior, que aparezca el 2, ..., que aparezca el número 6.*

El espacio de resultados asociado con ese experimento es entonces:

$\mathbf{S_1}$ = {x/x es el número que aparece en la cara superior del dado}

o bien

$\mathbf{S_1}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, donde el "1" es el número que aparece dibujado en la cara superior del dado, etc.

2) Si... $\mathbf{E_2}$ = arrojar una moneda legal hasta que aparezca cara es $\mathbf{S_2}$ = {(C), (XC), (XXC), (XXXC) ... }

3) Si... $\mathbf{E_3}$ = observar cuántas personas entran a determinado supermercado en cierto período de tiempo:

es $\mathbf{S_3} = \{x/x \in N \wedge x \leq N'\}$, siendo N' el número máximo de personas que caben en el supermercado en las condiciones previstas.

4) Si... $\mathbf{E_4}$ = efectuar 9 inseminaciones artificiales y contar, luego de determinado período, cuántas resultaron exitosas.

es $\mathbf{S_4} = \{x/x \in N \wedge 0 \leq x \leq 9\} = \{0, 1, 2, ..., 9\}$

5) Si... $\mathbf{E_5}$ = probar la puntería empleando un dardo y un blanco circular con centro remarcado midiendo la distancia entre el punto central y el punto en que el dardo tocó al blanco

es $\mathbf{S_5} = \{x/x \in R+ \wedge x \leq \text{radio del círculo}\}$

ESPACIO MUESTRAL - PUNTO MUESTRAL – VALOR DEL PUNTO MUESTRAL -

Está ahora en condiciones de realizar la siguiente actividad:
....**A)** Reúnase con su pequeño grupo, lea atentamente la situación problemática que se presenta y siga cuidadosamente los pasos señalados.

6) Se tienen 6 lámparas numeradas de 1 a 6. Se extraen muestras de 2 lámparas, sin reposición.

Suponga que dos de las lámparas son defectuosas y que ellas son las identificadas con los números 5 y 6.

- **a)** Forme el espacio muestral "S" o conjunto de resulta dos posibles que se obtienen al extraer sin reposición grupos de 2 lámparas de un total de 6 lámparas , que están numeradas de 1 a 6 (no haga caso por ahora a su calidad)

- **b)** Cuente cuántos puntos muestrales o resultados posibles del experimento (o pares de lámparas) se tienen. Tenga en cuenta que considerará lo mismo, por ejemplo obtener un par integrado por las lámparas 1 y 5 que el formado por los números 5 y 1; esto es : se cuenta el par una sola vez.

- **c)** Encuentre una forma "gráfica" para representar lo que hizo en los puntos 1 y 2, por ejemplo una tabla de doble entrada o un diagrama en coordenadas cartesianas o similar.

- **d)** Explique, de acuerdo con lo realizado ,qué entiende por:
  - experimento aleatorio (en qué consiste, cuál es la acción, el resultado, la observación y qué condiciones se cumplen)
  - espacio muestral
  - punto muestral

- **e)** Encuentre el "valor", peso o ponderación de cada punto muestral.

Se espera ahora que ponga en común las conclusiones de su pequeño grupo con los restantes y por último las verifique teniendo en cuenta las definiciones siguientes:

Experimento: es una acción, proceso u operación en el que se obtienen resultados bien definidos y que conllevan a la observación de estos resultados.

Resultado: es lo que se obtiene de un solo ensayo del experimento, es decir de una sola repetición del mismo.

Ensayo: es el acto que lleva a un resultado determinado, de entre los posibles resultados distintos del experimento.

Experimento o fenómeno aleatorio: es el experimento en el cuál el resultado se presenta al azar.

Conjunto de todos los resultados del experimento aleatorio: es un conjunto universal.

Espacio muestral: es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
Lo denominamos: **S**

Punto muestral: es un punto del espacio muestral, uno de los resultados posibles del experimento aleatorio. Lo denominamos con a ó s y entonces $a \in \mathbf{S}$ ó $s \in \mathbf{S}$.

....**B)** Resolvamos los ejercicios siguientes:

Ejercicio 1) Se extrae una bolilla de una bolsa que contiene 10 blancas y 5 rojas. Determinemos el espacio muestral.¿ Se puede tener la seguridad de que todos los puntos se darán con la misma intensidad?

Ejercicio 2) Se arroja al suelo una chinche con cabeza de color (Blanco y Rojo). Si se observa como cae la chinche, ¿cuál es el espacio muestral?

Ejercicio 3) Un climatólogo predice si habrá o no lluvia en un día determinado. ¿ Cuáles son los puntos del espacio muestral?

Le pedimos que realice la actividad que sigue:

....**C)** Analice los ejemplos que se dan a continuación, prestando mucha atención a las aclaraciones que en ellos se hacen.

7) Sea... $\mathbf{E_7}$ que consiste en extraer una bolilla de un bolillero en que tenemos 10 bolillas iguales numeradas de 1 a 10, y observar el número,

es $\mathbf{S_7} = \{1, 2, 3, ..., 10\}$

El espacio muestral obtenido está formado por 10 puntos muestrales perfectamente distinguibles y cada uno de ellos representa el número de la correspondiente bolilla.

8) Sea... $\mathbf{E_8}$ el experimento que consiste en arrojar 2 monedas y contar el número total de cruces obtenidas en este caso

es $\mathbf{S_8} = \{0, 1, 2\}$ y también se tiene un número finito de resultados posibles.

9) Si... $\mathbf{E_9}$ consiste en arrojar 2 monedas y observar la secuencia de caras y cruces que se obtienen,

es $\mathbf{S_9} = \{CC, CX, XC, XX\}$

En este caso, también el conjunto $\mathbf{S_9}$ es finito.

Observemos que:

a) tanto en $\mathbf{E_9}$ como en $\mathbf{E_8}$ la acción consiste en arrojar 2 monedas correctas pero el resultado que debe observarse es diferente y en consecuencia difieren los $\mathbf{S_i}$ obtenidos.

b) en $\mathbf{S_7}$ los puntos representan el "dibujo" observado en la bolilla y cada punto se obtiene de una sola forma.

En $\mathbf{S_8}$, los puntos se relacionan con el dibujo observado en la moneda pero, en cambio, el punto muestral $a_2 = 1$ simboliza el resultado observado de obtener una sola cruz pero puede conseguirse con dos secuencias diferentes: CX y XC.

Las secuencias diferentes que formaban un solo punto en $\mathbf{S_8}$ son en cambio en $\mathbf{S_9}$ dos puntos.

c) los valores de los puntos muestrales

- para $a \in \mathbf{S_7}$ es p(a) = 1/10 para todos los puntos.
- para $a \in \mathbf{S_8}$,
  - p(obtener 0 cruces)=p(obtener resultado CC)=1/4
  - p(obtener una cruz) = p(obtener resultados CX ó XC)=2/4
  - p(obtener 2 cruces) = p(obtener XX) = 1/4
- para $a \in \mathbf{S_9}$ es p(a) = 1/4 para todos los puntos

ESPACIO MUESTRAL:
FINITO, INFINITO NUMERABLE, INFINITO NO NUMERABLE

Tenemos otra actividad para proponerle:
....**D)** En los siguientes ejemplos se espera que observe con detenimiento las características de los conjuntos de resultados obtenidos, a la vez que afirme conceptos que seguramente ya aprendió a reconocer y usar.

10) Si... $\mathbf{E_{10}}$ consiste en la acción de que una enfermera proporcione los medicamentos A, B y C a los enfermos de las camas 1, 2, 3 y 4 ¿ De cuántas maneras diferentes se pueden proporcionar los 3 remedios a los 4 pacientes?

$$\mathbf{S_{10}} = \{(A_1)\ (A_2)\ (A_3)\ (A_4)\ (B_1)\ (B_2)\ (B_3)\ (B_4)\ (C_1)\ (C_2)\ (C_3)\ (C_4)\}$$

Como se ve, existen 12 formas diferentes de combinar los 3 remedios con los 4 pacientes, esto es, existen 12 puntos muestrales ($\mathbf{S_{10}}$ es un espacio muestral finito), y todos son igualmente posibles de lograr.

Entonces $p(a) = 1/12$, para todos los puntos $a \in S_{10}$

11) Sea... $\mathbf{E_{11}}$ = arrojar 2 dados correctos y observar la suma obtenida. Tendremos que combinando las 6 caras del segundo dado se lograrán 36 secuencias diferentes que darán ternas entre 0 y 12.

Si empleamos una "tabla a doble entrada" para encontrar las secuencias es

	1	2	3	4	5	6
1	11_2	12_3	13_4	14_5	15_6	16_7
2	21_3	22_4	23_5	24_6	25_7	26_8
3	31_4	32_5	33_6	34_7	35_8	36_9
4	41_5	42_6	43_7	44_8	45_9	46_{10}
5	51_6	52_7	53_8	54_9	55_{10}	56_{11}
6	61_7	62_8	63_9	64_{10}	65_{11}	66_{12}

$\mathbf{S_{11}} = \{2, 3, 4, 5, ... , 12\}$ y son 11 puntos que, evidentemente no tienen el mismo valor, peso o ponderación. $\mathbf{S_{11}}$ es un conjunto finito.

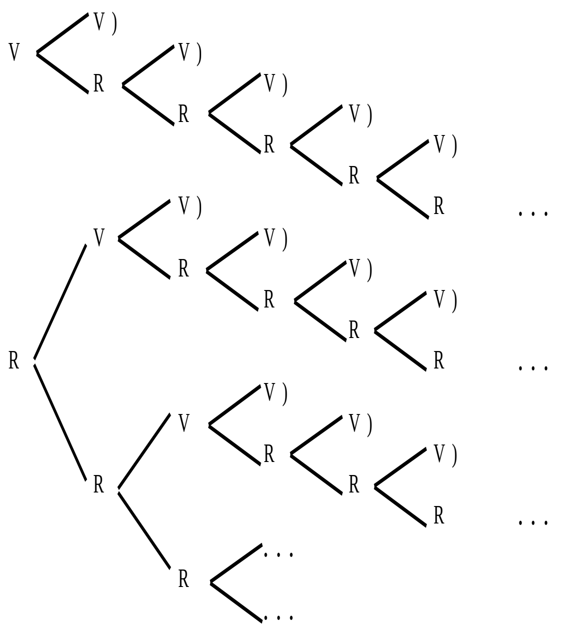
Es p(suma 3)=2/36, puesto que se obtiene a través de 2 secuencias, de las 36, que son igualmente posibles;

p(suma 6) = 5/36 puesto que la "suma 6" se obtiene de las secuencias (1,5) (2,4) (3,3) (4,2) y (5,1) todas las cuáles tienen igual posibilidad de darse.

12) ... E$_{12}$ consiste en seleccionar una bolilla de un bolillero que contiene dos bolillas, una verde y una roja, reponiendo la bolilla en el bolillero luego de la extracción, y se quiere contar el número de resultados diferentes (puntos muestrales) que pueden obtenerse con la condición de que se obtengan 2 bolillas verdes.

Puede razonarse el espacio muestral de la siguiente manera: complete donde encuentre (_)

EXTRACCIONES



Puntos muestrales

V V
V R V
V R R V
V R R R V
V R R R R V

R V V
R _ _ _
R _ _ _ _
R V _ _ _ V

R R V V
R R V _ _
R R V _ _ _

R R R V V

------

y se ve que está formado por un número . . . . . .de puntos muestrales.

13) ... E$_{13}$ es el experimento que consiste en medir la velocidad de todos los vehículos livianos que pasan por la caminera el sábado de 10 a 12 hs. No interesa cuántos vehículos pasan sino sus velocidades.

En este caso **S$_{13}$** es el conjunto formado por todas las velocidades posibles que podrían alcanzar los vehículos livianos en ese lugar en ese momento y estas velocidades pueden ser cualquier número real positivo hasta una hipotética V_M o velocidad máxima posible. Indicamos entonces

$$S_{13} = \{x / x \in R+ \wedge x \le V_M\}$$

y se tiene un conjunto formado por infinitos puntos, no numerables.

Estamos seguros que...

....**E)** Ahora está usted en condiciones de clasificar en espacio muestral finito, infinito numerable e infinito no numerable a cada uno de los $\mathbf{S_i}$ para i = 1,...,7

Hágalo.

Analizaremos algunos mecanismos y principios útiles para formar los espacios muestrales.

Los principios son:

PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN

En general, si los conjuntos A_1 A_2 ... A_K contienen respectivamente n_1 n_2 ... n_k elementos, existen $n_1 . n_2 . ... . n_k$ maneras de combinar un elemento de A_1, uno de A_2, ... y uno de A_k. Esto es lo que se denomina: **principio de la multiplicación**.

PRINCIPIO DE LA ADICIÓN

En general, si los conjuntos A_1 A_2 ... A_K contienen respectivamente n_1 n_2 ... n_k elementos, existen $n_1 + n_2 . ... + n_k$ maneras en que se puede dar el primero ó el segundo ó ... ó el k-ésimo conjunto. Esto lo que se denomina: **principio de la adición**.

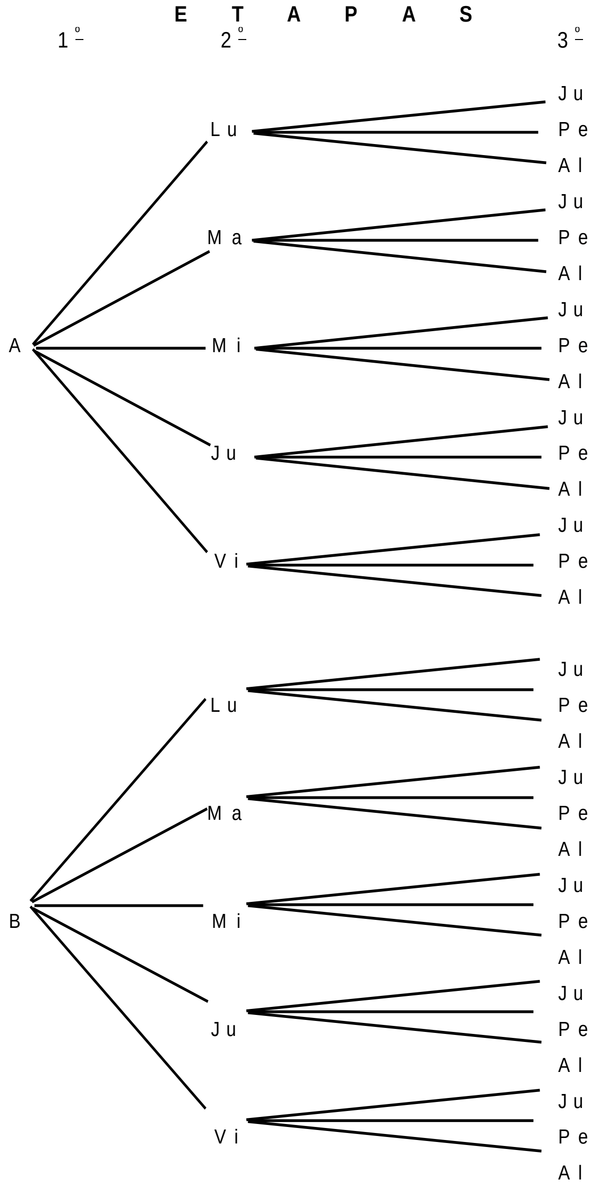
y los analizaremos aplicados a los ejemplos siguientes.

ESQUEMA DEL ÁRBOL (o arborigrama)

14) Supóngase que $\mathbf{E_{14}}$ consiste en clasificar un artículo de la fábrica local según haya sido producido por la máquina A o B, los días Lunes, Martes, Miércoles, Jueves o Viernes y controlado por los capataces Juan, Pedro o Alberto.

¿ De cuántas maneras puede clasificarse el producto?

Si se tiene en cuenta que el experimento consta de 3 etapas (o clasificaciones) se podrá emplear un **Diagrama del árbol** con 3 "ramas" sucesivas para lograr el espacio muestral. Se tienen 2 posibilidades en la primera etapa, 5 en la segunda etapa y 3 en la tercera lo que hace un total de 2.5.3= 30 puntos muestrales a obtener.



Puntos Muestrales

A Lu Ju
A Lu Pe
A Lu Al
A Ma Ju
A Ma Pe
A Ma Al
A Mi Ju
A Mi Pe
A Mi Al
A Ju Ju
A Ju Pe
A Ju Al
A Vi Ju
A Vi Pe
A Vi Al
B Lu Ju
B Lu Pe
B Lu Al
B Ma Ju
B Ma Pe
B Ma Al
B Mi Ju
B Mi Pe
B Mi Al
B Ju Ju
B Ju Pe
B Ju Al
B Vi Ju
B Vi Pe
B Vi Al

$\boxed{2 \, . \, 5 \, . \, 3 \Rightarrow 30 \text{ p.m.}}$

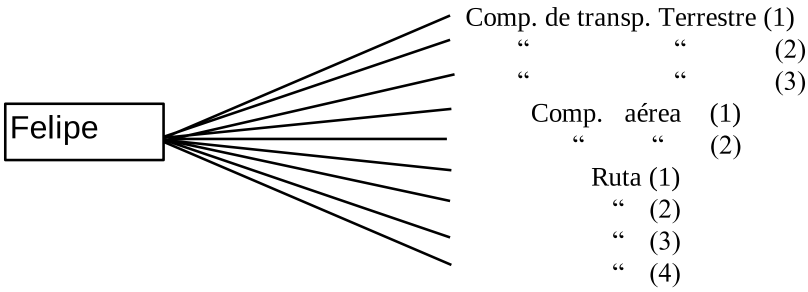
$\boxed{S_{14}}$

Vemos que se obtienen tantos puntos como combinaciones de ramas o trayectorias. Son 30 ramas y cada rama muestra un posible resultado.

15) Supongamos que Felipe desea pasar sus próximas vacaciones en la laguna Perdidita, a al que puede llegar por micro, por avión o en su automóvil. Desde su pueblo, Felipe dispone de tres grandes compañías de transporte terrestre, hay dos líneas de aviación y además podría llegar en su automóvil por tres rutas diferentes.

Se quiere saber de cuántas formas diferentes puede Felipe llegar a Perdidita.

Evidentemente debemos suponer que las formas de viajar no se superponen, no se dan juntas, y entonces el número de formas de maneras es: 3 +2 + 4 = 9 formas.



Esto significa que Felipe podrá viajar por cualquiera de las tres compañías terrestres “o” las dos líneas aéreas “o” las cuatro rutas.

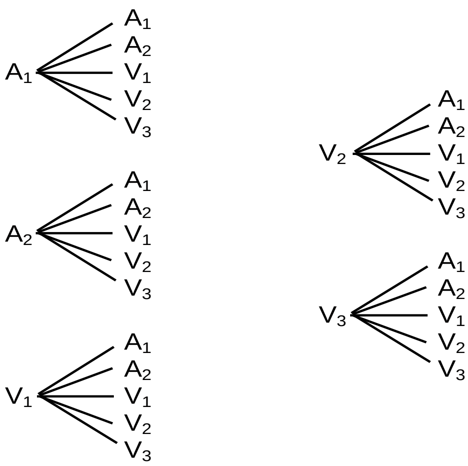
ESQUEMA DE LA URNA

16) Se tiene una urna con 5 bolillas perfectamente distinguibles, 2 amarillas y 3 verdes (A_1 A_2 V_1 V_2 V_3) y se extraen 2 bolillas en forma sucesiva, observando y reponiendo la bolilla luego de cada extracción.

El espacio muestral asociado con $\mathbf{E_{16}}$ se obtiene empleando el esquema de la urna.

Por el principio de la multiplicación se sabe que se tienen 25 secuencias posibles, combinando las 5 bolillas que es posible extraer la primera vez con las 5 posibilidades de la segunda extracción.

En el diagrama que sigue se ve que se tiene un espacio muestral formado por 25 puntos muestrales y todos ellos con un valor p(a)=1/25.



$A_1\ A_1$	
$A_1\ A_2$	
$A_1\ V_1$	
$A_1\ V_2$	V_2A_1
$A_1\ V_3$	$V_2\ A_2$
	$V_2\ V_1$
A_2A_1	$V_2\ V_2$
$A_2\ A_2$	$V_2\ V_3$
$A_2\ V_1$	
$A_2\ V_2$	V_3A_1
$A_2\ V_3$	$V_3\ A_2$
	$V_3\ V_1$
$V_1\ A_1$	$V_3\ V_2$
$V_1\ A_2$	$V_3\ V_3$
$V_1\ V_1$	
$V_1\ V_2$	
$V_1\ V_3$	

S_{16}

Se ha empleado el **esquema de la urna** para el caso con reposición. También se puede armar el espacio muestral "listando" los resultados, como ya hemos hecho con anterioridad.

S_{16} : $\{A_1A_1, A_1A_2, A_1V_1, ..., V_3V_3,\}$ con $5^2= 25$ puntos.

<u>Observar:</u> que en realidad se habla del esquema de la urna porque se trata de extracción de elementos; pero se confecciona un arborigrama.

17) Si con una urna con la misma composición que en el caso anterior ($A_1\ A_2\ V_1\ V_2\ V_3$) se extraen 2 bolillas sin reponer la primera luego de haberla extraído, se advierte que ya no es posible en la segunda extracción obtener la misma bolilla que salió en la primera extracción. Esto implica que el nuevo espacio muestral estará conformado por 5 . 4 = 20 puntos muestrales que serán:

Espacio muestral

$A_1\ A_2$	A_2A_1	$V_1\ A_1$	V_2A_1	V_3A_1
$A_1\ V_1$	$A_2\ V_1$	$V_1\ A_2$	$V_2\ A_2$	$V_3\ A_2$
$A_1\ V_2$	$A_2\ V_2$	$V_1\ V_2$	$V_2\ V_1$	$V_3\ V_1$
$A_1\ V_3$	$A_2\ V_3$	$V_1\ V_3$	$V_2\ V_3$	$V_3\ V_2$

Son 20 puntos muestrales y p = 1/20, para cada uno de ellos. También es

S_{17} : $\{A_1A_2, A_1V_1, ..., V_3V_2,\}$ con 5 . 4= 20 puntos.

Se ha empleado el **esquema de la urna** para el caso **sin reposición.**

Debemos notar que en los dos experimentos anteriores **E_{16}** y **E_{17}**, se tuvo en cuenta que las cinco bolillas eran perfectamente distinguibles y el objetivo no era precisamente observar el color de las bolillas.

Si ahora planteamos que el objetivo es observar el color, será por supuesto:

S_{16}' = {AA, AV, VA, VV} con p(AA) = 4/25;
p(AV) = 6/25;
p(VA) = 9/25;
p(VV) = 6/25

S_{17}' = {AA, AV, VA, VV} con p(AA) = 2/20;
p(AV) = 6/20;
p(VA) =6/20;
p(VV)=6/20

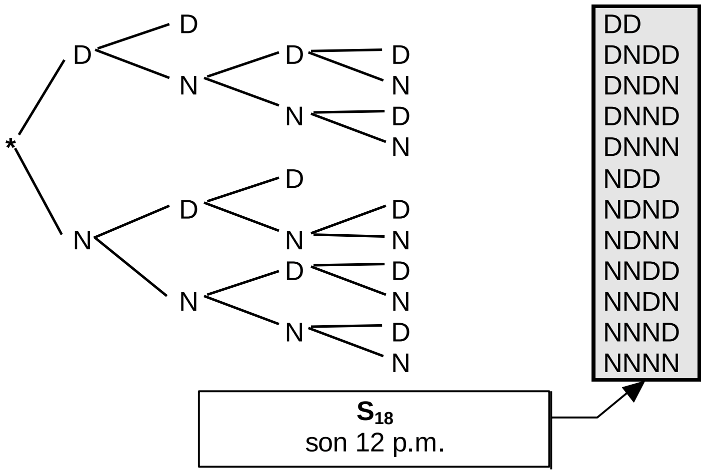
ÁRBOL CON RAMAS TRUNCADAS

18) Veamos cómo construimos el espacio muestral asociado al experimento **E_{18}**. (Problema 1.6 de Meyer)

Los artículos provenientes de una línea de producción se clasifican en defectuosos (D) o no defectuosos (N).

Se observan los artículos y se anota su condición.

Este proceso se continúa hasta que se produzcan dos artículos defectuosos consecutivos o se hayan verificado cuatro artículos, cualquier situación sea la que ocurra primero. Al describir un espacio muestral para este experimento se obtiene un “**<u>árbol con ramas truncadas</u>**”.

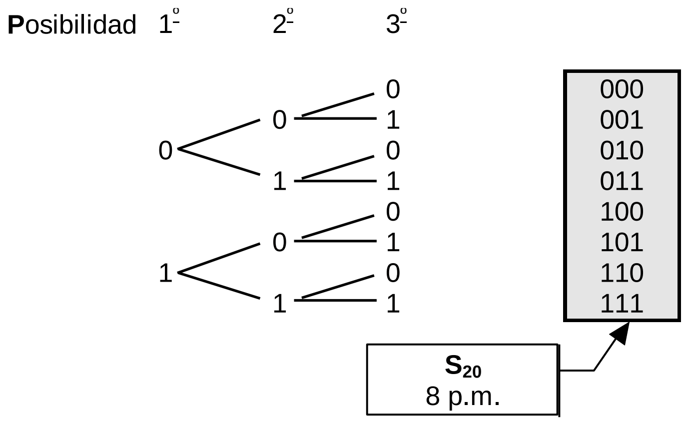


Observe que **S_{12}** fue logrado haciendo este mismo razonamiento.

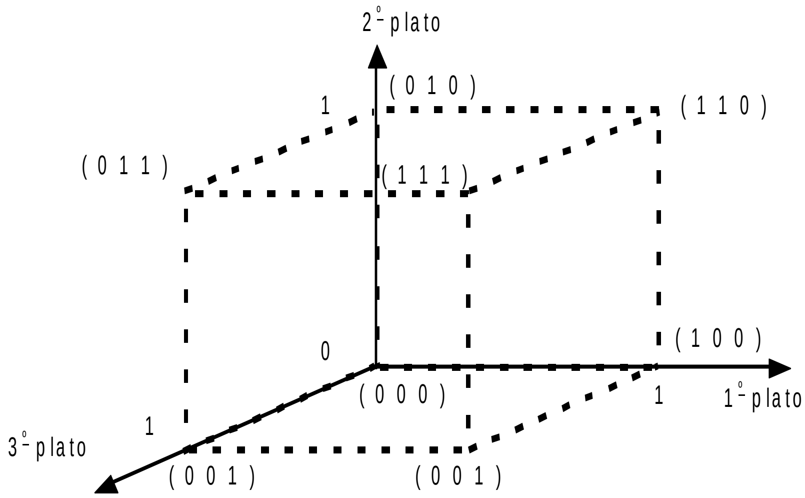
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA TRIDIMENSIONAL

19) En el comedero Lalo Cura se ofrece "langosta Sureña" a tenedor no tan libre, puede repetirse hasta tres veces. Nos interesa si cada comensal come o no langosta Sureña en cada una de las oportunidades.

Si denominamos el comer el plato como "1" y el no comerlo como "0", los resultados del espacio muestral podrían obtenerse con el diagrama del árbol y se tendría:



Pero también podríamos lograr el espacio muestral como una **<u>representación geométrica tridimensional</u>**.



Se espera que realice las actividades que siguen y que le serán útiles para autoevaluarse.

....F) Determine los espacios muestrales en los siguientes ejemplos:

1. Se extrae una bolilla, anotando su color, de una caja que contiene 10 rojas y 90 blancas.
2. Un climatólogo predice si habrá o no una cantidad medible de precipitación pluvial en un día determinado.
3. Se extrae una tachuela registrando el resultado. Si cae hacia arriba o hacia abajo.
4. De una baraja de 52 cartas se extrae una y se observa el palo.
5. De un baraja de 52 cartas se extrae una y se observa sí es o no un as.
6. De una baraja de 52 cartas se eliminan las figuras y los comodines, se extrae una y se observa.

SUCESOS - CLASE EXHAUSTIVA DE SUCESOS

Si a la situación problemática planteada en el ejemplo 6),ahora agregamos las siguientes ideas:

- Llame M al suceso: ninguna de las dos lámparas es defectuosa.
- Llame N al suceso: una de las dos lámparas es defectuosa.
- Llame P al suceso: por lo menos una lámpara es defectuosa.
- Llame Q al suceso: las dos lámparas son defectuosas.

para comprender nuevos conceptos se espera que:

....G) realice las siguientes actividades:

a. Defina los cuatro sucesos por extensión y comprensión.
b. Explique qué entiende por suceso.
c. Encuentre, explique literalmente y defina por extensión y comprensión(*).

$$N \cap P \qquad N \cap Q \qquad M \cup N \qquad M \cap N \qquad M \cup N \cup Q$$

d. Analice qué características tienen M, N y Q (¿ tienen puntos comunes? ¿hay algún otro suceso fuera de ellos que integre el espacio muestral?) a la luz de las conclusiones del ítem anterior.
e. Teniendo en cuenta que le informamos que los sucesos M, N y Q forman una **clase exhaustiva**, puede ¿definir qué se entiende por tal clase?
f. Si le informamos que M y N son sucesos mutuamente excluyentes ¿puede usted explicar qué entiende por tal cosa?

(*)**Nota**: si le es necesario recurra al Anexo de este módulo a fin de repasar ideas básicas de la teoría de conjuntos.

Ahora

....**H)**.es el momento de poner las conclusiones de todos los pequeños grupos de acuerdo.

Hágalo.

....**I)**.Ya puede completar los conocimientos elaborados leyendo atentamente las explicaciones siguientes.

Suceso: A_i. Un suceso A respecto a un espacio muestral S asociado al experimento E, es simplemente un conjunto de resultados posibles del mencionado experimento.

Por ser $A \subset S$, puede estar formado por ningún elemento, uno, dos, hasta coincidir con S.

Estamos diciendo que "S" mismo es un suceso y "∅" también lo es. Cualquier resultado individual también es un suceso.

$A = \{a_1\ a_2\ \ldots\ a_k\}$, cuando S está formado por k eventos o sucesos elementales.

$A = \{\ \}$

$A = \{a_1\ a_3\}$

En general, si "S" está compuesto por n elementos, hay exactamente 2^n subconjuntos o sucesos contenidos en él.

Por ejemplo, si $S = \{a_1\ a_2\ a_3\}$ se tienen $2^3 = 8$ subconjuntos contenidos en S que son

$A_1 = \{\ \}$ $\qquad A_5 = \{a_1\ a_2\}$

$A_2 = \{a_1\}$ $\qquad A_6 = \{a_1\ a_3\}$

$A_3 = \{a_2\}$ $\qquad A_7 = \{a_2\ a_3\}$

$A_4 = \{a_3\}$ $\qquad A_8 = \{a_1\ a_2\ a_3\}$

Si S es infinito no numerable, aparecen dificultades teóricas y en consecuencia no se los tiene en cuenta.

Clase exhaustiva.

- Si se tienen los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, estos forman una clase exhaustiva de "S" si cumplen con las siguientes condiciones
  1) $A_j \cap A_i = \varnothing$ para cualquier $j \neq i$, esto es, si los k sucesos son mutuamente exclusivos.
  2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$, esto es, los k sucesos "completan" el espacio muestral "S".

20) Sea... **E_{20}**.: se arroja una moneda 3 veces y se observa el número de cruces que aparecen.

a. Use un "diagrama del árbol" para encontrar las secuencias que forman los puntos del espacio muestral.

b. Razone cómo se construye el diagrama y de qué manera se "calcula". ¿Cuántos puntos deberá tener el espacio muestral?. ¿Qué "principio" usa?.

c. Exprese cuál es el espacio muestral; ¿de qué carácter es?

d. Razone cuál es el valor de cada punto muestral. ¿Todos los puntos tienen el mismo valor?. ¿Por qué?. ¿ Cuál (o cuáles) es (o son)?.

e. Complete:

Si definimos en **S_{20}**. a:

el suceso A que es "se obtiene ninguna cruz"

el suceso B que es "se obtiene al menos una cruz"

es A = {(_ _ _)} = {_}

y es B={(CCX) (_ _ _) (_ _ _) (_ _ _) (_ _ _) (_ _ _) (_ _ _)}

que es lo mismo que decir que

B = {_ ,_ ,_},donde _ ,_ ,_ representan el hecho de tener una, dos, tres cruces, respectivamente.

Se ve que estos sucesos tienen puntos comunes y que existe otro posible suceso a definir en este **S_{20}**. Los sucesos A y B forman una clase exhaustiva.

Le pedimos ahora que realice la siguiente actividad

....**J)** Dado el experimento:

21) Sea... **E_{21}** el experimento que consiste en arrojar un dado correcto y sean los sucesos "obtener número par", "obtener número impar", "obtener menor o igual que 4", "obtener número 4", "obtener número mayor o igual que 5".

a. Encuentre S_{21}.
b. Defina los sucesos A_i por extensión y comprensión.
c. Encuentre los sucesos
  1. "número par y menor o igual que cuatro"
  2. "número par y número impar"
  3. "número par o impar"
  4. "número menor o igual que 4 y mayor o igual que 5"
  5. "número menor o igual que 4 ó mayor o igual que 5"
d. Razone:
  encontrará seguramente 2 clases exhaustivas diferentes; distíngalas y fíjese que cumplen las condiciones exigidas.

SUCESO CIERTO - SUCESO IMPOSIBLE

Si en el experimento E_1, ya analizado, se define el suceso

M= {obtener número siete}

se ve que este suceso no tiene puntos puesto que es un suceso imposible esto es, que no puede ocurrir nunca.

Si se define

N = {obtener algún número entre 1 y 6}

es $N = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 6\}$

y entonces $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S_1$

y al suceso, que coincide con el espacio muestral, se lo denomina **suceso cierto o seguro**.

....**K)** Se le pide en este momento que:
22) Dado el E_{10} ya presentado en el que ahora se definen los sucesos:

A_1 ={la enfermera proporciona el medicamento B}
A_2 = {el medicamento A se proporciona a los enfermos de camas pares}
A_3 ={los 3 medicamentos se proporcionan a los enfermos de camas pares}
A_4 ={los 3 medicamentos se proporcionan a los enfermos de camas impares}

forme los conjuntos correspondientes a los sucesos

(1) A_1	(2) A_2	(3) A_3	(4) cierto
(5) $A_1 \cap A_2$	(6) $A_1 \cap A_3$	(7) A_3^c ó A_3	(8) $A_2 \cup A_4$
(9) $A_3 \cup A_4$			

FRECUENCIA RELATIVA

Recordemos que $h_i = f_i / n$ ó f_i / N es la frecuencia relativa. Si ahora decimos que dado un posible resultado A, su frecuencia relativa es el número de veces que se da A en relación con el número de veces que se realiza o repite el experimento, estamos definiendo

$\tilde{f}(A) = f(A) / n$ como frecuencia relativa del suceso A.

Evidentemente no es $\tilde{f}(A)$ en general una constante, pero sí intuimos por los razonamientos anteriores, que existe una estabilidad, a la larga, de esa frecuencia relativa.

La **frecuencia relativa f(A)** tiene la siguientes propiedades *(Meyer)*

1) $0 \leq \tilde{f}(A) \leq 1$
2) $\tilde{f}(A) = 1$ sí y sólo sí A ocurre cada vez(siempre) en las n repeticiones.
3) $\tilde{f}(A) = 0$ sí y sólo sí A nunca ocurre en las n repeticiones.
4) Si A y B son dos sucesos que se excluyen mutuamente (conjuntos disjuntos) entonces
$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B)$
5) $\tilde{f}(A)$ basado en n repeticiones converge en un valor fijo que podemos llamar $p(A)$, cuando $n \to \infty$.

EJEMPLOS:

1. Si dado E_7, se quiere calcular la frecuencia relativa del resultado, observando el número 3 se tiene que
$\tilde{f}(3) = 1/10$
ya que el resultado 3 se da de una sola forma entre las 10 que son igualmente posibles.

2. En E_8 será $\tilde{f}(0) = 1/4$, puesto que cero de cruces se da de una sola forma entre las 4 formas posibles; en cambio

$\tilde{f}(1)$=2/4, puesto que una cruz puede obtenerse de las secuencias CX ó XC, es decir de dos formas diferentes entre cuatro posibles.

3. En **E_{11}** , $\tilde{f}(3)= \tilde{f}$ (de obtener suma 3) = 2/36, puesto que se lo obtiene a través de las secuencias (1,2) ó (s,1) que son 2 de las 36 secuencias posibles.

4. Si en **E_{11}** queremos calcular
$\tilde{f}$ (obtener suma menor ó igual que 4) = $\tilde{f}$ (suma≤ 4),
se razona que se tiene una forma de obtener suma 2, dos formas de obtener suma 3 y tres formas de obtener suma menor o igual que 4 y como en total hay 36 secuencias, es

$$\tilde{f}\,(\text{suma} \leq 4)=6/36.$$

Esperamos ahora que realice la siguiente actividad:

....L) Dados los sucesos A y B y teniendo en cuenta que pueden darse cuatro resultados diferentes y de tal forma que n_1 es el número de veces que aparece A y no aparece B, n_2 es el número de veces que aparece B y no aparece A, n_3 es el número de veces que aparece A y B, n_4 es el número de veces que no aparece A ni B,

probar que:

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(A) + \tilde{f}(A \cap B)$$

....LL) Retome la actividad **G**, calcule $\tilde{f}(M)$ $\tilde{f}(N)$ $\tilde{f}(Q)$ y $\tilde{f}(M \cup N \cup Q)$ y relaciones sus conclusiones.

PROBABILIDAD
TEORÍA CLÁSICA Y TEORÍA DE LA FRECUENCIA RELATIVA

Ya ha trabajado varios conceptos sumamente útiles y necesarios, ha realizado la suficiente ejercitación y está en condiciones de definir probabilidad.

En realidad usted ya ha calculado probabilidades y ha usado las diferentes teorías y hasta ha demostrado algún teorema básico del cálculo de probabilidades.

....**M)**.Recurra ahora al resumen que figura en Anexo y/o a alguno de los libros que figuran en la bibliografía, lea y analice definiciones, ventajas, críticas, etc., de las teorías: clásica y de la frecuencia relativa.

Cuando termine de leer detenidamente deberá ser capaz de responder algunas preguntas e interpretar algunos conceptos.

Hágalo.

- Explique con sus palabras qué expresa la teoría clásica.
- ¿ Por qué se llama teoría de la probabilidad “a priori”?
- ¿ Cuáles son los inconvenientes de la teoría clásica? Ejemplifique.
- ¿ Qué significa la expresión $P(A) = \underset{M\to\infty}{lím} \tilde{f}A$ y qué teoría representa?
- ¿ Por qué se llama teoría de la probabilidad “a posteriori”?
- ¿ Cuáles son las diferencias entre las dos teorías?
- Suponga que a través de la teoría de la frecuencia relativa llega a obtener p(c) = 1/3 cuando el experimento consiste en arrojar una moneda ¿qué significa esto?
- ¿ Cuál es la crítica que se le hace a la teoría de la frecuencia relativa?
- ¿ Qué condiciones cree que tener un número real “p” para ser considerado realmente como una probabilidad y que sea significativo?

TEORÍA AXIOMÁTICA DE LA PROBABILIDAD

Seguramente usted ya llegó a la conclusión de que el número real que asigne una probabilidad al suceso $A \subset S$ deberá reunir ciertas propiedades y deberá "mejorar" las ideas proporcionadas por las teorías vistas, solucionando sus inconvenientes. Es así que se piensa que resultará positivo un número que cumpla con las características de las frecuencias relativas, sin que para encontrarlo sea necesario repetir el experimento "n" veces.

Sea E un experimento aleatorio y S el espacio muestral asociado con ese experimento aleatorio y sea P una función que asigna un número real a cada suceso $A \subset S$.

Llamamos **probabilidad del suceso A** y denotamos con P(A) al número real que satisface los siguientes axiomas:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$
(2) $P(S) = 1$
(3) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son sucesos que se excluyen mutuamente de par en par, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{K} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

(ya advertimos que no conocemos cuándo el "n" es suficientemente grande) para lograr la necesaria regularidad estadística

Se da entonces **la definición axiomática de la probabilidad.**

En particular, el tercer axioma se reduce a

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B son mutuamente excluyentes.

PROPIEDADES GENERALES DE P(A)

Existen propiedades que pueden demostrarse empleando los tres axiomas mencionados.

1. Si $\varnothing$ es el conjunto vacío, entonces

$P(\varnothing) = 0$

2. Si A y A' son sucesos complementarios, entonces

$P(A) = 1 - P(A')$

3. Sean A y B dos sucesos cualesquiera, entonces

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

y en el caso de que sean mutuamente excluyentes, es

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4. Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera, entonces

$(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

(generalización de la tercera propiedad)

5. Sean A y B dos sucesos tales que $A \subset B$.

Entonces es $P(A) \leq P(B)$

Para demostrar las propiedades mencionadas se procede en todos los casos a definir los sucesos de interés o el S como unión de sucesos mutuamente excluyentes, aplicando luego alguno o varios de los axiomas vistos.

Se espera ahora que analice atentamente el procedimiento que seguiremos al hacer la siguiente demostración

Demostremos la 5ta. propiedad

$$\mathbf{P(A) \leq P(B), \quad si\ A \subset B}$$

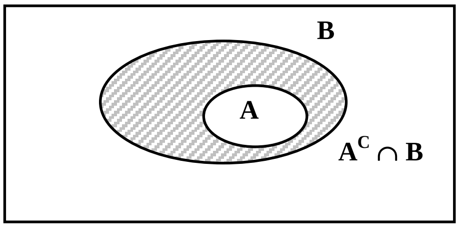
Para ello tenemos en cuenta que puede expresarse B como unión de 2 conjuntos disjuntos

$$B = A \cup (B \cap A)$$

y entonces, por el 3er. axioma es

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A)$$

y como por el 1er. axioma

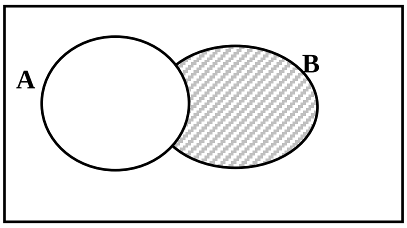


$P(B \cap A) \geq 0$ se ve que debe ser $P(B) \geq P(A)$ o lo que es lo mismo:

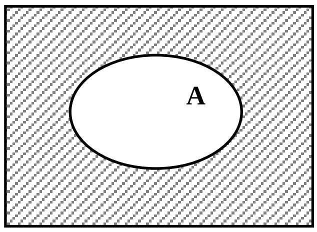
$$P(A) \leq P(B)$$

Está ya en condiciones de realizar la siguiente actividad, teniendo en cuenta que para realizar las otras cuatro demostraciones será útil emplear los diagramas de Venn que se acompañan como ayuda. Recuerde que el procedimiento siempre consiste en descomponer algún conjunto en unión de 2 o más conjuntos disjuntos.

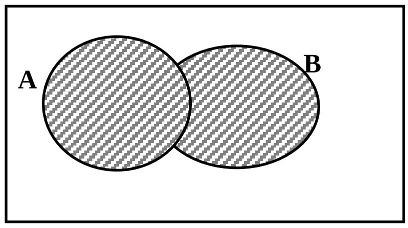
....**M).** Reúnase con su pequeño grupo y aplique su dominio de los axiomas demostrando las restantes propiedades.



$B \cap A^C$



A^C



$B \cup A$

Verifique las respuestas de su grupo con el profesor o revisando la bibliografía (Meyer).

EVENTOS COMPUESTOS

Para formar un evento compuesto se combinan 2 o más eventos simples de tal forma que es necesario analizar con mucho cuidado si se emplean los términos "Y", "O", "NO", "NI", "DADO", y otros, pero además analizar y leer detenidamente cuál es concretamente la pregunta a responder.

Los eventos compuestos son :

1. P()= P(A_c) (Prob. de evento complementario)
2. P(A $\cup$ B) (Prob. de que ocurra A ó B)
3. P(A $\cap$ B) (Prob. de que ocurran A y B)
4. P(A / B) (Prob. de que ocurra A si ya ha ocurrido B)

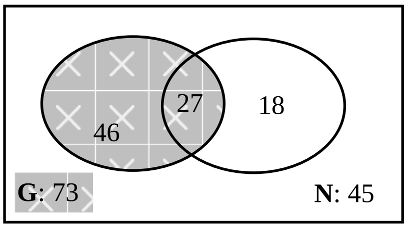
Tenga en cuenta que muchos de los conceptos a definir ya han sido empleados e interpretados al menos intuitivamente.

Desarrollaremos los temas a través de algunos ejemplos y luego formalizaremos las definiciones.

Realicemos en conjunto la siguiente actividad:

....**N)** De un grupo de 100 socios del Club "El Perejil",
- 73 están anotados en las clases de gimnasia
- 45 hacen natación.
- 27 toman clases de gimnasia y hacen natación.

Representemos la situación a través de diagramas de VENN.



Si llamamos n (G) al número de socios que hacen gimnasia y n(N) al número de socios que hacen natación es

$n(G \cup N) = n(G) + n(N) - n(G \cap N)$
$n(G \cup N) = 73 + 45 - 27$
$n(G \cup N) = 91$

Esto es, hacen gimnasia o natación 91 de los 100 socios.

No hacen gimnasia ni natación (100-91) socios
$n(\overline{G} \cap \overline{N}) = 100 - 91 = 9$ socios.

Nos preguntamos :

¿Cuál es la proporción (frecuencia relativa) de socios que hacen natación?

$$\tilde{f}(N) = \frac{n(N)}{n} = \frac{45}{100}$$

¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un socio que hace natación?

$$P(N) = \frac{45}{100}$$

¿Cuál es la frecuencia relativa de socios que no hacen natación ? ¿Y su probabilidad ?

$$\tilde{f}(N) + \tilde{f}(\bar{N}) = \tilde{f}(S) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{f}(\bar{N}) = 1 - \tilde{f}(N)$$

$$P(\bar{N}) = 1 - P(N) = 1 - \frac{45}{100} = \frac{55}{100}$$

¿Cómo son los sucesos y? ¿Por qué ? ¿Qué tipo de "clase" forman ?

¿Cuál es la prob. de que un socio haga gimnasia o natación?

P(G ó N)= P(G ∪ N)= 73/100 + 45/100 - 27/100 = 91/100

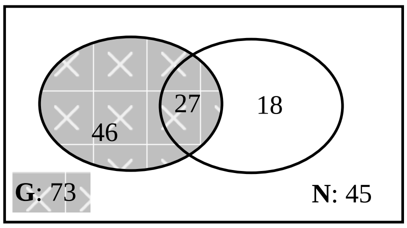
¿Cuál es la prob. de que un socio haga gimnasia y natación?

P(G y N) = P (G ∩ N)= 27/100

¿Cómo llamamos a los sucesos que sí pueden "darse juntos"?

Si consideramos solo a los que hacen gimnasia,

¿ cuál es la probabilidad de encontrar un socio que haga natación?



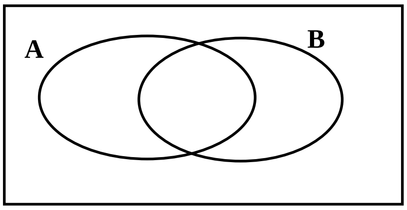
P(N / G)= 27/73
(Note que el símbolo "/" no significa "dividido")

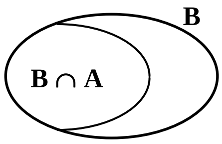
Observamos que $n(_G)$= 73 ; $n(_{N\,/\,G})$ = 27

$$\tilde{f}(N/G) = 27/73 \quad \text{o bien} \quad \frac{n(G\ y\ N)}{n(G)} = \frac{\tilde{f}(G\ y\ N)}{\tilde{f}(G)} = \frac{\tilde{f}(G \cap N)}{\tilde{f}(G)} = \frac{27/100}{73/100} = \frac{27}{73}$$

En general, dados A y B es como hemos visto.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$$





Creemos que ya está en condiciones de leer con detenimiento las definiciones que siguen, relacionándolas con el desarrollo de la actividad anterior.

Evento complementario: Es el conjunto de todos los puntos muestrales que no pertenecen al conjunto.

Dado A, es $\overline{A}$ ó A_c el "complemento de A".

Eventos mutuamente excluyentes: Son tales que la concurrencia de uno impide la ocurrencia del otro, en un mismo ensayo o experimento básico. A y B son mutuamente excluyentes sí y sólo sí $A \cap B = \varnothing$

Probabilidad Condicional: Dados dos sucesos A y B, la probabilidad de que ocurra A habiendo ocurrido B (o de que A esté condicionado a la aparición previa de B), se escribe: $P(A/B)$

Eventos probabilísticamente independientes: Son aquellos en que la ocurrencia de uno no modifica la probabilidad de ocurrencia del otro en más de un ensayo o experimento básico.

A y B son independientes

si $P(A)= P(A/B)$ o $P(B)= P(B/A)$

Regla de la suma o de la adición : Sean A y B dos eventos definidos en S

Es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

y es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

si A y B son mutuamente excluyentes.

Generalización de la regla de la suma : Sean A, B y C, sucesos no excluyentes

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Sean más de dos sucesos mutuamente excluyentes.

$$P(A \cup B \cup \ldots \cup M) = P(A) + P(B) + \ldots + P(M)$$

Regla del Producto :

Sean A y B dos sucesos definidos en S

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

o bien

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Si A y B son independientes

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A)$$

Seguramente ahora usted es capaz de realizar las siguientes actividades :

....**Ñ)** Las probabilidades de que en el proceso de control se clasifique al producto fabricado como muy bueno (MB), bueno (B), regular (R), y malo (M), son respectivamente 0,28; 0,47; 0,19; y 0,06 .

¿Cuál es la probabilidad de que se lo clasifique como
(a) MB o B
(b) no malo
¿ Son excluyentes los sucesos enumerados?.

....**O)**.Los sucesos A, B y C forman una clase exhaustiva. La probabilidad de ocurrencia de B es tres veces la de A pero C es a su vez dos veces mas probable que B .¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos dados?

....**P)** Si un automóvil tiene una probabilidad de 0,27 de tener los frenos en mal estado, una probabilidad de 0,17 de tener los neumáticos muy gastados y una probabilidad de 0,41 de tener frenos en mal estado y/o neumáticos muy gastados, ¿cuál es la probabilidad de que el automóvil tenga frenos en mal estado y neumáticos muy gastados?

....**Q)** Trabaje nuevamente con las frecuencias relativas a fin de verificar a través de ellas el Teorema del Producto. Escriba luego sus conclusiones en términos de Probabilidad.

$$\tilde{f}(A) = \frac{n_1 + n_2}{n} \qquad \tilde{f}(B) = \frac{n_1 + n_3}{n} \qquad \tilde{f}(A \cap B) = \frac{n_1}{n}$$

$$\tilde{f}(A \cup B) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n}$$

$$\tilde{f}(B / A) = \frac{n_1 / n}{{n_1+n_2}/{n}} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \qquad \tilde{f}(A / B) = \ ?$$

Probar que

$$\tilde{f}(A \cap B) = \tilde{f}(A) \cdot \tilde{f}(B / A)$$

y que

$$\tilde{f}(A \cap B) = \tilde{f}(B) \cdot \tilde{f}(A / B)$$

....**R) (I)** En una oficina se tienen 100 máquinas de escribir. Algunas son eléctricas (E) y otras manuales (M). Además algunas son nuevas (N) y otras usadas (U). Se tienen los siguientes datos :

n(E)=60 n(N)= 70 n(VM)=10 n(M)= 40 n(VE)=20

Con esta información es posible "armar" una tabla a doble entrada

	E	**M**	
N	.....	......	.....
V	.....	30	.....
	60	40	**100**

1. Si una persona entra a la oficina, elige una máquina al azar y descubre que es nueva, ¿cuál es probabilidad de que sea eléctrica?

$$P_{(E\ /\ N)} = \frac{P(\ldots \cap \ldots)}{P_{(\ldots)}} = \_\_\_\_\_ = \frac{n(\ldots \cap \ldots)}{n_{(\ldots)}} = \_\_\_\_\_$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione una máquina eléctrica?

Pensemos que solo nos interesa que sea eléctrica (nueva o vieja) y por eso observamos el "margen" de la tabla y obtenemos:

$P(E) = 60 / 100$,probabilidad marginal

3. Con el mismo razonamiento tratemos de responder cuál es la probabilidad de que se seleccione una máquina nueva.

$P_{(N)} = ...$

4. ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione una máquina eléctrica o vieja?

P...

5. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una máquina manual y nueva? (Razone con cuidado analizando detalladamente la tabla)

P...

....**(II)** Supongamos ahora que cambia la situación anterior y se tiene:

	E	V	
N	60	10	70
V	0	30	30
	60	40	**100**

Todas las máquinas eléctricas son nuevas y todas las viejas son manuales. Se advierte que existe una relación entre ambas características.

Si tuviéramos

	E	V	
N	30	0	70
V	30	40	30
	60	40	**100**

Parece que tambien existe alguna relación

Analice en ambos casos si las características (tipo y antigüedad) son independientes. . . .

....**(III)** Si se tiene ahora:

	E	V	
N	42	28	70
V	18	12	30
	60	40	**100**

¿Son N y E dos sucesos independientes?

....**S)** Conteste verdadero (V) si la afirmación es correcta siempre. Si existe alguna duda porque falta determinar cuándo es correcta, agregue lo necesario. Si la afirmación es falsa, escriba (F) y aclare por qué lo es.

1. La probabilidad de un evento es siempre un número positivo.
2. La probabilidad de un evento es siempre un número entero.
3. Los puntos muestrales son igualmente probables.
4. El valor encontrado a través de la teoría de la frecuencia relativa, (para la probabilidad experimental) es siempre igual a la probabilidad teórica asignada a ese mismo evento.
5. Si dos eventos no se superponen son mutuamente excluyentes.
6. Si dos eventos son mutuamente excluyentes también son independientes.
7. Si dos sucesos son complementarios, la suma de sus probabilidades es casi uno.
8. Si dos sucesos son excluyentes la suma de sus probabilidades es exactamente uno.
9. Si los puntos muestrales correspondientes a dos sucesos forman conjuntos disjuntos, entonces los sucesos son independientes.
10. Al analizar un evento compuesto, el uso de la palabra “y” requiere del empleo del Teorema de la Suma.

Repasemos el teorema del producto...

Ya vimos que

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B / A)$$
$$= P(B) \,.\, P(A / B)$$

y que

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$ si A y B son probabilísticamente independientes

y entonces

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{(Probabilidad Condicional)}$$

....**T)** Analicemos el siguiente ejemplo:

Se tiene una caja con 50 fusibles, de los cuales 10 están rotos o defectuosos(D). Si se selecciona al azar una muestra de 5 fusibles, sacándolos sucesivamente de la caja sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que encontremos los 5 fusibles defectuosos o rotos?

Sean los eventos

A_1 : Obtener fusibles defectuosos en la primera extracción
A_2 : Obtener fusibles defectuosos en la segunda extracción
A_3 : Obtener fusibles defectuosos en la tercera extracción
A_4 : Obtener fusibles defectuosos en la cuarta extracción
A_5 : Obtener fusibles defectuosos en la quinta extracción

entonces

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_{31} \cap A_{41} \cap A_5) =$$
$$P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1).P(A_3 / A_1 \cap A_2).$$
$$P(A_4 / A_1 \cap A_2 \cap A_3).P(A_5 / A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$P = \frac{10}{50}.\frac{9}{49}.\frac{8}{48}.\frac{7}{47}.\frac{6}{46}$$

....**U)** Si en el ejemplo anterior se repone el fusible en la caja luego de ser observado, los resultados son independientes (la probabilidad de obtener 1 fusible roto es igual a 10 / 50 en cada caso).

$$P = P(A_1) \,.\, P(A_2) \,.\, P(A_3) \,.\, P(A_4) \,.\, P(A_5) = (\,10/50)^5$$

REGLA O TEOREMA DE BAYES

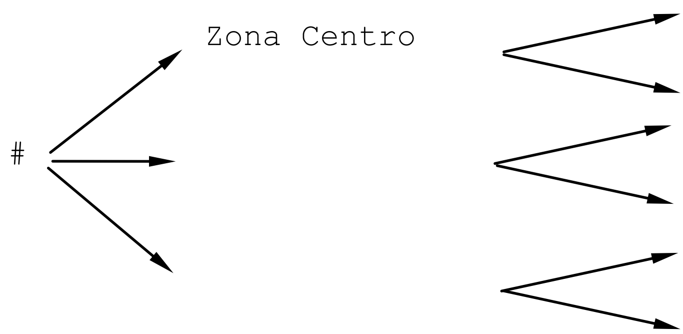
Analizaremos un ejemplo y a través de su desarrollo deduciremos y aplicaremos la **fórmula de Bayes** o **de la probabilidad de las causas.**

....**W)** Una empresa local de turismo organizó una excursión a la península y destinó un colectivo a fin de recoger a los pasajeros y llevarlos al aeropuerto.

Se recogió el 60% de los excursionistas en la zona centro de Comodoro Rivadavia, el 35 % en Km.3 y el resto en Km.5.

Si el 30 %, el 55 % y el 80 % de los excursionistas correspondientes a los tres lugares de subida fueron estudiantes secundarios:

a. Dibuje el diagrama del árbol correspondiente, indicando la probabilidad en cada rama.



b. Identifique

- La probabilidad de que un pasajero suba en Km.3.
- La probabilidad de que un pasajero suba en la zona centro.
- La probabilidad de que un pasajero que subió en zona centro sea un estudiante secundario.
- La probabilidad de que un pasajero que subió en Km.5 no sea estudiante secundario.

c. Identifique y calcule

- La probabilidad de que un pasajero sea estudiante secundario.
- La probabilidad de que un pasajero sea estudiante secundario y haya subido en Km.3.

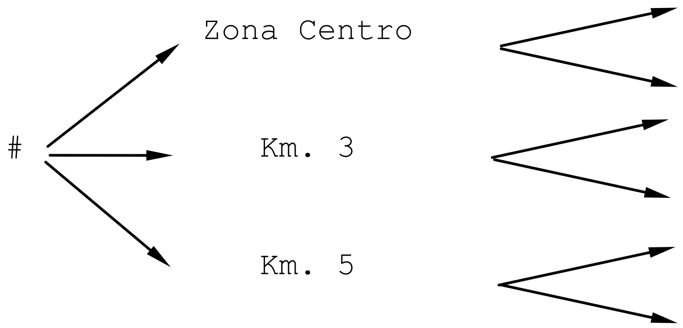
d. Empleando el concepto:

$$P = \frac{\text{nro. de casos favorables}}{\text{nro. de casos posibles}} = \frac{\text{f de casos favorables}}{\text{f de casos posibles}}$$

se espera que ahora

- calcule la probabilidad de encontrar un excursionista que haya subido en Km.3, sabiendo que es estudiante secundario.

e. Generalice.

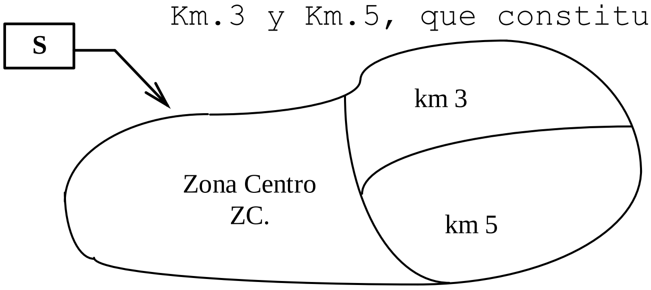


Nota : Seguramente en el ítem (d) encontró

$$P_{(Km.3\ /\ Es.\ Sec.)} = \frac{P_{(Km.3)}\ .\ P_{(Es.\ /\ Km.3)}}{P_{(Km.3)}..P_{(Es./Km.3)} + P_{(ZC.)}.P_{(Es./\ ZC.)} + P_{(Km.5)}.P_{(Es./Km.5)}}$$

Trataremos ahora de analizarlo que hemos hecho en el ejemplo anterior.

-.Se tiene una clase exhaustiva de 3 sucesos: ZC., Km.3 y Km.5, que constituyen una partición de S.



$S = ZC. \cup Km.3 \cup Km.5$

Recordemos

Los conjuntos forman una partición si ...

1. $B_i \cap B_j <> \emptyset$, $\forall$ i<>j (son conjuntos disjuntos).

2. $\cup$ B_i = 1, (completan S). todos

3. son clase exhaustiva.

Se tiene Es.$\subset$ S(estudiantes secundarios, conjunto "contenido" en el total de los excursionistas) de tal forma que:

$$Es = (Es. \cap ZC.)\ U\ (Es. \cap Km.3)\ U\ (Es. \cap Km.5)$$

y como es

$$P(Es.) = P(Es. \cap ZC.) + P(Es. \cap Km.3) + P(Es. \cap Km.5)$$

pero

$$P(Es \cap ZC.) = P(ZC.) . P(Es. / ZC.)$$, igual que los otros

entonces

$$P(Es.) = P(ZC.) . P(Es. / ZC.) + P(Km.3) . P(Es. / Km.3) + P(Km.5) . P(Es. / Km.5)\ P(Es.) =$$
$$= \sum P(\text{zona subida}) . P(Es / \text{Zona subida})$$

Por otra parte, si se quiere calcular la probabilidad de que, habiéndose seleccionado un estudiante secundario, éste haya subido al colectivo en Km.3 P(Km.3 /Es.), esto es, se quiere calcular la probabilidad de que el evento "Es", que ha ocurrido, sea el "efecto" de la "causa" Km.3, o dicho de otra manera: que bajo la hipótesis de que el efecto "Es" ha sido observado, se quiere calcular la probabilidad de que esté actuando la "causa" Km.3, se tiene que

$$P(Km.3 / Es.) = \frac{P(Km.3 \cap Es.)}{P(Es.)} =$$
$$= \frac{P(Km.3) . P(Es. / Km.3)}{\sum P(\text{zona subida}) . P(Es. / \text{zona subida})}$$

que es una probabilidad a posteriori o posterior y sólo interesa si se sabe que el evento condicional "Es." ha ocurrido. con anterioridad

En General

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A / B_1)}{\sum P(B_1) \cdot P(A / B_1)}$$

.....Formalicemos lo hecho hasta aquí.

Supongamos que se tiene una clase exhaustiva de “n” sucesos $B_i = \{ B_1, B_2, ..., B_n \}$, que por eso mismo constituye una partición de S.

Los conjuntos B_i forman una partición si se da que:

1. $B_i \cap B_j <> \emptyset, \forall\ i <> j$
2. $U\ B_i = 1$
3. $P(B_i) > 0, \forall\ i$

Por ejemplo, si un experimento consiste en seleccionar elementos numerados de 1 a 8 de una urna en forma aleatoria, los sucesos

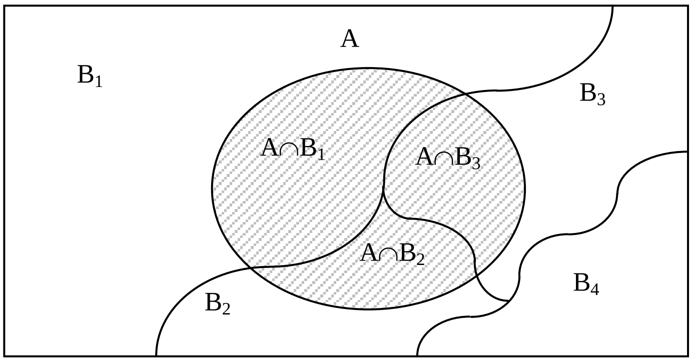
A = { 1, 3, 5, 7 }

y B = { 2, 4, 6, 8 } forman una partición

pero

M = { 1, 2, 3, 4, 5 }

y P = { 2, 4, 6, 8 } no la forman.



Por tratarse de una clase exhaustiva los sucesos B_i son mutuamente excluyentes y completan el espacio muestral.

$$S = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n$$

Supongamos que, además, se tiene un subconjunto $A \subset S$.

Se verifica que:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_u)$$

Por generalización del tercer axioma, es

$$P(A) = P(A \cap B_1) \cup P(A \cap B_2) \cup \ldots \cup P(A \cap B_u)$$

Aplicando el teorema del producto es, por ejemplo

$$P(A \cap B_1) = P(B_1) \,.\, P(A / B_1)$$

y entonces

$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A / B_1) + P(B_2) \,.\, P(A / B_2) + \ldots + P(B_n) \,.\, P(A / B_n)$$

Eso es, la probabilidad del resultado final, se obtiene como suma de las probabilidades de que el resultado de interés se dé con cada una de las causas que lo originaron.

$$\boxed{P(A) = \sum P(B_i) \,.\, P(A / B_i)}$$

Por otra parte, si se quiere calcular la probabilidad de que, habiéndose obtenido A, éste provenga de un B_i determinado, por ejemplo B_3, se quiere calcular la probabilidad de que el evento A, que ha ocurrido, sea el "efecto" de la "causa" B_3, o dicho de otra manera que bajo la hipótesis de que el efecto A ha sido observado se quiere calcular la probabilidad de que está actuando la causa B_3, se tiene que

$$P(B_3 / A) = \frac{P(B_3 \cap A)}{P(A)}$$

y entonces, como $P(B_3 \cap A) = P(B_3) \,.\, P(A/B_3)$ es

$$\boxed{P(B_3 / A) = \frac{P(B_3) \,.\, P(A / B_3)}{\sum P(B_i) \,.\, P(A / B_i)}}$$

expresión conocida como **Regla** ó **Teorema de Bayes** ó **Regla de la Probabilidad de las Causas dado el efecto**.

En la práctica, la dificultad se encuentra en que puede ser difícil conocer o asignar un valor numérico a las $P(B_i)$, llamadas probabilidades a priori o probabilidades previas.

La $P(B_i / A)$ que se obtiene empleando la regla de Bayes se denomina probabilidad posterior o a posteriori y sólo nos interesa si se sabe que el evento condicionado A ha ocurrido.

....**X)** Creemos que ya está en condiciones de resolver en forma individual la ejercitación que se le indique en su trabajo práctico.

Hágalo .