

# **Transferencia de Calor**

## **Cap. 5**

Juan Manuel Rodríguez Prieto

**I.M., M.Sc., Ph.D.**

# Métodos numéricos en la conducción de calor

Muchos problemas que se encuentran en la práctica comprenden *configuraciones geométricas complicadas*, con condiciones de frontera complejas o propiedades variables, y no se pueden resolver analíticamente.

Se pueden obtener soluciones aproximadas suficientemente exactas por medio de computadoras utilizando un *método numérico*.

# Métodos numéricos en la conducción de calor

Los métodos numéricos se basan en el reemplazo de la ecuación diferencial por un conjunto de  $n$  ecuaciones algebraicas para las temperaturas desconocidas en  $n$  puntos seleccionados y la solución simultánea de estas ecuaciones conduce a valores de la temperatura en esos *puntos discretos*.

$$[\mathbf{K}]\mathbf{T} = \mathbf{f}$$

Existen varias maneras de obtener la formulación numérica de un problema de conducción de calor, como los métodos de las **diferencias finitas**, de **elementos finitos**, de **elementos frontera**, **elementos finitos de partículas**

# ¿POR QUÉ LOS MÉTODOS NUMÉRICOS?

Los métodos analíticos de solución se limitan a *problemas fuertemente simplificados* en *configuraciones geométricas simples*. La configuración geométrica debe ser tal que toda su superficie se pueda describir matemáticamente en un sistema de coordenadas al igualar las variables a constantes. Es decir, deben ajustarse *a la perfección* a un sistema de coordenadas con nada que se introduzca o sobresalga.

Las configuraciones simples los problemas de transferencia de calor no se pueden resolver en forma analítica si las *condiciones térmicas* no son suficientemente simples (la consideración de la variación de la conductividad térmica con la temperatura)

Los problemas de ingeniería a menudo requieren *estudios paramétricos* extensos con el fin de entender la influencia de algunas variables sobre la solución y así elegir el conjunto correcto de variables y dar respuesta a algunas preguntas de “¿qué sucede si...?”.

**aprenderá cómo formular y  
resolver numéricamente problemas  
de transferencia de calor**

**FORMULACIÓN EN DIFERENCIAS  
FINITAS DE ECUACIONES  
DIFERENCIALES**

# FORMULACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Reemplazar las *derivadas* por *diferencias*

*Derivadas*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

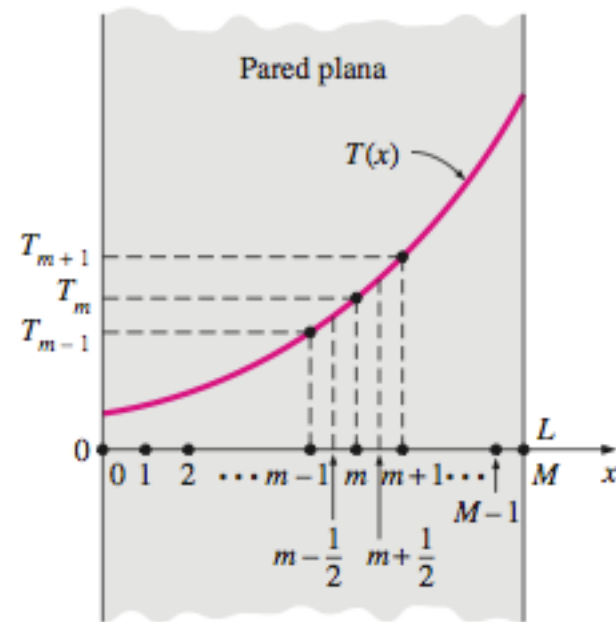
Derivada: es la *pendiente* de una recta tangente a la curva en ese punto

La derivada se puede aproximar como:

$$f'(x) \cong \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

# FORMULACIÓN EN DIFERENCIAS FINITAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Considere ahora la conducción de calor unidimensional en estado estacionario en una pared plana de espesor  $L$ , con generación de calor. La pared se subdivide en  $M$  secciones de espesor igual  $\Delta x = L/M$ , en la dirección  $x$ , separadas por planos que pasan por los  $M+1$  puntos  $0, 1, 2, \dots, m-1, m, m+1, \dots, M$ , llamados **nodos** o **puntos nodales**. La coordenada  $x$  de cualquier punto  $m$  es simplemente  $x_m = mx$  y la temperatura en ese punto es simplemente  $T(x_m) = T_m$ .





# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Estacionaria

Ecuación diferencial

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q = 0$$

La ecuación de conducción de calor comprende las segundas derivadas de la temperatura con respecto a las variables espaciales, tales como  $d^2T/dx^2$  y la formulación en diferencias finitas se basa en el reemplazo de las segundas derivadas por diferencias apropiadas.

La primera derivada de la temperatura,  $dT/dx$ , en los puntos medios  $m - 1/2$  y  $m + 1/2$  de las secciones que están a uno y otro lado del nodo  $m$  se puede expresar como

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{m-\frac{1}{2}} = \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} \qquad \left. \frac{dT}{dx} \right|_{m+\frac{1}{2}} = \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x}$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Estacionaria

Ecuación diferencial

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q = 0$$

Dado que la segunda derivada es simplemente la derivada de la primera derivada, la segunda derivada de la temperatura en el nodo  $m$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_m &\cong \frac{\left. \frac{dT}{dx} \right|_{m+\frac{1}{2}} - \left. \frac{dT}{dx} \right|_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = \frac{\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} - \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

lo cual es la *representación en diferencias finitas* de la *segunda derivada* en un nodo interno general  $m$ . La segunda derivada de la temperatura en el nodo  $m$  se expresa en términos de las temperaturas en el nodo  $m$  y sus dos nodos vecinos.

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Estacionaria

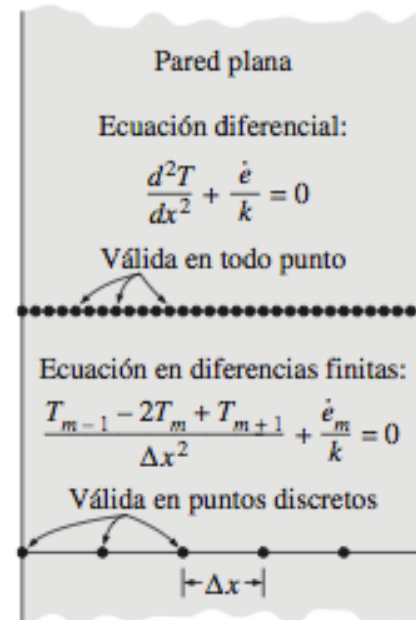
Entonces la ecuación diferencial

Ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{e}}{k} = 0$$

que rige la transferencia de calor *unidimensional en estado estacionario* en una pared plana, con conducción de calor y conductividad térmica constante, se puede expresar en la forma de *diferencias finitas* como

$$\frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{e}}{k} = 0$$



# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Estacionaria

Considere una barra de uranio de longitud  $L = 1$  m y conductividad térmica  $k = 28 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ . Uno de los lados de la placa se mantiene a  $0^\circ\text{C}$  mientras que el otro se encuentra a  $30^\circ\text{C}$ . Si considera un total de 5 nodos igualmente espaciados en el medio. Estime la temperatura en los nodos interiores

$$\dot{e} = 0 \qquad k = 28 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} \qquad \Delta x = 0.25 \qquad T_0 = 0^\circ\text{C} \qquad T_4 = 20^\circ\text{C}$$

Nodo 1

$$\frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{0.25^2} = 0$$

Nodo 2

$$\frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{0.25^2} = 0$$

Nodo 3

$$\frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{0.25^2} = 0$$

Sistema lineal a resolver

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_0 \\ 0 \\ -T_4 \end{bmatrix}$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Estacionaria

Considere una barra de uranio de longitud  $L = 1$  m y conductividad térmica  $k = 28$  W/m  $\cdot$  °C. Uno de los lados de la placa se mantiene a 0°C mientras que el otro se encuentra a 30°C. Si considera un total de 5 nodos igualmente espaciados en el medio. Estime la temperatura en los nodos interiores

Sistema lineal a resolver

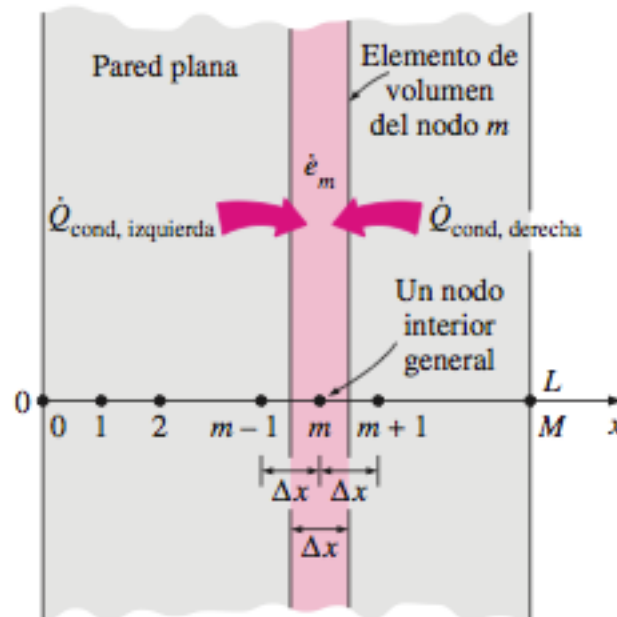
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_0 \\ 0 \\ -T_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 15 \\ 22.5 \end{bmatrix} ^\circ\text{C}$$

# Método del balance de energía

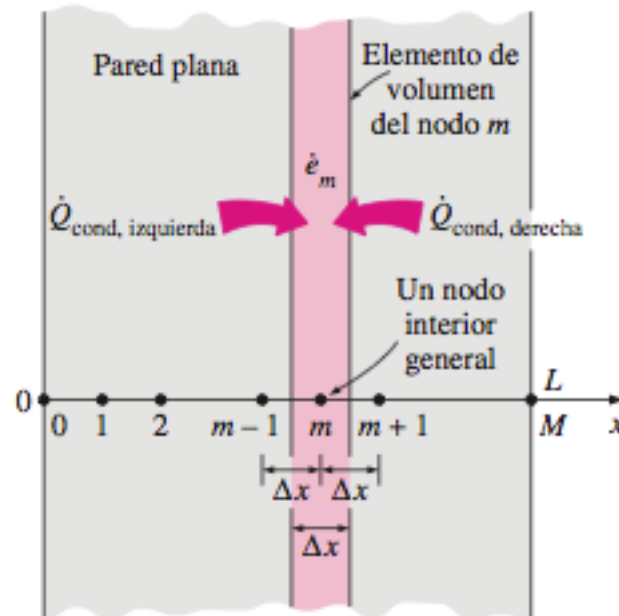
El **método del balance de energía** se basa en la *subdivisión* del medio en un número suficiente de elementos de volumen y, a continuación, aplicar un *balance de energía* en cada elemento.

Se realiza al *seleccionar* en principio los nodos en los cuales se van a determinar las temperaturas y, a continuación, para *formar elementos* sobre los nodos y trazar rectas que pasen por los puntos medios entre los nodos.



# Método del balance de energía

Considere una vez más la transferencia de calor unidimensional en estado estacionario en una pared plana de espesor  $L$  con generación de calor  $e(x)$  y conductividad constante  $k$ . La pared se subdivide ahora en  $M$  regiones iguales de espesor  $\Delta x = L/M$ , en la dirección  $x$ , y las divisiones entre las regiones se seleccionan como los nodos. Por lo tanto, se tienen  $M + 1$  nodos nombrados  $0, 1, 2, \dots, m-1, m, m+1, \dots, M$ , como se muestra en la figura



# Método del balance de energía

Para obtener una ecuación en diferencias general para los nodos interiores, considere el elemento representado por el nodo  $m$  y los dos nodos vecinos  $m-1$  y  $m+1$ . Si se supone que la conducción de calor se lleva a cabo *hacia* los elementos sobre todas las superficies, un *balance de energía* en el elemento se puede expresar como

$$\left( \begin{array}{c} \text{Razón de} \\ \text{la conducción} \\ \text{de calor en la} \\ \text{superficie izquierda} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Razón de} \\ \text{la conducción} \\ \text{de calor en la} \\ \text{superficie derecha} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Razón de} \\ \text{la generación} \\ \text{de calor dentro} \\ \text{del elemento} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Razón} \\ \text{de cambio del} \\ \text{contenido de energía} \\ \text{del elemento} \end{array} \right)$$

$$\dot{Q}_{cond,izq} + \dot{Q}_{cond,der} + \dot{E}_{gen,elemento} = 0$$

$$\dot{Q}_{cond,izq} = kA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} \quad \dot{Q}_{cond,der} = kA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad \dot{E}_{gen,elemento} = \dot{e}_m A \Delta x$$

Remplazando y simplificando

$$\frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{\Delta x^2} + \frac{\dot{e}}{k} = 0$$



# Condiciones de frontera

Anteriormente, se ha desarrollado una relación general para la obtención de la ecuación en diferencias finitas para cada nodo interior de una pared plana. Sin embargo, esta relación no se puede aplicar a los nodos sobre las fronteras, ya que requiere la presencia de nodos en ambos lados del nodo que se considera, y un nodo frontera no tiene nodo vecino en al menos uno de los lados. Por lo tanto, se necesita obtener por separado las ecuaciones en diferencias finitas de los nodos frontera. Esto se lleva a cabo de la mejor manera mediante la aplicación de un *balance de energía* en los elementos de volumen de los nodos frontera.

$$T(0) = T_0 = \text{Valor específico}$$

$$T(L) = T_M = \text{Valor específico}$$

## 1. Condición de frontera de flujo de calor específico

$$\dot{q}_0 A + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0$$

*Caso especial: frontera aislada* ( $\dot{q}_0 = 0$ )

$$kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0$$

## 2. Condición de frontera de convección

$$hA(T_\infty - T_0) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0$$

## 3. Condición de frontera de radiación

$$\varepsilon\sigma A(T_{\text{alred}}^4 - T_0^4) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0 \quad (5-25)$$

## 4. Condición de frontera de convección y radiación combinadas (figura 5-15)

$$hA(T_\infty - T_0) + \varepsilon\sigma A(T_{\text{alred}}^4 - T_0^4) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0 \quad (5-26)$$

o bien,

$$h_{\text{combinado}} A(T_\infty - T_0) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0 \quad (5-27)$$

## 5. Condición de frontera de convección, radiación y flujo de calor combinados

$$\dot{q}_0 A + hA(T_\infty - T_0) + \varepsilon\sigma A(T_{\text{alred}}^4 - T_0^4) + kA \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} + \dot{e}_0(A\Delta x/2) = 0 \quad (5-28)$$

## 6. Condición de frontera de interfase

Se supone que dos medios sólidos diferentes *A* y *B* están en contacto perfecto y, por consiguiente, a la misma temperatura en la interfase en el nodo *m* (figura 5-16). Los subíndices *A* y *B* indican propiedades de los medios *A* y *B*, respectivamente.

$$k_A A \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + k_B A \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + \dot{e}_{A,m}(A\Delta x/2) + \dot{e}_{B,m}(A\Delta x/2) = 0 \quad (5-29)$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Estacionaria

Considere una barra de uranio de longitud  $L = 1$  m y conductividad térmica  $k = 28 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ . Uno de los lados de la placa se mantiene a  $0^\circ\text{C}$  mientras que el otro se encuentra a  $30^\circ\text{C}$ . Si considera un total de 5 nodos igualmente espaciados en el medio. Estime la temperatura en los nodos interiores

$$\dot{e} = 0 \qquad k = 28 \frac{\text{W}}{\text{m}^\circ\text{C}} \qquad \Delta x = 0.25 \qquad T_0 = 0^\circ\text{C} \qquad T_4 = 20^\circ\text{C}$$

$$\text{Nodo 1} \qquad \frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{0.25^2} = 0$$

$$\text{Nodo 2} \qquad \frac{T_3 - 2T_2 + T_1}{0.25^2} = 0$$

$$\text{Nodo 3} \qquad \frac{T_4 - 2T_3 + T_2}{0.25^2} = 0$$

Sistema lineal a resolver

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_0 \\ 0 \\ -T_4 \end{bmatrix}$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR

## Estacionaria

Considere una barra de uranio de longitud  $L = 1$  m y conductividad térmica  $k = 28$  W/m  $\cdot$  °C. Uno de los lados de la placa se mantiene a 0°C mientras que el otro se encuentra a 30°C. Si considera un total de 5 nodos igualmente espaciados en el medio. Estime la temperatura en los nodos interiores

Sistema lineal a resolver

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_0 \\ 0 \\ -T_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 15 \\ 22.5 \end{bmatrix} ^\circ\text{C}$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

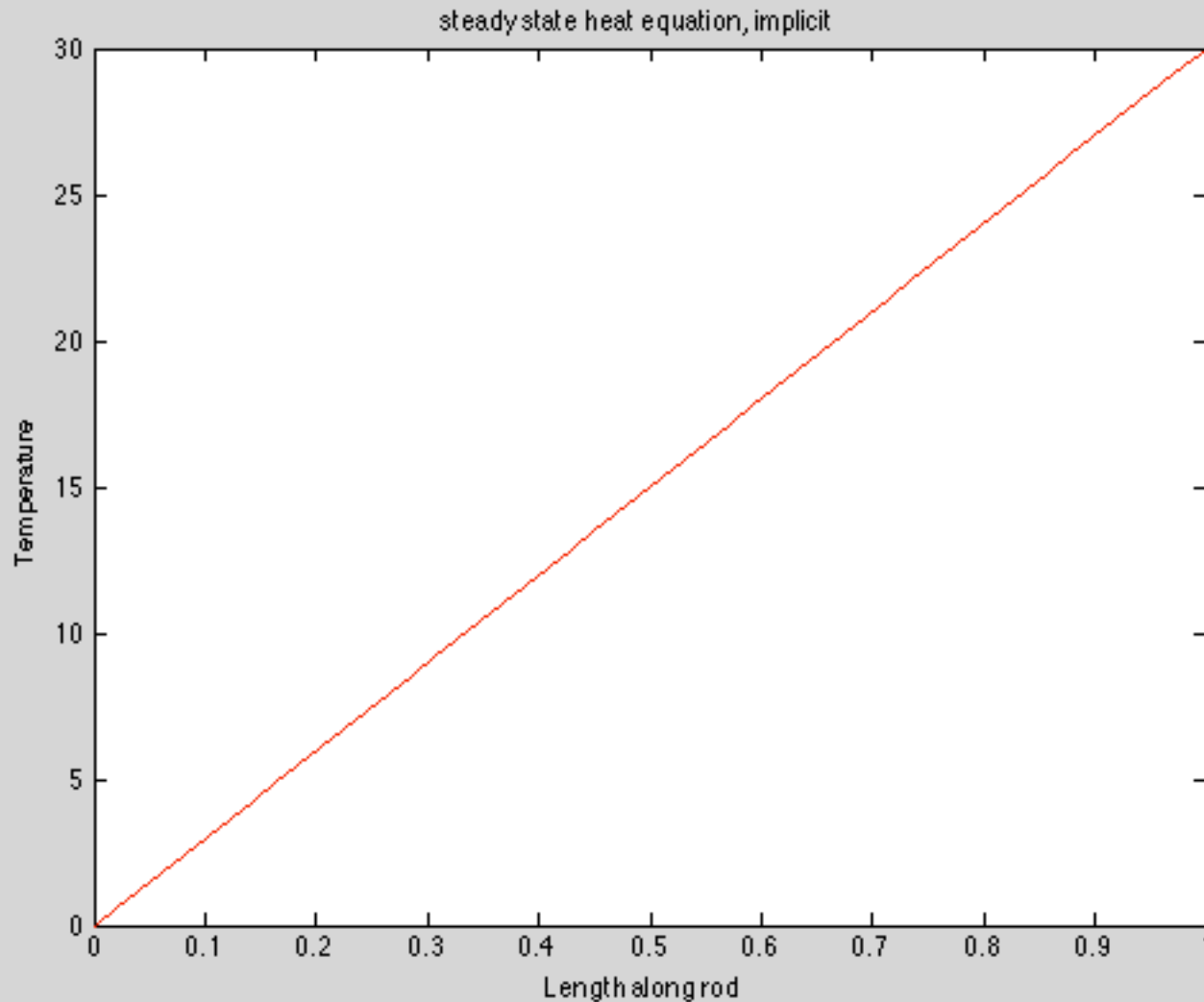
## Estado estacionario (Matlab)

```
clear all
N = 50; % número de nodos
T0= 0; % temperatura a la izquierda
TN= 30; % temperatura a la derecha
L = 1; % longitud de la barra
h = L/(N-1); % distancia entre nodos
ku = 1; % conductividad térmica
q = 0; % fuente de calor
% Inicializar A
r = 1/h^2;
A(1,1) = -2*r;
A(1,2) = r;
for i=2:N-3
    A(i,i-1) = r;
    A(i,i) = -2*r;
    A(i,i+1) = r;
end
A(N-2,N-3) = r; A(N-2,N-2) = -2*r;
% Inicializar b
b = zeros(N-2,1);
for i = 1:N-2
    b(i,1) = -q/ku;
end
% Initialize domain
x = linspace(0,L,N)';
u = zeros(N,1);
u(1,1)=T0;
u(N,1)=TN;
b(1,1) =b(1,1) - T0*r;
b(N-2,1) =b(N-2,1) - TN*r;
u(2:N-1) = A\b;
plot(x,u,'r')
```

estacionario1D.m

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

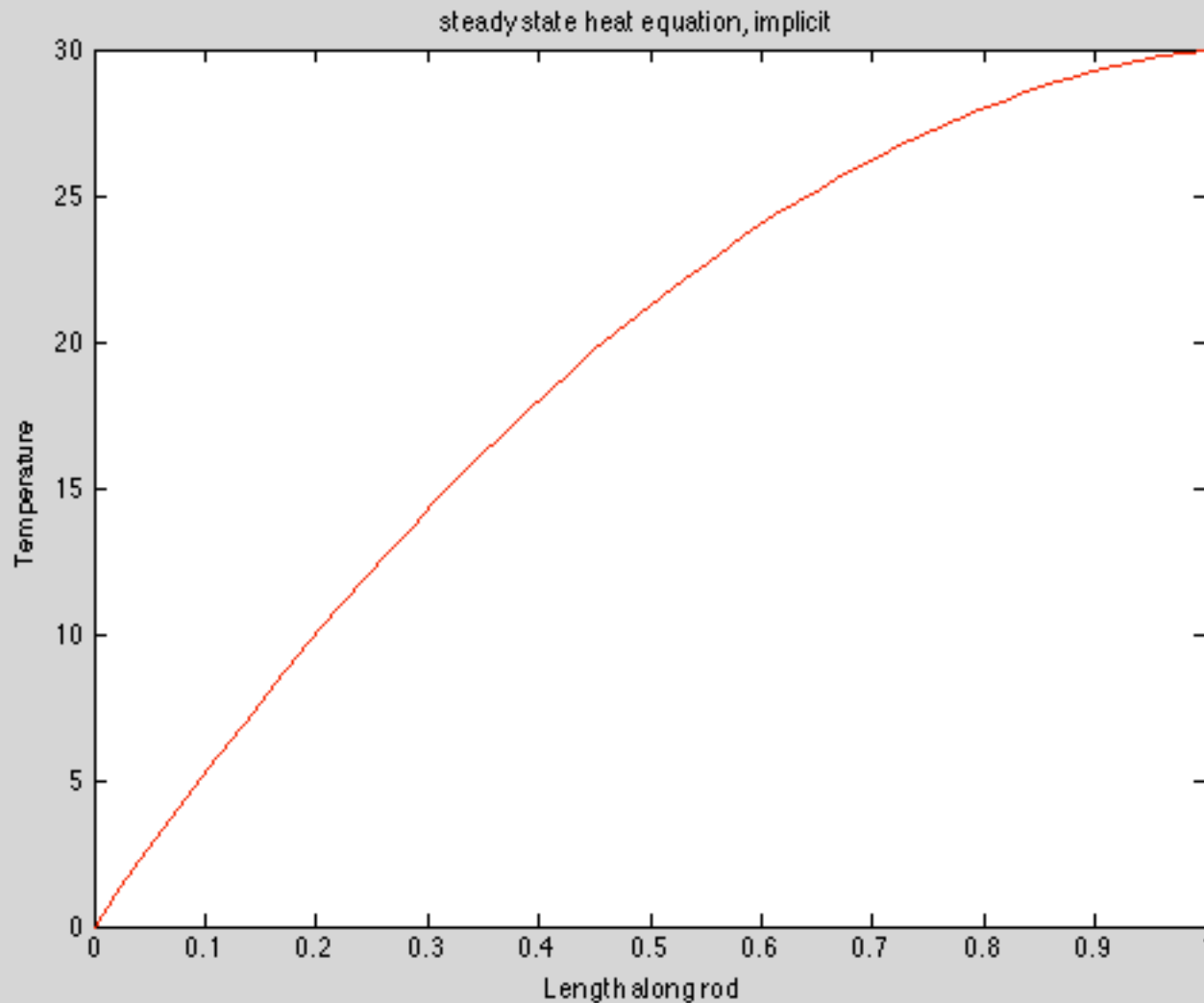
## Estado estacionario (Matlab)



# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

Estado estacionario (Matlab)

Generación de calor  $q = 50$



# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Estado estacionario (Matlab)

¿Qué efecto tiene la generación de calor en la temperatura a lo largo de la barra?

# CONDUCCIÓN DE CALOR EN RÉGIMEN TRANSITORIO (1D)

Considérese una barra de longitud  $L$  que, inicialmente, se encuentra a una temperatura uniforme  $T_i$ .

Ecuación diferencial

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

Condiciones de frontera

$$T(0,t) = T_0 \qquad T(L,t) = T_L$$

Condiciones inicial

$$T(x,0) = T_i$$



# CONDUCCIÓN DE CALOR TRANSITORIO 1D

Ecuación diferencial

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + q = \rho c_p \frac{dT}{dt}$$

La primera derivada de la temperatura con respecto al tiempo,  $dT/dt$ , en el punto m puede expresarse como

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_m^n \cong \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\Delta t}$$

$$\left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_m^n \cong \frac{T_{m+1}^n - 2T_m^n + T_{m-1}^n}{\Delta x^2}$$

La ecuación diferencial se puede aproximar como

**Explicito**

$$k \frac{T_{m+1}^n - 2T_m^n + T_{m-1}^n}{\Delta x^2} + q = \rho c_p \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\Delta t}$$

$$T_m^{n+1} = \frac{k \Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} T_{m+1}^n + \left( 1 - \frac{k \Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} \right) T_m^n + \frac{k \Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} T_{m-1}^n + \frac{q \Delta t}{\rho c_p}$$

$$r = \frac{k \Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} \quad T_m^{n+1} = r T_{m+1}^n + (1 - 2r) T_m^n + r T_{m-1}^n + \frac{q \Delta t}{\rho c_p}$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Transitorio (explícito)

En el esquema de integración explícita, el valor de  $\Delta t$  debe mantenerse por debajo de un cierto límite superior establecido por el **criterio de estabilidad**, dicho límite esta dado por

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\rho c_p \Delta x^2}{k}$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Transitorio (explícito)

$$r = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2}$$

$$T_m^{n+1} = rT_{m+1}^n + (1-2r)T_m^n + rT_{m-1}^n + \frac{q\Delta t}{\rho c_p}$$

```

clear all
close all
% Initialize number of nodes and constants
N = 100;
ku = 14.9; % AISI 304
rho = 7900; % AISI 304
cp = 477; % AISI 304
L = 1;
q = 0;
h = L/(N-1);
dt = 5;
t = 100000;
Ti = 30;
T0 = 10;
TL = 40;
r = (ku*dt)/(rho*cp*h^2);
if r>0.5
    error('disminuya el intervalo de tiempo dt')
end
% ubicación de los nodos
x = linspace(0,L,N);
% Temperatura inicial en t = 0
jmax = round(t/dt);
u = zeros(N,jmax);
u(:,1) = 30*ones(1,N);

u(1,:) = T0;
u(N,:) = TL;
for j = 1:jmax-1
    for i=2:N-1
        u(i,j+1) = (r*u(i-1,j)+(1-2*r)*u(i,j)+r*u(i+1,j)) + q*dt;
    end
end
end

```

explicito1D.m

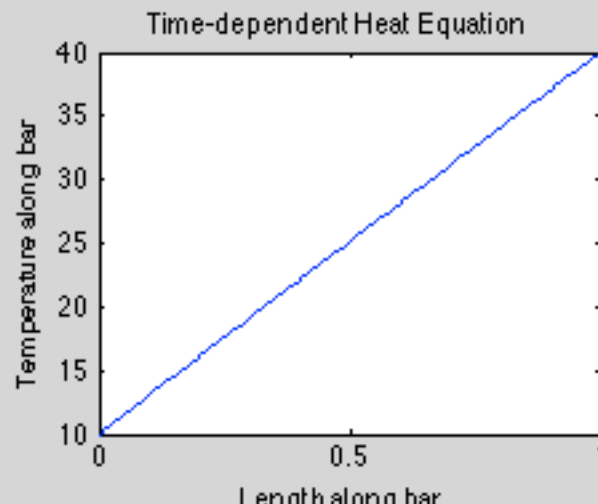
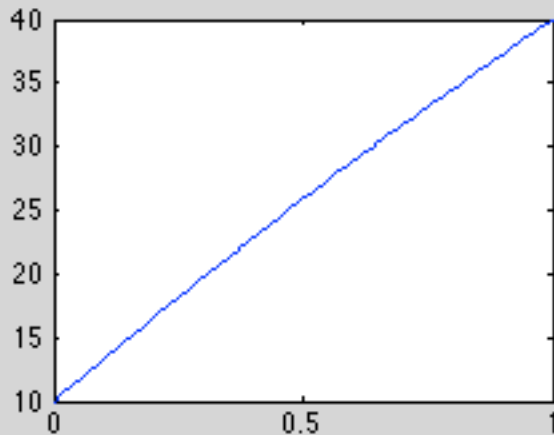
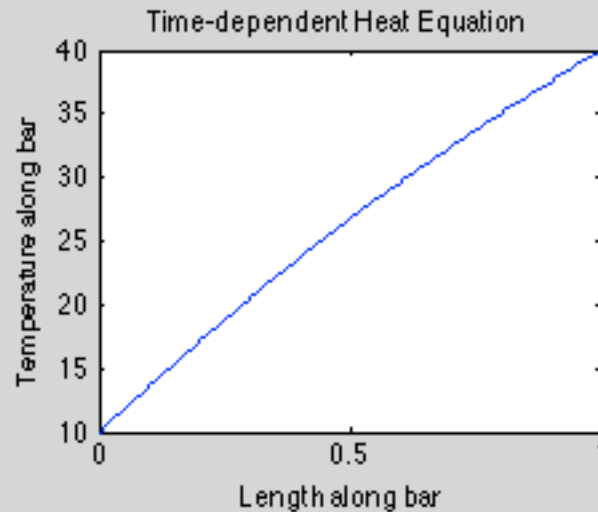
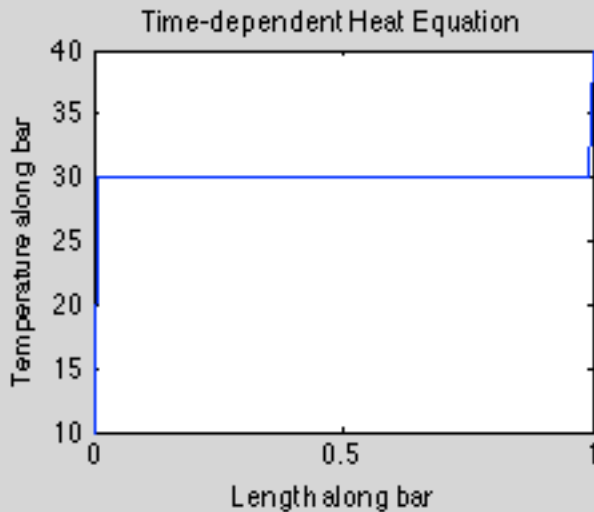
# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Transitorio (explícito)

Pared plana

$$r = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2}$$

$$T_m^{n+1} = rT_{m+1}^n + (1-2r)T_m^n + rT_{m-1}^n + \frac{q\Delta t}{\rho c_p}$$



# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Transitorio (explícito)

# Cilindro largo

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

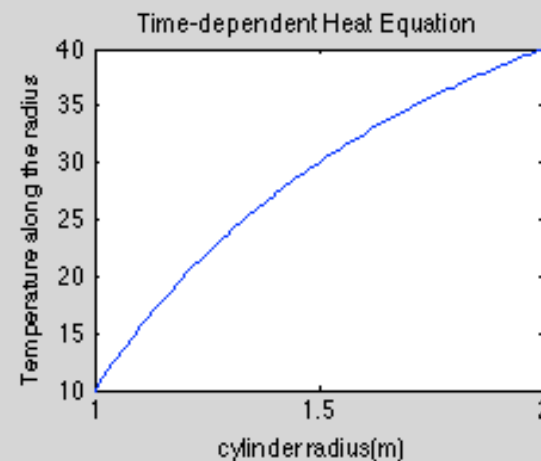
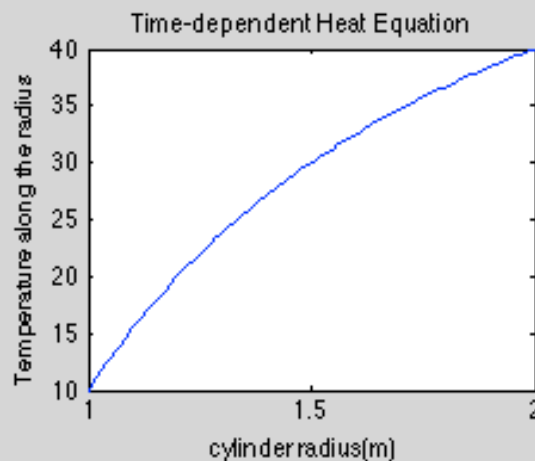
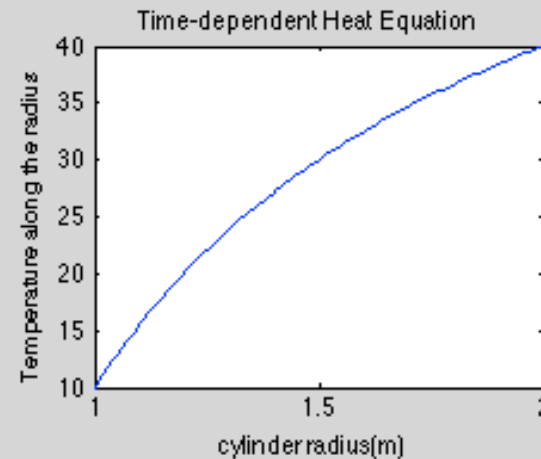
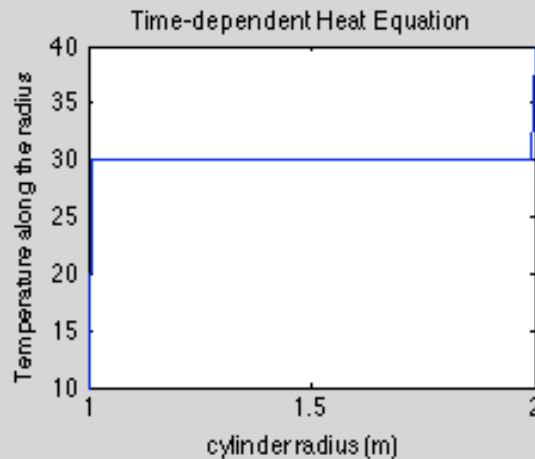
## Transitorio (explícito)

Cilindro largo

$$r = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2}$$

$$f = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x}$$

$$T_m^{n+1} = rT_{m+1}^n + (1-2r)T_m^n + rT_{m-1}^n + \frac{f}{r_i}(T_{m+1}^n - T_{m-1}^n) + \frac{q\Delta t}{\rho c_p}$$



# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Transitorio (explícito)

# Esfera

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

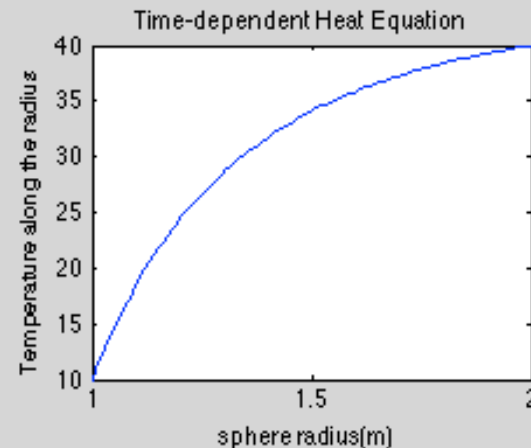
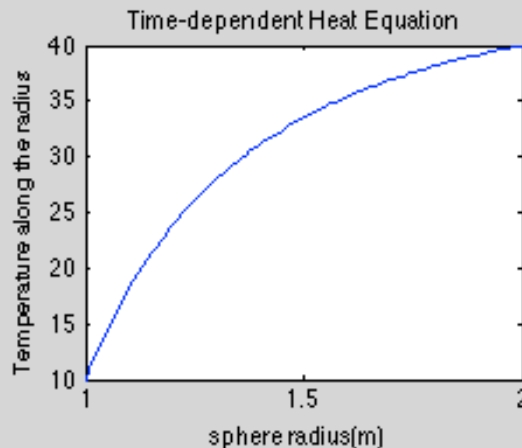
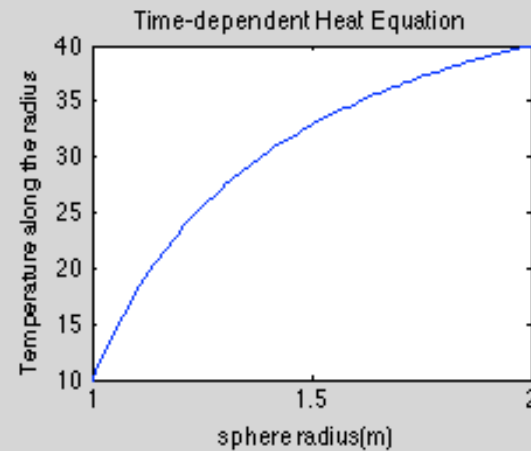
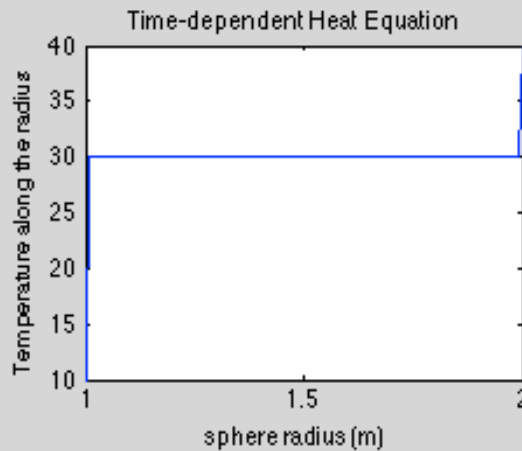
## Transitorio (explícito)

Esfera

$$r = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2}$$

$$f = \frac{2k\Delta t}{\rho c_p \Delta x}$$

$$T_m^{n+1} = rT_{m+1}^n + (1-2r)T_m^n + rT_{m-1}^n + \frac{f}{r_i}(T_{m+1}^n - T_{m-1}^n) + \frac{q\Delta t}{\rho c_p}$$





# CONDUCCIÓN DE CALOR TRANSITORIO 1D

Ecuación diferencial

$$k \frac{d^2 T}{dx^2} + q = \rho c_p \frac{dT}{dt}$$

La primera derivada de la temperatura con respecto al tiempo,  $dT/dt$ , en el punto m puede expresarse como

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_m^{n+1} \cong \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\Delta t}$$

$$\left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_m^{n+1} \cong \frac{T_{m+1}^{n+1} - 2T_m^{n+1} + T_{m-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

La ecuación diferencial se puede aproximar como

**Implícito**

$$k \frac{T_{m+1}^{n+1} - 2T_m^{n+1} + T_{m-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + q = \rho c_p \frac{T_m^{n+1} - T_m^n}{\Delta t}$$

$$r = \frac{k \Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} \quad T_m^n + q \frac{\Delta t}{\rho c_p} = -r T_{m+1}^{n+1} + (1 + 2r) T_m^{n+1} - r T_{m-1}^{n+1}$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR

## Implícito

$$s = q \frac{\Delta t}{\rho c_p} \quad r = \frac{k \Delta t}{\rho c_p \Delta x^2}$$

$$T_m^n = -rT_{m+1}^{n+1} + (1+2r)T_m^{n+1} - rT_{m-1}^{n+1} + s$$

$$\begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & 0 & 0 \\ -r & 1+2r & -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & 1+2r & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & 0 & -r & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ T_4^{n+1} \\ T_5^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^n + s + rT_0^{n+1} \\ T_2^n + s \\ T_3^n + s \\ T + s \\ T_5^n + s + rT_6^{n+1} \end{bmatrix}$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR

## Implícito

$$s = q \frac{\Delta t}{\rho c_p} \quad r = \frac{k \Delta t}{\rho c_p \Delta x^2}$$

$$T_m^n = -r T_{m+1}^{n+1} + (1 + 2r) T_m^{n+1} - r T_{m-1}^{n+1} + s$$

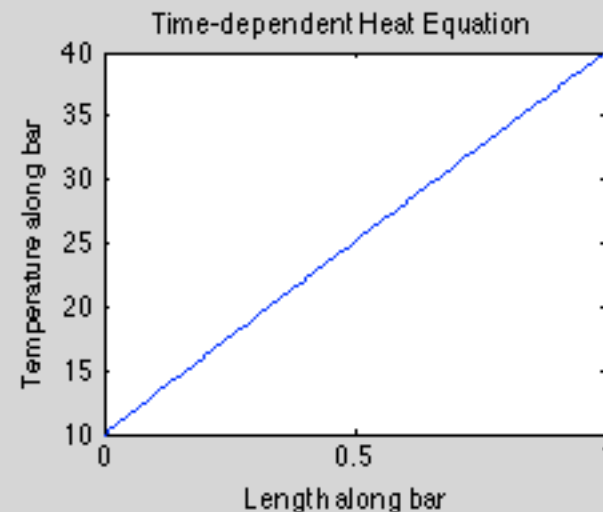
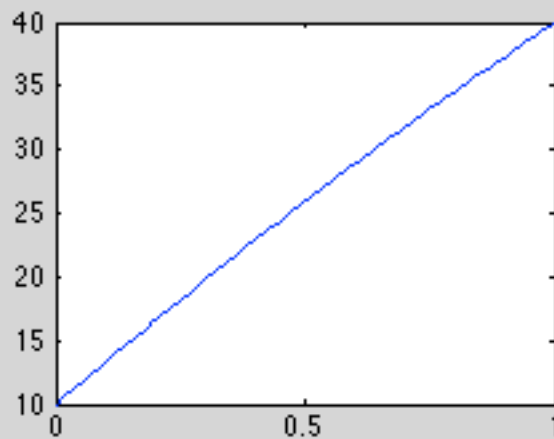
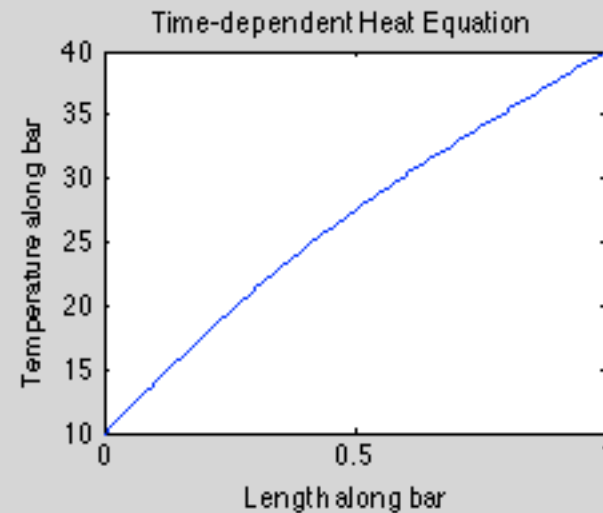
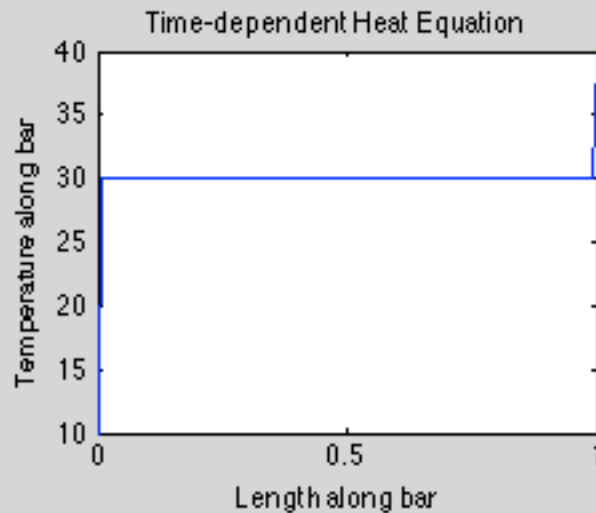
```
clear close
% Initialize number of nodes and constants
N = 100;
ku = 14.9; % AISI 304
rho = 7900; % AISI 304
cp = 477; % AISI 304
L = 1;
h = L/(N-1);
q = 0;
dt = 500;
t = 100000;
Ti = 30;
T0 = 10;
TL = 40;
r = (ku*dt)/(rho*cp*h^2);
s = q*dt/(rho*cp);
% Initialize A
K = zeros(N-2,N-2); K(1,1) = 1+2*r; K(1,2) = -r;
for i=2:N-3
    K(i,i-1) = -r;
    K(i,i) = 1+2*r;
    K(i,i+1) = -r;
end
K(N-2,N-3) = -r; K(N-2,N-2) = 1+2*r;

% Initialize domain
x = linspace(0,L,N)';
jmax = round(t/dt);
u = zeros(N,jmax);
% Condiciones iniciales
u(:,1) = Ti*ones(1,N);
% Condiciones de frontera
u(1,:) = T0;
u(N,:) = TL;
f = zeros(N-2,1);
for j = 1:jmax-1
    f(:,1) = s;
    f(1,1) = f(1,1)+r*T0;
    f(N-2,1) = f(N-2,1)+r*TL;
    u(2:N-1,j+1) = K\(u(2:N-1,j)+f);
end
```

Implicit1D.m

# CONDUCCIÓN DE CALOR 1D

## Transitorio (implícito)



# CONDUCCIÓN DE CALOR 2D

## Estacionario

Entonces la ecuación diferencial

Ecuación diferencial

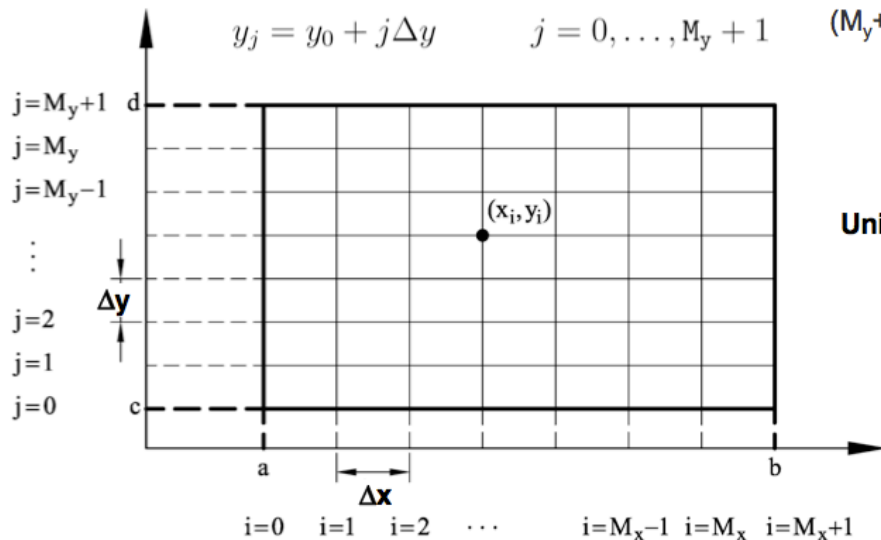
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{e}}{k} = 0$$

la *formulación en diferencias finitas* para la **conducción de calor bidimensional en estado estacionario** en una región con generación de calor y conductividad térmica constante se puede expresar en coordenadas rectangulares como

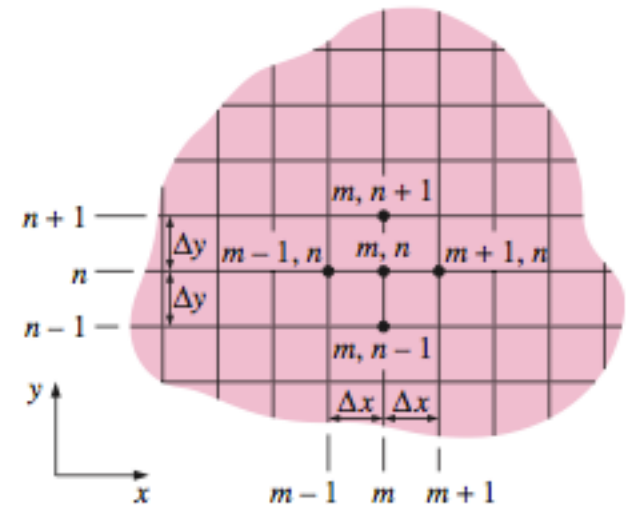
$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{e}}{k} = 0$$

$$x_i = x_0 + i\Delta x \quad i = 0, \dots, M_x + 1 \quad (M_x + 2 \text{ points for } x)$$

$$y_j = y_0 + j\Delta y \quad j = 0, \dots, M_y + 1 \quad (M_y + 2 \text{ points for } y)$$



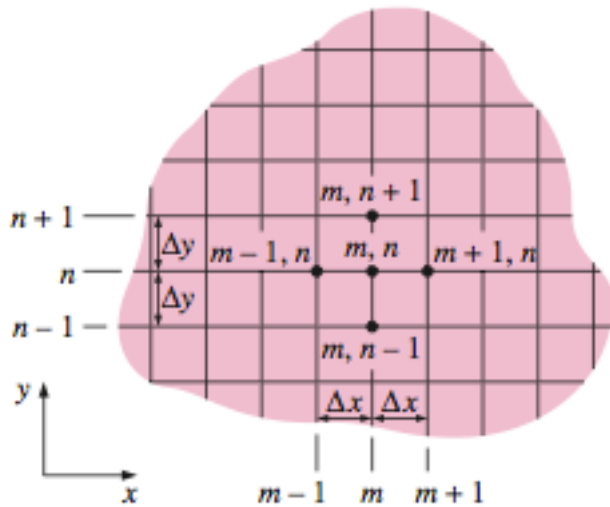
Uniform spaced  
grid



# CONDUCCIÓN DE CALOR 2D

## Transitorio (implícito)

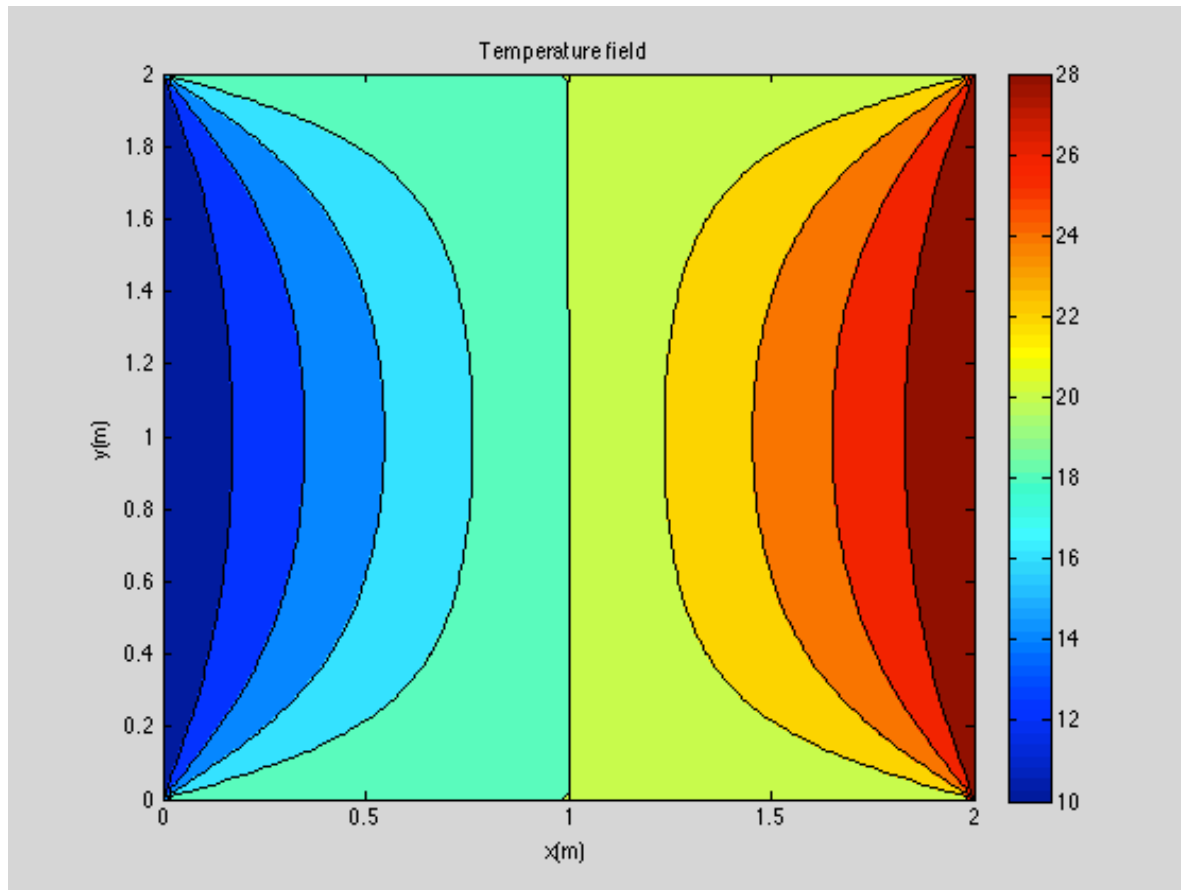
$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{e}}{k} = 0$$



# CONDUCCIÓN DE CALOR 2D

## Estacionario (implícito)

$$\frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{e}}{k} = 0$$



estacionario2D.m

# CONDUCCIÓN DE CALOR 2D

## Transitorio

Entonces la ecuación diferencial

Ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{e}}{k} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

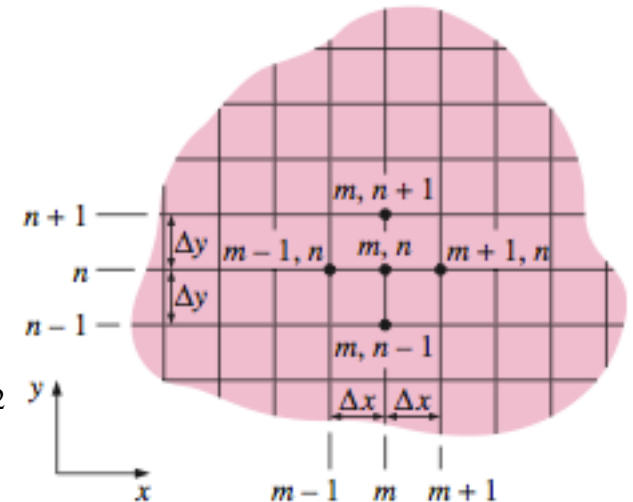
la *formulación en diferencias finitas* para la **conducción de calor bidimensional en estado estacionario** en una región con generación de calor y conductividad térmica constante se puede expresar en coordenadas rectangulares como

$$\frac{T_{m+1,n}^{i+1} - 2T_{m,n}^{i+1} + T_{m-1,n}^{i+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1}^{i+1} - 2T_{m,n}^{i+1} + T_{m,n-1}^{i+1}}{\Delta y^2} + \frac{\dot{e}}{k} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i}{\Delta t}$$

$$s = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \quad a = \frac{\rho c_p \Delta x^2}{k \Delta t}$$

$$T_{m+1,n}^{i+1} + T_{m-1,n}^{i+1} - 2\left(1 + s + \frac{a}{2}\right)T_{m,n}^{i+1} + s(T_{m,n+1}^{i+1} + T_{m,n-1}^{i+1}) = -aT_{m,n}^i - \frac{\dot{e}}{k}\Delta x^2$$

implícito





# CONDUCCIÓN DE CALOR 2D

## Transitorio

Entonces la ecuación diferencial

Ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{e}}{k} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$s = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \quad a = \frac{\rho c_p \Delta x^2}{k \Delta t}$$

implícito

$$T_{m+1,n}^{i+1} + T_{m-1,n}^{i+1} - 2\left(1 + s + \frac{a}{2}\right)T_{m,n}^{i+1} + s(T_{m,+1,n}^{i+1} + T_{m,n-1}^{i+1}) = -aT_{m,n}^i - \frac{\dot{e}}{k}\Delta x^2$$

# CONDUCCIÓN DE CALOR 2D

## Transitorio

Entonces la ecuación diferencial

Ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{e}}{k} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t}$$

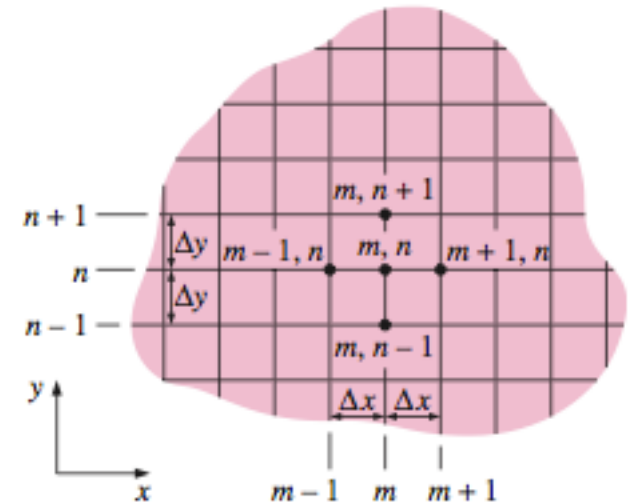
la *formulación en diferencias finitas* para la **conducción de calor bidimensional en estado estacionario** en una región con generación de calor y conductividad térmica constante se puede expresar en coordenadas rectangulares como

$$\frac{T_{m+1,n}^i - 2T_{m,n}^i + T_{m-1,n}^i}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1}^i - 2T_{m,n}^i + T_{m,n-1}^i}{\Delta y^2} + \frac{\dot{e}}{k} = \frac{\rho c_p}{k} \frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i}{\Delta t}$$

$$s_1 = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} \quad s_2 = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta y^2}$$

$$T_{m,n}^{i+1} = s_1(T_{m+1,n}^i + T_{m-1,n}^i) + (1 - 2s_1 - 2s_2)T_{m,n}^i + s_2(T_{m,n+1}^i + T_{m,n-1}^i) + \frac{\dot{e}\Delta t}{\rho c_p}$$

**Explícito**



# CONDUCCIÓN DE CALOR 2D

## Transitorio

$$s_1 = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} \quad s_2 = \frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta y^2}$$

$$T_{m,n}^{i+1} = s_1(T_{m+1,n}^i + T_{m-1,n}^i) + (1 - 2s_1 - 2s_2)T_{m,n}^i + s_2(T_{m,n+1}^i + T_{m,n-1}^i) + \frac{\dot{e}\Delta t}{\rho c_p}$$

Explícito

Campo de temperatura en  
una placa en varios  
instantes de tiempo

explicit2D.m

