Probabilidad I
César Galindo y Guillermo Garro
Facultad de Ciencias. UNAM
Grupo **9026**. Sem. **2021-1**

Tarea 2 parte 2

Funciones de distribución

1. Sea $(E_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de eventos independientes tales que $\mathbb{P}[E_k] = p \in [0,1]$, para todo $k \geq 1$.

   a) Probar que para toda n, la variable aleatoria $Z_n = \mathbf{1}_{E_1} + ... + \mathbf{1}_{E_n}$ sea la Ley de una binomial de parametros n y p, a saber para toda $k \in \{0,..,n\}$

   $$\mathbb{P}[Z_n = k] = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k}$$

   Para toda $k \geq 1$, definimos $A_k = \{Z_{2k} = k\}$ y $a_k = \mathbb{P}[A_k]$

   b) Calcular $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k}$.

   c) Cuando $p \in [0,1] \setminus \{1/2\}$, calcular la probabilidad de que un número infinito de eventos entre los $(A_k)_{k\geq 1}$ se produzca.

2. (**Ley de Rayleigh**). Consideremos una v.a. exponencial Y de parámetro $1/2$ y definamos $X := \sqrt{Y}$.

   a) Calcular $\mathbb{E}[X^2]$

   b) Determinar la densidad f de X.

   c) Mostrar que

   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2}$$

   d) Deducir que

   $$\mathbb{E}[X] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

   e) Recuerde una desigualdad general entre $\mathbb{E}[X^2]$ y $(\mathbb{E}[X])^2$ y deduzca que $\pi \leq 4$.

3. Sea X la variable aleatoria real con densidad:

   $$f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \in [0,1] \\ 1+x & si \quad x \in [-1,0] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Calcular su función de repartición F_X.

b) Calcular la Esperanza y la Varianza de X.

c) Calcular $\mathbb{P}[X \leq \frac{1}{4}, X^2 \leq \frac{1}{4}]$.

d) Detrminar la función de repartición F_Y de la v.a. $Y = X^2$.

4. Considere la siguiente función:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{16}(x+2) & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{4} & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2^k} & x \in \left[\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right), \quad k \in \{2, 3, 4, \dots\} \\ \frac{1}{16}(x+9) & x \in [1, 3) \\ 1 & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Demuestra que existe una variable aleatoria, X, tal que $F_X = F$ y encuentra las siguientes probabilidades:

a) $\mathbb{P}[0 \leq X < 3]$.

b) $\mathbb{P}[1 \leq X \leq 3]$.

c) $\mathbb{P}[X \in \mathbb{Q}]$.

d) $\mathbb{P}\left[X \in \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}\right]$.

5. Sea F la función dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{4} & x \in [0, 4) \\ \frac{3}{40}(x+1) & x \in [4, 9) \\ 1 & x \in [9, \infty). \end{cases}$$

Demuestra que existe una variable aleatoria, X, tal que $F_X = F$ y encuentra la distribución de $Y = \sqrt{X}$.

6. Sea F la función dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, -1) \\ \\ \dfrac{1}{2} & x \in [-1, 1) \\ \\ \dfrac{1}{16}(x+11) & x \in [1, 3) \\ \\ 1 & x \in [3, \infty). \end{cases}$$

Demuestra que existe una variable aleatoria, X, tal que $F_X = F$ y encuentra la distribución de $Y = X^2$.

7. Una función de densidad f, de una variable aleatoria continua X, está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & 0 < x < 1 \\ \\ \dfrac{x}{3} & 1 \leq x < 2 \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentra la función de densidad de la variable aleatoria $Y = X^2 - 1$.

8. **(Problema del recolector de cupones)** Una marca de cereal ofrece, en cada paquete, una pieza de un rompecabezas que contiene un total de k. Cada semana, la pieza se toma al azar de las k piezas posibles, independientemente de las semanas anteriores. Un coleccionista compra un paquete cada semana y le gustaría saber cuántas semanas necesitará para poder terminar el rompecabezas.
Consideremos A_i^n al evento "la i-ésima pieza no se extrajo en las primeras n semanas".

   a) Calcular $\mathbb{P}[A_i^n]$.

   b) Denotamos X_n al número de piezas del rompecabezas que aún faltan después de n semanas. Escribiendo $X_n = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{A_i^n}$ (que justificará), calcular $\mathbb{E}[X_n]$. Demuestre que $\mathbb{E}[X_n] \to 0$ cuando $n \to \infty$.

   c) Denotamos por T el número de semanas necesarias para completar la colección. Demuestre que

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}[X_n \geq 1] \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n$$

   d) Deduzca que, para toda $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}[T > (1+\varepsilon)k \ln k] \to 0$$

   cuando $k \to \infty$.

Familia Uniforme

9. Sea $X \sim \text{unif}[a, b]$. Dar la función de repartición, la densidad, la esperanza y la varianza de $Y = X^2$.

10. Sean $X_0, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \sim \text{unif}[0, 1]$.

    a) Sea $0 \leq k \leq n$ y sea $U_k = \text{mín}\{X_0, \ldots, X_k\}$. Demuestra que U_k admite una densidad que se tendrá que determinar.

    b) Sea $N \sim \text{Bin}(n, 1/2)$. Demostrar que $U = \text{mín}\{X_0, \ldots, X_N\}$ admite una densidad que se tendrá que determinar.

11. (**Simulación**) Sea $U \sim \text{unif}(0, 1)$.

    a) Sea F una función que satisface las condiciones

    1) es no decreciente;
    2) càdlàg
    3) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

    Sea $F^{-1} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ la inversa generalizada de F:

    $$F^{-1}(u) = \text{mín}\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}.$$

    Demuestra que $X = F^{-1}(U) \sim \mathbb{P}_X$, donde $\mathbb{P}_X$ tiene por función de distribución F.

    b) Sea $U \sim \text{unif}(0, 1)$ y (U_i) variables aleatorias independientes con $U_i \sim U$. Encuentra la ley de las siguientes variables aleatorias:

    1) $Y := \mathbf{1}_{\{U \leq p\}}$, $p \in (0, 1)$.
    2) $Y := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{U \leq p\}}$, $p \in (0, 1)$.
    3) $Y := 1 + \left[\left(\dfrac{\ln U}{\ln(1 - p)} \right) \right]$, $p \in (0, 1)$ y donde $[\bullet]$ es la función parte entera.
    4) $Y := \text{ínf}\{n \in \mathbb{N} : U_1 \times \cdots \times U_{n+1} \leq e^{-\theta}\}$, $\theta > 0$.
    5) $Y := a + (b - a)U$, $a < b$.
    6) $Y := -\dfrac{\ln U}{\lambda}$, $\lambda > 0$.
    7) $Y := a \tan \left(\pi \left(U - \dfrac{1}{2} \right) \right)$, $a > 0$.
    8) $Y := \mu + \sigma \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$.
    9) $Y := (-\ln U)^{1/a}$, $a > 0$.
    10) $Y := -\text{sgn}(U) \ln 1 - 2|U|$, con $U \sim \text{unif}(-0.5, 0.5)$.
    11) $Y := -\ln(\ln U)$.

Familia exponencial

12. La vida útil de los átomos de radón sigue una ley exponencial. La probabilidad de que un átomo de radón no se desintegre en $40s$ sabiendo que no se desintegra en $12s$ es $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ¿Cuál es la probabilidad de que no se desintegre antes de los $76s$ sabiendo que no se descompone en $20s$? (**Sugerencia**: Usa la propiedad de pérdida de la variable aleatoria exponenciasl:

$$\mathbb{P}[X > s + t \mid X > t] = \mathbb{P}[X > s].$$

para todo $s, t \geq 0$)

13. Supongamos que $X \sim \exp(1)$. Sea $Y = \lceil \theta X \rceil$, en donde $\lceil \bullet \rceil$ denota la parte entera superior.

    a) Demuestra que Y sigue una ley geométrica de parámetro a determinar.

    b) Sea $\theta = 1$ y sea $Z = Y - X$. Encuentra F_Z y la densidad f_Z.

14. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con ley exponencial de parámetro $\theta > 0$.

    a) Sea $U = \max\{X_1, X_2\}$. Encuentra la densidad, f_U, de U y $\mathbb{E}[U]$.

    b) Sea $V = \min\{X_1, X_2\}$. Encuentra la densidad, f_V, de V y $\mathbb{E}[V]$.

    c) Demuestra que $\mathbb{E}[X_1 - X_2] = \frac{1}{\theta}$.

15. Una fábrica, fabrica dispositivos electrónicos que constan de dos componentes A y B cuyas operaciones son independientes entre sí y cuyas vidas (en horas) son variables aleatorias X_1 y X_2 que siguen una ley exponencial de parámetros respectivos θ_1 y θ_2. Un aparato funciona si, y sólo si, las dos componentes funcionan. Denótese por T a la duración de vida de un aparato. Encuentra la ley de T.

16. Para $r > 0$, sea $Z = e^{rT}$ con $T \sim \exp(\theta)$. Calcula la esperanza y varianza de Z (cuando estas existan). También, demuestra que Z tiene una densidad a determinar.