7.

c. $$\chi^2(\vec{\theta}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - M(x_i,\vec{\theta})}{\sigma_i}\right)^2 \quad , \quad \text{donde } \sigma_i = 1 \ \forall i.$$

Derivando aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$\Rightarrow \frac{\partial \chi^2(\vec{\theta})}{\partial \theta_i} = \sum_{i=1}^{n} 2\cdot\left(\frac{y_i - M(x_i,\vec{\theta})}{\sigma_i}\right)\cdot\left(\frac{-\partial M(x_i,\vec{\theta})}{\partial \theta_i}\cdot\frac{1}{\sigma_i}\right)$$

Como $\sigma_i = 1 \ \forall i$, podemos simplificar la expresión para obtener:

$$\frac{\partial \chi^2(\vec{\theta})}{\partial \theta_i} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - M(x_i,\vec{\theta})\right)\cdot\frac{\left(\partial M(x_i,\vec{\theta})\right)}{\partial \theta_i}$$

d. De acuerdo a la definición del descenso del gradiente, podemos observar que este se puede expresar como:

$$\vec{\theta}^{(k+1)} = \vec{\theta}^{(k)} - \gamma\,\vec{\nabla}\chi^2(\vec{\theta})$$

donde γ es la constante de aprendizaje y la notación $(k+1)$, (k) hace referencia al número de la iteración del proceso (ie, $\theta^{(k)}$ es el vector obtenido tras k iteraciones). A partir de la ecuación encontrada en el apartado c, podemos reescribir esto como:

$$\vec{\theta}^{(k+1)} = \vec{\theta}^{(k)} - \gamma\begin{pmatrix}\frac{\partial \chi^2(\vec{\theta})}{\partial \theta_0}\\ \frac{\partial \chi^2(\vec{\theta})}{\partial \theta_1}\\ \frac{\partial \chi^2(\vec{\theta})}{\partial \theta_2}\end{pmatrix} = \vec{\theta}^{(k)} - \gamma\left(-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - M(x_i,\theta^{(k)})\right)\right)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial M(x_i,\vec{\theta}^{(k)})}{\partial \theta_0^{(k)}}\\ \frac{\partial M(x_i,\vec{\theta}^{(k)})}{\partial \theta_1^{(k)}}\\ \frac{\partial M(x_i,\vec{\theta}^{(k)})}{\partial \theta_2^{(k)}}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\theta}^{(k+1)} = \vec{\theta}^{(k)} - \gamma\left(-2\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - M(x_i,\theta^{(k)})\right]\cdot\vec{\nabla}_\theta M(x_i,\vec{\theta}^{(k)})\right)$$