## REPASO DE CIERTOS CONCEPTOS ÚTILES DE TEORÍA DE CONJUNTOS

Recuerde que:

- $A \cup B$ representa el evento que ocurre sí y sólo sí ocurre A u ocurre B u ocurren ambos A y B a la vez.

- $A \cap B$ representa el evento que ocurre sí y sólo sí A y B ocurren simultáneamente.

- $A \cap B = \varnothing$ el evento vacío se da cuando no es posible que A y B ocurran simultáneamente y entonces A y B son conjuntos disjuntos.

- A y B son eventos mutuamente excluyentes: si no se dan juntos y entonces $A \cap B = \varnothing_j$ A y B no tienen intersección mutua, no tienen puntos en común.

- $A \subset B$ ó $B \supset A$ si todos los elementos del evento A están contenidos también en el evento B, A es subevento de B.

- Si $A = B$ entonces si A ocurre, ocurre B necesariamente.

- Sean $A_1\ A_2 \ldots A_m$ varios eventos contenidos en S.

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots . \cup A_m = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$$

es el evento que consta de todos los elementos contenidos en uno o más de esos eventos.

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots . \cap A_m = \bigcap_{j=1}^{m} A_j$$

es el evento que consta de los elementos comunes de los $A_j$, es decir de los contenidos en esos m eventos simultáneamente.

- Si se tiene $A_1, A_2, \ldots A_m, \ldots$ un número infinito de eventos, es

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \longrightarrow A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_j \cap \ldots$$

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \longrightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_j \cup \ldots$$

- Si los Aj son tales que al ocurrir cualquiera de ellos se hace imposible la ocurrencia de los demás, entonces $A_j \cap A_k = \emptyset$ para cualquier "j" y cualquier "k" $\neq$ j y son eventos mutuamente exclusivos o sin intersección mutua.
- Si $A \subset S$ , es $A^c = \overline{A} = \{x/x \in S \wedge x \in \overline{A}\}$
- A y B son complementarios sí y sólo sí A y B son mutuamente excluyentes ($A \cap B = \emptyset$) y si $A \cup B = S$

---

## TEORIA CLASICA DE LAS PROBABILIDADES

( o de las probabilidades "a priori")

La teoría de las probabilidades tiene sus orígenes en los juegos de azar. Miembros de la corte francesa del siglo XVII (el Caballero de Meré entre ellos) interesaron a matemáticos de la época (Pascal,Fermat y otros quienes hicieron estudios probabilísticos acerca de los problemas de juegos a comienzos de 1.654. Más adelante, Pierre Simón de Laplace (en 1.812) en su obra :"Teoría analítica de las probabilidades",da por primera vez la definición de probabilidad que constituye la Teoría Clásica.

Si un suceso puede ocurrir de **n maneras con igual probabilidad**,y si $\mathbf{f_A}$ de éstas tienen una característica **A**, entonces la probabilidad de **A** es

$$P_{(A)} = \frac{f_A}{n} = \frac{\text{cant.de resultados que implican la aparición de A}}{\text{cantidad total de resultados igualmente posibles}}$$

* Esto es, la probabilidad de que A ocurra es el cociente entre el número de resultados favorables a A , y el número de resultados posibles,con la condición de que estos sean igual igualmente posibles.

* Si el experimento consiste en arrojar un dado "legal" (se entiende por "legal", "ordinario", "correcto", al dado perfectamente construido, estrictamente cúbico, sin "cargas" especiales) se ve que puede caer hacia arriba cualquiera de las seis caras numeradas. Es decir, hay 6 resultados, posibles todos ellos, por razones de simetría igualmente posibles, probables y verosímiles. Estos seis resultados son de tal forma que no pueden aparecer dos o más caras simultáneamente.

Entonces, si la característica "número tres" se da de una manera, entre las seis maneras posibles, la probabilidad de que se dé un tres es 1/6.
Esto es:

$$P(\text{obtener un tres}) = P(3) = P(A=3) = 1/6 = \frac{(\text{número de casos favorables})}{(\text{número de casos posibles})}$$

De la misma manera se obtienen la probabilidad de que se de número par, teniendo en cuenta que hay tres resultados que implican la aparición de número par, entre los seis resultados igualmente posibles y que el resultado número par es de tal forma que no puede darse "impar" al mismo tiempo.

Entonces

$$P(\text{obtener par}) = P(\text{ obtener } 2,\ 4 \text{ ó } 6) = 3/6 = 1/2$$

En general, si en un juego hay "n" casos igualmente posibles entonces un jugador puede subdividir estos casos en dos clases: casos en que él gana y casos en que él no gana, entonces se ve que el cociente z/n es una medida de la posibilidad del jugador de ganar el juego y **( n-z ) / n** es la posibilidad de no ganar el juego.

* El calificativo de "con igual probabilidad" implica que antes de realizar el experimento, es decir "a priori", se debe conocer que todos los resultados son igualmente posibles, e igualmente probables, como en el ejemplo anterior. Este hecho se verifica sólo si el dado es correcto; en caso contrario, en caso de tener un dado "cargado" , por ejemplo, no podría encararse el estudio de ese fenómeno aleatorio (el de arrojar un dado cargado y observar la cara superior) con la definición de Laplace. Tampoco podría emplearse esta definición si en lugar de un dado cúbico se tuviera uno prismático. Si se tuviera un prisma recto en lugar de un cubo, es evidente que las seis caras ya no serían igualmente posibles.

***** La definición clásica establece, en general, que la probabilidad de todos y cada uno de los resultados posibles de un experimento aleatorio, está dado por **P= 1/n.**

* Si el experimento consiste en extraer una carta de una baraja de 52, la posibilidad de extraer una carta cualquiera es 1/52,ya que cualquiera de las 52 cartas tienen la misma posibilidad de ser extraída y la aparición de una cualquiera de ellas impide la aparición de otra.

Así, si se quiere calcular la probabilidad de aparición del número cinco, esta es:

$$P(\text{aparición de 5}) = P(5) = \frac{4}{52} = \frac{\text{cantidad de resultados que implican la aparición del 5}}{\text{cantidad de resultados posibles}}$$

Si se desea calcular la probabilidad de obtención de un corazón se tiene :

$$P(\text{obtener un corazón}) = \frac{13}{52} = \frac{\text{número de corazones en las 52 cartas}}{\text{número de cartas}}$$

* La aplicación de la definición no siempre resulta tan inmediata como en los casos anteriores.

* Supongamos que el experimento aleatorio consiste en lanzar dos monedas una vez o una moneda dos veces. Podría razonarse que los resultados posibles son: “obtener dos caras “, “obtener una cara y una cruz” y “obtener las dos cruces”.

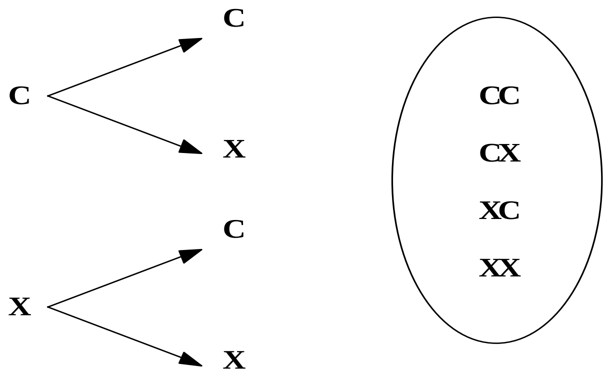
Si se quiere calcular la probabilidad de obtener dos caras tenderíamos a decir que como este resultado, “dos caras”, se da de una manera de entre las tres enumeradas, la probabilidad es 1/3. Pero este resultado es falso porque el razonamiento también lo es. Los tres resultados mencionados <u>no son igualmente posibles.</u> El resultado “una cara y una cruz” puede realmente obtenerse de dos maneras distintas: puede salir cara en la primera tirada de la moneda y cruz en la segunda, o bien cruz en la primera y cara en la segunda.

Hay entonces cuatro resultados distintos, y esos cuatro son igualmente posibles de tal forma que cada uno de ellos impide la aparición de cualquiera de los otros.

Podríamos escribir los resultados posibles razonando que en la primer tirada de la moneda tenemos dos resultados posibles,**C** ó **X**, y que en la segunda tirada "combinada" con cada uno de los dos resultados obtenidos en la primer tirada, tenemos nuevamente dos resultados, **C** ó **X**, con lo que resultan 2 x 2= 4 resultados.

**1**<u>da Tirada</u> **2**<u>da Tirada</u>

**2** resultados = **2** resultados = **2** resultados




Entonces

$$P(\text{obtener dos cartas}) = P(\mathbf{CC}) = \frac{1}{4} \ (\text{y no } \frac{1}{3})$$

* Supongamos que se quiere calcular la probabilidad de que una carta extraída al azar de una baraja de 52 sea un as o un corazón. Al enunciar los resultados favorables se podría contar 4 ases y como hay 13 corazones, razonar entonces que hay 17 resultados favorables entre 52 igualmente posibles. Claro que este razonamiento es incorrecto, puesto que hay una carta que es el as de corazón ,y la hemos contado dos veces, una como as y otra como corazón.

Son en realidad 16 resultados favorables entre los 52 posibles.¿ Por qué hemos cometido el error? Porque hemos olvidado que "as" y "corazón" son dos resultados que pueden darse juntos cuando se extrae una carta, esto es, no tienen la característica de los resultados de los ejemplos anteriores,de que la aparición de una de ellas impide la aparición de otro resultado en la misma extracción de una carta de la baraja de 52.

* Observamos en todos los ejemplos anteriores que la probabilidad es un número no negativo y comprendido entre cero y uno.Esto se debe a que el numerador del cociente calculado, que es el número de resultados favorables, puede ir desde cero, (en el caso extremo en que al resultado A no se dé) hasta “n” (en el caso de que todos los resultados sean favorables a A)

$$0 \leq P_{(A)} = \frac{f_A}{n} \leq 1$$

Si un suceso no puede ocurrir, si es imposible, entonces su probabilidad es cero, puesto que no hay resultados que impliquen su aparición.

Ejemplo : P ( obtener un 8 al arrojar un dado ) = 0

Si por el contrario, un resultado es el único que puede ocurrir, entonces aparecerá las n veces y su probabilidad es uno.

Ejemplo: P(obtener cara con una moneda de dos caras) $= \frac{2}{2} = \mathbf{1}$

Entonces, si un suceso es imposible su probabilidad es cero y si es seguro su probabilidad es uno, pero si las probabilidades son cero o uno, esto no implica que los sucesos sean imposible o seguro, respectivamente.

- La probabilidad determinada de esta manera, a través de la definición clásica,se denomina <u>probabilidad a priori.</u> Cuando se dice, por ejemplo, que la probabilidad de obtener cara al arrojar una moneda correcta es 1/2, no se llega a este resultado por puro razonamiento deductivo. El resultado no requiere del lanzamiento previo de la moneda, ni siquiera disponer de ella.

- Al darse la definición clásica en términos de “casos igualmente posibles”, se deduce que la definición sólo puede aplicarse en aquellos experimentos en los que hay un número <u>finito</u> de casos igualmente posibles. Lamentablemente,los principales problemas prácticos (que podrían asimilarse a los juegos de azar) no tienen esta característica y entonces no puede aplicarse la definición clásica.

- En algún caso podrá modificarse la aplicación de la definición cuando el total de resultados posibles es infinito. Podría buscarse, por ejemplo, la probabilidad de que un número natural extraído al azar sea par y la respuesta intuitiva es P=1/2. Pero realmente, aplicando la definición es

$$P(\text{obtener un natural par}) = \frac{\text{cantidad de números pares}}{\text{cantidad total de naturales}} \quad (\textit{indeterminado})$$

Si consideráramos,en cambio, los primeros 20 naturales, como 10 de ellos son pares será p= 10/20 = 1/2 ; si consideráramos los primeros 200 naturales, como 100 de ellos son pares será p= 100/200 = 1/2 . En general, los 2 N primeros contienen N pares y si formamos la razón **N/2N** esta es 1/2. Si hacemos tender N a infinito, de modo que se incluya a todos los naturales, la razón sigue siendo 1/2

Este argumento es plausible; pero la demostración rigurosa es difícil.

Si por ejemplo,ordenamos a los naturales ubicando dos números impares y a continuación uno par, en forma ordenada, y así siguiendo, se tendría

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 5 | 7 | 4 | 9 | 11 | 6 | ... |

y llegaríamos , con el razonamiento anterior, a que p=1/3.

- La definición clásica tiene todavía otra dificultad, ya mencionada, y más grave aún. Si los resultados no son igualmente posibles, la definición clásica nos deja sin respuesta.

- Lamentablemente, muchos problemas reales no pueden ser asimilados a juegos en los cuales se cumplen las condiciones para poder aplicar la definición de Laplace.

En casos en que nos interesa responder a :

¿Cuál es la probabilidad de que un niño nacido en Comodoro Rivadavia sea varón ?
¿Cuál es la probabilidad de que una persona de sexo masculino muera a los 50 años ?
¿Cuál es la probabilidad de que un paciente con la enfermedad x sea curado con el nuevo tratamiento?.
¿Cuál es la probabilidad de que la máquina A produzca artículos defectuosos ?
¿Cuál es la probabilidad de que se produzca un accidente el día sábado en la ruta P?

no se cumplen la simetría y/o igualdad de posibilidades de los juegos de azar y no hay mecanismos que nos permitan modificar la situación.

## TEORIA DE LA FRECUENCIA RELATIVA

( o de la probabilidad "a posteriori" )

- Sea un experimento aleatorio como por ejemplo, arrojar un dado. Supongamos un cualquiera que pueda darse,por ejemplo: que aparezca un "número menor o igual a dos".

- La probabilidad de este resultado será la frecuencia relativa de aparición del suceso cuando se arroje el dado un gran número de veces.

Sea "n" el número de veces que se repite un experimento aleatorio o se observa un fenómeno aleatorio,en condiciones uniformes. Se supone que la frecuencia relativa $f_A/n$ tiende a un límite cuando n aumenta.Entonces la probabilidad de éxito es :

$$P = \lim_{n \to \infty} f_A/n$$

Interpretamos esta probabilidad en forma puramente intuitiva. Diremos que cuando el experimento se repite un gran número de veces,la proporción observada está próxima a la teórica.

Está claro que no podemos considerar a la probabilidad como dada exactamente por su límite.

¿ Pero cuándo el número "n" es suficientemente grande en cada caso ? Desde el punto de vista práctico,la teoría o definición en algo imperfecta; pero prueba, a la larga , el concepto de probabilidad y es mas satisfactoria que la teoría anterior.

Sin embargo, adolece de algunos vicios desde el punto de vista conceptual,(según Bach).

- En el ejemplo considerado, ( arrojar el dado y dado A: que aparezca el uno o el dos) se debería repetir la experiencia un número de veces cada vez mayor (100, 1000, ... 100.000 veces ) y se vería que la frecuencia relativa de aparición del suceso tiende a estabilizarse en torno al valor 2/6,... cuando "n" crece. La experiencia nos señala que si efectuamos una experiencia aleatoria un gran número de veces, las frecuencias relativas tienden a ser constantes. Decimos que el experimento manifiesta "estabilidad de las frecuencias relativas" o dicho de otra manera "regularidad estadística" ( o aleatoria ).

- Se observa que a medida que “n” aumenta, también aumenta $f_A$, es decir el número de veces que ocurre el resultado: número uno o dos.

Es razonable, entonces, suponer que existe un número “p” que es la probabilidad de obtener uno o dos al arrojar el dado.

- Si el dado no fuera “correcto”, no podríamos aplicar la definición clásica de que la probabilidad es aproximadamente

$$P = \frac{2}{6} = \frac{\text{número de maneras en que se obtiene uno o dos}}{\text{números total de resultados igualmente probables}}$$

Decir que P= 2/6 es sólo una aproximación, puesto que para este dado particular no es posible estar seguros de que los 6 resultados sean igualmente verosímiles con exactitud.Pero teniendo en cuenta que el dado es “correcto” parece bastante razonable suponer que sí son igualmente verosímiles.

- Alternativamente podemos lanzar el dado un gran número de veces y usar la frecuencia relativa del suceso como aproximación de “P”.

Se ve que las dos teorías, si ambas son aplicables, conducen al mismo resultado.

- Si el dado no fuera “correcto”, esto sí se reflejaría en la frecuencia relativa observada. Podríamos igualmente postular “P” para ese dado, pero ya no podríamos usar la teoría clásica.

- Supongamos ahora un experimento aleatorio consistente en estudiar los remaches producidos por la máquina “A”, en cuanto a su clasificacion en defectuosas ( no cumplen las especificaciones) y no defectuosos. Estos dos resultados, evidentemente, son mutuamente excluyentes pero no igualmente probables. Deberíamos entonces, para calcular la probabilidad de encontrar un remache defectuoso, emplear la teoría de frecuencia relativa. ¿ Cómo procedemos ?.

Extraemos muestras de remaches, en un proceso de producción bajo condiciones normales y constantes, con un número de elementos (n) cada vez mayor, y estudiamos cuál es la “tendencia” de la frecuencia relativa observada.Supongamos que, para:

$n = 100 \longrightarrow f / n = 4 / 100 = 0{,}040$

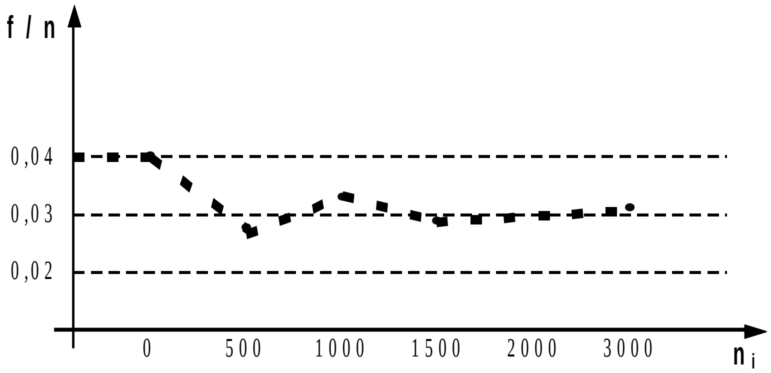
$n = 500 \dashrightarrow f / n = 14 / 500 = 0{,}028$

$n = 1000 \dashrightarrow f / n = 32 / 1000 = 0{,}032$

$n = 1500 \dashrightarrow f / n = 44 / 1500 = 0{,}029$

$n = 3000 \dashrightarrow f / n = 93 / 3000 = 0{,}031$

Gráficamente.




Puede observarse una “tendencia” de la frecuencia relativa a estabilizarse alrededor del 0,03.

Se comprueba en la práctica que la frecuencia relativa de un evento f/n en un gran número de repeticiones del experimento aleatorio,se “acerca” o es “aproximadamente igual” a un número P.

En nuestro caso f/n --------->0,03 , entonces
P (de encontrar remaches defectuosos) = 0,03

## TEORIA AXIOMATICA

- Supongamos que se desea predecir el sexo del próximo niño que nazca en Comodoro Rivadavia. El suceso individual es incierto,pero los resultados de grupos de nacimientos pueden ser tratados satisfactoriamente.

Observemos que en una serie de observaciones existe cierta regularidad estadística, en forma similar a la que puede observarse cuando se lanza una moneda un gran número de veces.La frecuencia relativa de la aparición de cara,cuando se arroja repetidamente la moneda, se “acerca” a ½, la frecuencia relativa correspondiente al nacimiento de mujeres se “acerca”, por ejemplo, a 0,51 (esto puede decirse luego de observar en los registros correspondientes que al 51% de los nacidos son mujeres). Puede decirse entonces que la probabilidad de que nazca una mujer en Comodoro Rivadavia es P= 0,51.

- En prácticamente todos los trabajos científicos se realizan observaciones que tienen un elemento de incertidumbre o que no pueden predecirse.

Para hacer mas concreta esta idea, supongamos que pueden hacerse observaciones ( o experimentos) bajo condiciones totalmente uniformes. Es decir, hecha la observación, se repite el experimento en condiciones análogas y se hace otra observación, se repite muchas veces y,aunque las condiciones sean siempre similares, existe una variación incontrolable que es “casual” o “aleatoria” de tal forma que no es posible predecir el resultado de las observaciones individualmente.En muchos de estos casos las observaciones caen dentro de ciertas clases, en las que las frecuencias relativas son bastantes estables.

Esto sugiere que postulamos un número P,llamado probabilidad con que aparece dicho suceso en las repetidas observaciones realizadas.

- Lo importante es la posibilidad de imaginar una serie de observaciones o experimentos realizados en condiciones bastantes uniformes. Puede entonces postularse un número P como probabilidad de que ocurra el suceso A y P puede ser aproximada por la frecuencia relativa del suceso A en una serie de experimentos.
- Todos aquellos casos en que puede repetirse el experimento en condiciones similares, o que al menos puede “pensarse” en esa repetición ,aún cuando no se realice la experiencia realmente , pueden ser analizados a través de la **TEORIA AXIOMATICA** de las Probabilidades.

## TEORIA SUBJETIVA

Ahora bien: nos preguntamos qué se puede hacer cuando no pueden aplicarse las Teorías mencionadas,ya que no se tienen elementos del espacio muestral igualmente probables, o combinaciones de los elementos que lo sean, ni se puede efectuar (ni se ha efectuado antes ) el experimento, y ni siquiera puede "pensarse" en la repetición en condiciones semejantes.

Por ejemplo: la persona que pronostica el tiempo,el clima, generalmente asigna una probabilidad al evento según su experiencia y su opinión personal.Todo depende de su habilidad y su conocimiento del tema, para analizar correctamente la situación.

Si este señor considera, por ejemplo, que es 8 veces más probable que nieve (N) en Esquel, a que no nieve (X), es decir que $P_{(N)} = 8 . P_{(X)}$, ¿qué probabilidad se les debe asignar a $P_{(N)}$ y $P_{(X)}$ ?

Si recordamos que: la probabilidad es una frecuencia relativa,que se calcula haciendo el cociente entre el número de veces que puede esperarse que ocurra el suceso y el número de resultados posibles, que el numerador debe ser mayor o igual a cero y el denominador mayor que cero, y el número de veces que se da el suceso a lo sumo igual al número de resultados posibles, se verá que

$$0 \leq P_{(A)} \leq 1 \qquad \text{y también} \qquad \sum_{\text{todos}} P_{(A)} = 1$$

Entonces es

$$\begin{aligned} P_{(N)} &= 8 \,.\, P_{(X)} \\ P_{(N)} + P_{(X)} &= 1 \\ 8.P_{(X)} + P_{(X)} &= 1 \\ 9.P_{(X)} &= 1 \\ P_{(X)} &= 1 / 9 \\ P_{(N)} &= 1 - (1 / 9) = 8 / 9 \end{aligned}$$

- Este es entonces otro punto de vista alternativo para interpretar el concepto de probabilidad, que consiste en evaluar a la probabilidad en forma "personal o subjetiva",basándose en evidencias indirectas , suposiciones razonadas ,posiblemente algo de intuición .