6. $\chi^2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$

Para minimizar esta función, derivamos respecto a a_0 y a_1, igualamos a cero, y despejamos:

$$0 = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i)(-1)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} 1 - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \Rightarrow \quad a_0 \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Si designamos $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ "el valor medio de los puntos" y

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ "el valor medio de las imágenes", obtenemos:

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$$

De manera similar, para a_1 obtenemos lo siguiente:

$$0 = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i)(-x_i)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} x_i - a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n} + a_1 \left(\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Para $\chi^2(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2$ aplicamos el mismo proceso (esta vez despejando el término de y_i) y obtenemos:

- $$0 = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)(-1)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2}$$

- $$0 = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)(-x_i)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + a_1 x_i^2 + a_2 x_i^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + a_1 x_i^2 + a_2 x_i^3}$$

- $$0 = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2}{\partial a_2} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)(-x_i^2)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i^2 + a_1 x_i^3 + a_2 x_i^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i^2 + a_1 x_i^3 + a_2 x_i^4}$$

En estos tres resultados es fácil evidenciar un patrón (regularidad), la cual consiste en que el grado de cada término de la sumatoria (con respecto a x_i) aumenta en uno cada vez.