Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas para las Ciencias Aplicadas II

Tarea III

Alumno: Arroyo Lozano Santiago

Profesor: Héctor "Awakatito" Díaz

Ciencias de la computación

May 16, 2020

1 Localizar en el plano:

Sabemos que las coordenadas polares son de la forma (r, θ)

1.1 $(3, \frac{-2\pi}{3})$

Esta coordenada nos indica que tiene radio 3 y $\theta = \frac{-2\pi}{3}$. Se encuentra entonces en el circulo 3 y como $\frac{-2\pi}{3} = -120°$ el grado positivo es 240°. Le llamaremos punto A

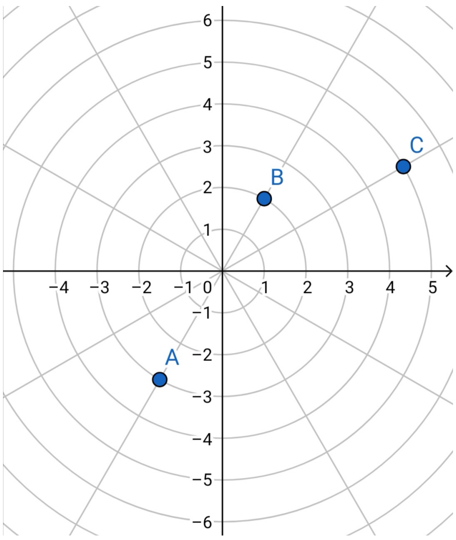
1.2 $(-2, \frac{4\pi}{3})$

Esta coordenada nos indica que tiene radio -2, pero tomamos valores positivos, entonces se encuentra entonces en el circulo 2 y $\frac{-2\pi}{3} = 60°$. Le llamaremos punto B

1.3 $(-5, \frac{-17\pi}{6})$

Esta coordenada nos indica que tiene radio -5, pero tomamos valores positivos, entonces se encuentra entonces en el circulo 5 y $\frac{-17\pi}{6} = 30°$. Le llamaremos punto C

Veamos ahora donde se encuentran nuestros puntos A,B,C:



Puntos A, B, C en el plano polar

2 Demuestre que la gráfica $r = aCos\theta + bSen\theta$ es una circunferencia (Encontrar centro y radio)

Sabemos que $(x, y) \to (r, \theta)$ y además $x = rCos\theta \quad y = rSen\theta$
tal que $r^2 = x^2 + y^2$. Y la forma canónica del círculo es: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
Seguimos entonces:

$$\begin{aligned}
r &= aCos\theta + bSen\theta \\
r^2 &= (aCos\theta + bSen\theta) \cdot r && \text{(Multiplicamos por } r\text{)} \\
r^2 &= arCos\theta + brSen\theta && \text{(Distributividad)} \\
x^2 + y^2 &= ax + by && \text{(Identidades de } x, y, r^2\text{)} \\
x^2 + y^2 - ax - by &= 0 && \text{(Igualamos a 0)}
\end{aligned}$$

Formamos un trinomio cuadrado perfecto sin perder la igualdad

$$\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) + \left(y^2 - by + \frac{b^2}{4}\right) = 0 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$$
$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

El centro del círculo estará dado por (a, b) con r = $\frac{a^2+b^2}{4}$
Y como ya obtuvimos que la ecuación sí se puede escribir como la forma canónica de un circulo queda demostrado $\blacksquare$

3 Sea $0 \leq \theta < 2\pi$, demuestre:

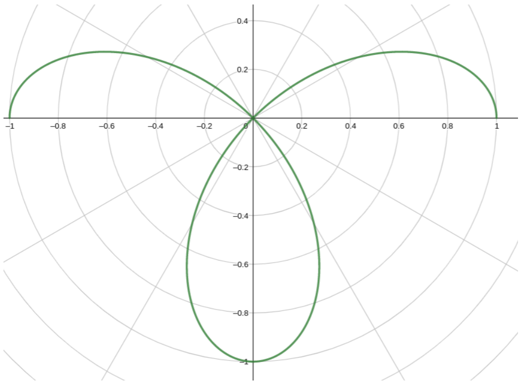
3.1 Que $r = cos2\theta$ es una rosa de cuatro pétalos

$cos(2(-\theta) = cos2\theta$
$\therefore$ SI es simétrica respecto al eje polar

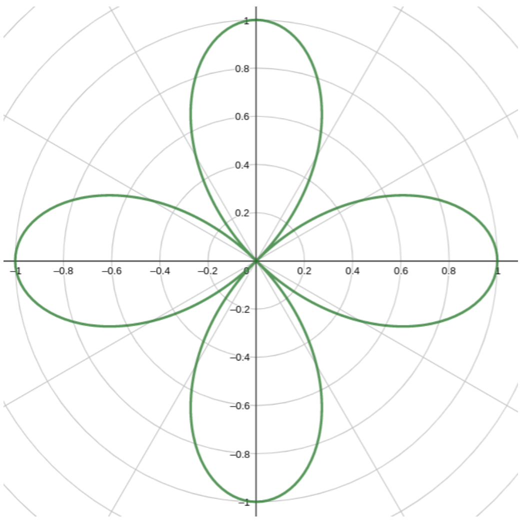
$-r = cos2\theta \rightarrow r = -cs2\theta$
$\therefore$ NO es simétrica respecto al polo

$cos(2(\pi - \theta) = cos2\theta$
$\therefore$ SI es simétrica respecto al eje copolar

Entonces la gráfica:



Se replica conforme al eje polar y copolar resultando en:



$r = cos2\theta$

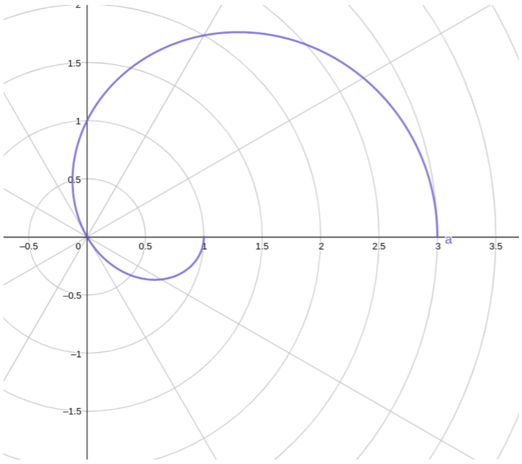
3.2 Que $r = 1 + 2cos\theta$ es un caracol

$1 + 2cos(-\theta) = 1 + 2cos(\theta)$
$\therefore$ SI es simétrica respecto al eje polar

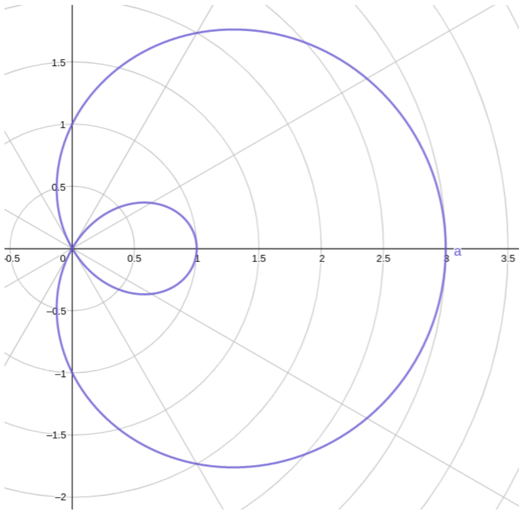
$-r = 1 + 2cos2\theta \rightarrow r = 1 - cos2\theta$
$\therefore$ NO es simétrica respecto al polo

$1 + 2cos(\pi - \theta) = 1 - 2cos\theta$
$\therefore$ NO es simétrica respecto al eje copolar

Entonces la gráfica:



Se replica conforme al eje polar resultando en:



$$r = 1 + 2cos\theta$$

4 Demostrar: $\frac{\vec{a}\cdot\hat{\mathbf{i}}}{|\vec{a}|\cdot|\hat{\mathbf{i}}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$ Donde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

Sabemos que $\hat{\mathbf{i}}$ es un vector unitario tal que $|\hat{\mathbf{i}}| = 1$ donde $\hat{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$,seguimos:

$$\begin{aligned}\frac{\vec{a}\cdot\hat{\mathbf{i}}}{|\vec{a}|\cdot|\hat{\mathbf{i}}|} &= \frac{(a_1, a_2, a_3)\cdot(1,0,0)}{|\vec{a}|\cdot 1}\\ &= \frac{a_1}{|\vec{a}|} \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Y análogamente podemos notar que se cumple:

$$\begin{aligned}\frac{\vec{a}\cdot\hat{\mathbf{j}}}{|\vec{a}|\cdot|\hat{\mathbf{j}}|} &= \frac{a_2}{|\vec{a}|}\\ \frac{\vec{a}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{|\vec{a}|\cdot|\hat{\mathbf{k}}|} &= \frac{a_3}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

Donde $\hat{\mathbf{j}} = (0, 1, 0) \wedge \hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$

5 Demostrar que los ángulos directores α, β, γ de un vector $\vec{a} \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ cumplen:

5.1 $(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) = \frac{1}{|\vec{a}|}(a_1, a_2, a_3)$

Osease *P.D.* $(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
Sabemos que:

$$cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \to a_1 = |\vec{a}|cos\alpha$$
$$cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \to a_2 = |\vec{a}|cos\beta$$
$$cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} \to a_3 = |\vec{a}|cos\gamma$$

Entonces:

$$\vec{a} = (|\vec{a}|cos\alpha, |\vec{a}|cos\beta, |\vec{a}|cos\gamma)$$
$$\vec{a} = |\vec{a}|(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) \qquad \text{(Factorizamos)}$$
$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}|(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)}{|\vec{a}|} \qquad \text{(Dividimos sobre } |\vec{a}|\text{)}$$
$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) \qquad \blacksquare$$

5.2 $cos\alpha^2, cos\beta^2, cos\gamma^2 = 1$

Sea $(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ un vector, tenemos:

$$|(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)| = \sqrt{cos\alpha^2, cos\beta^2, cos\gamma^2} \qquad \text{(Def. de norma)}$$

Pero como or 5.1 sabemos que $(cos\alpha, cos\beta, cos\gamma) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ y como $|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}| = 1$ porque es un vector unitario tenemos:

$$\sqrt{cos\alpha^2, cos\beta^2, cos\gamma^2} = 1$$
$$\left(\sqrt{cos\alpha^2, cos\beta^2, cos\gamma^2}\right)^2 = 1^2 \qquad \text{(Elevamos al cuadrado)}$$
$$cos\alpha^2, cos\beta^2, cos\gamma^2 = 1 \qquad \blacksquare$$