



# UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

## PREGRADO EN ESTADISTICA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA  
FACULTAD DE CIENCIAS

### — DISEÑO DE EXPERIMENTOS —

*Profesor: Víctor Ignacio López Ríos*  
*Proyecto-Informe Final*

---

#### **Integrantes:**

Iván Sebastián Palomino Umaña	C.C. 1.105.787.354
Alejandro Velásquez Rendón	C.C. 1.000.913.570
Santiago Vera Quiceno	C.C. 1.000.205.947

Medellín, Colombia

Medellín, Febrero 17 de 2025

# Índice

<b>Índice de Figuras</b>	<b>2</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>2</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2 Planteamiento del problema</b>	<b>3</b>
2.1 Justificación del diseño . . . . .	3
2.2 Condiciones del experimento . . . . .	4
2.3 Diseño experimental . . . . .	4
<b>3 Ejecución del experimento</b>	<b>5</b>
3.1 Proceso de aleatorización . . . . .	5
3.2 Toma de los datos . . . . .	6
<b>4 Verificación de supuestos</b>	<b>10</b>
4.1 ANOVA del diseño . . . . .	10
4.2 Normalidad . . . . .	11
4.3 Homogeneidad de varianza . . . . .	12
4.4 Incorrelación en los residuos . . . . .	14
<b>5 Pruebas de Duncan</b>	<b>15</b>
<b>6 Apéndice</b>	<b>16</b>
<b>Referencias</b>	<b>16</b>

## Índice de figuras

1	Gráfico Box-Plot de Material . . . . .	8
2	Gráfico Box-Plot de Superficie . . . . .	8
3	Gráfico Box-Plot de Interacción . . . . .	9
4	Gráfico de Interacción . . . . .	10
5	Grafico de Orden vs Residuales . . . . .	14

## Índice de cuadros

1	Tabla para hacer la aleatorización. . . . .	5
2	Réplica 1-Sebastián y Alejandro (tiempo). . . . .	7
3	Réplica 2-Santiago y Sebastián (tiempo). . . . .	7
4	Réplica 3-Alejandro y Santiago (tiempo). . . . .	7
5	Réplica 4-Sebastián y Alejandro (tiempo). . . . .	7
6	Réplica 5-Santiago y Sebastián (tiempo). . . . .	7
7	Réplica 6-Alejandro y Santiago (tiempo). . . . .	7
8	Tabla de ANOVA para el diseño experimental. . . . .	10
9	Resultados de la prueba de Shapiro-Wilk para los residuales . . . . .	12
10	Resultados de la Prueba de Bartlett para Homogeneidad de Varianzas Material	13
11	Resultados de la Prueba de Bartlett para Homogeneidad de Varianzas Superficie	13
12	Resultados de la Prueba de Bartlett para Homogeneidad de Varianzas Bloque	13
13	Resultados del test de Durbin-Watson para la autocorrelación de los residuales	14
14	Resultados de la prueba de Duncan para el factor Material . . . . .	15
15	Resultados de la prueba de Duncan para el factor Superficie . . . . .	15

# 1 Introducción

El comportamiento del movimiento de una pelota al dejarla caer y hacerla rebotar está influenciado por diversos factores, como el material del balón y la superficie sobre la que impacta. Diferentes tipos de pelota presentan variaciones en su comportamiento según la superficie, ya que las propiedades físicas de cada material afectan la transferencia de energía durante el impacto. Sin embargo, no está del todo claro cómo estos factores y sus interacciones influyen en el desempeño de cada pelota.

Dado esto, el presente estudio busca identificar los efectos individuales y de interacción entre ambos factores, proporcionando una comprensión más completa de las dinámicas de rebote. Para ello, se empleará un Diseño de Experimentos para analizar el tiempo que tarda una pelota en dejar de rebotar.

Este estudio es relevante tanto en el ámbito deportivo como en la comprensión de las interacciones físicas en el mundo real. Permite analizar cómo el material de la pelota y la superficie de rebote afectan su comportamiento. Además, desde una perspectiva de manufactura, puede contribuir a mejorar el diseño y la producción de artículos de mayor calidad.

## 2 Planteamiento del problema

Se busca estudiar el efecto que tienen tres (3) tipos de pelotas y dos (2) superficies de rebote sobre el tiempo que tarda en dejar de rebotar una pelota. Para ello, se consideran diferentes combinaciones de miembros del equipo encargados de dejar caer la pelota y medir el tiempo, estableciendo tres combinaciones distintas.

### 2.1 Justificación del diseño

El diseño experimental seleccionado permite analizar de manera sistemática el efecto de dos factores: el tipo de pelota y la superficie de rebote, sobre el tiempo que tarda en dejar de rebotar. Se decidió incluir un bloqueo basado en la combinación de quién deja caer la pelota y quién mide el tiempo, con el fin de reducir la variabilidad asociada a diferencias individuales en la ejecución del experimento.

Al utilizar un Diseño de Experimentos, es posible identificar tanto los efectos individuales de cada factor como su posible interacción, proporcionando una comprensión más completa del fenómeno. Además, la estandarización de condiciones, como la forma en que se deja caer la pelota y el uso del mismo cronómetro, garantiza mayor precisión y consistencia en las mediciones.

## 2.2 Condiciones del experimento

Cada participante dejará caer la pelota desde una posición de pie, con los brazos extendidos al frente de manera perpendicular al torso, sin aplicar fuerza adicional más allá de la gravedad. Todas las mediciones se realizarán en un mismo día para evitar que factores ambientales influyan en los resultados.

El mismo dispositivo de medición (cronómetro de un Huawei Y9 Prime 2019) se utilizará en todas las corridas experimentales para garantizar consistencia en los tiempos registrados. Además, la combinación de quién deja caer la pelota y quién mide el tiempo será considerada como un bloque en el experimento.

## 2.3 Diseño experimental

Se hará un diseño factorial con bloques.

$$Y_{ijkl} = \mu + A_i + B_j + (AB)_{ij} + C_k + \varepsilon_{ijkl}$$

- **Unidad Experimental:** Pelotas.
- **Factores:**
  - Tipo (Material) de pelota: Pelotas de baloncesto, voleibol y micro-fútbol (factor A). Denotado con  $A_i$ , donde  $i = 1, 2, 3$ , asociados a los niveles de A como fueron mencionados.
  - Superficie de rebote: Arce (madera de cancha convencional) y baldosa (factor B). Denotado con  $B_j$ , donde  $j = 1, 2$ , asociados a los niveles de B como fueron mencionados.
- **Interacción:** Denotado como  $(AB)_{ij}$ , es el efecto combinado de ambos factores sobre la variable de respuesta.
- **Bloque:** La combinación entre un miembro del equipo que deja caer la pelota y otro que mide el tiempo (denotado con  $C_k$ ). Se tienen 3, con  $k = 1, 2, 3$ . Los niveles de C son:
  - Sebastián deja caer la pelota y Alejandro toma el tiempo.
  - Santiago deja caer la pelota y Sebastián toma el tiempo.
  - Alejandro deja caer la pelota y Santiago toma el tiempo.
- **Variable respuesta:** Tiempo en el que deja de rebotar la pelota. Se denota por  $Y_{ijkl}$ , al valor de la variable respuesta bajo el i-ésimo nivel del factor A, j-ésimo nivel del factor B, k-ésimo nivel del bloque y en la l-ésima réplica.
- $\mu$ : La media global
- $\varepsilon_{ijkl}$  : El error aleatorio del i-ésimo nivel del factor A, j-ésimo nivel del factor B, k-ésimo nivel del bloque y en la l-ésima réplica.

### 2.3.1 Supuestos y restricciones del modelo del diseño experimental

Para este diseño, se tienen los siguientes supuestos a verificar más adelante:

$$\varepsilon_{ijkl} \sim NID(0, \sigma^2)$$

Es decir;

- Los errores se distribuyen normales.
- Con  $E[\varepsilon_{ijkl}] = 0$
- Y  $Var[\varepsilon_{ijkl}] = \sigma^2$

Con la restricción de:

- $\sum_{i=1}^3 A_i = 0$
- $\sum_{j=1}^2 B_j = 0$
- $\sum_{k=1}^3 C_k = 0$
- $\sum_{i=1}^3 (AB)_{ij} = \sum_{j=1}^2 (AB)_{ij} = 0$

## 3 Ejecución del experimento

### 3.1 Proceso de aleatorización

La aleatorización se realizará dentro de cada bloque. Es decir, primero se ejecutará el experimento para un bloque específico, aplicando en él todos los tratamientos posibles. Luego, se repetirá el mismo procedimiento para los demás bloques.

En total, se llevarán a cabo  $n = 6$  réplicas, organizadas de la siguiente manera: las primeras 3 réplicas se distribuirán entre los 3 niveles de bloque (las combinaciones de quién deja caer la pelota y quién mide el tiempo). Después, se repetirá el ciclo hasta completar las 6 réplicas.

La siguiente tabla muestra la enumeración de los tratamientos. Para cada réplica, se generarán 6 números aleatorios que determinarán el orden en que se recolectarán los datos.

Superficie	Tipo de pelota		
	Baloncesto	Voleibol	Micro-fútbol
Madera	1	2	3
Baldosa	4	5	6

Tabla 1: Tabla para hacer la aleatorización.

Por ejemplo, si el primer número aleatorio es 4, esto quiere decir que en primer lugar se hará el experimento con un balón de baloncesto sobre una superficie de baldosa.

### 3.2 Toma de los datos

Los datos fueron tomados el día 3 de Febrero del presente año, en el polideportivo de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín (Campus El Volador).

Para cada réplica se generan los números aleatorios haciendo uso del R, estos se presentan en la siguiente salida:

```
[1] 1 4 3 6 2 5
[1] 5 1 6 4 2 3
[1] 5 2 4 3 6 1
[1] 3 6 5 4 2 1
[1] 2 3 1 5 4 6
[1] 5 2 1 6 3 4
```

Con los números aleatorios generados, se llevó a cabo el experimento, la evidencia fotográfica de este proceso se puede corroborar en la carpeta de Drive anexada al final de este informe.

A continuación se presentan los datos recolectados, las unidades de la variable respuesta  $Y$  están dadas en segundos con una precisión de centésimas.

Cada tabla representa una de las réplicas, y el valor de  $Y$  tiene un subíndice de la forma  $Y_0$ , en el paréntesis está el orden en el que fue tomado el tiempo expuesto a ese tratamiento dentro de la réplica, por ejemplo, en la tabla 2, donde se ven los datos de la primera réplica, el tratamiento que involucra a la pelota de Voleibol en la superficie de madera, la medida de la variable respuesta fue tomada de quinta dentro de la réplica.

Superficie	Tipo de pelota		
	Baloncesto	Voleibol	Micro-fútbol
Madera	6 : 47 <sub>(1)</sub>	6 : 87 <sub>(5)</sub>	4 : 60 <sub>(3)</sub>
Baldosa	6 : 57 <sub>(2)</sub>	7 : 65 <sub>(6)</sub>	4 : 80 <sub>(4)</sub>

Tabla 2: Réplica 1-Sebastián y Alejandro (tiempo).

Superficie	Tipo de pelota		
	Baloncesto	Voleibol	Micro-fútbol
Madera	5 : 50 <sub>(2)</sub>	5.96 <sub>(5)</sub>	4 : 42 <sub>(6)</sub>
Baldosa	6 : 94 <sub>(4)</sub>	7 : 73 <sub>(1)</sub>	5 : 00 <sub>(3)</sub>

Tabla 3: Réplica 2-Santiago y Sebastián (tiempo).

Superficie	Tipo de pelota		
	Baloncesto	Voleibol	Micro-fútbol
Madera	6 : 30 <sub>(6)</sub>	7 : 08 <sub>(2)</sub>	4 : 40 <sub>(4)</sub>
Baldosa	5 : 83 <sub>(3)</sub>	7 : 57 <sub>(1)</sub>	4 : 83 <sub>(5)</sub>

Tabla 4: Réplica 3-Alejandro y Santiago (tiempo).

Superficie	Tipo de pelota		
	Baloncesto	Voleibol	Micro-fútbol
Madera	5 : 50 <sub>(6)</sub>	6 : 07 <sub>(5)</sub>	5 : 85 <sub>(1)</sub>
Baldosa	6 : 54 <sub>(4)</sub>	6 : 93 <sub>(3)</sub>	5 : 17 <sub>(2)</sub>

Tabla 5: Réplica 4-Sebastián y Alejandro (tiempo).

Superficie	Tipo de pelota		
	Baloncesto	Voleibol	Micro-fútbol
Madera	5 : 87 <sub>(3)</sub>	6 : 18 <sub>(1)</sub>	4 : 47 <sub>(2)</sub>
Baldosa	6 : 94 <sub>(5)</sub>	6 : 89 <sub>(4)</sub>	4 : 63 <sub>(6)</sub>

Tabla 6: Réplica 5-Santiago y Sebastián (tiempo).

Superficie	Tipo de pelota		
	Baloncesto	Voleibol	Micro-fútbol
Madera	5 : 89 <sub>(3)</sub>	6 : 03 <sub>(2)</sub>	5 : 01 <sub>(5)</sub>
Baldosa	7 : 05 <sub>(6)</sub>	8 : 14 <sub>(1)</sub>	5 : 08 <sub>(4)</sub>

Tabla 7: Réplica 6-Alejandro y Santiago (tiempo).



Al finalizar el proceso de aleatorizar y recolectar los datos, se procede mostrar en un boxplot como se comportan estos por material, superficie y la interacción entre estos:

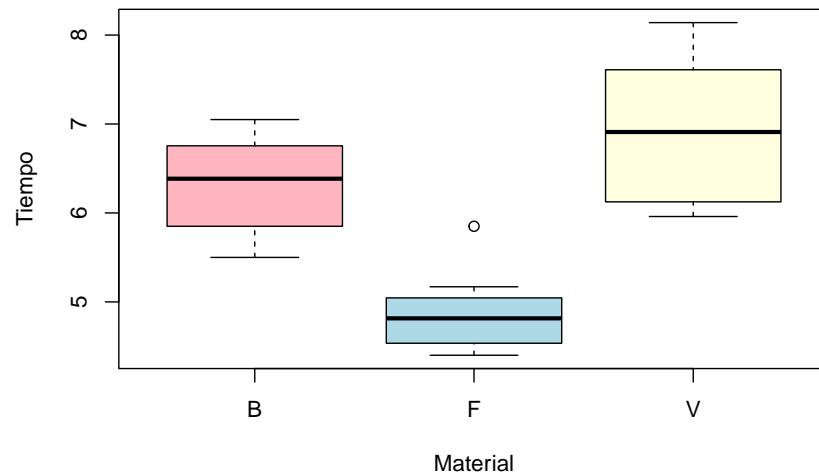


Figura 1: Gráfico Box-Plot de Material

Se puede observar como en general el balón de vóleybol es el que más tiempo tarda en detenerse, y el de micro-fútbol aquel que tarda menos.

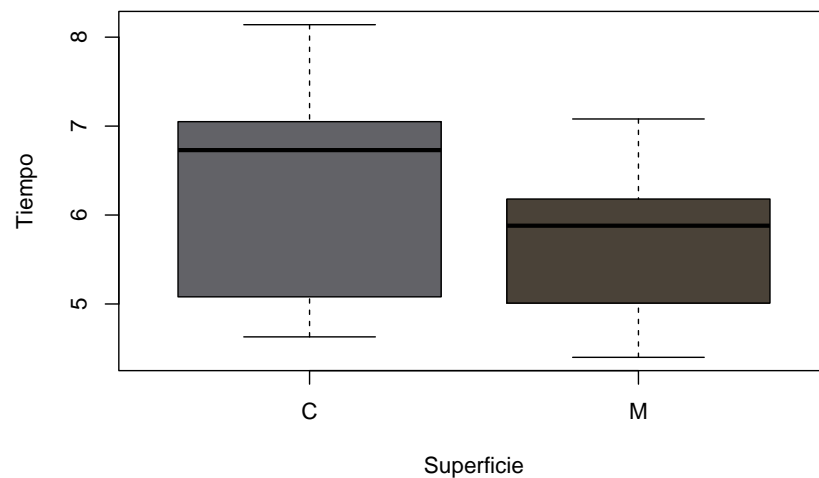


Figura 2: Gráfico Box-Plot de Superficie

Para las superficies podemos ver como la baldosa tiende a ser mayor y tener mayor

variabilidad que la madera. Lo que podría dar un indicio de que la madera tiende a reducir el tiempo comparado con la baldosa.

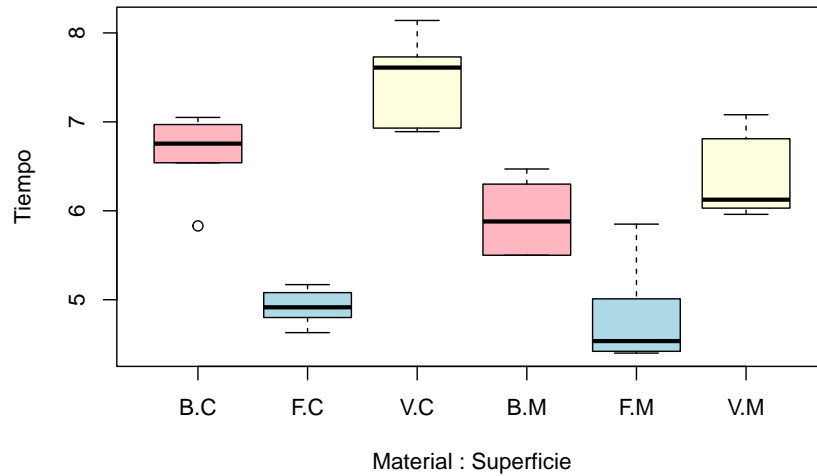


Figura 3: Gráfico Box-Plot de Interacción

Es apreciable como el balón de micro-fútbol tiene los tiempos más bajos independientemente de la superficie, lo cual es esperable debido a que el balón no está hecho para rebotar. Por otro lado, el balón de vóleibol tiene los tiempos más altos, particularmente en baldosa. En general comparado con un balón de baloncesto, es esperable que este último tienda a tener menos tiempo de rebote debido a su estructura, gracias a la elasticidad que tiene este. Algo importante a contrastar es que la madera tiende a reducir los tiempos comparado con la baldosa.

Dicho lo anterior, se propondrá una gráfica de interacción para contrastar lo antes enunciado.

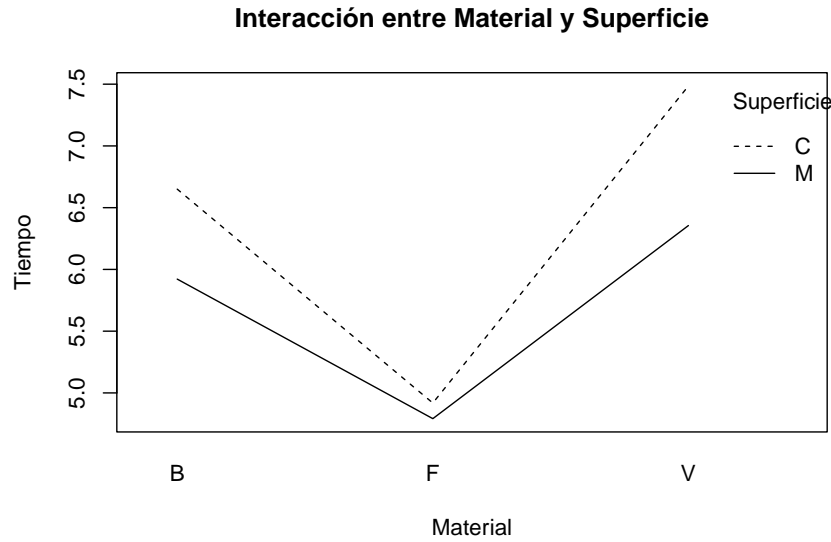


Figura 4: Gráfico de Interacción

Corroboramos que la baldosa es la superficie que tiende a tener los tiempos más altos, esto en particular con el balón de vóleybol y baloncesto, así mismo, se observa que el balón de micro-fútbol es aquel que menos tiempo de rebote tiene independientemente de la superficie, siendo esto esperable.

## 4 Verificación de supuestos

### 4.1 ANOVA del diseño

Se propondrá la siguiente tabla ANOVA de nuestro modelo.

Fuente	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
Material	2	26.855	13.427	67.426	1.97e-11 ***
Superficie	1	3.940	3.940	19.786	0.000125 ***
Bloque	2	0.357	0.178	0.896	0.419637
Material:Superficie	2	1.530	0.765	3.842	0.033554 *
Residuales	28	5.576	0.199	-	-

Tabla 8: Tabla de ANOVA para el diseño experimental.

La cual servirá para validar las siguientes pruebas de hipótesis para la igualdad de medias:

$$\begin{cases} H_0 : A_1 = A_2 = A_3 = 0 \\ H_1 : A_i \neq 0, \text{ para al menos un } i \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : B_1 = B_2 = 0 \\ H_1 : B_j \neq 0, \text{ para al menos un } j \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : C_1 = C_2 = C_3 = 0 \\ H_1 : C_k \neq 0, \text{ para al menos un } k \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : (AB)_{ij} = 0 \\ H_1 : (AB)_{ij} \neq 0 \text{ para algún } (i,j) \end{cases}$$

Donde,

- Nivel de significancia de la prueba:  $\alpha = 0.05$ .
- Estadístico de prueba:

$$- F = \frac{MS_A}{MSE} \sim F_{(2),(28)} \text{ Bajo } H_0.$$

$$- F = \frac{MS_B}{MSE} \sim F_{(1),(28)} \text{ Bajo } H_0.$$

$$- F = \frac{MS_C}{MSE} \sim F_{(2),(28)} \text{ Bajo } H_0.$$

$$- F = \frac{MS_{AB}}{MSE} \sim F_{(2),(28)} \text{ Bajo } H_0.$$

- Región de rechazo:  $F_{cal} > F_{0.05,(df_{trat}),(df_{MSE})}$ , equivalente a  $VP < \alpha$ .

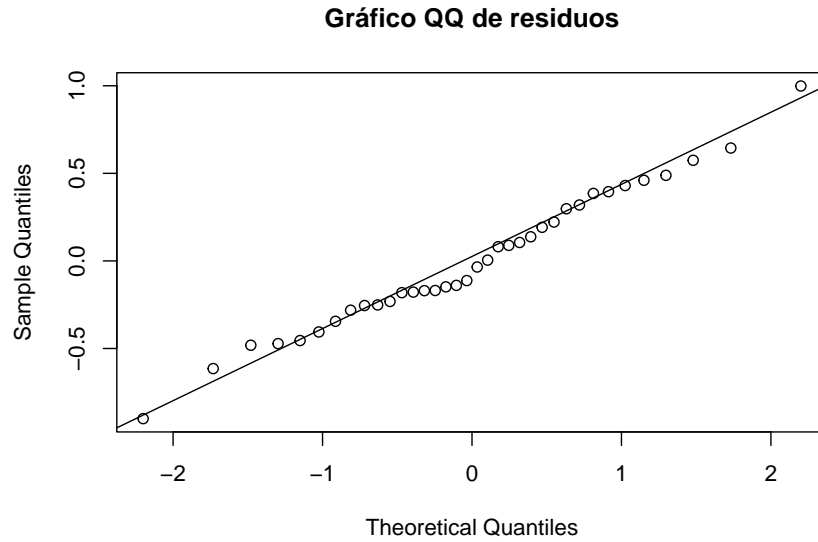
Se puede observar con los valores-p de la tabla que:

- El material y superficie son significativos, es decir, la media de estos factores son diferentes.
- La interacción material y superficie es significativa, lo que indica que la diferencia entre los materiales depende de la superficie.
- El bloque no es significativo, indicando que no hay evidencia de que los bloques tengan un efecto en las medias.

## 4.2 Normalidad

Para verificar este supuesto, se propondrá el siguiente juego de hipótesis que será evaluado por medio de la prueba de Shapiro-Wilk, y adicionalmente, se mostrará un qq-plot para verificar el comportamiento de los datos.

$$\begin{cases} H_0 : \varepsilon_{ijkl} \sim Normal \\ H_1 : \varepsilon_{ijkl} \not\sim Normal \end{cases}$$



Dado por el qq-plot, podríamos llegar a pensar que nuestros errores tienen distribución normal, observable dado que la mayoría de los datos están concentrados en la línea de 45 grados, para corroborar esto, usaremos la prueba de Shapiro antes dicha, en donde obtenemos que:

Tabla 9: Resultados de la prueba de Shapiro-Wilk para los residuales

	Estadístico.W	Valor.p
W	0.9867921	0.936705

Obteniendo por medio de esta prueba un  $VP = 0.936705$ , comparado con un nivel de significancia del  $\alpha = 0.05$ , podemos concluir que no hay evidencia suficiente para rechazar  $H_0$ , dado que  $VP = 0.936705 > \alpha = 0.05$ , por lo tanto, nuestros errores tienen distribución normal.

### 4.3 Homogeneidad de varianza

Ahora bien, como se mostró anteriormente por medio de la prueba de Shapiro, nuestros errores tienen una distribución normal, gracias a esto se puede proceder usando la prueba de Bartlett, y proponiendo el siguiente juego de hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma^2 \\ H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \text{ para al menos un par } (i,j) \end{cases}$$

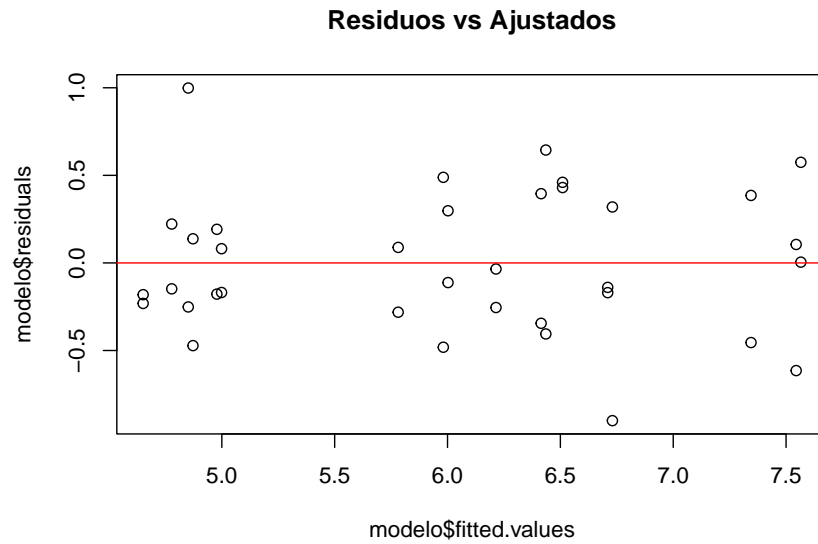


Tabla 10: Resultados de la Prueba de Bartlett para Homogeneidad de Varianzas Material

	Estadística.de.Prueba	Grados.de.Libertad	Valor.P
Bartlett's K-squared	0.2127	2	0.8991

Tabla 11: Resultados de la Prueba de Bartlett para Homogeneidad de Varianzas Superficie

	Estadística.de.Prueba	Grados.de.Libertad	Valor.P
Bartlett's K-squared	0.0694	1	0.7922

Tabla 12: Resultados de la Prueba de Bartlett para Homogeneidad de Varianzas Bloque

	Estadística.de.Prueba	Grados.de.Libertad	Valor.P
Bartlett's K-squared	1.813	2	0.4039

Al comparar las varianzas discriminadas por cada factor con un nivel de significancia del  $\alpha = 0.05$ , obtenemos evidencia suficiente para no rechazar  $H_0$ , es decir, que nuestro modelo cumple el supuesto de homogeneidad de varianza.

## 4.4 Incorrelación en los residuos

Para comprobar este supuesto, se propone el siguiente juego de hipótesis, donde buscamos averiguar si tienen o no correlación. Dicho lo anterior, antes hacer la prueba de Durbin-Watson, se quiere proponer también un análisis por medio de la gráfica de “residuos vs orden”, teniendo en cuenta que, los datos fueron medidos de forma ordenada y así mismo digitados en R.

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

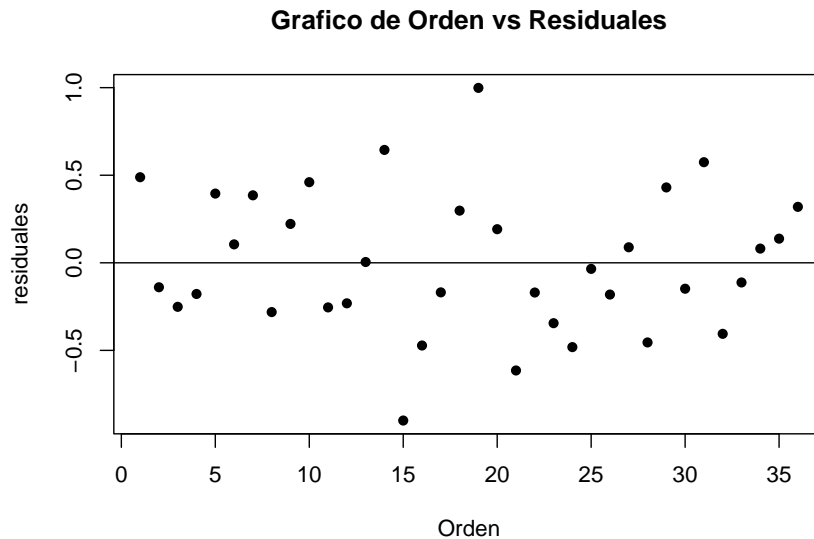


Figura 5: Grafico de Orden vs Residuales

Dado el gráfico anterior, podemos observar como no hay tendencias o patrones, indicando un primer indicio sobre nuestro supuesto de independencia de los errores del modelo.

Dicho lo anterior, se procede a realizar la prueba de Durbin-Watson:

Tabla 13: Resultados del test de Durbin-Watson para la autocorrelación de los residuales

Estadístico.Durbin.Watson	Valor.p
1.955635	0.764

Podemos observar como obtuvimos un  $VP = 0.764$  que al compararlo con un nivel de significancia de  $\alpha = 0.05$ , podemos concluir que no existe evidencia estadística suficiente que permita rechazar  $H_0$ , por lo tanto, se concluye que los errores no tienen correlación de orden 1, ayudando al primer indicio suministrado por el gráfico.

## 5 Pruebas de Duncan

Para este apartado, se propondrán dos pruebas de Duncan para analizar las diferencias significativas en los tiempos según los factores “Material” y “Superficie”.

Tabla 14: Resultados de la prueba de Duncan para el factor Material

	Tiempo	groups
V	6.920000	a
B	6.285833	b
F	4.855000	c

Para el factor “Material”, podemos ver que los grupos son diferentes, indicando que hay diferencias significativas entre los tres tipos de balones, apreciable en los tiempos promedios evidenciados.

Así mismo con el factor “Superficie”.

Tabla 15: Resultados de la prueba de Duncan para el factor Superficie

	Tiempo	groups
C	6.351111	a
M	5.689444	b

Los grupos diferentes indican que hay una diferencia significativa entre la baldosa y la madera.



## 6 Apéndice

Enlace del drive con evidencias fotográficas:

<https://drive.google.com/drive/folders/13IP1pjl0BGcfvL1504Gxxalt8KJ3qS6D?usp=sharing>

## Referencias

Luque-Calvo, P.L. (2017). *Escribir un Trabajo Fin de Estudios con R Markdown*. Disponible en <http://destio.us.es/calvo>.

RStudio Team. (2015). *RStudio: Integrated Development Environment for R*. RStudio, Inc., Boston, MA.