RESUMEN.- PROBABILIDAD.-

A través del análisis de ejemplos propuestos se irán reconociendo y empleando los siguientes conceptos, que por último se definirán:

- experimento
- experimento o fenómeno aleatorio
- conjunto de resultados asociados con el experimento
- características comunes de los experimentos o fenómenos aleatorios.

EXPERIMENTO ALEATORIO Y CONJUNTO O ESPACIO DE RESULTADOS

Experimento: es una acción, proceso u operación en el que se obtienen resultados bien definidos y que conllevan a la observación de estos resultados.

Resultado: es lo que se obtiene de un solo ensayo del experimento, es decir de una sola repetición del mismo.

Ensayo: es el acto que lleva a un resultado determinado, de entre los posibles resultados distintos del experimento.

Experimento o fenómeno aleatorio: es el experimento en el cuál el resultado se presenta al azar.

Conjunto de todos los resultados del experimento aleatorio: es un conjunto universal.

Espacio muestral: es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
Lo denominamos: **S**

Punto muestral: es un punto del espacio muestral, uno de los resultados posibles del experimento aleatorio. Lo denominamos con a ó s y entonces $a \in \mathbf{S}$ ó $s \in \mathbf{S}$.

ESPACIO MUESTRAL: FINITO, INFINITO NUMERABLE, INFINITO NO NUMERABLE

Espacio muestral discreto finito. Consta de un número finito de elementos. (v.g., el ejemplo del dado).

Espacio muestral discreto infinito. Consta de un número *infinito numerable* de elementos. (v.g., lanzar un dado hasta que salga un "6")

Espacio muestral continuo. Consta de un número *infinito no numerable de elementos*. (v.g., número posible de puntos alcanzables en un experimento de "lanzar flecha a un blanco" y medir la distancia entre la punta de la flecha y el centro del blanco)

Analizaremos algunos mecanismos y principios útiles para formar los espacios muestrales.

Los principios son:

PRINCIPIO DE LA MULTIPLICACIÓN

En general, si los conjuntos A_1 A_2 ... A_K contienen respectivamente n_1 n_2 ... n_k elementos, existen $n_1 . n_2 . ... . n_k$ maneras de combinar un elemento de A_1, uno de A_2, ... y uno de A_k. Esto es lo que se denomina: **principio de la multiplicación**.

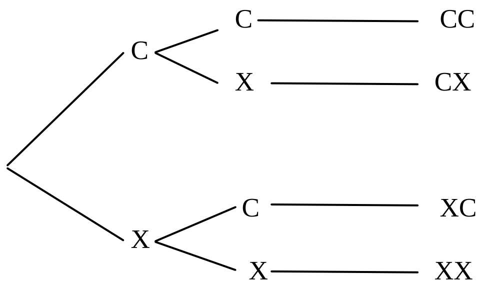
PRINCIPIO DE LA ADICIÓN

En general, si los conjuntos A_1 A_2 ... A_K contienen respectivamente n_1 n_2 ... n_k elementos, existen $n_1 + n_2 . ... + n_k$ maneras en que se puede dar el primero ó el segundo ó ... ó el k-ésimo conjunto. Esto lo que se denomina: **principio de la adición**.

ESQUEMA DEL ÁRBOL (o arborigrama)

Consideremos el experimento de lanzar dos monedas. Se puede ordenar este experimento en una secuencia lineal de pasos, es decir, primero se lanza una moneda y luego la otra.
Si se tiene en cuenta que el experimento consta de 2 etapas (o clasificaciones) se podrá emplear un Diagrama del árbol con 2 "ramas" sucesivas para lograr el espacio muestral.
Se tienen 2 posibilidades en la primera etapa y 2 en la segunda etapa lo que hace un total de 2.2= 4 puntos muestrales a obtener.

1°   2°



2.2=4 puntos muestrales

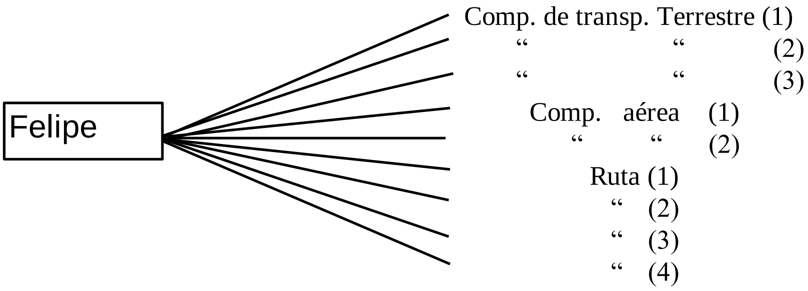
Vemos que se obtienen tantos puntos como combinaciones de ramas o trayectorias. Son 4 ramas y cada rama muestra un posible resultado.

Finalmente, para construir el diagrama de árbol de un experimento aleatorio:
1° Organiza el experimentos en una secuencia lineal de pasos.
2° Comienza el diagrama con los resultados del paso 1 (P1).
3° De cada resultado de P1 se desprenden los correspondientes resultados del P2.
4° Para un P3 se desprenden sus resultados de los de P2 y así sucesivamente.

Supongamos que Felipe desea pasar sus próximas vacaciones en la laguna Perdidita, a al que puede llegar por micro, por avión o en su automóvil. Desde su pueblo, Felipe dispone de tres grandes compañías de transporte terrestre, hay dos líneas de aviación y además podría llegar en su automóvil por tres rutas diferentes.

Se quiere saber de cuántas formas diferentes puede Felipe llegar a Perdidita.

Evidentemente debemos suponer que las formas de viajar no se superponen, no se dan juntas, y entonces el número de formas de maneras es: 3 +2 + 4 = 9 formas.



Esto significa que Felipe podrá viajar por cualquiera de las tres compañías terrestres “o” las dos líneas aéreas “o” las cuatro rutas.

ESQUEMA DE LA URNA

Se habla del esquema de la urna porque se trata de extracción de elementos; pero se confecciona un arborigrama. Estas extracciones pueden ser con o sin reposición.

SUCESOS - CLASE EXHAUSTIVA DE SUCESOS

Suceso: A_i. Un suceso A respecto a un espacio muestral S asociado al experimento E, es simplemente un conjunto de resultados posibles del mencionado experimento.

Clase exhaustiva.

- Si se tienen los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_k$, estos forman una clase exhaustiva de "S" si cumplen con las siguientes condiciones

  1) $A_j \cap A_i = \varnothing$ para cualquier $j \neq i$, esto es, si los k sucesos son mutuamente exclusivos.

  2) $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$, esto es, los k sucesos "completan" el espacio muestral "S".

PROBABILIDAD

TEORÍA CLÁSICA o a Priori

La definición clásica de probabilidad, dada por la regla de Laplace, se aplica si todos los resultados posibles de un experimento aleatorio tienen la misma probabilidad o son equiprobables.

Para el experimento aleatorio de lanzar dos dados, cada uno de los resultados tiene la misma probabilidad si consideramos que los dados "no están cargados".

La probabilidad de que un evento A ocurra se anota P(A) y se calcula mediante el cociente:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{Número de casos Totales}}$$

Esto es válido, cuando en el experimento aleatorio todos sus resultados son equiprobables y los valores de una probabilidad están entre 0 y 1.

FRECUENCIA RELATIVA –Teoría de la frecuencia relativa o a Posteriori

Recordemos que $h_i = f_i / n$ ó f_i / N es la frecuencia relativa. Si ahora decimos que dado un posible resultado A, su frecuencia relativa es el número de veces que se da A en relación con el número de veces que se realiza o repite el experimento, estamos definiendo

$\tilde{f}(A) = f(A) / n$ como frecuencia relativa del suceso A.

Evidentemente no es $\tilde{f}(A)$ en general una constante, pero sí intuimos por los razonamientos anteriores, que existe una estabilidad, a la larga, de esa frecuencia relativa.

La **frecuencia relativa f(A)** tiene la siguientes propiedades *(Meyer)*

1) $0 \leq \tilde{f}(A) \leq 1$
2) $\tilde{f}(A) = 1$ sí y sólo sí A ocurre cada vez(siempre) en las n repeticiones.
3) $\tilde{f}(A) = 0$ sí y sólo sí A nunca ocurre en las n repeticiones.
4) Si A y B son dos sucesos que se excluyen mutuamente (conjuntos disjuntos) entonces

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B)$$

5) $\tilde{f}(A)$ basado en n repeticiones converge en un valor fijo que podemos llamar $p(A)$, cuando $n \to \infty$.

TEORÍA AXIOMÁTICA DE LA PROBABILIDAD

El número real que asigne una probabilidad al suceso $A \subset S$ deberá reunir ciertas propiedades. Es así que se piensa que resultará positivo un número que cumpla con las características de las frecuencias relativas, sin que para encontrarlo sea necesario repetir el experimento "n" veces.

Sea E un experimento aleatorio y S el espacio muestral asociado con ese experimento aleatorio y sea P una función que asigna un número real a cada suceso $A \subset S$.

Llamamos **probabilidad del suceso A** y denotamos con P(A) al número real que satisface los siguientes axiomas:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$
(2) $P(S) = 1$
(3) Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son sucesos que se excluyen mutuamente de par en par, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{K} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$$

(No conocemos cuándo el "n" es suficientemente grande) para lograr la necesaria regularidad estadística

Se da entonces **la definición axiomática de la probabilidad.**

En particular, el tercer axioma se reduce a

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A y B son mutuamente excluyentes.

PROPIEDADES GENERALES DE P(A)

Existen propiedades que pueden demostrarse empleando los tres axiomas mencionados.

1. Si $\varnothing$ es el conjunto vacío, entonces
$P(\varnothing) = 0$

2. Si A y A' son sucesos complementarios, entonces
$P(A) = 1 - P(A')$

3. Sean A y B dos sucesos cualesquiera, entonces
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
y en el caso de que sean mutuamente excluyentes, es
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4. Si A, B y C son tres sucesos cualesquiera, entonces
$(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$
(generalización de la tercera propiedad)

5. Sean A y B dos sucesos tales que $A \subset B$.
Entonces es $P(A) \leq P(B)$

Para demostrar las propiedades mencionadas se procede en todos los casos a definir los sucesos de interés o el S como unión de sucesos mutuamente excluyentes, aplicando luego alguno o varios de los axiomas vistos.

Se espera ahora que analice atentamente el procedimiento que seguiremos al hacer la siguiente demostración

Demostremos la 5ta. propiedad

$$\mathbf{P(A) \leq P(B), \quad si\ A \subset B}$$

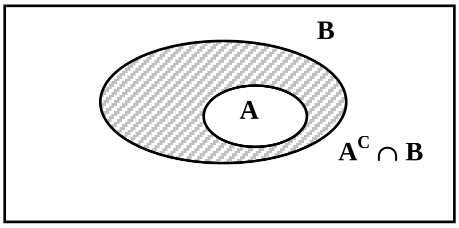
Para ello tenemos en cuenta que
puede expresarse B como unión de 2 conjuntos disjuntos

$$B = A \cup (B \cap A)$$

y entonces, por el 3er. axioma es

$$P(B) = P(A) + P(B \cap A)$$

y como por el 1er. axioma

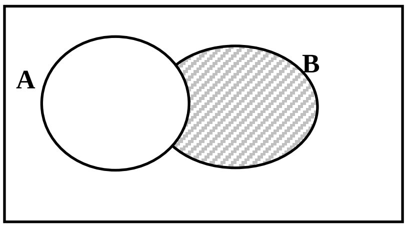


$P(B \cap A) \geq 0$ se ve que debe ser $P(B) \geq P(A)$ o lo que es lo mismo:

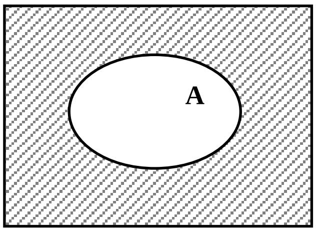
$$P(A) \leq P(B)$$

Está ya en condiciones de realizar la siguiente actividad, teniendo en cuenta que para realizar las otras cuatro demostraciones será útil emplear los diagramas de Venn que se acompañan como ayuda. Recuerde que el procedimiento siempre consiste en descomponer algún conjunto en unión de 2 o más conjuntos disjuntos.

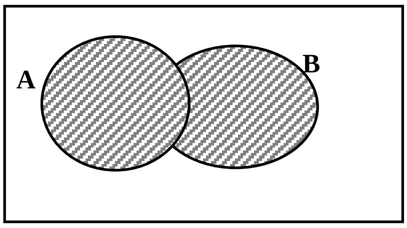
....**M)**.Reúnase con su pequeño grupo y aplique su dominio de los axiomas demostrando las restantes propiedades.



$B \cap A^C$



A^C



$B \cup A$

Verifique las respuestas de su grupo con el profesor o revisando la bibliografía (Meyer).

EVENTOS COMPUESTOS

Para formar un evento compuesto se combinan 2 o más eventos simples de tal forma que es necesario analizar con mucho cuidado si se emplean los términos "Y", "O", "NO", "NI", "DADO", y otros, pero además analizar y leer detenidamente cuál es concretamente la pregunta a responder.

Los eventos compuestos son :

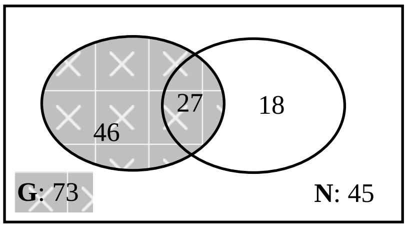
1. $P(\overline{A}) = P(A_c)$ (Prob. de evento complementario)
2. $P(A \cup B)$ (Prob. de que ocurra A ó B)
3. $P(A \cap B)$ (Prob. de que ocurran A y B)
4. $P(A / B)$ (Prob. de que ocurra A si ya ha ocurrido B)

Tenga en cuenta que muchos de los conceptos a definir ya han sido empleados e interpretados al menos intuitivamente.

Realicemos en conjunto la siguiente actividad:

....**N)** De un grupo de 100 socios del Club "El Perejil",
- 73 están anotados en las clases de gimnasia
- 45 hacen natación.
- 27 toman clases de gimnasia y hacen natación.

Representemos la situación a través de diagramas de VENN.



Si llamamos n (G) al número de socios que hacen gimnasia y n(N) al número de socios que hacen natación es

$$n(G \cup N) = n(G) + n(N) - n(G \cap N)$$
$$n(G \cup N) = 73 + 45 - 27$$
$$n(G \cup N) = 91$$

Esto es, hacen gimnasia o natación 91 de los 100 socios.

No hacen gimnasia ni natación (100-91) socios
$n(\overline{G} \cap \overline{N}) = 100 - 91 = 9$ socios.

¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un socio que hace natación?

$$P(N) = \frac{45}{100}$$

¿Cuál es la frecuencia relativa de socios que no hacen natación ? ¿Y su probabilidad ?

$$\tilde{f}(N)+\tilde{f}(\bar{N})=\tilde{f}(S)=1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}(\bar{N})=1-\tilde{f}(N)$$

$$P(\bar{N})=1-P(N)=1-\frac{45}{100}=\frac{55}{100}$$

¿Cómo son los sucesos N y $\bar{N}$? ¿Por qué ? ¿Qué tipo de "clase" forman ?

¿Cuál es la prob. de que un socio haga gimnasia o natación?

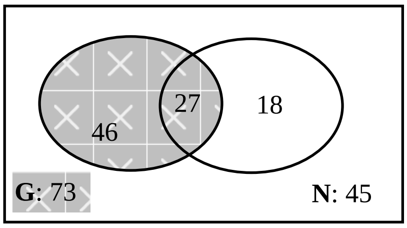
$P(G ó N)= P(G \cup N)= 73/100 + 45/100 - 27/100 = 91/100$

¿Cuál es la prob. de que un socio haga gimnasia y natación?

$P(G y N) = P (G \cap N)= 27/100$

¿Cómo llamamos a los sucesos que sí pueden "darse juntos"?

Si consideramos solo a los que hacen gimnasia,
¿ cuál es la probabilidad de encontrar un socio que haga natación?



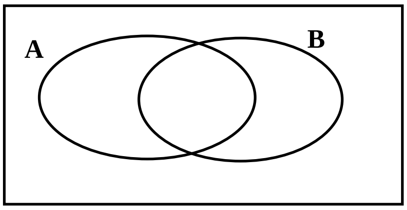
$P(N / G)= 27/73$
(Note que el símbolo "/" no significa "dividido")

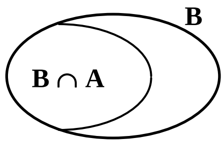
Observamos que $n(G)= 73$; $n (N / G) = 27$

$$\tilde{f}(N/G)=27/73 \ \text{ o bien } \ \frac{n(G \text{ y } N)}{n(G)}=\frac{\tilde{f}(G \text{ y } N)}{\tilde{f}(G)}=\frac{\tilde{f}(G \cap N)}{\tilde{f}(G)}=\frac{27/100}{73/100}=\frac{27}{73}$$

En general, dados A y B es como hemos visto.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad\Rightarrow\quad P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B)$$





Evento complementario: Es el conjunto de todos los puntos muestrales que no pertenecen al conjunto.

Dado A, es $\bar{A}$ ó A_C el "complemento de A".

Eventos mutuamente excluyentes: Son tales que la concurrencia de uno impide la ocurrencia del otro, en un mismo ensayo o experimento básico. A y B son mutuamente excluyentes sí y sólo sí $A \cap B = \emptyset$

Probabilidad Condicional: Dados dos sucesos A y B, la probabilidad de que ocurra A habiendo ocurrido B (o de que A esté condicionado a la aparición previa de B), se escribe: $P(A/B)$

Eventos probabilísticamente independientes : Son aquellos en que la ocurrencia de uno no modifica la probabilidad de ocurrencia del otro en más de un ensayo o experimento básico.

A y B son independientes

si $P(A)= P(A/B)$ o $P(B)= P(B/A)$

Regla de la suma o de la adición : Sean A y B dos eventos definidos en S

Es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

y es

$$P(A \cup B)= P(A) + P(B)$$

si A y B son mutuamente excluyentes.

Generalización de la regla de la suma : Sean A, B y C, sucesos no excluyentes

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

Sean más de dos sucesos mutuamente excluyentes.

$$P(A \cup B \cup \ldots \cup M) = P(A) + P(B) + \ldots + P(M)$$

Regla del Producto :

Sean A y B dos sucesos definidos en S

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B/A)$$

o bien

$$P(A \cap B) = P(B) \,.\, P(A/B)$$

Si A y B son independientes

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = P(B) \,.\, P(A)$$