OS202 – TD3: Linear programming

Santiago Florido Gomez

***Abstract*—This report presents Ford–Fulkerson applications on flow networks, including maximum-flow computations, minimum cuts, and unit-capacity models for matching and disjoint-path problems.**

I. Introduction

In the present document, we will present applications of flow network modeling aimed at optimizing the circulation of resources in systems with limited capacities, mainly by applying the Ford–Fulkerson algorithm. With this objective, we seek to find maximum flows (i.e., the maximum throughput), detect bottlenecks, and enable assignment and matching in resource-allocation problems, such as the lock-and-key problem for opening a safe. Finally, we consider the use of Ford–Fulkerson on graphs with unit capacities in order to find disjoint routes in systems that require redundancy and robustness.

II. Relaxation linéaire et résolution préliminaire par la méthode graphique

On considère le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{array}{ll} \max & F = 2x + y \\ \text{s.c.} & y \geq x - 4, \\ & y \leq 8, \\ & 8x + 5y \leq 56, \\ & x, y \in \mathbb{N}. \end{array} \tag{1}$$

La *relaxation linéaire* s'obtient en remplaçant la contrainte d'intégralité $x, y \in \mathbb{N}$ de (1) par une contrainte de réel.

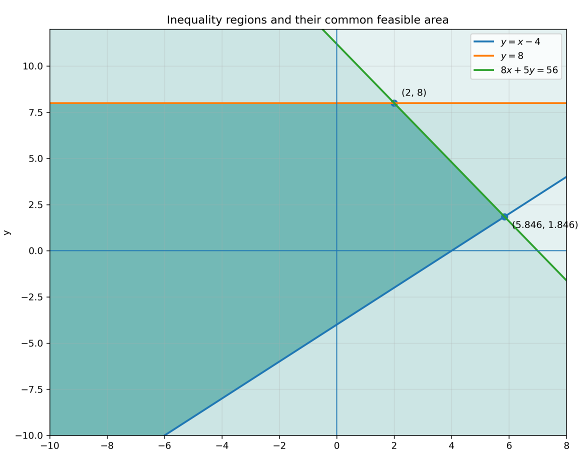

Fig. 1. Représentation graphique des contraintes et de la région réalisable (Q1).

Pour la représentation graphique, on trace les droites associées aux contraintes actives :

$$y = x - 4, \tag{2}$$
$$y = 8, \tag{3}$$
$$8x + 5y = 56. \tag{4}$$

La région réalisable est l'intersection des demi-plans : au-dessus de (2), en dessous de (3), et en dessous de (4).

Les points candidats (sommets) se trouvent à l'intersection des droites (2)–(4).

a) Intersection de (3) *et* (4)*.:* En posant $y = 8$ dans (4) :

$$8x + 5 \cdot 8 = 56 \;\Rightarrow\; 8x = 16 \;\Rightarrow\; x = 2, \tag{5}$$

d'où

$$A = (2, 8). \tag{6}$$

b) Intersection de (2) *et* (4)*.:* En substituant $y = x - 4$ (depuis (2)) dans (4) :

$$\begin{aligned} 8x + 5(x - 4) &= 56, \\ 13x - 20 &= 56, \\ 13x &= 76, \\ x &= \frac{76}{13}. \end{aligned} \tag{7}$$

puis

$$y = x - 4 = \frac{76}{13} - 4 = \frac{24}{13} \quad \Rightarrow \quad B = \left(\frac{76}{13}, \frac{24}{13}\right). \tag{8}$$

c) Intersection de (2) *et* (3)*.:* On obtient $8 = x - 4$, donc $x = 12$, ce qui donne le point $(12, 8)$, mais ce point viole (4) car $8 \cdot 12 + 5 \cdot 8 = 136 > 56$. Il n'est donc pas réalisable.

On calcule $F = 2x + y$ aux points réalisables (6) et (8).

d) Au point A.:

$$F(A) = 2 \cdot 2 + 8 = 12. \tag{9}$$

e) Au point B.:

$$F(B) = 2 \cdot \frac{76}{13} + \frac{24}{13} = \frac{152 + 24}{13} = \frac{176}{13}. \tag{10}$$

Comme (10) est supérieur à (9), le maximum de la relaxation est atteint en B.

La solution optimale est :

$$(x^\star, y^\star) = \left(\frac{76}{13}, \frac{24}{13}\right), \qquad F^\star = \frac{176}{13}. \tag{11}$$

On considère le même ensemble de contraintes et la relaxation linéaire associée :

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{aligned} &(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x-4,\ y \leq 8, \\ &\qquad\qquad 8x+5y \leq 56,\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

et l'ensemble faisable entier :

$$\mathcal{F}_{\mathbb{N}} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}} \cap \mathbb{N}^2. \quad (13)$$

Pour l'objectif

$$F(x,y) = 2x + y, \quad (14)$$

la solution optimale de la relaxation linéaire (obtenue précédemment) est

$$(x^\star_{\mathbb{R}}, y^\star_{\mathbb{R}}) = \left(\frac{76}{13}, \frac{24}{13}\right), \qquad F^\star_{\mathbb{R}} = \frac{176}{13}. \quad (15)$$

Comme $(x^\star_{\mathbb{R}}, y^\star_{\mathbb{R}}) \notin \mathbb{N}^2$, cette solution n'est pas admissible pour le problème entier.

On peut toutefois en déduire une *borne supérieure* pour le problème entier : puisque (13) implique $\mathcal{F}_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, on a

$$F^\star_{\mathbb{N}} \leq F^\star_{\mathbb{R}} = \frac{176}{13}. \quad (16)$$

De plus, pour tout $(x,y) \in \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, la valeur (14) est entière, donc (16) donne

$$F^\star_{\mathbb{N}} \leq \left\lfloor \frac{176}{13} \right\rfloor = 13. \quad (17)$$

En exhibant un point entier faisable atteignant cette borne, par exemple

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (5,3), \quad (18)$$

on vérifie l'admissibilité dans (12) via

$$3 \geq 5-4, \qquad 3 \leq 8, \qquad 8\cdot 5 + 5 \cdot 3 = 55 \leq 56, \quad (19)$$

et la valeur de (14) vaut

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = 2 \cdot 5 + 3 = 13. \quad (20)$$

En combinant (17) et (20), on conclut

$$\begin{aligned} F^\star_{\mathbb{N}} &= 13, \\ (x^\star_{\mathbb{N}}, y^\star_{\mathbb{N}}) &= (5,3). \end{aligned} \quad (21)$$

A. G modification

On remplace l'objectif par

$$G(x,y) = x + 6y. \quad (22)$$

Les sommets pertinents de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ (intersections des contraintes actives) sont

$$\begin{aligned} &P_1 = (0,0), \quad P_2 = (4,0), \quad P_3 = (0,8), \\ &P_4 = (2,8), \quad P_5 = \left(\frac{76}{13}, \frac{24}{13}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

On évalue (22) en ces sommets :

$$G(P_1) = 0, \quad (24)$$
$$G(P_2) = 4, \quad (25)$$
$$G(P_3) = 48, \quad (26)$$
$$G(P_4) = 2 + 6 \cdot 8 = 50, \quad (27)$$
$$G(P_5) = \frac{76}{13} + 6 \cdot \frac{24}{13} = \frac{220}{13}. \quad (28)$$

Comme (27) est la plus grande valeur parmi (24)–(28), la relaxation linéaire est optimisée en

$$(x^\star_{\mathbb{R}}, y^\star_{\mathbb{R}}) = (2,8), \qquad G^\star_{\mathbb{R}} = 50. \quad (29)$$

On peut alors déduire immédiatement le résultat pour le problème entier : le point (29) est déjà dans $\mathbb{N}^2$, donc il est faisable pour (13). Comme la relaxation fournit une borne supérieure et que cette borne est atteinte par un point entier, on obtient

$$G^\star_{\mathbb{N}} = G^\star_{\mathbb{R}} = 50 \quad \text{et} \quad (x^\star_{\mathbb{N}}, y^\star_{\mathbb{N}}) = (2,8). \quad (30)$$

B. Mise en forme standard et forme canonique du tableau initial

Pour la question 3 de l'exercice 1, on écrit la relaxation sous forme standard ($Ax = b,\ x \geq 0$) en posant

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3, x_4, x_5 \geq 0. \quad (31)$$

La première contrainte se réécrit

$$y \geq x - 4 \iff x - y \leq 4, \quad (32)$$

puis, avec variables d'écart :

$$\begin{aligned} \max \quad & F = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ & x_2 + x_4 = 8, \\ & 8x_1 + 5x_2 + x_5 = 56, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned} \quad (33)$$

C. Forme Matricielle

En prenant la base initiale $B = \{x_3, x_4, x_5\}$, la forme canonique du tableau associé est

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 + x_2, \\ x_4 &= 8 - x_2, \\ x_5 &= 56 - 8x_1 - 5x_2, \\ F &= 2x_1 + x_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Sous forme matricielle,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 56 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

III. Exercice 2 – Méthode du simplexe

On considère le système (forme standard) :

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ & x_2 + 3x_3 + x_5 = 6, \\ & 2x_1 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 7, \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{aligned} \tag{36}$$

A. Données matricielles A, b, c

Le problème (36) s'écrit sous la forme $Ax = b$, $x \geq 0$, $\min z = c^\top x$, avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

La solution proposée est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 2, 0, 0, 1). \tag{38}$$

B. Vérification : pourquoi c'est une solution de base

On considère

$$B = \{x_1, x_3, x_6\}, \qquad N = \{x_2, x_4, x_5\}. \tag{39}$$

La matrice de base (colonnes $1, 3, 6$ de A) est

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \det(A_B) = 3 \neq 0. \tag{40}$$

Donc A_B est inversible : B est bien une base.

Par définition, la solution de base associée à B vérifie $x_N = 0$, donc

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{41}$$

On retrouve ainsi exactement

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2, 0, 2, 0, 0, 1). \tag{42}$$

C'est donc bien une solution de base (et elle est réalisable car toutes les composantes sont ≥ 0).

C. Tableau canonique et qualité de la base

En exprimant les variables de base en fonction des variables hors base (x_2, x_4, x_5), on obtient la forme canonique :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \frac{7}{3}x_2 + x_4 + \frac{1}{3}x_5, \\ x_3 &= 2 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5, \\ x_6 &= 1 - \frac{13}{3}x_2 - 4x_4 - \frac{1}{3}x_5, \\ z &= 14 + 2x_4 - x_5. \end{aligned} \tag{43}$$

La base est réalisable (valeurs de base $2, 2, 1 \geq 0$). La valeur associée est

$$z = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 14. \tag{44}$$

Elle n'est pas optimale pour un problème de minimisation, car le coût réduit de x_5 dans (43) vaut $-1 < 0$.

D. Simplexe depuis cette base

Variable entrante : x_5 (coût réduit négatif). Test du rapport :

$$x_3 = 2 - \frac{1}{3}x_5, \quad x_6 = 1 - \frac{1}{3}x_5 \ \Rightarrow\ x_5 \leq 6,\ x_5 \leq 3. \tag{45}$$

La variable sortante est x_6. Après pivot (x_5 entre, x_6 sort), on obtient :

$$\begin{aligned} x_5 &= 3 - 13x_2 - 12x_4 - 3x_6, \\ x_1 &= 3 - 2x_2 - 3x_4 - x_6, \\ x_3 &= 1 + 4x_2 + 4x_4 + x_6, \\ z &= 11 + 13x_2 + 14x_4 + 3x_6. \end{aligned} \tag{46}$$

Tous les coûts réduits des variables hors base (x_2, x_4, x_6) sont non négatifs, donc la solution optimale est atteinte pour $x_2 = x_4 = x_6 = 0$, soit

$$x^\star = (3, 0, 1, 0, 3, 0), \qquad z^\star = 11. \tag{47}$$

IV. Exercice 4 – Résolution par implémentation du simplexe

Les deux problèmes ont été résolus avec le script Python `tp3/ex4_ex5.py`, qui utilise la classe `Tableau` et la méthode `addSlackAndSolve()`.

A. Problème 1

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 8x_1 + 6x_2 \\ \text{s.c.} \quad & 5x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ & x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Résultat obtenu :

$$x_1^\star = 3, \quad x_2^\star = 5, \quad z^\star = 54. \tag{49}$$

B. Problème 2

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.c.} \quad & -3x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Résultat obtenu :

$$x_1^\star = 2, \quad x_2^\star = 3, \quad z^\star = 8. \tag{51}$$

V. Exercice 5 – Dualité et écarts complémentaires

Le problème primal est :

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z(x) = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.c.} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 3, \\
& 2x_1 - x_2 \geq 5, \\
& x_1 + 4x_2 \geq 6, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{52}
$$

A. Dual

Comme le primal est de type min avec contraintes $\geq$, le dual est :

$$
\begin{aligned}
\max \quad & w = 3y_1 + 5y_2 + 6y_3 \\
\text{s.c.} \quad & 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2, \\
& y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 3, \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{53}
$$

B. Contraintes d'écarts complémentaires

$$x_1\big(2 - (2y_1 + 2y_2 + y_3)\big) = 0, \tag{54}$$

$$x_2\big(3 - (y_1 - y_2 + 4y_3)\big) = 0, \tag{55}$$

$$y_1(2x_1 + x_2 - 3) = 0, \tag{56}$$

$$y_2(2x_1 - x_2 - 5) = 0, \tag{57}$$

$$y_3(x_1 + 4x_2 - 6) = 0. \tag{58}$$

C. Vérification des deux points demandés

a) $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.: Ce point est réalisable pour (52). Il n'est pas une solution de base (une seule contrainte active, $C2$), et

$$z(3, 1) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9. \tag{59}$$

Il n'est donc pas optimal.

b) $x_1 = \frac{26}{9}$, $x_2 = \frac{7}{9}$.: Ce point est réalisable et de base (contraintes actives $C2$ et $C3$, linéairement indépendantes). Sa valeur est

$$z\left(\frac{26}{9}, \frac{7}{9}\right) = 2 \cdot \frac{26}{9} + 3 \cdot \frac{7}{9} = \frac{73}{9} \approx 8.111111. \tag{60}$$

Comme il s'agit du minimum sur les sommets réalisables, il est optimal :

$$x^\star = \left(\frac{26}{9}, \frac{7}{9}\right), \qquad z^\star = \frac{73}{9}. \tag{61}$$