Parcial #2

Santiago Andres Gomez Barbon 20211005034

Punto 1 Parcial 2

a) Ejemplo 3.3 - Ogata

• $ma = \Sigma F$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{du}{dt}\right) - k(y-u)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = b\frac{du}{dt} + ku$$

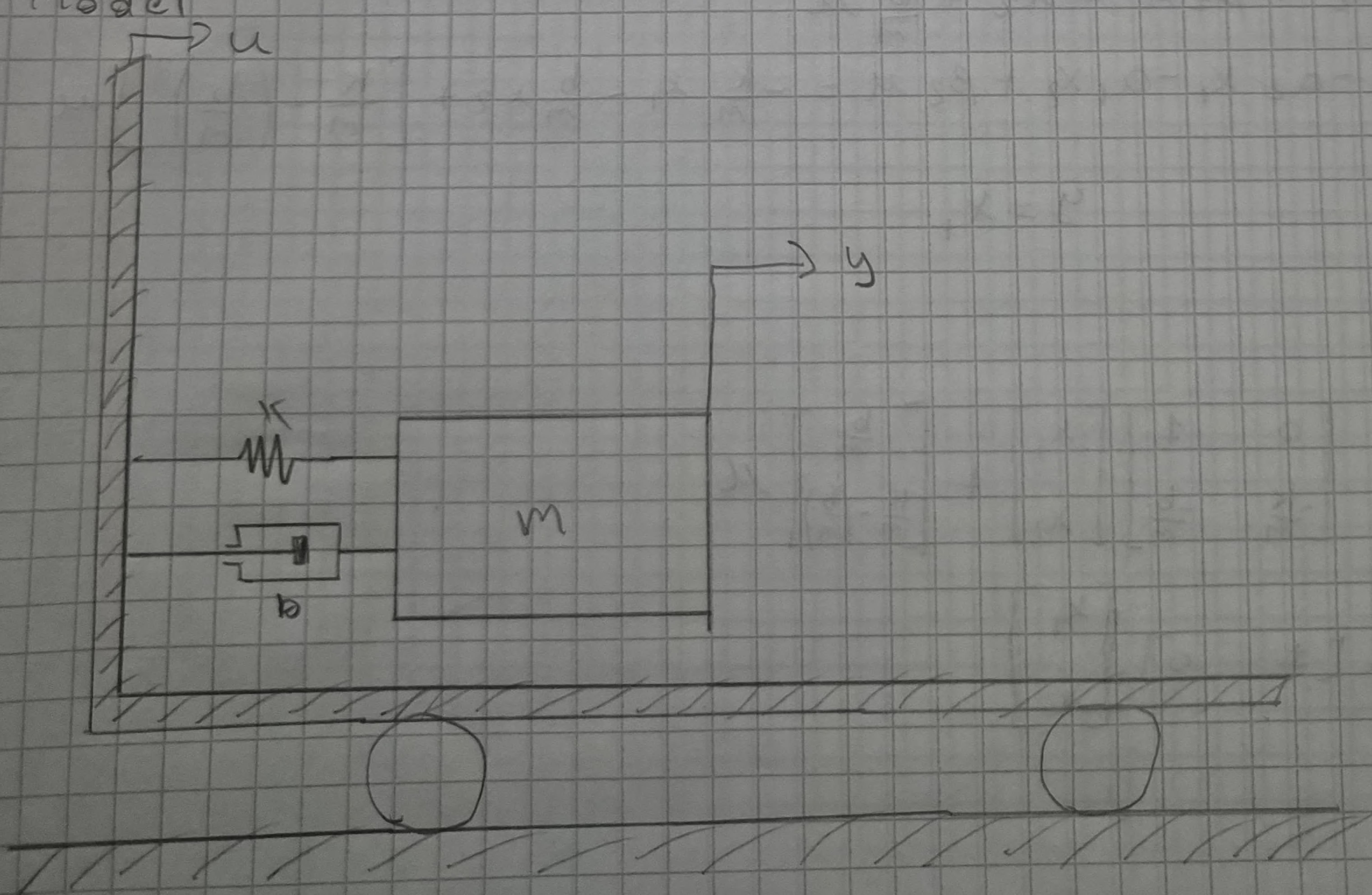
• laplace transform

$$(ms^2 + bs + k)\,Y(s) = (bs + k)\,U(s)$$

transfer function

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

model



• tenemos

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

$$\rightarrow \ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

identificar a_1, a_2, b_0, b_1, b_2

$$a_1 = \frac{b}{m} \quad a_2 = \frac{k}{m} \quad b_0 = 0 \quad b_1 = \frac{b}{m} \quad b_2 = \frac{k}{m}$$

• tenemos

$$\beta_0 = b_0 = 0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = \frac{b}{m}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2$$

definir

$$x_1 = y - \beta_0 u = y$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \frac{b}{m}u$$

•

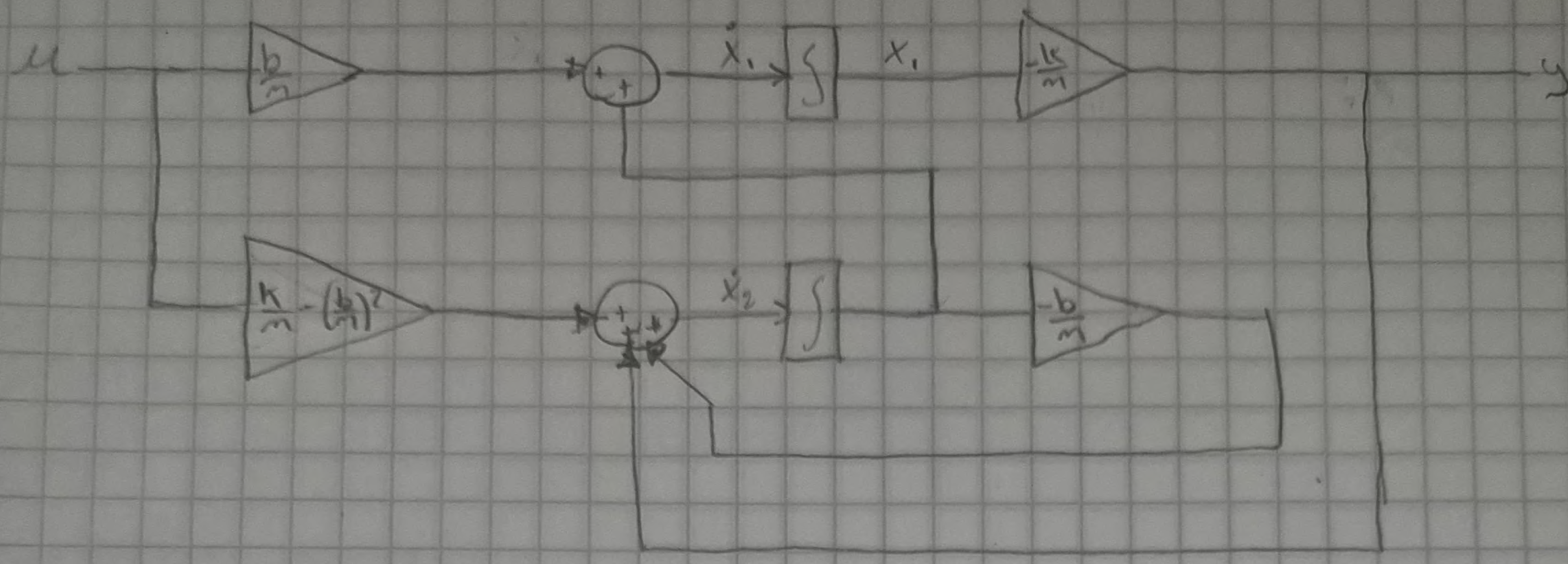
$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + \beta_2 u = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2\right]u$$

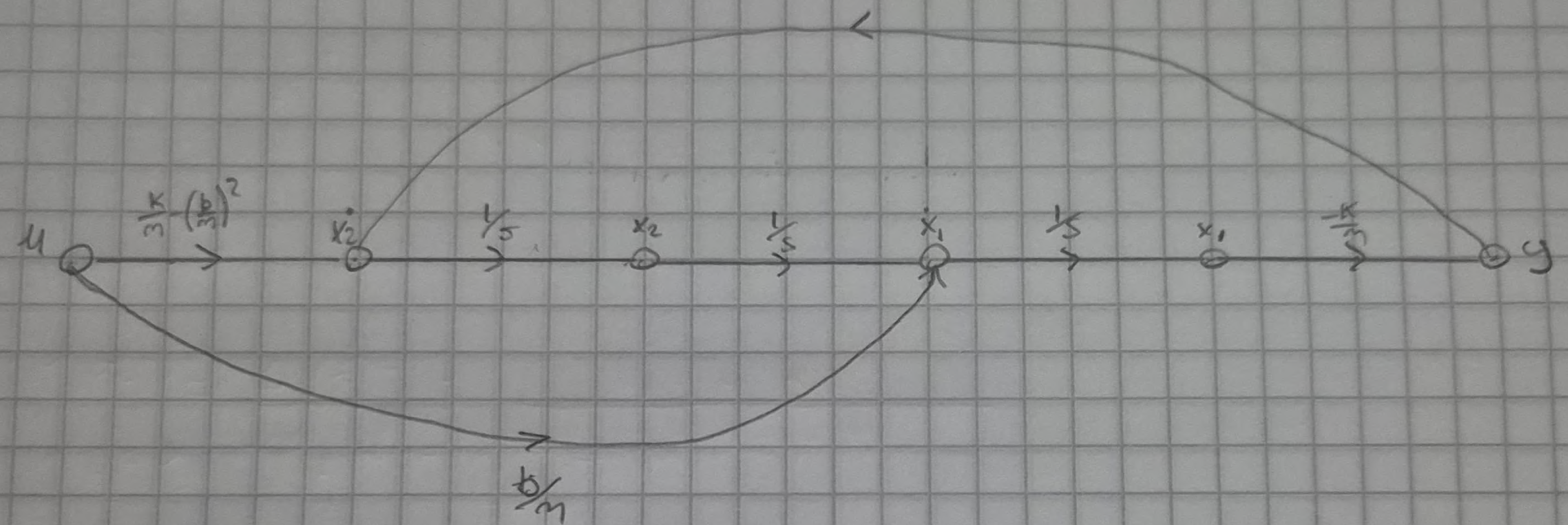
$$y = x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b}{m} \\ \frac{k}{m} - \left(\frac{b}{m}\right)^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



u
b/m
x1
k/m - (b/m)^2
x2
-k/m
-b/m
y

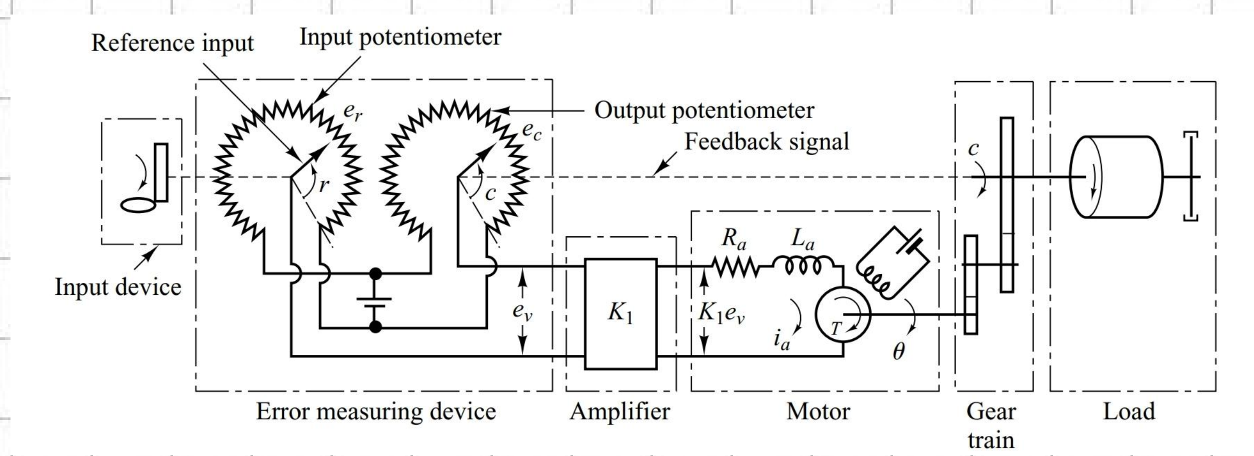


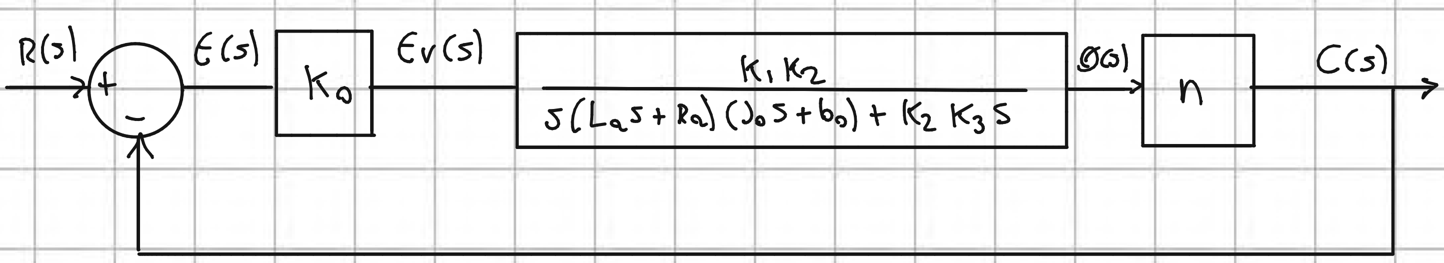
u
k/m (b/m)^2
1/s
1/s
1/s
-k/m
b/m
y

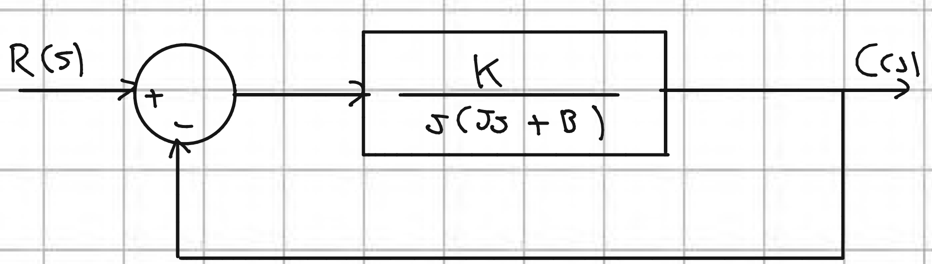
2) Ejercicio A-3,9 Ogata

• Considerando un servo motor

$e = r - c \qquad T = k_2 i_a \qquad e_b = K_3 \dfrac{d\theta}{dt}$







tenemos

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$$

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3\frac{d\theta}{dt} = K_1 e_v \quad (1)$$

- Ecuacion torque

$$J_0\frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0\frac{d\theta}{dt} = T = K_2 i_a \quad (2)$$

• se toma la ecuación 1 y 2

$$\frac{\theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1K_2}{s(L_as+R_a)(J_0s+b_0)+K_2K_3s}$$

• $C(s) = n\theta s$

• tenemos que

$$E_v(s) = K_0[R(s) - C(s)] = K_0 E(s)$$

•

$$G(s) = \frac{C(s)}{\theta(s)}\,\frac{\theta(s)}{E_v(s)}\,\frac{E_v(s)}{E(s)}$$

$$G(s) = \frac{K_0K_1K_2n}{s[(L_as+R_a)(J_0s+b_0)+K_2K_3]}$$

- Asumir la cercana a 0, y dividiendo por Ra

$$G(s) = \frac{K_0K_1K_2n}{s[R_a(J_0s+b_0)+K_2K_3]} = \frac{K_0K_1K_2n/R_a}{J_0s^2+\left(b_0+\frac{K_2K_3}{R_a}\right)s}$$

tenemos los parametros

$J = J_0/n^2$

$B = [b_0 + (K_2K_3/R_a)]/n^2$

$K = K_0K_1K_2/nR_a$

Simplificar función de transferencia

$$G(s) = \frac{K}{Js^2+Bs} \qquad G(s) = \frac{K_m}{s(T_ms+1)}$$

$$K_m = \frac{K}{B} \qquad T_m = \frac{J}{B} = \frac{R_aJ_0}{R_ab_0+K_2K_3}$$

$y = y(s) \qquad \dot{y}' = \dot{y}_2$

$\dot{y} = \dot{y}(s) = \dot{y}_1 = y_2$

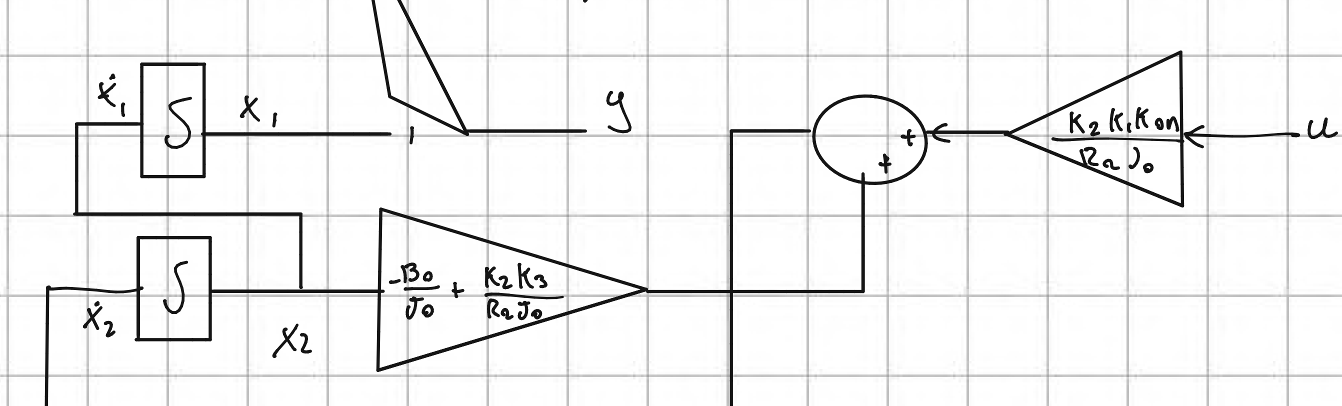
• $J_0s^2y(s) + \left(b_0+\frac{K_2K_3}{R_a}\right)s\,y(s) = K_2K_1K_0n/R_a\,X(s)$

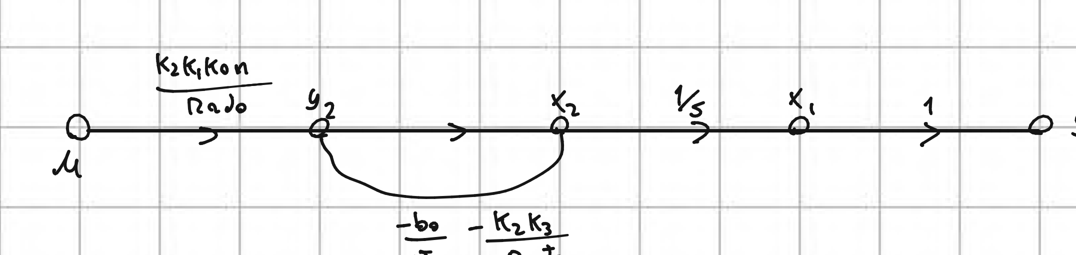
$$J_0\dot{y}' + \left(b_0+\frac{K_2K_3}{R_a}\right)\dot{y} = K_2K_1K_0\,n/R_a\;u$$

$$\dot{y}' = K_2K_1K_0n/R_aJ_0 - \left(b_0+\frac{K_2K_3}{R_a}\right)\frac{1}{J_0}\dot{y}$$

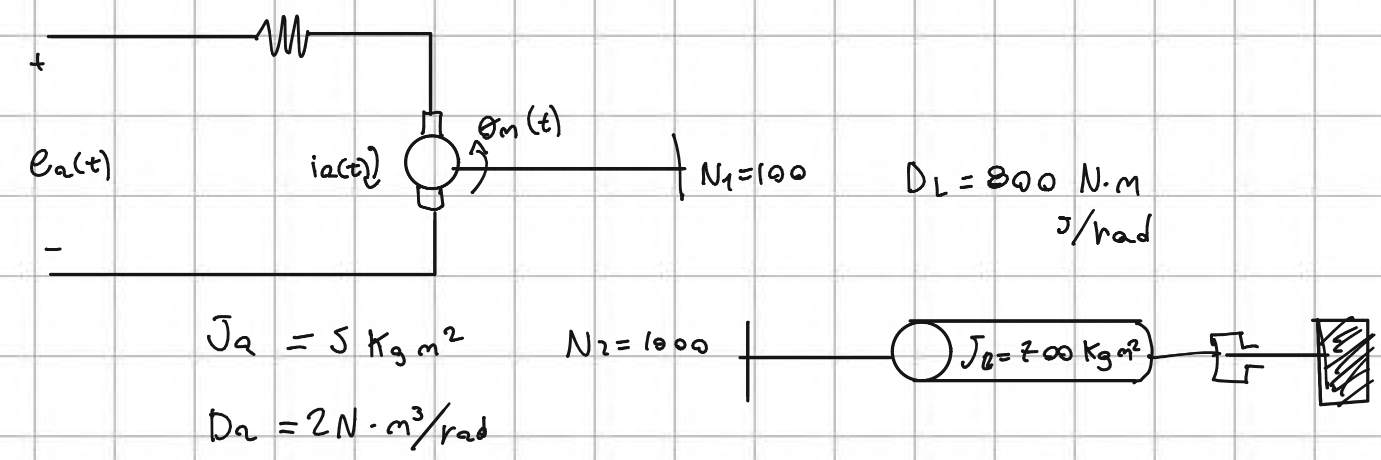
$$\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{J_0}\left(b_0+\frac{K_2K_3}{R_a}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{K_2K_1K_0n}{R_aJ_0}\end{bmatrix}u$$

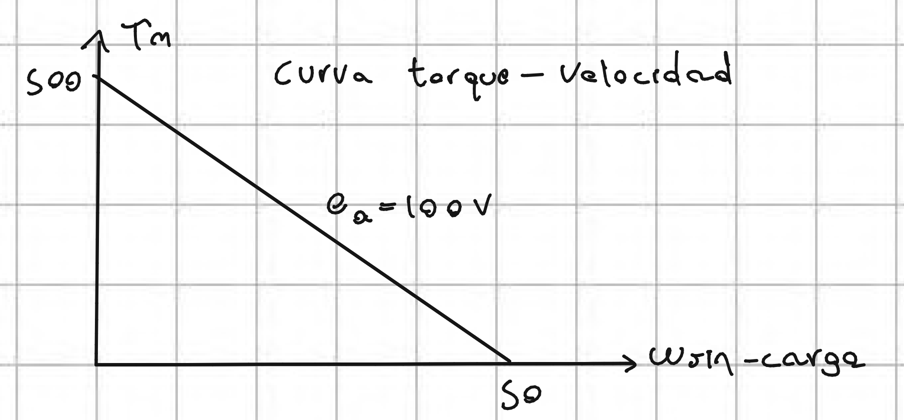
$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$





3) Ejercicio 2-23





Inercia total en el motor : $J_m = J_a + J_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$

J_a: inercia eje motor J_L: inercia de la carga

Reemplazar $J_m = (5\,Kg\,m^2) + (700\,Kg\,m^2)\left(\frac{100}{1000}\right)^2 = 12\,kg\,m^2$

- Factor amortiguamiento sistema : $D_m = D_a + D_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$

D_a= Amortiguamiento eje motor D_L= Amortiguamiento carga

Reemplazar $D_m = (2\,N\cdot m s/rad) + (800\,N\cdot m s/rad)\left(\frac{100}{1000}\right)^2 = 10\,N\cdot m s/rad$

- Con la curva torque - velocidad se conoce

$T = 500$ $\quad w(\text{sin carga}) = 50$ $\quad e_a = 100V$

- Se consideran las constantes electricas del sistema:

$$\frac{KI}{R_a} = \frac{T_{max}}{e_a} = \frac{500\ N/m}{100\ V} = 5\ N/m\cdot V$$

$$K_b = \frac{e_a}{w(\text{sin carga})} = \frac{100V}{50\ rad/s} = 2\ \frac{V\cdot s}{rad}$$

- Para el flujo constante

$$V_b = K_b\,\dot{\theta} \xrightarrow[\text{Laplace}]{} V_b(s) = K_b\cdot\theta s$$

- Se obtiene ecuación diferencial

$$s(L_a I_a(s)) + R I_a(s) + V_b(s) = E_a(s) \quad ①$$

- torque motor

$$T_m(s) = K_T + I_a(s)$$

- Ecuación equilibrio torque

$$T_m(s) = \theta_m(s)\,(J_m s^2 + D_m s) \quad ③$$

- Reemplazar 3 en 1

$$\left(\frac{R_a}{K_T}(J_m s + D_m) + K_b\right) s\,\theta_m(s) = E_a(s)$$

Despejar $\theta_m(s)/E_a(s)$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_T/R_a J_m}{s\left(s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_T K_b}{R_a}\right)\right)} \quad \text{Ec transferencia } ④$$

Reemplazar valores

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{5/12}{s\left(s + \frac{1}{12}(10 + (5)(2))\right)} = \frac{0,417}{s(s+1,667)} \quad ⑤$$

- Considerando Radio Engranajes $N_1/N_2 = 1/10$

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{0,417\ (N_1/N_2)}{s(s+1,667)} = \frac{0,0417}{s(s+1,667)} \quad ⑥$$

Ec transferencia con radio de los engranajes

- Realizar transformada inversa de laplace ec ⑥

$$\theta_L(s)(s^2 + 1,667s) = 0,0417\,E_a(s)$$

$$\ddot{\theta}_L + 1,667\,\dot{\theta}_L = 0,0417\,E_a \quad ⑦$$

Se despeja $\ddot{\theta}_L = 0,0417\,E_a - 1,667\,\dot{\theta}_L$ ⑧

- Variables estado

$x_1 = \theta_L \quad \dot{x}_1 = x_2 = \dot{\theta}_L \quad \dot{x}_2 = \ddot{\theta}_L$

Reemplazar → $\dot{x}_2 = 0,0417\,E_a - 1,667\,x_2$ ⑨

EE

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1,667\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0,0417\end{bmatrix} E_a$$

$$\theta_L = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Diagrama flujo señal

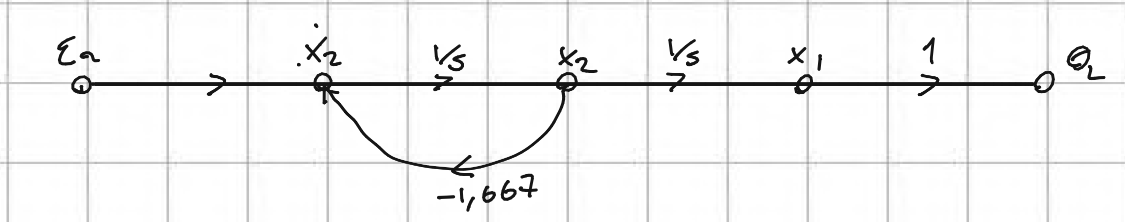
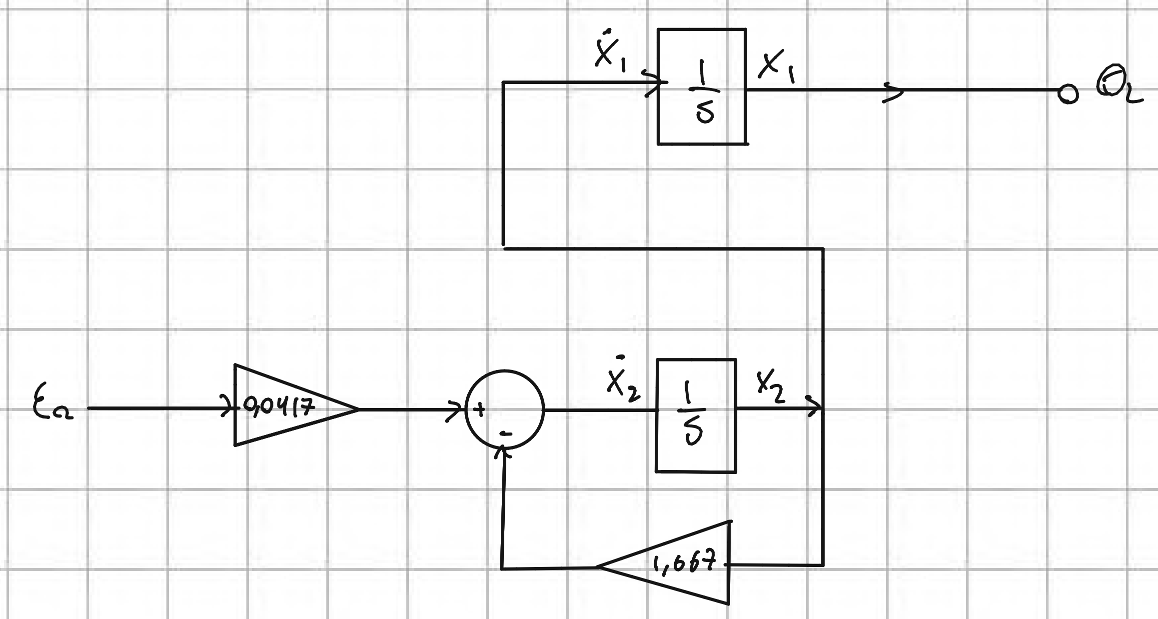


Diagrama bloques



4) Comparación

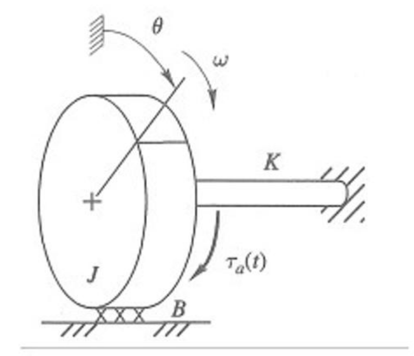
teniendo en cuenta los ejercicios 2-23 del libro de Norman Nise y el A 3-9 del libro de Ogata se plantea un analisis similar con respecto a los detalles mecanicos y electricos del sistema.

Para el caso del ejercicio 2-23 se tiene un sistema compuesto por un motor DC, en cambio en el otro se plantea un servomotor el cual posee un sistema de engranajes que ocasiona que se realimente el estado del potenciometro.

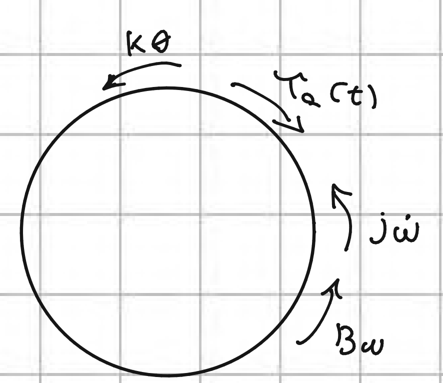
Parte 2 Parcial

1)

1. Para el sistema rotacional en la figura, determine:
   a. La respresentación en el espacio de estados (b) junto a su diagrama de bloques, (c) así como el diagrama de flijo de señal.
   b. La función de transferencia



• Realizamos diagrama cuerpo libre del disco:



Donde: $\theta = \theta$

$\dot{\theta} = \omega$

$\ddot{\theta}\ \dot{\omega}$

$\tau_a - J\dot{\omega} - B\omega - k\theta = 0$ — Reemplaz ω

$\tau_a - J\ddot{\theta} - B\dot{\theta} - k\theta = 0$

$\tau_a = K\theta + B\dot{\theta} + J\ddot{\theta}$

$q_1 = \theta$

$q_2 = \dot{q}_1 = \dot{\theta}$

$\dot{q}_2 = \ddot{\theta}$

• Reemplazar

$\tau_a = k\,q_1 + B\,q_2 + J\,\dot{q}_2$

Despejar $\dot{q}_2$

$$\dot{q}_2 = \frac{\tau_a}{J} - \frac{K}{J}q_1 - \frac{B}{J}q_2$$

Matriz variable estado

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tau_a$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Diagrama bloques

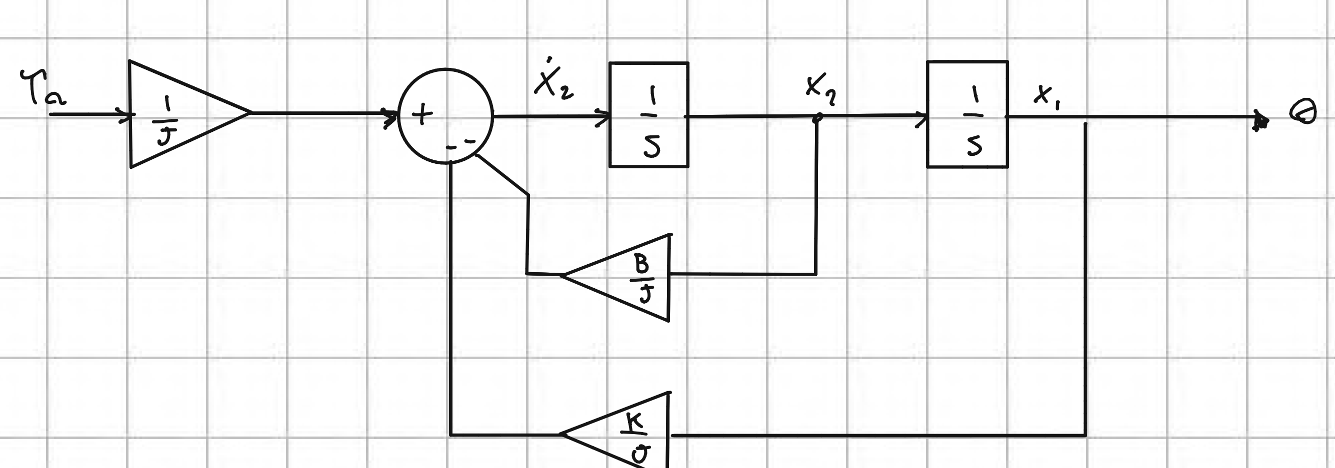
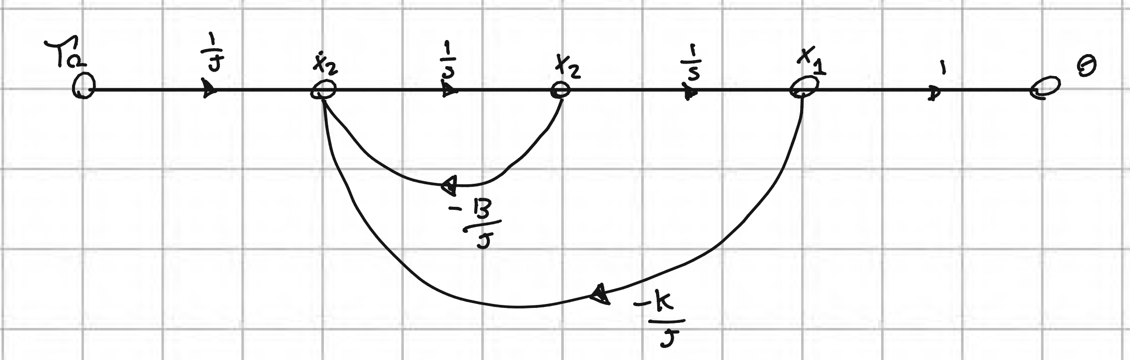


Diagrama Flujo señal



Función transferencia -> Laplace

$\tau_a - k\theta - B\dot{\theta} - J\ddot{\theta} = 0$

$\tau_a(s) - \theta(s)(Js^2 + Bs + k) = 0$

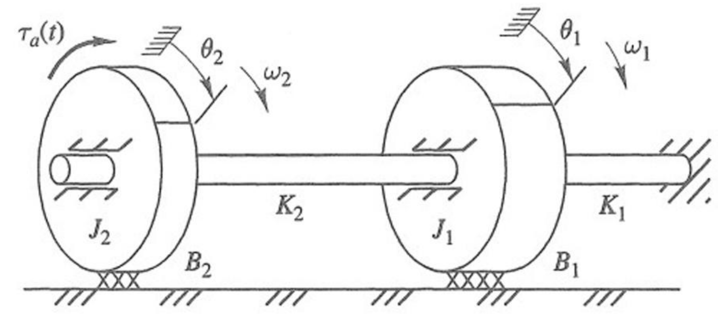
$\tau_a(s) = \theta(s)(Js^2 + Bs + k)$

$$\frac{\theta(s)}{\tau_a(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + k} \longrightarrow \frac{\theta(s)}{\tau_a(s)} = G(s)$$

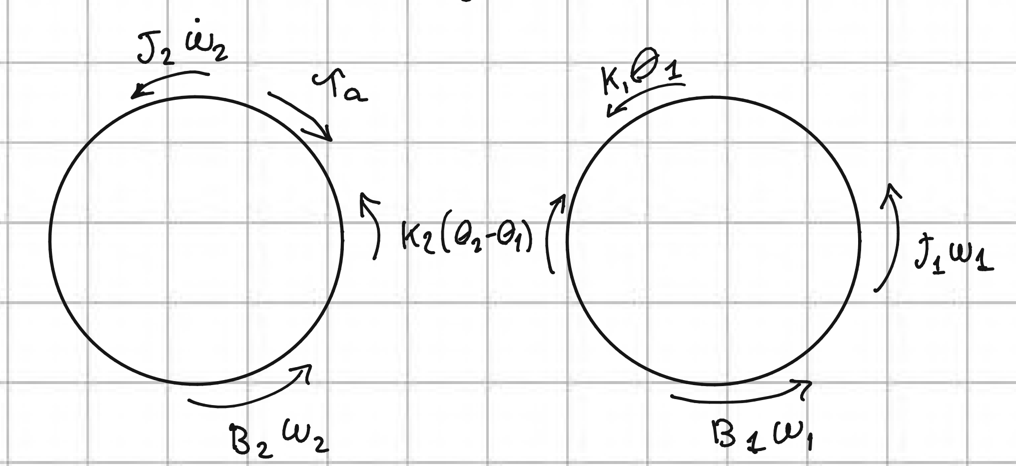
2. Para el sistema rotacional en la figura, asuma $\theta_2 > \theta_1$ y determine:

a. La función de transferencia relacionando θ_2 y τ_a.

b. La respresentación en el espacio de estados (b) junto a su diagrama de bloques, (c) así como el diagrama de flijo de señal. Todo en términos de θ_2



• Realizamos diagrama cuerpo libre del disco:



Donde: $\theta = \theta$

$\dot\theta = \omega$

$\ddot\theta \quad \dot\omega$

Para θ_1

$$J_1\dot\omega_1 + B_1\omega_1 + K_1\theta_1 = K_2(\theta_2-\theta_1) \to J_1\ddot\theta_1 + B_1\dot\theta_1 + K_1\theta_1 - K_2(\theta_2-\theta_1) = 0$$

Para θ_2

$$J_2\dot\omega_2 + B_2\omega_2 + K_2(\theta_2-\theta_1) = T_a \to J_2\ddot\theta_2 + B_2\dot\theta_2 + K_2\theta_2 - K_2\theta_1 = T_a$$

Para la función de transferencia

tenemos

$$J_1\ddot\theta_1 + B_1\dot\theta_1 + K_1\theta_1 - K_2(\theta_2-\theta_1) = 0$$

$$\theta_1(s)\,(J_1s^2+B_1s+(K_1+K_2)) = \theta_2(s)\,K_2$$

$$\theta_1(s) = \frac{K_2\,\theta_2(s)}{(J_1s^2+B_1s+(K_1+K_2))}$$

tomamos la ecuación de θ_2 y la reemplazamos en la anterior

$$t_a = J_2\ddot\theta_2 + B_2\dot\theta_2 + K_2\theta_2 - K_2\theta_1$$

$$T_a = J_2\ddot\theta_2 + B_2\dot\theta_2 + K_2\theta_2 - K_2\theta_1 = 0$$

$$T_a = \theta_2(s)\,(K_2 + B_2s + J_2s^2) - K_2\left(\frac{K_2\,\theta_2(s)}{(J_1s^2+B_1s+(K_1+K_2))}\right)$$

$$t_a = \theta_2(s)\left(K_2 + B_2S + J_2S^2 + \frac{-K_2}{J_1s^2+B_1s+(K_1+K_2)}\right)$$

$$1 = \frac{\theta_2(s)}{t_a(s)}\left(\frac{J_1s^2+B_1s+K_1+K_2}{(K_2+B_2S+J_2S^2)(J_1s^2+B_1s+(K_1+K_2)) - (K_2)^2}\right)$$

Resolver

$$\theta_2(s)\,(K_2+B_2S+J_2S^2)(J_1s^2+B_1s+(K_1+K_2)) - (K_2)^2 = t_a(s)\,(J_1s^2+B_1s+K_1+K_2)$$

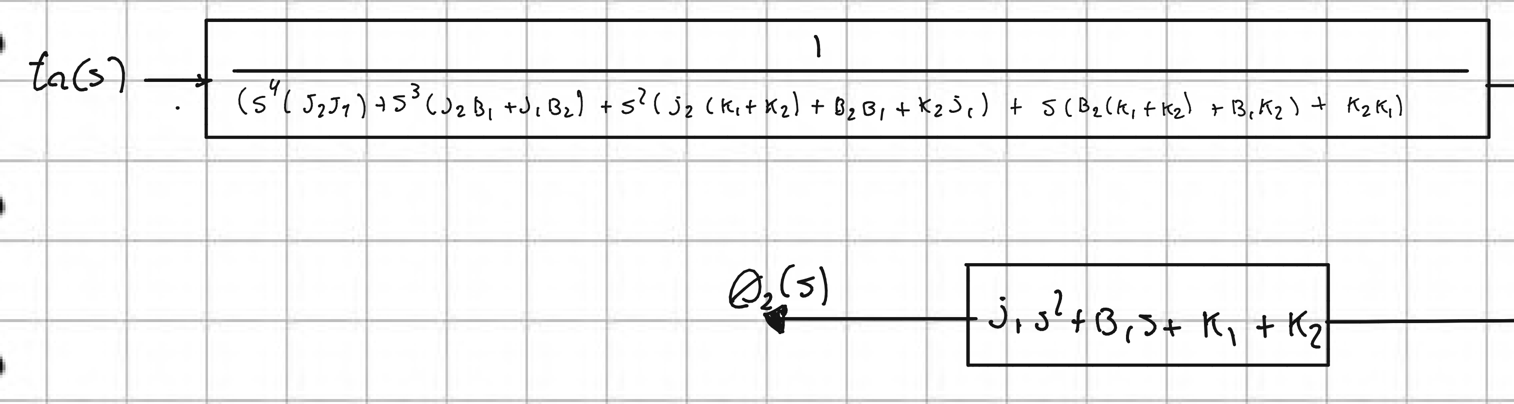
$$\theta_2(s)\big(J_2J_1s^4 + J_2B_1S_3 + J_2S^2(K_1+K_2) + B_2J_1S^3 + B_2B_1S^2 + B_2S(K_1+K_2)$$
$$+ K_2J_1S^2 + B_1K_2S + K_2K_1 + K_2^2 - (K_2)^2\big) = t_a(s)\,(J_1s^2+B_1s+K_1+K_2)$$

$$\theta_2(s)\,(s^4(J_2J_1) + s^3(J_2B_1+J_1B_2) + s^2(J_2(K_1+K_2)+B_2B_1+K_2J_1)$$
$$+ s(B_2(K_1+K_2)+B_1K_2) + K_2K_1) = t_a(s)\,(J_1s^2+B_1s+K_1+K_2)$$

Reemplazar por la solución

$$\frac{\theta_2(s)}{t_a(s)} = \frac{J_1s^2+B_1s+K_1+K_2}{(s^4(J_2J_1)+s^3(J_2B_1+J_1B_2)+s^2(J_2(K_1+K_2)+B_2B_1+K_2J_1)+s(B_2(K_1+K_2)+B_1K_2)+K_2K_1)}$$

tenemos que



• Realizar transformada inversa $H_2(s)$ y $H_1(s)$

$$\frac{\theta_2(s)}{t_a(s)} = \frac{H_1(s)}{H_2(s)}$$

$$T_a = \ddddot{X}(J_2J_1) + \dddot{X}(J_2B_1+J_1B_2) + \ddot{X}(J_2(K_1+K_2)+B_2B_1+K_2J_1) + \dot{X}(B_2(K_1+K_2)+B_1K_2) + XK_2K_1$$

$$\theta_2(t) = J_1\ddot X + B_1\dot X + X(K_1+K_2)$$

• Despejar $\ddddot{X}$

$$\ddddot{X} = -\dddot{X}\frac{(J_2B_1+J_1B_2)}{J_1J_2} - \ddot{X}\frac{(J_2(K_1+K_2)+B_2B_1+K_2J_1)}{J_1J_2} - \dot{X}\frac{(B_2(K_1+K_2)+B_1K_2)}{J_1J_2} - X\frac{K_2K_1}{J_1J_2} + \frac{T_a}{J_1J_2}$$

Variables de estado

$q_1 = X$

$q_2 = \dot q_1 = \dot X$

$q_3 = \dot q_2 = \ddot X$

$q_4 = \dot q_3 = \dddot X$

$\dot q_4 = \ddddot X$

Matriz

• $\dot q_4 = -q_4\frac{(J_2B_1+J_1B_2)}{J_1J_2} - q_3\frac{(J_2(K_1+K_2)+B_2B_1+K_2J_1)}{J_1J_2} - q_2\frac{(B_2(K_1+K_2)+B_1K_2)}{J_1J_2} - q_1\frac{K_2K_1}{J_1J_2} + \frac{T_a}{J_1J_2}$

• $\theta_2(t) = J_1q_3 + B_1q_2 + q_1(K_1+K_2)$

$$\begin{bmatrix}\dot q_1\\ \dot q_2\\ \dot q_3\\ \dot q_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{K_1K_2}{J_1J_2} & -\frac{(B_2(K_1+K_2)+B_1K_2)}{J_1J_2} & -\frac{(J_2(K_1+K_2)+B_2B_1+K_2J_1)}{J_1J_2} & -\frac{(J_2B_1+J_1B_2)}{J_1J_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{J_1J_2}\end{bmatrix}T_a$$

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix}(K_1+K_2) & B_1 & J_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix}$$

teniendo en cuenta que las variables son extensas le asignare una letra de tal forma que se identifique en el diagrama de bloques

$A = \frac{K_2 K_1}{J_1 J_2}$ $\quad B = \frac{(B_2(K_1+K_2) + B_1 K_2)}{J_1 J_2}$ $\quad C = \frac{(J_2(K_1+K_2) + B_2 B_1 + K_2 J_1)}{J_1 J_2}$

$D = \frac{(J_2 B_1 + J_1 B_2)}{J_1 J_2}$ $\quad E = \frac{1}{J_1 J_2}$

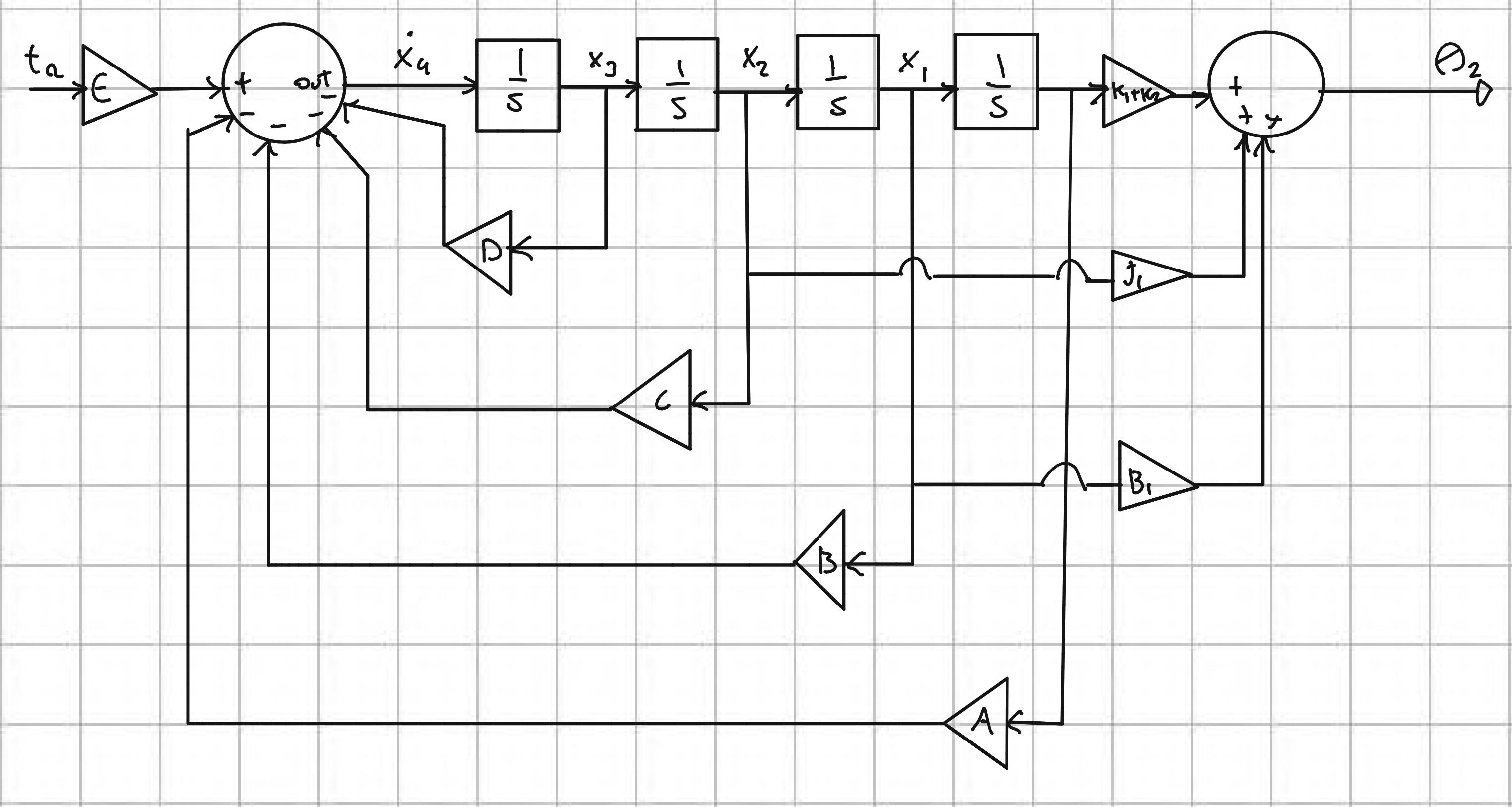
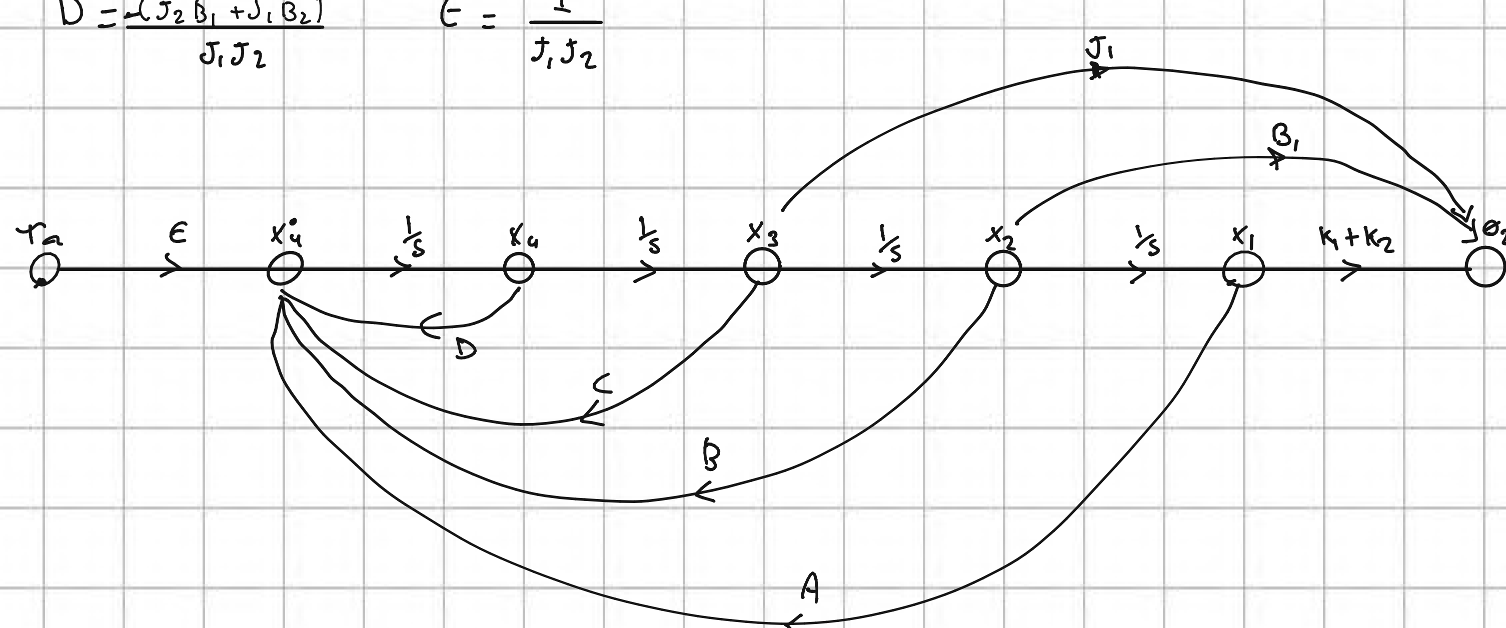


Diagrama flujo

$A = \frac{-(K_2 K_1)}{J_1 J_2}$ $\quad B = \frac{-(B_2(K_1+K_2) + B_1 K_2)}{J_1 J_2}$ $\quad C = \frac{-(J_2(K_1+K_2) + B_2 B_1 + K_2 J_1)}{J_1 J_2}$

$D = \frac{-(J_2 B_1 + J_1 B_2)}{J_1 J_2}$ $\quad E = \frac{1}{J_1 J_2}$

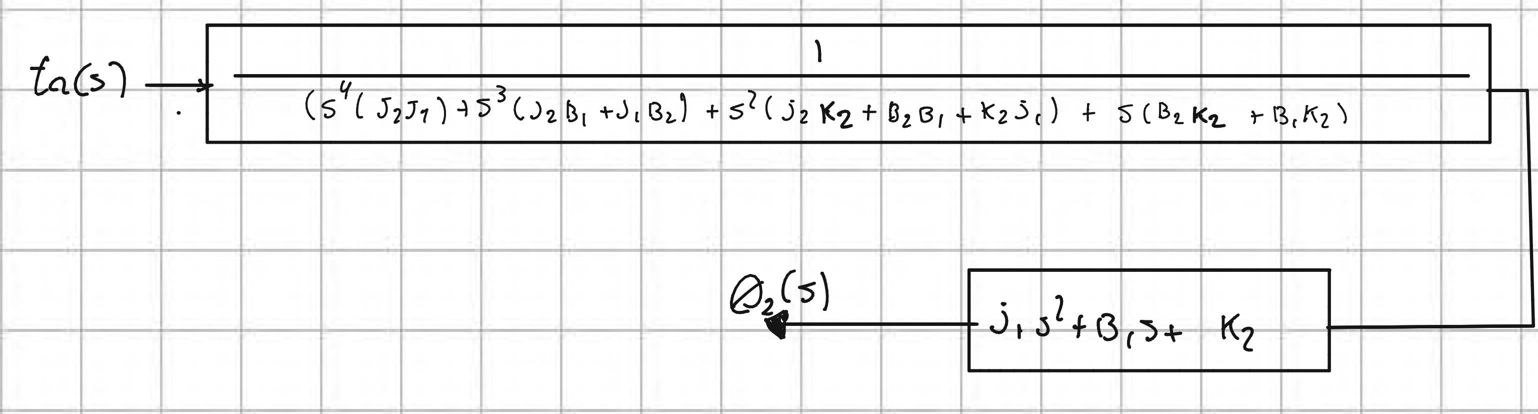


3. Para el sistema del ítem anterior, mismos requerimientos considerando $K_1 = 0$

teniendo en cuenta que $K=0$ tomamos la funcion de transferencia del punto anterior y evaluamos la condición

$$\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{J_1 s^2 + B_1 s + K_2}{s^4(J_2J_1) + s^3(J_2B_1+J_1B_2) + s^2(J_2K_2+B_2B_1+K_2S_1) + s(B_2K_2+B_1K_2)}$$

tenemos que



•Realizar transformada inversa $H_2(s)$ y $H_1(s)$

$$\frac{\theta_2(s)}{T_a(s)} = \frac{H_1(s)}{H_2(s)}$$

$$T_a = \ddddot{X}(J_2J_1) + \dddot{X}(J_2B_1+J_1B_2) + \ddot{X}(J_2K_2+B_2B_1+K_2S_1) + \dot{X}(B_2K_2+B_1K_2)$$

$$\theta_2(t) = J_1\ddot{X} + B_1\dot{X} + XK_2$$

•Despejar $\ddddot{X}$

$$\ddddot{X} = -\dddot{X}\frac{(J_2B_1+J_1B_2)}{J_1J_2} - \ddot{X}\frac{(J_2K_2+B_2B_1+K_2S_1)}{J_1J_2} - \dot{X}\frac{(B_2K_2+B_1K_2)}{J_1J_2} + \frac{T_a}{J_1J_2}$$

Variables de estado

$q_1 = X$ $\quad q_4 = \dot{q}_3 = \dddot{X}$

$q_2 = \dot{q}_1 = \dot{X}$ $\quad \dot{q}_4 = \ddddot{X}$

$q_3 = \dot{q}_2 = \ddot{X}$

Matriz

• $\dot{q}_4 = -q_4\frac{(J_2B_1+J_1B_2)}{J_1J_2} - q_3\frac{(J_2K_2+B_2B_1+K_2S_1)}{J_1J_2} - q_2\frac{(B_2K_2+B_1K_2)}{J_1J_2} + \frac{T_a}{J_1J_2}$

• $\theta_2(t) = J_1q_3 + B_1q_2 + q_1K_2$

$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \dot{q}_3\\ \dot{q}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{(B_2K_2+B_1K_2)}{J_1J_2} & -\frac{(J_2K_2)+B_2B_1+K_2S_1}{J_1J_2} & -\frac{(J_2B_1+J_1B_2)}{J_1J_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{J_1J_2}\end{bmatrix}T_a$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix}K_2 & B_1 & J_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\end{bmatrix}$$

•teniendo en cuenta que las variables son extensas le asignare una letra de tal forma que se identifique en el diagrama de bloques

$A = \frac{(B_2K_2+B_1K_2)}{J_1J_2}$ $\quad B = \frac{(J_2K_2+B_2B_1+K_2S_1)}{J_1J_2}$

$C = \frac{(J_2B_1+J_1B_2)}{J_1J_2}$ $\quad D = \frac{1}{J_1J_2}$

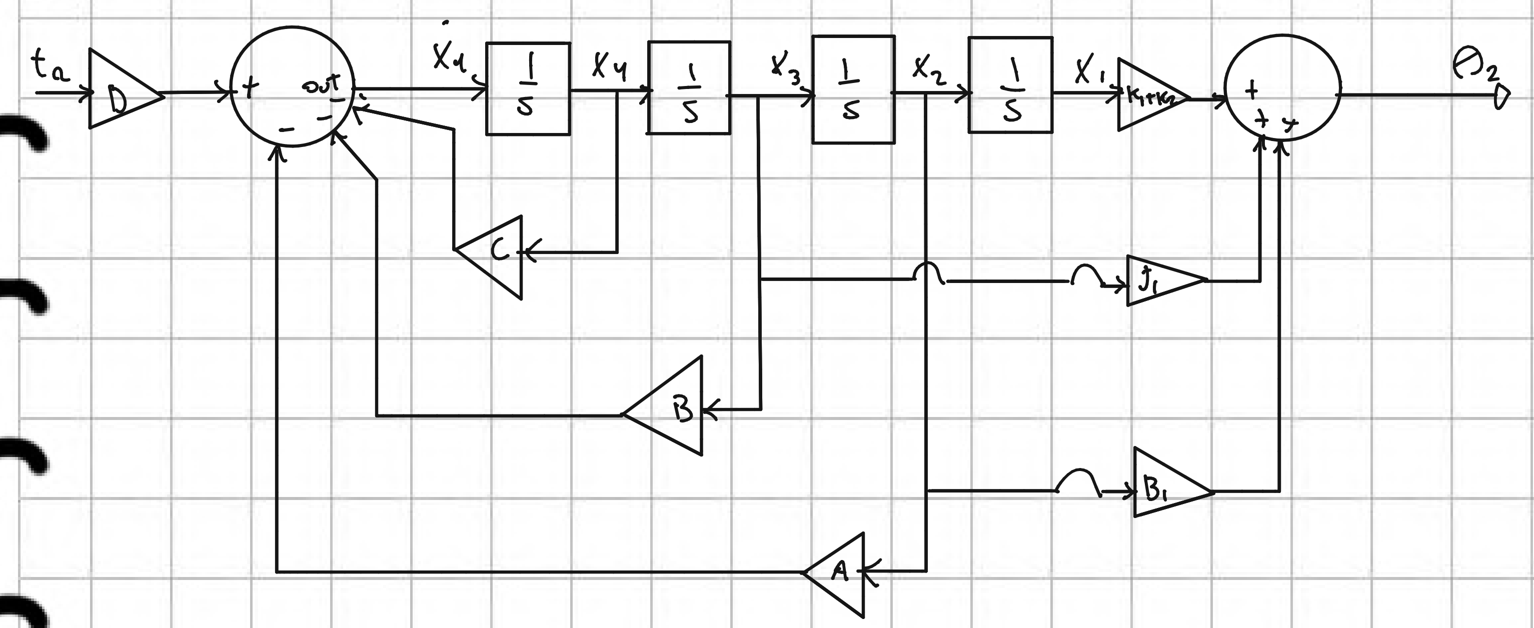
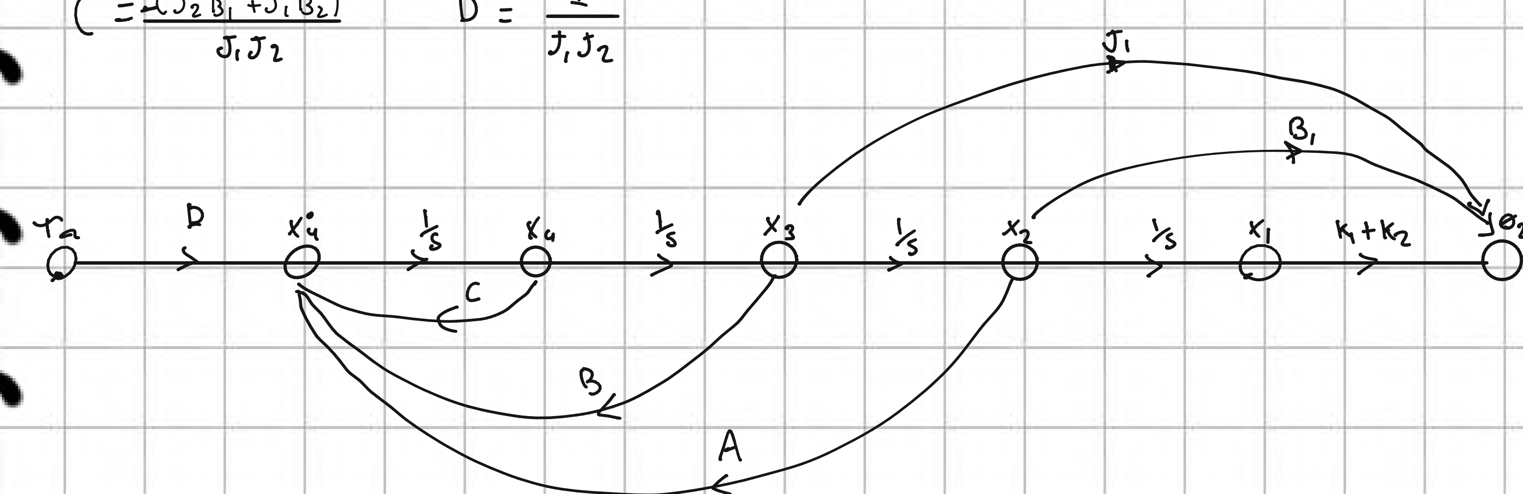


Diagrama flujo

$A = -\frac{(B_2K_2+B_1K_2)}{J_1J_2}$ $\quad B = -\frac{(J_2K_2)+B_2B_1+K_2S_1}{J_1J_2}$

$C = -\frac{(J_2B_1+J_1B_2)}{J_1J_2}$ $\quad D = \frac{1}{J_1J_2}$



4. Para el sistema rotacional en la figura, determine:

a. La función de transferencia relacionando θ y τ_a.

b. La respresentación en el espacio de estados (c) junto a su diagrama de bloques, (d) así como el diagrama de flujo de señal.

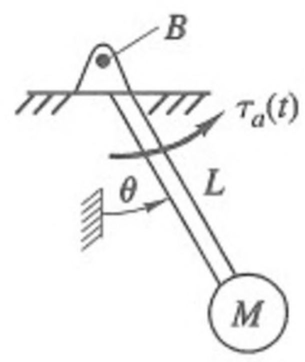
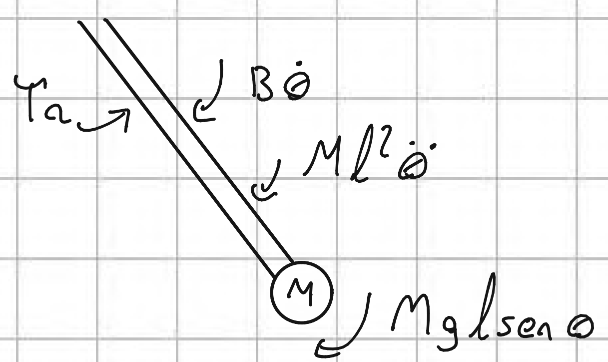


Diagrama Cuerpo libre



- Ecuación :

$$\tau_a = Ml^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + Mgl\,sen\,\theta$$

- tenemos que $sen(\theta) \approx \theta$ por ser un angulo pequeño, por lo tanto

$$\tau_a = Ml^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + Mgl\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= \theta \\ q_2 = \dot{q}_1 &= \dot{\theta} \\ \dot{q}_2 &= \ddot{\theta} \end{aligned}}$$

Despejar $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau_a}{ml^2} - \frac{B}{ml^2}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\theta \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\tau_a}{ml^2} - \frac{B}{ml^2}q_2 - \frac{g}{l}q_1$$

Matriz variable estado

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{B}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} \tau_a$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Diagrama bloques

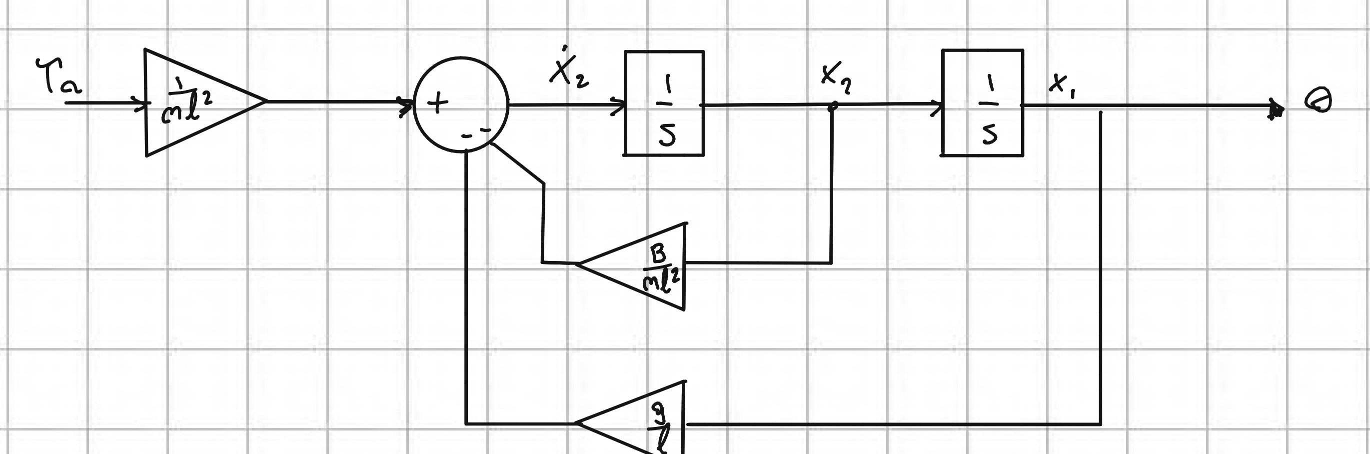
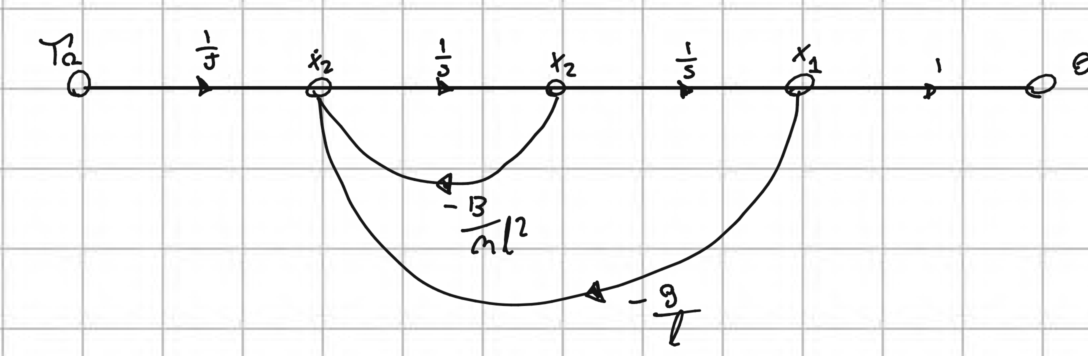


Diagrama Flujo señal



Función transferencia -> Laplace

$$\tau_a = Ml^2\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + Mgl\theta$$

$$\tau_a(s) = \theta(s)(ml^2s^2 + Bs + Mgl)$$

$$\frac{\theta(s)}{\tau_a(s)} = \frac{1}{(ml^2s^2 + Bs + Mgl)} \rightarrow \frac{\theta(s)}{\tau_a(s)} = G(s)$$