Tarea Álgebra Superior ||

Arroyo Lozano Santiago
Arévalo Gaytán Rodrigo
González Domínguez Saúl Fernando
Luévano Ballesteros Ricardo Adrián

Marzo 2020

1 Sean $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim$. Demuestra las siguientes afirmaciones utilizando las definiciones de suma, producto y orden.

1.1 $(a,b)\cdot(\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)}) = (\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}) + (\overline{(a,b)}\cdot\overline{(e,f)})$

P.D $\overline{(a,b)}\cdot[\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)} = [\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}]+[\overline{(a,b)}\cdot\overline{(e,f)}]$

$$
\begin{aligned}
\overline{(a,b)}\cdot[\overline{(c,d)}+\overline{(e,f)}] &= \overline{(a,b)(c+e,d+f)} && \text{(Definición de suma)}\\
&= \overline{(a(c+e)+b(d+f),a(d+f)+b(c+e))} && \text{(Distributividad)}\\
&= \overline{(ac+ae+bd+bf,ad+af+bc+be)} && \text{(Distributividad en } \mathbb{N})
\end{aligned}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
[\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}]+[\overline{(a,b)}\cdot\overline{(e,f)}] &= \overline{(ac+bd,ad+bc)}+\overline{ae+bf,af+be} && \text{(Por definición de producto)}\\
&= \overline{(ac+bd+ae+bf,ad+bc+af+be)} && \text{(Por definición de suma)}
\end{aligned}
$$

Y como por ambos lados llegamos a la misma igualdad es claro que son lo mismo, por lo tanto queda demostrado ■

1.2 Si $\overline{(a,b)}<\overline{(c,d)}$ y $\overline{(0,0)}<\overline{(e,f)}$ entonces $\overline{(a,b)}\cdot\overline{(e,f)}<\overline{(c,d)}\cdot\overline{(e,f)}$

$$\overline{(a,b)}\cdot\overline{(e,f)}<\overline{(c,d)}\cdot\overline{(e,f)} = \overline{(ae+bf,af+be)}<\overline{(ce+df,cf+de)}$$

Consideremos a $\overline{(w,z)},\overline{(x,y)}\in\mathbb{Z}$
Sabemos que si

$$
\begin{aligned}
\overline{(w,z)}<\overline{(x,y)} &\leftrightarrow 0<\overline{(x,y)}-\overline{(w,z)}\\
&\leftrightarrow 0<\overline{(x,y)}+\overline{(z,w)}\\
&\leftrightarrow 0<\overline{(x+z,y+w)}\\
&\leftrightarrow y+w<x+z
\end{aligned}
$$

Por lo que tenemos que

$\overline{(ae+bf, af+be)} < \overline{(ce+df, cf+de)} \leftrightarrow (cf+de)+(ae+bf) < (ce+df)+(af+be)$

P.D. $(cf+de)+(ae+bf) < (ce+df)+(af+be)$

Como $\overline{(0,0)} < \overline{(e,f)}$ entonces $f < e$, al restar f en ambos lados tenemos

$$f - f < e - f \leftrightarrow o < e - f$$

Como $\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)}$, al restar $\overline{(a,b)}$ en ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} \overline{(a,b)} - \overline{(a,b)} < \overline{(c,d)} - \overline{(a,b)} &\leftrightarrow \\ 0 < \overline{(c,d)} - \overline{(a,b)} &\leftrightarrow \\ 0 < \overline{(c,d)} + \overline{(b,a)} &\leftrightarrow \\ 0 < \overline{(c+b, d+a)} & \end{aligned}$$

Y como la suma es un entero positivo, tenemos $a+d < c+b$
Al multiplicar ambos miembros por el $\mathbb{N}$ positivo $(e-f)$ tenemos

$$(a+d)(e-f) < (c+b)(e-f) \leftrightarrow ae - af + de - df < ce - cf + be - bf$$

Sumamos los naturales af, df, cf y bf a cada miembro

$$\begin{aligned} ae - af + af + de - df + df + cf + bf < ce - cf + cf + be - bf + bf + af + df \\ ae + de + cf + bf < ce + be + af + df \qquad \text{(Por suma de inverso aditivo)} \\ (cf+de)+(ae+bf) < (ce+df)+(af+be) \quad \text{(Por Conmutatividad y Asociatividad)} \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar ■

1.3 Si $\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)}$ y $\overline{(e,f)} < \overline{(0,0)}$ entonces $\overline{(c,d)} \cdot \overline{(e,f)} < \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)}$

P.D. $\overline{(ce+df, cf+de)} < \overline{(ae+bf, af+be)}$
Como se mencionó en 1.2

P.D. $(ce+df)+(af+be) < (cf+de)+(ae+bf)$
Como $\overline{(e,f)} < \overline{(0,0)}$ entonces $e < f$, al restar ambos miembros, tenemos que: $e - e < f - e \leftrightarrow 0 < f - e$

Como $\overline{(a,b)} < \overline{(c,d)}$, es decir, $a+d < c+b$ con $a,b,c,d,e \in \mathbb{N}$

Al multiplicar ambos miembros por el $\mathbb{N}$ positivo $(f-e)$, tenemos:

$$\begin{gathered} (a+d)(f-e) < (c+b)(f-e) \\ af - ae + df - de < cf - ce + cb - be \end{gathered}$$

Sumamos los naturales ae, de, ce, be a ambos miembros y resulta

$$\begin{aligned} af - ae + ae + df - de + de + ce + be < cf - ce + ce + bf - be + be + ae + de \\ = af + df + ce + de + < cf + bf + ae + de \qquad \text{(Por suma de inverso aditivo)} \\ = (ce+df)+(af+be) < (cf+de)+(ae+bf) \quad \text{(Por conmutatividad y Asociatividad)} \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar ■

1.4 Si $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$ entonces $\overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$ o $\overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$

P.D. $\overline{(a,b)} = \overline{(0,0)} \vee \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$
P.D. $a + 0 = b + 0 \vee c + 0 = d + 0$
P.D. $a = b \vee c = d$
Como $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$ entonces por producto de $\mathbb{Z}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{(ac+bd, ad+bc)} &= \overline{(0,0)} && \text{(Por Def. de producto en } \mathbb{Z}) \\ ac+bd+0 &= ad+bc+0 && \text{(Sumamos con la igualdad)} \\ ac+bd &= ad+bc && \text{(Elemento Neutro)} \end{aligned}$$

Si $a = b$, entonces $ac + ad = ad + ac$, lo cual es claro
Si $c = d$, entonces $ac + bc = bc + ac$, lo cual es claro
$\therefore a = b \vee c = d \quad \blacksquare$

2 Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ Demuestra las siguientes igualdades especificando las propiedades de la suma y el producto que vayas utilizando.

2.1 $-(a+b) = -a - b$

$$\begin{aligned} &-(a+b)+0 \\ &\quad = -(a+b) + (a - a + b - b) && \text{(Suma de elemento neutro)} \\ &\quad = -(a+b) + (a + b - a - b) && \text{(Conmutatividad de la suma)} \\ &\quad = -(a+b) + (a+b) + (-a-b) && \text{(Asociatividad)} \\ &\quad = -a - b \quad \blacksquare && \text{(Porque } -(a+b) \text{ es el inverso aditivo de } (a+b)) \end{aligned}$$

2.2 $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

$$\begin{aligned} &= (b-b) \cdot a && \text{(Como -b es el inverso aditivo de b, la suma es 0)} \\ &= ba - ba && \text{(Distributividad del producto)} \\ &= 0 && \text{(Inverso aditivo)} \end{aligned}$$

Como el producto es conmutativo el caso se hace análogamente para $a \cdot (b-b)\blacksquare$

2.3 $-(-a) = a$

$$\begin{aligned} &= -(-a) + a + (-a) && \text{(Sumamos elemento neutro)} \\ &= a + (-a) - (-a) && \text{(Conmutatividad)} \\ &= a + 0 && \text{(Por inverso aditivo)} \\ &= a \quad \blacksquare && \text{(Por suma de elemento neutro)} \end{aligned}$$

2.4 $-(a \cdot b) = -a \cdot b = a \cdot (-b)$

$$\begin{aligned}
-a \cdot b &= -a \cdot b + (a \cdot b) - (a \cdot b) && \text{(Sumamos elemento neutro)} \\
&= (-a + a)b - (a \cdot b) && \text{(Asociatividad)} \\
&= (0)b - (a \cdot b) && \text{(Inverso Aditivo)} \\
&= -(a \cdot b) && \text{(Neutro Aditivo)}
\end{aligned}$$

Por otro lado...

$$\begin{aligned}
a(-b) &= a(-b) + (a \cdot b) - (a \cdot b) && \text{(Sumamos elemento neutro)} \\
&= (-b + b)a - (a \cdot b) && \text{(Asociatividad)} \\
&= (0)a - (a \cdot b) && \text{(Inverso Aditivo)} \\
&= -(a \cdot b) \quad \blacksquare && \text{(Neutro Aditivo)}
\end{aligned}$$

2.5 $-a = -1 \cdot a$

$$\begin{aligned}
-a &= -a + 0 && \text{(Neutro Aditivo)} \\
&= -a + (-1 \cdot a) + (1 \cdot a) && \text{(Inverso Aditivo)} \\
&= -a + (-1 \cdot a) + a && \text{(Neutro Multiplicativo)} \\
&= (-1 \cdot a) \quad \blacksquare && \text{(Inverso Aditivo)}
\end{aligned}$$

2.6 $a \cdot b = (-a) \cdot (-b)$

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= a \cdot b + (-a)(-b) - (-a)(-b) && \text{(Sumamos elemento neutro)} \\
&= a \cdot b + (-a)(-b) - (-1)a(-b) && \text{(Por 2.5)} \\
&= a \cdot b + (-a)(-b) + 1 \cdot a(-b) && \text{(Ley de Signos)} \\
&= (-a)(-b) + a \cdot b + a(-b) && \text{(Neutro multiplicativo y conmutatividad)} \\
&= (-a)(-b) + a \cdot b - a \cdot b && \text{(Por 2.4)} \\
&= (-a)(-b) \quad \blacksquare && \text{(Inerso Aditivo)}
\end{aligned}$$

3 Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Demuestra las siguientes afirmaciones

3.1 $a \leq b$ si y sólo si $-b \leq -a$

$\rightarrow$
P.D. $a \leq b \rightarrow -b \leq -a$
Sumemos el inverso aditivo de a y b a ambos miembros de la ecuación y tenemos:

$$\begin{aligned}
a - a - b &\leq b - b - a \\
-b &\leq -a && \text{(Ley de cancelación)}
\end{aligned}$$

$\leftarrow$
P.D. $-b \leq -a \rightarrow a \leq b$

$$a + b - b \leq -a + a + b$$
$$a \leq b$$
$$\therefore a \leq b \leftrightarrow -b \leq -a \qquad \blacksquare$$

3.2 Si $0 \leq a \leq b$ entonces $a^n \leq b^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$

Por Inducción sobre n
Caso Base: n = 0

$$a^0 \leq b^0$$
$$1 \leq 1 \qquad \text{(Por definición)}$$

Se cumple el caso base
H.I. Si $0 \leq a \leq 0$ $a^n \leq a^b$

P.I. P.D. Se cumple para $a^{n+1} \leq b^{n+1}$

$$a^{n+1} \leq a^{n+1}$$
$$a^{n+1} \leq ab^n \qquad \text{(Por HI)}$$
$$a \cdot b^n \leq b \cdot b^n = b^{n+1}$$
$$\therefore a^{n+1} \leq b^{n+1}$$

Se cumplen el Caso Base y el Paso Inductivo, por lo tanto queda demostrado $\blacksquare$

3.3 Si $0 \leq a \leq b$ y $0 \leq c \leq d$ entonces $a \cdot c \leq b \cdot d$

P.D $a \cdot c \leq b \cdot d$
Como $a \leq b$ tenemos dos casos:

$i) a = b$
$ii) a < b$

Caso 1:
Si $a = b$ al multiplicar

$$a(c \leq d)$$
$$\text{Tenemos } ac \leq ad$$
$$\text{Que es lo mismo que } ac \leq bd$$

Y terminamos
Caso 2:
Sabemos que

$$ac \leq ad$$
$$bc \leq bd$$

Ya que $a, b \in \mathbb{Z}^+ \bigcup \{0\}$

Veamos ahora los dos casos:
$i) ac \leq ad \leq bc \leq bd$
$ii) ac \leq bc \leq ad \leq bd$

Como en ambos casos $ac \leq bd$, por transitividad:
$ac \leq bd$ ■

3.4 $a^2 \geq 0$

Tenemos 3 casos:
$i) a = 0$
$ii) a \in \mathbb{Z}^+$
$iii) a \in \mathbb{Z}^-$

Si $a = 0$ tenemos:

$$\begin{aligned} 0^2 &\geq 0 \\ 0 \cdot 0 &\geq 0 \\ 0 &\geq 0 && \text{(Porque } 0 \cdot 0 = 0) \end{aligned}$$

Si $a \in \mathbb{Z}^+$, como $\forall x \in \mathbb{Z}^+, x > 0$ y como $x^2 \geq x > 0$ entonces $x^2 \geq 0$ por transitividad.

Si $a \in \mathbb{Z}^-$, con $a = -x$ tenemos:

$$\begin{aligned} (-x)^2 &\geq 0 \\ (-x)(-x) &\geq 0 \\ x \cdot x &\geq 0 && \text{(Por ley de signos, con } x \cdot x \in \mathbb{Z}^+) \end{aligned}$$

Y como $\forall z \in \mathbb{Z}^+ z \geq 0$ entonces $x \cdot x \geq 0$ ■

4 Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Demuestra las afirmaciones usando la siguiente definición de resta en $\mathbb{Z}$

$$a - b = a + (-b)$$

4.1 $a - a = 0$

$a - a = a + (-a)$ por definición; como $(-a)$ es el inverso aditivo de a y su suma es 0, entonces $a + (-a) = 0$
$\therefore a - a = 0$ ■

4.2 $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$

$$\begin{aligned}
(a-b)+(c-d) &= a+(-b)+c+(-d) && \text{(Por definición de resta)}\\
&= a+c+(-b)+(-d) && \text{(Conmutatividad)}\\
&= a+c+1\cdot(-b)+1\cdot(-d) && \text{(Neutro Multiplicativo)}\\
&= a+c+(-1)(b)+(-1)(d) && \text{(Por 2.4)}\\
&= a+c+(-1)(b+d) && \text{(Distributividad)}\\
&= a+c-1\cdot(b+d) && \text{(Por definición)}\\
&= a+c-(b+d) && \text{(Neutro multiplicativo)}
\end{aligned}$$

■

4.3 $(a-b)\cdot(c-d)=(a\cdot c+b\cdot d)-(a\cdot d+b\cdot c)$

$$\begin{aligned}
(a-b)\cdot(c-d) &= (a+(-1\cdot b))\cdot(c+(-1\cdot d)) && \text{(Por 2.5 y definición de resta)}\\
&= a\cdot c+a(-1\cdot d)+(-1\cdot b)c+(-1\cdot b)(-1\cdot d)\\
& && \text{(Distributividad y definición de producto)}\\
&= a\cdot c+(-a\cdot d)+(-b\cdot c)+b\cdot d && \text{(Distributividad en los paréntesis)}\\
&= a\cdot c-a\cdot d-b\cdot c+b\cdot d && \text{(Por definición de resta)}\\
&= a\cdot c+b\cdot d-a\cdot d-b\cdot c && \text{(Conmutatividad)}\\
&= a\cdot c+b\cdot d-1(a\cdot d)-1(b\cdot c) && \text{(Por 2.4)}\\
&= (a\cdot c+b\cdot d)-(a\cdot d+b\cdot c) && \text{(Distributividad)}
\end{aligned}$$

■

5 El producto de tres números consecutivos es dividido por 6

Sabemos que de $n, n+1, n+2$ al menos uno será par.
Sabemos tambien que el anterior o el siguiente de ese entero par es impar.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que n es par y n+1 impar, es decir:
$2|n$ y $2+1|n+1$ lo que implica que
$\exists k, l \in \mathbb{Z}$ tales que $2k=n$ y $(2+1)l=n+1$
Notamos que

$$\begin{aligned}
2k &= n\\
(2+1)l &= n+1\\
\hline
3l\cdot 2k &= n(n+1)\\
3\cdot 2\cdot l\cdot k &= n(n+1)\\
6lk &= n(n+1)
\end{aligned}$$

Multiplicamos ambas igualdades por $(n+2)\in\mathbb{Z}$ y tenemos $6\cdot lk\cdot(n+2)=n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ y como $lk(n+2)\in\mathbb{Z}$

$\therefore 6|n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ ■

6 Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ Si $a|b$ y $a|b+2$ entonces $|a| \in \{1, 2\}$

P.D. $|a| \in \{1, 2\}$
P.D. $|a| = 2 \vee |a| = 1$
Como $a|b, \exists u \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot u = b$
Como $a|b+2$ $\exists v \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot v = b + 2$,
es decir $b = av - 2$

De manera que $au = av - 2$
Es decir $2 = av - au = a(v - u)$
entonces $a|2$
Notemos que para que $a|2$, a tiene que ser $a = -1, a = 1, a = -2$ ó $a = 2$

En los primeros casos $|a| = 1$, en los siguientes $|a| = 2$
$\therefore |a| = 1 \vee |a| = 2$ ■

7 Las siguientes afirmaciones son equivalentes para $a, b \in \mathbb{Z}$

a) $a|b$
b) $(a; b) = a$
c) $[a; b] = b$

7.1 $a) \rightarrow b)$

Sea $a|b$
P.D. $(a; b) = a$
P.D. $a|a$ y $a|b$

Es claro que si $a|a, \exists z = 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a \cdot z = a \cdot 1 = a$
Además, por hipotesis sabemos que $a|b$
$\therefore$(a;b)=a

7.2 $b) \rightarrow c)$

Sea $(a; b) = a$, es decir $a|a$ y $a|b$
P.D. $[a; b] = b$
P.D. $a|b$ y $b|b$

Es claro que si $b|b, \exists w = 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b \cdot w = b \cdot 1 = b$
Además, por hipotesis sabemos que $a|b$
$\therefore$[a;b]=b

7.3 $c) \rightarrow a)$

Sea $[a; b] = b$, es decir $a|b$ y $b|b$
P.D. $a|b$

Es claro, por hipotesis, que $a|b$
$\therefore a|b$
$\therefore$ Los tres enunciados son equivalentes entre si ■

8 Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a; 4) = 2 \vee (b; 4) = 2$ P.D $(a + b; 4) = 4$

Por hipotesis tenemos que $2|a \vee 2|b$, lo que implica que a y b son pares y no son múltiplos de 4.
Sabemos que la suma de dos pares siempre dará como resultado un número par.
Entonces $\frac{a+b}{2}$ es posible y además sabemos que $\frac{4}{2}$ también.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a+b}{2}; \frac{4}{2}\right) &= 2 && \text{(Por definición de mcd)} \\
2\left(\frac{a+b}{2}; \frac{4}{2}\right) &= 2(2) && \text{(Multiplicamos ambos lados por 2)} \\
\left(2\frac{a+b}{2}; 2\frac{4}{2}\right) &= 4 && \text{(Por demostración del ejercicio 11)}
\end{aligned}$$

Como sabemos por la definición de división que existe un único entero tal que $y\left(\frac{x}{y}\right) = x$ podemos obtener la siguiente igualdad gracias a la unicidad de este número entero:

$$(a + b; 4) = 4 \quad \blacksquare$$

9 Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $a > 0$, entonces $a|b$ si y sólo si existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x + y = b$ y $(x; y) = a$

$\rightarrow$
Sea $a|b$
P.D. $\exists x, y$ tales que $x + y = b$ y $(x; y) = a$
Sea $x, (b - x) = y \in \mathbb{Z}$

$$x + b - x = b$$

$$\begin{aligned}
(x; b - x) &= (x; ak - x) && \text{(Como } a|b \text{ entonces } \exists k \in \mathbb{Z}\ t.q.\ b = ak\text{)} \\
&= (a; ak - a) && \text{(Pues } x = a\text{)} \\
&= (a; a(k - 1) \\
&= a(1; k - 1) && \text{(Por demostracion del ejercicio 11)} \\
&= a \cdot 1 && \text{(Como el mcd de 1 y cualquier númmero entero es)} \\
&= a && \text{(Por neutro multiplicativo)}
\end{aligned}$$

Queda así demostrado la existencia de dos enteros x, y tales que cunplen $x + y = b \wedge (x; y) = a$

$\leftarrow$
Sean $x + y = b \wedge (x; y) = a$
P.D $a|b$
Como $(x, y) = a$ entonces $a|x \wedge a|y$
Por tanto existen $c, s \in \mathbb{Z}$ tales que $a \cdot c = x \wedge a \cdot s = y$
Sumando ambas igualdades

$$\begin{aligned}
(a \cdot c) + (a \cdot s) &= x + y \\
a(c + s) &= x + y && \text{(Distributividad)}
\end{aligned}$$

Por hipotesis tenemos que $x + y = b$
$\therefore a|b$
Como se cumple la ida y el regreso queda demostrada la doble implicación $\blacksquare$

10 Si $a, b \in \mathbb{N}$ son tales que $(a; b) = [a; b]$, entonces $a = b$

Como $(a; b) = [a; b]$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
[a;b]|a \wedge [a;b]|b & \qquad \text{(Por definición de mcd)} \\
a|(a;b) \wedge b|(a;b) & \qquad \text{(Por definición de mcm)}
\end{aligned}
$$

Como $(a; b) = [a; b]$ podemos decir que $a|[a; b]$ y $b|[a; b]$
Y como

$$
\begin{aligned}
[a;b]|a \wedge b|[a;b] & \qquad \text{(Por transitividad } b|a\text{)} \\
[a;b]|b \wedge a|[a;b] & \qquad \text{(Por transitividad } a|b\text{)}
\end{aligned}
$$

Y tenemos la propiedad de divisibilidad demostrada en clase que nos dice que
Si $a|b$ y $b|a \to a = b$
$\therefore a = b$ $\blacksquare$

11 Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}$ con $d > 0$ P.D. $\left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right) = \frac{(a;b)}{d}$

$\mathcal{I}$) Propiedad demostrada en clase: $(ca; cb) = c(a; b)$ Si $d|a \wedge d|b$ tenemos $\left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right)$
Aplicando $\mathcal{I}$ tenemos que:

$$(a; b) = \left(d\frac{a}{d}; d\frac{b}{d}\right) = d\left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right)$$

Como $(a; b) = d$ $\exists z = 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $(a; b) = d \cdot 1$
Que es lo mismo a $1 = \frac{(a;b)}{d}$

$$\frac{(a; b)}{d} = \frac{d\left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right)}{d}$$

Como sabemos por la definición de división que existe un único entero tal que $y\left(\frac{x}{y}\right) = x$ podemos obtener la siguiente igualdad gracias a la unicidad de este número entero:

$$\therefore \left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right) = \frac{(a; b)}{d} \quad \blacksquare$$

12 Para las siguientes parejas de números, encuentra el máximo común divisor usando el algoritmo de Euclides, exprésalo como combinación lineal de ambos y, finalmente encuentra el mínimo común multiplo

12.1 $527, 765$

$M.C.D:$

$$\begin{aligned}
765 &= 527(1) + 238\\
527 &= 238(2) + 51\\
238 &= 51(4) + 34\\
51 &= 34(1) + 17\\
34 &= 17(2) + 0\\
(765; 537) &= 17
\end{aligned}$$

$M.C.M:$

$$[765; 527] = \frac{|765 \cdot 527|}{(765; 527)} = 23715$$

$Combinacion\ Lineal:$

$$\begin{aligned}
17 &= 51 - 34(1)\\
17 &= 51 - (238 - 51(4)\\
17 &= 51(5) - 238\\
17 &= (527 - 238(2))(5) - 238\\
17 &= 527(5) - 238(11)\\
17 &= 527(5) - (765(1) - 527)(11)\\
17 &= 527(5) - 765(11) - 527(11)\\
17 &= 527(16) - 765(11)\\
17 &= 527(16) + 765(-11)
\end{aligned}$$

12.2 $132, -473$

$M.C.D:$

$$\begin{aligned}
-473 &= 132(-3) + 77\\
132 &= 77(1) + 55\\
77 &= 55(1) + 22\\
55 &= 22(2) + 11\\
22 &= 11(2) + 0\\
(132; -473) &= 11
\end{aligned}$$

$M.C.M:$

$$[132; -473] = \frac{|132 \cdot -473|}{(132; -473)} = 5676$$

$Combinacion\ Lineal:$

$$\begin{aligned}
11 &= 55 - 22(2)\\
11 &= 55 - (77 - 55(1))(2)\\
11 &= 55 - (77(2) - 55(2))\\
11 &= 55(3) - 77(2)\\
11 &= (132 - 77(1))(3) - 77(2)\\
11 &= 132(3) - 77(5)\\
11 &= 132(3) + (-473 - 132(-3))(5)\\
11 &= 132(18) - 473(5)
\end{aligned}$$

12.3 $-1816, 178$

$M.C.D:$

$$\begin{aligned}
-1816 &= 1789(-1) + 27\\
1789 &= 27(66) + 7\\
27 &= 7(3) + 6\\
7 &= 6(1) + 1\\
6 &= 1(6) + 0\\
(-1816; 1789) &= 1 M.C.M:
\end{aligned}$$

$$[-1816; 1789] = \frac{|-1816 \cdot 1789|}{(-1816; 1789)} = 3248824$$

$Combinacion\ Lineal:$

$$\begin{aligned}
1 &= 7 - 6(1)\\
1 &= 7 - (27 - 7(3)(1)\\
1 &= 7(4) - 27\\
1 &= (1789 - 27(66))(4) - 27\\
1 &= 1789(4) - 27(265)\\
1 &= 1789(4) + (-1816 - 1789(-1))(265)\\
1 &= 1789(4) - 1816(265) + 1789(265)\\
1 &= 1789(269) - 1816(265)
\end{aligned}$$

12.4 $-2947, -3997$

$M.C.D:$

$$-3997 = 2947(-1) - 1050$$
$$-2947 = 1050(-2) - 847$$
$$1050 = 847(1) + 203$$
$$847 = 203(4) + 35$$
$$203 = 35(5) + 28$$
$$35 = 28(1) + 7$$
$$28 = 7(4) + 0$$
$$(-2947; 3997) = 7$$

$M.C.M:$

$$[-2947; 3997] = \frac{|-2947 \cdot -3997|}{(-2947; 3997)} = 1682737$$

$Combinacion\ Lineal:$

$$7 = 35 - 28$$
$$7 = 35 - (203 - 35(5))$$
$$7 = 35(6) - 203$$
$$7 = (847 - 203(4))(6) - 203$$
$$7 = 847(6) - 203(25)$$
$$7 = 847(6) - (1050 - 847(1))(25)$$
$$7 = 847(6) - (1050 - 847(1))(25)$$
$$7 = (2947 - 1050(2))(31) - 1050(25)$$
$$7 = 2947(31) + (-3997 + 2947(1)(87)$$
$$7 = 2947(31) + 2947(87) - 3997(87)$$
$$7 = 2947(118) - 3997(87)$$