

Ejercicio 3.14.8.1

Hacer por intermedios para regla de trapezio simple, Ecuación (3.85).

De acuerdo al polinomio interpolador definido por el método de trapezio simple, tenemos que:

$$f(x) \approx P(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P(x) dx = \int_a^b \left(\frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \right) dx$$

Calculamos esta última integral:

$$\int_a^b \left(\frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \right) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a) dx + \int_a^b \frac{x-a}{b-a} f(b) dx$$

$$= \frac{f(a)}{a-b} \int_a^b (x-b) dx + \frac{f(b)}{b-a} \int_a^b (x-a) dx = \frac{f(a)}{a-b} \left[\frac{b^2}{2} - b^2 - \frac{a^2}{2} + ab \right] + \frac{f(b)}{b-a} \left[\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \right]$$

$$= -\frac{f(a)}{2(a-b)} [b^2 - 2ab + a^2] + \frac{f(b)}{2(b-a)} [b^2 - 2ab + a^2] = \frac{f(a)}{2(b-a)} (b-a)^2 + \frac{f(b)}{2(b-a)} (b-a)^2$$

$$= \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b)).$$

Una ilustración gráfica del área que esta ecuación representa es el área bajo el trapezio (en azul), en la siguiente figura:

