2. ¿Qué significa físicamente K?

En este contexto, la constante K representa la rigidez o elasticidad de las pelotas/partículas. Es decir, entre menor sea K, más elásticos son los cuerpos en colisión, puesto que, en una colisión, se acercaran más (análogo a comprimirse, espicharse o deformarse) antes de separarse. Esto último, debido a que, con una K menor, menor será la magnitud de la fuerza a cada instante, por lo que esta tardará más en causar suficiente aceleración para lograr cambiar la velocidad de los cuerpos lo suficiente como para que estos empiecen a separarse. Por otro lado, cuando K es grande, pasará justo lo contrario: los cuerpos se separarán más rápido pues la fuerza que se ejercen a cada instante es mayor. Es decir, se estría modelando un cuerpo más rígido. Cabe resaltar que esto no implica que no se conserve el momento lineal, puesto que el impulso (F*dt) puede conservarse en ambos casos (una menor fuerza por más tiempo en el primero y una mayor fuerza por menor tiempo en el segundo).

Considere las siguientes series de Taylor. (Para simplificar la notación, $x = x_j$)

$$f(x_{j+1}) = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(x) + \dots$$

$$f(x_{j-1}) = f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(x) - \dots$$

$$f(x_{j+2}) = f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) + \frac{(2h)^3}{6}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{(2h)^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{720}f^{(6)}(x) + \dots$$

$$f(x_{j-2}) = f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) - \frac{(2h)^3}{6}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{24}f^{(4)}(x) - \frac{(2h)^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{720}f^{(6)}(x) - \dots$$

Truncamos los términos de grado 5 o superior y simplificamos la siguiente expresión:

$$\frac{1}{h^4}\cdot\left[(f(x_{j+2})) - 4(f(x_{j+1})) + 6(f(x_j)) - 4(f(x_{j-1})) + (f(x_{j-2}))\right]$$

$$= \frac{1}{h^4}\Big[\Big(f(x) + 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) + \frac{(2h)^3}{6}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{24}f^{(4)}\Big) - 4\Big(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x)\Big)$$
$$+ 6(f(x)) - 4\Big(f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x)\Big) + \Big(f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2}f''(x) - \frac{(2h)^3}{6}f'''(x)$$
$$+ \frac{(2h)^4}{24}f^{(4)}(x)\Big)\Big]$$

$$= \frac{1}{h^4}\left[(8f(x) - 8f(x)) + (4hf'(x) - 4hf'(x)) + (4h^2f''(x) - 4h^2f''(x)) + (2h^3f'''(x) - 2h^3f'''(x)) + \left(\frac{24}{24}h^4f^{(4)}(x)\right)\right]$$
$$= f^{(4)}(x)$$

Luego:

$$D^4 f(x_j) \cong \frac{f(x_{j+2}) - 4f(x_{j+1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j-1}) + f(x_{j-2})}{h^4}$$

Para encontrar el grado de aproximación de la expresión, evaluaremos (en la ecuación de arriba) los primeros dos términos truncados.

$$\frac{1}{h^4}\cdot\left[\left(\frac{(2h)^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{720}f^{(6)}(x)\right) - 4\left(\frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(x)\right) - 4\left(-\frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{h^6}{720}f^{(6)}(x)\right) + \left(-\frac{(2h)^5}{120}f^{(5)}(x) + \frac{(2h)^6}{720}f^{(6)}(x)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h^4}\cdot\left[\left(\frac{36}{120}\cdot h^5f^{(5)}(x) - \frac{36}{120}h^5f^{(5)}(x)\right) + \left(\frac{128}{720}h^6f^{(6)}(x) - \frac{8}{120}f^{(6)}(x)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{h^4}\cdot\frac{120}{720}h^6f^{(6)}(x) = \frac{1}{6}h^2f^{(6)}(x) \rightsquigarrow \boxed{O(h^2)}$$