# Universidad Nacional Autonoma de Mexico

## Facultad de Ciencias

## Algebra Superior II

# Tarea III

*Alumnos:*
Arroyo Lozano Santiago
Arévalo Gaytán Rodrigo
González Domínguez Saúl Fernando
Luévano Ballesteros Ricardo Adrián

*Profesor:* Alejandro Alvarado García

## Ciencias de la computación

May 13, 2020

# 1 Demuestra las siguientes afirmaciones. Sea $(F, +, 0, \cdot, 1)$ un campo. Si a, b $\in F$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

## 1.1 $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

$$\begin{aligned}
a(b-b) = (b-b)a = 0 && \text{(Podemos ver a 0 de la forma b-b)}\\
ab - ab = ba - ba = 0 && \text{(Neutro aditivo)}\\
0 = 0 = 0 && \text{(Inverso aditivio)}
\end{aligned}$$

## 1.2 $a(-b) = (-a)b = -(ab)$

$$\begin{aligned}
a(-b) + ((ab) - (ab)) &= (-a)b + ((ab) - (ab)) = -(ab)\\
(a(-b) + ab) - (ab) &= (-(a)b + ab) - (ab))) = -(ab)\\
a(-b + b) - (ab) &= ((-a + a)b) - (ab) = -(ab)\\
a(0) - (ab) &= ((0)b) - (ab) = -(ab)\\
-(ab) &= -(ab) = -(ab)
\end{aligned}$$

## 1.3 $(-a)(-b) = ab$

$$\begin{aligned}
(-a)(-b)(-(ab) + (ab)) =&\\
&= (-a)(-b) + (-a)b + (ab) && \text{(Por 1.2)}\\
&= (-a)(-b + b) + (ab)\\
&= (-a)(0) + (ab)\\
&= ab
\end{aligned}$$

## 1.4 $(-1)a = -a$

$$\begin{aligned}
(-1)a + a - a =&\\
&= (-1)a + (1)a - a\\
&= (-1 + 1)a - a\\
&= (0)a - a\\
&= -a
\end{aligned}$$

## 1.5 $(-1)^2 = 1$

$$\begin{aligned}
(-1)^2 &= (-1)\cdot(-1) && \text{(Cuadrado)}\\
&= -(1\cdot -1) && \text{(Por definición de producto)}\\
&= -(-1) && \text{(Neutro multiplicativo)}\\
&= 1 && \text{(Ley de signos)}
\end{aligned}$$

## 1.6 Si $a^2 = 1$ entonces $a \in \{1, -1\}$

Sea $\frac{p}{q} \in F$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p}{q}\right)^2 &= 1\\
\frac{p}{q} &= \sqrt{1} && \text{(Sacamos raiz)}\\
\frac{p}{q} &= 1
\end{aligned}$$

Notamos entonces que todo número $n$ menor a 1 elevado al cuadrado da una cantidad menor a $n$ y además por 1.5 sabemos que $(-1)^2 = 1$ por lo tanto $a \in \{1, -1\}$

## 1.7 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) && \text{(Cuadrado)}\\
&= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b && \text{(Distributividad)}\\
&= a^2 + ab + ab + b^2\\
&= a^2 + 2ab + b^2 && \text{(Términos semejantes)}
\end{aligned}$$

## 1.8 F es un dominio entero

Un campo $F$ se llama dominio entero si $\forall x, y \in F$ si $x \cdot y = 0$ entonces $x = 0 \vee y = 0$. Además, $F$ es un dominio entero si y sólo si valen las leyes de cancelación para el producto.
Como en 1.1 ya demostramos la primera propiedad y además $F$ al ser un campo tiene el producto bien definido tal que se valen las leyes de cancelación podemos ver que $F$ es un dominio entero gracias a que tiene el producto bien definido.

# 2 Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Entonces $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$ si y sólo si $b|a$.

Sea $\frac{a}{b} \in Q$
Por definicion de Q, implica $a \in \mathbf{Z} \wedge b \in \mathbf{Z} - \{0\}$
$\rightarrow$
Si $\frac{a}{b} \in Z$
Veamos que:

$$\begin{aligned} b(\frac{a}{b}) &= \frac{b}{1}(\frac{a}{b}) \quad \text{(Por la relacion entre enteros y racionales)} \\ &= \frac{ba}{b(1)} \quad \text{(Por propiedades de la multiplicacion en los racionales)} \\ &= \frac{ba}{b} \quad \text{(Por propiedades de la multiplicacion en los naturales)} \\ &= \frac{a}{1} \quad \text{(Por propiedades de los racionales)} \\ &= a \quad \text{(Por la relacion entre enteros y racionales)} \end{aligned}$$

$\therefore a = b(\frac{a}{b})$
y como $b \in \mathbf{Z}$ $y$ $\frac{a}{b} \in \mathbf{Z}$ , $b|a$
$\leftarrow$
Si $b|a$
$\exists c \in \mathbf{Z}(a = cb)$
Ademas por la relacion entre $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{Q}$

$$\frac{a}{1} = \frac{cb}{1}$$

Ademas $\frac{1}{b} \in \mathbf{Q}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b}(\frac{a}{1}) &= \frac{1}{b}(\frac{cb}{1}) \quad \text{(Por propiedades de la multiplicacion en los racionales)} \\ \frac{a}{b} &= \frac{cb}{b(1)} \quad \text{(Por propiedades de la multiplicacion de los racionales)} \\ \frac{a}{b} &= \frac{cb}{b} \quad \text{(Por propiedades de la multiplicacion de naturales)} \\ \frac{a}{b} &= \frac{c}{1} \quad \text{(Por propiedades de los racionales)} \\ \frac{a}{b} &= c \quad \text{(Por relacion entre los racionales y los enteros)} \end{aligned}$$

pero $\frac{a}{b} = c \in \mathbf{Z}$
$\therefore \frac{a}{b} \in \mathbf{Z}$

## 3 Sean $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ donde $\frac{c}{d} \neq \frac{0}{1}$. Definimos la division en $\mathbb{Q}$ como

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1}$$

**entonces $\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = \frac{a}{c}$ para cualesquiera $\frac{a}{b}, \frac{c}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{c}{b} \neq \frac{0}{1}$**

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} &= \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{c}\right) && \text{(Def. de exponentes)} \\
&= \left(\frac{ab}{bc}\right) = \left(\frac{ba}{bc}\right) && \text{(Conmutatividad)} \\
&= \left(\frac{b}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{c}\right) && \text{(Distributividad)} \\
&= 1 \cdot \left(\frac{a}{c}\right) = \left(\frac{a}{c}\right) && \text{(Neutro multiplicativo)}
\end{aligned}$$

# 4 Sean $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces:

(a) Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, si $\frac{a}{b} > 1$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^n > 1$.

(b) Si $\frac{a}{b} > 1$ y $m < n$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^m < \left(\frac{a}{b}\right)^n$.

## 4.1 a)

Nuestra hipotesis es que $\frac{a}{b} > 1$
*P.D.* $\left(\frac{a}{b}\right)^n > 1$

Procederemos por inducción sobre $n$ (Como $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple el prinicpio de inducción)
**Caso Base**($n = 1$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b} \qquad \text{(Por def. de exponente en } \mathbb{Q}\text{)}$$
$$\frac{a}{b} > 1 \qquad \text{(Por hipotesis)}$$

Se cumple el Caso Base.

**Hipotesis de Inducción:** Se cumple que $\left(\frac{a}{b}\right)^n > 1$

**Paso Inductivo**($n = n + 1$)
*P.D.* $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} > 1$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} > 1$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right) > 1 \qquad \text{(Def. de exponentes)}$$

Si dividimos la desigualdad en 2 desigualdades:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n > 1 \wedge \left(\frac{a}{b}\right) > 1$$

Podemos observar que esa es nuestra Hipotesis de Incucción y nuestra hipotesis.
$\therefore$ Se cumple el Paso Inductivo
Como se cumple el Caso Baso y el Paso Inductivo se cumple la Inducción y por tanto queda demostrado $\blacksquare$

## 4.2 b)

Nuestra hipotesis es que $\frac{a}{b} > 1 \wedge m < n$
$P.D.\ \left(\frac{a}{b}\right)^m < \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Si $m < n$ entonces existe $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $n = m + r$. Y de la demostración pasada tenemos la siguiente afirmación: $1 < \frac{a}{b}$ implica $1 < \left(\frac{a}{b}\right)^r \ \forall r \in \mathbb{N} - \{0\}$
Entonces seguimos que:

$$1 < \left(\frac{a}{b}\right)^r \qquad \text{(Por hipotesis)}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m < \left(\frac{a}{b}\right)^r \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m \qquad \text{(Multiplicamos por } \left(\tfrac{a}{b}\right)^m\text{)}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m < \left(\frac{a}{b}\right)^{r+m} \qquad \text{(Def. de exponentes)}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m < \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \blacksquare \qquad \text{(Def. de } r\text{)}$$

# 5 No existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que:

## 5.1 No existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 6$.

Procedamos por contradicción:
Sea $\left(\frac{p}{q}\right) = r \in \mathbb{Q}$ donde por la definición de los racionales $p, q$ no tienen factor común.
Supongamos que sí

$$\begin{aligned}
\left(\frac{p}{q}\right)^2 &= 6 \\
\frac{p^2}{q^2} &= 6 && \text{(Definición de exponentes en } \mathbb{Q}) \\
p^2 &= 6q^2 && (\text{*Despejamos } p^2)
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que $p^2$ es par, y luego seguimos que por ser par, $p$ es par:

$$\begin{aligned}
p &= 2k,\ k \in \mathbb{Z} && \text{(Se puede escribir como } 2k) \\
6q^2 = (2k)^2 &= 4k^2 && \text{(Seguimos de *)} \\
3q^2 &= 2k^2 && \text{(Dividimos sobre 2)}
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que $q^2$ es par, y luego seguimos que por ser par, $q$ es par:

Concluímos que como los dos son pares tienen factor común. **!**
Lo que es una contradicción puesto que no deberían tener factores comunes. Como encontramos una contradicción entonces sabemos que no puede existir $r$.

## 5.2 No existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^3 + r^2 = 5$.

Suponemos que ∃r ∈ $\mathbb{Q}$. Consideramos:

$$r = \left(\frac{a}{b}\right)$$

Tenemos que:

$$r^3 + r^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^3}{b^3} + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^3b^2 + a^2b^3}{b^5} = 5$$

Notamos que para que el cociente sea 5 se necesita una expresión de la siguiente forma:

$$\frac{5 \cdot 5k}{5k} = 5 \qquad \text{(con } k \in \mathbb{Z}\text{)}$$

En particular, el cociente $b^5$ tiene que ser un múltiplo de 5, por lo que definimos a $b = 5q$ con $q \in \mathbb{Z}$ y $q$ no multiplo de 5. Sustituyendo, nos queda:

$$\frac{a^3(5q)^2 + a^2(5q)^3}{(5q)^5} = \frac{(5q)^2(a^3 + a^2 5q)}{(5q)^5} = \frac{a^3 + a^2 5q}{(5q)^3} = 5$$

Como el denominador no necesariamente es múltiplo de 5, consideramos a $a = 5p$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $p$ no multiplo de 5. Sustituyendo, nos queda:

$$\frac{(5p)^3 + (5p)^2 5q}{(5q)^3} = \frac{5^3(p^3 + p^2 q)}{5^3 q^3} = \frac{p^3 + p^2 q}{q^3} = 5$$

Como $p$ y $q$ no son multiplos de 5, el cociente igual a 5 no es posible. **!**

$$\therefore \nexists r \in \mathbb{Q} \text{ tal que } r^3 + r^2 = 5$$

# 6 Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, entonces

(a) Sea $X = \{-a \in \mathbb{R} | a \in A\}$, entonces

supX = -ínfA e ínfX=-supA

**P.D. supX = -ínfA**
Por definicion de infimo se cumple que:
$\Rightarrow \forall a \in A(infA \neq a)$
$\Rightarrow \forall a \in A(-infA \geq -a).....(1)$
Ademas por construccion de $X$, si $k \in X$ entonces $-k \in A$
Sea $x \in X$, por lo anterior $-x \in A$ y por (1), $-infA \geq -(-x) = x$
lo que implica que $-infA$ es una cota superior y por la definicion de supremo $-infA \geq supS$
$\therefore -infA \geq supS...(a)$

Ahora por definicion de supremo
$\Rightarrow \forall x \in X(supX \geq x)$
$\Rightarrow \forall x \in X(-supX \geq -x).....(2)$
Ademas por construccion de $X$, si $a \in A$ entonces $-a \in X$
Sea $a \in A$, por lo anterior $-a \in X$ y por (2), $-supX \geq -(-a) = a$
lo que implica que $-supX$ es una cota inferior de A y por la definicion de inifimo $infA \leq -supS$
$\therefore -infA \geq supS...(b)$

Y por (a) y (b), se cumple $infA \geq supS \wedge -infA \geq supS$ lo que implica por propiedades de los reales $-infA = supS$
**P.D. ínfX=-supA**
La demostracion es analoga a la anterior intercambiando los papeles de A y B

(b) Sea $X = \{a + b \in \mathbb{R} | a \in A\}$, entonces

$$\text{supX} = \text{supA} + \text{supB e ínfX=ínfA+ínfB.}$$

**P.D. supX = supA + supB**
Sea $a \in A \wedge b \in b$,
Por definicion de supremo se cumple:
$supA \geq a \wedge supB \geq b$
$\Rightarrow supA + supB \geq a + b...(1)$
Si $x \in X$, por definicion de X $\exists a \in A \exists b \in B(x = a + b)$ y por (1)
$\Rightarrow supA+supB \geq a+b = x$, es decir $supA+supB$ es una cota superior de X

Ahora tomemos un $z \in R$ tal que z es una cota cuperior de X
Sea $a \in A \wedge b \in B$, por definicion de X, $\exists x \in X(x = a + b)$
$\Rightarrow z \geq x = a + b$
$\Rightarrow z-a \geq b$, es decir $(z-a)$ es una cota superior de B, lo que por definicion de supremo implica $\Rightarrow z - a \geq supB$
$\Rightarrow z - supB \geq a$, es decir $(z - supB)$ es una cota superior de A, lo que por definicion de supremo implica $\Rightarrow z - supB \geq supA$
$\Rightarrow z \geq supA + supB$
Es decir es la $supA + supB$ cota minima superior de S. Es decir el $supS$
**P.D. ínfX=ínfA+ínfB**
Sea $a \in A \wedge b \in b$,
Por definicion de infimo se cumple:
$infA \leq a \wedge infB \leq b$
$\Rightarrow infA + infB \leq a + b...(1)$
Si $x \in X$, por definicion de X $\exists a \in A \exists b \in B(x = a + b)$ y por (1)
$\Rightarrow infA+infB \leq a+b = x$, es decir $infA+infB$ es una cota inferior de X

Ahora tomemos un $z \in R$ tal que z es una cota inferior de X
Sea $a \in A \wedge b \in B$, por definicion de X, $\exists x \in X(x = a + b)$
$\Rightarrow z \leq x = a + b$
$\Rightarrow z-a \leq b$, es decir $(z-a)$ es una cota inferior de B, lo que por definicion de infimo implica $\Rightarrow z - a \leq infB$
$\Rightarrow z - infB \leq a$, es decir $(z - infB)$ es una cota inferior de A, lo que por definicion de infimo implica $\Rightarrow z - infB \leq infA$
$\Rightarrow z \leq infA + infB$
Es decir es la $supA + supB$ cota maxima inferior de S. Es decir el $infS$

(c) Si todos los elementos de A y B son positivos y $X = \{ab \in \mathbb{R} | a \in A \; y \; b \in B\}$, entonces

$$\text{supX} = \text{supA} \cdot \text{supB e ínfX=ínfA} \cdot \text{ínfB.}$$

**P.D. supX = supA · supB**
Si $a \in A$, como a es positivo, $0 < a < supA$.
Si $b \in A$, como b es positivo, $0 < b < supB$.
$\Rightarrow ab \leq supA \cdot supB ...(1)$
Si $x \in X$, por la contruccion de X, $\exists a \in A \exists b \in B(x = ab)$, y por 1 $\Rightarrow x = ab \leq supA \cdot supB$, es decir $supA \cdot supB$ es una cota superior de X
Sea z una cota superior de X,
Sea $a \in A \wedge b \in B$
$\Rightarrow \exists x \in X(x = ab)$ por definicion de X
y por definicion de cota superior $ab = x \leq z$
$\Rightarrow ab \leq z \Rightarrow a \leq \frac{z}{b}$, es decir $\frac{z}{b}$ es una cota superior de A, y por definicion se supremo $supA \leq \frac{z}{b}$
$\Rightarrow supA(b) \leq z$
$\Rightarrow b \leq \frac{z}{supA}$, es decir $\frac{z}{supA}$ es una cota superior de B, y por definicion se supremo $supB \leq \frac{z}{supA}$
$\Rightarrow supA \cdot supB \leq z$, es decir es la $supA \cdot supB$ es la cota minima superior de X, es decir $supX = supA \cdot supB$.
**P.D. infX = infA · infB**
Si $a \in A$, como a es positivo, $0 \leq infA < a$.
Si $b \in A$, como b es positivo, $0 \leq infB < b$.
$\Rightarrow ab \geq infA \cdot infB ...(1)$
Si $x \in X$, por la contruccion de X, $\exists a \in A \exists b \in B(x = ab)$, y por 1 $\Rightarrow x = ab \geq supA \cdot supB$, es decir $supA \cdot supB$ es una cota inferior de X
Sea z una cota inferior de X,
Sea $a \in A \wedge b \in B$
$\Rightarrow \exists x \in X(x = ab)$ por definicion de X
y por definicion de cota inferior $ab = x \geq z$
$\Rightarrow ab \geq z \Rightarrow a \geq \frac{z}{b}$, es decir $\frac{z}{b}$ es una cota inferior de A, y por definicion se infimo $infA \geq \frac{z}{b}$
$\Rightarrow infA(b) \geq z$
$\Rightarrow b \geq \frac{z}{infA}$, es decir $\frac{z}{infA}$ es una cota inferior de B, y por definicion de infimo $infB \geq \frac{z}{infA}$
$\Rightarrow infA \cdot infB \geq z$, es decir $infA \cdot infB$ es la cota maxima inferior de X, es decir $infX = infA \cdot infB$.

(d) Si $a \leq b$ para cada $a \in A$ y $b \in B$, entonces $supA \leq infB$.
Sea $a \leq b$ para cada $a \in A$ y $b \in B$
Como $a \leq b$, culquier a es una cota inferior de b y por definicion de infimo, $a \leq infB$
Ademas por la desigualdad $a \leq infB$, $infB$ es una cota superior de A y por la definicion de $supA$, lo que implica $supA \leq infB$

# 7 Son equivalentes para un campo ordenado F:

(a) F es completo.

(b) F satisface la Condición de Completud de Dedekind, es decir que si A, B $\subseteq$ F son tal que

1. $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$,
2. $A \cup B = F$ y $A \cap B = \emptyset$,
3. $\forall a \in A, \forall b \in B(a < b)$;
   entonces existe x $\in$ F tal que $a \leq x \leq b$ para cada $a \in A$ y $b \in B$.

**a $\rightarrow$ b**
*P.D* Sea $F$ un campo completo, esto implica que

$$\forall C \subseteq F \text{ (Si C esta acotado inferiormente entonces tiene infimo)}$$

Tomamos A, B, tales que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ y $A \cup B = F$ y $A \cap B = \emptyset$ y $\forall a \in A, \forall b \in B(a \leq b)$.
Sea $a \in A$ y $b \in B$, por hipoteis $\forall b \in B(a \leq b)$, esto implica que a es una cota inferior de b.
Lo que por hipotesis implica que B tiene un infimo al que llamaremos $\beta$.
Como $\forall a \in A(a \leq b)$, esto implica que toda a es una cota inferior de B, y por definicion de infimo, $\beta \geq a$.
y por definicion de infimo $\beta \leq b$. Uniendo ambas desigualdades $b \geq \beta \geq a$. Demostrando asi la condicion de dedekin.
**a $\leftarrow$ b**
Suponemos valida la condicion de dedekin para F
Sea $B' \subset F$, acotado inferiormente, supongamos que no tiene un inifimo, como esta acotado inferiormente esto implica que no sus cotas inferiores no tienen un maximo.
Definimos $B = B' \cup x \in F|x$ es una cota superior de B'
Notemos que si B tiene infimo, B' tiene infimo porque los elementos que le unimos a B, todos son mayores que el mayor de los elementos de B.
De igual forma notemos que si B' no esta acotado superiormente, entonces B=B'.
Si $\exists \beta \in B(\beta$ esta es una cota inferior de B). Tomemos otra cota inferior de A, a la que llamaremos c, por definicion de cota inferior como $\beta in B$, $\beta \geq c$, es decir $\beta$ seria maximo $\mathbf{!}$

Como no pasa que $\exists \in B'(\beta$ esta es una cota inferior de B'). tomamos al conjunto de todas las cotas inferiores a B al que llamaremos A, por lo anterior $B \cap A \neq \emptyset$ ademas $A \cup B = F$ y como todos elementos de A por definicion son cotas inferiores de B. se cumple que $\forall a \in A, \forall b \in B(a < b)$. Como F cumple la condicion de dedekin. $\forall a \in A, \forall b \in B \exists x \in F(a \leq x \leq b)$.
Como $\forall b \in B(x \leq b)$, x es una cota inferior de b.
y como $\forall a \in A(a \leq x)$ es la cota maxima inferior de B, porque A, son todas las cotas inferiores de B. Es decir, x es un inifimo. !

## 7.1 Demuestra que $\mathbb{Q}$ no satisface (b) y deduce que $\mathbb{R}$ si lo satisface.

En $\mathbb{Q}$ no todo conjunto acotado superiormente tiene supremo (O si está acotado inferiormente, este no tiene ínfimo). El conjunto $S = \{r \in \mathbb{Q} | r^2 < 2\}$ está acotado superiormente en $\mathbb{Q}$, por ejemplo 2 es una cota superior. Sin embargo el conjunto de cotas superiores de $S$ en $\mathbb{Q}$ no tiene mínimo, por lo que no se cumple el tercer punto de la Condición de Completitud de Dedekind. A pesar de haber exhibido un contraejemplo veamos la demostración:
Por contradicción, sea $\mathbb{Q}$ un campo que satisface la condición de completitud de Dedekind, lo que implica que $\exists A, B \subseteq \mathbb{Q}$ ambos distintos del vacío acotados superiormente.
Sean:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} | a \leq x \forall x \in A\}$$
$$B = \{b \in \mathbb{Q} | x \leq b \forall x \in B\}$$

Osease, $B$ tiene un supremo $b$ y $A$ un ínfimo $a$. Seguimos que $x$ es cota superior de $a$, pero como $b \geq x$ tenemos $a \leq x \leq b$ **!**
Tenemos una contradicción y concluísmos que $\mathbb{Q}$ no tiene supremo, por o tanto no cunple la Condición de Completitud de Dedekind

$\mathbb{R}$ es un campo ordenado completo, para demostrar esto basta demostrar que cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ , acotado inferiormente tiene ínfimo:

Sea $S \neq \varnothing | S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S$ tiene cota inferior $\beta$ en $\mathbb{R}$ y como nuestros elementos son cortaduras de Dedekind nuestro ínfimo es $\gamma = \bigcup\limits_{\alpha \in S} \alpha$
Si $\gamma$ es cota inferior de $S$. Por la definición de $\gamma$, tenemos que $\alpha \subseteq \gamma \forall \alpha \in S$, lo que significa que $\gamma \leq \alpha \forall \alpha \in S$

Si $\sigma$ es una cota inferior de $S$, entonces $\sigma \leq \alpha \forall \alpha \in S$, por lo que $\gamma = \bigcup_{\alpha \in S} \alpha$ y así $\sigma \leq \gamma$

Sólo falta demostrar que $\gamma$ es cortadura:

▲ $\gamma \neq \varnothing$ ya que $S \neq \varnothing \wedge \alpha \neq \varnothing \; \forall \alpha \in S$
▲ Sea $y \in \gamma \wedge x \in \mathbb{Q} | x < y$. Demostraremos que $x \in \gamma$. como $y \in \gamma$ entonces existe $\alpha \in S$ tal que $y \in \alpha$ y por ser cortadura, se debe tener $x \in \alpha$ y por tanto $x \in \gamma$
▲ Demostraremos que $\gamma$ no tiene mínimo; Dado cualuier $x \in \gamma$, como $x \in \alpha$ para algún $\alpha \in S$ y por ser $\alpha$ cortadura existe $y \in \alpha$ tal qye $y < x$. Por lo tanto $y \in \gamma$ y $y < x$, lo que síginifica que $\gamma$ no tiene mínimo

Como demostramos que $\gamma$ es el ínfimo entonces queda demostrado que $\mathbb{R}$ cumple la Condición de Completitud de Dedekind y además es un campo ordenado completo $\blacksquare$

# 8 Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

Sabemos que por definicion de numero complejo $z = a + bi \wedge w = c + di$, con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$

(a) $\overline{(-z)} = -\overline{z}$.

$$\begin{aligned}
\overline{(-z)} &= \overline{(-(a+bi))} \\
&= \overline{(-a-bi)}(\text{Por distributividad}) \\
&= -a+bi(\text{Por definicion de conjugado}) \\
&= -(a-bi)(\text{Por distributividad}) \\
&= -\overline{z}(\text{Por definicion de conjugado})
\end{aligned}$$

(b) $\overline{z} = z$.

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{a+bi}} \\
&= \overline{a-bi}(\text{Por definicion de conjugado}) \\
&= a+bi(\text{Por definicion de conjugado}) \\
&= z
\end{aligned}$$

(c) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.

$$\begin{aligned}
\overline{z-w} &= \overline{(a+bi)-(c+di)} \\
&= \overline{(a-c+(b-d)i}(\text{Asociatividad y conmutatividad}) \\
&= (a-c)-(b-d)i(\text{Definicion de conjugado}) \\
&= a-c-bi+di(\text{Distributividad}) \\
&= a-bi-c+di(\text{Conmutatividad}) \\
&= a-bi-(c-di)(\text{Distributividad}) \\
&= \overline{z}-\overline{w}(\text{Definicion de conjugado})
\end{aligned}$$

(d) $z + \overline{z} = 2Re(z)$ y $z - \overline{z} = 2ilm(z)$.

$$\begin{aligned}
\overline{z} + z &= a + bi + \overline{(a+bi)} \\
&= a + bi + a - bi(\text{Definicion de conjugado}) \\
&= 2a \\
&= 2Re(z)(\text{Definicion de la parte real de z}) \\
z - \overline{z} &= a + bi - \overline{(a+bi)} \\
&= a + bi - (a - bi)(\text{Definicion de conjugado}) \\
&= a + bi - a + bi)(\text{Distributividad}) \\
&= 2b \\
&= 2Im(z)(\text{Definicion de la parte imaginaria de z})
\end{aligned}$$

(e) $||\overline{z}|| = ||z||$.

$$\begin{aligned}
|\overline{z}| &= |\overline{a+bi}| \\
&= |a - bi|(\text{Por definicion de conjugado}) \\
&= |a + (-b)i|(\text{Asociatividad y distributividad}) \\
&= \sqrt{a^2 + (-b)^2}(\text{Por definicion de modulo}) \\
&= \sqrt{a^2 + b^2}(\text{Propiedades de los reales}) \\
&= |z|(\text{Por definicion de modulo})
\end{aligned}$$

(f) $|| - z|| = ||z||$.

$$\begin{aligned}
|-z| &= |-(a+bi)| \\
&= |-a-bi|(\text{Distributividad}) \\
&= |(-a) + (-b)i|(\text{Asociatividad y distributividad}) \\
&= \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}(\text{Por definicion de modulo}) \\
&= \sqrt{a^2 + b^2}(\text{Propiedades de los reales}) \\
&= |z|(\text{Por definicion de modulo})
\end{aligned}$$

(g) $||z|| - ||w|| \leq ||z - w||$.

$$\begin{aligned}
|z| &= |(z-w) + w| \\
&\leq |(z-w)| + |w|(\text{Por la desigualdad del triangulo en los complejos}) \\
\Rightarrow |z| &\leq |(z-w)| + |w|(\text{Por transitividad}) \\
|z| - |w| &\leq |(z-w)|(\text{Por propiedades de la desigualdad en los reales})
\end{aligned}$$

# 9 Sean $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $||z+w|| = ||z|| + ||w||$ si y sólo si $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

Suponemos que $||z+w|| = ||z|| + ||w||$, entonces

$$\begin{aligned}
|z+w| &= |z| + |w| \\
|a+bi+c+di| &= |a+bi| + |c+di| \\
\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} &= \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}(\text{Por definicion de modulo}) \\
(a+c)^2+(b+d)^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\
a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2 &= a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\
2ac+2bd &= 2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\
ac+bd &= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\
(ac+bd)^2 &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\
ac^2+2acbd+bd^2 &= ac^2+ad^2+bc^2+bd^2 \\
2acbd &= ad^2+bc^2 \\
0 &= ad^2-2acbd+bc^2 \\
0 &= (ad-bc)^2 \\
0 &= ad-bc \\
a &= \frac{bc}{d}
\end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado anterior en z,

$$\begin{aligned}
z &= \frac{bc}{d} + bi \\
z &= b(\frac{c}{d} + i) \\
z &= \frac{b}{d}(c+di) \\
z &= \frac{b}{d}w(\text{como } \frac{b}{d} = \lambda \in \mathbf{R}) \\
z &= \lambda w, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$
Suponemos que $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}
|z| + |w| &= |\lambda w| + |w| \text{(Por hipotesis)} \\
&= |\lambda||w| + |w| \\
&= (|\lambda| + 1)|w| \\
&= |(|\lambda| + 1)w| \\
&= ||\lambda|w + w| \\
&= |\lambda w + w| \text{(hay que preguntarle a ines este detalle)} \\
&= |z + w|
\end{aligned}$$

# 10 Encuentra todos los números $z \in \mathbb{C}$ tales que $\overline{z} = z^2$

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{z} = z^2$

$$\begin{aligned}\overline{z} &= z^2\\ \overline{a+bi} &= (a+bi)(a+bi)\\ a-bi &= a^2-b^2+2abi\end{aligned}$$

Esto implica que:
$\Rightarrow a = a^2 - b^2 ...(1)$
$\Rightarrow -b = 2ab$
Desarrollando la ultima expresion:

$$\begin{aligned}-b &= 2ab(b \neq 0)\\ 2a &= -1\\ a &= \frac{-1}{2}\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1):

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2} &= \frac{1}{4} - b^2\\ \frac{-3}{4} &= -b^2\\ b^2 &= \frac{3}{4}\\ b &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Eso implica $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ o $z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
Ahora si b=0, sustiuyendo en (1):

$$\begin{aligned}a^2 - a &= 0\\ a(a-1) &= 0\end{aligned}$$

Lo que implica que a= 0 o a = 1.
Eso implica z=0 o z=1
$\therefore z \in \{0, 1, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \}$

# 11 Encuentra todos los números $z \in \mathbb{C}$ tales que $w = \frac{z-1-i}{z+1+i}$

(a) es un número real. Sea $r = \frac{z-1-i}{z+1+i}$, tal que $r \in R$

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{z-1-i}{z+1+i} \\
r((a+bi)+1+i) &= (a+bi)-1-i \\
r(a+1)+r(b+1)i &= (a-1)+(b-1)i..........(1)
\end{aligned}
$$

Esto implica que:
$\Rightarrow r(a+1) = a-1$
$\Rightarrow r(b+1) = b-1$
Si $(a+1) \neq 0 \wedge (b+1) \neq 0$, entonces
$\Rightarrow r = \frac{a-1}{a+1}$
$\Rightarrow r = \frac{b-1}{b+1}$
Igualando r, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{b-1}{b+1} &= \frac{a-1}{a+1} \\
(b-1)(a+1) &= (a-1)(b+1) \\
ab+b-a-1 &= ab+a-b-1 \\
b-a &= a-b \\
2a &= 2b \\
a &= b
\end{aligned}
$$

Ahora si $a+1=0$, entonces $a=-1$, sustituyendo en (1):
$\Rightarrow r(-1+1)+r(b+1)i = (-1-1)+(b-1)i$
$\Rightarrow r(b+1)i = -2+(b-1)i$
$\Rightarrow 0 = -2$, lo que es una contradiccion
Ahora si $b+1=0$, entonces $b=-1$, sustituyendo en (1):
$\Rightarrow r(a+1)+r(-1+1)i = (a-1)+(-1-1)i$
$\Rightarrow r(a+1) = (a-1)+-2i$
$\Rightarrow 0 = -2$, lo que es una contradiccion
$\therefore$ Se cumple para todos los $z \in C$, de la forma z=a+ai, con $a \neq -1$
.
.
.

(b) $||w|| = 1$

Primero probaremos que para dos numeros complejos, $z, w \in C$, con $w \neq 0$ se cumple que $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$.

$$\begin{aligned}
|\frac{z}{w}| &= |\frac{a+bi}{c+di}| (\text{Con } a,b,c,d \in \mathbf{R}, \text{ por definicion de complejo}) \\
&= |\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}| \\
&= \frac{|(a+bi)(c-di)|}{c^2+d^2} \\
&= \frac{|ac - adi + bci + bd|}{c^2+d^2} \\
&= \frac{|(ac+bd) + (-ad+bc)i|}{c^2+d^2} \\
&= \frac{\sqrt{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2}}{c^2+d^2} \\
&= \frac{\sqrt{ac^2 + bd^2 + 2acbd + ad^2 + bc^2 - 2acbd}}{c^2+d^2} \\
&= \frac{\sqrt{ac^2 + bd^2 + ad^2 + bc^2}}{c^2+d^2} \\
&= \frac{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}{c^2+d^2} \\
&= \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{c^2+d^2}} \\
&= \frac{|z|}{|w|}
\end{aligned}$$

Sea $z \in \mathbf{C}$ tal que $|\frac{z-1-i}{z+1+i}| = 1$

$$
\begin{aligned}
|\frac{z-1-i}{z+1+i}| &= 1 \\
\frac{|z-1-i|}{|z+1+i|} &= 1 \\
|z-1-i| &= |z+1+i|
\end{aligned}
$$

Y por definicion de numero complejo.

$$
\begin{aligned}
|a+bi-1-i| &= |a+bi+1+i| (\text{Con } a, b, c, d \in \mathbf{R}) \\
\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2} &= \sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2} \\
(a-1)^2+(b-1)^2 &= (a+1)^2+(b+1)^2 \\
a^2-2a+1+b^2-2b+1 &= a^2+2a+1+b^2+2b+1 \\
-2a-2b &= 2a+2b \\
4a+4b &= 0 \\
a+b &= 0 \\
a &= -b
\end{aligned}
$$

Es decir los numeros son de la forma $z = a - ai$

## 12 Sean $z, w \in \mathbb{C}$.Si $z + w$ y $zw$ son reales, entonces $z = \overline{w}$

Si $z + w$ y $zw$ son reales entonces $z = \overline{w}$. Primero por definicion de complejo, $z = a + bi \wedge w = c + di$, con $a, b, c, d \in \mathbf{C}$

$$\begin{aligned} z+ &= a + bi + c + di \\ &= a + c + (b + d)i = r \in \mathbf{R} \\ \Rightarrow b + d &= 0 \\ \Rightarrow b &= -d \end{aligned}$$

$\therefore z = a - di \wedge w = c + di$ Ahora:

$$\begin{aligned} z(w) &= (a - di)(c + di) \\ &= ac + adi - dci + d^2 \\ &= ac + d^2 + (ad - dc)i = r \in \mathbf{R} \\ \Rightarrow ad - dc &= 0 \\ \Rightarrow ad &= dc (\text{Pero } d = Im(z) \neq 0) \\ \Rightarrow a &= c \end{aligned}$$

$\therefore z = c - di \wedge w = c + di$
Y por la definicion de conjugado $z = \overline{w}$

# 13 Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tales que

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \textbf{ y } ||z_1|| = ||z_2|| = ||z_3|| = 1,$$

**entonces** $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

Como $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 + z_3 &= 0 \\
(z_1 + z_2 + z_3)^2 &= 0 \\
z_1(z_1 + z_2 + z_3) + z_2(z_1 + z_2 + z_3) + z_3(z_1 + z_2 + z_3) &= 0 \\
z_1^2 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2^2 + z_2z_1 + z_2z_3 + z_3^2 + z_3z_1 + z_3z_2 &= 0 \\
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + 2z_2z_3 &= 0 \\
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= -(2z_1z_2 + 2z_1z_3 + 2z_2z_3) \\
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= -2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) \\
&= -2z_1z_2z_3(\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1}) \\
&= -2z_1z_2z_3(\frac{|z_3|}{z_3} + \frac{|z_2|}{z_2} + \frac{|z_1|}{z_1}) \\
&= -2z_1z_2z_3(\frac{z_3\overline{z_3}}{z_3} + \frac{z_2\overline{z_2}}{z_2} + \frac{z_1\overline{z_1}}{z_1}) \\
&= -2z_1z_2z_3(\overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1})
\end{aligned}$$

$\therefore z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -2z_1z_2z_3(\overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1})$....(1)
Por definicion de complejos, $z_1 = a_1 + b_1 i \wedge z_2 = a_2 + b_2 i \wedge z_3 = a_3 + b_3 i$, veamos ahora quien es $\overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1}$

$$\begin{aligned}
\overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1} &= \overline{a_1 + b_1 i} + \overline{a_2 + b_2 i} + \overline{a_3 + b_3 i} \\
&= a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i + a_3 - b_3 i \\
&= a_1 + a_2 + a_3 - (b_1 + b_2 + b_3)i \\
&= \overline{a_1 + a_2 + a_3 + (b_1 + b_2 + b_3)i} \\
&= \overline{a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i + a_3 + b_3 i} \\
&= \overline{z_1 + z_2 + z_3} \\
&= \overline{0}(\text{Por hipotesis}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\therefore \overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1} = 0$, sustituyendo en (1):

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -2z_1z_2z_3(\overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1})$$
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = -2z_1z_2z_3(0)$$
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$$

# 14 Encuentra todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacenlas siguientes igualdades

(a) $z^2 - 8(1-i)z + (63 - 16i) = 0$,

(b) $-5z^2 + \sqrt{2}z - 1 = 0$,

(c) $4z^4 - 5iz^2 + 1 = 0$.

Para (a) $z^2 - 8(1-i)z + (63-16i) = z^2 - (8-8i)z + (63-16i) = 0$, así podemos ver con más claridad que:

$$a = 1$$
$$b = (-8 + 8i)$$
$$c = (63 - 16i)$$

ahora podemos ocupar la fórmula general:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sustituimos con los valores dados

$$\frac{-(-8+8i) \pm \sqrt{(-8+8i)^2 - 4(1)(63-16i)}}{2(1)}$$

y resolvemos

$$\frac{8 - 8i \pm \sqrt{(64 + 2(-8)(8i) + 64i^2 - 4(63 - 16i)}}{2}$$

$$\frac{8 - 8i \pm \sqrt{(64 + (-128i) + 64(-1) - (252 - 64i)}}{2}$$

$$\frac{8 - 8i \pm \sqrt{(64 - 128i - 64 - 252 + 64i)}}{2}$$

$$\frac{8 - 8i \pm \sqrt{(-252 - 128i + 64i)}}{2}$$

$$\frac{8 - 8i \pm \sqrt{(-252 - 64i)}}{2}$$

para poder seguir resolviendolo, necesitamos saber cual es la $\sqrt{-252 - 64i}$, como $-64 < 0$ ocupamos

$$x = \pm\left(\sqrt{\tfrac{||z||+Re(z)}{2}} - i\sqrt{\tfrac{||z||-Re(z)}{2}}\right)$$

calculamos $||z||$

$$||z|| = \sqrt{(-252)^2 + (-64)^2}$$
$$||z|| = \sqrt{63504 + 4096}$$
$$||z|| = \sqrt{67600} = 260$$

y $Re(z) = -252$
con esto ya podemos ocupar la formula

$$x = \pm\left(\sqrt{\tfrac{260+(-252)}{2}} - i\sqrt{\tfrac{260-(-252)}{2}}\right)$$

$$x = \pm\left(\sqrt{\tfrac{8}{2}} - i\sqrt{\tfrac{512)}{2}}\right)$$

$$x = \pm\left(\sqrt{4} - i\sqrt{256}\right) = \pm\left(2 - i16\right)$$

entonces

$$x_1 = (2 - 16i) \qquad\qquad x_2 = -(2 - 16i)$$

sabiendo el resultado de esta raíz continuamos con la operación anterior

$$\frac{8 - 8i \pm (\pm(2 - 16i))}{2}$$

El resultado de $z$ se divide en 4

$$z_1 = \tfrac{8-8i+(+(2-16i))}{2} = \tfrac{8}{2} + \tfrac{-8i}{2} + \tfrac{2}{2} + \tfrac{-16i}{2} = 4 - 4i + 1 - 8i = 5 - 12i$$

$$z_2 = \tfrac{8-8i+(-(2-16i))}{2} = \tfrac{8-8i+(-2+16i))}{2} = \tfrac{8}{2} + \tfrac{-8i}{2} + \tfrac{-2}{2} + \tfrac{16i}{2} = 4 - 4i - 1 + 8i = 3 + 4i$$

$$z_3 = \tfrac{8-8i-(-(2-16i))}{2} = \tfrac{8}{2} + \tfrac{-8i}{2} + \tfrac{2}{2} + \tfrac{-16i}{2} = 4 - 4i + 1 - 8i = 5 - 12i$$

$$z_4 = \tfrac{8-8i-(+(2-16i))}{2} = \tfrac{8-8i+(-2+16i))}{2} = \tfrac{8}{2} + \tfrac{-8i}{2} + \tfrac{-2}{2} + \tfrac{16i}{2} = 4 - 4i - 1 + 8i = 3 + 4i$$

Y como $z_1 = z_3$ y $z_2 = z_4$ nos quedan dos resultados que son:

$$z_1 = 5 - 12i \qquad\qquad z_2 = 3 + 4i$$

Para (b) $-5z^2+\sqrt{2}z-1=0$ es claro ver que:

$$\begin{gathered} a=-5 \\ b=\sqrt{2} \\ c=-1 \end{gathered}$$

Sustituimos en la fórmula general los valores dados

$$z=\frac{-(\sqrt{2})\pm\sqrt{(\sqrt{2})^2-4(-5)(-1)}}{2(-5)}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-20}}{-10}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-18}}{-10}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{(-1)18}}{-10}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{(-1)}\sqrt{18}}{-10}=\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{18}}{-10}$$

entonces

$$z_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{18}i}{-10} \qquad z_2=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{18}i}{-10}$$

Para (c) $4z^4-5iz^2+1=0$ notamos que:

$$\begin{gathered} a=14 \\ b=-5i \\ c=1 \end{gathered}$$

Sustituimos en la fórmula general:

$$z^2=\frac{-(-5i)\pm\sqrt{(-5i)^2-4(14)(1)}}{2(14)}$$

$$=\frac{5i\pm\sqrt{25i^2-56}}{28}=\frac{5i\pm\sqrt{-25-56}}{28}=\frac{5i\pm\sqrt{-81}}{28}=\frac{5i\pm\sqrt{9^2(-1)}}{28}=\frac{5i\pm 9i}{28}$$

entonces

$$z_1^2=\frac{14i}{28}=\frac{i}{2} \qquad z_2^2=-\frac{4i}{28}=-\frac{i}{7}$$

tenemos

$$z_1=\sqrt{\frac{i}{2}} \qquad z_2=\sqrt{-\frac{i}{7}}=\sqrt{\frac{-(1)i}{7}}=i\sqrt{\frac{i}{7}}$$

# 15 Hallar los números de $z \in \mathbb{C}$ tales que $w = \frac{2z-1}{z-2}$ tiene argumento $\frac{\pi}{2}$

Sea $w = (a, b)$ donde $a, b \in R$ son coordenadas en el plano cartesiano.
Como el argumento es $\frac{\pi}{2}$ sabemos que $a = 0$ y $b > 0$, lo que implica que $Re(w) = 0$ entonces $w = yi$
Resolvamos la ecuación $yi = \frac{2z-1}{z-2} | y > 0$

$$
\begin{aligned}
yi &= \frac{2z-1}{z-2} && (y \in \mathbb{R} : y > 0) \\
yi &= \frac{2z-1}{z-2} && (\text{Sustituimos } z = a + bi) \\
yi &= \frac{2(a+bi)-1}{(a+bi-2)} \\
yi &= \frac{(2(a+bi)-1)(a-bi-2)}{a^2+b^2} && (\text{Multiplicamos por el conjugado}) \\
yi &= \frac{((2a-1)+2bi)((a-2)-bi)}{a^2+b^2} \\
yi &= \frac{((2a-1)+2bi)((a-2)-bi)}{a^2+b^2} \\
yi &= \frac{(2a-1)(a-2)+2bi(a-2)-bi(2a-1)+2b^2}{a^2+b^2} \\
yi &= \frac{(2a-1)(a-2)+2bia-4bi-bi2a+bi+2b^2}{a^2+b^2} \\
yi &= \frac{(2a-1)(a-2)-3bi+2b^2}{a^2+b^2}
\end{aligned}
$$

y esto implica que:

$$\frac{(2a-1)(a-2)+2b^2}{a^2+b^2} = 0$$

$$\frac{-3bi}{a^2+b^2} = yi$$

Desarrollando la primera ecuacion :

$$\begin{aligned}
\frac{(2a-1)(a-2)+2b^2}{a^2+b^2} &= 0 \\
(2a-1)(a-2)+2b^2 &= 0 \\
2a^2-a-4a+2+2b^2 &= 0 \\
2a^2-5a+(2+2b^2) &= 0
\end{aligned}$$

Y por la formula general para encontrar las soluciones de un sistema de segundo orden:

$$\begin{aligned}
\frac{5 \pm \sqrt{25-4(2)(2+2b^2)}}{2(2)} &= a \\
\frac{5 \pm \sqrt{25-16+16b^2)}}{2(2)} &= a \\
\frac{5 \pm \sqrt{9+16b^2}}{2(2)} &= a \\
\frac{5 \pm \sqrt{9+16b^2}}{4} &= a
\end{aligned}$$

Por lo que las soluciones del sistema son:

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{9+16b^2}}{4} + bi$$

Pero en el proceso asumimos que $z-2 \neq 0$, es decir $a+bi-2 \neq 0$, esto implica $a-2 \neq 0 \wedge bi \neq 0$.
Ahora si $b \neq 0$, no importa que a $a-2=0$, porque no surge la indeterminacion, debido al real, si $b=0$:

$$\begin{gathered}
a = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \\
a = \frac{5 \pm 3}{4} \\
a = \frac{5+3}{4} \wedge a = \frac{5-3}{4} \\
a = \frac{8}{4} \wedge a = \frac{2}{4}
\end{gathered}$$

$$a - 2 = \frac{8}{4} - 2 \wedge a - 2 = \frac{2}{4} - 2$$
$$a - 2 = 0 \wedge a - 2 = \frac{-3}{2}$$

Por lo que la unica solucion, de b no valida para el sistema es tomar la raiz positiva cuando b vale cero. Finalmente

$$z \in \{x \in \mathbb{C} | x = \frac{5 \pm \sqrt{9 + 16b^2}}{4} + bi, con\ b \in \mathbb{R}\} - \{2\}$$

# 16 Calcula las siguientes potencias de complejos

(a) $(1+\sqrt{3}i)^{12}$,

(b) $(-2\sqrt{3}+2i)^{8}$,

(c) $\left(\sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{12})+isen(\frac{\pi}{12}))\right)^{3}$.

Para calcular las potencias de los números complejos en su forma binomica es fácil ocupar el triangulo de Pascal, pero conforme la potencia del binomio es más grande el procedimiento se vuelve cada vez más laborioso; una forma más sencilla y rápida es pasar el número complejo a su forma polar y asi ocupar la siguiente formula:

$$z = r(cis(\theta)) \rightarrow z^n = r^n(cis(n\cdot\theta))$$

ó

$$z^n = r^n(cos(n\cdot\theta)+isen(n\cdot\theta))$$

Dicho esto, para (a) lo convertimos en su forma polar,
$r = ||z|| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
$\theta = tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60$
$z = 2(cis(60))$ (y aplicando la formula (1))

$$z^{12} = r^{12}(cis(12\cdot\theta)) = 2^{12}(cis(12\cdot 60)) = 4096(cis(720)) = 4096(cis(360))$$

O en su forma binomica
$(a+b)^{12} = a^{12}+12a^{11}b+66a^{10}b^2+220a^9b^3+495a^8b^4+792a^7b^5+924a^6b^6+792a^5b^7+495a^4b^8+220a^3b^9+66a^2b^{10}+12ab^{11}+b^{12}$

sustituimos $(a+b)$ con $(1+\sqrt{3}i)$

$(1+\sqrt{3}i)^{12} = 1^{12}+12(1)^{11}(\sqrt{3}i)+66(1)^{10}(\sqrt{3}i)^2+220(1)^9(\sqrt{3}i)^3+495(1)^8(\sqrt{3}i)^4+792(1)^7(\sqrt{3}i)^5+924(1)^6(\sqrt{3}i)^6+792(1)^5(\sqrt{3}i)^7+495(1)^4(\sqrt{3}i)^8+220(1)^3(\sqrt{3}i)^9+66(1)^2(\sqrt{3}i)^{10}+12(1)(\sqrt{3}i)^{11}+(\sqrt{3}i)^{12}$

$(1+\sqrt{3}i)^{12} = 1+12(1)(\sqrt{3}i)+66(1)(\sqrt{3}i)^2+220(1)(\sqrt{3}i)^3+495(1)(\sqrt{3}i)^4+792(1)(\sqrt{3}i)^5+924(1)(\sqrt{3}i)^6+792(1)(\sqrt{3}i)^7+495(1)(\sqrt{3}i)^8+220(1)(\sqrt{3}i)^9+$

$66(1)(\sqrt{3}i)^{10} + 12(1)(\sqrt{3}i)^{11} + (\sqrt{3}i)^{12}$

$(1+\sqrt{3}i)^{12} = 1+12(\sqrt{3}i)+66(3(i^2))+220(3\sqrt{3}(i^3)+495(9(i^4))+792(9\sqrt{3}(i^5))+ 924(27(i^6)) + 792(27\sqrt{3}(i^7)) + 495(81(i^8)) + 220(81\sqrt{3}(i^9)) + 66(243(i^{10}))+ 12(243\sqrt{3}(i^{11})) + (729(i^{12}))$

$(1+\sqrt{3}i)^{12} = 1+12(\sqrt{3}i)+66(3(-1))+220(3\sqrt{3}(-i)+495(9(1))+792(9\sqrt{3}(i))+ 924(27(-1)) + 792(27\sqrt{3}(-i)) + 495(81(1)) + 220(81\sqrt{3}(i)) + 66(243(-1))+ 12(243\sqrt{3}(-i)) + (729(1))$
(se resuelven las i de esta manera ya que es como un ciclo al potenciar las i ($i^2 = -1, i^3 = i^2 i = -1i = -i, i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1, i^5 = i^4 i = 1i = i$ y se acaba el ciclo en i))

$(1+\sqrt{3}i)^{12} = 1+12(\sqrt{3}i)+66(-3)-220(3\sqrt{3}i)+495(9)+792(9\sqrt{3}i)+924(-27)- 792(27\sqrt{3}i) + 495(81) + 220(81\sqrt{3}i) + 66(-243) - 12(243\sqrt{3}i) + (729)$

$(1 + \sqrt{3}i)^{12} = 1 + 12(\sqrt{3}i) - 198 - 220(3\sqrt{3}i) + 4455 + 792(9\sqrt{3}i) - 24948 - 792(27\sqrt{3}i) + 40095 + 220(81\sqrt{3}i) - 16038 - 12(243\sqrt{3}i) + 729$

$(1 + \sqrt{3}i)^{12} = 1 - 198 + 4455 - 24948 + 40095 - 16038 + 729 + 12(\sqrt{3}i) - 220(3\sqrt{3}i) + 792(9\sqrt{3}i) - 792(27\sqrt{3}i) + 220(81\sqrt{3}i) - 12(243\sqrt{3}i)$

$(1+\sqrt{3}i)^{12} = 4096+12(\sqrt{3}i)-220(3\sqrt{3}i)+792(9\sqrt{3}i)-792(27\sqrt{3}i)+220(81\sqrt{3}i)- 12(243\sqrt{3}i)$

$(1 + \sqrt{3}i)^{12} = 4096 + (\sqrt{3}i)(12 - 220(3) + 792(9) - 792(27) + 220(81) - 12(243))$

$(1 + \sqrt{3}i)^{12} = 4096 + (\sqrt{3}i)(12 - 660 + 7128 - 21384 + 17820 - 2916)$

$(1 + \sqrt{3}i)^{12} = 4096 + (\sqrt{3}i)(0)$

$(1 + \sqrt{3}i)^{12} = (4096 + 0i)$

Para (b) lo convertimos en su forma polar, y aplicamos la formula (1).
$r = ||z|| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12 + 4} = \sqrt{16} = 4$
$\theta = tan^{-1} \frac{2}{-2\sqrt{3}} = tan^{-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = 30$
$z = 4(cis(30))$

$$z^8 = r^8(cis(8 \cdot \theta)) = 4^8(cis(8 \cdot 30)) = 65536(cis(240))$$

Para (c), que ya esta en su forma polar, ocupamos la formula (2)

$$z^n = r^n(cos(n \cdot \theta) + isen(n \cdot \theta))$$
$$z^3 = \sqrt{2}^3(cos(3 \cdot \frac{\pi}{12}) + isen(3 \cdot \frac{\pi}{12}))$$
$$z^3 = 2\sqrt{2}(cos(\frac{3\pi}{12}) + isen(\frac{3\pi}{12}))$$
$$z^3 = 2\sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4}))$$

# 17 Para toda $n \in \mathbb{N}$:

(a) $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(cos(\frac{n\pi}{4}) + isen(\frac{n\pi}{4})\right)$
Calculemos el modulo:

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^1} = \sqrt{2}$$

Calculemos el argumento

$$\theta = arctan(\frac{1}{1}) = \frac{\pi}{4}$$

Entonces aplicando la formula:

$$z^n = |z|^n(cos(n\cdot\theta) + isen(n\cdot\theta))$$

Tenemos que:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n(cos(n\cdot\frac{\pi}{4}) + isen(n\cdot\frac{\pi}{4})$$

y por leyes de los exponentes

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}(cos(\frac{n\pi}{4}) + isen(\frac{n\pi}{4})$$

(b) $(\sqrt{3}-i)^n = 2^n\left(cos(\frac{n\pi}{6}) + isen(\frac{n\pi}{6})\right)$ Calculemos el modulo:

$$|\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Calculemos el argumento

$$\theta = arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$$

Entonces aplicando la formula:

$$z^n = |z|^n(cos(n\cdot\theta) + isen(n\cdot\theta))$$

Tenemos que:

$$(\sqrt{3}-i)^n = 2^n(cos(t\frac{n\pi}{6}) + isen(\frac{n\pi}{6})$$

# 18 Sean $z = ||z||\left(cos(\theta) + isen(\theta)\right)$, $w = ||w||\left(cos(\varphi) + isen(\varphi)\right) \in \mathbb{C}$. si $w \neq 0$, entonces

$$\frac{z}{w} = \frac{||z||}{||w||}\left(cos(\theta-\varphi) + isen(\theta-\varphi)\right)$$

Notamos:

$$\frac{z}{w} = \frac{||z||}{||w||} \cdot \frac{cos(\theta) + isen(\theta)}{cos(\varphi) + isen(\varphi)}$$

Multiplicamos por el conjugado del denominador:

$$= \frac{||z||}{||w||} \cdot \frac{cos(\theta) + isen(\theta)}{cos(\varphi) + isen(\varphi)} \cdot \frac{cos(\varphi) - isen(\varphi)}{cos(\varphi) - isen(\varphi)}$$

Tenemos:

$$= \frac{||z||}{||w||} \cdot \frac{\left(cos(\theta)cos(\varphi) + sen(\theta)sen(\varphi)\right) + \left(cos(\varphi)sen(\theta) - cos(\theta)sen(\varphi)\right)i}{cos^2(\varphi) + sen^2(\varphi)}$$

Distinguimos las siguientes identidades trigonométricas y sustituimos:

$$cos(\theta-\varphi) = cos(\theta)cos(\varphi) + sen(\theta)sen(\varphi)$$

$$sen(\theta-\varphi) = cos(\varphi)sen(\theta) - cos(\theta)sen(\varphi)$$

$$cos^2(\varphi) + sen^2(\varphi) = 1$$

Nos queda:

$$= \frac{||z||}{||w||} \cdot \frac{cos(\theta-\varphi) + sen(\theta-\varphi)i}{1} = \frac{||z||}{||w||}\left(cos(\theta-\varphi) + isen(\theta-\varphi)\right)$$

# 19 Haz las siguientes operaciones usando la forma polar de los complejos implicados:

(a) $\frac{(2\sqrt{3}+2i)^8}{(i-1)^6}$;

(b) $\frac{(-1+i)^4}{(\sqrt{3}-i)}$;

(c) $(1+\sqrt{3}i)^n + (1-\sqrt{3}i)^n$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

Para (a) sea $z_1 = (2\sqrt{3}+2i)^8$ y sea $z_2 = (i-1)^6$
convertimos a $z_1$ en su forma polar:

$$r = ||z|| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\theta = tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = 30$$

Entonces la forma polar de $z_1 = 4(cis(30))$ y aplicando la formula vista en el inciso 16, al elevar a la potencia 8, queda de la siguiente manera:

$$z_1^8 = 4^8(cis(8 \cdot 30))$$

$$z_1^8 = 65536(cis(240))$$

Ahora convertimos a $z_2$ en su forma polar:

$$r = ||z|| = \sqrt{((-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = tan^{-1}\frac{1}{-1} = tan^{-1} - 1 = -\frac{\pi}{4} = -45 = 315$$

Entonces la forma polar de $z_2 = \sqrt{2}(cis(315))$ y aplicando la formula vista en el inciso 16, al elevar a la potencia 6, queda de la siguiente manera:

$$z_2^6 = \sqrt{2}^6(cis(6 \cdot 315))$$

$$z_2^6 = 8(cis(1890))$$

$$z_2^6 = 8(cis(90))$$

Ahora procedemos a calcular la division con los números complejos ya proporcionados:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{65536(cis(240))}{8(cis(90))}$$

Por el inciso 18 sabemos que la formula de la division es igual a:

$$\frac{z}{w} = \frac{||z||}{||w||}\left(cos(\theta - \varphi) + isen(\theta - \varphi)\right).$$

o de igual manera

$$\frac{z}{w} = \frac{||z||}{||w||}\left(cis(\theta - \varphi)\right).$$

entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = 8192(cis(240 - 90))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 8192(cis(150))$$

Para (b) sea $z_1 = (-1+i)^4$ y sea $z_2 = (\sqrt{3} - i)$
convertimos a $z_1$ en su forma polar:

$$r = ||z|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$\theta = tan^{-1}\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4} = -45 = 315$$

Entonces la forma polar de $z_1 = \sqrt{2}(cis(315))$ y aplicando la formula vista en el inciso 16, al elevar a la potencia 4, queda de la siguiente manera:

$$z_1^4 = \sqrt{2}^4(cis(4 \cdot 315))$$
$$z_1^4 = 4(cis(1260))$$
$$z_1^4 = 4(cis(180))$$

Ahora convertimos a $z_2$ en su forma polar:

$$r = ||z|| = \sqrt{((\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$
$$\theta = tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = tan^{-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6} = -30 = 330$$

Entonces la forma polar de $z_2 = 2(cis(330))$ como no hace falta elevarlo a ninguna potencia (esta a la potencia 1) calculamos la division con los números complejos ya proporcionados:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4(cis(180))}{2(cis(330))}$$

Por el inciso 18 sabemos que la formula de la division es igual a:

$$\frac{z}{w} = \frac{||z||}{||w||}\left(cos(\theta - \varphi) + isen(\theta - \varphi)\right).$$

o de igual manera

$$\frac{z}{w} = \frac{||z||}{||w||}\left(cis(\theta - \varphi)\right).$$

entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = 2(cis(180 - 330))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 2(cis(-150))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = 2(cis(210))$$

Para (c) sea $z_1 = (1 + \sqrt{3}i)^n$ y sea $z_2 = (1 - \sqrt{3}i)^n$
convertimos a $z_1$ en su forma polar:

$$r = ||z|| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} = 60$$

Entonces $z_1$ en su forma polar es igual a:

$$2(cis(\frac{\pi}{3})) = 2(cos(\frac{\pi}{3}) + isen(\frac{\pi}{3}))$$

Ahora convertimos a $z_2$ a su forma polar:

$$r = ||z|| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\theta = tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1} = tan^{-1} - \sqrt{3} = -\frac{\pi}{3} = -60 = 300$$

Entonces $z_2$ en su forma polar es igual a:

$$2(cis(-\frac{\pi}{3})) = 2(cis(\frac{5\pi}{3})) = 2(cos(\frac{5\pi}{3}) + isen(\frac{5\pi}{3}))$$

Ahora elevamos ambos a la potencia $n$

$$(z_1)^n = 2^n(cis(\frac{n\pi}{3}))$$

$$(z_2)^n = 2^n(cis(-\frac{n\pi}{3}))$$

Ahora sumamos a los dos números elevados a la $n$

$$(z_1)^n + (z_2)^n = 2^n(cis(\frac{n\pi}{3})) + 2^n(cis(-\frac{n\pi}{3}))$$

$$= 2^n(cis(\frac{n\pi}{3})) + 2^n(-cis(\frac{n\pi}{3}))$$

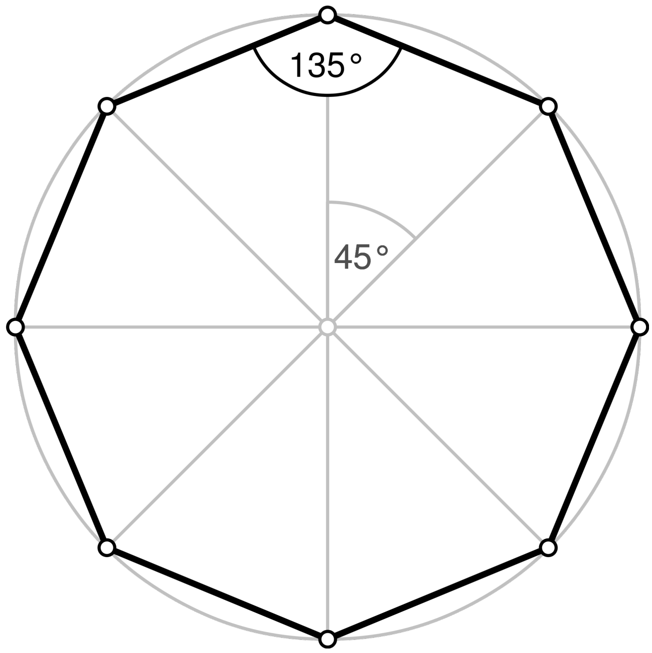
$$= 2^n(cis(\frac{n\pi}{3}) - cis(\frac{n\pi}{3}))$$

$$= 2^n(0)$$

$$= 0$$

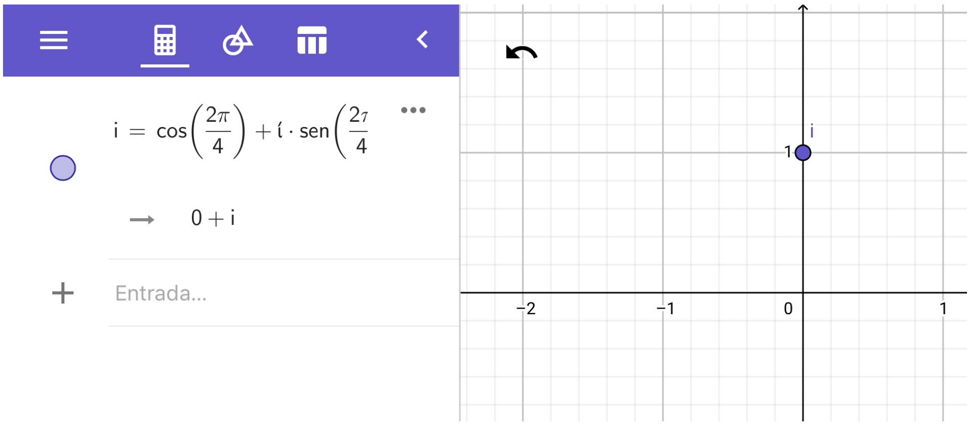
# 20 Encuentra los vértices del octágono regular que tiene centro en 0 y uno de sus vértices en i.

Sabemos que un octágono regular está conformado por 8 triángulos equilateros, cada uno con un ángulo de 45 grados (360 dividido entre 8 da 45), como se muestra en la imagen:



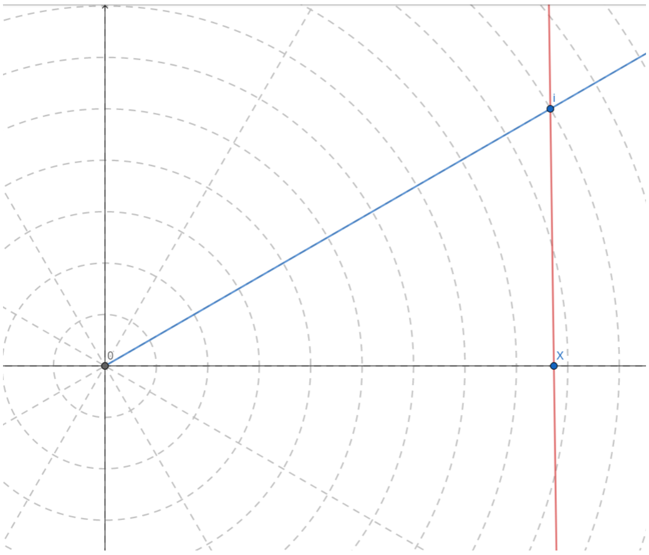

Octágono regular y sus triángulos equilateros

También sabemos que a i lo podemos ver de la forma a+ib tal que a=0 y b=1, o sea el vértice $z_1 = 0 + ib$, sacando su modulo $||z_1|| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$ y podemos ver que su angulo es de 90 grados como se muestra en la siguiente figura:




Vertice i

y en su forma polar podemos ver a $z_1$ como $1(cos(\frac{2\pi}{4}) + isen(\frac{2\pi}{4}))$ ya que 90 grados los podemos ver como $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{2\pi}{4}$ y al sumar $\frac{1}{4}$ a $\theta$ del número dado para cada vertice encontraremos al siguiente vertice, que se veran de la siguiente forma:



Uno de los triangulos representado con el centro y el vertice $i$

Entonces calculamos:

$$z_2 = \left(cos\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{1}{4}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{4} + \frac{1}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = \left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

el vertice lo podemos representar en forma de coordenada $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ó (-0.707107, 0.707107)

$$z_3 = \left( cos\left(\frac{4\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{4}\right)\right) \qquad (-1, 0)$$

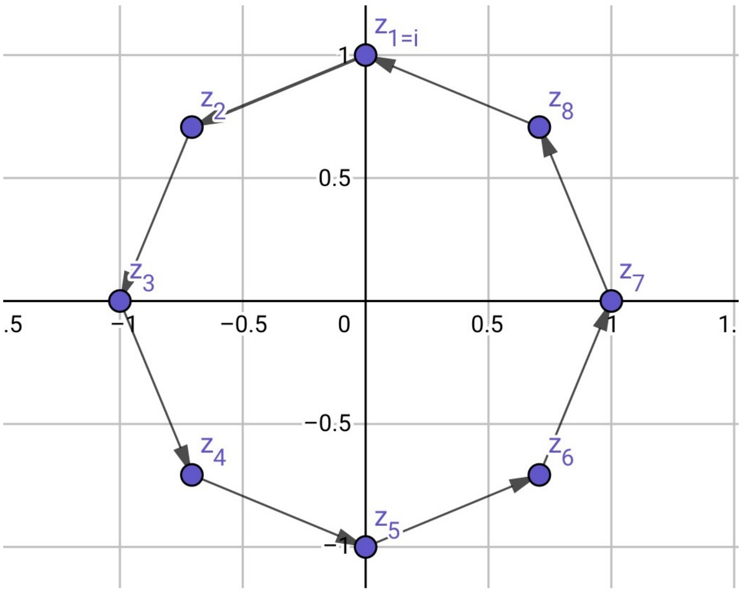
$$z_4 = \left( cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \qquad (-0.707107, -0.707107)$$

$$z_5 = \left( cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right) \qquad (0, -1)$$

$$z_6 = \left( cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) \qquad (0.707107, -0.707107)$$

$$z_7 = \left( cos\left(\frac{8\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{8\pi}{4}\right)\right) \qquad (1, 0)$$

$$z_8 = \left( cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) \qquad (0.707107, 0.707107)$$




Octágono regular con los vertices dados