

# Démonstrations des lois algébriques utilisées en C2QL

Santiago Bautista

Juin 2017

## Structure des démonstrations

Puisque dans toutes les démonstrations qui suivent le but est de prouver, sous certaines conditions, l'égalité de deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sur  $R$  (ou sur  $R^2$  ou  $R^3$  selon le cas), la structure de toutes les démonstrations sera la même : on considérera  $r$  une relation (ou une paire ou un triplet de relations, selon le cas), on commencera par montrer que  $f_1(r)$  et  $f_2(r)$  ont le même schéma relationnel, puis, on montrera que  $f_1(r) \subset f_2(r)$  et ensuite que  $f_2(r) \subset f_1(r)$ .

On aura ainsi démontré par double inclusion que  $f_1(r) = f_2(r)$ .

## Lois de projection

### Projection et projection

$$\pi_{\delta_1} \circ \dots \circ \pi_{\delta_n} = \pi_{\delta_1 \cap \dots \cap \delta_n} \quad (1)$$

Soit  $r$  une relation. On pose  $r_1 = \pi_{\delta_1} \circ \dots \circ \pi_{\delta_n}(r)$  et  $r_2 = \pi_{\delta_1 \cap \dots \cap \delta_n}(r)$

### Schéma relationnel

On peut démontrer par récurrence sur  $n$  que le schéma relationnel de  $r_1$  est

$$\text{sch}(r_1) = \text{sch}(r) \cap \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \delta_i$$

De même, par définition de la projection, on a

$$\text{sch}(r_2) = \text{sch}(r) \cap \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} \delta_i$$

Donc  $\text{sch}(r_1) = \text{sch}(r_2)$

### Première inclusion

Soit  $l$  une ligne de  $r_1$ .

Il existe  $l'$  une ligne de  $r$  telle que  $l = ((l'|_{\delta_n \cup \{id\}})|\dots)|_{\delta_1 \cup \{id\}} = l'|_{(\delta_1 \cap \dots \cap \delta_n) \cup \{id\}}$ . Or, par définition de la projection  $\pi_{\delta_1 \cap \dots \cap \delta_n}$ , on a  $l'|_{(\delta_1 \cap \dots \cap \delta_n) \cup \{id\}} \in r_2$ . Donc  $l \in r_2$ .

Ainsi,  $r_1 \subset r_2$ .

### Deuxième inclusion

De même, si  $l$  est un élément de  $r_2$ , alors il existe une ligne  $l'$  de  $r$  telle que  $l = l'|_{(\delta_1 \cap \dots \cap \delta_n) \cup \{id\}} = ((l'|_{\delta_n \cup \{id\}})|_{\dots})|_{\delta_1 \cup \{id\}}$  et, par définition de  $\pi_{\delta_1} \circ \dots \circ \pi_{\delta_n}$ , on a  $((l'|_{\delta_n \cup \{id\}})|_{\dots})|_{\delta_1 \cup \{id\}} \in r_1$ , d'où  $l \in r_1$  et  $r_2 \subset r_1$ .

### Projection et sélection

$$\pi_\delta \circ \sigma_p = \sigma_p \circ \pi_\delta \quad \text{si } \text{dom}(p) \subset \delta \quad (2)$$

Soit  $\delta$  un ensemble de noms d'attributs et  $p$  un prédicat sur les lignes tel que  $\text{dom}(p) \subset \delta$ .

Soit  $r$  une relation. On pose  $r_1 = (\pi_\delta \circ \sigma_p)(r)$  et  $r_2 = (\sigma_p \circ \pi_\delta)(r)$

### Schéma relationnel

Une sélection ne modifiant jamais le schéma relationnel d'une relation, la schéma relation de  $r_1$  et de  $r_2$  est  $\text{sch}(r) \cap \delta$ .

### Première inclusion

Soit  $l$  une ligne de  $r_1$ .

Il existe une ligne  $l'$  de  $\sigma_p(r_1)$  telle que  $l = l'|_{(\text{sch}(r) \cap \delta) \cup \{id\}}$ .

Puisque  $l$  et  $l'$  coïncident sur  $\delta$  et que  $\text{dom}(p) \subset \delta$ , on a  $p(l) = p(l') = \text{true}$ .

Or, par définition de  $\pi_\delta$ ,  $l' \in \pi_\delta(r)$ , donc  $l' \in \sigma_p(\pi_\delta(r)) = r_2$ .

Ainsi,  $r_1 \subset r_2$ .

### Deuxième inclusion

De même, si  $l$  est un élément de  $r_2$ , alors  $p(l) = \text{true}$  et  $l \in \pi_\delta(r)$  donc il existe une ligne  $l'$  dans  $r$  telle que  $l = l'|_{(\text{sch}(r) \cap \delta) \cup \{id\}}$ .  $l$  et  $l'$  coïncident sur  $\delta$  qui contient le domaine de  $p$ ,  $l'$  vérifie le prédicat  $p$  donc  $l' \in \sigma_p(r)$ .

On en déduit par définition de  $\pi_\delta$  que  $l \in r_1$ .

Ainsi,  $r_2 \subset r_1$ .

### Projection et défragmentation (verticale)

En appelant  $\delta_1$  le schéma relationnel du premier argument et  $\delta_2$  le schéma relationnel du deuxième argument, on a :

$$\pi_\delta \circ \text{defrag} = \text{defrag} \circ (\pi_\delta, \pi_\delta) \quad \text{si } \delta_1 \cap \delta_2 = \emptyset \quad (3)$$

Soit  $\delta$  un ensemble de noms d'attributs. Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux relations unifiables.

On pose  $\text{res}_1 = (\pi_\delta \circ \text{defrag})(r_1, r_2)$  et  $\text{res}_2 = \text{defrag} \circ (\pi_\delta, \pi_\delta)(r_1, r_2)$ .

**Remarque :** L'hypothèse «  $r_1$  et  $r_2$  unifiables » garantit que les  $\text{res}_1$  et  $\text{res}_2$  sont bien définies. En effet, non seulement elle garantit que  $\text{defrag}(r_1, r_2)$  existe et donc que  $\text{res}_1$  existe (la projection a été définie sur  $R$  tout entier), mais elle garantit également que  $(\delta_1 \cap \delta) \cap (\delta_2 \cap \delta) = \emptyset$  et donc (vu que les projections conservent les identifiants) que  $\pi_\delta(r_1)$  et  $\pi_\delta(r_2)$  sont unifiables, donc que  $\text{res}_2$  existe.

### Schémas relationnels

Le schéma relationnel de  $\text{defrag}(r_1, r_2)$  est  $\delta_1 \cup \delta_2$ , donc celui de  $\text{res}_1$  est  $\delta \cap (\delta_1 \cup \delta_2)$ .

Les schémas relationnels de  $\pi_\delta(r_1)$  et de  $\pi_\delta(r_2)$  sont respectivement  $\delta \cap \delta_1$  et  $\delta \cap \delta_2$ , donc le schéma relationnel de  $\text{res}_2$  est  $(\delta \cap \delta_1) \cup (\delta \cap \delta_2) = \delta \cap (\delta_1 \cup \delta_2)$

### Première inclusion

Soit  $l$  une ligne de  $\text{res}_1$ .

Il existe  $l_0$  une ligne de  $\text{defrag}(r_1, r_2)$  de schéma relationnel  $\delta_1 \cup \delta_2$  telle que  $l = l_0|_{\delta \cup \{id\}}$ . Il existe donc deux lignes  $l_1$  et  $l_2$  appartenant respectivement à  $r_1$  et  $r_2$  telles que  $l_1 = l_0|_{\delta_1 \cup \{id\}}$   $l_2 = l_0|_{\delta_2 \cup \{id\}}$

Puisque  $l_1$  appartient à  $r_1$ , il existe une ligne  $l'_1$  dans  $\pi_\delta(r_1)$  telle que  $l'_1 = l_1|_{\delta \cup \{id\}} = l_0|_{(\delta \cap \delta_1) \cup \{id\}}$ . De même, il existe une ligne  $l'_2$  dans  $\pi_\delta(r_2)$  telle que  $l'_2 = l_2|_{\delta \cup \{id\}} = l_0|_{(\delta \cap \delta_2) \cup \{id\}}$ .

De l'existence de  $l'_1$  et  $l'_2$  qui partagent même identifiant (et portent sur des schémas relationnels disjoints) on en déduit que  $l'_1.l'_2$  appartient à  $\text{res}_2$ .

Or,

$$\begin{aligned} l'_1.l'_2 &= l_0|_{((\delta \cap \delta_1) \cup \{id\}) \cup ((\delta \cap \delta_2) \cup \{id\})} \\ &= l_0|_{(\delta \cap (\delta_1 \cup \delta_2)) \cup \{id\}} \\ &= (l_0|_{\delta_1 \cup \delta_2 \cup \{id\}})|_{\delta \cup \{id\}} \\ &= l_0|_{\delta \cup \{id\}} = l \end{aligned}$$

Donc :  $l \in \text{res}_2$ .

### Deuxième inclusion

Soit  $l$  une ligne de  $\text{res}_2$ .

Il existe des lignes  $l'_1$  et  $l'_2$  appartenant respectivement à  $\pi_\delta(r_1)$  et  $\pi_\delta(r_2)$  telles que  $l = l'_1.l'_2$ .

On en déduit qu'il existe deux lignes  $l_1$  et  $l_2$  appartenant respectivement à  $r_1$  et  $r_2$  telles que  $l'_1 = l_1|_{\delta \cup \{id\}}$  et  $l'_2 = l_2|_{\delta \cup \{id\}}$ .

$r_1$  et  $r_2$  étant unifiables, et  $l_1$  et  $l_2$  ayant même identifiant,  $l_1$  et  $l_2$  sont des lignes correspondantes et on peut donc considérer  $l_1.l_2$ .

On a d'ailleurs  $l = l'_1.l'_2 = (l_1|_{\delta \cup \{id\}}).(l_2|_{\delta \cup \{id\}}) = (l_1.l_2)|_{\delta \cup \{id\}}$ .

Or,  $l_1.l_2$  appartient à  $\text{defrag}(r_1, r_2)$  donc  $l = (l_1.l_2)|_{\delta \cup \{id\}}$  appartient à  $\text{res}_1$

### Projection et déchiffrement d'un attribut projeté ou non

$$\pi_\delta \circ \text{decrypt}_{\alpha, c} \equiv \text{decrypt}_{\alpha, c} \circ \pi_\delta \quad (4)$$

Soit  $\delta$  un ensemble de noms d'attributs et  $\alpha$  un attribut (appartenant à  $\delta$  ou pas). Soit  $r$  une relation. On pose  $r_1 = (\pi_\delta \circ \text{decrypt}_{\alpha, c})(r)$  et  $r_2 = (\text{decrypt}_{\alpha, c} \circ \pi_\delta)(r)$ .

### Schémas relationnels

Le déchiffrement ne changeant pas le schéma relationnel d'une relation, le schéma relationnel de  $r_1$  et  $r_2$  est  $\text{sch}(r) \cap \delta$ .

### Première inclusion

Soit  $l$  une ligne de  $r_1$ .

Il existe  $l'$  une ligne de  $\text{decrypt}_{\alpha, c}(r)$  telle que  $l = l'|_{\delta \cup \{id\}}$ .  $l'$  étant un élément de  $\text{decrypt}_{\alpha, c}(r)$ , il existe une ligne  $l_0$  de  $r$  telle que  $l' = c^{-1}(l_0)_\alpha$  et donc  $l = c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}}$ .

Puisque  $l_0$  appartient à  $r$ ,  $l_0|_{\delta \cup \{id\}}$  appartient à  $\pi_\delta(r)$  et donc  $c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha$  appartient à  $r_2$ .

Montrons que  $c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}} = c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha$ . Les deux fonctions en question sont définies sur  $(\text{sch}(r) \cap \delta) \cup \{id\}$ .

Soit :  $\beta \in (\text{sch}(r) \cap \delta) \cup \{id\}$ .

Si  $\beta \neq \alpha$ , on a :

$$\begin{cases} c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}}(\beta) &= c^{-1}(l_0)_\alpha(\beta) = l_0(\beta) \\ c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha(\beta) &= l_0|_{\delta \cup \{id\}}(\beta) = l_0(\beta) \end{cases}$$

Si  $\alpha \in \text{sch}(r) \cap \delta$ , on a :

$$\begin{cases} c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}}(\alpha) &= c^{-1}(l_0)_\alpha(\alpha) = c^{-1}(l_0(\alpha)) \\ c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha(\alpha) &= c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}}(\alpha)) = c^{-1}(l_0(\alpha)) \end{cases}$$

Ainsi,  $c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}} = c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha$  donc  $l$  appartient à  $r_2$ .

### Deuxième inclusion

Soit  $l$  une ligne de  $r_2$ .

Il existe une ligne  $l'$  de  $\pi_\delta(r)$  telle que  $l = c^{-1}(l')_\alpha$ .

Puisque  $l'$  appartient à  $\pi_\delta(r)$ , il existe  $l_0$  dans  $r$  telle que  $l' = l_0|_\delta$  et donc telle que  $l = c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha$ .

Vu que  $l_0$  appartient à  $r$ ,  $c^{-1}(l_0)_\alpha$  appartient à  $\text{decrypt}_{\alpha, c}(r)$  et  $c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}}$  appartient à  $r_1$ .

Or,  $l_0$  étant une ligne de  $r$ , d'après la démonstration faite pour la première inclusion, on a :  $c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}} = c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha$ .

On en déduit que  $l$  appartient à  $r_1$ .

### Projection et déchiffrement d'un attribut non projeté

$$\pi_\delta \circ \text{decrypt}_{\alpha, c} \equiv \pi_\delta \quad \text{si } \alpha \notin \delta \quad (5)$$

Soit  $\delta$  un ensemble de noms d'attributs et  $\alpha$  un attribut n'appartenant pas à  $\delta$ . Soit  $r$  une relation. On pose  $r_1 = (\pi_\delta \circ \text{decrypt}_{\alpha, c})(r)$  et  $r_2 = (\text{decrypt}_{\alpha, c} \circ \pi_\delta)(r)$ .

### Schémas relationnels

Le déchiffrement ne changeant pas le schéma relationnel d'une relation, le schéma relationnel de  $r_1$  et  $r_2$  est  $\text{sch}(r) \cap \delta$ .

## Inclusions

La seule chose qui change est la démonstration du fait que pour toute ligne  $l_0$  de  $r$   $c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}} = c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha$ .

En effet, si on suppose  $\alpha \notin \delta$ , un seul cas se présente, à savoir  $\beta \in (\text{sch}(r) \cap \delta) \cup \{id\} \wedge \beta \neq \alpha$ , et on a alors

$$\begin{cases} c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}}(\beta) &= c^{-1}(l_0)_\alpha(\beta) = l_0(\beta) \\ c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha(\beta) &= l_0|_{\delta \cup \{id\}}(\beta) = l_0(\beta) \end{cases}$$

d'où l'égalité voulue.

À partir de là, si  $l$  est une ligne de  $r_1$ , elle s'écrit  $c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}}$  avec  $l_0 \in r$  et  $c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha$  appartient à  $r_2$  donc  $l$  appartient à  $r_2$ .

Inversement, si  $l$  est une ligne de  $r_2$ , elle s'écrit  $c^{-1}(l_0|_{\delta \cup \{id\}})_\alpha$  avec  $l_0 \in r$  et  $c^{-1}(l_0)_\alpha|_{\delta \cup \{id\}}$  appartient à  $r_1$  donc  $l$  appartient à  $r_1$ .

## Projection et jointure

En appelant  $\delta_1$  le schéma relationnel du premier argument et  $\delta_2$  le schéma relationnel du deuxième argument, on a :

$$\pi_\delta \circ \bowtie = \bowtie \circ (\pi_\delta, \pi_\delta) \quad \text{si } \delta_1 \cap \delta_2 \subset \delta \quad (6)$$

Soit  $\delta$  un ensemble de noms d'attributs, et  $r_1$  et  $r_2$  des relations. On pose  $res_1 = (\pi_\delta \circ \bowtie)(r_1, r_2)$  et  $res_1 = (\bowtie \circ (\pi_\delta, \pi_\delta))(r_1, r_2)$ .

## Schémas relationnels

Le schéma relationnel de  $r_1 \bowtie r_2$  est  $\text{sch}(r_1) \cup \text{sch}(r_2)$  donc celui de  $res_1$  est  $(\text{sch}(r_1) \cup \text{sch}(r_2)) \cap \delta$ .

Les schémas relationnels respectifs de  $\pi_\delta(r_1)$  et  $\pi_\delta(r_2)$  sont  $\text{sch}(r_1) \cap \delta$  et  $\text{sch}(r_2) \cap \delta$  donc celui de  $res_2$  est  $(\text{sch}(r_1) \cap \delta) \cup (\text{sch}(r_2) \cap \delta) = (\text{sch}(r_1) \cup \text{sch}(r_2)) \cap \delta$ .

## Première inclusion

Soit  $l$  une ligne de  $res_1$ .

Il existe une ligne  $l'$  de  $r_1 \bowtie r_2$  telle que  $l = l'|_{\delta \cup \{id\}}$ . Puisque  $l'$  appartient à  $r_1 \bowtie r_2$ , il existe deux lignes  $l_1$  et  $l_2$  appartenant respectivement à  $r_1$  et  $r_2$  telles que  $l' = l_1.l_2$ . Ainsi,  $l = (l_1.l_2)|_{\delta \cup \{id\}}$ .

Puisque  $l_1$  et  $l_2$  se correspondent et que  $\delta_1 \cap \delta_2 \subset \delta$ ,  $l_1|_{\delta \cup \{id\}}$  et  $l_2|_{\delta \cup \{id\}}$  se correspondent aussi. Or,  $l_1|_{\delta \cup \{id\}}$  (respectivement  $l_2|_{\delta \cup \{id\}}$ ) appartient à  $\pi_\delta(r_1)$  (resp.  $\pi_\delta(r_2)$ ), donc  $l_1|_{\delta \cup \{id\}}.l_2|_{\delta \cup \{id\}}$  appartient à  $res_2$ .

Montrons que  $(l_1.l_2)|_{\delta \cup \{id\}} = l_1|_{\delta \cup \{id\}}.l_2|_{\delta \cup \{id\}}$ . Ces deux fonctions sont définies sur  $((\delta_1 \cup \delta_2) \cap \delta) \cup \{id\}$ . Soit  $\beta$  un élément de  $(\delta_1 \cup \delta_2) \cap \delta$ .

$$(l_1.l_2)|_{\delta \cup \{id\}}(\beta) = l_1.l_2(\beta) = \begin{cases} l_1(\beta) & \text{si } \beta \in \delta_1 \\ l_2(\beta) & \text{si } \beta \in \delta_2 \end{cases}$$

$$l_1|_{\delta \cup \{id\}}.l_2|_{\delta \cup \{id\}}(\beta) = \begin{cases} l_1|_{\delta \cup \{id\}}(\beta) = l_1(\beta) & \text{si } \beta \in \delta_1 \\ l_2|_{\delta \cup \{id\}}(\beta) = l_2(\beta) & \text{si } \beta \in \delta_2 \end{cases}$$

De plus,  $(l_1.l_2)|_{\delta \cup \{id\}}(id) = l_1|_{\delta \cup \{id\}}.l_2|_{\delta \cup \{id\}}(id) = l_1(id).l_2(id)$ . Donc on a bien l'égalité souhaitée et on en déduit que  $l$  appartient à  $res_2$ .

### Deuxième inclusion

Soit  $l$  une ligne de  $res_2$ .

Il existe deux lignes  $l'_1$  et  $l'_2$  de  $\pi_\delta(r_1)$  et  $\pi_\delta(r_2)$  respectivement telles que  $l = l'_1.l'_2$ . Or, il existe deux lignes  $l_1$  et  $l_2$  appartenant respectivement à  $r_1$  et  $r_2$  telles que  $l'_1 = l_1|_{\delta \cup \{id\}}$  et  $l'_2 = l_2|_{\delta \cup \{id\}}$ .

Donc  $l = l_1|_{\delta \cup \{id\}}.l_2|_{\delta \cup \{id\}}$ .

D'autre part, vu que  $l_1|_{\delta \cup \{id\}}$  et  $l_2|_{\delta \cup \{id\}}$  se correspondent,  $l_1|_{\delta \cup \{id\}}$  et  $l_2|_{\delta \cup \{id\}}$  coïncident sur  $((\delta_1 \cap \delta) \cap (\delta_2 \cap \delta))$ . Or,  $\delta_1 \cap \delta_2 \subset \delta$ , donc  $l_1$  et  $l_2$  coïncident sur  $\delta_1 \cap \delta_2$  donc  $l_1$  et  $l_2$  se correspondent et donc  $l_1.l_2$  appartient à  $r_1 \rtimes r_2$ .

On en déduit que  $(l_1.l_2)|_{\delta \cup \{id\}}$  appartient à  $res_1$ .

Grâce à l'égalité prouvée lors de la preuve de l'autre inclusion, on en déduit que  $l$  appartient à  $res_1$ .