Estructuras Discretas
Tarea 3

Arroyo Lozano Santiago
Becerril Lara Francisco Javier
García Chavelas Jonás

25 Octubre 2019

1 Indución matemática

1.1 Demostrar $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base ($n = 0$)

$$0^2 = \frac{0(0+1)}{6}$$
$$0 = 0$$

$\therefore$ Se cumple el Caso Base

$H.I.$ $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$P.I.$ $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \qquad \text{(Por } H.I.\text{)}$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} \qquad \text{(Desarrollamos)}$$
$$= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \qquad \text{(Factor Común)}$$
$$= \frac{(n+1)(2^2 + 7n + 6)}{6} \qquad \text{(Desarrollamos)}$$
$$= 2^2 + 7n + 6 = \frac{(2n+4)(2n+3)}{2} \qquad \text{(Factor Común)}$$
$$= \frac{(2n+4)(2n+3)}{2} = (n+2)(2n+3) \qquad \text{(Dividimos)}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad \text{(Desarrollamos)}$$
$$\therefore 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} \qquad \text{(Conclusión)}$$

Como se cumple el Caso Base y el $P.I.$ Queda demostrado. ■

1.2 Para n personas hay $\frac{n(n-1)}{2}$ saludos

Inducción sobre n
Sabemos que cada persona que llega a la fiesta saluda a todos menos a si misma, entonces:
$P.D.$ $1+2+...+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$
Caso Base $(n=2)$

$$2-1=\frac{2(2-1)}{2}$$

$$1=\frac{2}{2}=1$$

$\therefore$ Se cumple el Caso Base

$H.I.$ $1+2+3+...+n-1=\frac{n(n-1)}{2}$
$P.I.$ $1+2+...+n-1+(n+1)-1=\frac{n+1(n+1-1)}{2}$

$$1+2+...+n-1+(n+1)-1=1+2+...+n-1+n \quad (1)$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}+n \quad \text{(Por } H.I.\text{)}$$

$$=\frac{n(n-1)+2n}{2} \quad \text{(Sumamos } n\text{)}$$

$$=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n^2+n}{2} \quad \text{(Desarrollamos)}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{(n+1)n}{2} \quad \text{(Conmutatividad)}$$

Sumamos y restamos 1, manteniendo la igualdad

$$=\frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \quad (2)$$

$$\therefore 1+2+...+n-1+(n+1)-1=\frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \quad \text{(Conclusión)}$$

Como se cumple el Caso Base y el $P.I.$ Queda demostrado. ■

1.3 Considera n fórmulas de la lógica proposicional $\varphi_1, \varphi_2 ... \varphi_n$

Inducción sobre n
Caso Base $(n=1)$
$\rightarrow$ Como $\forall_i \in \{1\}\mathcal{I}(\varphi_i)=1$, entonces $\mathcal{I}(\varphi_i)=1$
$\leftarrow$ Como $\mathcal{I}(\varphi_i)=1$ y $1\in\{1\}$, entonces $1=i$, tal que $\mathcal{I}(\varphi_i)=1$
$\therefore$ Se cumple el Caso Base

$H.I.$ $\mathcal{I}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)=1$
$P.I.$ $\mathcal{I}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n \wedge \varphi_{n+1})=1 \leftrightarrow \forall_i \in \{1,...,n,n+1\ \}, \mathcal{I}(\varphi_i)=1$

$$\textit{Sabemos que } \mathcal{I}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)=1 \quad \text{(Por } H.I.\text{)}$$

$$\textit{es decir, } \mathcal{I}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)=1=\top, \textit{entonces} \quad (3)$$

$$\top \vee \mathcal{I}(\varphi_i)=1. \quad (4)$$

Como deducimos que esta disyunción es cierta, entonces $\mathcal{I}(\varphi_{n+i})=1$ y como $\mathcal{I}(\varphi_i)=1$, entonces $n+1=i\in\{1,...,n,n+1\}$
Como se cumple el Caso Base y el $P.I.$ Queda demostrado. ■

2 Recursión

Sea a una hoja del arbol binario y t1 y t2 arboles binarios

2.1 Preorden

```
preorden:: ArbolBinario -> [a]
preorden NIL = []
preorden t1 a t2 = [a] ++ (preorden t1 ++ preorden t2)
```

2.2 Inorden

```
postorden:: ArbolBinario -> [a]
postorden NIL = []
postorden t1 a t2 = (postorden t1 ++ postorden t2 ++ [a])
```

2.3 Postorden

```
inorden:: ArbolBinario -> [a]
inorden NIL = []
inorden t1 a t2 = (inorden t1 ++ [a] ++ inorden t2)
```

2.4 Hanoi

Para definir la función recursiva del juego Hanoi debemos primero definir la palabra Hanoi.
"Hacer el Hanoi" se refiere a mover toda la pirámide de n piezas a su destino final.
Para lograrlo hacemos el hanoi de $n-1$ (Primer hanoi) para liberar la pieza n y moverla hasta la última columna (1 movimiento).
Luego el hanoi de $n-1$ una última vez para acomodarlo encima de n (Segundo hanoi).
Hicimos 2 veces el hanoi de $n-1$ más sólo un movimiento de la pieza n.
Y nuestro caso base sería 0, porque con 0 piezas, 0 movimientos, lo que nos da:

```
hanoi:: Int -> Int
hanoi 0 = 0
hanoi n = 2 * hanoi (n-1) + 1
```

2.5 Sea $S = \{w$ el conjunto de cadenas 1 y 0 | tiene número par de ceros $\}$

- $0 \in S$, $1 \in S$
- Si $a \in S$, entonces a tiene $n|n\ sea\ par \in \mathbb{N}$ cantidad de 0 concatenados por cualquier lado
- Si $b \in S$, entonces b tiene $n|n \in \mathbb{N}$ cantidades de 1 concatenados por cualquier lado
- Si $c \in S$, $c = 0b0 \vee ba \vee ab \vee cc \vee ccc$
- Éstas y sólo éstas son expresiones de S

2.5.1 Principio de Inducción estructural para el conjunto S

Sea que el conjunto S tiene número par de ceros, para demostrar que w tenga número par de ceros para cada $w \in S$, es suficiente probar $P(a)$

3 Inducción estructural

3.0.1 rev(xs ++ ys) = rev(ys) ++ rev(xs)

Procederemos a demostrar por Induccion
Induccion sobre xs.
a) Caso Base. $xs = [\,]$

$rev([\,] + +ys) = rev(ys + +rev([\,])$ (Por definicion de reversa.)
$rev(ys) = rev(ys) + +[\,]$
$rev(ys) = rev(ys)$

$\therefore$ Se cumple el Caso Base

b) Hipotesis de Induccion. $rev(xs + +ys) = rev(ys) + +rev(xs)$

c) Paso Inductivo. Por Demostrar $rev(a : xs + +ys) = rev(ys) + +rev(a : xs)$

$rev(ys) + +rev(a : xs) = rev(ys) + +rev(xs) + +[a]$ (Por definicion de reversa)
$= rev(xs + +ys) + +[a]$ (Por Hipotesis de Induccion)
$= rev(a : xs + +ys)$ (Por conmutatividad y definicion de reversa)
$\therefore$ Se cumple el principio de Induccion Estructural ■

3.0.2 rev(rev(l)) = l

Procederemos a demostrar por Induccion
Induccion sobre l.
a) Caso Base. $l = [\,]$

$rev(rev[\,]) = rev([\,])$ (Por definicion de reversa.)
$[\,] = [\,]$ (Por definicion de reversa.)

$\therefore$ Por lo tanto se cumple el Caso Base

b) Hipotesis de Induccion. $rev(rev(l)) = l$

c) Paso Inductivo. Por Demostrar $rev(rev(a : l)) = a : l$

$rev(rev(a : l)) = rev(rev(l) + +a)$ (Por definicion de reversa)
$= l + +a = a : l$ (Por Hipotesis de Induccion y concatenacion)·

$\therefore$ Se cumple el principio de Induccion Estructural ■

3.0.3 desorden(T) = rev(preorden(T))

Procederemos a demostrar por Induccion
Induccion sobre T.
a) Caso Base. $T = NIL$

$desorden(NIL) = rev(preorden(NIL))$
$[\,] = rev([\,])$ (Por definicion de desorden)
$[\,] = [\,]$ (Por definicion de reversa)

$\therefore$ Se cumple el Caso Base

b) Hipotesis de Induccion $desorden((T)) = reversa(preorden(T))$

c)Paso Inductivo.
Por Demostrar $desorden(mktree(T_i, T_R, NIL)) = reversa(preorden(T_i, T_R, NIL))$

$= desorden(NIL) + +desorden(T_i) + +[T_R]$ (Definicion de desorden.)
$= [\,] + +reversa(preorden(T_i)) + +[T_R]$ (Por Hipotesis de Induccion.)
$= reversa([T_i] + +[\,] + +[\,]) + +[T_R]$
$= reversa([T_R] : [T_i] + +[\,]) = reversa(preorden(T_i, T_R, NIL))$

$\therefore$ Por lo tanto se cumple el principio de Induccion Estructural $\blacksquare$

3.0.4 2×sum(l) = sum(doble(l))

Demostración por Principio de Inducción sobre l.
Caso base ($l = [\,]$)
$2 \times sum([\,]) = sum(doble([\,]))$
$0 = sum([\,])$
$0 = 0$

$\therefore$ Se cumple el caso base. Hipótesis de inducción: $2 \times sum(l) = sum(doble(l))$ Paso inductivo: $2 \times sum(a : l) = sum(doble(a : l))$
$2 \times (a : l) = 2 \times (a + sum(l))$
Por otro lado: $= 2 \times a + 2 \times sum(l)$
$= (2 \times a) + sum(doble(l))$
$2 \times a + 2 \times sum(l) = 2 \times a + 2 \times sum(l)$

$\therefore 2 \times sum(a : l) = sum(doble(a : l))$

$\therefore$ Se cumple el paso inductivo.

$\therefore$ Se cumple el principio de inducción en $2 \times sum(l) = sum(doble(l))$. $\blacksquare$

3.0.5 Toda fórmula de la lógica proposicional, se puede escribir utilizando únicamente conjunciones y negaciones.

1. Toda fórmula de la lógica proposicional, se puede escribir utilizando únicamente conjunciones y negaciones.
   Demostración por Principio de Inducción sobre $\varphi \,|\, \varphi$ es una fórmula de la lógica proposicional.

   (a) Caso base ($\varphi \equiv P$):
   $\varphi \equiv P \equiv \neg\neg P \equiv (P \wedge P)$
   $\therefore$ se cumple el caso base.

2. Hipótesis de inducción:
   Suponemos que existen P y Q tal que se pueden escribir
   utilizando únicamente conjunciones y negaciones.

3. Paso inductivo:

   (a) (P)
   $P \equiv \neg\neg P$
   $\therefore$ Se cumple el caso a).

(b) $(\neg P)$
$\neg P$
$\therefore$ La demostración es inmediata, puesto que se cumple por definición.

(c) $(P \wedge Q)$
$P \wedge Q$
$\therefore$ La demostración es inmediata, puesto que se cumple por definición.

(d) $(P \vee Q)$
$(P \vee Q) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
$\therefore$ Se cumple el caso d).

(e) $(P \rightarrow Q)$
$(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q) \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$
$\therefore$ Se cumple el caso e).

(f) $(P \longleftrightarrow Q)$
$(P \longleftrightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$
$\equiv \neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P)$
$\therefore$ Se cumple el caso f).

$\therefore$ Se cumple el paso inductivo.

$\therefore$ Se cumple con el principio de inducción. $\blacksquare$