Ecuación de calor: Solución con el método de separación de variables y serie de medio rango de Fourier*

J. Saquimux

La técnica más popular y ampliamente utilizada para resolver la ecuación de calor unidimensional es la de *separación de variables*, en la cual se usan *series de Fourier* de medio rango. Su éxito depende de la habilidad para expresar la temperatura $T(x,t)$ en función de la posición x y el tiempo t, como el producto de dos funciones $X(x)Y(t)$. Donde $X(x)$ depende solo de x y $Y(t)$ depende solo de t. Si no se puede lograr esta separación, entonces se usan otras técnicas. En el siguiente ejemplo mostramos como aplicar esta técnica.

Ejemplo

Encontremos la solución de la ecuación de calor unidimensional homogénea que depende solamente de x y t

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

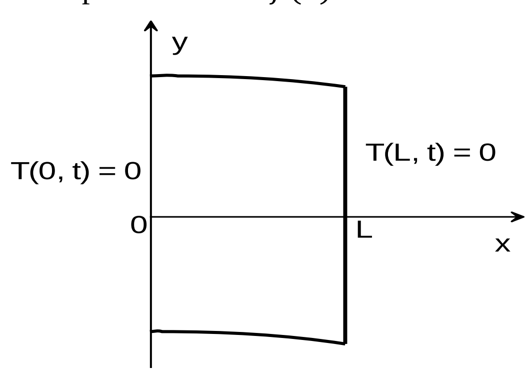
que cumpla la condición inicial

$$T(x,0) = f(x), \; 0 < x < L, \tag{2}$$

y las condiciones de frontera

$$T(0,t) = T(L,t) = 0, \; t > 0 \tag{3}$$

Este sistema de ecuaciones puede modelar la conducción de calor en el interior de una placa delgada de ancho L, donde ambos lados (verticales) se mantienen a una temperatura constante igual a cero grados y la temperatura en cada punto sobre la placa inicialmente (t = 0) depende de solamente x dada por la función $f(x)$.



Resolvamos este problema con el método de separación de variables. De acuerdo a esta técnica, buscamos soluciones particulares de (1) de la forma

$$T(x,t) = X(x)Y(t), \tag{4}$$

*Traducido y adaptado del texto Advanced Engineering Mathematics. Duffy, D. (2003). pgs. 548-552

Que satisface las condiciones de frontera (3). Así que derivando (4) respecto a t y x, tenemos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = X(x)Y'(t) \tag{5}$$

y

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = X''(x)Y(t) \tag{6}$$

Sustituyendo (5) y (6) en (1) obtenemos

$$X(x)Y'(t) = a^2 X''(x)Y(t). \tag{7}$$

Separando variables en (7) nos da

$$\frac{Y'(t)}{a^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

El lado izquierdo de esta ecuación depende solamente de t, y el lado derecho solamente de x, Esta igualdad solamente es posible si ambos lados son iguales a una constante, denotémosle con $-\lambda$, llamada constante de separación. Así pues

$$\frac{Y'(t)}{a^2 Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{8}$$

La ecuación (8) se separa en dos ecuaciones diferenciales ordinarias para las funciones $X(x)$ y $Y(t)$ respetivamente

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{9}$$

$$Y'(t) + a^2 \lambda Y(t) = 0, \tag{10}$$

Usando las condiciones de frontera en el producto tenemos

$$T(0,t) = X(0)Y(t) = 0 \ \text{ y } \ T(L,t) = X(L)Y(t) = 0 \ \text{ para } t > 0 \tag{11}$$

Si seleccionamos $Y(t) = 0$, entonces tendríamos la solución nula (llamada solución *trivial*) $T(x,t) = 0$. Por consecuencia $X(x) = 0$ y $Y(t) = 0$, son soluciones que no tiene interés, por lo que debemos buscar soluciones con $Y(t) \neq 0$

De (11) reescribamos las condiciones de frontera para $X(x)$

$$X(0) = 0 \ \text{ y } \ X(L) = 0 \tag{12}$$

De (9) y (12) debemos resolver la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con condiciones de frontera

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0 \ \ y \ \ X(L) = 0, \tag{13}$$

Hay tres posibles casos dependiendo del valor de λ negativo, cero o positivo. Para simplificar los cálculos denotemos $\lambda = q^2$

1) λ negativa: $\lambda = q^2 < 0$
2) λ cero: $\lambda = 0$ y,
3) λ positiva: $\lambda = k^2 > 0$

Para el caso 1) $\lambda = q^2 < 0$, entonces debemos resolver la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con condiciones de frontera

$$X'' + q^2 X = 0, \qquad X(0) = 0 \ \ y \ \ X(L) = 0 \tag{14}$$

La ecuación característica de (14) es $m^2 + q^2 = 0$, cuyas soluciones son reales $m = \pm q$, por lo que su solución general es forma exponencial

$$X(x) = Ae^{qx} + Be^{-qx} \tag{15}$$

Ya que $X(0) = 0$, se sigue que $0 = A + B$, o $A = -B$ De la condición $X(L) = 0$, se sigue que $0 = Ae^{qL} + Be^{-qL}$, o $0 = Ae^{qL} - Ae^{-qL} = A(e^{qL} - e^{-qL})$ con $L \neq 0$, entonces $A = 0$, y por tanto también $B = 0$. Así que para este caso tenemos la solución $X(x) = 0$, que genera la solución nula $T(x,t) = X(x)y(t) = 0$ la cual no tiene interés.

Para el caso 2). $\lambda = 0$, la correspondiente ecuación diferencial ordinaria en x con condiciones de frontera es

$$X''(x) = 0, \ \ X(0) = 0 \ \ \text{y} \ \ X(L) = 0. \tag{16}$$

Por integración la solución general es

$$X(x) = C + Dx. \tag{17}$$

De la condición $X(0) = 0$, tenemos que $C = 0$. De la condición $X(L) = 0$, queda $DL = 0$, como $L \neq 0$ entonces $D = 0$. Así otra vez obtenemos la solución $X(x) = 0$, la cual genera otra vez la solución nula.

Finalmente, para el caso 3) $\lambda = k^2 > 0$. La correspondiente ecuación diferencial ordinaria con condiciones de frontera es

$$X''(x) + k^2 X(t) = 0, \qquad X(0) = 0 \ \ \text{y} \ \ Y(0) = 0, \tag{18}$$

La ecuación característica es $m^2 + k^2 = 0$, cuyas soluciones son $m = \pm ik$, por lo que la solución general, es de la forma trigonométrica:

$$X(x) = E \cos kx + F \sin kx, \tag{19}$$

Ya que $X(0) = 0$, se sigue que $E = 0$; de $X(L) = 0$, obtenemos $X(L) = F\sin(kL) = 0$. Para una solución no nula debe cumplirse, $F \neq 0$ y $\sin(kL) = 0$. Esto implica kL debe ser múltiplo de π, es decir $kL = n\pi$ de donde $k = n\pi/L$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ Por lo que podemos escribir $k_n = n\pi/L$, n = 1, 2, 3,…. (k_n, simboliza que k depende de n) En resumen, la solución de la función que depende de *x*, para un valor de *n* es de la forma

$$X_n(x) = F_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{20}$$

Como $\lambda = k^2$, definamos $\lambda_n = k_n^2 = n^2\pi^2/L^2$

Ahora, considerando la ecuación diferencial ordinaria que depende del tiempo (10), sustituyendo $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, en esa ecuación, obtenemos

$$Y'_n(t) + \frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} Y_n(t) = 0 \tag{21}$$

Su solución general correspondiente es

$$Y_n(t) = G_n \exp\left(-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} t\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{22}$$

Entonces el producto de las funciones (20) y (22) son soluciones particulares de (1) y satisfacen las condiciones de frontera (3)

$$T_n(x,t) = X_n(x)Y_n(t)$$
$$T_n(x,t) = F_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) G_n \exp\left(-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} t\right)$$
$$T_n(x,t) = B_n sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} t\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{23}$$

donde $B_n = F_n G_n$.

Usando el principio de superposición, sumemos las soluciones particulares encontradas, para determinar la solución general

$$T(x,t) = T_1(x,t) + T_2(x,t) + T_3(x,t) + \cdots$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x,t)$$

$$\boxed{T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(\frac{a^2n^2\pi^2}{L^2} t\right)} \tag{24}$$

El coeficiente B_n se determina tal que (24) cumpla con la condición inicial (2) para $t = 0$. Así, sustituyendo $t = 0$ en (24)

$$T(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad 0 < x < L \tag{25}$$

Esta función es una **serie de Fourier** de medio rango para $f(x)$ sobre el intervalo $(0, L)$, $L = T/2$. Por tanto, B_n se puede calcular con la fórmula de coeficientes de series de Fourier de medio rango

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{26}$$

Calculada la expresión de B_n de (26) para cierta $f(x)$, se sustituye en (24), y con ella obtenemos la solución del problema.

Por ejemplo, si $L = \pi$ y $T(x,0) = f(x) = x(\pi - x)$ entonces

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(n\pi)\,dx \tag{27}$$

$$B_n = 2\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(nx)\,dx \tag{28}$$

$$B_n = 4\frac{1-(-1)^n}{n^3\pi} \tag{29}$$

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{8}{n^3\pi}, n \text{ impar} \\ 0, \quad n \text{ par} \end{cases} \tag{30}$$

Por tanto, la distribución de la temperatura sobre cualquier punto sobre la placa está dada por

$$T(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^3}e^{-n^2a^2t} \qquad n = 1, 3, 5, 7, \cdots \tag{31}$$

O bien

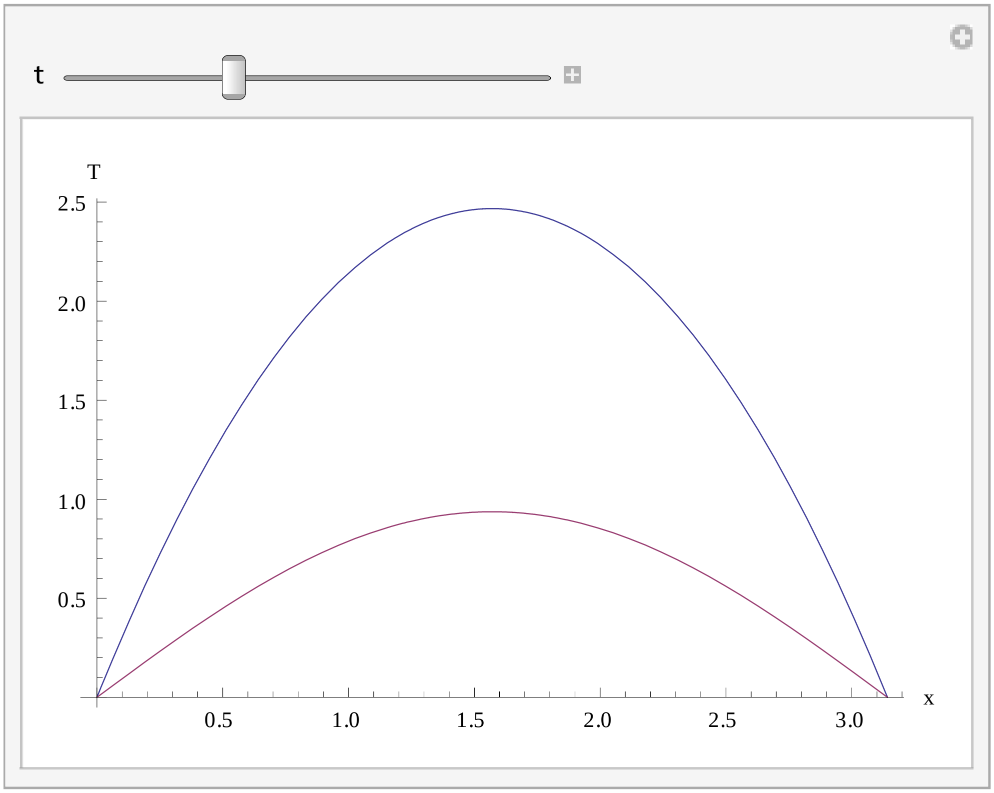
$$T(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin[(2m-1)x]}{(2m-1)^3}e^{-(2m-1)^2a^2t} \tag{32}$$

Suponiendo a = 1, las siguientes figuras ilustran la distribución de la temperatura para varios tiempos, construidos con el Mathematica.

In[13]:= $\text{Manipulate}\left[\text{Plot}\left[\left\{x\,(\pi-x),\ \frac{8}{\pi}\,\text{Sum}\left[\frac{\text{Sin}[(2\,i-1)\,x]\,\text{Exp}\left[-(2\,i-1)^2\,t\right]}{(2\,i-1)^3},\ \{i,1,4\}\right]\right\},\ \{x,0,\pi\},\ \text{AxesLabel}\to\{\text{"x"},\text{"T"}\}\right],\ \{t,0,3,.5\}\right]$

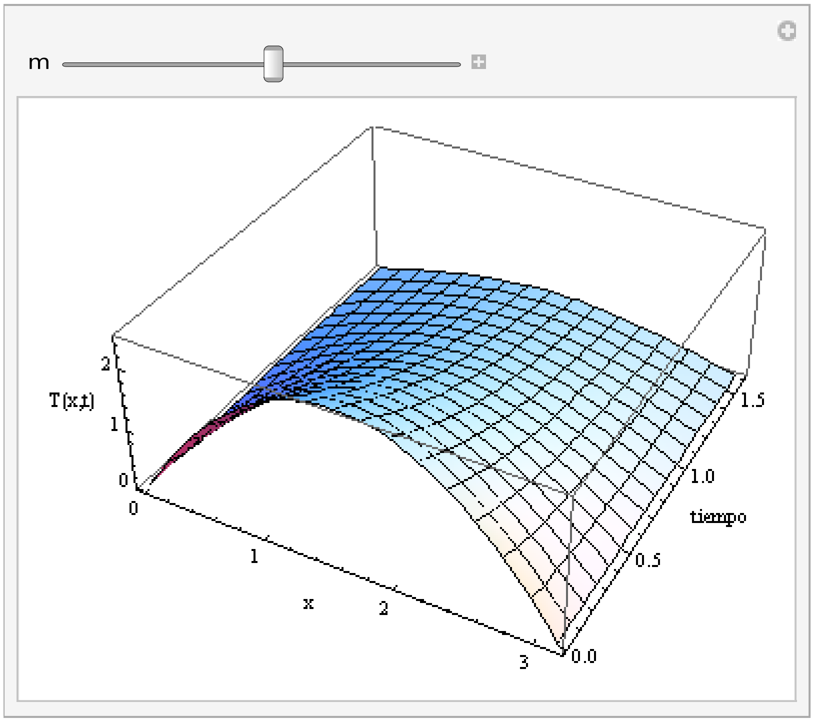
Al arrastrar el cursor se puede imaginar cómo decrece la temperatura en cada x al aumentar el tiempo t desde 0 hasta 3.

Out[13]=



In[5]:= $\text{Manipulate}\left[\text{Plot3D}\left[\frac{8}{\pi}\,\text{Sum}\left[\frac{\text{Sin}[(2\,i-1)\,x]\,\text{Exp}\left[-(2\,i-1)^2\,t\right]}{(2\,i-1)^3},\ \{i,1,4\}\right],\ \{x,0,\pi\},\ \{t,0,m\},\ \text{AxesLabel}\to\{\text{"x"},\text{"tiempo"},\text{"T(x,t)"}\}\right],\ \{m,0,3,.2\}\right]$

Al arrastrar el cursor se puede imaginar cómo va decreciendo la temperatura en cada x al transcurrir tiempo desde 0 hasta 3 (valores de m)



Note que en ambos lados de la placa se satisfacen las condiciones de frontera, es decir su temperatura es cero para todo t en sus bordes laterales. Al transcurrir el tiempo, el calor fluye desde el centro de la placa hacia ambos lados donde es disipado. Este proceso queda reflejado en la desaparición (colapso) de la temperatura en forma parabólica original hacia cero cuando el tiempo se incrementa.

Ejercicios

1. Aproxime la temperatura en $t = 0$ en los puntos $x = \pi/2,\ \pi/4,\ 3\pi/4,\ 0\ y\ \pi$ y trace algunas isostermas en ese instante.
2. Aproxime la temperatura en los puntos $(\pi/2,\ 1), (\pi/2,\ 2)\ (\pi/4, 1)\ y\ (\pi/4, 3)$.
3. Esboce las graficas de la temperatura en función del tiempo para $x = \pi/2\ \ y\ \pi/4$.

Problema

Determine la distribución de temperatura para $t \geq 0$ en una placa rectangular larga con ancho $0 < x < \pi,$ con condición inicial

$$T(x,0) = f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x, & \pi/2 \leq x \geq \pi \end{cases}$$

y condiciones de frontera $T(0,t) = T(\pi,t) = 0, \quad t \geq 0.$

Sugerencia. Aplique las fórmulas (24) y (26). Use el Mathematica para sus cálculos y los comandos Manipulate para la gráfica obtenida de (24)

Bibliografía

1. *Duffy, D.* (2003) Advanced Engineering Mathematics. CRC.
2. *Necati, Özişik*, (1980) M. Transferencia de calor. Universidad del estado de Carolina, U.S.A. McGraw-Hill.