Transformaciones Lineales	Caracteristica de Transformaciones Lineales
Nucleo e Imagen	Espacio $L(V, W)$
Operadores Lineales	Coordenadas y Cambio de Base
Definicion Cambio de Base	Matriz de una Transformacion Lineal

Dado $T: V \to W$ Transformacion Lineal T es:

- Un monomorfismo si T es inyectiva. [$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$]
- Un epimorfismo si T es sobreyectiva. [$\forall y, \exists x \;/\; f(x) = y$]
- Un isomorfismo si T es biyectiva. [inyectiva y sobreyectiva]
- Un endomorfismo si T es $V = W$.
- Un automorfismo si T es $V = W$ y T es biyectiva.
- T es automorfismo $\Leftrightarrow$ T es isomorfismo y endomorfismo

(V, +, $\cdot$) y (W, +, $\cdot$) $\mathbb{F}$-ev, $T: V \to W$ T.L. si:

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$
- $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
- El cuerpo de los dos espacios es el MISMO
- T T.L. $\Rightarrow T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$.
- T T.L. $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall u, v \in V, T(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)$
- T T.L. $\Rightarrow T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i)$
- $A \in F^{mxn}, T_A : F^n \to F^m / T_A(x) = Ax$ T.L.
- Si $S \subset V$ sev $\Rightarrow T(S) \subset W$ sev.
- Si $R \subset W$ sev $\Rightarrow T^{-}1(R) \subset V$ sev.
- $B = v_1, .., v_n$ base y $w_1, .., w_n \in W \Rightarrow \exists! T / T(v_i) = w_i, i = 1, .., n$

V,W F-ev, $T, S{:}V \to W$ T.L. $\lambda \in F \Rightarrow$

- $(T+S)(v) = T(v) + S(v)$ T.L.
- $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$ T.L.
- $L(V, W) = \{T : V \to W / T$ es una T.L.$\}$
- ((L(V,W), +, $\cdot$) es un F Espacio Vectorial.
- $dimV = n$, $dimW = m \Rightarrow dim(L(V, W)) = m \cdot n$
- $T \in L(U, V), S \in L(V, W) \Rightarrow S \circ T \in L(U, W)$

$T: V \to W$ T.L.

- $ker(T) = T^{-1}(\bar{0}) = \{v \in V : T(v) = \bar{0}\}$ subeespacio de V.
- T monomorfismo $\Leftrightarrow ker(T) = \{\bar{0}\}$.
- $Im(T) = T(V) = \{T(v) \in W : v \in V\}$ subespacio de W.
- T epimorfismo $\Leftrightarrow Im(T) = W$
- Nulidad de T es la dimension de su nucleo. $nul(T) = dim(ker(T))$.
- Rango de T es la dimension de su imagen. $ran(T) = dim(Im(T))$.
- T monomorfismo $\Leftrightarrow nul(T) = 0$. Epimorfimo $\Leftrightarrow ran(T) = dim(W)$.
- T. De la dimension: si V finito dim. $ran(T) + nul(T) = dim(V)$
- Si V finito dim. y $dim(V) > dim(W) \Rightarrow T$ no monomorfismo.
- Si V finito dim. y $dim(V) < dim(W) \Rightarrow T$ no epimorfismo.

$DimV = n$, una base ordenada es un subconjunto $B = \{v_1, ..., v_n\}, v \in V : v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. El vector $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in F$ es el vector de coordenadas v, $[v]_B$

- V,W F-ev isomorfos si $\exists T : V \to W$ isomorfo, $V \overset{T}{\simeq} W$
- En la clase de los F-ev, el isomorfismo es relacion de equivalencia. [Reflexiva, Transitiva, Simetrica]
- V F-ev con $dimV = n \Rightarrow V \simeq F^n$
- $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}, B_2 = \{w_1, ..., w_n\}$, $C = (C_{ij})/$
  $\forall j < n, c_{1j}, ...c_{nj} \in F \;/\; v_j = c_{1j} w_1 + ... + c_{nj} w_n \;\; C[v]^t_{B_1} = [v]^t_{B_2}$
  Cambio de base de B_1 a B_2
- $C_{B_1 \to B_3} = C_{B_2 \to B_3} C_{B_1 \to B_2}$
- $C_{B_1 \to B_2} = C^{-1}_{B_2 \to B_1}$
- Si $A \in F^{nxn}$ invertible $\exists B_1, B_2 de F^n / A = C_{B_1 B_2}$
- Si $A \in F^{nxn}$ invertible Y B base de $F^n \Rightarrow$
  $\exists B_1$ base de $F^n / A = C_{B_1 B}$
  $\exists B_2$ base de $F^n / A = C_{B B_2}$

Cuando V = W, se escribe L(V). $T, S, R, L \in L(V), \lambda \in F$

- Si $S, T \in L(V) \Rightarrow S \circ T \in L(V)$. $ST := S \circ T$.
- $T(SR) = (TS)R$.
- $id_V T = T id_V = T$
- $T(S + R) = TS + TR$ y $(S + R)T = ST + SR$.
- $\lambda(TS) = (\lambda T)S = T(\lambda S)$
- T es invertible $\Leftrightarrow \exists S : W \to V / TS = id_W$ y $ST = id_V$.
- Si existe inversa es unica. T invertible $\Leftrightarrow$ biyectiva.
- Si $T \in L(V, W)$ invertible $\Rightarrow T^{-1} \in L(W, V)$
- si $T \in L(U, V), S \in L(V, W)$ invertibles $\Rightarrow ST \in L(U, W)$ invertibles y $(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1} \in L(W, U)$

Dado $B_1 = \{e1, e_2, e_3\}$ y $B_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ se consigue la matriz cambio de base $C_{B_1 B_2}$ expresando cada vector de B_1 en la base B_2.

$$C_{B_1 B_2} = ([e_1]^t_{B_2}, [e_1]^t_{B_2}, [e_1]^t_{B_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de T respecto a las bases B_1, B_2 está dada por:

$$[T]_{B_1 B_2} = ([T(v_1)]_{B_2} ... [T(v_n)]_{B_2})$$

- $[T]_{B_2 B_2} [v]^t_{B_1} = [T(v)]^t_{B_2}$