Universidad Nacional Autonoma de Mexico

Facultad de Ciencias

Graficas y Juegos

Tarea II

Alumnos:
Arroyo Lozano Santiago
Arévalo Gaytán Rodrigo
González Domínguez Saúl Fernando
Luévano Ballesteros Ricardo Adrián

Profesor: Juan José Montellano Ballesteros

Ciencias de la computación

May 13, 2020

Dada una gráfica conexa G, diremos que una arista e $\in E(G)$ es de corte, si la gráfica G $\setminus\{e\}$ no es conexa.

1 Demuestra que las afirmaciones de la tarea son equivalentes:

1.1 a $\rightarrow$ b

Si G es un arbol entonces G es una gráfica conexa minimal.
P.D. Todo arista en G es de corte
Supongamos por contradicción que $\exists e \in A(G)$ tal que $e = uv$ con $u, v \in V(G)$ tal que e no es de corte.
Entonces $\exists uv - trayectoria$ a la llamaremos T, donde $T \in G - \{e\}$
Es evidente que la trayectoria $T + \{e\}$ forma un ciclo puesto que esa es la única manera de que existan dos trayectorias diferentes ente dos vertices. **!**
Los árboles no tienen ciclos, hay una contradicción y por tanto se cumple esta implicación.

1.2 b $\rightarrow$ c

Si G es una gráfica conexa minimal entonces es una gráfica acíclica maximal.
Procedemos por contradiccion, y de manera parecida al caso anterior, de existir un ciclo en G entonces existirían 2 trayectorias distsintas al mismo vértice. **!**
Lo cuál sería una contradicción puesto que sólo debe existir una y sólo una trayecctoria entre cada vértice en G ya que esta es conexa minimal.
Se cumple esta implicación.

1.3 c $\rightarrow$ a

Si G es acíclica entonces G es un árbol
Para que G sea un árbol debe ser acíclico y conexo minimal
Puesto que todo gráfica acíclica es conexa minimal, por definicion sólo existe una única trayectoria para todo vértice en G
Como se cumplen ambas propiedades es claro que G es un árbol.

Cómo se cumplen las tres implicaciones queda demostrado que son equivalentes entre sí $\blacksquare$

2 Demuestra que todas las aristas de un árbol son aristas de corte.

Sea G un arbol:
Sea $uv \in G$
Como G es acíclica, no existe una $uv{-}trayectoria$ que no contenga a uv, porque de haberla:
La $uv - trayectoria + uv$, seria un ciclo en G

$\therefore$ En la grafica $G - uv$, no hay una $uv - trayectoria$
$\therefore$ $G - uv$ no es conexa

Finalmente como G es conexa y $G - uv$ no es conexa, entonces uv es un vertice de corte. $\blacksquare$

3 Sea G una gráfica conexa. Demuestra que e es una arista de corte si y solo si no está en un ciclo.

3.1 $\rightarrow$

Sea G una grafica conexa, donde $uv \in G$ es una arista de corte, supongamos que $uv \in C$, donde C es un ciclo.

Notamos que $C - uv$ es una $uv - trayectoria$
Como G es conexa $\forall x, y \in G$ $(\exists xy - trayectoria)$
Podemos dividir estas trayectorias en aquellas donde $uv \in xy - trayectoria$ y aquellas donde $uv \notin xy - trayectoria$

Si $uv \notin xy - trayectoria$, entonces la $\exists xy - trayectoria \in G - uv$
Si $uv \in xy - trayectoria$, entonces la trayectoria es de la forma: $x...uv...y$ pero como $C - uv$ es una $uv - trayectoria$ entonces $x...(C - uv)...y$ es una $xy - trayectoria$ y ademas $x...(C - uv)...y \in G - uv$

$\therefore \exists xy - trayectoria \in G - uv$
$\therefore \forall x, y \in G - uv(\exists xy - trayectoria)$
$\therefore G - uv$ es conexa
y por tanto uv no es una arista corte **!**

3.2 $\leftarrow$

Supongamos que uv no esta en un ciclo, notamos que $\nexists uv - trayectoria$ que no contenga a uv en G, porque de haberla:
La $uv - trayectoria + uv$, seria un ciclo

$\therefore$ En la grafica $G - uv$, no hay una $uv - trayectoria$
$\therefore G - uv$ no es conexa

Finalmente como G es conexa y $G - uv$ no es conexa, entonces uv es un vertice de corte. $\blacksquare$

4 Sea G una gráfica conexa donde todos los vértices tienen grado par (y ninguno de grado cero). Demuestra que G no tiene aristas de corte.

Sea G una grafica conexa con todos los vertices de grado par y ninguun vertice de grado 0

PD. $\forall e \in E(G)$, **e pertenece a un ciclo en G, es decir, G no tiene aristas de corte**

Caso base $(|V(G)| = 3)$

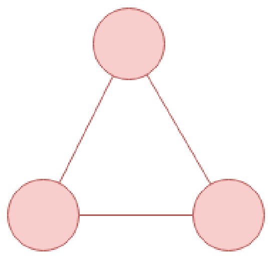


Figure 1: Caso base demostracion 4

Sea $G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\})$ en donde G es la única gráfica de tres vértices que cumple las condiciones dadas, además cumple que todas sus aristas están en un ciclo.

Hipotesis de induccion

Supongamos que $\forall e \in E(G)$, e pertnece a un ciclo en G con $|V(G)| \leq n$

Paso inductivo

Sea G' una gráfica que tiene un grado par en todos sus vértices y ninguno de grado 0, tal que $|V(G')| = n$

Sea $G = (v_x \cup V(G'), E(G))$, es claro que $|V(G)| = n + 1$, ahora para construir G en general es posible realizar tres acciones: eliminar aristas en G', agregar aristas en G', o agregar aristas de v_x a G'.

Si agregamos aristas en G', de forma que se respete la condición, estas aristas estarán en un ciclo (por H.I.).

Si agregamos aristas de la forma V_xVj tal que se conserve la condición inicial, no es necesaria realizar ninguna accion adicional, pero si es necesario probar que estas aristas cumplen la implicación.

Si eliminamos aristas, para conservar la condición inicial y conservar el grado en cada vértice, tenemos que agregar aristas, pero si agregamos aristas de G' a G', esto caería dentro de nuestra H.I. Si creamos una arista de la forma $V_xV_j \in G$, para compensar estas aristas perdidas, tendríamos que probar que la implicación se sigue cumpliendo.

Por lo que tenemos dos casos a probar: aquel en donde se agregan aristas de V_xV_j con $V_j \in G'$, y aquel en donde se eliminan aristas en G' y, para compensar, se agregan vértices de las puntas de las aristas eliminadas a V_x.

En el primer caso, agregamos una arista de la forma V_xV_j con $V_j \in G'$, para cumplir el hecho de que el grado de V_x sea par, es necesaria la existencia de otra arista V_xV_k con $V_k \in G'$.
Finalmente como V_j están en G' y G' es conexa, entonces $\exists V_jV_k - trayectoria.$
Además, notamos que $V_xV_j(V_jV_k-trayectoria)V_kV_x$ es un ciclo, por lo que estos nuevos aristas estan en un ciclo.
$\therefore$ las aristas resultantes de realizar esta operación están un ciclo.

En el segundo caso, es donde eliminamos aristas en G' y para compensar estas aristas, agregamos aristas de la forma V_xV con $V \in G'$.
Sea $V_j \in G'$ un vértice al que le eliminamos una arista, dicha arista tenía otra punta, la cual terminaba en algún otro vértice $V_k \in G'$. Para compensar ambos grados, es necesario agregar dos vertices V_xV_j y V_xV_k.
Las aristas que están en ciclos en G', donde el ciclo en G' no contenia a V_jV_k, siguen estando en G.
Y aquellas aristas que dependían de un ciclo que contenía a la arista V_jV_k para cumplir la implicación, son de la forma $Vz...V_jV_k...V_z$ de manera que podemos ver que $Vz...(V_jV_x)(V_xV_k)...V_z \in G$ contiene ahora a dichas aristas y tambien es un ciclo. Por lo tanto, dichas aristas siguen estando en un ciclo. Además, las aristas nuevas $V_jV_xyV_xV_k$ están en un ciclo.

$\therefore$ las aristas resultantes de realizar esta operación están en un ciclo.
$\therefore$ se cumple la inducción. $\blacksquare$

5 Sea G una gráfica conexa donde todos los vértices tienen grado par (y ninguno de grado cero). Demuestra que para cada vértice $v \in V(G), c(G\ v) \leq \frac{\delta(v)}{2}$, donde c denota el número de componentes conexas.

Si $v \in V(G)$, por el ejericio anterior, todos los aristas de la forma $vv_i \in G$ están en un ciclo
Por definición de ciclo, si tomamos un arista de la forma $vv_i \in G$ entonces $\exists vv_k$ en dicho ciclo, es decir, $\forall vv_i \in G\ \exists! vv_k \in G$ tales que ambos están en un ciclo.

Notamos que si los ciclos a los que pertenecen G son conexos por un vértice diferente de v (es decir, para estos ciclos v no es un vértice de corte), no se crean componentes nuevos.
Por lo que en el peor de los casos, los ciclos que pasan por v son conexos únicamente por v.

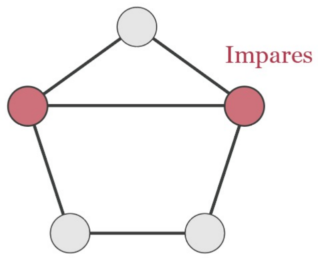
Esto a su vez implica que si tomo dos aristas adyacentes a v, que pertenezcan a un ciclo, estas aristas no pueden estar "compartidas" con otro ciclo, porque de ser así, el extremo de la arista compartida fungiría como vértice de conexión entre los dos ciclos.
Por lo que en el peor de los casos, las aristas de v se dividen en k pares no adyacentes, donde cada par está contenido en un ciclo disconexo de los demás. En este caso si eliminamos a v obtenemos k componentes disconexos, pero k era el número de pares disjuntos de v, es decir, $k = \frac{\delta(v)}{2}$. Además, como es el peor de los casos

$\therefore c(G - v) \leq \frac{\delta(v)}{2}$ ■

6 Demuestre que si una gráfica conexa G tiene exactamente $2k > 0$ vértices de grado impar, entonces G es la unión ajena (por aristas) de k paseos.

Sea $k = n$. Demostraremos por inducción sobre n.

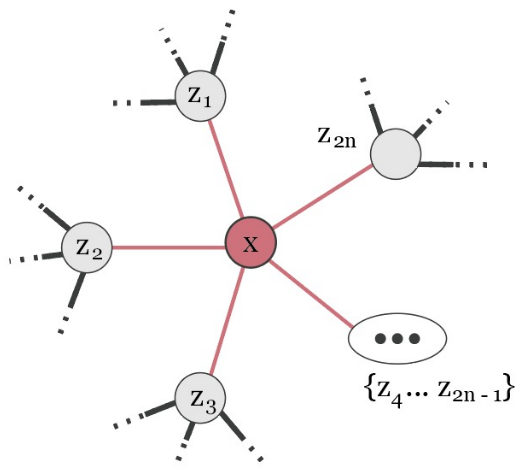
Caso Base $n = 1$
Sea G' conexa con $2k = 2(1) = 2 > 0$ vértices de grado impar.
Tenemos que, por el teorema visto en el apunte "Eulerianas", si en una gráfica conexa sólo existen dos vértices de grado impar, entonces existe un paseo no cerrado. Veamos la gráfica:



$\therefore$ En la gráfica con $2k = 2$ vertices impares, existe $k = 1$ paseo.

Hipotesis de inducción.
Sea G_n una gráfica conexa con $2k = 2n > 0$ vértices de grado impar $(z_1, ..., z_{2n})$, con $\mathcal{P}$ siendo el conjunto de paseos ajenos, tal que $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_{2n}\}$.

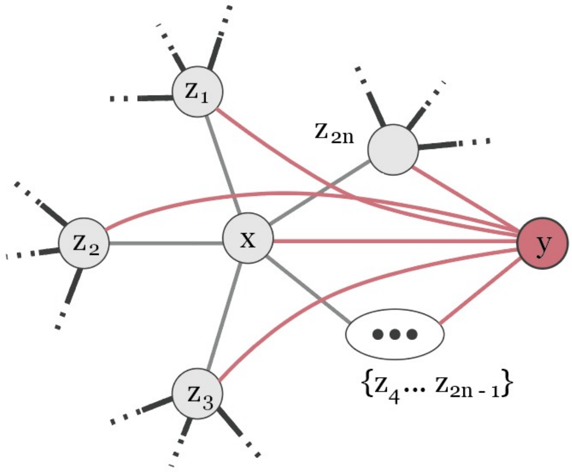
Paso inductivo. Sea H una gráfica conexa tal que
$V(H) = V(G_n) \cup \{x\}$ y $A(H) = A(G_n) \cup \{xz_i : i \in \{1, ..., 2n\}\}$



De manera que los $2n$ vértices que eran de grado impar en G_n, ahora en H son de grado par (pues a cada vértice impar se le suma la arista que tienen con el vértice x) y como x tiene $2n$ aristas con $2n$ vértices, x también es de grado par. Notemos que H es conexa y todos sus vértices son pares entonces H tiene un paseo cerrado, es decir, H es una gráfica Euleriana.

Ahora, consideremos la gráfica conexa $H^{'}$ de manera que:

$$V(H^{'}) = V(H) \cup \{y\}$$
$$A(H^{'}) = A(H) \cup \{yz_i : i \in \{1, ..., 2n\}\} \cup \{xy\}$$



Notamos que los $2n$ vertices que tenían grado impar en G_n, luego grado par en H, ahora vuelven a tener grado impar en $H^{'}$, pues a cada vértice se le agrega el arista que va a y.
De igual forma, tenemos un arista xy, por lo que el vértice x, que en H era par, ahora es impar en $H^{'}$.
Tenemos que $H^{'}$ tiene:

$$\begin{aligned} 2n &= |\{z_i, ..., z_{2n}\}| \\ 1 &= |\{x\}| \\ 1 &= |\{y\}| \\ 2n + 2 & \qquad\qquad \text{(Vértices impares en } H^{'}) \end{aligned}$$

Llamamos

$$R = \{xz_i : i \in \{1, ..., 2n\}\}$$
$$Q = \{yz_i : i \in \{1, ..., 2n\}\} \cup \{xy\}$$

Por último, notemos que

$$\begin{aligned} &Q \nsubseteq \text{paseo cerrado de } H \\ &Q \nsubseteq \mathcal{P} && \text{(El conjunto de paseos ajenos en } G_n\text{)} \\ &R \nsubseteq \mathcal{P} \end{aligned}$$

Entonces $Q \cup R$ es un paseo ajeno a los paseos de $\mathcal{P}$ de manera que

$$|\mathcal{P}| + |Q \cup R| = n + 1$$

$\therefore H^{'}$ es gráfica con $2n + 2$ vértices impares con $n + 1$ paseos ajenos. ∎

7 Sea $K_{m,n}$ una gráfica bipartita completa. Encuentra todos los posibles valores de m y n, de tal manera que $K_{m,n}$ tenga un paseo Euleriano.

Como $K_{m,n}$ es bipartita completa sabemos que todos su vertices tienen grado $m \vee n$
Sabemos también que $|V(K_{m,n})| = m + n$ y $|A(K_{m,n}) = m \cdot n$
Entonces si definimos las gráficas M y N como las dos subgraficas de $K_{m,n}$ tal que $|V(M)| = m$ y $|V(N)| = n$
Entonces tenemos dos casos que encontrar: cuando $K_{m,n}$ tiene un circuito euleriano (y por tanto un paseo euleriano) y cuando sólo tiene un paseo euleriano.

$K_{m,n}$ tiene un circuito y paseo Euleriano
Como $K_{m,n}$ tiene un circuito Euleriano sería una gráfica Euleriano que por definición es de orden par.
$\therefore K_{m,n}$ tiene un paseo Euleriano si m, n son pares.

$K_{m,n}$ sólo tiene un paseo Euleriano
Sabemos que una gráfica tiene un paseo Euleriano pero no un circuito euleriano si tiene exactamente dos vértices de grado impar.
Entonces como $K_{m,n}$ sólo tiene el paseo Euleriano notamos que hay tres valores que m, n pueden tomar para que se cumpla está condición:

$m = n = 1$. Sólo tenemos 2 vértices y cada uno tiene grado impar, por tanto existe un paseo Euleriano

m es impar y $n = 2$ Como $K_{m,n}$ es bipartita tenemos 2 vértices de grado m, que son sólo 2 vértices de grado impar. Por lo tanto existe un paseo Euleriano.
n es impar y $m = 2$. Este caso es análogo al anterior, por lo tanto, existe un paseo Euleriano.

Estos son los posibles valores de m, n de tal manera que $K_{m,n}$ tenga un paseo Euleriano. ■

8 Hay 2n personas en una habitación donde cada una es enemiga de a lo más $n1$ personas de la habitación. Demuestra que las 2n personas se pueden acomodar en una mesa circular tal que no hay dos enemigos que estén sentados juntos.

Construyamos una gráfica $G = (V(G), E(G))$, los vertices seran las personas, con $|V(G)| = 2n$. Coloquemos una arista entre las personas que no son enemigas: para cualquier vertice en particular las personas son enemigas (E) o no lo son (A). Por ello:

$$n = E + A$$

$$A = n - E$$

Y por el enunciado:

$$\begin{aligned} E &\leq n - 1 \\ 1 - n &\leq -E \\ n + 1 = n + (1 - n) &\leq n - E = A \end{aligned}$$

Además, notamos que por como definimos la gráfica $A = d(v)$ con $v \in G$
$\therefore \forall v \in G(d(v) \geq n + 1)$

Sea $u, v \in G$ por la propiedad anterior

$$\begin{aligned} d(u) &\geq n + 1 \\ d(v) &\geq n + 1 \\ d(v) + d(u) &\geq n + 1 + n + 1 = 2n + 2 \geq 2n \\ \therefore d(v) + d(u) &\geq 2n \end{aligned}$$

$\therefore$ G es una grafica con un ciclo hamitoniano

Es decir hay un ciclo que pasa por todos los vértices sin repetir alguno; además, en la definición de esta gráfica, sólo hay una arista entre dos vértices si estos no son enemigos.

Por lo que hay un ciclo en donde no hay enemigos juntos y dicho ciclo pasa por todos los vértices, que es lo que buscabamos. ∎

9 Suponga que G es conexa regular tal que G^c es conexa pero no Hamiltoniana. Demuestra que G es Hamiltoniana.

Ya que G y su complemente son conexas tenemos que $3 \leq |V(G)|$.
Por contradicción, vamos a suponer que ni G ni G^c son hamiltonianas
Supongamos entonces que $|V(G)| = n$ tal que n es mayor a 3, puesto que ambas gráficas son conexas.

Tenemos ahora 2 casos, cuando n es par y cuando es impar. Empecemos con el caso cuando es par:

Como sabemos que G es $k - regular$ entonces $\delta(G) = k : k \in \mathbb{N}$, que siempre será menor a $\frac{n}{2}$. Como n es par entonces además tenemos que $k \leq \frac{n}{2} - 1$
Ahora definamos $\delta(G^c)$, que por ser el complemento de una gráfica $k - regular$ está dado por $\delta(G^c) = n - 1 - k$. Pero como el orden de la gráfica G es par sabemos que $n - 1 - k \leq \frac{n}{2} - 1$. Al juntar ambas igualdades obtenemos:

$$n - 1 \leq n - 2 \,\mathbf{!} \qquad \text{(Tenemos una contradicción)}$$

Veamos ahora el caso cuando n es impar:
Análogamente al caso anterior, sabemos que la gráfica es $k - regular$, podemos deducir:

$$\delta(G) = k$$

$$\delta(G^c) = n - 1 - k$$

$$\text{Tal que } k \leq \frac{n-1}{2}$$

$$n - 1 - k \leq \frac{n-1}{2}$$

$$n - 1 < n - 1 \,\mathbf{!} \qquad \text{(Unimos las desigualdades)}$$

En ambos casos encontramos una contradicción, por lo tanto el orden de G no puede ser ese.

$\therefore$ Queda demostrado que si G^c no es Hamiltoniana, G sí debe serlo ■

10 **Dar una gráfica G con 10 vértices, al menos 15 aristas todas con pesos entre 1 y 10 tal que G tiene un único árbol generador de peso mínimo T_P y si T_D denota al árbol obtenido por Dijskra para un vértice $u_o \in V(G)|E(T_P)\triangle E(T_D)| = 4$ Justifica tu respuesta mostrando a T_P y T_D no olvides justificar porque T_P es el único árbol de peso mínimo**

Proponemos la siguiente grafica, en donde las aristas negras representan un peso de 1, las rojas un peso de 10 y las aristas azules un peso de 2.

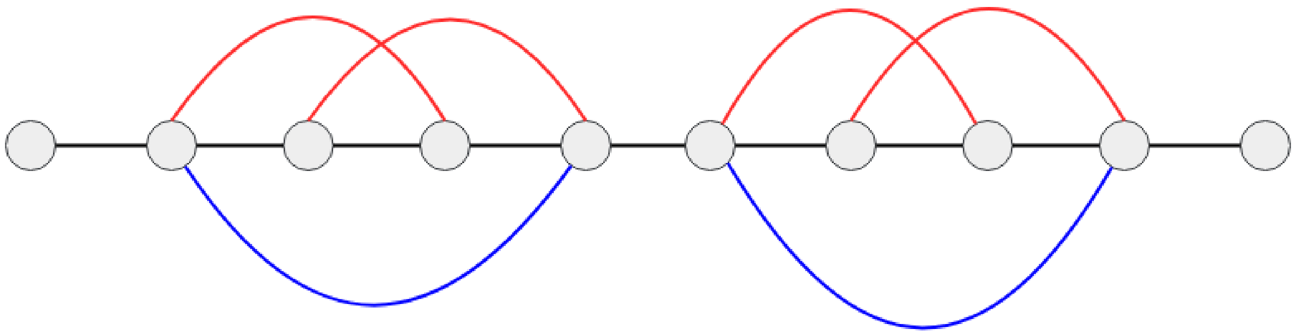


Figure 2: Grafica completa del ejercicio 10

En donde usando Prim, llegamos a la siguiente grafica. Notamos que este es el único árbol, pues si necesariamente quitamos algún vértice, el árbol estaria disconexo, por lo que habria que tomar otro vértice pero los demas vértices tienen peso mayor a 1; por ello, el árbol seria más pesado; es decir, para nuestra gráfica el árbol de peso mínimo es único.

Figure 3: árbol generador de peso minimo obtenido por Prim

Finalmente tomando a V_x como el vértice desde donde usaremos Djistra obtenemos el siguiente árbol generador:

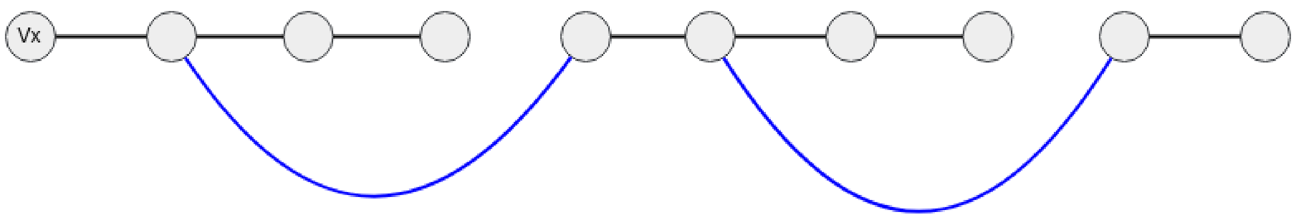


Figure 4: Árbol generador de peso mínimo obtenido por Djistra a partir de V_x

Al primer árbol lo llamaremos T_p y al segundo árbol generado por V_x lo llamaremos T_d, por lo que al calcular $|E(T_P)\triangle E(T_D)|$ veremos que es igual a como se muestra en la siguiente figura:

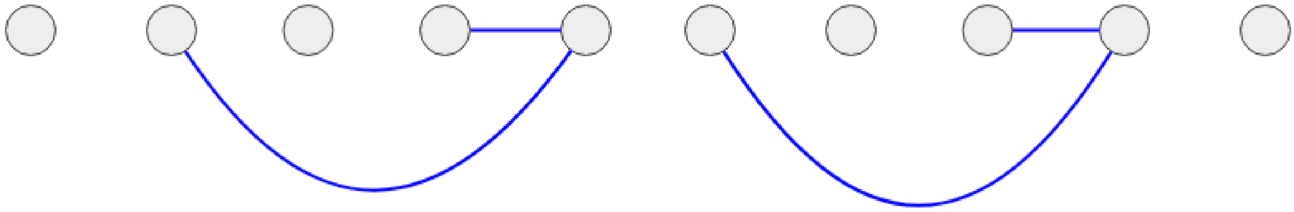


Figure 5: Diferencia simetrica entre T_p y T_d

11 Sea G una gráfica conexa de orden $n \geq 3$ tal que para todo u, v par de vértices no adyacentes se tiene que $d(v) + d(u) \geq n$. Pruebe que G no tiene un vértice de corte.

Sabemos, por el teorema de Ore demostrado en la ayudantía, que toda gráfica H de orden $n \geq 3$ que sea conexa de orden $n \geq n$ tal que para todo u, v par de vértices no adyacentes se tiene que $d(v)+d(u) \geq n$ es una gráfica Hamiltoniana. La gráfica G de nuestra hipotesis cumple estas condiciones, por tanto sabemos que G es Hamiltoniana, es decir, $\exists$ ciclo $C \in G$ tal que $V(C) = V(G)$

Falta ahora demostrar que toda gráfica Hamiltoniana no tiene vértices de corte.
Por contradicción: Suponemos que sí existe un vértice de corte. Es decir, $\exists v \in V(G)$ tal que $G \backslash \{v\}$ es disconexa.
Por ser disconexa entonces $\exists x, y \in V(G)$ tales que no existe una $xy-trayectoria$

Por otro lado:
Sea c un ciclo Hamiltoniano $\in G$ definido como $c = \{v, ..., x, ..., y, ..., v\}$
Asumimos, sin pérdida de generalidad, que el ciclo pasa primero por el vértice x.
Observamos que la restricción de c a $(x, ..., y)$ es una trayectoria en $G - \{v\}$, ya que c es Hamiltoniano y por lo tanto v no aparece.
Entonces $\exists xy - trayectoria \in G \backslash \{v\}$ **!**
Lo cual es una contradicción.

$\therefore$ Como encontramos una contradicción queda demostrada la implicación ■

12 **Los agentes A, B, C, D, E, F, G, H son conspiradores políticos en lo que se ha llegado a llamar "Blottergate Affair." Para coordinar sus actividades en cubierta, es vital que cada agente se pueda comunicar directa o indirectamente con el resto de los conspiradores. Cada comunicación involucra un cierto nivel de riesgo para todos. En la siguiente tabla se muestran los factores de riesgo asociados con cada posible comunicación entre agentes, cualquier otra comunicación es demasiado riesgosa. ¿Cuál es la menor cantidad de riesgo involucrado en un sistema conectado? Justifique su respuesta.**

Podemos considerar a cada agente como un vertice y el riesgo como el peso de cada arista de la siguiente forma:

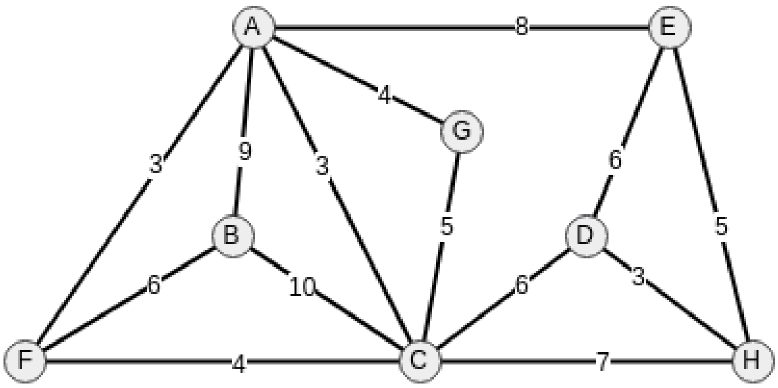
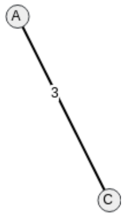


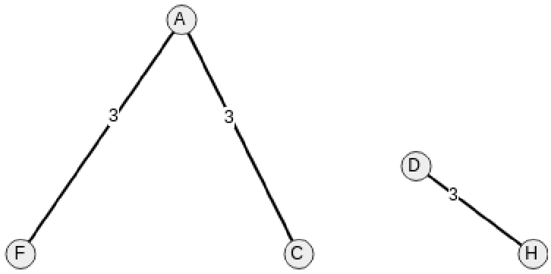
Figure 6: Modelado a traves de una grafica del ejercicio 12

Como nos piden el menor riesgo involucrado en un sistema conectado, de la forma en la que lo modelamos, lo que se esta pidiendo es el árbol generador de peso mínimo.

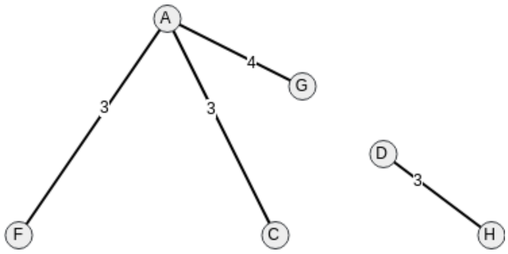
Para ello usaremos el algoritmo de Kruskal:



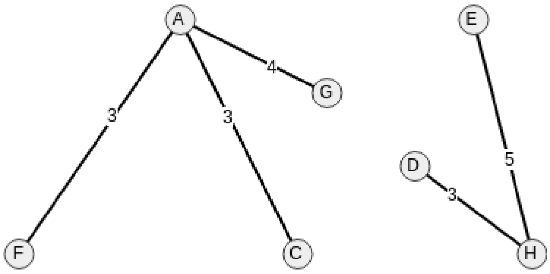
(a) Paso 1



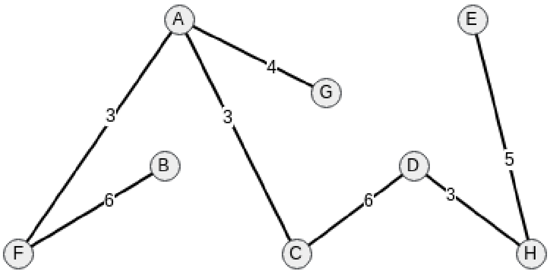
(b) Paso 2



(c) Paso 3



(d) Paso 4



(e) Paso 5

Figure 7: Algoritmo de kruskal para encontrar el árbol de peso mínimo

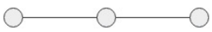
De forma que en el paso 5, podemos observar al sistema conectado(Grafica conexa) con el menor riesgo(peso) posible

13 Un ratón se come un cubo de queso de tamaño $3 \times 3 \times 3$ formado por 9 subcubos de $1 \times 1 \times 1$, consume el queso comiendo los subcubos uno por uno siempre y cuando los subcubos compartan una cara. ¿Es posible que el ratón coma todo el queso empezando en una esquina y terminando en el centro del queso? Justifique su respuesta asociando una gráfica.

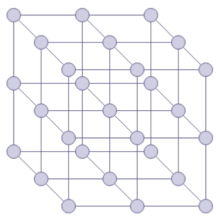
Podemos ver el cubo de queso del raton de la siguiente forma:

Figure 8: Cubo de quso formado por 3x3x3 cubos

Si asociamos cada cubo de queso con un vertice podemos verlo como:
$G = L_3 \square L_3 \square L_3$, donde $L_3 = (\{V_1, V_2, V_3\}, \{V_1V_2, V_2V_3\})$ O de manera grafica:



(a) Representacion grafica de L3



(b) Representacion grafica de G

Figure 9: Representacion grafica de L3 y G

Para darnos una idea acerca del recorrido del raton coloreamos cada nivel de forma que cada vecino tenga un color distinto del vertice adyacente, de esta manera nuestra grafica queda de la siguiente forma:

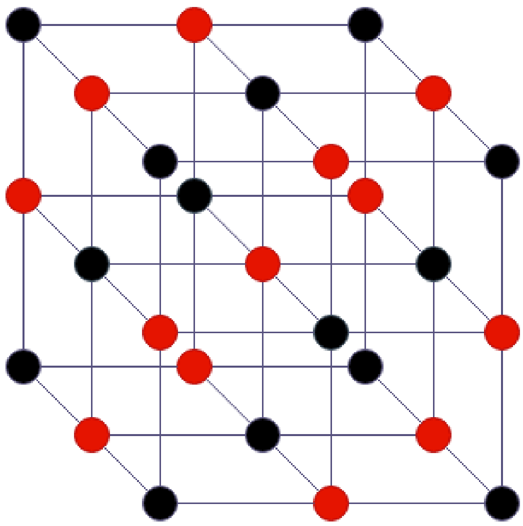


Figure 10: Grafica G con la coloracion deseada

Es claro que si empezamos en una esquina, esta sera negra, y cualquier vertice que siga sera rojo, de manera que cada paso de nuestra trayectoria sin importar el camino que se siga alterna su color, ahora indexamos los vertices de la trayectoria del raton la forma $V_1...V_i...V_{27}$, como empezamos en negro los V_i de inidice impar seran negros y los de indice par seran rojos. Notamos entonces que V_{27}, tiene indice impar

$$\therefore V_{27} \; es \; negro$$

Como el centro es rojo dicha trayectoria no es posible

14 Demuestre o de un contraejemplo de la siguiente afirmación: Si G y H son eulerianas, entonces $G\square H$ es euleriana.

Sea G_1 y G_2 graficas eulerianas $G_1\square G_2 = (V(G1) \times V(G2), E(G_1\square G_2))$
Sea $(x, y) \in G1\square G2$ tal que $x \in V(G_1) \times V(G_2)$ en donde por definicion $x \in V(G_1)$ y $y \in V(G_2)$

Como $x \in G_1$, x tiene grado par
Como $y \in G_1$, y tiene grado par
(x, y) tiene un vecino (a, b) si y solo si:

$$a = x \wedge yb \in G_2$$
$$b = y \wedge xa \in G_1$$

Notemos que si $yb \in G_2$, como $x \in G_1$ y $b \in G_2$, $(x, b) \in V(G_1)(G_2)$, por lo que (x, b) tiene un vecino más.

En resumen si $yb \in G_2$ entonces (x, y) tiene un vecino más.
Analogamente, si $xa \in G_1$ entonces (x, y) tiene un vecino más. Como son todos los casos del si y solo si para que (x,b) tenga un vecino entonces:

$$d((x, y)) = d(x) + d(y)$$

Y como el grado d(x) es par y el grado d(y) es par entonces:

$$\exists k \in \mathbf{N}(d(x) = 2k) \wedge \exists h \in \mathbf{N}(d(y) = 2h)$$
$$\therefore d((x, y)) = d(x) + d(y) = 2k + 2h = 2(k + h)$$

Es decir d((x,y)) es par, como tomamos un vertice cualquiera, todos los grados de cada vertice son pares, la cual es razon necesaria y suficiente para que $G_1\square G_2$ sea euleriana ■

15 Sea $Q_1 = K_2$ y para n ≥ 2 definimos el n-cubo como $Q_n = Q_{n1}\Box Q_1$. Demuestra que Q n es hamiltoniana para todo n pero no euleriana para alguna $n > 1$.

15.0.1 P.D. Q es Hamiltoniana $\forall n \in \mathbb{N}$

Sabemos que $Q_n = Q_{n-1}\Box Q_1$ y sabemos también que Q_1 no es Hamiltoniana puesto que $Q_1 = K_2$, que no es Hamiltoniana
Notación: $(x, y) - (a, b)$ será la notación que usaremos para los aristas resultantes del producto cuadro ya que los vértices serán parejas ordenadas y por tanto los aristas serán uniones de parejas ordenadas.
Demostración por inducción sobre n
Caso Base $n = 2$

$$Q_2 = Q_1\Box Q_1$$

Como $Q_1 = K_2$ definamos $V(K_2) = \{x, y\}$ y definamos otra gráfica $K_2^{'}$ con $V(K_2^{'}) = \{u, v\}$
Entonces el producto cuadro $K_2\Box K_2^{'}$ es igual a Q_2 con:

$$V(Q_2) = \{(x, y), (y, u), (x, v), (y, v)\}$$
$$A(Q_2) = \{(x, u) - (y, u), (y, u) - (y, v), (y, v) - (x, v), (x, v) - (x, u)$$

Es evidente que Q_2 contiene un ciclo Hamiltoniano y un circuito Euleriano
$\therefore$ Se cumple el Caso Base

Hipotesis de Inducción: Q_n es Hamiltoniana
Paso Inductivo $n = n + 1$

Q_{n+1} está definida como:
$Q_{n+1} = Q_n\Box Q_1$. Es decir que para cada $x \in V(G)$, en Q_{n+1} los vertices de la forma $\{(x, z) : z \in V(Q_1)\}$ copian a la gráfica Q_1.

Osease la gráfica Q_1 se reproduce ahí y eso para cade $X \in V(Q_n)$ y lo mismo pasa en Q_1 para cada $z \in V(Q_1)$.
Como Q_1 sólo tiene dos vértices entonces tenemos dos copias de Q_n unidas entre sí por un arista por cada vértice $x \in V(Q_n)$
Entonces como Q_n es hamiltoniana $Q_n\Box Q_1$ siempre dará como resultado dos gráficas hamiltonianas que tendrán sus vértices copia conectados entre sí por sólo un arista, dando como resultado una nueva gráfica conexa y además Hamiltoniana.

$\therefore Q_{n+1}$ es Hamiltoniana.
Como se cumple el Caso Base y se cumple el Paso Inductivo se cumple la inducción y por tanto queda demostrado ■

15.1 P.D. Que no es Euleriana para alguna $n > 1$

Si $Q_n = Q_{n-1} \square Q_1$
Por definición de producto cuadro a cada vértice de Q_{n-1} le agregamos otro arista. Por lo que el grado de Q_n será par y por tanto Euleriana si n es par.
Como ejemplo sabemos por la demostración anterior que Q_2 es Euleriana pues contiene un paseo Euleriano
Por definición de producto cuadro $Q_3 = Q_2 \square Q_1$ añade exactamente un arista a cada vértice de Q_2 haciendo el grado de todos sus vértices impares y por lo tanto la gráfica no será Euleriana ■