Capitalización y portafolios en tiempo continuo

Santiago Giraldo Henao

Profesor:
Norman Diego Giraldo Gomez

Econometría Financiera
Trabajo 2
Departamento de Estadística
Universidad Nacional de Colombia

MAYO 2024

1 Introducción

El objetivo del presente trabajo se centra en la aplicación de un modelo de anualidades, financiada mendiante un portafolio balanceado. Esto con el fin de valorar dicho contrato y relacionar los porcentajes de inversión con la probabilidad de incumplimiento (default), buscando determinar cuál porcentaje podría disminuir esta probabilidad.

El modelo se considera para el caso de inversión en un portafolio balanceado, es decir, un porcentjae invertido en acciones y el restante en renta fija. Por simplificación, se asume que invertir en una acción que replica un índice bursátil equivale a invertir en un portafolio bien diversificado.

En este sentido, el modelo para la acción es MBG (Movimiento Browniano Geométrico). Y para la renta fija es CIR (Cox-Ingersoll-Ross). Las variables del portafolio balanceado son:

- ω es el porcentaje de inversión en acciones.
- μ_p es el rendimiento medio del portafolio.
- σ es la volatilidad el portafolio.
- $\mu_t = (1-\omega)r(t) + \omega\mu_p$ es la rentabilidad del portafolio balanceado.

Así, el modelo de inversión en un portafolio balanceado se plantea según el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas. Siendo r_t la tasa spot (renta fija) y $c(t)$ un sistema de pagos creciente linealmente.

$$dr(t) = \alpha(\mu - r(t))dt + \sigma dW_v(t) \tag{1}$$

$$dX(t) = ([(1-\omega)r(t) + \omega\mu]X(t) - c(t))dt + \omega\sigma X(t)dW(t) \tag{2}$$

Siguiendo este modelo, el propósito del trabajo será buscar el porcentaje de inversion ω que disminuya la probabilidad de default.

En este sentido, el presente trabajo constará de cuatro partes: La estimación de parámetros para la tasa spot. La estiamción de parametros para la acción. La valoración del contrato. Y, por último, el análisis del porcentjae de inversión ω relacionado a la probabilidad de default.

Lo datos con los que se trabajará corresponden a datos reales del mercado.

2 Estimación del modelo de tasa spot

Para la inversión en renta fija, se tiene la siguiente serie correspondiente a los Bonos TES a 10 años:

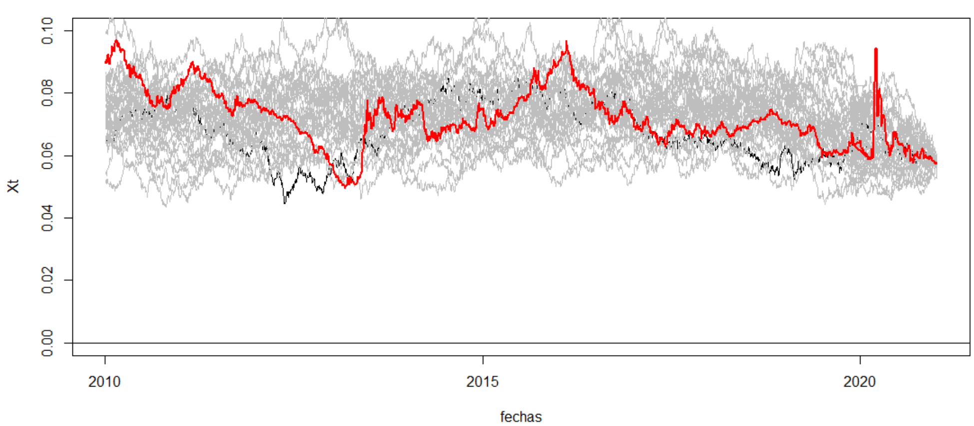
Estimamos los parámetros con el modelo CIR:

μ	α	σ
0.06899461	0.99959	0.04721173

Table 1: Parámetros estimados.

Se define la condición $4\alpha\mu/\sigma^2 \geq 2$. Si se cumple entonces r_t es positivo con probabilidad uno. Comprobamos que esta probabilidad se cumple en este caso.

Simulamos 30 trayectorias con el modelo CIR y comparamos con los datos reales.



Podemos observar que los datos (en rojo) se ubican bien dentro de las trayectorias simuladas, por lo que podemos decir que el ajuste es razonable.

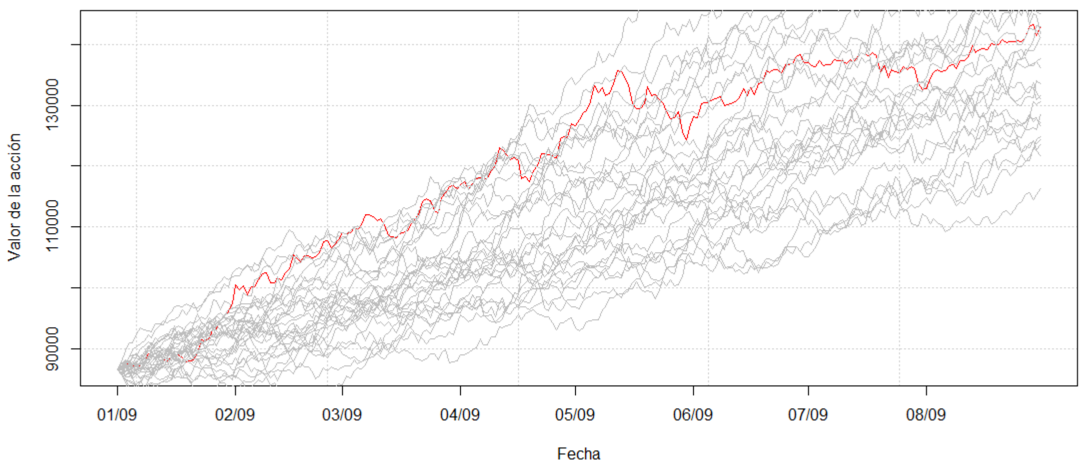
3 Estimación modelo para la acción

Como se dijo en la introducción, para la acción usamos un modelo MBG y estimamos los parámetros:

μ	σ
0.511586	0.139889

Table 2: Parámetros estimados.

Simulamos 30 trayectorias con el modelo MGB y comparamos con los datos reales:



Podemos observar que los datos (en rojo) se ubican bien dentro de las trayectorias simuladas, por lo que podemos decir que el ajuste es razonable.

4 Valoración del contrato

Teniendo en cuenta el modelo para el valor del portafolio balanceado definido en la introducción, se define el mismo como un contrato entre el administrador del portafolio y la persona que recibe los pagos $c(t)$. Y el costo de este como una prima única pagadera al inicio, igual al valor esperado del valor presente V. Definido como:

$$V = \int_0^T c(s)exp((\omega\mu_p - \frac{1}{2}(\omega\sigma_p)^2)s) * exp(-(1-\omega)\int_0^s r(\mu)du - \omega\sigma_p W(s))ds \tag{3}$$

$$V = \int_0^T c(s)Y_s ds \tag{4}$$

Y la esperanza:

$$E(V|r_0 = x) = \int_0^T c(s)E(Y_s|r_0 = x)ds \tag{5}$$

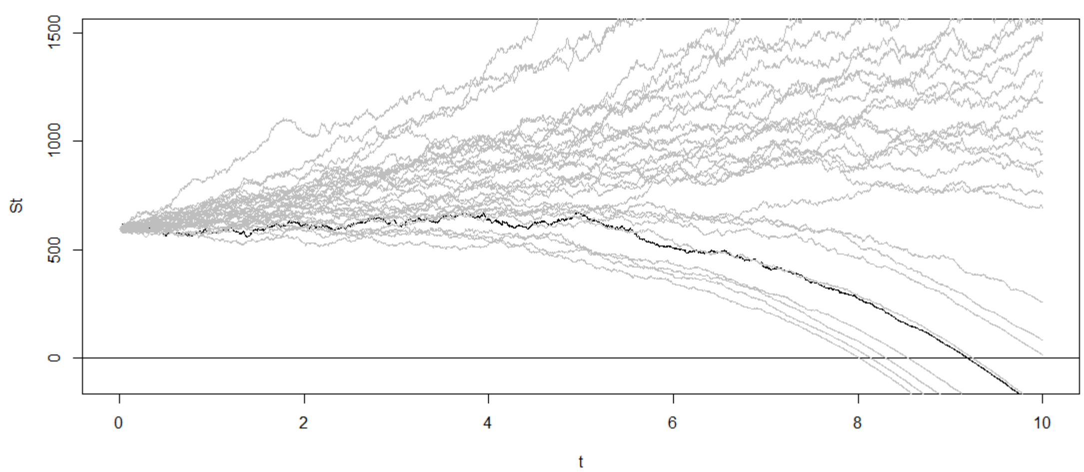
Para el sistema de pagos c(t), se tomará un sistema creciente linealmente, que se define así:

$$c(t) = C(1 + \rho\lfloor t \rfloor) \tag{6}$$

Donde C representa la tasa de pago durante el primer año y ρ es una tasa efectiva anual que representa un valor mínimo como protección contra la inflación. La tasa aumenta cada año. Para este ejercicio se asumirá como un tercio de la tasa rendimiento medio de la acción. Para la valoración del contrato se tomará inicialmente $\omega = 0.5$.

Bajo estas condiciones el Valor del contrato es igual a 475.6.

Simulando algunas trayectorias el valor S_t se comporta de la siguiente manera:



Podemos observar que en general, con los datos utilizados, el valor S_t tiende a permanecer positivo, por lo menos durante los primeros 10 años.
La probabilidad de insolvencia bajo estas condiciones, simulando 1000 trayectorias, es de 0.160.

5 Relación de la probabilidad de insolvencia

Simulando diferentes pesos ω y calculando su probabilidad de insolvencia el resultado es el siguiente:

ω	Prob. Insolvencias
0	0
0.1	0
0.2	0
0.3	0.013
0.4	0.087
0.5	0.160
0.6	0.202
0.7	0.216
0.8	0.304
0.9	0.313
1	0.330

Table 3: Probabilidad de insolvencia para cada valor de ω.

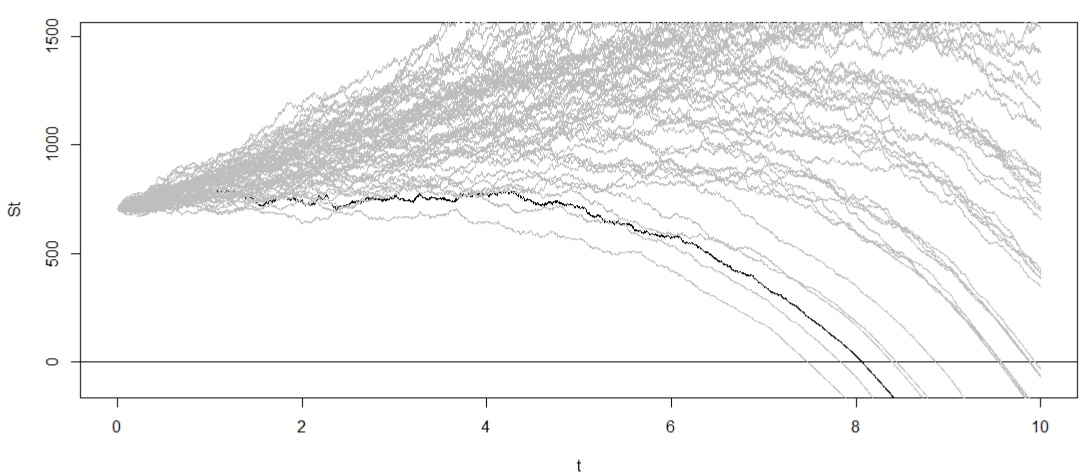
Podemos observar a partir de que el valor ω aumenta, la probabilidad de default aumenta. Lo que quiere decir que a medida que aumenta la participación de las acciones en el protafolio, es más probable entrar en default.

6 Análisis adicional

Se realiza un análisis adicional cambiando el sistema de pagos $c(t)$ por uno creciente geometricamente, definido de la sigueinte manera:

$$c(t) = Ce^{\delta \lfloor t \rfloor} \tag{7}$$

Con este cambio, manteniendo el valor de ω en 0.5, el resultado es el siguiente:



La probabilidad de defoult simulando 1000 trayectorias aumenta a 0.225.