Nilpotencia

Bloque de Jordan nilpotente

Base de Jordan

Base de Jordan para A

Bloque de Jordan asociado al A.V. λ

Matriz de Jordan

$J \in F^{n\times n}$ es un bloque de Jordan nilpotente si

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $ran(J) = n - 1$
- C $l.i. \subset V/ker(T^i) \bigcap \langle C \rangle = \{\bar{0}\} \Rightarrow ker(T^{i-1}) \bigcap \langle T(C) \rangle = \{\bar{0}\}$

- T nilpotente $\Leftrightarrow \exists k / T^k \equiv 0$
- $k = min\{j \in \mathbb{N} : T^j \equiv 0\}$
- A nilpotente $\Leftrightarrow \exists k / A^k = 0_{n\times n}$ k, indice nilpotencia
- T es k pasos nilpotente $\Leftrightarrow m_T(X) = X^k$
- $grado(m_T) \le n = dim(V)$, T nilpotente $\Leftrightarrow T^n = 0$
- $T^k \equiv 0 \Rightarrow \{\bar{0}\} \subsetneq ker(T) \subsetneq ker(T^2) \subsetneq ... \subsetneq ker(T^k) = V$
- $A^k \equiv 0 \Rightarrow \{\bar{0}\} \subsetneq N(A) \subsetneq N(A^2) \subsetneq ... \subsetneq N(A^k) = F^n$

- A nilpotente $\Rightarrow A \sim$ Forma de Jordan (F.J) Nilpotente.
- B base de $F^n / [T]_B = J_A$ Forma de Jordan nilpotente $\Rightarrow$ B es una base de Jordan para A. Y J_A la F.J. de A
- $J \in F^{n\times n}$ B.J.N. $\Rightarrow ran(J^i) = n - i, i = 1, ..., n$
- A es k nilpotente $\Rightarrow$ B.J.N de mayor tamaño en A es $k \times k$
- La cantidad de B.J.N. en A es $(n - ran(A)) = dim(ker(A))$
- La cantidad de B.J.N. de tamaño $i \times i$ en A,

$$c_i = ran(A^{i+1}) - 2ran(A^i) + ran(A^{i-1})$$

- Si J, K F.J.N. si $J \sim K \Rightarrow J = K$
- $\exists!$ F.J.N $/[T]_B = J$ para B base.
- J, K F.J.N, $A, B \in F^n$ / $A \sim J, B \sim K \Rightarrow A \sim J \Leftrightarrow J = K$

$T^k \equiv 0 \Rightarrow \exists B$ base de V /

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & J_r \end{pmatrix}$$

$$i = 1...r, J_i \in F^{n_i \times n_i}$$

B es Base de Jordan, $[T]_B$ la forma de Jordan de la T.L.

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & J_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & J_r \end{pmatrix}$$

Forma de Jordan nilpotente

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_n \end{pmatrix}$$

Donde J_i tiene forma:

$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, n_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_i, n_{r_i}) \end{pmatrix}$$

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Bloque de Jordan Asociado al Autovalor λ.
(B.J.λ)

$m_T(X) = p(X)q(X), (p(X), q(X)) = 1$ (coprimos)

- $ker(p(T)), ker(q(T))$ T Invariantes.
- $V = ker(p(T)) \oplus ker(q(T))$
- $m_{T|_{ker(p(T))}(X)=p(X)}$, $m_{T|_{ker(q(T))}(X)=q(X)}$