

# Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos con Matlab a problemas bidimensionales (Parte I)

Javier García de Jalón de la Fuente ([jgjalon@etsii.upm.es](mailto:jgjalon@etsii.upm.es))

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales (Universidad Politécnica de Madrid)

Versión del 13 de octubre de 2006

## Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Funciones de interpolación 2-D .....</b>	<b>2</b>
2.1	Elementos isoparamétricos de cuatro lados .....	2
2.2	Elementos isoparamétricos de tres lados .....	3
<b>3</b>	<b>Transmisión de calor 2-D .....</b>	<b>6</b>
3.1	Ecuaciones de la transmisión de calor con elementos finitos isoparamétricos 2-D incluyendo convección.....	6
3.2	Método de Crank-Nicholson .....	8
3.3	Transmisión de calor 2-D con elementos finitos triangulares.....	9
<b>4</b>	<b>Problema elástico 2-D con elementos isoparamétricos.....</b>	<b>11</b>

## 1 Introducción

En un documento previo se ha considerado la aplicación del método de los elementos finitos a problemas de transmisión de calor unidimensionales. En la Parte I este documento y en los programas de Matlab anexos se explicará en detalle la aplicación del MEF a problemas 2-D de transmisión de calor y de elasticidad, comenzando por presentar con gran detalle las funciones de interpolación de los elementos triangulares y cuadriláteros, con dos, tres o cuatro nudos por lado.

En la Parte II se considerará el problema dinámico incluyendo el cálculo de frecuencias y modos naturales de vibración, así como de la matriz de transferencia. En esta Parte II se considerará también el problema de las tensiones térmicas. Con objeto de tener una visión más completa de los problemas bidimensionales se estudiará tanto el problema plano como el caso de simetría de revolución.

## 2 Funciones de interpolación 2-D

La base del método de los elementos finitos son las funciones de interpolación, que permiten expresar las funciones incógnita del problema dentro de un elemento como combinación lineal de los valores en los nudos del elemento. Por ejemplo, para la temperatura:

$$T(x, y) = N_1(x, y)T_1 + N_2(x, y)T_2 + \dots + N_m(x, y)T_m = \sum_1^m N_i(x, y)T_i \quad (1)$$

donde  $m$  es el número de nudos del elemento. En la práctica, es muy complicado construir de forma general las funciones de interpolación en función de las coordenadas globales  $(x, y)$ , y se suelen definir en función de unos ejes de coordenadas locales, en los cuales la geometría del elemento está normalizada. Lo habitual es utilizar coordenadas Cartesianas para cuadriláteros y coordenadas de área para triángulos. A continuación se revisan las funciones de interpolación en ambos casos.

### 2.1 Elementos isoparamétricos de cuatro lados

Las siguientes Figuras muestran los elementos cuadrados de primero, segundo y tercer orden, en función de las coordenadas locales  $(\xi, \eta)$  que siempre varían en el intervalo  $[-1, 1]$ .

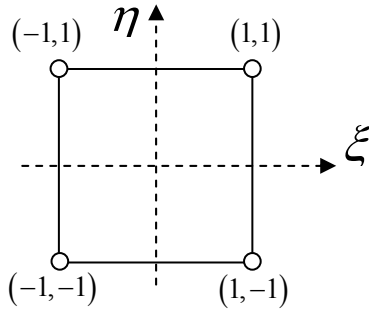


Figura 1. Elemento lineal.

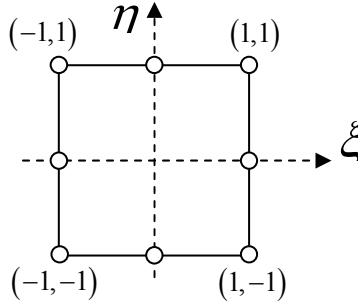


Figura 2. Elemento cuadrático.

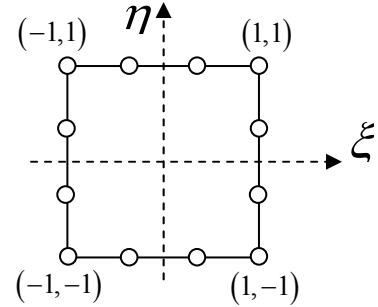


Figura 3. Elemento cúbico.

Es fácil establecer las funciones de interpolación en estos casos mediante simple inspección, imponiendo la condición de que cada función de interpolación tome valor unidad en el nudo al que corresponde y cero en los demás nudos. Además debe cumplir la condición de estar definida por el polinomio de grado más bajo posible que cumple las citadas condiciones. Se pueden utilizar fórmulas generales válidas para varios nudos sin más que sustituir los valores de  $(\xi_i, \eta_i)$  por las coordenadas locales del nudo correspondiente.

- Elementos lineales (Figura 1):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \cdot \xi_i)(1 + \eta \cdot \eta_i), \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1 \quad (2)$$

- Elementos cuadráticos (Figura 2):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \cdot \xi_i)(1 + \eta \cdot \eta_i)(\xi \cdot \xi_i + \eta \cdot \eta_i - 1), \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1 \quad (3)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta \cdot \eta_i), \quad \xi_i = 0; \quad \eta_i = \pm 1 \quad (4)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi \cdot \xi_i), \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = 0 \quad (5)$$

– Elementos cúbicos (Figura 3):

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi \cdot \xi_i)(1 + \eta \cdot \eta_i)[9(\xi^2 + \eta^2) - 10], \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm 1 \quad (6)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 - \xi^2)(1 + \eta \cdot \eta_i)(1 + 9\xi \cdot \xi_i), \quad \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \quad \eta_i = \pm 1 \quad (7)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 - \eta^2)(1 + \xi \cdot \xi_i)(1 + 9\eta \cdot \eta_i), \quad \xi_i = \pm 1; \quad \eta_i = \pm \frac{1}{3} \quad (8)$$

A partir de estas expresiones es relativamente sencillo calcular las de sus derivadas respecto a  $\xi$  y respecto a  $\eta$ , necesarias para calcular las matrices propias del MEF, como se verá más adelante.

También más adelante se explicará cómo se pueden utilizar estas expresiones para construir funciones de interpolación correspondientes a elementos con un número de nudos arbitrario (2, 3 ó 4) por lado.

## 2.2 Elementos isoparamétricos de tres lados

Al igual que en los elementos de cuatro lados, en los elementos triangulares las funciones de interpolación y sus derivadas se definen en **coordenadas locales**, y luego se transforman a las coordenadas generales  $(x, y)$ .

La diferencia está en que, mientras en los elementos de cuatro lados se utilizan unas coordenadas locales Cartesianas  $(\xi, \eta)$ , en los elementos de tres lados se utilizan las llamadas **coordenadas de área**  $(L_1, L_2, L_3)$ , que se definen a partir de las áreas de triángulos mostradas en la Figura 4:

$$L_1 \equiv \frac{A_1}{A}, \quad L_2 \equiv \frac{A_2}{A}, \quad L_3 \equiv \frac{A_3}{A} \quad (9)$$

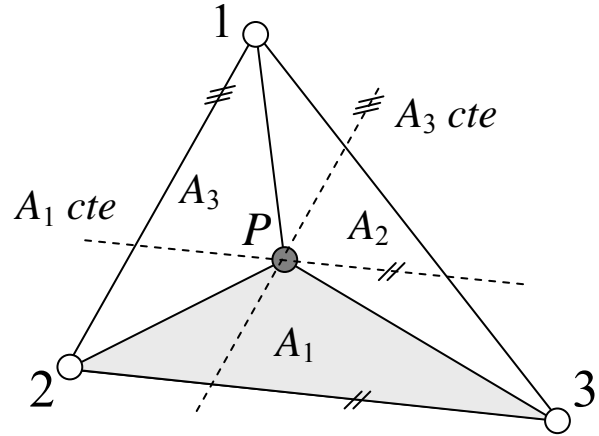


Figura 4. Elemento finito de tres lados y coordenadas de área.

Las coordenadas de área representan el *tanto por uno* del área total, para cada uno de los triángulos determinados por el punto  $P$  y los tres vértices del triángulo. Las líneas paralelas a los lados del triángulo responden a la ecuación  $L_i = \text{cte}$ .

La principal diferencia entre estas coordenadas locales y las de los cuadriláteros es que **las coordenadas de área no son independientes**, sino que están relacionadas por la ecuación:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (10)$$

Esta dependencia lineal es un pequeño problema en algunos momentos del desarrollo teórico y no es en absoluto ninguna dificultad en otros. Por ejemplo, de cara a la integración numérica en el dominio representado por el triángulo lo que es complicado es hacer esta integración en coordenadas Cartesianas. En las coordenadas de área esta integración se puede hacer de un modo muy sencillo mediante sumatorios del tipo,

$$\iint_{\Omega} f(L_1, L_2, L_3) d\Omega \approx \sum_{i=1}^{npi} W_i f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) \quad (11)$$

donde  $W_i$  es un determinado coeficiente y  $L_{1i}$ ,  $L_{2i}$  y  $L_{3i}$  son las coordenadas del correspondiente punto de integración. La Tabla 1 define estos coeficientes y las coordenadas de los puntos de integración, para diferentes números de puntos de integración. La función **JGP3B.m** proporciona cuatro vectores con los coeficientes y las tres coordenadas, para el número de puntos deseado. Obsérvese que la fórmula numérica (11) mantiene la simetría respecto a las tres coordenadas.

**Tabla 1. Integración numérica con coordenadas de área.**

$n$	Error	$L_1, L_2, L_3$	$2W_i$
1	$O(h^2)$	1/3, 1/3, 1/3	1
3	$O(h^3)$	1/2, 1/2, 0 0, 1/2, 1/2 1/2, 0, 1/2	1/3 1/3 1/3
4	$O(h^4)$	1/3, 1/3, 1/3 (0.6, 0.2, 0.2), (0.2, 0.6, 0.2), (0.2, 0.2, 0.6)	-27/48 25/48
7	$O(h^7)$	1/3, 1/3, 1/3 (a1, b1, b1), (b1, a1, b1), (b1, b1, a1) (a2, b2, b2), (b2, a2, b2), (b2, b2, a2) a1=0.0597158717, b1=0.4701420641 a2=0.7974269853, b2=0.1012865073	0.225 0.1323941527 0.1259391805

Las funciones de interpolación de los triángulos de orden dos, tres y cuatro son las siguientes:

- Funciones de interpolación de un elemento lineal (Figura 5):

$$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3 \quad (12)$$

- Funciones de interpolación de un elemento cuadrático (Figura 6):

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1 & N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_2 &= (2L_2 - 1)L_2 & N_5 &= 4L_2L_3 \\ N_3 &= (2L_3 - 1)L_3 & N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned} \quad (13)$$

- Funciones de interpolación de un elemento cúbico (Figura 7):

$$\begin{aligned} N_1 &= (3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1 / 2 \\ N_2 &= (3L_2 - 1)(3L_2 - 2)L_2 / 2 \\ N_3 &= (3L_3 - 1)(3L_3 - 2)L_3 / 2 \\ N_4 &= L_1L_2(3L_1 - 1)9/2 & N_5 &= L_1L_2(3L_2 - 1)9/2 \\ N_6 &= L_2L_3(3L_2 - 1)9/2 & N_7 &= L_2L_3(3L_3 - 1)9/2 \\ N_8 &= L_3L_1(3L_3 - 1)9/2 & N_9 &= L_3L_1(3L_1 - 1)9/2 \\ N_{10} &= 27L_1L_2L_3 \end{aligned} \quad (14)$$

En las expresiones (12)-(14) y en las Figuras correspondientes se ha mantenido el criterio de numerar en primer lugar los vértices y a continuación los nudos intermedios de cada lado. Esto tiene la ventaja de hacer corresponder los nudos 1, 2 y 3 con las coordenadas de área  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$ . En la práctica sin embargo, se suelen numerar los nudos consecutivamente, empezando por un vértice, en sentido contrario a las agujas del reloj. Éste es el criterio que se sigue en los programas de Matlab.

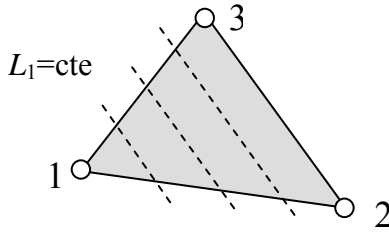


Figura 5. Elemento lineal.

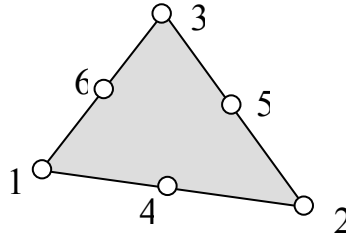


Figura 6. Elemento cuadrático.

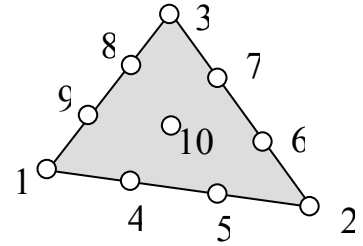


Figura 7. Elemento cúbico.

Es fácil comprobar que las funciones (12)-(14) cumplen la condición de tomar valor unidad en el nudo correspondiente y cero en todos los demás nudos.

La función **N3G6.m** evalúa estas funciones de interpolación en los puntos cuyas coordenadas de área se le pasen como argumentos, que de ordinario serán los puntos de integración o los nudos.

Los **argumentos** de esta función son un vector **NNL** con el número de nudos por lado y tres vectores **L1**, **L2** y **L3** con las coordenadas de área de todos los puntos de integración que se vayan a utilizar. El cuarto valor de **NNL** indica si hay o no un nudo adicional en el centro del elemento (este nudo central es recomendable en los elementos cúbicos, como el de la Figura 7).

El **valor de retorno** de la función **N3G6.m** es una matriz **NL** cuyas columnas son cada una de las funciones de interpolación evaluadas en todos los puntos de integración. Esta matriz tendrá tantas filas como nudos y tantas columnas como puntos de integración.

La función **DN3G6.m** es análoga a **N3G6.m**, y calcula las derivadas de las funciones de interpolación respecto a las coordenadas locales  $L_1$  y  $L_2$ , evaluadas en los puntos de integración. No hace falta calcular las derivadas respecto a  $L_3$ , ya que sólo hay dos coordenadas de área independientes.

Los argumentos **DN3G6.m** tienen el mismo significado que los de la función anterior **N3G6.m**. En este caso, sin embargo, debe haber dos valores de retorno: las columnas de la matriz **DNL1** contienen las derivadas respecto a  $L_1$  y las de **DNL2** las derivadas respecto a  $L_2$ , en ambos casos evaluadas en los puntos de integración.

Hay que tener en cuenta que la coordenada de área  $L_3$  se puede expresar en función de  $L_1$  y  $L_2$  mediante la expresión:

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2 \quad (15)$$

El cálculo de las derivadas de las ecuaciones (12)-(14) respecto a  $L_1$  y  $L_2$  se puede hacer de dos formas:

1. Sustituyendo  $L_3$  en función de  $L_1$  y  $L_2$  según (15), con lo cual ya se tienen todas las funciones de interpolación como función de  $L_1$  y  $L_2$ , exclusivamente.
2. Utilizando la regla de derivación en cadena, teniendo en cuenta que si en una expresión aparece  $L_3$ , a la derivada respecto a  $L_1$  habrá que añadir la derivada respecto a  $L_3$  por la derivada de  $L_3$  respecto a  $L_1$  (que será  $-1$ , según la expresión (15)). Por ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial L_1} (L_2 L_3 (3L_3 - 1) 9/2) = \frac{\partial}{\partial L_3} (L_2 L_3 (3L_3 - 1) 9/2) \frac{\partial L_3}{\partial L_1} \quad (16)$$

Lo mismo sucede con la derivada respecto a  $L_2$ .

### 3 Transmisión de calor 2-D

#### 3.1 Ecuaciones de la transmisión de calor con elementos finitos isoparamétricos 2-D incluyendo convección

Se trata de estudiar el flujo de calor bidimensional por medio de elementos finitos de tres y/o cuatro lados, incluyendo una *condición de contorno de convección*, lo que obliga a realizar los programas de un modo determinado.

A continuación se recuerdan los fundamentos teóricos en los que se basan los programas de Matlab. La ecuación en derivadas parciales que gobierna el régimen transitorio de transmisión de calor 2-D es la siguiente:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (17)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica del materia,  $\rho$  la densidad y  $c_p$  el calor específico, que se suponen constantes, independientes de la temperatura. Esta ecuación debe ser completada por las condiciones de contorno. Se supondrá que el contorno  $\Gamma$  está dividido en tres zonas:

- $\Gamma_T$ , con una condición de temperatura conocida (condiciones esenciales o de Dirichlet):

$$T - \bar{T} = 0, \quad \text{en } \Gamma_T \quad (18)$$

- $\Gamma_q$ , con una condición de flujo de calor conocido (condiciones naturales o de Neuman):

$$q_n - \bar{q} = 0, \quad \text{o bien } -k \frac{\partial T}{\partial n} - \bar{q} = 0, \quad \text{en } \Gamma_q \quad (19)$$

- $\Gamma_h$ , con una condición de convección, es decir, de flujo de calor proporcional a la diferencia de temperatura entre el contorno del sólido y un medio exterior:

$$q_n - h(T - T_e) = 0, \quad \text{o bien } -k \frac{\partial T}{\partial n} - h(T - T_e) = 0, \quad \text{en } \Gamma_h \quad (20)$$

La solución numérica que se trata de determinar mediante el método de los elementos finitos deberá satisfacer del mejor modo posible las ecuaciones (17)-(20). Imponiendo esta condición se obtendrán ecuaciones suficientes para determinar las temperaturas de los nudos del mallado en función del tiempo. Una forma de obligar al cumplimiento (en cierta forma óptimo) de las ecuaciones (17)-(20) es el *método de Galerkin*, que impone la condición de que se anule la suma de las integrales de los residuos de dichas ecuaciones multiplicados por unas funciones de ponderación que son precisamente las funciones de interpolación de los elementos finitos utilizados. Sea  $\mathbf{N}(x, y)$  el vector de las funciones de interpolación correspondientes a los  $n$  nudos del mallado. Anulando la suma de integrales ponderadas de los residuos de las ecuaciones (17)-(20):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{N} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx dy + \\ & + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N} (T - \bar{T}) d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N} \left( -k \frac{\partial T}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} \left( -k \frac{\partial T}{\partial n} - h(T - T_e) \right) d\Gamma = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (21)$$

Ahora se trata de transformar el primer término de la expresión (21) de modo que desaparezcan las derivadas segundas. Se utilizarán para ello las fórmulas de Green, que tienen la forma siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} dxdy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \beta dxdy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_x d\Gamma \\ \int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} dxdy &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \beta dxdy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_y d\Gamma \end{aligned} \right\} n_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + n_y \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial n} \quad (22)$$

Haciendo  $\alpha = \mathbf{N}$  y  $\beta = \partial T / \partial x$  para el primer sumando, y  $\alpha = \mathbf{N}$  y  $\beta = \partial T / \partial y$  para el segundo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{N} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N} \frac{\partial T}{\partial x} n_x d\Gamma \\ \int_{\Omega} \mathbf{N} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{N} \frac{\partial T}{\partial y} n_y d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

La distribución de temperaturas se va a aproximar mediante una interpolación por elementos finitos semi-discreta, lo cual quiere decir que las funciones de interpolación sólo dependen de las variables espaciales y los valores nodales siguen dependiendo del tiempo, es decir:

$$T(x, t) = \mathbf{N}(x)^T \mathbf{T}(t) \quad (24)$$

Introduciendo la expresión (24) y las transformaciones (23) en las ecuaciones (21) se obtiene:

$$\begin{aligned} -k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \right) dxdy \cdot \mathbf{T} + \int_{\Gamma} \mathbf{N} \left( k \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\Gamma - \rho c_p \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dxdy \cdot \dot{\mathbf{T}} + \\ + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N} (T - \bar{T}) d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N} \left( -k \frac{\partial T}{\partial n} - \bar{q} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} \left( -k \frac{\partial T}{\partial n} - h(T - T_e) \right) d\Gamma = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (25)$$

El segundo término, procedente de las fórmulas de Green, se extiende a la totalidad del contorno  $\Gamma$ , y puede anularse parcialmente con algunos de los términos introducidos para obligar al cumplimiento de las condiciones de contorno. Teniendo esto en cuenta y reordenando se llega a:

$$\begin{aligned} -k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \right) dxdy \cdot \mathbf{T} - \rho c_p \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dxdy \cdot \dot{\mathbf{T}} + \\ + k \int_{\Gamma_T} \mathbf{N} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_T} \mathbf{N} (T - \bar{T}) d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \mathbf{N} \bar{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} h(T - T_e) d\Gamma = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (26)$$

Los términos 3º y 4º son integrales extendidas a la parte del contorno donde la temperatura es conocida, por lo que dichos nudos no representan ninguna incógnita. Es posible tomar para ellos unas funciones de ponderación  $\mathbf{N}$  nulas, con lo cual dichos términos desaparecen. También se puede eliminar el penúltimo término, correspondiente al flujo de calor impuesto  $\bar{q}$ , pues se considerará que el flujo impuesto nulo es la única condición fácilmente imponible desde el punto de vista físico. Teniendo todo esto en cuenta, se llega finalmente a las ecuaciones siguientes:

$$k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \right) dxdy \cdot \mathbf{T} + \rho c_p \int_{\Omega} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dxdy \cdot \dot{\mathbf{T}} + \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} h(\mathbf{N}^T \mathbf{T} - T_e) d\Gamma = \mathbf{0} \quad (27)$$

La ecuación (27) se puede representar en la forma matricial siguiente:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h} \quad (28)$$

donde:

$$\mathbf{K} \equiv k \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \right) dx dy + h \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Gamma, \quad \mathbf{C} \equiv \rho c_p \int \mathbf{N} \mathbf{N}^T dx dy, \quad \mathbf{h} \equiv h T_e \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} d\Gamma \quad (29)$$

Aunque es posible suponer que el **coeficiente de película**  $h$  es función del punto del contorno, en los programas de Matlab se considerará **constante para cada elemento finito** (pudiendo variar por tanto de un elemento a otro). También se considerará **constante para todo el contorno sometido a convección** la temperatura exterior  $T_e$ . Considérese el tercer término de (27) con más de detalle:

$$\int_{\Gamma_h} \mathbf{N} h (\mathbf{N}^T \mathbf{T} - T_e) d\Gamma = h \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Gamma \cdot \mathbf{T} - h T_e \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} d\Gamma = \mathbf{0} \quad (30)$$

Estas integrales se realizan también elemento a elemento, o mejor dicho, lado a lado de los elementos que formen parte del contorno  $\Gamma_h$ . Hay que recordar que las funciones de interpolación a lo largo de un lado dependen solamente de los nudos de ese lado. Por ello el minuendo de (30) se suma a la matriz de conductividad térmica  $\mathbf{K}$  (pues multiplica al vector  $\mathbf{T}$ , al igual que la matriz  $\mathbf{K}$ ), mientras que el sustraendo da lugar a un término independiente  $\mathbf{h}$ .

La Figura 8 muestra el lado de un elemento en el que existe una condición de contorno de convección. Los nudos se numeran, como es habitual en el método de los elementos finitos, en sentido contrario a las agujas del reloj, es decir, en sentido de  $\xi$  decreciente para este lado.

Las matrices  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{C}$  de la ecuación matricial (28), así como el vector  $\mathbf{h}$ , se ensamblan a partir de las correspondientes contribuciones de todos los elementos finitos en que se ha discretizado el dominio.

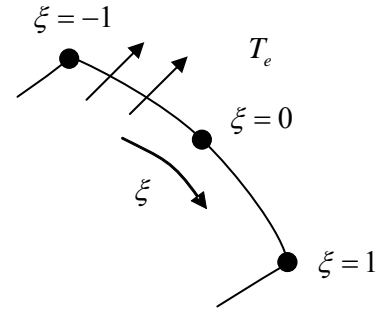


Figura 8. Lado con convección.

### 3.2 Método de Crank-Nicholson

En el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (28) evaluado en  $t + \Delta t/2$  se introducen las sustituciones propias del método de Crank-Nicholson, que son las siguientes:

$$\mathbf{T}_{t+\Delta t/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_t + \mathbf{T}_{t+\Delta t}), \quad \mathbf{h}_{t+\Delta t/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{h}_t + \mathbf{h}_{t+\Delta t}), \quad \dot{\mathbf{T}}_{t+\Delta t/2} = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{T}_{t+\Delta t} - \mathbf{T}_t) \quad (31)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones diferenciales ordinarias (28) se obtiene:

$$\left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \mathbf{h}_{t+\Delta t/2} + \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} - \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) \mathbf{T}_t \quad (32)$$

o bien, introduciendo unas matrices constantes  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} \mathbf{T}_{t+\Delta t} = \mathbf{h}_{t+\Delta t/2} + \mathbf{B} \mathbf{T}_t, \quad \mathbf{A} \equiv \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{2} \mathbf{K} \right), \quad \mathbf{B} \equiv \left( \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} - \frac{1}{2} \mathbf{K} \right) \quad (33)$$

La expresión (33) permite determinar las temperaturas en el instante  $\mathbf{T}_{t+\Delta t}$  a partir de  $\mathbf{T}_t$ .

$$\mathbf{T}_{t+\Delta t} = \mathbf{A} \setminus (\mathbf{h}_{t+\Delta t/2} + \mathbf{B} \mathbf{T}_t) \quad (34)$$

A continuación se considerarán con más detalle los términos de la expresión (30), que son debidos a la convección. Separando la contribución de cada elemento, el primer término de la ecuación (30) se puede poner en la forma:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{T} = h \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} \mathbf{N}^T d\Gamma \cdot \mathbf{T} = \left( \sum_{j=1}^{n_{lc}} \mathbf{H}_j \right) \cdot \mathbf{T}, \quad \mathbf{H}_j = h \int_0^l \mathbf{N} \mathbf{N}^T dl \quad (35)$$



Estas matrices  $\mathbf{H}_j$  se deben sumar a la matriz de conductividad térmica  $\mathbf{K}$ , aunque sólo tienen los nudos del lado correspondiente (de algunos elementos). La integral de línea de la expresión (35) se debe hacer numéricamente mediante el método de Gauss-Legendre, también en coordenadas locales. Siguiendo la geometría y la notación mostrada en la Figura 8, y teniendo en cuenta que:

$$dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 (d\xi)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 (d\xi)^2 \quad (36)$$

la integral de la expresión (35) se puede poner en la forma:

$$\mathbf{H}_j = h \int_0^l \mathbf{N} \mathbf{N}^T dl = h \int_{-1}^1 \mathbf{N}(\xi) \mathbf{N}^T(\xi) \left( \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \quad (37)$$

Esta expresión pone de manifiesto la forma de la *integral que hay que realizar numéricamente*, mediante el método de Gauss-Legendre. En los elementos isoparamétricos las coordenadas se interpolan con las mismas expresiones que la temperatura. Se tendrá pues que, en el lado considerado:

$$x = \sum_i N_i(\xi) x_i = \mathbf{N}^T(\xi) \mathbf{x}_G, \quad y = \sum_i N_i(\xi) y_i = \mathbf{N}^T(\xi) \mathbf{y}_G \quad (38)$$

donde  $\mathbf{x}_G$  e  $\mathbf{y}_G$  son vectores con las **coordenadas globales** de los nudos del lado. Estas expresiones permiten calcular las derivadas que se necesitan en la expresión (37). Introduciendo la integración numérica de Gauss-Legendre en dicha expresión se obtiene:

$$\mathbf{H}_j = h \int_{-1}^1 \mathbf{N}(\xi) \mathbf{N}^T(\xi) \left( \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\xi = h \sum_{i=1}^{NPI} \left( \mathbf{N}(\xi_i) \mathbf{N}^T(\xi_i) W_i \left( \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2_{\xi=\xi_i} + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2_{\xi=\xi_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (39)$$

La expresión (39) es un sumatorio de vector columna por vector fila, por un escalar que contiene el factor de peso en la integración de Gauss-Legendre  $W_i$ , multiplicado por el diferencial de longitud  $dl$  transformado a las coordenadas locales  $\xi$  y evaluado en el punto de integración correspondiente.

Lo importante del caso es que, dado que  $\mathbf{N}(\xi_i)$  es la columna  $\mathbf{N}(:,i)$ , se verifica que:

$$\sum_{i=1}^{NPI} \left( \mathbf{N}(\xi_i) \mathbf{N}^T(\xi_i) \right) = \mathbf{N}^* \mathbf{N}' \quad (\text{con la notación de MATLAB}) \quad (40)$$

Tan sólo es necesario introducir en cada término del sumatorio (o en el producto matricial equivalente anterior), el producto por el factor escalar correspondiente:  $h \cdot W_i \cdot dl(\xi_i)$ .

Queda por explicar cómo se puede calcular el segundo término del vector  $\mathbf{h}$  dado por (30). Desarrollándolo con las fórmulas de integración numérica de Gauss-Legendre:

$$\mathbf{h} = h T_e \int_{\Gamma_h} \mathbf{N} d\Gamma = h T_e \sum_i^{nlados} \int_0^l \mathbf{N}(\xi) dl = h T_e \sum_j^{nlados} \mathbf{h}_j, \quad \mathbf{h}_j = \sum_{i=1}^{NPI} W_i \mathbf{N}(\xi_i) \left( \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2_{\xi=\xi_i} + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2_{\xi=\xi_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

El cálculo del vector  $\mathbf{h}$  se hace ensamblando las contribuciones  $\mathbf{h}_j$  de cada lado.

### 3.3 Transmisión de calor 2-D con elementos finitos triangulares

La utilización de elementos triangulares tiene algunas diferencias respecto a lo que se acaba de ver para cuadriláteros. Por una parte hay que utilizar unas fórmulas de integración diferentes y por otra hay que tener en cuenta que las coordenadas de área no son independientes. El cálculo de las inte-

grales propias de la resolución del problema de conducción de calor mediante elementos finitos estaba dado por las expresiones:

$$\mathbf{KE} = k \int_{\Omega^e} \left( \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right\}^T \right) dx dy \quad (42)$$

$$\mathbf{CE} = \rho c_p \int_{\Omega^e} \{ \mathbf{N}(x, y) \} \{ \mathbf{N}(x, y) \}^T dx dy \quad (43)$$

Estas integrales no se hacen más difíciles por hacerlas en las coordenadas de área. Sí se hace algo más difícil el cálculo de las derivadas y de la Jacobiana, aunque esta dificultad es fácil de superar. La idea es utilizar solamente las coordenadas  $L_1$  y  $L_2$ , en cuanto aparecen derivadas; de esta manera se sigue trabajando con unas **coordenadas independientes** que se comportan de modo idéntico a  $\xi$  y  $\eta$  en los elementos de cuatro lados.

Por ejemplo, la relación entre las coordenadas locales y generales y el cálculo de la Jacobiana se pueden hacer mediante las expresiones siguientes, que suponen las funciones de interpolación definidas como función de las coordenadas de área:

$$\begin{aligned} x &= N_1^g x_1 + N_2^g x_2 + \dots + N_m^g x_m = \sum N_i^g (L_1, L_2, L_3) \cdot x_i \\ y &= N_1^g y_1 + N_2^g y_2 + \dots + N_m^g y_m = \sum N_i^g (L_1, L_2, L_3) \cdot y_i \end{aligned} \quad (44)$$

A partir de estas expresiones es fácil establecer una relación entre las derivadas en coordenadas locales y generales, suponiendo que sólo se calculan las derivadas respecto a las **coordenadas de área independientes**  $L_1$  y  $L_2$ :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial L_1} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L_1} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L_1} \right\} & \quad \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial L_2} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial L_2} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \right\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} = \mathbf{J} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \right\} &= \mathbf{J}^{-1} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

La semejanza de estas fórmulas respecto a las del caso de los elementos de cuatro lados es total.

La expresión de la matriz Jacobiana se puede obtener, al igual que en los elementos de cuatro lados, suponiendo que la geometría, es decir las coordenadas  $x$  y  $y$  de un punto cualquiera del elemento, se pueden obtener por interpolación a partir de las coordenadas de los nudos:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i^g (L_1, L_2, L_3) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n N_i^g (L_1, L_2, L_3) y_i \quad (46)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i^g}{\partial L_1} x_i & \sum \frac{\partial N_i^g}{\partial L_1} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i^g}{\partial L_2} x_i & \sum \frac{\partial N_i^g}{\partial L_2} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^g}{\partial L_1} & \frac{\partial N_2^g}{\partial L_1} & \dots \\ \frac{\partial N_1^g}{\partial L_2} & \frac{\partial N_2^g}{\partial L_2} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (47)$$

Finalmente, la expresión del cambio en el elemento diferencial de área se puede expresar en función del determinante de la matriz Jacobiana:

$$dx \cdot dy = |\mathbf{J}| dL_1 \cdot dL_2 \quad (48)$$

El desarrollo es pues absolutamente análogo al de los elementos de cuatro lados. Lo único que hace falta es desarrollar unas funciones que calculen las funciones de interpolación y sus derivadas respecto a  $L_1$  y  $L_2$  en los puntos de integración dados por la función **JGP3B.m**.

## 4 Problema elástico 2-D con elementos isoparamétricos

El problema elástico 2-D tiene similitudes y diferencias con el problema de transmisión de calor. La principal semejanza es que los cálculos de los puntos de integración, de las funciones de interpolación y de sus derivadas son idénticos, y pueden ser realizados por las mismas funciones. La principal diferencia es que en el problema elástico hay dos incógnitas por nudo (los desplazamientos elásticos en las direcciones  $x$  e  $y$ ), mientras que en el problema térmico sólo una incógnita por nudo (la temperatura).

La variable dependiente  $\mathbf{u}$  es en este caso el vector:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (49)$$

A partir de los desplazamientos se pueden calcular las deformaciones unitarias con ayuda de la matriz-operador  $\mathbf{S}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{u}, \quad \mathbf{S} \equiv \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \quad (50)$$

Las tensiones se pueden poner en función de las deformaciones unitarias mediante la expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (51)$$

El vector  $\boldsymbol{\sigma}_0$  representa las tensiones iniciales, es decir tensiones que pueden existir sin deformación. Un posible ejemplo serían las tensiones residuales originadas por un tratamiento térmico. Por otra parte, el vector  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  representa las deformaciones que no producen tensión, como por ejemplo las dilataciones térmicas que obedecen a la expresión (obsérvese que no hay deformación angular):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \alpha \Delta T \quad (52)$$

En la expresión (51) la matriz  $\mathbf{D}$  es la matriz elástica, es decir la matriz que relaciona las tensiones con las deformaciones unitarias; es función del módulo de elasticidad o módulo de Young  $E$  y del módulo de Poisson  $\nu$ . Se distinguen dos casos, correspondientes a tensión plana ( $\sigma_z = 0$ ) y deformación plana ( $\varepsilon_z = 0$ ), respectivamente:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{tensión plana}) \quad (53)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{deformación plana}) \quad (54)$$

Una vez vistas las expresiones anteriores, que permiten relacionar tensiones y deformaciones unitarias con los desplazamientos, se utilizará un principio variacional para establecer las ecuaciones del método de los elementos finitos: el principio de la mínima energía potencial total. Este principio establece que la posición de equilibrio es un valor estacionario de dicha energía respecto a una variación en los desplazamientos de los nudos:

$$\delta\Pi = \delta(U + W) = 0 \quad (55)$$

donde  $U$  es la energía de deformación elástica y  $W$  el potencial de las fuerzas exteriores (de volumen y de superficie), que responden respectivamente a las expresiones siguientes:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV \quad (56)$$

$$W = - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_A \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dA \quad (57)$$

Ahora hay que introducir en las expresiones (55)-(57) la hipótesis de discretización propia de los elementos finitos, manteniendo como incógnitas o variables del problema el vector  $\mathbf{x}$  de desplazamientos de los nudos. Se comienza por expresar los desplazamientos de un punto cualquiera en función de los desplazamientos de los nudos:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & 0 & \cdots & N_m(x, y) & 0 \\ 0 & N_1(x, y) & 0 & N_2(x, y) & \cdots & 0 & N_m(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (58)$$

o bien:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{x} \quad (59)$$

El valor de las deformaciones unitarias y de las tensiones en función de  $\mathbf{x}$  viene dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u} = \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{x} = \mathbf{B} \mathbf{x}, \quad \mathbf{B} \equiv \mathbf{S} \mathbf{N} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{x} - \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (61)$$

Sustituyendo en las expresiones de la energía potencia elástica y del trabajo de las fuerzas exteriores:

$$\Pi = U + W = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \mathbf{x}^T \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV - \mathbf{x}^T \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV - \mathbf{x}^T \int_A \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA \quad (62)$$

Imponiendo a la energía potencial total la condición de mínimo respecto al vector  $\mathbf{x}$  se obtienen las ecuaciones de equilibrio:

$$\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \cdot \mathbf{x} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_A \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA \quad (63)$$

o bien:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (64)$$

La matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  y el vector de fuerzas nodales equivalentes  $\mathbf{f}$  vienen dados por:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (65)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_n + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV - \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV + \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV + \int_A \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dA \quad (66)$$

En la ecuación (66) se ha incluido el vector  $\mathbf{f}_n$  que representa las fuerzas puntuales directamente aplicadas en los nudos. Estas fuerzas puntuales producen discontinuidades en su punto de aplicación

con las correspondientes dificultades en la solución analítica de las ecuaciones diferenciales de equilibrio. Sin embargo, el principio variacional aplicado las puede tener en cuenta sin mayores problemas. De hecho, el vector  $\mathbf{f}_n$  se podía haber tenido en cuenta desde el principio sin más que incluir el término  $-\mathbf{x}^T \mathbf{f}_n$  en la expresión (57). Es importante recordar que las fuerzas puntuales deben estar aplicadas en los nudos.

La matriz  $\mathbf{B}$  definida por la ecuación (60) es el resultado de aplicar el operador diferencial  $\mathbf{S}$  definido en (50) a la matriz de interpolación  $\mathbf{N}$  definida en (58). En forma desarrollada, la matriz  $\mathbf{B}$  resulta ser:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \equiv \mathbf{S}\mathbf{N} &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial x & 0 & \partial N_2/\partial x & 0 & \dots & \partial N_n/\partial x & 0 \\ 0 & \partial N_1/\partial y & 0 & \partial N_2/\partial y & \dots & 0 & \partial N_n/\partial y \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial y & \partial N_2/\partial x & \dots & \partial N_n/\partial y & \partial N_n/\partial x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

De forma general, válida tanto para tensión plana como para deformación plana, las matrices  $\mathbf{D}$  definidas en (53) y (54) se pueden poner como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \quad (68)$$

La matriz de rigidez dada por la expresión (65) se compone de un conjunto de submatrices  $\mathbf{K}_{ij}$  (la submatriz que relaciona los nudos  $i$  y  $j$ ) que tienen la forma siguiente:

$$\int_V \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{j,x} & 0 \\ 0 & N_{j,y} \\ N_{j,y} & N_{j,x} \end{bmatrix} dV = \int_V \begin{bmatrix} N_{i,x}N_{j,x}d_1 + N_{i,y}N_{j,y}d_3 & N_{i,x}N_{j,y}d_2 + N_{i,y}N_{j,x}d_3 \\ N_{i,y}N_{j,x}d_2 + N_{i,x}N_{j,y}d_3 & N_{i,y}N_{j,y}d_1 + N_{i,x}N_{j,x}d_3 \end{bmatrix} dV \quad (69)$$

Los 4 elementos de esta submatriz se pueden calcular fácilmente si se conocen los cuatro elementos de la siguiente submatriz (mucho más fácil de calcular que la anterior):

$$\int_V \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{j,x} & N_{j,y} \end{Bmatrix} dV = \int_V \begin{bmatrix} N_{i,x}N_{j,x} & N_{i,x}N_{j,y} \\ N_{i,y}N_{j,x} & N_{i,y}N_{j,y} \end{bmatrix} dV \quad (70)$$

Esta matriz se convierte en un doble sumatorio aplicando la integración de Gauss-Legendre:

$$\begin{aligned} &\int \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{j,x} & N_{j,y} \end{Bmatrix} dxdy = \\ &= \sum_i \sum_j W_i W_j \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi}(\xi_i, \eta_j) \\ N_{i,\eta}(\xi_i, \eta_j) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{j,\xi}(\xi_i, \eta_j) & N_{j,\eta}(\xi_i, \eta_j) \end{Bmatrix} \mathbf{J}^{-T} \det(\mathbf{J}) \end{aligned} \quad (71)$$

El programa **Elast2dIP** resuelve el problema de la elasticidad 2-D con elementos isoparamétricos de tres y/o cuatro lados, con dos, tres ó cuatro nudos por lado. El fichero **Elast2dIP.zip** contiene todos los ficheros necesarios, incluyendo varios ejemplos con elementos de distintos tipos. La ejecución del programa siempre comienza por uno de los ficheros de datos, que terminan llamando a **Elast2dIP**. Por el momento **este programa funciona exclusivamente con fuerzas puntuales aplicadas en los nudos**.

Las salidas del programa **Elast2dIP** merecen un pequeño comentario. En una **primera ventana** se dibuja el mallado de elementos finitos original (en negro) y la deformada (en rojo) multiplicada por un factor de amplificación **ampl**, definido en el fichero de datos. En una **segunda ventana** se dibuja una **representación coloreada del nivel de tensiones** de cada punto del sólido 2-D, de forma análoga a como se ha hecho con las temperaturas en el problema térmico. Sin embargo, **dibujar las tensiones es un problema más complicado que dibujar temperaturas**, por los dos motivos siguientes:

1. Las temperaturas son **incógnitas primarias** del problema térmico, mientras que las incógnitas primarias del problema elástico no son las tensiones, sino los **desplazamientos**. Las tensiones se calculan a partir de los desplazamientos, pasando por las deformaciones unitarias. Una consecuencia importante es que **las tensiones no son continuas** en las uniones entre los elementos (los desplazamientos sí lo son, pero no sus primeras derivadas, a partir de las cuales se calculan las deformaciones unitarias y las tensiones). Las tensiones en un nudo son distintas según en qué elemento de los que se unen en ese nudo se calculen. Una posible solución es definir las tensiones en un nudo como el **promedio de las tensiones en ese nudo** calculadas en los distintos elementos que se unen en él. El cálculo de este promedio obliga a acumular las tres tensiones en el nudo ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , para el problema de tensión plana) y a dividir finalmente por el número de elementos que se unen en él.
2. Además y a diferencia de las temperaturas, las tensiones son **magnitudes tensoriales**, difíciles de representar en un punto con un único valor y mediante un código de colores. La solución adoptada ha sido utilizar las **tensiones de comparación de von Mises**, que con un único valor representan lo solicitado que está el material en un punto (para saber por ejemplo si se está cerca o lejos del límite de fluencia). La tensión de comparación de von Mises se expresa en función de las tensiones principales mediante la fórmula siguiente (con tensión plana  $\sigma_3 = 0$ ):

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\sigma_2^2 + 2\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2}{2}} = \sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2} \quad (72)$$