

Transformaciones Lineales	Caracteristica de Transformaciones Lineales
Nucleo e Imagen	Espacio $L(V, W)$
Operadores Lineales	Coordenadas y Cambio de Base
Definicion Cambio de Base	Matriz de una Transformacion Lineal

<p>Dado $T : V \rightarrow W$ Transformacion Lineal T es:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Un monomorfismo si T es inyectiva. [$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$] • Un epimorfismo si T es sobreyectiva. [$\forall y, \exists x / f(x) = y$] • Un isomorfismo si T es biyectiva. [inyectiva y sobreyectiva] • Un endomorfismo si T es $V = W$. • Un automorfismo si T es $V = W$ y T es biyectiva. • T es automorfismo \Leftrightarrow T es isomorfismo y endomorfismo 	<p>$(V, +, \cdot)$ y $(W, +, \cdot)$ \mathbb{F}-ev, $T : V \rightarrow W$ T.L. si:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $T(u + v) = T(u) + T(v)$ • $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ • El cuerpo de los dos espacios es el MISMO • T T.L. $\Rightarrow T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$. • T T.L. $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall u, v \in V, T(\alpha \cdot u + \beta \cdot v)$ • T T.L. $\Rightarrow T(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i)$ • $A \in F^{m \times n}, T_A : F^n \rightarrow F^m / T_A(x) = Ax$ T.L. • Si $S \subset V$ sev $\Rightarrow T(S) \subset W$ sev. • Si $R \subset W$ sev $\Rightarrow T^{-1}(R) \subset V$ sev. • $B = v_1, ..., v_n$ base y $w_1, ..., w_n \in W \Rightarrow \exists ! T / T(v_i) = w_i, i = 1, ..., n$
<p>V,W F-ev, $T, S: V \rightarrow W$ T.L. $\lambda \in F \Rightarrow$</p> <ul style="list-style-type: none"> • $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ T.L. • $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$ T.L. • $L(V, W) = \{T : V \rightarrow W / T \text{ es una T.L.}\}$ • $((L(V, W), +, \cdot))$ es un F Espacio Vectorial. • $\dim V = n, \dim W = m \Rightarrow \dim(L(V, W)) = m \cdot n$ • $T \in L(U, V), S \in L(V, W) \Rightarrow S \circ T \in L(U, W)$ 	<p>$T : V \rightarrow W$ T.L.</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\ker(T) = T^{-1}(\bar{0}) = \{v \in V : T(v) = \bar{0}\}$ subespacio de V. • T monomorfismo $\Leftrightarrow \ker(T) = \{\bar{0}\}$. • $Im(T) = T(V) = \{T(v) \in W : v \in V\}$ subespacio de W. • T epimorfismo $\Leftrightarrow Im(T) = W$ • Nulidad de T es la dimension de su nucleo. $nul(T) = \dim(\ker(T))$. • Rango de T es la dimension de su imagen. $ran(T) = \dim(Im(T))$. • T monomorfismo $\Leftrightarrow nul(T) = 0$. Epimorfismo $\Leftrightarrow ran(T) = \dim(W)$. • T. De la dimension: si V finito dim. $ran(T) + nul(T) = \dim(V)$ • Si V finito dim. y $\dim(V) > \dim(W) \Rightarrow T$ no monomorfismo. • Si V finito dim. y $\dim(V) < \dim(W) \Rightarrow T$ no epimorfismo.
<p>$\dim V = n$, una base ordenada es un subconjunto $B = \{v_1, ..., v_n\}, v \in V : v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. El vector $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in F$ es el vector de coordenadas v, $[v]_B$</p> <ul style="list-style-type: none"> • V,W F-ev isomorfos si $\exists T : V \rightarrow W$ isomorfo, $V \stackrel{T}{\simeq} W$ • En la clase de los F-ev, el isomorfismo es relacion de equivalencia. [Reflexiva, Transitiva, Simetrica] • V F-ev con $\dim V = n \Rightarrow V \simeq F^n$ • $B_1 = \{v_1, ..., v_n\}, B_2 = \{w_1, ..., w_n\}, C = (C_{ij}) / \forall j < n, c_{1j}, ..., c_{nj} \in F / v_j = c_{1j} w_1 + ... + c_{nj} w_n$ Cambio de base de B_1 a B_2 • $C_{B_1 \rightarrow B_3} = C_{B_2 \rightarrow B_3} C_{B_1 \rightarrow B_2}$ • $C_{B_1 \rightarrow B_2} = C_{B_2 \rightarrow B_1}^{-1}$ • Si $A \in F^{n \times n}$ invertible $\exists B_1, B_2 \text{ de } F^n / A = C_{B_1 B_2}$ • Si $A \in F^{n \times n}$ invertible Y B base de $F^n \Rightarrow \exists B_1 \text{ base de } F^n / A = C_{B_1 B}$ $\exists B_2 \text{ base de } F^n / A = C_{B B_2}$ 	<p>Cuando $V = W$, se escribe L(V). $T, S, R, L \in L(V), \lambda \in F$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Si $S, T \in L(V) \Rightarrow S \circ T \in L(V)$. $ST := S \circ T$. • $T(SR) = (TS)R$. • $id_V T = T id_V = T$ • $T(S + R) = TS + TR$ y $(S + R)T = ST + SR$. • $\lambda(TS) = (\lambda T)S = T(\lambda S)$ • T es invertible $\Leftrightarrow \exists S : W \rightarrow V / TS = id_W$ y $ST = id_V$. • Si existe inversa es unica. T invertible \Leftrightarrow biyectiva. • Si $T \in L(V, W)$ invertible $\Rightarrow T^{-1} \in L(W, V)$ • si $T \in L(U, V), S \in L(V, W)$ invertibles $\Rightarrow ST \in L(U, W)$ invertibles y $(ST)^{-1} = T^{-1} S^{-1} \in L(W, U)$
	<p>Dado $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $B_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ se consigue la matriz cambio de base $C_{B_1 B_2}$ expresando cada vector de B_1 en la base B_2.</p> $C_{B_1 B_2} = ([e_1]_{B_2}^t, [e_2]_{B_2}^t, [e_3]_{B_2}^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ <p>La matriz de T respecto a las bases B_1, B_2 está dada por:</p> $[T]_{B_1 B_2} = ([T(v_1)]_{B_2} \dots [T(v_n)]_{B_2})$ <ul style="list-style-type: none"> • $[T]_{B_2 B_2} [v]_{B_1}^t = [T(v)]_{B_2}^t$