

Quiz 8

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ so, yes... } \lambda = -2.$$

$$(2) \begin{bmatrix} 3-2 & 2 \\ 3 & 8-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ and } \det(A-2I) = (6-6) = 0, \text{ so, yes } \lambda=2 \text{ is an eigenvalue.}$$

$$(3) a) \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \det(A-\lambda I) = 3-\lambda \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \text{ (along 2nd column)}$$

$$\rightarrow (3-\lambda)[(2-\lambda)(3-\lambda)-0] = (3-\lambda)^2(2-\lambda) \rightarrow \lambda=2 \text{ and } \lambda=3 \text{ multiplicity 2.}$$

$$b) \text{ For } \lambda=2: \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2R_3+R_2 \rightarrow R_2 \\ 2R_3+R_1 \rightarrow R_1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1+x_2=0 \rightarrow x_1=-x_2 \\ x_3=0 \end{matrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ basis vector}$$

$$\text{For } \lambda=3: \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1 \rightarrow R_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1+2x_3=0 \rightarrow x_1=-2x_3 \\ x_2=x_2 \text{ (free)} \end{matrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ basis vectors}$$

$$a) D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$