Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación

DIFERENCIAS FINITAS

Profesor: Jaime Álvarez Maldonado | Ayudante: Rodrigo Torres Aguirre

El método de e las diferencias finitas sirve para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, las cuales van por lo general acompañadas de condiciones iniciales o de frontera.

Mediante un proceso de discretización, el conjunto infinito de números que representan la función o funciones incógnitas en el continuo, es reemplazado por un número finito de parámetros incógnita, y este proceso requiere alguna forma de aproximación.

Entre las formas de discretización esta: el método de los elementos finitos, método de volúmenes finitos, método de diferencias finitas (1-D, 2-D, 3-D, 4-D), etc.

DIFERENCIAS FINITAS EN 1-D (UNIDIMENSIONAL)

Si deseamos determinar la función $f(x)$ que satisface una ecuación diferencial en un dominio determinado, junto a condiciones de iniciales del problema. Se tiene que empezar por diferenciar la variable independiente x, para después construir una grilla o malla, con puntos discretos igualmente espaciados, sobre el dominio establecido. Después se debe reemplazar aquellos términos en la ecuación diferencial que involucren diferenciación por términos que contengan operaciones algebraicas. Este proceso trae implícito una aproximación y puede efectuarse mediante la utilización de aproximación en diferencias finitas para las derivadas en una función.

Aproximaciones de derivadas mediante diferencias finitas (o formulas de discretización)

- Aproximación en diferencias *hacia adelante* o *forward difference* de la primera derivada de una función:

$$Fórmula\ de\ Avanzada:\ \ f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$Error: E = \left|\frac{h}{2} f''(\xi)\right| \leq \frac{h}{2} M_1, \quad con \quad M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

- Aproximación en diferencias *hacia atrás* o *backward difference* de la primera derivada de una función:

$$Fórmula\ Regresiva:\ \ f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$Error: E = \left|\frac{h}{2}f''(\eta)\right| \leq \frac{h}{2}M_1, \quad con \quad M_1 = \max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$$

- Aproximación de *diferencia central* o *central difference* de la primera derivada de una función:

$$Fórmula\ Centrada: \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

$$Error: E = \left|\frac{h^2}{6}f'''(\vartheta)\right| \leq \frac{h^2}{6}M_2, \quad con \quad M_2 = \max_{a\leq x\leq b}|f'''(x)|$$

- Aproximación a la segunda derivada de una función:

$$Fórmula\ segunda\ derivada: \quad f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

$$Error: E = \left|\frac{h^2}{12}f^{iv}(\xi)\right| \leq \frac{h^2}{12}M_3, \quad con \quad M_3 = \max_{a\leq x\leq b}|f^{iv}(x)|$$

Demostraciones:

- ✓ Diferencias hacia adelante:

Desarrollando la función mediante la serie de Taylor hasta el segundo orden:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi)$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi) = f'(x)$$

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad E = \left|\frac{h}{2}f''(\xi)\right|}$$

- ✓ Diferencias hacia atrás:

Desarrollando la función mediante la serie de Taylor hasta el segundo orden:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\eta)$$

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} + \frac{h}{2}f''(\eta) = f'(x)$$

$$\boxed{f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \quad E = \left|\frac{h}{2}f''(\eta)\right|}$$

- ✓ Diferencia central:

Desarrollando la función mediante la serie de Taylor hasta el tercer orden, para $x+h$ y $x-h$:

$$(1)\ f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(\xi)$$
$$(2)\ f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(\eta)$$

Si restamos (1)-(2), se obtiene:

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{h^3}{6}\big(f'''(\xi)+f'''(\eta)\big)$$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f'''(\vartheta)=f'(x)$$

$$\boxed{f'(x)\approx\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h},\qquad E=\left|\frac{h^2}{6}f'''(\vartheta)\right|}$$

- ✓ Diferencia para la segunda derivada:

Desarrollando la función mediante la serie de Taylor hasta el tercer orden, para $x+h$ y $x-h$:

$$(1)\ f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{iv}(\xi)$$
$$(2)\ f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\frac{h^4}{24}f^{iv}(\eta)$$

Si sumamos $(1)+(2)$, se obtiene:

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f''(x)+\frac{h^4}{24}(f^{iv}(\xi)+f^{iv}(\eta))$$

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{iv}(\vartheta)=f''(x)$$

$$\boxed{f''(x)\approx\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2},\qquad E=\left|\frac{h^2}{12}f^{iv}(\vartheta)\right|}$$

Ejercicios:

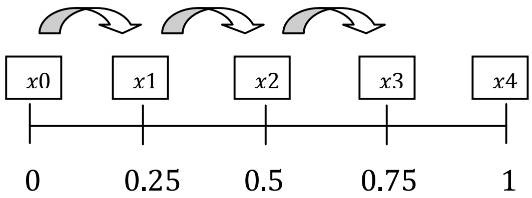
1) Determine $y_1, y_2\ e\ y_3$ de: $\begin{cases} y' = y - x + 1, & x \epsilon\ (0,1) \\ y(0) = 1; y(1) = 1 + e \end{cases}$

<u>Sol:</u>

Se puede observar que esta ecuación diferencial es de primer orden, por lo que podemos usar una de las discretizaciones para la primera derivada de una función.

Según los datos podemos hacer un bosquejo grafico, dándonos un espaciamiento de 0.25:

Se tomará la de Diferencias hacia adelante (o avanzada)



$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, en nuestro caso es $y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$

Ahora reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y(x) - x + 1$$

Ordenando términos queda:

$$y(x_i + h) - (1 + h)y(x_i) = h(1 + x_i)$$

Se puede aproximar $y(x_i \pm h) \approx y_{i\pm1}$, entonces:

$$y_{i+1} - (1 + 0.25)y_i = 0.25(1 - x_i)$$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

i=0 ➔ $y_1 - 1.25y_0 = 0.25(1 - x_0)$

i=1 ➔ $y_2 - 1.25y_1 = 0.25(1 - x_1)$

i=2 ➔ $y_3 - 1.25y_2 = 0.25(1 - x_2)$

En este punto podemos ocupar nuestra condición de borde, que es$y(0) \approx y_0 = 1$

$y_1 - 1.25 = 0.25(1 - 0)$ ➔ $y_1 = 1.5$

$y_2 - 1.25 * 1.5 = 0.25(1 - 0.25)$ ➔ $y_2 = 2.0625$

$y_3 - 1.25 * 2.0625 = 0.25(1 - 0.5)$ ➔ $y_3 = 2.703125$

Al Solución exacta de la ecuación diferencial es $y = e^x + x$

Evaluando en nuestros puntos se tiene que:

$y(0.25) = e^{0.25} + 0.25 = 1.53403$

$y(0.5) = e^{0.5} + 0.5 = 2.14872$

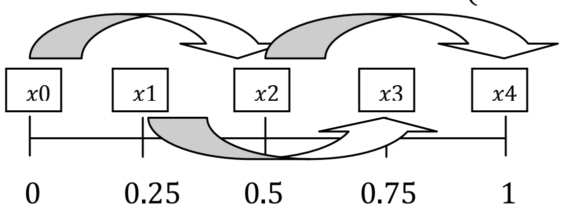
$y(0.75) = e^{0.75} + 0.75 = 2.867$

Por lo que el error de nuestra discretización es:

$$E = \|y(x_i) - y_i\| = \left\| \begin{pmatrix} 1.53403 \\ 2.14872 \\ 2.867 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2.0625 \\ 2.703125 \end{pmatrix} \right\| = 0.163875$$

Según los datos podemos hacer un bosquejo grafico, dándonos un espaciamiento de 0.25:

Se tomará la de Diferencia central (o centrada)



$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, en nuestro caso es $y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$

Ahora reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = y(x) - x + 1$$

Ordenando términos queda:

$y(x_i + h) - y(x_i - h) - 2hy(x_i) = 2h(1 - x_i)$

Se puede aproximar $y(x_i \pm h) \approx y_{i\pm1}$, entonces:

$$y_{i+1} - y_{i-1} - 2hy_i = 2h(1 - x_i)$$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

i=1 ➔ $-y_0 - 2hy_1 + y_2 = 2h(1 - x_1)$

i=2 ➔ $-y_1 - 2hy_2 + y_3 = 2h(1 - x_2)$

i=3 ➔ $-y_2 - 2hy_3 + y_4 = 2h(1 - x_3)$

En este punto podemos ocupar nuestra condición de borde, que es $y(0) \approx y_0 = 1$ y $y(1) \approx y_4 = 1 + e$

$-1-2*0.25y_1+\ y_2=2*0.25(1-0.25)$

$-y_1-2*0.25y_2+\ y_3=2*0.25(1-0.5)$

$-y_2-2*0.25y_3+\ 1+e=2*0.25(1-0.75)$

De forma ordenada queda:

$-0.5y_1+\ y_2=1.375$

$-y_1-0.5y_2+\ y_3=0.25$

$-y_2-0.5y_3=-3.59328$

Ordenando de forma matricial:

$\begin{bmatrix}-0.5 & 1 & 0\\ -1 & -0.5 & 1\\ 0 & -1 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.375\\ 0.25\\ -3.59328\end{bmatrix}$ Ahora ocuparemos el método de Gauss para encontrar nuestras incógnitas.

$\Rightarrow F_2-\frac{1}{0.5}F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-0.5 & 1 & 0 & 1.375\\ 0 & -2.5 & 1 & -2.5\\ 0 & -1 & -0.5 & -3.59328\end{array}\right)$

$\Rightarrow F_3-\frac{1}{2.5}F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-0.5 & 1 & 0 & 1.375\\ 0 & -2.5 & 1 & -2.5\\ 0 & 0 & -0.9 & -2.59328\end{array}\right)$

Con la matriz ampliada mostrando, podemos ver que Ran(A)=Ran(A|B)=3, entonces existe una única solución, y esta es:

$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.55514\\ 2.15257\\ 2.88142\end{bmatrix}$

Por lo que el error de nuestra discretización es:

$$E=\|y(x_i)-y_i\|=\left\|\begin{pmatrix}1.53403\\ 2.14872\\ 2.867\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1.55514\\ 2.15257\\ 2.88142\end{pmatrix}\right\|=0.02111$$

En este caso fue mejor resolver el problema por formula centrada, ya que arroja un error menor que cuando se ocupó la formula de avanzada.

La formula centrada es ocupada también en una ecuación diferencial de segundo orden, ya que se logran resultados más precisos.

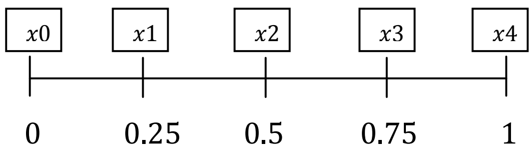
2) Determine $y_1, y_2\ e\ y_3$ de: $\begin{cases} y'' + 2y' + 10x = 0, & x \epsilon\ (0,1) \\ \quad y(0) = 1; y'(1) = 2 \end{cases}$, con una h=0.25

<u>Sol:</u>

Se puede observar que esta ecuación diferencial es de segundo orden, por lo que podemos usar una de las discretizaciones para la primera y segunda derivada de una función.

Según los datos podemos hacer un bosquejo grafico, dándonos un espaciamiento de 0.25:

Se tomará la de Diferencias hacia adelante (o avanzada)



Las formulas que ocuparemos son:

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + 2\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + 10x = 0$$

Ordenando términos queda:

$$(1-h)y(x_i - h) - 2y(x_i) + (1+h)y(x_i + h) = -10h^2 x_i$$

Se puede aproximar $y(x_i \pm h) \approx y_{i\pm 1}$, entonces:

$$(1-h)y_{i-1} - 2y_i + (1+h)y_{i+1} = -10h^2 x_i$$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

i=1 ➔ $(1-h)y_0 - 2y_1 + (1+h)y_2 = -10h^2 x_1$

i=2 ➔ $(1-h)y_1 - 2y_2 + (1+h)y_3 = -10h^2 x_2$

i=3➔ $(1-h)y_2 - 2y_3 + (1+h)y_4 = -10h^2 x_3$

En este punto podemos ocupar nuestra condición de borde, que es $y(0) \approx y_0 = 1$ y $y'(1) = 2$. En el caso de esta última, se debe aplicar una de las formulas ya vistas:

"Formula Regresiva" ➔ $y'(1) = y'_4 = \frac{y_4 - y_3}{h} = 2$ ➔$0.5 + y_3 = y_4$

Entonces:

$$0.75 * 1 - 2y_1 + 1.25y_2 = -10 * 0.25^2 * 0.25$$

$$0.75y_1 - 2y_2 + 1.25y_3 = -10 * 0.25^2 * 0.5$$

$$0.75y_2 - 2y_3 + 1.25(0.5 + y_3) = -10 * 0.25^2 * 0.75$$

De forma ordenada queda:

$$-2y_1 + 1.25y_2 = -0.90625$$

$$0.75y_1 - 2y_2 + 1.25y_3 = -0.3125$$

$$0.75y_2 - 0.75y_3 = -1.09375$$

Ordenando de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1.25 & 0 \\ 0.75 & -2 & 1.25 \\ 0 & 0.75 & -0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.90625 \\ -0.3125 \\ -1.09375 \end{bmatrix}$$

Ahora se debe ocupar el método de Gauss para encontrar nuestras incógnitas, por lo que después del proceso resulta en que:

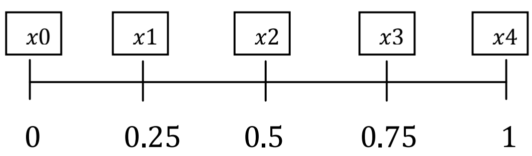
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.953704 \\ 8.800926 \\ 10.25026 \end{bmatrix}$$ y con esto podemos encontrar $y_4 = 10.75926$

3) Determine U_1, U_2 e U_3 de: $\begin{cases} -U'' = x, \quad x \epsilon (0,1) \\ U'(0) = U'(1) = 0 \end{cases}$, con una h=0.25

Sol:

Según los datos podemos hacer un bosquejo grafico, dándonos un espaciamiento de 0.25:

Se tomará la de Diferencia para la segunda derivada:



$$U''(x) \approx \frac{U(x+h) - 2U(x) + U(x-h)}{h^2}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$-\frac{U(x+h)-2U(x)+U(x-h)}{h^2}=x$$

Ordenando términos queda:

$-U(x_i+h)+2U(x_i)-U(x_i-h)=h^2x_i$

Se puede aproximar $y(x_i\pm h)\approx y_{i\pm1}$, entonces:

$$-U_{i+1}+2U_i-U_{i-1}=h^2x_i$$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

i=1 ➔ $-U_0+2U_1-U_2=h^2x_1$

i=2 ➔ $-U_1+2U_2-U_3=h^2x_2$

i=3 ➔ $-U_2+2U_3-U_4=h^2x_3$

En este punto podemos ocupar nuestra condición de borde, que es $U'(0)=U'(1)=0$. En este caso, se debe aplicar una de las formulas ya vistas, para las 2 condiciones de borde:

"Fórmula Avanzada" ➔ $U'(0)={U'}_0=\frac{U_1-U_0}{h}=0$ ➔$U_1-U_0=0$ ➔$U_1=U_0$

"Fórmula Regresiva" ➔ $U'(1)={U'}_4=\frac{U_4-U_3}{h}=0$ ➔$U_4-U_3=0$ ➔$U_4=U_3$

$-U_1+2U_1-U_2=0.25^2*0.25$

$-U_1+2U_2-U_3=0.25^2*0.5$

$-U_2+2U_3-U_3=0.25^2*0.75$

De forma ordenada queda:

$U_1-U_2=0.015625$

$-U_1+2U_2-U_3=0.03125$

$-U_2+U_3=0.046875$

Ordenando de forma matricial:

$\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.01562\\0.03125\\0.046875\end{bmatrix}$ Ahora ocuparemos el método de Gauss para encontrar nuestras incógnitas.

Lo que nos da como resultado que <u>no existe solución</u>.

4) Dado el problema de valor inicial (PVI): $\begin{cases} y'' + 3y' + uy = x + 3, & x \epsilon\ (0,1) \\ y(0) = 1; y(4) = u, u\ \epsilon\ IR \end{cases}$

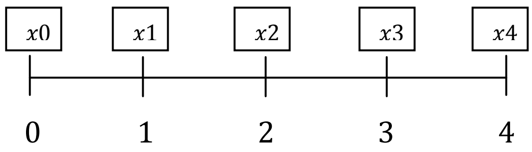
Construir un sistema lineal de 3x3, usando h=1.

a) Muestre que el problema tiene solución si $u\ \epsilon\ IR - \{2\}$

b) Resuelva el problema usando un u adecuado.

<u>Sol:</u>

Se tomará la de Diferencia para la segunda derivada y diferencia centrada para resolver el problema:



$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + 3\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + uy = x + 3$$

Ordenando términos queda:

$$2y(x_i + h) - 4y(x_i) + 2y(x_i - h) + 3hy(x_i + h) - 3hy(x_i - h) + 2h^2uy(x_i) = 2h^2(x_i + 3)$$

Se puede aproximar $y(x_i \pm h) \approx y_{i\pm1}$, recordando de que h=1, entonces:

$$-y_{i-1} + (2u - 4)y_i + 5y_{i+1} = 2(x_i + 3)$$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

i=1 ➔ $-y_0 + (2u - 4)y_1 + 5y_2 = 2(x_1 + 3)$

i=2 ➔ $-y_1 + (2u - 4)y_2 + 5y_3 = 2(x_2 + 3)$

i=3 ➔ $-y_2 + (2u - 4)y_3 + 5y_4 = 2(x_3 + 3)$

En este punto podemos ocupar nuestra condición de borde, que es $y(0) = 1\ e\ y(4) = u$. Lo que se traduce en que : $y(0) = y_0 = 1$ y $y(4) = y_4 = u$

$-1 + (2u - 4)y_1 + 5y_2 = 2(1 + 3)$

$-y_1 + (2u - 4)y_2 + 5y_3 = 2(2 + 3)$

$-y_2 + (2u-4)y_3 + 5u = 2(3+3)$

De forma ordenada queda:

$(2u-4)y_1 + 5y_2 = 9$

$-y_1 + (2u-4)y_2 + 5y_3 = 10$

$-y_2 + (2u-4)y_3 = 12 - 5u$

Ordenando de forma matricial:

$\begin{bmatrix} 2u-4 & 5 & 0 \\ -1 & 2u-4 & 5 \\ 0 & -1 & 2u-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 12-5u \end{bmatrix}$ Ahora ocuparemos el método de Gauss para encontrar nuestras incógnitas.

$$\Rightarrow F_2 + \frac{1}{2u-4}F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2u-4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 2u-4+\frac{5}{2u-4} & 5 & 10+\frac{9}{2u-4} \\ 0 & -1 & 2u-4 & 12-5u \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow F_3 + \frac{2u-4}{(2u-4)^2+5}F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2u-4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & \frac{(2u-4)^2+5}{2u-4} & 5 & \frac{20u-31}{2u-4} \\ 0 & 0 & 2u-4+\frac{5(2u-4)}{(2u-4)^2+5} & 12-5u+\frac{2u-4}{(2u-4)^2+5}\frac{20u-31}{2u-4} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2u-4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & \frac{4u^2-16u+21}{2u-4} & 5 & \frac{20u-31}{2u-4} \\ 0 & 0 & \frac{(2u-4)(4u^2-16u+21)+5(2u-4)}{4u^2-16u+21} & \frac{(12-5u)(4u^2-16u+21)+(20u-31)}{4u^2-16u+21} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2u-4 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & \frac{4u^2-16u+21}{2u-4} & 5 & \frac{20u-31}{2u-4} \\ 0 & 0 & \frac{8u^3-48u^2+116u-104}{4u^2-16u+21} & \frac{-20u^3+128u^2-277u+221}{4u^2-16u+21} \end{array}\right)$$

Con la matriz ampliada mostrando, podemos ver que Ran(A)=Ran(A|B)=3, si solo si, $\boxed{u \neq 2}$.

b) Entonces si tomamos un u=3 (totalmente arbitrario), se obtiene que:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & \frac{9}{2} & 5 & \frac{29}{2} \\ 0 & 0 & \frac{28}{9} & \frac{-52}{9} \end{array}\right)$, lo que da como resultado $\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.714286 \\ 5.285714 \\ -1.857143 \end{bmatrix}$

5) Considere el problema con valores en la frontera

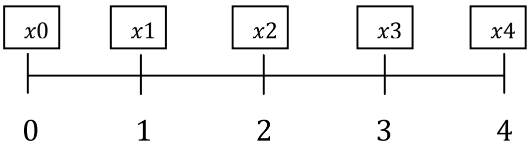
$$\begin{cases} y'' + y' + y = 3 + x + u, \quad 0 < x < 4 \\ y(0) = u; y(4) = u + 4 \end{cases}$$

a) Determine y (1), y (2) e y (3) usando el método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones. ¿Para qué valores de u la solución es única? Determine el error en norma 1, si la solución exacta es $y(x) = x + u$

b) Juan Tópicos se da cuenta que $y(x) = x + u$ no es la solución exacta del problema. Encuentre la solución exacta de $y'' + y' + y = 3 + x + u \quad 0 < x < 4$. Cambie las condiciones de frontera y determine nuevamente el error en norma 1.

<u>Sol:</u>

a) Discretización , con h=1:



Tenemos las siguientes formulas:

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

Reemplazando en la ecuación se tiene

$$y(x_i + h) - 2y(x_i) + y(x_i - h) + \frac{y(x_i + h) - y(x_i - h)}{2} + y(x_i) = 3 + x_i + u$$

Aproximando se obtiene:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2} + y_i = 3 + x_i + u$$

$$0.5y_{i-1} - y_i + 1.5y_{i+1} = 3 + x_i + u, \quad i = 1,2,3$$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

i=1 ➔ $0.5y_0 - y_1 + 1.5y_2 = 3 + x_1 + u$

i=2 ➔ $0.5y_1 - y_2 + 1.5y_3 = 3 + x_2 + u$

i=3 ➔ $0.5y_2 - y_3 + 1.5y_4 = 3 + x_3 + u$

Ahora ocupando nuestras condiciones de borde se tiene que:

$-y_1 + 1.5y_2 = 4 + 0.5u$

$0.5y_1 - y_2 + 1.5y_3 = 5 + u$

$0.5y_2 - y_3 = -0.5u$

Ahora ocupando el método de Gauss

Aplicando las operaciones $F_{12}(0.5) \quad y \quad F_{23}(2)$ se obtiene la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} -1 & 1.5 & 0 & 4+0.5u \\ 0 & -0.25 & 1.5 & 7+1.25u \\ 0 & 0 & 2 & 14+2u \end{bmatrix}$$

Como RanA=RanA/b=3 entonces existe una única solución independiente del valor de u.

La solución es

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 17+u \\ 14+u \\ 7+u \end{bmatrix}$$

El error es $E = \left\| \begin{pmatrix} u+1 \\ u+2 \\ u+3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 17+u \\ 14+u \\ 7+u \end{pmatrix} \right\|_1 = 32$

b) La solución exacta es $y(x) = x+u+2$. El sistema ahora queda

i=1 ➔ $-y_1 + 1.5y_2 = 3 + 0.5u$

i=2 ➔ $0.5y_1 - y_2 + 1.5y_3 = 5 + u$

i=3 ➔ $0.5y_2 - y_3 = -3 - 0.5u$

Aplicando las mismas operaciones de item a) se obtiene

$$\begin{bmatrix} -1 & 1.5 & 0 & 3+0.5u \\ 0 & -0.25 & 1.5 & 6.5+1.25u \\ 0 & 0 & 2 & 10+2u \end{bmatrix}$$ haciendo sustitución hacia arriba resulta $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0.5u+3 \\ u+4 \\ u+5 \end{bmatrix}$

El error es

$$E = \left\| \begin{pmatrix} u+3 \\ u+4 \\ u+5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5u+3 \\ u+4 \\ u+5 \end{pmatrix} \right\|_1 = 0.5|u|$$

6) Considere el problema de valores de frontera.

$$u''(t) = 2u'(t) - u(t) + t^2 - 1, \quad 0 < t < 1$$
$$u(0) = 5; u(1) = 10$$

Que tiene solución exacta $u(t) = t^2 + 4t + 5$

a) Genere un sistema lineal de 3x3 que aproxime a esta solución.
b) Determine el error Absoluto cometido usando $\| \quad \|_\infty$.
c) ¿Es estable el sistema obtenido en a)?

<u>Sol:</u>

Primero verificaremos que la solución exacta es tal.

$u(t) = t^2 + 4t + 5$

$u'(t) = 2t + 4$

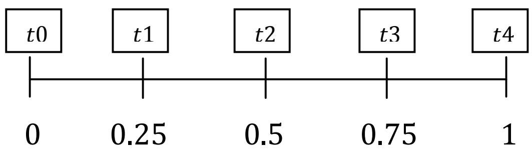
$u''(t) = 2$

Evaluando en la ecuación diferencial

$$2 - 2(2t + 4) + t^2 + 4t + 5 = t^2 - 1$$

Entonces la solución dada satisface la ED.

a) Discretización , con h=0.25:



Tenemos las siguientes formulas:

$$u''(t) \approx \frac{u(t+h) - 2u(t) + u(t-h)}{h^2}$$

$$u'(t) \approx \frac{u(t+h) - u(t-h)}{2h}$$

Reemplazando en la ecuación se tiene

$$\frac{u(t_i + h) - 2u(t_i) + u(t_i - h)}{h^2} - 2\frac{u(t_i + h) - u(t_i - h)}{2h} + u(t_i) = {t_i}^2 - 1$$

Aproximando se obtiene:

$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} - h(u_{i+1} - u_{i-1}) + h^2 u_i = h^2({t_i}^2 - 1)$

$(1 + h)u_{i-1} + (h^2 - 2)u_i + (1 - h)u_{i+1} = h^2({t_i}^2 - 1)$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

i=1 ➔ $(1+h)u_0 + (h^2-2)u_1 + (1-h)u_2 = h^2({t_1}^2-1)$

i=2 ➔ $(1+h)u_1 + (h^2-2)u_2 + (1-h)u_3 = h^2({t_2}^2-1)$

i=3 ➔ $(1+h)u_2 + (h^2-2)u_3 + (1-h)u_4 = h^2({t_3}^2-1)$

En este punto podemos ocupar nuestra condición de borde, que es $u(0)=5\ \ y\, u(1)=10$. Lo que se traduce en que : $u(0)=u_0=5$ y $u(1)=u_4=10$

$1.25*5 - 1.9375u_1 + 0.75u_2 = 0.0625(0.25^2-1)$

$1.25u_1 - 1.9375u_2 + 0.75u_3 = 0.0625(0.5^2-1)$

$1.25u_2 - 1.9375u_3 + 0.75*10 = 0.0625(0.75^2-1)$

De forma ordenada queda:

$-1.9375u_1 + 0.75u_2 = -6.30859375$

$1.25u_1 - 1.9375u_2 + 0.75u_3 = -0.046875$

$1.25u_2 - 1.9375u_3 = -7.52734375$

Ordenando de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1.9375 & 0.75 & 0 \\ 1.25 & -1.9375 & 0.75 \\ 0 & 1.25 & -1.9375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.30859375 \\ -0.046875 \\ -7.52734375 \end{bmatrix}$$

Después de aplicar el método de Gauss, obtenemos:

$\vec{u}_{aproximado} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0625 \\ 7.25 \\ 8.5625 \end{bmatrix}$ que es una aproximación a la solución exacta.

En cuanto a los valores exactos:

$$\vec{u}_{exacto} = \begin{bmatrix} u(0.25) \\ u(0.5) \\ u(0.75) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25^2 + 4*0.25 + 5 \\ 0.5^2 + 4*0.5 + 5 \\ 0.75^2 + 4*0.75 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0625 \\ 7.25 \\ 8.5625 \end{bmatrix}$$

b) Por lo que el error cometido es 0, pues $\vec{u}_{exacto} = \vec{u}_{aproximado}$, entonces: $\left\| \vec{u}_{exacto} - \vec{u}_{aproximado} \right\|_\infty = 0$

c) En cuanto a la estabilidad del sistema, se debe ocupar la formula de número de condición, es decir: $k(A) = \| A^{-1}\|_\infty \| A\|_\infty$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.773657 & -0.3991684 & -0.1545168 \\ -0.6652807 & -1.031185 & -0.3991684 \\ -0.4292133 & -0.6652807 & -0.773657 \end{bmatrix}$$

$\| A^{-1}\|_{\infty} = 2.095634$

$\| A\|_{\infty} = 3$

$k(A) = 6.286902$>>1 ➔ El sistema lineal es muy inestable.

DIFERENCIAS FINITAS EN 2-D (BIDIMENSIONAL)

Para el caso de 2 dimensiones, en la que se involucran 2 variables independientes trae aparejado un poco mas de trabajo, el procedimiento a seguir es idéntico al empleado al aproximar problemas unidimensionales, pero con ecuaciones diferenciales parciales.

Primero debemos construir el conjunto de puntos de la grilla $x_i (i = 0,1,2, \dots L)$ igualmente espaciados sobre el rango $0 \leq x \leq L_x$, con $x_0 = 0, x_L = L_x$ y $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Luego, procedemos con el conjunto de puntos de la grilla $y_j (j = 0,1,2, \dots M)$ igualmente espaciados sobre el rango $0 \leq y \leq M_y$, con $y_0 = 0, y_M = M_y$ y $\Delta y = y_{j+1} - y_j$. Ahora, un punto típico de la grilla tiene coordenadas (x_i, y_j).

<u>Aproximaciones de diferencias finitas a derivas parciales:</u>

Las formulas son prácticamente las mismas que en problemas unidimensionales, pues mediante el teorema de Taylor para funciones de dos variables, es posible escribir en forma exacta.

$$f(x_{i+1}, y_j) = f(x_i + \Delta x, y_j) = f(x_i, y_j) + \Delta x \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_i + \theta_1 \Delta x, y_j)}{\partial x^2}$$

Por simplicidad en la notación, podemos escribir:

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \Delta x \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f(x_i + \theta_1 \Delta x, y_j)}{\partial x^2}$$

Se asocia que $\Delta x = h$ y que $\Delta y = k$

Entonces las formulas son (al igual que en problemas unidimensionales):

1.- Aproximación de diferencias hacia delante de $\partial f / \partial x$ y de $\partial f / \partial y$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{h} \quad ; \quad \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{k}$$

2.- Aproximación de diferencias hacia atrás de $\partial f / \partial x$ y de $\partial f / \partial y$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{h} \quad ; \quad \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{k}$$

3.- Aproximación de diferencias central de $\partial f/\partial x$ y de $\partial f/\partial y$

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} \quad ; \quad \frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial y} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2k}$$

4.- Aproximación de diferencias de $\partial^2 f/\partial x^2$ y de $\partial^2 f/\partial y^2$

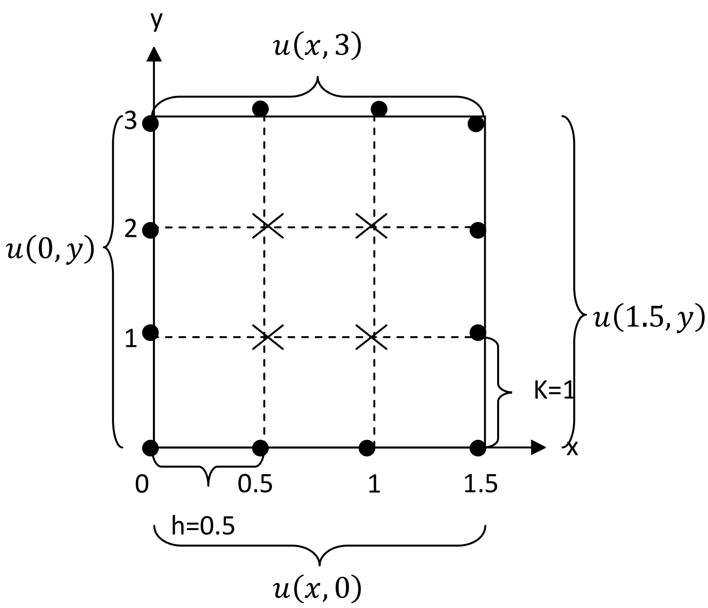
$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{k^2}$$

7) Aproximar la Temperatura en una placa en Estado de Equilibrio, discretizando la placa con h=0.5 y con k=1.

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$$
$$u(0,y) = y + 3$$
$$u(1.5,y) = 2y + 4$$
$$u(x,0) = x^2 + 1$$
$$u(x,3) = 3x$$

<u>Sol:</u>

Con los datos entregados por el problema podemos construir el conjunto de puntos de la grilla, la cual es:



-Los puntos negros son puntos conocidos, dados por las condiciones de borde.

-Las cruces son las incógnitas de nuestro problema.

Como nuestro problema consta de segundas derivadas parciales, debemos ocupar la que corresponde a este caso, es decir:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

Reemplazando estos datos en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = 0$$

Siendo que h=0.5 y k=1:

$$4u_{i+1,j} - 8u_{i,j} + 4u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = 0$$

$$4u_{i-1,j} - 10u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + 4u_{i+1,j} = 0$$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

$i = 1; j = 1$ ➔ $4u_{0,1} - 10u_{1,1} + u_{1,2} + u_{1,0} + 4u_{2,1} = 0$

$i = 1; j = 2$ ➔ $4u_{0,2} - 10u_{1,2} + u_{1,3} + u_{1,1} + 4u_{2,2} = 0$

$i = 2; j = 1$ ➔ $4u_{1,1} - 10u_{2,1} + u_{2,2} + u_{2,0} + 4u_{3,1} = 0$

$i = 2; j = 2$ ➔ $4u_{1,2} - 10u_{2,2} + u_{2,3} + u_{2,1} + 4u_{3,2} = 0$

En este punto podemos ocupar nuestras condiciones de borde, que son:

$u_{0,1} = u(0,1) = 4$

$u_{0,2} = u(0,2) = 5$

$u_{1,0} = u(0.5,0) = 1.25$

$u_{1,3} = u(0.5,3) = 1.5$

$u_{2,0} = u(1,0) = 2$

$u_{3,1} = u(1.5,1) = 6$

$u_{2,3} = u(1,3) = 3$

$u_{3,2} = u(1.5,2) = 8$

Al aplicar las condiciones de borde a las ecuaciones, estas quedan igual a:

$4 * 4 - 10u_{1,1} + u_{1,2} + 1.25 + 4u_{2,1} = 0$

$4 * 5 - 10u_{1,2} + 1.5 + u_{1,1} + 4u_{2,2} = 0$

$4u_{1,1} - 10u_{2,1} + u_{2,2} + 2 + 4 * 6 = 0$

$4u_{1,2} - 10u_{2,2} + 3 + u_{2,1} + 4 * 8 = 0$

De forma ordenada queda:

$-10u_{1,1} + u_{1,2} + 4u_{2,1} = -17.25$

$-10u_{1,2} + u_{1,1} + 4u_{2,2} = -21.5$

$4u_{1,1} - 10u_{2,1} + u_{2,2} = -26$

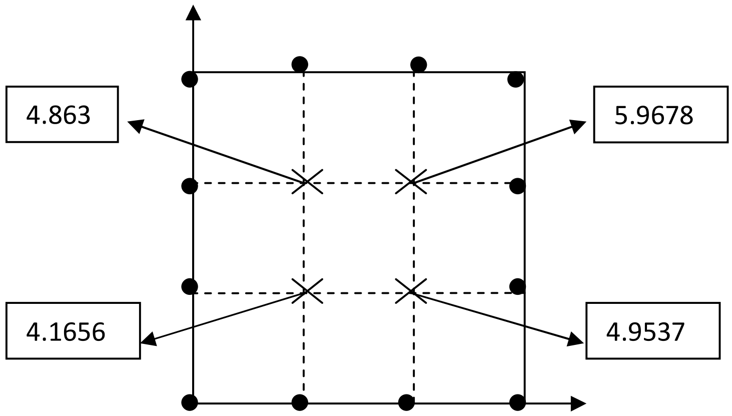
$$4u_{1,2} - 10u_{2,2} + u_{2,1} = -35$$

Y en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} -10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -10 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17.25 \\ -21.5 \\ -26 \\ -35 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el método de Gauss, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.1656 \\ 4.9537 \\ 4.863 \\ 5.9678 \end{bmatrix}$$ Que son las Temperaturas faltantes en la discretización de la placa.



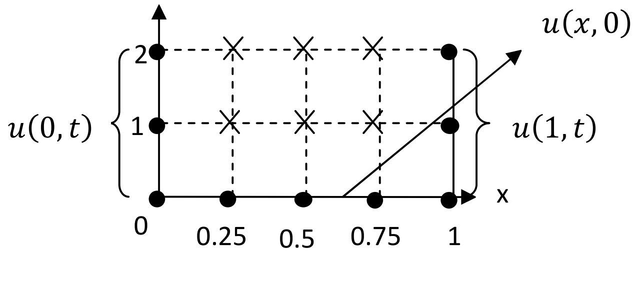
8) Aproximar después de t=2 segundos el problema diferencial parcial.

$$-4u_{xx}(x,t) + u_t(x,t) = 0.8\cos(\pi t)$$
$$u(x,0) = 2$$
$$u(0,t) = t + 1$$
$$u(1,t) = 3t$$

-Indicación: Ocupar la formula regresiva (diferencia hacia atrás) para u_t.

<u>Sol:</u>

Con los datos entregados por el problema podemos construir el conjunto de puntos de la grilla, la cual es:



Para aproximar a t=2, debemos aproximar primero a t=1. Se puede hacer en 2 procedimiento, primero hacer un sistema de ecuaciones en t=1, y luego cuando se tenga la aproximación en este periodo, se aproxima a t=2. Lo que se hará a continuación, comprende los 2 procesos en 1. En los 2 casos existen errores involucrados, uno más grande que el otro.

-Los puntos negros son puntos conocidos, dados por las condiciones de borde.

-Las cruces son las incógnitas de nuestro problema.

Como nuestro problema consta de primera y segunda derivadas parciales, debemos ocupar la que corresponde a este caso, es decir:

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}$$

Reemplazando estos datos en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$-4\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = 0.8\cos(\pi t_j)$$

Siendo que h=0.25 y k=1:

$$-64(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + u_{i,j} - u_{i,j-1} = 0.8\cos(\pi t_j)$$

$$-64u_{i-1,j} + 129u_{i,j} - u_{i,j-1} - 64u_{i+1,j} = 0.8\cos(\pi t_j)$$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

$i = 1; j = 1$ ➔ $-64u_{0,1} + 129u_{1,1} - u_{1,0} - 64u_{2,1} = 0.8\cos(\pi t_1)$

$i = 1; j = 2$ ➔ $-64u_{0,2} + 129u_{1,2} - u_{1,1} - 64u_{2,2} = 0.8\cos(\pi t_2)$

$i = 2; j = 1$ ➔ $-64u_{1,1} + 129u_{2,1} - u_{2,0} - 64u_{3,1} = 0.8\cos(\pi t_1)$

$i = 2; j = 2$ ➔ $-64u_{1,2} + 129u_{2,2} - u_{2,1} - 64u_{3,2} = 0.8\cos(\pi t_2)$

$i = 3; j = 1$ ➔ $-64u_{2,1} + 129u_{3,1} - u_{3,0} - 64u_{4,1} = 0.8\cos(\pi t_1)$

$i = 3; j = 2$ ➔ $-64u_{2,2} + 129u_{3,2} - u_{3,1} - 64u_{4,2} = 0.8\cos(\pi t_2)$

En este punto podemos ocupar nuestras condiciones de borde, que son:

$u_{0,1} = u(0,1) = 2$

$u_{0,2} = u(0,2) = 3$

$u_{1,0} = u(0.25,0) = 2$

$u_{2,0} = u(0.5,0) = 2$

$u_{3,0} = u(0.75,0) = 2$

$u_{4,1} = u(1,1) = 3$

$u_{4,2} = u(1,2) = 6$

Al aplicar las condiciones de borde a las ecuaciones, estas quedan igual a:

$-64 * 2 + 129u_{1,1} - 2 - 64u_{2,1} = -0.8$

$-64 * 3 + 129u_{1,2} - u_{1,1} - 64u_{2,2} = 0.8$

$-64u_{1,1} + 129u_{2,1} - 2 - 64u_{3,1} = -0.8$

$-64u_{1,2} + 129u_{2,2} - u_{2,1} - 64u_{3,2} = 0.8$

$-64u_{2,1} + 129u_{3,1} - 2 - 64 * 3 = -0.8$
$-64u_{2,2} + 129u_{3,2} - u_{3,1} - 64 * 6 = 0.8$
De forma ordenada queda:
$129u_{1,1} - 64u_{2,1} = 129.2$
$129u_{1,2} - u_{1,1} - 64u_{2,2} = 192.8$
$-64u_{1,1} + 129u_{2,1} - 64u_{3,1} = 1.2$
$-64u_{1,2} + 129u_{2,2} - u_{2,1} - 64u_{3,2} = 0.8$
$-64u_{2,1} + 129u_{3,1} = 193.2$
$-64u_{2,2} + 129u_{3,2} - u_{3,1} = 384.8$

Y en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 129 & 0 & -64 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 129 & 0 & -64 & 0 & 0 \\ -64 & 0 & 129 & 0 & -64 & 0 \\ 0 & -64 & -1 & 129 & 0 & -64 \\ 0 & 0 & -64 & 0 & 129 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -64 & -1 & 129 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 129.2 \\ 192.8 \\ 1.2 \\ 0.8 \\ 193.2 \\ 384.8 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el método de Gauss, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2222 \\ 3.7257 \\ 2.4605 \\ 4.4624 \\ 2.7184 \\ 5.2179 \end{bmatrix}$$ Que son los valores faltantes en la discretización del problema de EDP.

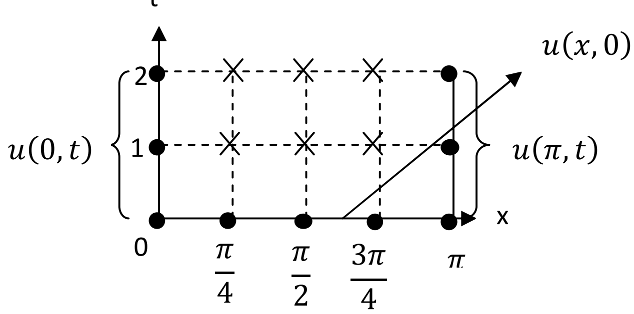
9) Dado el problema de EDP encontrar una aproximación en $x = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right\}$ después de 2 segundos.

$$3u_{xx} = u_t - 5, \qquad 0 < x < \pi, \;\; t > 0$$
$$u(x,0) = 1$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 1$$

-Indicación: $h = \frac{\pi}{4}$ y $k = 1$.

Sol:

Con los datos entregados por el problema podemos construir el conjunto de puntos de la grilla, la cual es:



-Los puntos negros son puntos conocidos, dados por las condiciones de borde.
-Las cruces son las incógnitas de nuestro problema.
Como nuestro problema consta de primera y segunda derivadas parciales, debemos ocupar la que corresponde a este caso, es decir:

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k}$$

Reemplazando estos datos en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$3\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}-\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{k}=-5$$

Siendo que $h=\frac{\pi}{4}$ y $k=1$:

$$48\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{\pi^2}-u_{i,j}-u_{i,j-1}=-5$$

$$48u_{i+1,j}-96u_{i,j}+48u_{i-1,j}-\pi^2u_{i,j}+\pi^2u_{i,j-1}=-5\pi^2$$

$$48u_{i-1,j}-(96+\pi^2)u_{i,j}+\pi^2u_{i,j-1}+48u_{i+1,j}=-5\pi^2$$

Ahora planteamos las ecuaciones para t=1 segundos, según nuestra formula:

$i=1; j=1$ ➔ $48u_{0,1}-(96+\pi^2)u_{1,1}+\pi^2u_{1,0}+48u_{2,1}=-5\pi^2$
$i=2; j=1$ ➔ $48u_{1,1}-(96+\pi^2)u_{2,1}+\pi^2u_{2,0}+48u_{3,1}=-5\pi^2$
$i=3; j=1$ ➔ $48u_{2,1}-(96+\pi^2)u_{3,1}+\pi^2u_{3,0}+48u_{4,1}=-5\pi^2$

En este punto podemos ocupar nuestras condiciones de borde, que son:

$u_{0,1}=u(0,1)=1$
$u_{1,0}=u(\pi/4,0)=1$
$u_{2,0}=u(\pi/2,0)=1$
$u_{3,0}=u(3\pi/4,0)=1$
$u_{4,1}=u(\pi,1)=1$

Al aplicar las condiciones de borde a las ecuaciones, estas quedan igual a:

$$48*1-(96+\pi^2)u_{1,1}+\pi^2*1+48u_{2,1}=-5\pi^2$$

$$48u_{1,1}-(96+\pi^2)u_{2,1}+\pi^2*1+48u_{3,1}=-5\pi^2$$

$$48u_{2,1}-(96+\pi^2)u_{3,1}+\pi^2*1+48*1=-5\pi^2$$

De forma ordenada queda:

$$-(96+\pi^2)u_{1,1}+48u_{2,1}=-5\pi^2-48-\pi^2$$

$$48u_{1,1}-(96+\pi^2)u_{2,1}+48u_{3,1}=-5\pi^2-\pi^2$$

$$48u_{2,1}-(96+\pi^2)u_{3,1}=-5\pi^2-48-\pi^2$$

Y en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} -(96+\pi^2) & 48 & 0 \\ 48 & -(96+\pi^2) & 48 \\ 0 & 48 & -(96+\pi^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6\pi^2+48 \\ 6\pi^2 \\ 6\pi^2+48 \end{bmatrix}$$

Al aplicar el método de Gauss, se obtiene que:

$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1504 \\ 2.5093 \\ 2.1504 \end{bmatrix}$ Valores en t=1 segundo

Ahora planteamos las ecuaciones para t=2 segundos, según nuestra formula:

$i = 1; j = 2$ ➔ $48u_{0,2} - (96+\pi^2)u_{1,2} + \pi^2 u_{1,1} + 48u_{2,2} = -5\pi^2$
$i = 2; j = 2$ ➔ $48u_{1,2} - (96+\pi^2)u_{2,2} + \pi^2 u_{2,1} + 48u_{3,2} = -5\pi^2$
$i = 3; j = 2$ ➔ $48u_{2,2} - (96+\pi^2)u_{3,2} + \pi^2 u_{3,1} + 48u_{4,2} = -5\pi^2$
En este punto podemos ocupar nuestras condiciones de borde y los resultados arrojados anteriormente, que son:
$u_{0,2} = u(0,2) = 1$
$u_{1,1} = u(0.25,1) = 2.1504$
$u_{2,1} = u(0.5,1) = 2.5093$
$u_{3,1} = u(0.75,1) = 2.1504$
$u_{4,2} = u(\pi, 2) = 1$

Al aplicar las condiciones de borde a las ecuaciones, estas quedan igual a:
$48 * 1 - (96+\pi^2)u_{1,2} + \pi^2 * 2.1504 + 48u_{2,2} = -5\pi^2$
$48u_{1,2} - (96+\pi^2)u_{2,2} + \pi^2 * 2.5093 + 48u_{3,2} = -5\pi^2$
$48u_{2,2} - (96+\pi^2)u_{3,2} + \pi^2 * 2.1504 + 48 * 1 = -5\pi^2$

De forma ordenada queda:
$-(96+\pi^2)u_{1,2} + 48u_{2,2} = -5\pi^2 - 48 - 2.1504\pi^2$
$48u_{1,2} - (96+\pi^2)u_{2,2} + 48u_{3,2} = -5\pi^2 - 2.5093\pi^2$
$48u_{2,2} - (96+\pi^2)u_{3,2} = -5\pi^2 - 48 - 2.1504\pi^2$

Y en forma matricial es:
$$\begin{bmatrix} -(96+\pi^2) & 48 & 0 \\ 48 & -(96+\pi^2) & 48 \\ 0 & 48 & -(96+\pi^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 7.1504\pi^2+48 \\ 7.5093\pi^2 \\ 7.1504\pi^2+48 \end{bmatrix}$$
Al aplicar el método de Gauss, se obtiene que:

$\begin{bmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4409 \\ 2.9134 \\ 2.4409 \end{bmatrix}$ Valores en t=2 segundo, que son los que andábamos buscando.

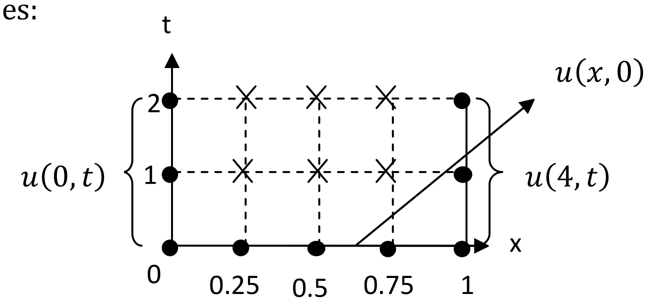
10) Aproximar el calor de una barra de longitud 4 después de 2 segundos en los puntos x=1,2,3.

$$u_t - 4u_{xx} + 3u_x = 0.8\cos(\pi t) + e^{-x}$$
$$u(0,t) = t + 1$$
$$u(4,t) = sen(\pi t)$$
$$u(x,0) = x^2 + 1$$

-Indicación: Ocupar aproximación regresiva en el tiempo y centrada en el espacio.

Sol:

Con los datos entregados por el problema podemos construir el conjunto de puntos de la grilla, la cual es:



-Los puntos negros son puntos conocidos, dados por las condiciones de borde.
-Las cruces son las incógnitas de nuestro problema.
Como nuestro problema consta de primera y segunda derivadas parciales, debemos ocupar la que corresponde a este caso, es decir:

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$
$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$
$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}$$

Reemplazando estos datos en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} - 4\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + 3\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = 0.8\cos(\pi t_j) + e^{-x_i}$$

Siendo que h=1 y k=1:

$$u_{i,j} - u_{i,j-1} - 4u_{i+1,j} + 8u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + 1.5u_{i+1,j} - 1.5u_{i-1,j} = 0.8\cos(\pi t_j) + e^{-x_i}$$

$$-5.5u_{i-1,j} + 9u_{i,j} - u_{i,j-1} - 2.5u_{i+1,j} = 0.8\cos(\pi t_j) + e^{-x_i}$$

Ahora planteamos las ecuaciones, según nuestra formula:

$i=1; j=1$ ➔ $-5.5u_{0,1} + 9u_{1,1} - u_{1,0} - 2.5u_{2,1} = 0.8\cos(\pi t_1) + e^{-x_1}$
$i=1; j=2$ ➔ $-5.5u_{0,2} + 9u_{1,2} - u_{1,1} - 2.5u_{2,2} = 0.8\cos(\pi t_2) + e^{-x_1}$
$i=2; j=1$ ➔ $-5.5u_{1,1} + 9u_{2,1} - u_{2,0} - 2.5u_{3,1} = 0.8\cos(\pi t_1) + e^{-x_2}$
$i=2; j=2$ ➔ $-5.5u_{1,2} + 9u_{2,2} - u_{2,1} - 2.5u_{3,2} = 0.8\cos(\pi t_2) + e^{-x_2}$
$i=3; j=1$ ➔ $-5.5u_{2,1} + 9u_{3,1} - u_{3,0} - 2.5u_{4,1} = 0.8\cos(\pi t_1) + e^{-x_3}$
$i=3; j=2$ ➔ $-5.5u_{2,2} + 9u_{3,2} - u_{3,1} - 2.5u_{4,2} = 0.8\cos(\pi t_2) + e^{-x_3}$

En este punto podemos ocupar nuestras condiciones de borde, que son:
$u_{0,1} = u(0,1) = 2$
$u_{0,2} = u(0,2) = 3$
$u_{1,0} = u(1,0) = 2$
$u_{2,0} = u(2,0) = 5$
$u_{3,0} = u(3,0) = 10$
$u_{4,1} = u(4,1) = 0$
$u_{4,2} = u(4,2) = 0$
Al aplicar las condiciones de borde a las ecuaciones, estas quedan igual a:
$-5.5 * 2 + 9u_{1,1} - 2 - 2.5u_{2,1} = -0.8 + e^{-1}$
$-5.5 * 3 + 9u_{1,2} - u_{1,1} - 2.5u_{2,2} = 0.8 + e^{-1}$
$-5.5u_{1,1} + 9u_{2,1} - 5 - 2.5u_{3,1} = -0.8 + e^{-2}$
$-5.5u_{1,2} + 9u_{2,2} - u_{2,1} - 2.5u_{3,2} = 0.8 + e^{-2}$
$-5.5u_{2,1} + 9u_{3,1} - 10 - 2.5 * 0 = -0.8 + e^{-3}$
$-5.5u_{2,2} + 9u_{3,2} - u_{3,1} - 2.5 * 0 = 0.8 + e^{-3}$
De forma ordenada queda:
$9u_{1,1} - 2.5u_{2,1} = -0.8 + e^{-1} + 11 + 2$
$9u_{1,2} - u_{1,1} - 2.5u_{2,2} = 0.8 + e^{-1} + 16.5$
$-5.5u_{1,1} + 9u_{2,1} - 2.5u_{3,1} = -0.8 + e^{-2} + 5$
$-5.5u_{1,2} + 9u_{2,2} - u_{2,1} - 2.5u_{3,2} = 0.8 + e^{-2}$
$-5.5u_{2,1} + 9u_{3,1} = -0.8 + e^{-3} + 10$
$-5.5u_{2,2} + 9u_{3,2} - u_{3,1} = 0.8 + e^{-3}$

Y en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 0 & -2.5 & 0 & 0 \\ -5.5 & 0 & 9 & 0 & -2.5 & 0 \\ 0 & -5.5 & -1 & 9 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0 & -5.5 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5.5 & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.2 + e^{-1} \\ 17.3 + e^{-1} \\ 4.2 + e^{-2} \\ 0.8 + e^{-2} \\ 9.2 + e^{-3} \\ 0.8 + e^{-3} \end{bmatrix}$$

Al aplicar el método de Gauss, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{3,1} \\ u_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.078 \\ 2.9601 \\ 2.4536 \\ 2.7578 \\ 2.5272 \\ 2.0606 \end{bmatrix}$$ Que son los valores faltantes en la discretización del problema de EDP.