

$$\begin{aligned}
 1. \quad & x_1 + 3x_2 = 4 \\
 & 2x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 15 \\
 & 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 10 & 2 & 15 \\ 3 & 6 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1, R_3 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow R_2 - 3R_1, R_3 + 3R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + 3R_1 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \frac{1}{7} R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_3 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1$$

$$\text{So, } \begin{bmatrix} X=1 \\ Y=1 \\ Z=1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 10 \\ 3 & 1 & 11 & 19 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 11 & 19 \\ 2 & 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} -13 \\ -27 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -10 \\ -18 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\downarrow R_3 - 2 \cdot R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} \cdot R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\downarrow
 Pivot columns
 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
 \downarrow
 Basic variables are:
 x_1 and x_2

$$\begin{aligned}
 x_1 + 3x_3 &= 5 \\
 x_2 + 2x_3 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 5 - 3x_3 \\
 x_2 &= 4 - 2x_3 \\
 x_3 &\text{ is free}
 \end{aligned}$$

9 - 10