Probabilidad I
César Galindo y Guillermo Garro
Facultad de Ciencias. UNAM
Grupo **9026**. Sem. **2021-1**

Tarea 2 Parte 1: Variables aleatorias discretas

Nota: El ejercicio 11 es optativo y su correcta solución sumará décimas sobre el segundo examen parcial.

1. Dos bolas se seleccionan al azar de una urna que contiene 8 bolas blancas, 4 bolas negras, y 2 bolas naranjas. Supongamos que ganamos la cantidad de \$2 por cada bola negra seleccionada y perdemos la cantidad de \$1 por cada bola blanca seleccionada. Sea X la variable aleatoria que denota nuestra ganancia. ¿Cuál es la ley de X? Calcula la esperanza y varianza de X.

2. Supongamos que un dado justo se lanza dos veces. Consideremos las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} X &= \text{el valor máximo que aparece en los dos lanzamientos} \\ Y &= \text{el valor mínimo que aparece en los dos lanzamientos} \\ Z &= \text{la suma de los números que aparecen en los dos lanzamientos} \\ W &= \text{la resta de los números que aparecen en los dos lanzamientos} \end{aligned}$$

   Encuentra la ley de estas variables aleatorias. Además, encuentra la esperanza y varianza de cada una de ellas.

3. Consideramos un dado cuyas caras están numeradas del 1 al 6 y denótese por X a la variable aleatoria dada por el número de la cara de la parte superior. Supongamos que el dado está manipulado de manera que la probabilidad de obtener una cara es proporcional al número en esa cara. Determina la ley de X y calcula $\mathbb{E}[X]$. Sea $Y = 1/X$; determina la ley de X y calcula $\mathbb{E}[Y]$.

4. Un jugador dispara a un objetivo de 10 cm de radio, que consiste en coronas concéntricas, delimitadas por círculos de radios $1, 2, \ldots, 10$ cm y numeradas respectivamente de 10 a 1. La probabilidad de alcanzar la corona k es proporcional al área de esta corona, y se supone que el jugador alcanza su objetivo en cada lanzamiento. Sea X la variable aleatoria que en cada ejecución asocia el número del objetivo. ¿Cuál es la ley de probabilidad de X? El jugador gana k pesos si alcanza la corona numerada k para $k \in \{6, \ldots, 10\}$, mientras que pierde 2 pesos si alcanza una de las coronas periféricas numeradas del 1 al 5. ¿Es el juego favorable para el jugador?

5. Cada día el precio de una determinada acción sube o baja una unidad con probabilidades p y $1-p$, respectivamente. Sea X_0 el precio de la acción el día de hoy y X_{2n} su precio dentro de $2n$ días. Suponiendo que $X_0 > 2n$, encuentra la ley de X_{2n}.

6. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes que siguen una ley geométrica con parámetro $p \in (0, 1)$. Calcula la probabilidad de que $X_1 \neq X_2$.

7. Un insecto pone huevos. El número de huevos puestos es una variable aleatoria X que sigue una distribución de Poisson de intensidad θ. Cada huevo tiene una probabilidad p de eclosionar, independiente de otros huevos. Sea Z la variable aleatoria que determina la cantidad de huevos que eclosionaron.

a) Para $(k,n) \in \mathbb{N}^2$, calcula $\mathbb{P}[Z = k \mid X = n]$.

b) Usando la fórmula de la probabilidad total, encuentra la ley de Z.

8. **El problema de la caja de fósforos de Banach**: El célebre matemático polaco Stefan Banach solía reunirse con otros matemáticos en el Café Escocés en Lwów, Polonia, en donde había un cuaderno en el cual se anotaban los problemas planteados y sus soluciones. Esta libreta se conoce como el Libro Escocés. El siguiente es el último problema incluido en este libro.

   En todo momento, Banach lleva 2 cajas de fósforos: 1 en su bolsillo izquierdo y 1 en su bolsillo derecho. Cada vez que necesita un fósforo, es igualmente probable que lo saque de cualquier bolsillo. Considere el momento en que Banach descubre por primera vez que una de sus cajas de fósforos está vacía.

   a) Si se supone que ambas cajas de fósforos inicialmente contenían N fósforos, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente k fósforos, $k = 0, 1, \ldots, N$, en la otra caja?

   b) Resuelve el problema de la caja de fósforos de Banach cuando la caja de fósforos de la izquierda contenía originalmente N_1 fósforos y la caja de la derecha contenía N_2 fósforos.

   c) Encuentra la probabilidad de que, en el momento en que se vacía la primera caja (en lugar de encontrarse vacía), la otra caja contenga exactamente k fósforos.

9. Una urna contiene $2n$ bolas de las cuales 2 tienen el número 1, 2 tienen el número $2, \ldots,$ y 2 tienen el número n. Se seleccionan, sucesivamente, 2 bolas al azar sin reemplazo. Sea T la variable aleatoria que denota la primera selección en donde las bolas elegidas tienen el mismo número (y pongamos $T = +\infty$ si ninguna de las parejas elegidas tienen el mismo número). Para $0 < \alpha < 1$, se quiere demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[T > \alpha n] = e^{-\alpha/2}.$$

   Sea M_k la variable aleatoria que denota el número de parejas elegidas en las primeras k selecciones, $k = 1, \ldots, n$.

   a) Argumenta que, cuando n es suficientemente grande, M_k puede tomarse como el número de éxitos en k (aproximadamente) ensayos independientes.

   b) Cuando n es suficientemente grande, aproxima la probabilidad $\mathbb{P}[M_k = 0]$.

   c) Escribe al evento $\{T > \alpha n\}$ en términos del valor de una de las variables M_k.

   d) Concluye el resultado.

10. (**Variación a la urna de Polya**). Una urna contiene, inicialmente, una bola roja y una bola azúl. En cada etapa, se selecciona una bola al azar y después se reemplaza junto con otra del mismo color. Sea X la variable aleatoria que denota el número de la selección en donde se elige por vez primera la bola azúl.

    a) Encuentra $\mathbb{P}[X > i]$, $i \geq 1$.

    b) Demuestra que $\mathbb{P}[X < \infty] = 1$.

    c) Demuestra que $\mathbb{E}[X] = +\infty$.

11. (**El chimpancé infinito que escribe *La tragedia de Hamlet***). Un chimpancé escribe infinitamente en una máquina de escribir presionando cada segundo una tecla elegida al azar. A continuación, pretendemos calcular la probabilidad de que logre escribir toda la obra de Hamlet, es decir que en un momento dado escriba todo el texto de esta obra de una vez. Se supone que el conjunto de teclas A es finito y que la longitud de Hamlet es N.

    Sugerencia: Verifica que Ω es el conjunto de sucesiones con valores en A. Define una sucesión de variables aleatorias, $\{X_k\}_{k\geq 0}$, como sigue:

    $$\begin{aligned} X_k : \Omega &\to A \\ \omega &\mapsto \omega(k) \end{aligned}$$

    Define, para todo $a \in A$,

    $$\mathbb{P}[X_k = a] = \frac{1}{\mathrm{card}(A)}.$$

    Prueba que con esta definición, los eventos $\{X_k = a_k\}$ son independientes para toda a_k.

    Ahora, supongamos que Hamlet se forma a través de la concatenación de palabras $a_1 \cdots a_N$ donde $a_i \in A$. Demuestra que el evento $H = \{$el chimpancé escribe la obra Hamlet en cierto momento $n\}$ es igual a $\cup_{n\geq n} A_n^N$, en donde

    $$A_n^N = \{X_n = a_1, \ldots, X_{n+N-1} = a_N\}.$$

    Los eventos $\{A_n^N\}_{n\geq 0}$ no son independientes (¡Verifícalo!). Sin embargo, demuestra que los eventos $\{B_n := A_{nN}^N\}_{n\geq 0}$ sí son independientes. Es claro que

    $$\bigcup_{n\geq 0} B_n \subset H.$$

    Calcula la probabilidad del evento $\bigcup\limits_{n\geq 0} B_n$ y concluye usando la continuidad de la probabilidad.