Ejercicios con Matlab

Matemática D - 2010

1. Un ejemplo elemental de Diferencias Finitas

Consideremos la ecuación diferencial con condición inicial

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t)), \quad t \in [0, T], \\ \\ \mathbf{x}(0) = x_0. \end{cases} \tag{1}$$

donde f y x_0 están dados. Queremos encontrar una solución $\mathbf{x} : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$, de (1).

En los ejercicios a continuación, veremos cómo elaborar código en Matlab para obtener una solución aproximada de estos problemas.

Trabajaremos sobre un ejemplo concreto. Supongamos que

$$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 1, \quad \text{y} \quad T = 4.$$

Un algoritmo, que podemos llamar método de *diferencias finitas*, obtiene una solución aproximada basándose en la siguiente aproximación:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) \; \approx \; \mathbf{x}(t) + \Delta t \, \mathbf{x}'(t),$$

cuando Δt es pequeño.

Aquí, aparece el concepto de *diferencia finita*

$$\Delta \mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) \approx \; \Delta t \, \mathbf{x}'(t),$$

Primero, tomemos una cantidad de partes en la que dividiremos el intervalo,

```
>N=100;
```

Tomemos $N + 1$ puntos en el intervalo $[0, 4]$ uniformemente distribuidos

```
>h=1/N,
>t=[0:h:4],
```

(todo lo que esté con la fuente `code` serán sentencias que podemos ejecutar en el entorno Matlab.)

Por lo tanto, si en nuestro ejemplo, comenzamos con $t_0 = 0$, que es el único valor de la $\mathbf{x}$ que tenemos disponible como dato, podemos aproximar el valor $\mathbf{x}(0{,}01)$ de la siguiente manera:

```
>x(1)=1,
>x(2) = x(1)+h*sin(x(1)),
```

Análogamente,

```
>x(3) = x(2)+h*sin(x(2)),
```

y así sucesivamente... hasta obtener el valor aproximado de $\mathbf{x}(4)$ (no confundir con `x(4)`),

```
>x(N+1) = x(N)+h*sin(x(N)),
```

Podemos utilizar un lazo `for` para implementar el ejemplo. Creamos un arichivo .m con las siguientes sentencias:

```
N=100,
h=1/N,
t=[0:h:4],
x(1)=1,
```

```
for k=2:N+1,
x(k)= x(k-1) + h*sin(4*x(k-1));
end
```

Para dibujar, usamos el comando `plot`.

```
>plot(t,x);
```

Con la función `ode45` obtenemos otro resultado aproximado que podemos comparar con el obtenido anteriormente.

Primero creamos una función `mifun.m`

```
function [y] = mifun(t,x)
y=sin(x);
```

Luego, ejecutamos la siguiente sentencia,

`>[t,x]=ode45('mifun',[0 1],1);` y dibujamos sobre el otro dibujo en color rojo

```
>hold
>plot(t,x,'r');
```

2. Resolviendo la ecuación del calor

Consideremos la ecuación del calor con condiciones de borde e inicial,

$$\begin{cases} \text{(ED)} & \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L,\ 0 < t < T, \\ \text{(CB1)} & u(0,t) = A(t), & 0 < t < T, \\ \text{(CB2)} & u(L,t) = B(t), & 0 < t < T, \\ \text{(CI)} & u(x,0) = f(x), & 0 < x < L, \end{cases} \tag{2}$$

donde las funciones A, B, y f son datos del problema.

El método de diferencias finitas que usaremos se basa en las siguientes aproximaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \approx \frac{u(x,t+\Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} \tag{3}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \approx \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} \tag{4}$$

Tomemos ahora $M+1$ puntos en el intervalo $[0,L]$ y $N+1$ puntos en el $[0,T]$ de la siguiente manera:

Primero tomemos $\Delta x = L/M$ y $\Delta t = T/N$. Luego, llamemos

$$x_1 = 0, \quad x_i = (i-1)\Delta x + x_1,\ 2 \le i \le M+1,$$

$$t_1 = 0, \quad t_j = (j-1)\Delta t + t_1,\ 2 \le j \le N+1,$$

y

$$u_{i,j} = u(x_i,t_j).$$

si las expresiones de (3) y (4) fueran iguales, como lo exige la (ED) en (2), tendríamos

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2},$$

y, al despejar $u_{i,j+1}$,

$$u_{i,j+1} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + u_{i,j}, \tag{5}$$

para $2 \le i \le M$ y $1 \le j \le N$.

Ya estamos listos para comenzar a construir una aproximación sobre la malla (x_i, t_j) de una u que satisfaga (2), encontrando ***paso a paso*** los valores de $u_{i,j}$.

Los valores $u_{i,0}$ para $1 \leq i \leq M+1$, están dados por la (CI) en (2), ya que

$$u_{i,1} = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq M+1.$$

Luego, según (5), podemos calcular el valor de $u_{i,2}$, para $2 \leq i \leq M$, como

$$u_{i,2} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1,1} - 2u_{i,1} + u_{i-1,1}\right) + u_{i,1},$$

y en los extremos, usamos la (CB) en (2) para tener $u_{1,2} = A(t_2)$ y $u_{M+1,2} = B(t_2)$.

Procedemos de la misma manera, para calcular las restantes filas de la matriz $(u_{i,j})$.

Ejercicio 1. Implementar lo anterior con MatLab, para $L = 2\pi$, $T = 10$, $f(x) = \sin(x)$ y $A(t) = B(t) = 0$.