Universidad Nacional Autonoma de Mexico

Facultad de Ciencias

Graficas y Juegos

Tarea III

Alumnos:
Arroyo Lozano Santiago
Arévalo Gaytán Rodrigo
González Domínguez Saúl Fernando
Luévano Ballesteros Ricardo Adrián

Profesor: Juan José Montellano Ballesteros

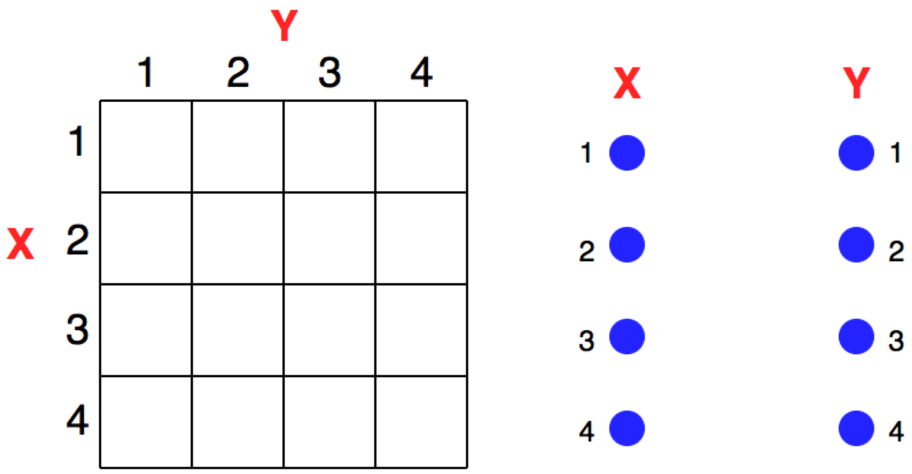
Ciencias de la computación

May 13, 2020

1 ¿Cuál es el mínimo número de cuadritos que Nao tiene que colorear de azul? Nota: Recuerda que tienes que demostrar que ese número es el mínimo (que ya no se puede con menos) y dar un ejemplo de una coloración donde se puede con ese número. La respuesta está en función de m.

Sea $G = (X, Y)$ una gráfica bipartita tal que X es el número de filas en el tablero y Y es el número de columnas y definiremos los aristas entre ellos como las intersecciones de columnas y filas. Esto para que cada cuadrito coloreado sea un arista entre cada vértice. (Si no hay arista que conecte los vértices, entonces ese cuadrito no está coloreado).

Veamos entonces la representación de el tablero $4m$ donde $m = 1$ en la gráfica bipartita:



Tablero $4m$ donde $m = 1$
$\therefore 4 \times 4$

Por simplicidad, llamaremos a las aristas no presentes en la grafica(pero que deben tener un vecino azul), aristas potenciales.

Sabemos que dos aristas son vecinos si y solo si comparten un vertice, notemos que si dos aristas coinciden en el mismo vertice, son vecinas de las mismas aristas, entonces lo que buscamos para agregarle un vecino a la mayor cantidad de aristas es que cada arista que agreguemos no sea colindante, para evitar esta redundancia.

Sabemos por definicion que el aparemiento perfecto, es una grafica que toca a todos los vertices, sin repetir(que es justo lo que buscamos), como una arista potencial se compone de dos vertices y en el aparemiento perfecto(al que llamaremos M_1) cada vertice tiene una unica arista, entonces las aristas potenciales tendran dos aristas reales como vecinos.

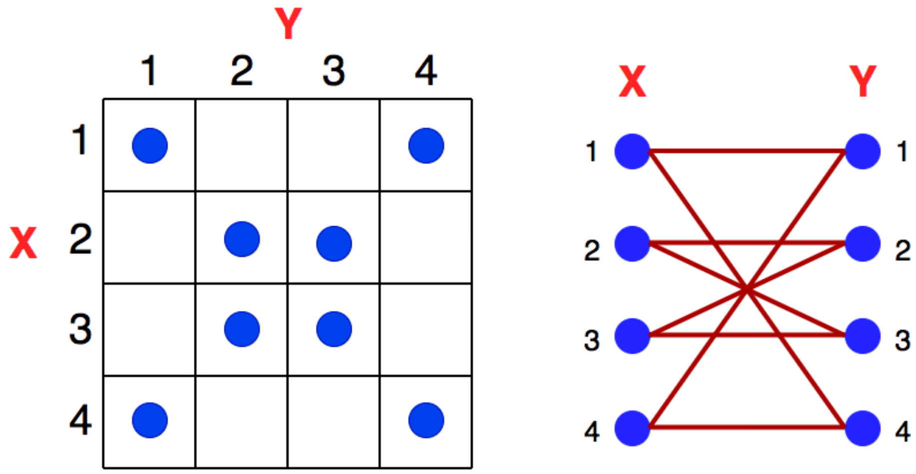
De esta forma ya logramos que todas las aristas potenciales tengan dos vecinos, pero las aristas que colocamos en la grafica no tiene dos vecinos, para ello habria que agregar un conjunto de aristas ajenas nuestro aparemiento M_1, tomemos nuevamente a nuestra grafica sin M_1 como la ya lo vimos la minima cantidad de aristas para asegurarnos de que las aristas potenciales tengan dos vecinos, es un aparemiento perfecto, entonces es necesario agregar un M_2 aparemiento ajeno a M_1. Notemos que de manera analoga M_1 garantiza que M_2 tenga 2 vecinos azules.
En suma $M_1 + M_2$ garantizan que todas aristas(tanto las potenciales como las que tenemos en la grafica) tengan dos vecinos.

Sabemos que existen muchas formas en las que una grafica puede tener dos apareamientos ajenos, para buscar al que tenga la menor cantidad de aristas nos apoyaremos del Teorema de Hall, este teorema nos indica que el para cualquier grafica bipartita, para que exista un aparemiento perfecto, se debe cumplir que $\forall S \subseteq X(|N(S)| \geq |S|)$.
$\therefore |N(X)| \geq |X| = 4m$

Como todas las aristas van de X a Y, entonces $|A(G)| = |N(X)| = 4m$.
Por lo que el minimo de aristas que debe tener nuestra grafica para asegurar un aparemiento perfecto es 4m. Pero M_1 y M_2 son ajenas, entonces para garantizar que exista cada aparemiento perfecto es necesario que existan 8m aristas

Entonces 8m será la mínima cantidad de cuadritos coloreados para que se cumpla la condición que cada cuadrito tenga al menos dos vecinos coloreados.

Ahora veamos un ejemplo, con los cuadritos coloreados representados por puntos azules en el tablero, cada punto azul en el tablero es un arista rojo en la gráfica bipartita:



Tablero y gráfica con el mínimo de cuadritos coloreados

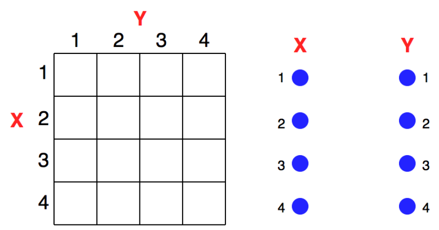
Podemos ver que el mínimo de cuadritos coloreados es $8(1)$ entonces sí es $8m$ el mínimo número de coloraciones para el tablero $4m \times 4m$ $\blacksquare$

2 En una cuadrícula de $n \times n$ algunos cuadritos se colorearon de azul, de tal manera que cada fila y cada columna tiene exactamente dos cuadritos azules. Demuestra que es posible volver blancos a algunos cuadritos azules, de tal manera que cada fila y cada columna ahora tenga exactamente 1 cuadrito azul.

Antes de empezar, haremos una demostración auxiliar. El teorema a demostrar es el **Teorema de Frobenius** que dice:
Si G es una gráfica bipartita $k - regular$ con $k > 0$ entonces G tiene un apareamiento perfecto.

| Sea G una gráfica $k - regular$ tal que $G = (X, Y)$.
| Como es regular y bipartita sabemos entonces que $|X| = |Y|$. Sea $S \subseteq X$.
| Denotamos por E_1 el conjunto de aristas que conecta
| con un vértice en S y E_2 como el conjnto de aristas
| que conectan con $\mathcal{N}(S)$ (Los vecinos de S).
| Notamos que $E_1 \subseteq E_2$.
| $\therefore k \cdot |\mathcal{N}(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k \cdot |S|$.
| Y entonces tenemos $|\mathcal{N}(S)| \geq |S|$.
| Y podemos observar que se cumple el Teorema de Hall
| $\therefore G$ tiene un apareamiento perfecto.

Ahora continuemos con la demostración prinicpal.
Así como en el ejercicio pasado, imaginemos una grafica bipartita $G = (X, Y)$ donde X son las fila, Y las columnas y por supuesto los aristas entre cada conjunto son los cuadritos coloreados exactamente como el primer dibujo del ejercicio pasado. Lo mostraremos otra vez para una mejor ejemplifcación :

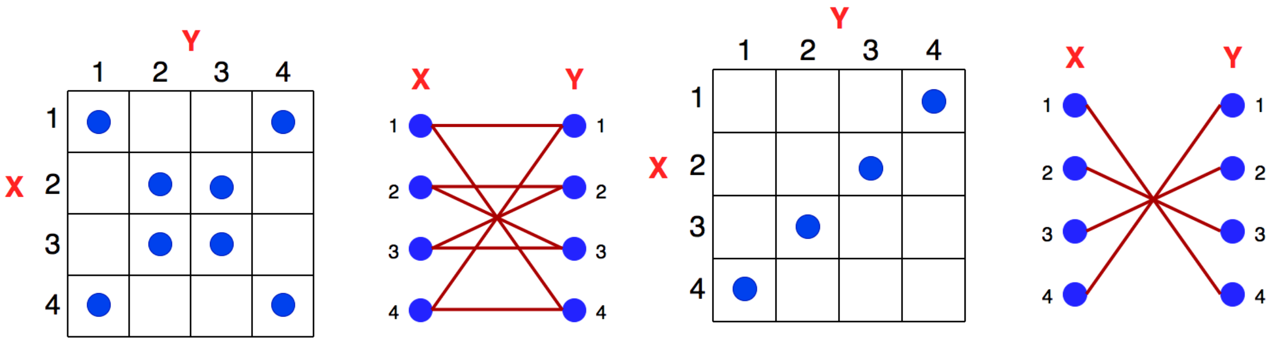


Tablero $n \times n$ donde $n = 4$
$\therefore 4 \times 4$

Como cada columna y cada fila(Los vertices de nuestra grafica) tienen exactamente dos cuadritos azules(las aristas de nuestra grafica), entonces la grafica es 2-regular, lo que por Frobenius implica que existe un emparejamiento perfecto, al que llamaremos M.

Observemos que en M, cada vertice tiene una arista (por la definicion de emparejamiento perfecto), esto visto en nuestro problema implica que cada columna y cada fila(vertices) tiene un cuadro azul(arista). Y como M se obtiene borrando aristas en G, queda demostrado. ■

Veamos ahora un ejemplo del tablero 4×4



El tablero y su gráfica antes de eliminar los puntos y su resultado

3 Demuestra que una gráfica bipartita r regular tiene r apareamientos perfectos ajenos por aristas

Demostraremos por induccion sobre r, que una gráfica bipartita r-regular, tiene r apareamientos perfectos ajenos por aristas:

Caso base($r = 1$)**:**
Sea G una grafica bipartita $1 - regular$

Tomando el conjunto de aristas M = E(G), donde como G es $1 - regular$ no existe ningun vertice que tenga 2 aristas, es decir M no contiene aristas adyacentes. Es decir M es un apareamiento.

Ademas si $v \in G$, como $v \in G$ y G es 1-regular entonces v tiene una arista en G, esto es $vx \in E(G) = M$. M satura a G.

$\therefore$ M es un aparemiento perfecto.
$\therefore$ La grafica tiene 1 aparemiento perfecto

Hipotesis de Inducción: Supongamos que para toda grafica bipartita n-regular se cumple que tiene n apareamientos perfectos ajenos por aristas.

Paso inductivo
Sea G=(X,Y) una grafica bipartita (n+1)-regular.
Sea $x \in X$, como es (n+1)-regular, entonces $|\mathcal{N}(x)| = n + 1$.
Como en X hay $|X|$ elementos entonces $|\mathcal{N}(X)| = (n + 1)|X|$
De manera analoga $|\mathcal{N}(y)| = (n + 1)|Y|$
Ademas como G es bipartita entonces

$$|\mathcal{N}(X)| = |\mathcal{N}(Y)|$$
$$(n + 1)|X| = (n + 1)|Y|$$
$$|X| = |Y|$$

Por otro lado, sea $S \subseteq X$
Sea $s \in S$, como es (n+1)-regular, entonces $|\mathcal{N}(s)| = n + 1$.

Como en S hay $|S|$ elementos entonces $|\mathcal{N}(S)| = (n+1)|S|$
Como $(n+1) \geq 1$

$$(n+1) \geq 1$$

$$(n+1)|S| \geq |S|$$

y como $|\mathcal{N}(S)| = (n+1)|S|$

$$|\mathcal{N}(S)| \geq |S|$$

Y por el **Teorema de Hall**, la grafica tiene un aparemiento perfecto M.
Construyamos a $G-M$, como todas las aristas de G van de X a Y y ademas $E(G-M) \subset E(G)$, entonces todas las aristas de $G-M$ van de X a Y, esto implica que $G-M$ es bipartita.

Sea $x \in V(G-M)$, como M es un aparemiento perfecto, $\exists! xv \in M$, finalmente como $|\mathcal{N}_G(x)| = n+1$, entonces $|\mathcal{N}_{G-M}(x)| = n$, esto implica que G-M es $n-regular$.

Por lo que por hipotesis de induccion, se cumple que hay n aparemientos en G-M, llamaremos al conjunto de aparemientos M(G-M).
Como G-M es ajena por aristas a M, $M(G-M) \cup M$, tiene n+1 elementos, estos elementos son aparemientos perfectos y son ajenos por aristas.

$\therefore$ Se cumple el caso base y paso inductivo y por ello la induccion. $\blacksquare$

4 Se tienen dos hojas de papel, cada una tiene área 2019 y cada hoja está teselada con 2019 polígonos de área 1. Demuestra que las dos hojas se pueden colocar una sobre la otra y poner 2019 tachuelas que atreviesen los 4038 polígonos.

Podemos modelar a cada hoja como una subgrafica discreta de 2019 vertices. Cada arista estaria definidida por las tachuelas.
De forma que la grafica a analizar seria una $G = (X, Y)$ bipartita, donde $|G| = 4038$, $|X| = 2019$ y $|Y| = 2019$. Para ver todas las posibles combinaciones, conectamos a todos los vertices de X, con todos vertices de Y y visceversa, de forma que la grafica es 2019-regular.
Por la demostracion del ejercicio anterior sabemos que $\exists M(M$ es una apareamiento perfecto en $G)$
Veamos ahora cual es el valor de $|M|$
Consideremos a la relacion:

$$\psi : X \to M$$

$$\psi(V_x) = V_x V_y$$

Como M es perfecto, satura a G, en particular satura a X que es un subconjunto de G, es decir la relacion es funcion.
| Como M es perfecto, toca una sola vez cada vertice de G y en particular
| de X, es decir la funcion es inyectiva.
| Como en G todos los vertices van de X a Y, $\forall V_i V_j \in M(V_i \in X \vee V_j \in X)$
| es decir la funcion es suprayectiva.
| $\therefore$ ψ *es biyectiva*
$\therefore$ $|M| = |X|$
Es decir $|M| = 2019$, ademas como M satura a G, toca los 4038 vertices.
Esto viendolo en nuestro problema muestra que con 2019 tachuelas(aristas), es posible atravesar los 4038 poligonos(vertices), en las dos hojas sobrepuestas(partes X y Y de nuestra grafica bipartita). Por lo que queda demostrado. ■

5 Dos jugadores A y B juegan de manera alternada (A empieza) a dibujar una trayectoria en una gráfica G. En cada turno el jugador tiene que dibujar una arista que continue la trayectoria. Si G tiene un apariamiento perfecto, ¿quién tiene estrategia ganadora? Justifica tu respuesta.

Como G tiene un apareamiento perfecto, entonces es posible poner aristas de forma que cada una solo toque un vertice llamemosle $|A(M)|$ al numero de aristas en el aparemiento, como cada arista en el apareamiento es ajena por vertices y cada arista tiene dos vertices entonces $|V(G)| = 2|A(M)|$. Eso implica que 2 divide a $|V(G|$.

Vamos hacer la demostracion por induccion de un pequeño lema: Una trayectoria con $|V(G)|$ tiene $|A(G)| = |V(G)| - 1$. La induccion es sobre $|V(G)|$

Caso base($|V(G)| = 1$):
Como solo hay un vertice, no hay aristas, entonces
$|A(G)| = 0 = 1 - 1 = |V(G)| - 1$

Paso inductivo:
Suponemos que la condicion es valida para una grafica G tal que $|V(G)| = n$, entonces como es una trayectoria, para hacerla crece en un vertice tenemos que agregar una arista, entonces las aristas de la nueva grafica a la que llamaremos G' son $|A(G')| = |A(G)| + 1 = |V(G)| + 1 - 1 = (n + 1) - 1$, por lo que se cumple la prueba.

Entonces nuestra trayectoria T, tiene $|A(T)| = |V(G)| - 1 = 2|A(M)| - 1$, es decir un numero impar de aristas. Como A empezó, si numeramos las aristas en la trayectoria, a A le tocaran las aristas impares, y como los aristas son un numero impar, A tiene la estrategia ganadora.

6 Sea G una gráfica no completa de orden n y k-conexa tal que $d(v) > \frac{n+kt-t}{t+1}$ para algún entero $t > 2$ y todo $v \in V(G)$. Demuestre que si $S \subseteq V(G)$ es un conjunto de corte de cardinalidad (G), entonces $G \backslash S$ tiene a lo mas t componentes conexas.

Por contradicción:
Sea G una gráfica que cumple con la hipótesis pero $G \backslash S$ tiene más de t componentes conexos, donde $S \subseteq V(G)$.
Si $G \backslash S$ tiene más de t componentes conexos entonces esto implica que el grado de cada vértice $v \in V(G)$ debe ser por lo menos mayor a k. !
Tenemos una contradicción por cómo definiimos el grado de los vértices de v, ya que $\frac{n+kt-t}{t+1} < k$
Como encontramos una contradicción se cumple la implicación y por tanto queda demostrado ■

7 Si G es una grafica k-conexa con $k \geq 2$ y $u, v_1, v_2, ..., v_k$ son k+1 vertices distintos de G, entonces G contiene una $uv_i - trayectoria$ para cada $i(1 \leq i \leq k)$, tales que cada dos trayectorias solo se intersectan en u

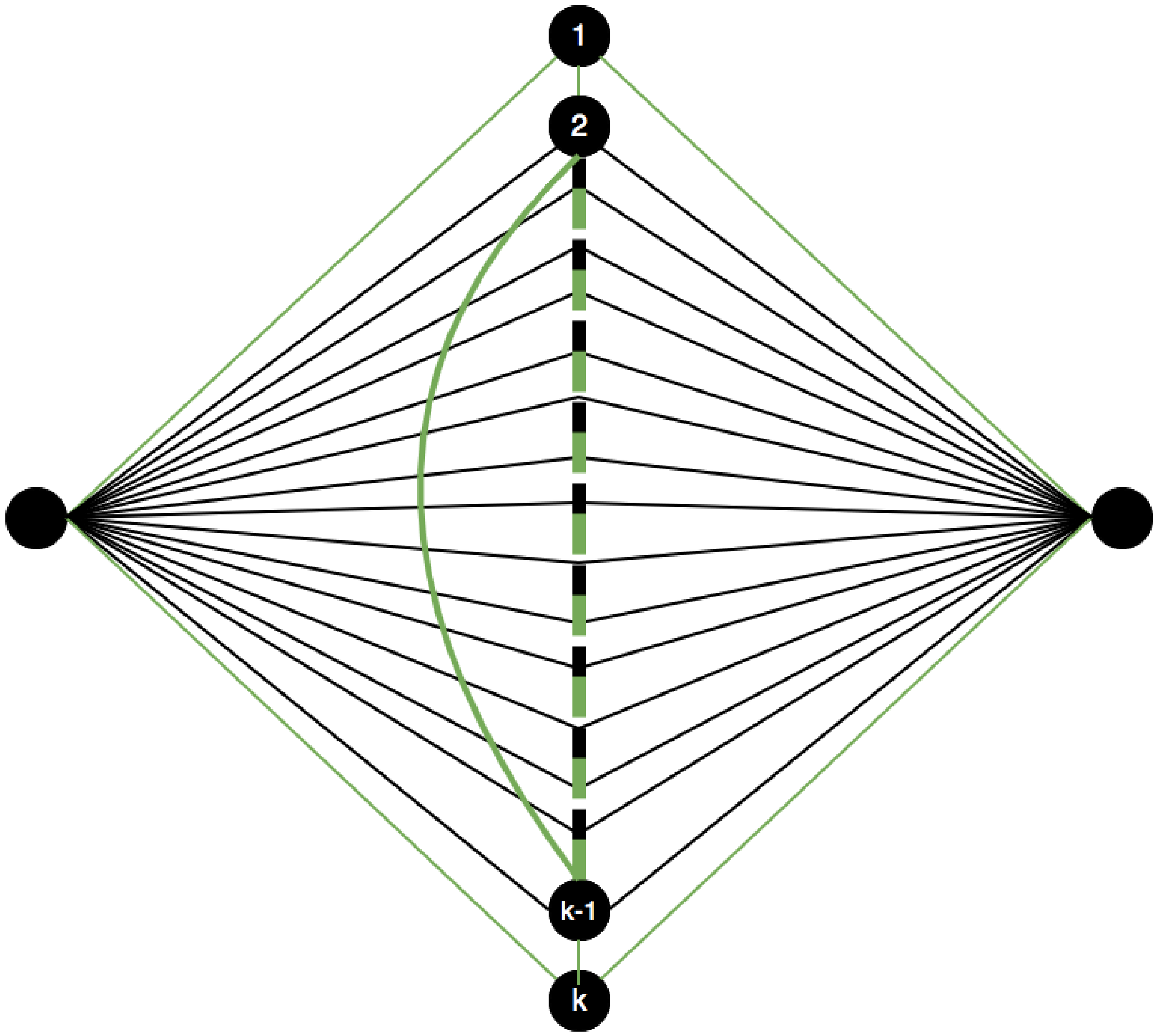
Como $k \geq 2$, sabemos que G es conexa y $k(G) \geq k$, supongamos que hay un vertice de corte v_x, el conjunto $\{v_x\}$ podria hacer que nuestra grafica sea disconexa. Entonces $1 \geq K(G)$, pero por transitividad $1 \geq k$!
$\therefore$ No hay vertices de corte

Vamos a hacer una pequeña demostracion auxiliar
PD: Si una grafica no tiene vertices de corte, entonces para cualesquiera dos vertices hay dos trayectorias ajenas por vertices
Lo haremos por contradiccion:
Supongamos que existen dos vertices a los que llamaremos u y v entre los cuales, hay una sola trayectoria o las trayectorias entre ellos comparten al menos un vertice.
Si hay una sola trayectoria eliminamos un vertice de dicha trayectoria y como no existe otra trayectoria entre u y v, la grafica resultante es disconexa, lo que implica que el vertice que eliminamos era de corte. !
Si las trayectorias entre ellos comparten un vertice, eliminamos dicho vertice, eliminando asi las trayectorias entre ellos, por lo que no hay otra trayectoria entre u y v, es decir la grafica resultante es disconexa, por lo que el vertice eliminado era de corte. !
Como encontramos una contradicción, se cumple esta demostración auxiliar.

Ahora tomemos dos vertices $v_i, v_j \in G(v_i \neq u \land v_j \neq u)$, como la grafica es conexa $\exists v_i v_j - trayectoria \land \exists uv_i - trayectoria$, por lo que
$uv_i - trayectoria + v_i v_j - trayectoria$ es una $uv_j - trayectoria$ a la que llamaremos P_1.
Por la demostracion anterior sabemos que existe otra $uv_j - trayectoria$ ajena a la anterior por vertices, a la que llamaremos P_2.
Como la $uv_i - trayectoria$ esta contenida en P_1 que es ajena a la trayectoria P_2, entonces la $uv_i - trayectoria$ es ajena a P_2 que es una $uv_j - trayectoria$
Es decir para cuales quiera dos vertices existe una trayectoria en G de u a cada uno de ellos que se intersectan solo en u. ■

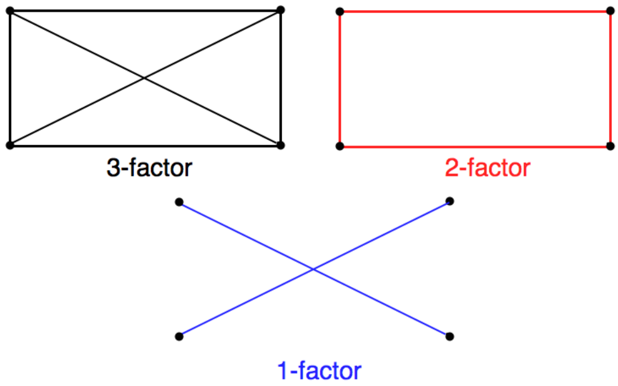
8 Sea G una gráfica 3-conexa por vértices. Demuestre que para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ existen dos uv-trayectorias internamente ajenas con longitudes distintas.

Sabemos que G es 3-conexa, es decir, no hay dos vértices de G que estén separados por menos de 3 vértices lo que implica que en cada vértice de G inciden por lo menos 3 aristas y además no tiene aristas de corte. Seguimos que entonces hay un 3-factor dentro de G



Gráfica k-conexa, en verde el 3-factor que contiene
En negro los vértices

Sabemos por el **Teorema de Petersen** que todo 3-factor sin aristas de corte es la unión por asistas de un 2-factor y un 1-factor.



Podemos observar entonces que para cada par de vértices $u, v \in G$ hay 3 $uv-trayectorias$ ajenas, de las cuales dos de ellas siempre tendrán una longitud distinta entre sí.

$\therefore$ Queda demostrado que para cada par de vértices $u, v \in V(G)$ existen dos uv-trayectorias internamente ajenas con longitudes distintas en una gráfica 3-conexa $\blacksquare$

9 Dada G una gráfica conexa, demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes.

(a) G no tiene vértices de corte

(b) Para cualesquiera 2 aristas de G existe un ciclo que las contiene

a→b
Suponemos que G no tiene vértices de corte.
P.D. Para cualesquiera 2 aristas de G existe un ciclo que las contiene

Vamos a hacer una demostracion auxiliar:
P.D. Dos aristas estan un ciclo si y solo si existen dos trayectorias ajenas entre las dos aristas.

> Para la ida, sea $u, v \in C$ donde C es un ciclo y u e v aristas, dicho ciclo se veria asi: $\{u, x_1, x_2, ..., x_k v, x_i, ..., x_j\}$ podemos ver entonces que $x_1 ... x_k$ es una trayectoria y $x_i ... x_j$ es otra trayectoria. Por lo que se cumple la implicacion.
> Para el regreso,si existen dos trayectorias ajenas entre si, llamemoslas T_1 y T_2 que conectan a las aristas u,v entonces T_1+u+T_2+v forman un ciclo. Por lo que se cumple la implicacion.

Ahora procedamos por contradiccion, supongamos que $\exists u, v \in G$ tales que no pertenecen a un ciclo. Por la demostracion anterior no existen dos trayectorias ajenas entre las dos aristas, como G es conexa $\exists uv - trayectoria \in G$. Como no existen dos trayectorias ajenas entre las dos aristas, quiere decir que solo existe una trayectoria entre ellas o las trayectorias entre ellas comparten al menos un vertice. En el primer caso, eliminamos un vertice de dicha trayectoria y como solo hay una trayectoria entre u y v, la grafica es disconexa, es decir dicho vertice es de corte **!**
En el segundo caso, eliminamos al vertice que comparten las trayectorias, por lo que las trayectorias dejan de existir, y como ya no hay trayectorias de u a v, la grafica es disconexa, es decir dicho vertice es de corte **!**
Como tenemos una contradicción se cumple la implicación.

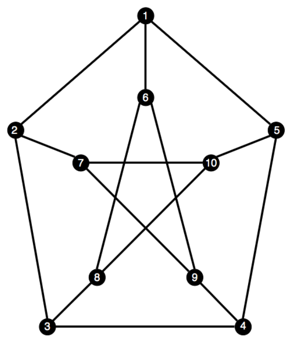
b→a
Suponemos que para cualesquiera 2 aristas de G existe un ciclo que las contiene.
$P.D.$ Que G no tiene vertices de corte

Tomemos un vertice cualquiera en G (llamemosle v), como es conexa, si existe otro vertice(llamemosle u), existe una $uv - trayectoria$ entre ellos. Por lo que el grado de v, al menos es 1. Eso implica que v pertenece a alguna arista(llamemosle e_1). Tomemos otra arista cualquiera en G llamemosle e_2, esto implica que e_1 y e_2 estan en un ciclo, como $v \in e_1$, entonces esta en ese ciclo. Esto prueba si un vertice esta en G, entonces esta en un ciclo y ya probamos en la tarea pasada que si todos los vertices de una grafica esan en un ciclo entonces G, no tiene vertices de corte.
Como se cumplen ambas implicaciones queda demostrado que los enunciados son equivalentes ■

10 Determine si las siguientes afirmaciones son verdadera o falsas, justifique su respuesta con una demostración o un ejemplo.

- La gráfica de Petersen tiene exactamente 6 apareamientos perfectos distintos
- La gráfica de Petersen es Hamiltoniana
- Si T es un árbol entonces T tiene a lo más un apareamiento maximal.

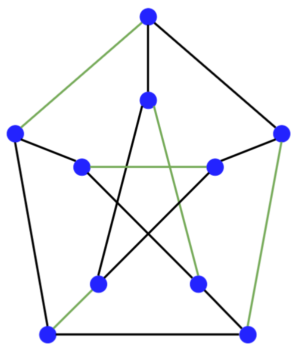
10.1 La gráfica de Petersen tiene exactamente 6 apareamientos perfectos distintos



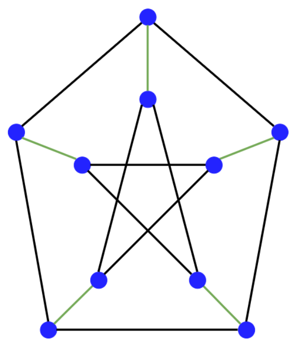
Sea G la gráfica de Petersen definida como:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ A(G) &= \{1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1, 1-6, 2-7, 3-8, 4-9, \\ &\qquad 5-10, 6-8, 8-10, 10-7, 7-9, 9-6\} \end{aligned}$$

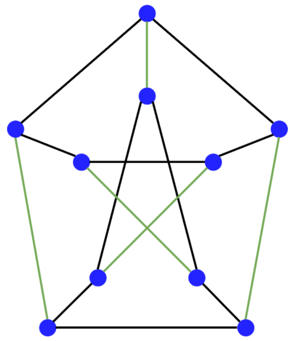
Sea M un apareamiento perfecto en G, podemos encontrar los siguientes apareamientos perfectos:



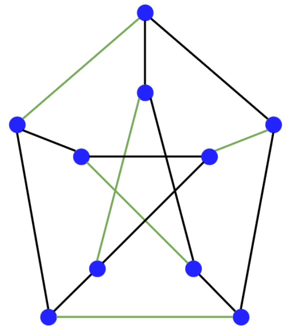
$M_1 = \{1-2, 4-5, 3-8, 7-9, 10-6\}$



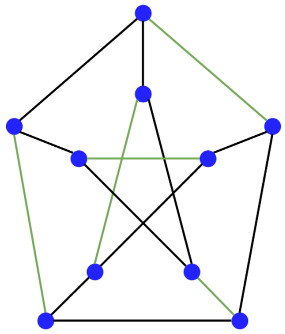
$M_2 = \{1-6, 2-7, 3-8, 4-9, 5-10\}$



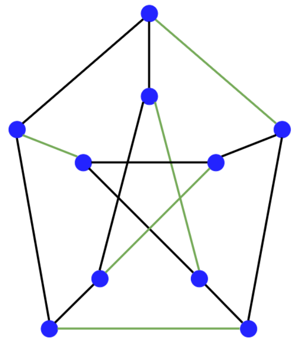
$M_3 = \{1{-}6, 2{-}3, 4{-}5, 8{-}10, 7{-}9\}$



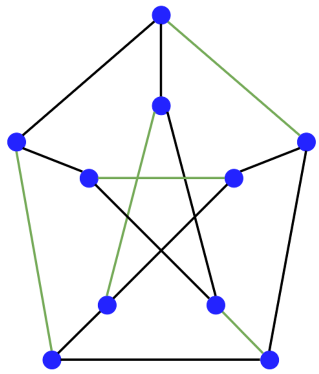
$M_4 = \{1{-}2, 3{-}4, 6{-}8, 7{-}9, 5{-}10\}$



$M_5 = \{2{-}3, 4{-}9, 5{-}1, 6{-}8, 10{-}7\}$



$M_6 = \{5{-}1, 3{-}4, 2{-}7, 8{-}10, 9{-}6\}$



$M_7 = \{2 - 3, 5 - 1, 4 - 9, 6 - 8, 10 - 7\}$

Como podemos observar hay más de 6 apareamientos perfectos en G.

10.2 La gráfica de Petersen es Hamiltoniana

No lo es, vamos a demostrarlo.
Consideremos los bordes desconectando el ciclo interno del ciclo externo.
Ahora tenemos 2 ciclos (Un pentágono y una estrella). Es evidente que cada ciclo por separado sí es Hamiltoniano, pero si queremos mantener el ciclo Hamiltoniano debemos unirlas por un número par de aristas, manteniendo así el ciclo.
Entonces ahora sólo nos falta agregar un arista para que G sea exactamente igual a la gráfica de Petersen, pero agregar este arista implicaría perder el ciclo Hamiltoniano, por lo tanto la gráfica de Peterson no es Hamiltoniana

10.3 Si T es un árbol entonces T tiene a lo más un apareamiento maximal.

Sea $|V(G)| = n$
El apareamiento máximo M de T está dado por $|M| \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
Como sólo existe una trayectoria entre cada vértice de T sólo existe una trayectoria que no es $M - aumentable$ entre cada vértice. En el peor de los casos la raíz del arbol T sólo tiene un hijo y por tanto sólo una una trayectoria no $M - aumentable$ en T, la cual tendría una cardinalidad menor o igual a $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, entonces sólo hay un apareamiento máximo. Cuando hay más ramas y por tanto más trayectorias en T sin pérdida de generalidad podemos observar que el numero de vértices aumenta al igual que las trayectorias, por lo que la desigualdad siempre se cumpliría y además sería única.
$\therefore$ Sólo hay un apareamiento máximo para cada árbol T $\blacksquare$

11 Sea $G = (X, Y)$ un gráfica bipartita con un apareamiento perfecto M. Demuestra que $|X| = |Y|$

Por el **Teorema de Hall** sabemos que en una gráfica bipartita :

$$M \text{ es un apareamiento perfecto} \leftrightarrow \forall S \in V(G), |S| \leq |\mathcal{N}(S)|$$
$$\text{Donde } \mathcal{N}(S) \text{ son los vecinos de } S$$

Como G es bipartita y tiene un apareamiento perfecto entonces los subjconjuntos de $|V(G)|$ que en este caso son X y Y deben cumplir con la siguiente condición del teorema de Hall:

$$|X| \leq |\mathcal{N}(X)| \quad \text{Y además:} \quad |Y| \leq |\mathcal{N}(Y)|$$

Pero como los vecinos de X están en Y y viceversa entonces tenemos:

$$|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |Y|$$

$\therefore$ La única manera de cumplir la desigualdad es si $|X| = |Y|$
$\therefore$ Queda demostrado que si G es bipartita y tiene un apareamiento perfecto entonces $|X| = |Y|$ $\blacksquare$

12 Sea G una gráfica hamiltoniana de orden par. Demuestra que G tiene dos apareamientos perfectos ajenos.

Como G es Hamiltoniana y de orden par, entonces existe un ciclo que pasa por todos los vertices de la forma: $C = \{x_1x_2, x_2x_3, ..., x_{2n-1}x_{2k}, x_{2n}x_1\}$
Tomamos entonces a los subconjuntos de aristas en el ciclo siguientes dn C:

Las aristas que cuyo vertice de numeracion menor es impar:

$$M = \{x_1x_2, ..., x_{2n-1}x_{2n}\}$$

Las aristas que cuyo vertice de numeracion menor es par:

$$N = \{x_2x_3, ..., x_2nx_1\}$$

Por como numeramos las aristas en C, ocurre que todas son de la forma x_kx_{k+1}, y como $k \in \mathbb{N}$, k solo puede ser par o impar pero no ambas.
$\therefore N \cap M = \emptyset$.

Sea $x_ix_{i+1} \in M$, por su definicion x_i es par, supongamos que $\exists x_jx_{j+1} \in M$ tal que sea adyacente con $x_ix_{i+1} \in M$, esto implica que $x_j = x_i \vee x_j = x_{i+1}$.
. Si $x_j = x_i$, son el mismo vertice (contradiccion!).
. Si $x_j = x_{i+1}$, como i es par, i+1 es impar, pero j=i+1 es par(contradiccion!)
$\therefore \forall a \in M$ no tiene aristas adyacentes, esto implic que M es un emparejamiento.

Sea $x_ix_{i+1} \in N$, por su definicion x_i es impar, supongamos que $\exists x_jx_{j+1} \in N$ tal que sea adyacente con $x_ix_{i+1} \in M$, esto implica que $x_j = x_i \vee x_j = x_{i+1}$.
. Si $x_j = x_i$, son el mismo vertice (contradiccion!).
. Si $x_j = x_{i+1}$, como i es impar, i+1 es par, pero j=i+1 es impar(contradiccion!)
$\therefore \forall a \in M$ no tiene aristas adyacentes, esto implic que N es un emparejamiento.

Sea $x_i \in G$
Si i es par, entonces x_ix_{i+1} esta en N.
. Como i es par y es natural, entonces $i \geq 2$ por lo que $x_{i-1}x_i$ esta en M.
Si i es impar, entonces x_ix_{i+1} esta en M.
. Si $i = 1$, $x_{2n}x_1 \in N$
. Si $i > 1$, $x_{i-1}x_i \in N$, porque i-1 es par.
$\therefore \forall v \in G \to v \in M \wedge v \in N$
Es decir tanto M como N, saturan a G. Es decir son emparejamientos perfectos
Como exhibimos dos apareamientos perfectos en G una gráfica cualquiera Hamiltoniana y de orden par,queda demostrado ■

13 Sea G una gráfica con n vértices y n par, tal que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Demuestre que G tiene un apareamiento perfecto.

El **Teorema de Dirac** nos dice que una gráfica con n vértices tal que $n > 3$ es Hamiltoniano si cada vértice tiene grado mayor o igual a $\frac{n}{2}$. En otras palabras, si $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$.
Tenemos 2 casos.
Caso 1:$(n > 3)$
Sea G una gráfica con n vértices y n par, tal que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, que por Dirac sabemos que es Hamiltoniana.
Como ya demostramos en clase que toda gráfica Hamiltoniana de orden par tiene un apareamiento perfecto entonces seguimos que G por ser Hamiltoniana y de orden par entonces tiene un apareamiento perfecto para $n \geq 4$.
Caso 2:$(n = 2)$
El único caso restante es cuando $n = 2$ que es el primer número par. Sea G una gráfica con 2 vértices, tal que $\delta(G) \geq 1$. Podemos observar que la gráfica que cumple las condiciones es K_2:

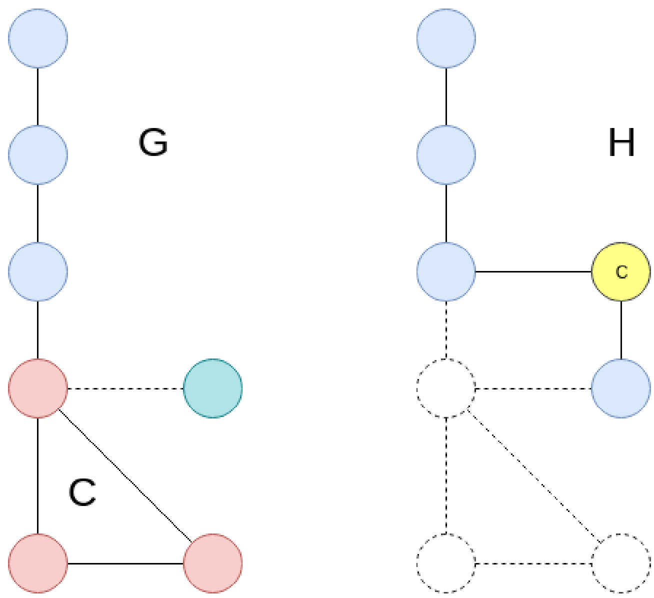
Es evidente que K_2 tiene un apareamiento perfecto.
$\therefore$ Se cumple para toda n par y por tanto queda demostrado ■

14 Sea G una gráfica conexa y C un ciclo de longitud impar en G. Definimos la gráfica H como sigue

$$V(H) = (V(G) - V(C)) \cup \{c\}$$
$$E(H) = E(G - C) \cup \{(c, x) | \exists v \in V(C) \text{ tal que } (v, x) \in E(G)\}$$

Demuestra que si H tiene un apareamiento perfecto entonces G tiene un aparemiento perfecto.

Detengamonos un momento a pensar en como esta constituida la grafica H, para ello imaginemos una grafica que tiene como subgrafica un ciclo impar y realicemos las operaciones que generan a H:



Podemos ver entonces que lo que nos dice el enunciado anterior es que H son las aristas de G excepto aquellas relacionadas con C, y ademas si tienen algun vertice tiene una arista cuyo extremo este en C, el extremo de esa arista que esta en H debe tener una arista con c.

Considerando lo anterior empezemos con la prueba, como H tiene un aparemiento perfecto al que llameremos M, el cual sabemos que tiene la siguiente forma $M = \{v_1v_2, ..., v_xc, v_iv_{i+1}\}$ porque por ser perfecto cada arista es ajena por vertices y satura a todos,ademas sabemos que por construccion lo vertices de H pertenecen a G-C, salvo por c, por lo que $M - v_xc \subset E(G - C)$.

Como M satura a $V(H) = (V(G) - V(C)) \cup \{c\}$, entonces $M - v_xc$, satura a $((V(G) - V(C)) \cup \{c\}) - \{v_x, c\} = (V(G) - V(C)) - v_x$.

Como $v_x c \in H$, por construccion de H esto implica que
$\exists u \in V(C)$ tal que $uv_x \in E(G)$, ademas $\{uv_x\}$ es un aparemiento que satura a $\{u, v_x\}$.

Consideremos ahora a $C - u$, como es una trayectoria de orden par, en clase demostramos, que una grafica de estas caracteristicas tiene un aparemiento perfecto al que llamaremos M_2 que satura a $V(C) - u$.

Veamos entonces que $M - v_x c$, M_2 y uv_x son ajenos y ademas ya habiamos probado que $M - v_x c$ satura a $(V(G) - V(C)) - v_x$, uv_x satura a $\{u, v_x\}$ y M_2 satura a $V(C) - u$. Entonces consideremos a $M' = M - v_x c \cup M_2 \cup uv_x$, este aparemiento satura a $(V(G) - V(C)) - v_x + u + v_x + V(C) - u = V(G)$, es decir satura a todos los vertices de G, por lo que M' es un aparemiento perfecto en G. Y terminamos nuestra demostracion.

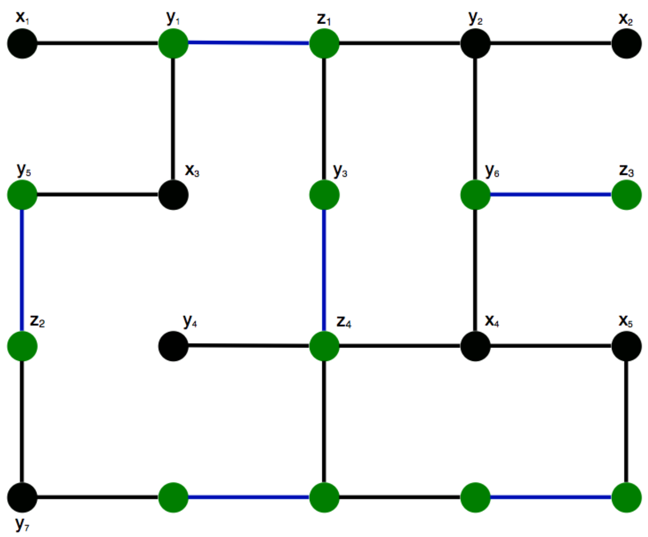
15 En la siguiente gráfica G, utilice el algoritmo Húngaro (sin matrices y dibujando los pasos) para encontrar un apareamiento M' de máxima cardinalidad a partir del apareamiento dado M (en azul).

Algoritmo Húngaro

1. Si M satura a todos los vértices terminamos
   $\rightarrow$ En otro caso escogemos un vértice que no esté $M-saturado$ y creamos dos conjuntos S y T

2. Si $\mathcal{N}(S) = T$ terminamos
   $\rightarrow$ En caso contrario, sea $y \in V(M)$

3. Si y está $M - saturado$, es decir $yz\ inM$
   $\rightarrow$ Agregamos z a S
   $\rightarrow$ Agregamos y a T
   En otro caso sabemos que M es aumentable, entonces con cada arista que hemos recorrido creamos a la nueva trayectoria P y definimos a M como $M = M \triangle P$
   Veamos ahora la gráfica con la que vamos a trabajar:



Seleccionamos un vértice arbitrario no saturado, en este caso escogeremos x_1.

$$S = \{x_1\} \qquad T = \varnothing$$

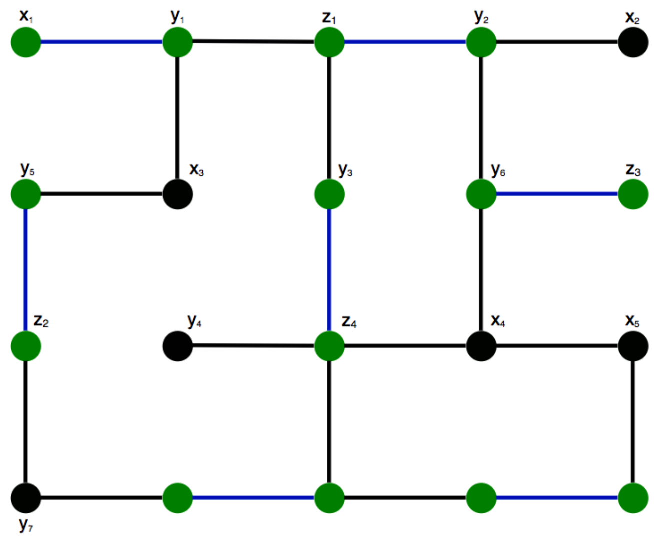
Ahora estamos en el Caso 3 del algoritmo, seleccionamos a un vértice $M - saturado$

$$S = \{x_1, z_1\} \qquad T = \{y_1\} \qquad (\text{Seleccionamos } y_1)$$

Notamos que ya no hay más vértices de $\mathcal{N}(S)$ saturados, por lo que hay que redefinir a M, seleccionamos al siguiente vértice en la trayectoria que seguíamos que no está saturado (y_2)

$$M = \{y_1 z_1\} \qquad \text{(Aristas de } M \text{ que nos interesan)}$$
$$P = \{x_1, y_1, z_1, y_2\} \qquad A(P) = \{x_1 y_1, y_1 z_1, z_1 y_2\}$$
$$M = M \triangle P = \{x_1 y_1, z_1 y_1\} \qquad \text{(Actualizamos } M\text{)}$$

Debemos entonces actualizar el conjunto M y continuar con el algoritmo. Empezaremos otra vez seleccionando a un vértice arbitrario que no esté saturado y continuaremos en el Caso 3 del algoritmo hasta que se cumpla el Caso 1 o el Caso 2, los cuales terminan el algoritmo. La gráfica queda como sigue:



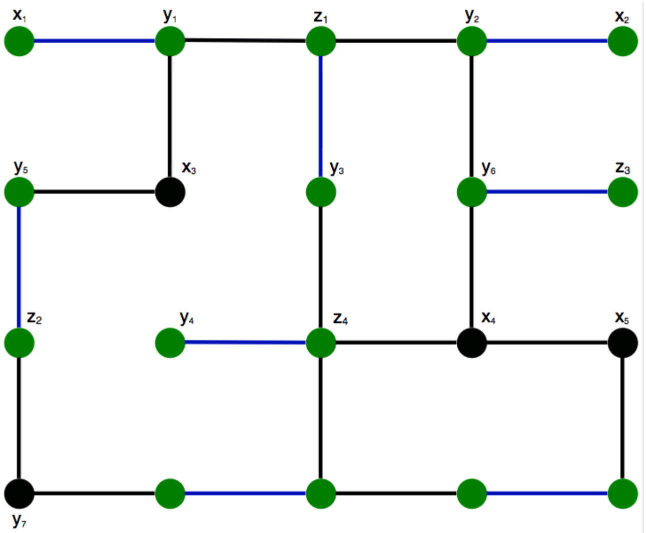
Como no se cumplen ni el Caso 1 ni el Caso 2, volvemos a seleccionar un vértice no saturado y continuamos al Caso 3.

$$S = \{x_2\} \qquad T = \varnothing \qquad \text{(Seleccionamos } x_2\text{)}$$
$$S = \{x_2, z_1\} \qquad T = \{y_2\} \qquad \text{(Seleccionamos } y_2 \text{ y agregamos } z_1\text{)}$$
$$S = \{x_2, z_1, z_4\} \qquad T = \{y_2, y_3\} \qquad \text{(Seleccionamos } y_3 \text{ y agregamos } z_4\text{)}$$

Notamos que al seleccionar a y_4 este no está saturado, por lo que hay que redefinir a M.

$$M = \{y_2 z_1, x_1 y_1, y_3 z_4\}$$
$$\text{(Aristas de } M \text{ que nos interesan)}$$
$$P = \{x_2, y_3, z_1, y_3, y_4, z_4\} \qquad A(P) = \{y_2 x_2, y_2 z_1, z_1 y_3, y_3 z_4, z_4 y_4\}$$
$$M = M \triangle P = \{y_2 x_2, z_1 y_3, z_4 y_4\} \qquad \text{(Actualizamos } M\text{)}$$

La gráfica queda como sigue:



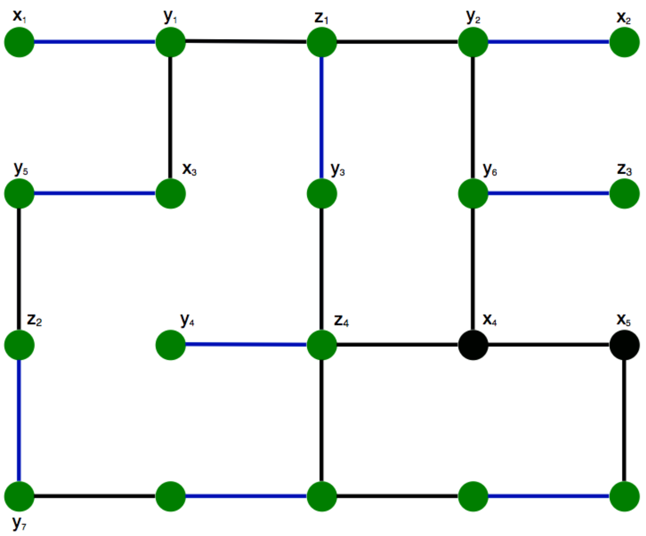
Como no se cumplen ni el Caso 1 ni el Caso 2, volvemos a seleccionar un vértice no saturado y continuamos al Caso 3

$$S = \{x_3\} \qquad T = \varnothing \qquad \text{(Seleccionamos } x_3)$$
$$S = \{x_3, z_5\} \qquad T = \{y_5\} \qquad \text{(Seleccionamos } y_5 \text{ y agregamos } z_5)$$

Seleccionamos un vertice no saturado (y_6) lo que implica que M es aumentable, volvemos a definir el conjunto:

$$M = \{y_5 z_5\} \qquad \text{(Aristas de } M \text{ que nos interesan)}$$
$$P = \{x_3, y_5, z_5, y_6\} \qquad A(P) = \{x_3y_5, y_5z_5, z_5y_6\}$$
$$M = M \triangle P = \{x_3y_5, z_5y_6\} \qquad \text{(Actualizamos } M)$$

La gráfica queda como sigue:



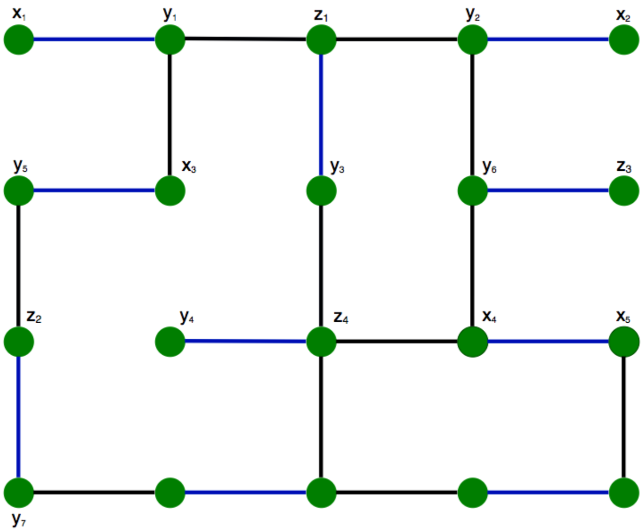
Como no se cumplen ni el Caso 1 ni el Caso 2, volvemos a seleccionar un vértice no saturado y continuamos al Caso 3.

$$S = \{x_4\} \qquad T = \varnothing \qquad \text{(Seleccionamos } x_4\text{)}$$

Notamos que ya no hay más vértices de $\mathcal{N}(S)$ saturados, por lo que hay que redefinir a M, seleccionamos al siguiente vértice en la trayectoria que seguíamos que no está saturado (x_5)

$$M = \{\varnothing\} \qquad \text{(Aristas de } M \text{ que nos interesan)}$$
$$P = \{x_4, x_5\} \qquad A(P) = \{x_4x_6\}$$
$$M = M \triangle P = \{x_4x_6\} \qquad \text{(Actualizamos } M\text{)}$$

Notamos que caemos en el Caso 1, ya que todos los vértices están saturados, por lo que hemos encontrado un apareamiento M' de máxima cardinalidad. La gráfica finalmento quedó cómo:



Gráfica G con un apareamiento de máxima cardinalidad M'