

Eric Darrigrand
Florian Méhats

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ELLIPTIQUES

E. Darrigrand

E-mail : `eric.darrigrand-lacarrieu@univ-rennes1.fr`

F. Méhats

E-mail : `florian.mehats@univ-rennes1.fr`

IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex.

Version du 19 janvier 2015

**ÉQUATIONS AUX
DÉRIVÉES PARTIELLES ELLIPTIQUES**

Eric Darrigrand, Florian Méhats

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION AUX MODELES FONDAMENTAUX	7
1.1. Les différents types d'équations aux dérivées partielles	7
1.2. Equations elliptiques	9
1.3. Systèmes elliptiques	11
1.4. Étude d'un exemple simple	12
2. ESPACES DE SOBOLEV	19
2.1. Notions de distributions	19
2.2. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$: premières propriétés	22
2.3. Prolongements	29
2.4. Traces et formule de Green	33
2.5. Un résultat de compacité	38
3. PROBLEMES ELLIPTIQUES LINEAIRES	41
3.1. Introduction : Un problème de minimisation	41
3.2. Solutions faibles pour le problème de Dirichlet	44
3.3. Régularité H^2	48
3.4. Autres problèmes aux limites	52
3.5. Approximation variationnelle, introduction à la méthode des éléments finis	59
A. Rappels sur les espaces L^p	69
A.1. Densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$	69
A.2. Autres rappels sur les espaces L^p	70
B. Formules de Leibniz et de Taylor	73
B.1. Fonction d'une variable	73
B.2. Fonctions de plusieurs variables	73
C. Mesure superficielle et formule de Green	75
C.1. La mesure superficielle	75
C.2. Intégration par parties	76
Bibliographie	79

CHAPITRE 1

INTRODUCTION AUX MODELES FONDAMENTAUX

1.1. Les différents types d'équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation dont l'inconnue est une fonction et qui fait intervenir non seulement cette fonction mais aussi ses dérivées partielles. L'ordre maximal de dérivation intervenant dans l'équation est appelé **ordre de l'EDP**. Il existe des centaines d'EDP dont l'étude nécessite des théories différentes, souvent spécifiques. On tente néanmoins de classer les EDP en catégories, selon les outils généraux qui permettent de les analyser, ou encore selon leurs propriétés qualitatives et les problèmes qu'elles modélisent. En effet, les EDP sont les objets mathématiques qui permettent de modéliser les phénomènes naturels et il ne faut jamais oublier cet aspect. Les EDP que nous rencontrerons dans ce cours seront toujours placées au préalable dans un contexte : physique, mécanique, chimie, biologie, économie, sociologie, ...

On distingue trois grandes catégories d'EDP :

- (i) Les équations de type elliptique qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est à dire n'évoluant pas au cours du temps). Le prototype d'équation elliptique est **l'équation de Laplace**

$$-\Delta u = f \quad (1.1)$$

d'inconnue $u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et de donnée f .

- (ii) Les équations de type parabolique, qui modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion. L'équation de la chaleur en est un prototype :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad (1.2)$$

d'inconnue $u(t, x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ et de donnée f .

- (iii) Les équations de type hyperbolique qui modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. On identifie deux prototypes pour cette classe d'EDP :

– L'équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.3)$$

- d'inconnue $u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.
 – L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad (1.4)$$

d'inconnue $u(t, x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ et de donnée f .

Remarque 1.1. — D'où vient le nom “elliptique”, “parabolique”, “hyperbolique” ?
 Plaçons nous dans le cas particulier des équations de deuxième ordre dans \mathbb{R}^2 . L'inconnue est la fonction $u(x, y)$, qui satisfait l'équation

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = g \quad (1.5)$$

Pour simplifier, on suppose les coefficients a, b, \dots, g constants.

On dit que (1.5) est elliptique si $b^2 - 4ac < 0$,
 parabolique si $b^2 - 4ac = 0$,
 hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$.

Bien sûr, et c'est là l'origine du vocabulaire employé, cette définition est calquée sur celle des coniques du plan. En effet, la courbe plane d'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

est (sauf dans certains cas dégénérés) une ellipse si $b^2 - 4ac < 0$, une parabole si $b^2 - 4ac = 0$ et une hyperbole si $b^2 - 4ac > 0$.

Si l'on effectue un changement de variable non singulier $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ (tel que le Jacobien $J = \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x}$ ne s'annule pas), alors on peut montrer (par un calcul fastidieux) que l'équation (1.5) devient

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + D \frac{\partial u}{\partial X} + E \frac{\partial u}{\partial Y} + F u = G$$

avec notamment

$$\begin{cases} A = a \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + c \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \\ B = 2a \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + b \left(\frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + 2c \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} \\ C = a \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + b \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + c \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2. \end{cases}$$

Cette nouvelle EDP est de la même forme que (1.5) et l'on peut vérifier que $B^2 - 4AC = J^2(b^2 - 4ac)$: l'équation considérée dans les nouvelles variables (X, Y) est de la même catégorie (elliptique, parabolique, hyperbolique) que dans les anciennes (x, y) . En fait, un changement de variables particulier permet de simplifier la forme de l'équation et de se ramener à une forme canonique. Si l'équation est elliptique, on montre que l'on peut choisir le changement de variable $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ de telle sorte que $B = 0$, $A = C \neq 0$. On voit donc apparaître $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$, caractéristique de l'équation de Laplace. Si l'équation est parabolique, on peut s'arranger pour avoir $A \neq 0$, $B = C = D = 0$, $E = -A$. On voit apparaître l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial Y} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}$. Si l'équation est hyperbolique, on peut obtenir $B = 0$, $A = -C \neq 0$, d'où l'équation des ondes avec le terme $\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}$.

Remarque 1.2. — Dans la plupart des situations réalistes, les choses sont plus complexes et les modèles font simultanément appel à deux, voire trois, de ces catégories. Un bon exemple est le système de Navier-Stokes (écrit en une dimension d'espace ici)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial x}(P(\rho)) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \end{cases}$$

Les inconnues du problème sont ρ , la densité du fluide, et u , la vitesse du fluide.

- Si le fluide est stationnaire : équation elliptique.
- Si le fluide est homogène à faible nombre de Mach, $\rho = cste$, $\frac{\partial}{\partial x}(P(\rho)) = 0$. On voit apparaître l'équation parabolique $\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
- Si le fluide est parfait ($\nu = 0$) et si l'on considère une petite variation autour d'un état constant $\rho = \rho_0$, $u = 0$, en linéarisant les équations on obtient l'équation de l'acoustique :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - P'(\rho_0) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0.$$

Dans ce cours, nous nous concentrerons sur les modèles elliptiques, avec plusieurs objectifs :

- Identifier des problèmes bien posés (au sens de Hadamard), c'est-à-dire qui admettent une unique solution dépendant continûment des données, et mettre en place une méthodologie générale pour prouver ces propriétés. Précisons que dans la très grande majorité des cas, on ne dispose pas d'expression analytique de cette solution.
- Exhiber des propriétés qualitatives génériques pour les EDP elliptiques : résultats de régularité, propriétés de monotonie, estimations a priori, ...
- Préparer la résolution numérique de ces problèmes, en construisant une méthode d'approximation, la méthode des éléments finis, qui se trouvera être en continuité directe de la méthode théorique ci-dessus.

En faisant le choix de s'intéresser aux problèmes elliptiques, nous nous concentrons sur une configuration où nous pourrions introduire un formalisme général qui convient non seulement à l'analyse théorique mais aussi à l'analyse numérique : la formulation variationnelle. Ce formalisme constitue une bonne illustration de la démarche des mathématiques appliquées, qui part du problème physique et va jusqu'à la simulation numérique en passant par l'analyse mathématique des équations continues et discrètes rencontrées.

Dans la suite de ce chapitre d'introduction, nous dressons une liste de modèles.

1.2. Equations elliptiques

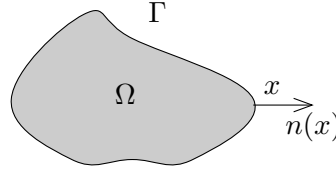
1.2.1. Equation de Laplace. — Notre exemple canonique est donc l'équation de Laplace. Soit Ω un ouvert borné et régulier (on verra plus loin ce que cela signifie) de \mathbb{R}^n , de frontière Γ . L'inconnue $u(x)$ ($x \in \Omega$) satisfait dans Ω l'équation

$$-\Delta u = f \tag{1.6}$$

Une question très importante est celle des conditions aux limites. La fonction f étant donnée, (1.6) posée dans Ω n'admet pas une unique solution. Pour avoir une propriété

d'unicité, il convient d'ajouter des conditions sur u au bord Γ du domaine. Les exemples-types de conditions aux limites qui seront étudiés sont :

- $u = 0$ sur Γ : condition de Dirichlet homogène,
- $u = u_0$ sur Γ : condition de Dirichlet inhomogène,
- $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur Γ : condition de Neumann homogène,
- $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur Γ : condition de Neumann inhomogène, où $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{gradu} \cdot n$ et $n(x)$ est la normale sortante en $x \in \Gamma$,
- $u = u_0$ sur Γ_0 et $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur Γ_1 : condition mixte Dirichlet-Neumann, où $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ et $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$



Du point de vue de la modélisation, on rencontre l'équation de Laplace dans les problèmes suivants :

- En thermique, pour décrire la température à l'équilibre dans un corps Ω thermiquement conducteur : u désigne la température, f un terme de source de chaleur, la condition de Dirichlet $u = u_0$ sur Γ_0 décrit une température imposée sur une partie de la frontière du corps et la condition de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ signifie que le flux thermique est connu sur Γ_1 ($g = 0$ correspond à une paroi isolante).
- En mécanique du solide, pour décrire la position d'équilibre d'une membrane élastique (en dimension $n = 2$) : u désigne le déplacement, f un champs de forces et les conditions aux limites décrivent un déplacement imposé sur Γ_0 et une contrainte imposée sur Γ_1 .
- En mécanique des fluides, u désigne la fonction courant ou le potentiel des vitesses.
- En électrostatique : u désigne le potentiel électrostatique, f la densité de charge ; la condition de Dirichlet décrit une interface avec un conducteur parfait et la condition de Neumann désigne un champ électrique imposé sur Γ_1 .

1.2.2. Modèle plus général. — Un modèle plus général consiste à écrire à la place de l'opérateur de Laplace Δ , un opérateur aux dérivées partielles \mathcal{L} de type :

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \quad (1.7)$$

où les fonctions a_{ij} sont données et définies sur Ω . On considère alors le problème suivant :

$$\mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega ; u = u_0 \text{ sur } \Gamma \quad (1.8)$$

Définition 1.3. — L'opérateur aux dérivées partielles (1.7) est dit (uniformément) elliptique dans l'ouvert Ω si, et seulement si, il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

pour presque tout $x \in \Omega$.

Remarque 1.4. — Les problèmes physiques modélisés par l'équation de Laplace sont des problèmes stationnaires. On peut se demander s'il en est toujours ainsi, ou si cette équation ne pourrait pas aussi décrire des phénomènes instationnaires. Par exemple, on pourrait considérer le problème de Cauchy (= problème avec donnée initiale) suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ces conditions aux limites reviennent aussi à prendre des conditions de Dirichlet et des conditions de Neumann simultanément sur la même partie de la frontière. Malheureusement, ce problème est mal posé au sens de Hadamard. Considérons en effet la donnée initiale suivante, dépendant d'un paramètre $k \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{0,k}(x) = 0, \quad u_{1,k}(x) = \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

On peut montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, ce problème a une unique solution sur $\mathbb{R} \times [0, \varepsilon[$, donnée par

$$u_k(x, t) = \frac{\cos(kx)}{k^3} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(0, \varepsilon) = +\infty$ alors que la donnée initiale tend vers 0 uniformément lorsque $k \rightarrow +\infty$. Ce qui induit l'instabilité... Par ailleurs, en gardant le même exemple, on peut voir que ce problème avec

$$u_0(x) = 0, \quad u_1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$$

n'admet pas de solution, car la série $\sum_{k \geq 1} \frac{\cos(kx)}{k^3} \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$ diverge pour tout $t > 0$.

1.3. Systèmes elliptiques

1.3.1. Le système de Stokes. — Le système de Stokes est un problème modèle qui joue un rôle essentiel dans l'analyse mathématique et numérique des problèmes de mécanique des fluides incompressibles. Les données sont le domaine Ω de bord Γ et une fonction f vectorielle définie sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n qui représente la densité de forces agissant sur le fluide.

On cherche deux fonctions : $u(x)$ vectorielle de Ω dans \mathbb{R}^n et $p(x)$ scalaire de Ω dans \mathbb{R} , vérifiant

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (1.9)$$

où $u(x)$ désigne la vitesse du fluide au point $x \in \Omega$, et $p(x)$ désigne la pression. La deuxième équation de (1.9) traduit l'incompressibilité du fluide.

1.3.2. Le système de l'élasticité linéaire. — Le système de l'élasticité linéaire permet de décrire la position d'équilibre d'un solide élastique homogène et isotrope, lorsque l'on fait l'hypothèse que les déplacements par rapport à l'état naturel sont petits.

On cherche à déterminer le champ des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ solution de

$$\begin{cases} -\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}(u)) = f_i & \text{dans } \Omega, \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(u) \nu_j = g_i & \text{dans } \Gamma_1 \end{cases} \quad (1.10)$$

où ν est la normale unitaire.

La première équation modélise l'équilibre local sous l'effet des forces extérieures appliquées; $f = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la densité volumique de force dans Ω , $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est le tenseur des contraintes élastiques. Ces contraintes sont reliées au tenseur des déformations $(\varepsilon_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ défini par

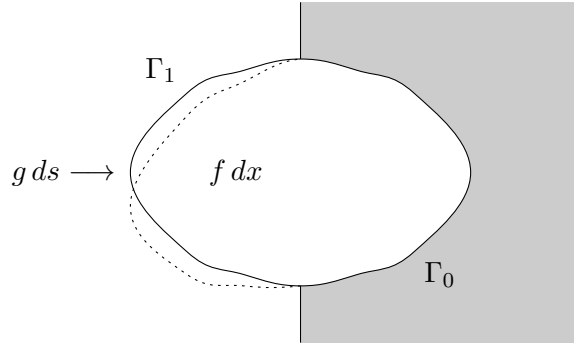
$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n$$

par la relation

$$\sigma_{ij}(u) = \lambda(\operatorname{div} u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.

Les conditions aux limites expriment le fait que le corps élastique est encastré sur Γ_0 tandis que la densité superficielle de forces exercées est donnée sur Γ_1 .



1.4. Étude d'un exemple simple

Afin de soulever les différentes problématiques de ce cours, plaçons-nous dans un cas simplifié mais instructif, en dimension 1 :

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{sur }]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

Remarque : Il s'agit en réalité d'une Équation Différentielle Ordinaire (EDO) dont les conditions aux limites ne sont pas de Cauchy mais de type Dirichlet homogène. Par conséquent, l'existence d'une unique solution ne découle pas directement du théorème de Cauchy-Lipschitz.

1.4.1. Résolution explicite. —

Proposition 1.5. — Soit $f \in C([0, 1])$. Alors, (1.11) admet une unique solution u de classe $C^2([0, 1])$ donnée par

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy \quad \forall x \in [0, 1] \quad (1.12)$$

où G s'appelle fonction de Green du problème et est définie par

$$G(x, y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ x(1-y) & \text{si } x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Exercice : Vérifier que l'on définit bien ainsi une solution de (1.11) et qu'une solution de (1.11) s'exprime nécessairement ainsi. Des exercices similaires seront traités en TD.

De cette expression (1.12), nous allons déduire plusieurs propriétés fondamentales des solutions des problèmes elliptiques :

i) La solution dépend de manière continue de la donnée f : la fonction

$$\begin{array}{ccc} T : C([0, 1]) & \longrightarrow & C^2([0, 1]) \\ f & \mapsto & u, \text{ la solution de (1.11)} \end{array}$$

est continue et régularisante. Pour le voir, T étant linéaire d'après (1.12), il suffit de montrer que

$$\|Tf\|_{C^2} \leq c \|f\|_{C^0} \quad (1.13)$$

En effet, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, on a $|G(x, y)| \leq 1$, donc on déduit immédiatement de (1.12) que $\max |u| \leq \max |f|$. Il s'agit d'un contrôle dans C^0 de la solution par les données. Combiné avec la linéarité du problème, cela confirme l'unicité de la solution.

Ensuite, on écrit

$$u(x) = \int_0^x y(1-x)f(y)dy + \int_x^1 x(1-y)f(y)dy,$$

d'où

$$\begin{aligned} u'(x) &= x(1-x)f(x) - \int_0^x yf(y)dy - x(1-x)f(x) + \int_x^1 (1-y)f(y)dy \\ &= \int_x^1 f(y)dy - \int_0^x yf(y)dy \end{aligned}$$

et $\max |u'| \leq 2 \max |f|$. Enfin, en utilisant directement l'équation $u'' = -f$, on a $\max |u''| + \max |u'| + \max |u| \leq 4 \max |f|$. On a donc bien montré (1.13).

ii) Principe du maximum faible :

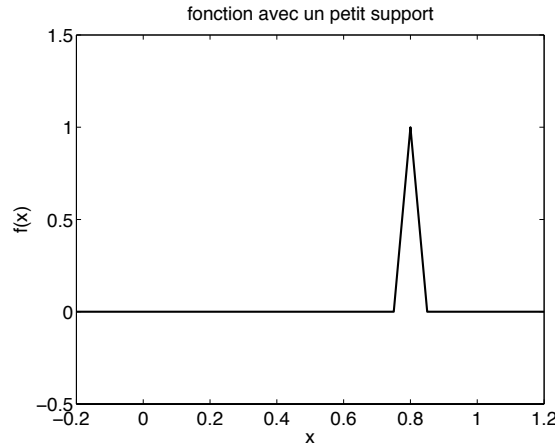
$$f \geq 0 \implies u \geq 0$$

C'est évident avec (1.12) et la positivité de G .

iii) Principe du maximum fort :

$$f \geq 0 \text{ et } f \not\equiv 0 \implies u > 0 \text{ sur }]0, 1[$$

Ainsi, même pour un second membre très localisé comme sur la figure ci-dessous, la solution u est non nulle sur tout l'intervalle $]0, 1[$.



Par linéarité, on en déduit que si on modifie localement (ie sur un petit intervalle de longueur ε) le second membre f , la solution est modifiée globalement.

Ces propriétés sont très générales pour les problèmes elliptiques (effet de régularisation, principe du maximum), néanmoins on ne pourra pas exprimer leurs solutions systématiquement sous une forme simple comme (1.12). Il nous faudra utiliser une méthode d'analyse plus générale.

1.4.2. Méthode de tir. — On veut résoudre l'équation

$$\begin{cases} -u'' + b(x)u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

où $b(x)$ est une fonction donnée, *positive ou nulle*.

Il est plus délicat de procéder comme pour l'équation (1.11) par une formule explicite. On propose alors ici une alternative. Pour cela, on considère un problème intermédiaire dépendant d'un paramètre ajustable α :

$$\begin{cases} -u'' + b(x)u = f, \\ u(0) = 0, \quad u'(0) = \alpha. \end{cases} \quad (1.15)$$

Il s'agit d'un problème de Cauchy pour lequel on connaît des méthodes de résolutions et pour lequel on sait qu'il y a existence et unicité de la solution (théorie des EDO, théorème de Cauchy-Lipschitz). Désignons u_α la solution de (1.15).

Lemme 1.6. — Pour tout $\beta \geq \alpha$, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $u_\beta(x) \geq u_\alpha(x) + (\beta - \alpha)x$.

Démonstration. — On a

$$\begin{cases} u_\beta'' - u_\alpha'' = b(u_\beta - u_\alpha), \\ (u_\beta - u_\alpha)(0) = 0, \\ (u_\beta - u_\alpha)'(0) = \beta - \alpha \geq 0. \end{cases}$$

Comme $b \geq 0$, il est facile de voir que $u_\beta - u_\alpha$ et $(u_\beta - u_\alpha)'$ sont croissantes sur $[0, +\infty[$. Donc $(u_\beta - u_\alpha)'(x) \geq \beta - \alpha$, ce qui donne le résultat en intégrant par rapport à x . \square

Corollaire 1.7. — Il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_\alpha(1) = 0$. Donc (1.14) admet une unique solution $u_\alpha \in C^2([0, 1])$.

Démonstration. — L'application $\alpha \mapsto u_\alpha(1)$ est continue et strictement croissante.

$$\begin{aligned} u_\alpha(1) &\geq u_0(1) + \alpha & \text{si } \alpha > 0 \\ u_\alpha(1) &\leq u_0(1) + \alpha & \text{si } \alpha < 0 \end{aligned}$$

ainsi $\lim_{\pm\infty} u_\alpha(1) = \pm\infty$. □

Remarque 1.8. — Cette preuve suggère une méthode numérique par algorithme de tir, car on connaît des méthodes (Euler, Runge-Kutta, ...) pour résoudre le problème de Cauchy (1.15). Mais la méthode est non généralisable aux dimensions supérieures !

1.4.3. Vers la formulation variationnelle. — Montrons directement que la solution de (1.14) est unique si elle existe.

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (1.14) et posons $u = u_2 - u_1$. Alors,

$$\begin{cases} -u'' + b(x)u = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

ce qui correspond à (1.14) avec $f \equiv 0$. Soit $v \in C^1([0, 1])$ tel que $v(0) = v(1) = 0$. Multiplions l'équation par v , puis intégrons :

$$\int_0^1 -u''v \, dx + \int_0^1 buv \, dx = 0$$

d'où, par intégration par parties,

$$\int_0^1 u'v' \, dx + \int_0^1 buv \, dx = 0$$

Si l'on prend $v = u$, on obtient

$$\int_0^1 (u')^2 \, dx + \int_0^1 bu^2 \, dx = 0$$

Or, $b \geq 0$, ce qui entraîne $u' \equiv 0$, puis $u \equiv u(0) = 0$. On a démontré l'unicité de la solution.

En reprenant le problème (1.14), en refaisant la même manipulation, on obtient que, pour tout $v \in C^1([0, 1])$ tel que $v(0) = v(1) = 0$, on a

$$\int_0^1 u'v' \, dx + \int_0^1 buv \, dx = \int_0^1 fv \, dx \tag{1.16}$$

Si on note $H = \{v \in C^1([0, 1]), v(0) = v(1) = 0\}$, le résultat suivant caractérise la solution de (1.14) :

Proposition 1.9. — Soit $u \in H \cap C^2([0, 1])$. Alors, u vérifie (1.14) si et seulement si

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = L(v) \tag{1.17}$$

où

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_0^1 u'v' \, dx + \int_0^1 buv \, dx & (\text{forme bilinéaire}), \\ L(v) = \int_0^1 fv \, dx & (\text{forme linéaire}). \end{cases}$$

La forme (1.17) est ce que l'on appelle une **formulation variationnelle**.

Plus généralement, un problème variationnel s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que} \\ \forall v \in H, \quad a(u, v) = L(v), \end{cases} \quad (1.18)$$

où H est un espace de Hilbert. Le théorème de Lax-Milgram, que l'on verra plus tard, permet de montrer l'existence et l'unicité de la solution u de (1.18), sous certaines hypothèses.

Cependant, l'écriture (1.17) proposée ici n'est pas tout à fait sous la bonne forme :

- On a du faire l'hypothèse que $u \in H \cap C^2$. Si on a seulement $u \in H$, on ne peut revenir à (1.14) (l'intégration par parties n'est pas licite). Il faudra alors trouver un espace adapté permettant une intégration par partie *au sens "faible"*. Cela se fait grâce à la théorie des distributions.
- La norme naturelle associée au problème variationnel est

$$\|u\| = \int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 u^2 dx.$$

Mais H muni de cette norme n'est pas un espace de Hilbert : il n'est pas complet. En fait, l'espace le mieux adapté à cette méthode est le complété de H vis à vis de cette norme. Il s'agit de *l'espace de Sobolev* $H^1(0, 1)$.

1.4.4. Approximation variationnelle. — La formulation variationnelle offre un avantage remarquable : elle peut être approchée de manière contrôlée et efficace par un problème en dimension finie. Supposons que (1.18) caractérise bien la solution de (1.14). L'espace H étant de dimension infinie, nous considérons un sous-espace $V \subset H$ de dimension finie, et le problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{u} \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(\tilde{u}, v) = L(v). \end{cases} \quad (1.19)$$

Proposition 1.10. — *Etant données $b \in L^\infty(0, 1)$ et $f \in L^2(0, 1)$, le problème (1.19) admet une solution unique.*

Démonstration. — Soit $(\psi_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V . On cherche alors \tilde{u} sous la forme $\tilde{u} = \sum_{i=1}^n \tilde{u}_i \psi_i$. Ainsi, (1.19) est équivalent à : $\forall i = 1, \dots, n, \quad \sum_j a_{ij} \tilde{u}_j = F_i$ avec $a_{ij} = a(\psi_j, \psi_i)$ et $F_i = L(\psi_i)$.

Soit alors, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $F = (F_i)_{1 \leq i \leq n}$. On cherche donc à résoudre le système linéaire $AU = F$. L'unicité de la solution de (1.19) équivaut alors à A inversible. Supposons avoir deux solutions \tilde{u}_1 et \tilde{u}_2 de (1.19). En prenant $v = \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1$, on obtient par différence, $a(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 - \tilde{u}_1) = 0$. Toujours en utilisant l'hypothèse $b \geq 0$, on en déduit que $(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)' \equiv 0$, puis que $\tilde{u}_2 \equiv \tilde{u}_1$. □

Pour simplifier, on suppose maintenant que $b \equiv 1$. Établissons une caractérisation de \tilde{u} dans ce cas. On rappelle la norme

$$\|u\|_{H^1} = \int_0^1 (u')^2 dx + \int_0^1 u^2 dx = a(u, u).$$

Proposition 1.11. — *On a $\|u - \tilde{u}\|_{H^1} = \min \{\|u - v\|_{H^1}, v \in V\}$.*

Démonstration. — Comme $V \subset H$, on a :

$$\forall w \in V, \quad a(u, w) = L(w) = a(\tilde{u}, w) \quad \text{et donc} \quad a(u - \tilde{u}, w) = 0$$

Ainsi (prendre $w = v - \tilde{u}$) : $\|u - \tilde{u}\|_{H^1}^2 = a(u - \tilde{u}, u - v) \quad \forall v \in V.$

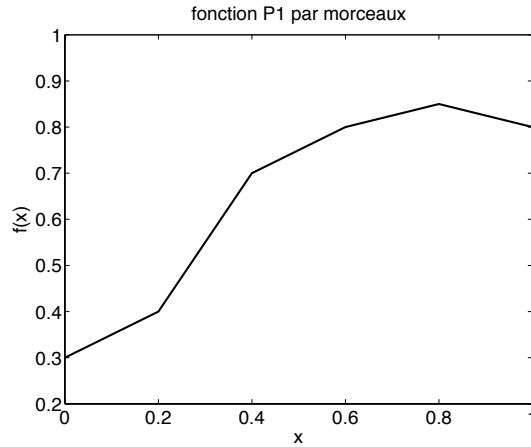
D'où, par Cauchy-Schwarz,

$$\|u - \tilde{u}\|_{H^1}^2 \leq \|u - \tilde{u}\|_{H^1} \|u - v\|_{H^1} \quad \forall v \in V.$$

□

Remarque 1.12. — Ce résultat élémentaire est à la base de l'approximation variationnelle. Il suffit en effet que V soit une approximation de H "suffisamment bonne" pour qu'alors, automatiquement, \tilde{u} approche bien u (sachant que \tilde{u} se calcule par la résolution d'un simple système linéaire). Les éléments finis ne sont rien d'autre qu'une méthode de construction de tels espaces V , basés sur l'interpolation polynomiale.

Par exemple, les éléments dits \mathbb{P}_1 , en dimension 1, consiste à prendre pour V l'espace des fonctions affines par morceaux associées à une subdivision de $[0, 1]$.



Si l'on note $\Pi_h^1(u)$ l'élément de V qui interpole u aux points de la subdivision, on peut montrer que $\|u - \Pi_h^1(u)\|_{H^1} \leq h \|u''\|_{L^2}$, ce qui donnera $\|u - \tilde{u}\|_{H^1} \leq h \|u''\|_{L^2}$. Ici h designe le pas maximal de la subdivision.

1.4.5. Conclusion. — Pour résoudre une EDP elliptique par formulation variationnelle, on a donc généralement besoin de :

- Définir des espaces adaptés à cette méthode : utilisation d'espaces de distributions, les espaces de Sobolev.
- Prendre le soin d'écrire et d'étudier les formulations variationnelles.
- Minimum de connaissance sur les espaces de Hilbert que l'on utilise.
- Résultats généraux d'approximation pour l'interpolation.
- Résultats sur les équations elliptiques (régularité de la solution, ...)

CHAPITRE 2

ESPACES DE SOBOLEV

2.1. Notions de distributions

On ne donne ici que quelques éléments de théorie des distributions. Pour ceux qui souhaitent aller plus loin, on conseillera la lecture de [1, 7, 8].

2.1.1. Définitions. —

Définition 2.1 (Espace de fonctions-test). — Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur \mathbb{R}^N dont le support est un compact K contenu dans Ω (c'est à dire nulles hors de K). On note $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ l'ensemble des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

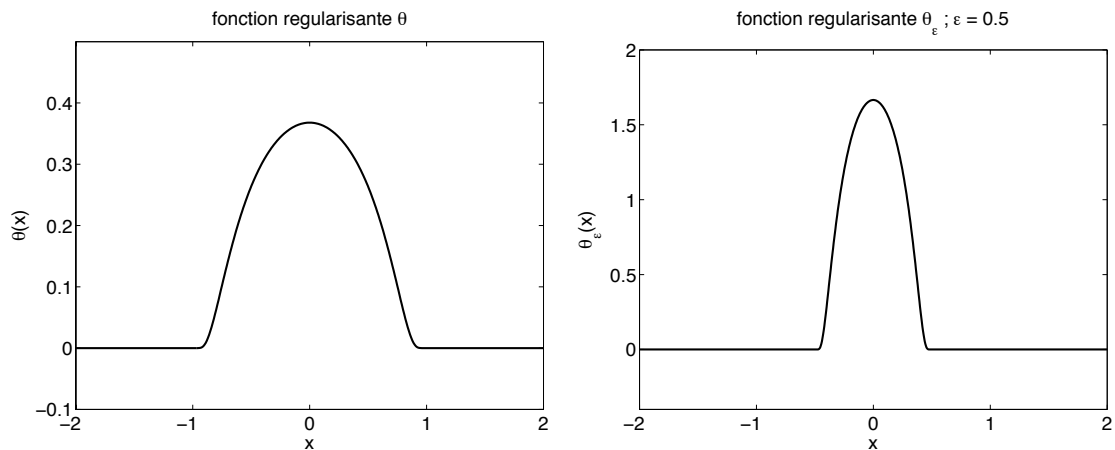
Exemple. — On sait que la fonction

$$\theta_1(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Donc la fonction $\theta(x) = \theta_1(1 - |x|^2)$ pour $x \in \mathbb{R}^N$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Famille régularisante. — Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{\theta(x/\varepsilon)}{\int_{\mathbb{R}^N} \theta(y/\varepsilon) dy}.$$



Cette fonction vérifie les propriétés suivantes :

- Support : $\text{Supp}(\theta_\varepsilon) = B(0, \varepsilon)$.
- Positivité : $\theta_\varepsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$.
- Intégrale : $\int_{\mathbb{R}^N} \theta_\varepsilon(x) dx = 1$.
- C'est une fonction-test sur \mathbb{R}^N : $\theta_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

L'intérêt de cette fonction θ_ε réside dans le lemme suivant, qui sera démontré en TD à l'aide de l'Annexe A.

Lemme 2.2. — *i) Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$. Alors $f * \theta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si de plus le support de f est compact, alors $f * \theta_\varepsilon$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R}^N et $f * \theta_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.*
*ii) Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $f * \theta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et si $p < +\infty$ alors $f * \theta_\varepsilon$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Notation. — Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$ un multi-entier. On note :

$$\partial^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_N}^{\alpha_N}} \quad \text{avec } |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N.$$

Définition 2.3 (Distributions). — On dit que u est une distribution sur Ω si u est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$

$$u : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle u, \varphi \rangle$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante : Pour tout K compact de Ω , il existe un entier k et une constante C_K tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ avec } \text{Supp}(\varphi) \subset K, \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq k} \left\{ \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \right\}.$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω .

Remarque 2.4. — Lorsque, dans cette définition, l'entier k peut être choisi indépendant de K , on dit que la distribution est d'ordre fini. La plus petite valeur de k possible est appelée l'ordre de u .

2.1.2. Exemples importants. —

2.1.2.1. *Les fonctions localement intégrables dans Ω .* — Soit

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f|_K \in L^1(K), \quad \forall K \text{ compact } \subset \Omega\}.$$

Alors, la forme linéaire

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} f \varphi dx$$

définit une distribution d'ordre 0, encore notée f par abus. La propriété de continuité est vérifiée avec $k = 0$ et $C_K = \int_K |f(x)| dx$.

Remarque 2.5. — L'identification de f avec la distribution définie ci-dessus n'est possible que grâce au lemme suivant.

Lemme 2.6. — Soient $f, g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} f \varphi dx = \int_{\Omega} g \varphi dx \iff f = g \text{ presque partout dans } \Omega.$$

Démonstration. — Par linéarité, on est amené à montrer

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} f \varphi dx = 0 \iff f = 0 \text{ presque partout dans } \Omega.$$

D'autre part, seul le sens \Rightarrow est à démontrer (l'autre étant évident). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Posons

$$h_{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} f(y) \varphi(y) \theta_{\varepsilon}(x - y) dy.$$

Comme $\varphi(\cdot) \theta_{\varepsilon}(x - \cdot) \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $h_{\varepsilon} \equiv 0$, d'après l'hypothèse sur f . Prolongeons $f \varphi$ par 0 hors de Ω : on a alors $f \varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $h_{\varepsilon} = (f \varphi) * \theta_{\varepsilon} = 0 \rightarrow f \varphi$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Donc $f \varphi = 0$. La fonction φ étant arbitraire, on a bien $f = 0$ p.p. dans Ω . \square

2.1.2.2. La masse de Dirac. — Soit $a \in \Omega$. La forme linéaire

$$\delta_a : \varphi \mapsto \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

définit une distribution d'ordre 0, appelée masse de Dirac au point a .

Remarque 2.7. — *Quand reconnaît-on une fonction dans une distribution ?*

Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On suppose qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_{L^2}.$$

Alors, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (Lemme 2.2), u se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$. Par le théorème de représentation de Riesz, on dira même que $u \in L^2(\Omega)$. Plus généralement, soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad |\langle u, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_{L^p}, \quad (1 < p < +\infty)$$

Alors u est identifiable avec une fonction de $L^{p'}(\Omega)$, où $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$.

2.1.3. Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. —

Définition 2.8. — On dit qu'une suite de distributions u_n converge au sens des distributions vers $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ssi

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle u_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On notera dans ce cas $u_n \rightharpoonup u$.

Remarque 2.9. — A l'aide du théorème de Banach-Steinhaus (voir par exemple [1]), on peut démontrer le résultat suivant. Soit u_n est une suite de distributions telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite numérique $\langle u_n, \varphi \rangle$ vers une limite. Alors, si l'on note $\langle u, \varphi \rangle$ cette limite, u appartient à $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On a les résultats suivants (dont les démonstrations sont laissées en exercice) :

Lemme 2.10. — a) Si $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(\Omega)$ alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

b) On a $\theta_{\varepsilon} \rightharpoonup \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.1.4. Dérivation des distributions. —

Définition 2.11. — Soit $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $1 \leq i \leq N$, on note $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la distribution définie par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on note

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \in \mathcal{D}'(\Omega)^N.$$

De même, si α est un multi-entier, on note $\partial^\alpha u$ la distribution

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Remarque 2.12. — Si $f \in C^1(\Omega)$, on a, de façon classique et par simple intégration par parties sur un segment, φ étant nulle au voisinage de $\partial\Omega$,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \, dx$$

La dérivée de f au sens des distributions est donc la dérivée usuelle.

Remarque 2.13. — La dérivation est une opération continue sur $\mathcal{D}'(\Omega)$: il est facile de voir que si $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\forall \alpha$ multi-entier, $\partial^\alpha u_n \rightharpoonup \partial^\alpha u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exemple. — Dérivée de la fonction de Heaviside H .

La fonction de Heaviside est définie comme suit : $H(x) = 1$ pour $x > 0$ et $H(x) = 0$ sinon. Alors, la dérivée de H est la masse de Dirac en 0. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} H \varphi' \, dx = - \int_0^{+\infty} \varphi' \, dx = \varphi(0).$$

2.2. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$: premières propriétés

Dans cette section, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N , sans propriété particulière de régularité.

2.2.1. Définition et structure. —

Définition 2.14. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . On dit que $u \in H^1(\Omega)$ si $u \in L^2(\Omega)$ et si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la distribution $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ appartient aussi à $L^2(\Omega)$ (ou, de façon équivalente, si la distribution ∇u appartient à $L^2(\Omega)^N$.)

On considère sur cet espace le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1} = \int_{\Omega} uv \, dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} uv \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

et la norme induite

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Théorème 2.15. — L'espace $H^1(\Omega)$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert séparable.

Démonstration. — Montrons tout d'abord que $H^1(\Omega)$ est complet. Soit u_n une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$. Alors, u_n et toutes les fonctions $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ (pour $i = 1, \dots, n$) forment des suites de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$.

Par conséquent, il existe $u \in L^2$ et des fonctions $g_i \in L^2$ telles que $u_n \rightarrow u$ dans L^2 et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow g_i$ dans L^2 pour tout i .

Par continuité de l'injection canonique $L^2 \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, on a $u_n \rightharpoonup u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup g_i$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour tout i .

Enfin, par continuité de la dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout i on a $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ce qui conduit à $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$. Cela démontre que l'espace $H^1(\Omega)$ est complet.

Montrons que $H^1(\Omega)$ est séparable c'est-à-dire qu'il admet une partie dénombrable dense. On va s'appuyer sur les deux résultats suivants :

- (i) Le produit de deux espaces séparables est séparable.
- (ii) Si E est un espace de Hilbert et F est un sous-espace fermé de E , la séparabilité de E entraîne celle de F (utiliser la projection sur F).

On introduit alors l'espace $L^2(\Omega)^{N+1}$ muni de la structure hilbertienne produit, et l'application

$$T : u \mapsto \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)^{N+1}$. Cette application est une isométrie, de sorte que $H^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2(\Omega)^{N+1}$. Or l'espace $L^2(\Omega)$ étant séparable, $L^2(\Omega)^{N+1}$ l'est aussi, en vertu de la propriété (i) ci-dessus. Par la propriété (ii), $H^1(\Omega)$ est donc séparable. \square

Généralisations. — On définit plus généralement les familles d'espaces suivants :

- Les espaces $H^m(\Omega)$, définis pour $m \in \mathbb{N}$ par

$$H^m(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha \text{ multi-entier tel que } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \}.$$

Munis du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2},$$

ce sont des espaces de Hilbert.

- Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$, définis pour $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$, par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \text{ multi-entier tel que } |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \}.$$

Munis de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}, \quad \text{pour } p < +\infty$$

et

$$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty},$$

ce sont des espaces de Banach. Dans le cas $p = 2$, les normes $\|\cdot\|_{W^{m,2}}$ et $\|\cdot\|_{H^m}$ sont équivalentes.

– Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, on définit les espaces $H^s(\mathbb{R}^N)$ avec $s \in \mathbb{R}^+$, par

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}, \quad (2.1)$$

où \widehat{u} est la transformée de Fourier de u , notée aussi $\mathcal{F}(u)$ par la suite. On rappelle que l'opérateur

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N) &\rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N) \\ u(x) &\mapsto \widehat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en une isométrie sur $L^2(\mathbb{R}^N)$. On rappelle aussi que la transformée de Fourier inverse est définie par

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix \cdot \xi} u(\xi) d\xi.$$

Proposition 2.16. — *Lorsque s est entier, cette dernière définition est équivalente à celle donnée au-dessus pour $H^m(\mathbb{R}^N)$, et les normes sont équivalentes.*

Démonstration. — On ne va faire la preuve que dans le cas $m = 1$. Notons

$$H = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{1/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

et montrons que $H = H^1(\mathbb{R}^N)$, avec $\|u\|_{H^1} = \|(1 + |\xi|^2)^{1/2} \widehat{u}\|_{L^2}$. Tout d'abord, on peut voir facilement, par une intégration par parties, que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq j \leq N$, on a

$$\widehat{\partial_{x_j} \varphi} = i \xi_j \widehat{\varphi} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}(i \xi_j \varphi) = \partial_{x_j} \mathcal{F}^{-1}(\varphi),$$

toutes ces fonctions étant (au moins) dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Montrons que $H \subset H^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $u \in H$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$(i \xi_j \widehat{u}, \widehat{\varphi})_{L^2} = - \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u} \overline{i \xi_j \widehat{\varphi}} d\xi = - \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u} \overline{\partial_{x_j} \widehat{\varphi}} d\xi = - \int_{\mathbb{R}^N} u \partial_{x_j} \varphi dx = \langle \partial_{x_j} u, \varphi \rangle,$$

donc, par Cauchy-Schwarz, $|\langle \partial_{x_j} u, \varphi \rangle| \leq \|\xi_j \widehat{u}\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}$, ce qui suffit à identifier $\partial_{x_j} u$ avec une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$, avec de plus $\|\partial_{x_j} u\|_{L^2} \leq \|\xi_j \widehat{u}\|_{L^2}$. On a donc $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $\|u\|_{H^1} \leq \|(1 + |\xi|^2)^{1/2} \widehat{u}\|_{L^2}$.

Montrons maintenant l'inclusion inverse : $H^1(\mathbb{R}^N) \subset H$. Pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, la fonction $\xi \mapsto \xi_j \varphi(\xi)$ appartient aussi à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et on a

$$\langle i \xi_j \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle i \widehat{u}, \xi_j \varphi \rangle = -(\widehat{u}, i \xi_j \varphi)_{L^2} = -(u, \partial_{x_j} \mathcal{F}^{-1}(\varphi))_{L^2}.$$

Or u et $\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$ étant toutes les deux dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, en utilisant le résultat de densité ci-dessus (Théorème 2.17), on démontre que l'intégration par partie suivante est valide : $(u, \partial_{x_j} \mathcal{F}^{-1}(\varphi))_{L^2} = (\partial_{x_j} u, \mathcal{F}^{-1}(\varphi))_{L^2}$. Ainsi, par Cauchy-Schwarz, $|\langle \xi_j \widehat{u}, \varphi \rangle| \leq \|\partial_{x_j} u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}$ et donc, comme ci-dessus, $\xi_j \widehat{u}$ s'identifie avec une fonction L^2 telle que $\|\xi_j \widehat{u}\|_{L^2} \leq \|\partial_{x_j} u\|_{L^2}$. On obtient ainsi que $u \in H$ avec $\|u\|_{H^1} \geq \|(1 + |\xi|^2)^{1/2} \widehat{u}\|_{L^2}$. \square

2.2.2. Un premier résultat de densité. — Travailler sur les fonctions $L^2(\Omega)$ et leurs dérivées au sens des distributions est souvent délicat. Pour beaucoup de preuves, il est commode de se ramener aux fonctions régulières et de passer ensuite à la limite. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$, nous avons le résultat de densité souhaité, mais, comme on le verra plus loin lors de la présentation de la notion de “trace sur le bord”, lorsque Ω est un ouvert quelconque de \mathbb{R}^N , différent de \mathbb{R}^N , $\mathcal{D}(\Omega)$ n’est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 2.17. — Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Alors il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. — La démonstration de ce résultat se fait en deux étapes.

Étape 1 : troncature.

Montrons que l’espace suivant est dense dans $H^1(\mathbb{R}^N)$:

$$H_c^1 = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \text{Supp}(u) \text{ est compact}\}.$$

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ satisfaisant

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pour } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n(x) = \chi(x/n)u(x)$. Alors on a bien $u_n \in H_c^1$ et $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. En effet, de la relation

$$\frac{\partial(u_n - u)}{\partial x_i} = (\chi(x/n) - 1) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{n} \frac{\partial \chi}{\partial x_i}(x/n)u(x)$$

on déduit

$$\left\| \frac{\partial(u_n - u)}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \leq \left\| (\chi(x/n) - 1) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right\|_{L^2} + \frac{c}{n} \|u\|_{L^2}.$$

Le premier terme tend vers 0 par convergence dominée, le second terme tend aussi vers 0.

Étape 2 : convolution.

La seconde étape utilise une technique de régularisation par convolution, avec le lemme suivant qui est démontré plus loin.

Lemme 2.18. — Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $\theta \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors $\theta * u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et on a, pour $i = 1, \dots, N$,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta * u) = \theta * \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad (2.2)$$

Avec l’étape précédente, il suffit maintenant de montrer que, pour tout $u \in H_c^1(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \theta_{1/n} * u$, où $\theta_{1/n}$ désigne la famille régularisante définie au début du chapitre. Puisque u et $\theta_{1/n}$ sont à supports compacts, u_n est aussi à support compact. De plus, comme $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a $u_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, donc $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

D’après le Lemme 2.2, on a $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, le Lemme 2.18 donne que $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} * \theta_{1/n}$, donc le même Lemme 2.2 entraîne que $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. On a donc bien $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. \square

Preuve du lemme. — On utilise les résultats classiques sur la convolution dans les espaces de Lebesgue. Comme $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\theta \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on a déjà $\theta * u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Nous allons montrer l'identité suivante :

$$\int (\theta * u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int \left(\theta * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi dx \quad (2.3)$$

qui entraîne directement (2.2), puis $\frac{\partial}{\partial x_i}(\theta * u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Pour montrer (2.3), traitons tout d'abord le cas particulier où θ est à support compact. En notant $\check{\theta}(x) = \theta(-x)$, on a

$$\begin{aligned} \int (\theta * u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \iint \theta(x-y) u(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx dy = \int u \left(\check{\theta} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int u \frac{\partial}{\partial x_i} (\check{\theta} * \varphi) dx = - \int \frac{\partial u}{\partial x_i} (\check{\theta} * \varphi) dx = - \int \left(\theta * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi dx. \end{aligned}$$

On a bien démontré (2.3). Notons qu'on a utilisé ici que $\check{\theta} * \varphi$ est bien une fonction-test, ce qui découle notamment du fait que θ est à support compact. Si maintenant θ n'est pas à support compact, on introduit une suite $\theta_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$ telle que $\theta_n \rightarrow \theta$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ (voir Annexe A). L'identité (2.3) est valable pour θ_n , autrement dit, on a

$$\int (\theta_n * u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int \left(\theta_n * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi dx. \quad (2.4)$$

Ensuite, en utilisant la Proposition A.7 et $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, on obtient que $\theta_n * u \rightarrow \theta * u$ et que $\theta_n * \frac{\partial u}{\partial x_i} \rightarrow \theta * \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ donc, en passant à la limite dans (2.4), on obtient bien (2.3). \square

Corollaire 2.19. — Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, un ouvert. Soit $u \in H^1(\Omega)$ tel que $\text{Supp } u \subset \omega$, où ω est un ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$ et $\bar{\omega}$ est compact. Alors le prolongement \tilde{u} de u par zéro hors de Ω appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ et il existe une suite de fonctions $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration. — D'après les propriétés de ω , on peut trouver une fonction $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\theta = 1$ sur ω . Montrons d'abord que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Il est clair que $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, examinons son gradient. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle \nabla \tilde{u}, \varphi \rangle = - \langle \tilde{u}, \nabla \varphi \rangle = - \int_{\omega} u \nabla \varphi dx = - \int_{\omega} u \theta \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} u \nabla (\theta \varphi) dx = \langle \nabla u, \theta \varphi \rangle$$

car $\theta \varphi|_{\Omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Donc, on a l'estimation

$$|\langle \nabla \tilde{u}, \varphi \rangle| \leq |\langle \nabla u, \theta \varphi \rangle| \leq \left| \int_{\Omega} \nabla u \theta \varphi dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\theta \varphi\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2},$$

qui suffit à déduire que $\nabla \tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, donc que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Ainsi, on peut appliquer le Théorème 2.17 à cette fonction \tilde{u} : il existe une suite $v_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $v_n \rightarrow \tilde{u}$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Posons $u_n = \theta v_n|_{\Omega}$. On a bien $u_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ et il est facile de vérifier que $\nabla u_n = \theta \nabla v_n|_{\Omega} + v_n \nabla \theta|_{\Omega}$, ce qui entraîne immédiatement que $u_n \rightarrow \theta \tilde{u}|_{\Omega} = u$ dans $L^2(\Omega)$ et que $\nabla u_n \rightarrow \theta \nabla \tilde{u}|_{\Omega} + \tilde{u} \nabla \theta|_{\Omega} = \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$. Autrement dit, on a $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$. \square

2.2.3. L'espace $H_0^1(\Omega)$ et son dual. —

Définition 2.20. — On appelle $H_0^1(\Omega)$ le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Remarque 2.21. — Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ (Théorème 2.17), on a l'identification $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$. Mais, en général, on n'a pas $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Le théorème suivant aura une importance pratique lorsque nous aborderons la résolution des EDP elliptiques avec condition de Dirichlet.

Théorème 2.22 (Inégalité de Poincaré). — Si Ω est borné, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2}. \quad (2.5)$$

Par conséquent, la semi-norme $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme $H^1(\Omega)$, et que l'on notera $\|u\|_{H_0^1}$.

Démonstration. — Il suffit de raisonner avec des fonctions régulières. En effet, par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, l'inégalité (2.5) est équivalente à

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \|u\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2}.$$

Soit maintenant $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. On note \tilde{u} le prolongement de u par 0 hors de Ω . Puisque le domaine Ω est borné, il est compris dans une bande : il existe $a < b$ tels que

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^N : a \leq x_N \leq b\}.$$

En posant $x = (x', x_N)$, c'est-à-dire $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$, on a

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x', x_N) = \int_a^{x_N} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}(x', y) dy.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$|\tilde{u}(x)|^2 \leq (x_N - a) \int_a^{x_N} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}(x', y) \right|^2 dy \leq (x_N - a) \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N}(x', y) \right|^2 dy$$

puis, en intégrant par rapport à x' ,

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\tilde{u}(x', x_N)|^2 dx' \leq (x_N - a) \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N} \right|^2 dy.$$

Il reste à intégrer par rapport à x_N :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}(x)|^2 dx = \int_a^b \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\tilde{u}(x', x_N)|^2 dx' dx_N \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_N} \right|^2 dy \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}|^2 dy = \frac{1}{2}(b-a)^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dy. \end{aligned}$$

On a donc l'inégalité demandée, avec $C_\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)$. La preuve d'équivalence des normes $\|u\|_{H_0^1}$ et $\|u\|_{H^1}$ sur $H_0^1(\Omega)$ est immédiate. \square

Remarque 2.23. — La démonstration précédente montre que l'inégalité est vraie dès que Ω est borné selon une direction. Par ailleurs, l'inégalité de Poincaré (2.5) permet de montrer que si Ω est borné et non vide, alors l'inclusion $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ est stricte. En effet considérons la fonction constante $u \equiv 1$. Cette fonction est clairement dans $H^1(\Omega)$, mais ne peut pas appartenir à $H_0^1(\Omega)$, car sinon (2.5) entraînerait alors $|\Omega|^{1/2} = \|u\|_{L^2} = 0$.

Pour terminer cette section, on identifie le dual de $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 2.24. — *Le dual de $H_0^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$. On le note $H^{-1}(\Omega)$. De plus, on a*

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : u = f_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, f_0 \in L^2(\Omega), f_i \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq N \right\}. \quad (2.6)$$

Démonstration. — Une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ s'identifie à une distribution de la façon suivante. Par la Définition 2.20, il est nécessaire et suffisant de définir cette forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ pour qu'elle soit bien définie. Soit $u \in H^{-1}(\Omega)$, on note $\langle u, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ son action sur une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on pose naturellement

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

On vérifie facilement que cela définit une distribution d'ordre au plus 1.

Notons provisoirement H l'espace de droite dans (2.6) et montrons d'abord que $H^{-1}(\Omega) \supset H$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $u = f_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$. Alors

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle f_0, \varphi \rangle - \sum_{i=1}^N \left\langle f_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

et donc par Cauchy-Schwarz,

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \|\varphi\|_{H^1}.$$

Par densité, u se prolonge donc en une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. Notons que l'on aura donc, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle u, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} = \int_{\Omega} f_0 v \, dx - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx.$$

Cette formule ne dépend bien entendu par du choix des fonction f_i (qui ne sont pas uniques). On peut poser

$$\|u\|_{H^{-1}} = \inf_{u=f_0+\sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i}} \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}.$$

Montrons maintenant que $H^{-1}(\Omega) \subset H$. Soit $u \in H^{-1}(\Omega)$, on notera $\langle u, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$ l'action de u sur un élément $v \in H_0^1(\Omega)$. On utilise pour cela le théorème de représentation de Riesz sur $(L^2(\Omega))^{N+1}$.

Etape 1. On définit une forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel de $(L^2)^{N+1}$.

Soit $G = \left\{ \left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_N} \right) : v \in H_0^1(\Omega) \right\} \subset (L^2(\Omega))^{N+1}$. L'application

$$T : \begin{array}{ccc} G & & \rightarrow \mathbb{R} \\ \left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_N} \right) & \mapsto & \langle u, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \end{array}$$

est une forme linéaire continue sur G .

Etape 2. Prolongement par le théorème de Hahn-Banach (Corollaire I-2 de [2]). La forme linéaire T se prolonge en g , forme linéaire continue sur $(L^2(\Omega))^{N+1}$.

Etape 3. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $(f_0, f_1, \dots, f_N) \in (L^2)^{N+1}$ tels que, $\forall (w_0, w_1, \dots, w_N) \in (L^2)^{N+1}$, on ait

$$g(w_0, w_1, \dots, w_N) = \sum_{i=0}^N \int f_i w_i dx,$$

donc en particulier,

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle u, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} &= T \left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_N} \right) = g \left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_N} \right) \\ &= \int f_0 v dx + \sum_{i=1}^N \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \\ &= \langle f_0, v \rangle + \sum_{i=1}^N \left\langle f_i, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle = \langle f_0, v \rangle - \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, v \right\rangle. \end{aligned}$$

On a bien $u = f_0 - \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ au sens des distributions, donc $u \in H$.

□

Remarque 2.25. — On peut faire un commentaire sur la terminologie H^{-1} . Comme nous l'avons vu, sur \mathbb{R}^N , les espaces de Sobolev d'exposant $s \geq 0$ peuvent être définis par la transformée de Fourier. En fait, la définition (2.1) s'étend pour les exposants négatifs en utilisant la transformée de Fourier des distributions tempérées. L'espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ est le dual de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, fonctions \mathcal{C}^∞ à décroissance rapide à l'infini, voir par exemple [1]. On a alors la caractérisation équivalente suivante de $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$:

$$H^{-1}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : (1 + |\xi|^2)^{-1/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}$$

qui généralise bien (2.1).

2.3. Prolongements

Dans de nombreuses situations, il peut être utile de savoir *prolonger* une fonction de $H^1(\Omega)$ en une fonction de $H^1(\mathbb{R}^N)$. Ceci va nécessiter des hypothèses de régularité sur le domaine Ω .

Afin de définir ce qu'est un ouvert régulier, introduisons quelques notations. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on note $x = (x', x_N)$ où $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$, puis

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+^N &= \{x = (x', x_N) : x_N > 0\}, & \mathbb{R}_-^N &= \{x = (x', x_N) : x_N < 0\} \\ Q &= \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \text{ et } |x_N| < 1\}, & \text{ où } |x'| &= \left(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2\right)^{1/2} \\ Q_+ &= Q \cap \mathbb{R}_+^N, & Q_- &= Q \cap \mathbb{R}_-^N, & Q_0 &= \{x = (x', x_N) : |x'| < 1 \text{ et } x_N = 0\}.\end{aligned}$$

Définition 2.26. — Un ouvert Ω de \mathbb{R}^N est dit de classe \mathcal{C}^1 si pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe un voisinage U de x dans \mathbb{R}^N et une application $\phi : Q \rightarrow U$ bijective telle que

$$\phi \in \mathcal{C}^1(\overline{Q}), \quad \phi^{-1} \in \mathcal{C}^1(\overline{U}), \quad \phi(Q_+) = U \cap \Omega, \quad \phi(Q_0) = U \cap \partial\Omega.$$

Le théorème principal de cette section est le suivant.

Théorème 2.27. — Soit Ω un ouvert de classe \mathcal{C}^1 , de frontière bornée (ou bien $\Omega = \mathbb{R}_+^N$). Alors il existe un opérateur de prolongement linéaire et continu

$$P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$$

c'est-à-dire tel que $Pu|_\Omega = u$ et $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Avant de démontrer ce théorème, on va énoncer deux lemmes utiles.

Lemme 2.28. — Soit $u \in H^1(Q_+)$. On définit la fonction suivante, prolongée par réflexion :

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & \text{si } x_N > 0 \\ u(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0. \end{cases}$$

Alors on a $u^* \in H^1(Q)$ et $\|u^*\|_{H^1(Q)} \leq \sqrt{2}\|u\|_{H^1(Q_+)}$.

Démonstration. — Il est déjà clair que $u^* \in L^2(Q)$ avec $\|u^*\|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{2}\|u\|_{L^2(Q_+)}$. On va alors démontrer les propriétés suivantes, qui permettent de déduire directement le résultat souhaité :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \quad \text{si } 1 \leq i \leq N-1, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_N} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) & \text{si } x_N > 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

On utilisera la suite η_k de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\eta_k(t) = \eta(kt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, où η est une fonction fixée, de classe \mathcal{C}^∞ , telle que $\eta(t) = 0$ si $t < 1/2$ et $\eta(t) = 1$ si $t > 1$.

Preuve de (2.7). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$. En posant

$$\psi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N),$$

on peut voir que, pour $1 \leq i \leq N-1$, on a

$$\left\langle \frac{\partial u^*}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx. \quad (2.9)$$

La fonction ψ n'appartient a priori pas à $\mathcal{D}(Q_+)$, en revanche on a $\eta_k(x_N)\psi(x', x_N) \in \mathcal{D}(Q_+)$, ce qui permet d'écrire

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \psi \, dx = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \eta_k \psi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial(\eta_k \psi)}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{Q_+} u \eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dx$$

car η_k ne dépend pas de la variable x_i . Par convergence dominée, on peut passer à la limite dans les deux intégrales de cette série d'identités, lorsque $k \rightarrow +\infty$, ce qui donne

$$\begin{aligned} - \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \, dx &= \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \psi \, dx = \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx + \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_N) \varphi(x', -x_N) \, dx \\ &= \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx + \int_{Q_-} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_N) \varphi(x', x_N) \, dx \\ &= \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^* \varphi \, dx = \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^*, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

En insérant cette égalité dans (2.9), on obtient bien (2.7).

Preuve de (2.8). On notera $v(x', x_N)$ la fonction définie par le membre de droite de (2.8). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$. En posant cette fois

$$\chi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N),$$

on obtient

$$\left\langle \frac{\partial u^*}{\partial x_N}, \varphi \right\rangle = - \int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} \, dx = - \int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N} \, dx. \quad (2.10)$$

On doit maintenant faire attention au fait que

$$\frac{\partial(\eta_k \chi)}{\partial x_N} = \eta_k \frac{\partial \chi}{\partial x_N} + k \eta'(k x_N) \chi,$$

de sorte que, comme on a aussi $\eta_k \chi \in \mathcal{D}(Q_+)$,

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \eta_k \chi \, dx = - \int_{Q_+} u \eta_k \frac{\partial \chi}{\partial x_N} \, dx - \int_{Q_+} u k \eta'(k x_N) \chi \, dx. \quad (2.11)$$

La dernière intégrale tend vers 0 lorsque $k \rightarrow +\infty$. Pour le montrer, on remarque tout d'abord que la fonction $\chi(x', x_N)$ s'annule pour $x_N = 0$ donc, cette fonction étant régulière, il existe une constante $M > 0$ telle que $|\chi(x', x_N)| \leq M|x_N|$. Par conséquent, on a la majoration

$$\left| \int_{Q_+} u k \eta'(k x_N) \chi \, dx \right| \leq \|\eta'\|_{L^\infty} M \int_{Q_+} |u| k x_N \mathbf{1}_{0 \leq k x_N \leq 1} \, dx \leq C \int_{Q_+} |u| \mathbf{1}_{0 \leq k x_N \leq 1} \, dx,$$

ce qui permet de conclure par convergence dominée.

Par conséquent, en passant à la limite dans (2.11) (toujours par convergence dominée), on obtient comme ci-dessus

$$\begin{aligned} - \int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N} \, dx &= \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \chi \, dx = \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \varphi \, dx - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', x_N) \varphi(x', -x_N) \, dx \\ &= \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \varphi \, dx - \int_{Q_-} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x', -x_N) \varphi(x', x_N) \, dx \\ &= \langle v, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Avec (2.10), on obtient bien $\frac{\partial u^*}{\partial x_N} = v$. □

Le lemme suivant de partitions de l'unité est supposé connu et sera aussi utilisé dans la preuve du Théorème 2.27. Il est donné ici sans preuve.

Lemme 2.29 (Partitions de l'unité). — Soit Γ un compact de \mathbb{R}^N et O_1, O_2, \dots, O_n des ouverts tels que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^n O_i$. Alors il existe des fonctions $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que

- (i) Pour $i = 0, 1, \dots, n$, on a $0 \leq \theta_i \leq 1$ et $\sum_{i=0}^n \theta_i = 1$ sur \mathbb{R}^N .
- (ii) Pour $i = 1, \dots, n$, le support de θ_i est compact et inclus dans O_i .
- (iii) Le support de θ_0 est inclus dans $\mathbb{R}^N \setminus \Gamma$.

Démonstration du Théorème 2.27. — Remarquons tout d'abord que la démonstration du Lemme 2.28 fonctionne aussi si l'on remplace Q_+ par R_+^N , ce qui permet directement de démontrer le Théorème 2.27 dans le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Considérons maintenant le cas d'un ouvert Ω de frontière bornée. Comme $\partial\Omega$ est compacte et de classe \mathcal{C}^1 , il existe des ouverts $(O_i)_{1 \leq i \leq n}$ de \mathbb{R}^N tels que $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^n O_i$ et il existe des applications $\phi_i : Q \rightarrow O_i$ bijectives telles que

$$\phi_i \in \mathcal{C}^1(\overline{Q}), \quad \phi_i^{-1} \in \mathcal{C}^1(\overline{O_i}), \quad \phi_i(Q_+) = O_i \cap \Omega, \quad \phi_i(Q_0) = O_i \cap \partial\Omega.$$

On peut alors appliquer le Lemme 2.29 à $\Gamma = \partial\Omega$, qui donne les fonctions $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$.

Soit maintenant $u \in H^1(\Omega)$. On déduit du point (i) du Lemme 2.29 que

$$u = \sum_{i=0}^n u_i \quad \text{où} \quad u_i = \theta_i u.$$

On va prolonger séparément chacune des fonctions u_i à \mathbb{R}^N .

Prolongement de u_0 . Pour la fonction u_0 , le prolongement se fait simplement en posant

$$\overline{u_0}(x) = \begin{cases} u_0(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

On a $\theta_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Pour cette dernière propriété, on rappelle en effet que l'on a $0 \leq \theta_0 \leq 1$ et $\nabla \theta_0 = -\sum_{i=1}^n \nabla \theta_i$ (et chacune de ces fonction est régulière, à support compact). De plus, on a $\text{Supp } \theta_0 \subset \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Pour $j = 1, \dots, N$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{u_0} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= \int_{\Omega} \theta_0 u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial(\theta_0 \varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial \theta_0}{\partial x_j} \varphi \right) dx \\ &= - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \theta_0 \varphi + u \frac{\partial \theta_0}{\partial x_j} \varphi \right) = - \int_{\mathbb{R}^N} \left(\overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}} \theta_0 \varphi + \overline{u} \frac{\partial \theta_0}{\partial x_j} \varphi \right). \end{aligned}$$

On a utilisé ici le fait que $\theta_0 \varphi|_{\Omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$. Il s'en suit l'identification

$$\frac{\partial \overline{u_0}}{\partial x_j} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}} \theta_0 + \overline{u} \frac{\partial \theta_0}{\partial x_j},$$

et donc on a $\overline{u_0} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ avec $\|\overline{u_0}\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Prolongement de u_i , $1 \leq i \leq n$. On transporte d'abord u depuis $O_i \cap \Omega$ vers Q_+ grâce à la fonction ϕ_i . Posons

$$v_i(y) = u(\phi_i(y)) \quad \text{pour } y \in Q_+.$$

Par changement de variable régulier, on préserve l'appartenance à H^1 (admis pour l'instant, voir [2], Proposition IX.6, à énoncer et démontrer à la fin de la sous-section 2.2.2), donc $v_i \in H^1(Q_+)$. On utilise ensuite le Lemme 2.28 pour définir sur Q le prolongement de v_i par réflexion, noté $v_i^* \in H^1(Q)$. On revient ensuite sur O_i en posant

$$w_i(x) = v_i^*(\phi_i^{-1}(x)) \quad \text{pour } x \in U_i.$$

On a alors $w_i \in H^1(O_i)$, $w_i = u$ sur $O_i \cap \Omega$ et $\|w_i\|_{H^1(O_i)} \leq C\|u\|_{H^1(O_i \cap \Omega)}$. Enfin, on pose

$$\overline{u}_i(x) = \begin{cases} \theta_i(x)w_i(x) & \text{si } x \in O_i \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus O_i. \end{cases}$$

On a bien $\overline{u}_i \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (procéder comme ci-dessus pour \overline{u}_0) et $\|\overline{u}_i\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{H^1(O_i \cap \Omega)}$.

Conclusion. En posant $Pu = \sum_{i=0}^n \overline{u}_i$, on a bien toutes les propriétés souhaitées. \square

Corollaire 2.30. — *On suppose Ω de classe \mathcal{C}^1 . Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n|_{\Omega} \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$. Autrement dit, l'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.*

Démonstration. — Supposons tout d'abord $\partial\Omega$ bornée. D'après le Théorème 2.27, une fonction $u \in H^1(\Omega)$ peut être prolongée en une fonction $Pu \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Ensuite, d'après le théorème de densité 2.17, il existe une suite $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ qui converge vers Pu dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Il est alors immédiat de vérifier que $u_n|_{\Omega} \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

Lorsque $\partial\Omega$ n'est pas bornée, on raisonne par troncatures en considérant les intersections de Ω avec des grandes boules. Cette partie de la preuve est laissée en exercice. \square

2.4. Traces et formule de Green

On va montrer qu'à toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on peut associer naturellement une fonction $u \in L^2(\partial\Omega)$, qui est la "trace de u sur le bord". Comme ci-dessus, le cas du demi-espace \mathbb{R}_+^N va nous servir de modèle.

2.4.1. Le cas de la dimension 1. — Le cas de la dimension 1 d'espace peut être traité séparément. En effet, on va montrer que les fonctions de $H^1(]a, b[)$ ont un représentant continu sur $[a, b]$, ce qui permet de parler de façon univoque des valeurs au bord $u(a)$ et $u(b)$.

Lemme 2.31. — *Soient $a < b$. L'espace $H^1(]a, b[)$ s'injecte de façon continue dans $\mathcal{C}^{0,1/2}([a, b])$, l'espace des fonctions 1/2-Höldériennes sur $[a, b]$.*

Démonstration. — Soit $u \in H^1(]a, b[)$. On veut montrer qu'il existe $\overline{u} \in \mathcal{C}^{0,1/2}([a, b])$, choisi de façon continue par rapport à u , tel que $\overline{u} = u$ presque partout dans $]a, b[$. Pour $x \in [a, b]$, on pose

$$\tilde{u}(x) = \int_a^x u'(t) dt.$$

La fonction \tilde{u} est bien définie pour tout $x \in [a, b]$ car $u' \in L^1(]a, b[)$. En fait, on peut voir que \tilde{u} appartient à $\mathcal{C}^{0,1/2}([a, b])$, par une simple inégalité de Cauchy-Schwarz : en effet, pour tout $x, y \in [a, b]$, on a

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| = \left| \int_y^x u'(t) dt \right| \leq \sqrt{|x - y|} \|u'\|_{L^2}. \quad (2.12)$$

Calculons maintenant la dérivée de \tilde{u} au sens des distributions. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{u}', \varphi \rangle &= -\langle \tilde{u}, \varphi' \rangle = -\int_a^b \tilde{u}(x) \varphi'(x) dx = -\int_a^b dx \varphi'(x) \int_a^x u'(t) dt \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} -\int_a^b dt u'(t) \int_t^b \varphi'(x) dx \\ &= \int_a^b u'(t) \varphi(t) dt \quad \text{car } \varphi(b) = 0 \\ &= \langle u', \varphi \rangle \end{aligned}$$

donc $\tilde{u}' = u'$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ainsi, $u - \tilde{u}$ est une constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\bar{u} = \tilde{u} + \lambda \in \mathcal{C}^{0,1/2}([a, b])$. On a bien $u = \bar{u}$ presque partout sur $]a, b[$.

Il reste à montrer la continuité de l'injection $H^1(]a, b[) \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1/2}([a, b])$. Rappelons que la norme sur cet espace s'écrit

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,1/2}} = \max_{[a,b]} |u| + \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1/2}}.$$

D'après (2.12), on a déjà

$$\sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1/2}} \leq \|u'\|_{L^1} \leq \|u\|_{H^1}.$$

Pour l'autre terme, on écrit

$$\max_{[a,b]} |u| \leq \max_{[a,b]} |\tilde{u}| + |\lambda| \leq \|u'\|_{L^2} + |\lambda| \quad (\text{par Cauchy-Schwarz}).$$

Mais on a aussi

$$|\lambda| = |u(x) - \tilde{u}(x)| = \int_0^1 |u(x) - \tilde{u}(x)| dx \leq \|u\|_{L^2} + \|u'\|_{L^2}$$

ce qui donne finalement

$$\max_{[a,b]} |u| \leq \|u\|_{L^2} + 2\|u'\|_{L^2} \leq \sqrt{5} \|u\|_{H^1}.$$

La preuve du lemme est terminée. \square

Remarque 2.32. — En dimension $N > 1$, le lemme ci-dessus est faux. Les fonctions H^1 peuvent admettre des singularités, mais celles-ci doivent être localisées sur des variétés de dimension au plus $N - 2$. Par exemple, on peut montrer (voir TD) que la fonction définie sur $\Omega = B(0, \frac{1}{2}) \subset \mathbb{R}^2$ par $u(x, y) = (-\ln |x|)^\alpha$ avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ appartient à $H^1(\Omega)$.

2.4.2. Un théorème de trace. — Tout va reposer sur un calcul très simple.

Lemme 2.33. — *Pour tout $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$, on a l'inégalité*

$$\|v(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}. \quad (2.13)$$

Démonstration. — Soit $v \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$. On a, pour tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$,

$$\begin{aligned} |v(x', 0)|^2 &= - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_N} (|v(x', x_N)|^2) dx_N = -2 \int_0^{+\infty} v(x', x_N) \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) dx_N \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left(|v(x', x_N)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x', x_N) \right|^2 \right) dx_N \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $2ab \leq a^2 + b^2$. En intégrant par rapport à x' , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x', 0)|^2 dx' \leq \int_{\mathbb{R}_+^N} \left(|v(x)|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x_N}(x) \right|^2 \right) dx$$

d'où (2.13). □

Sachant que $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ (Corollaire 2.30), et que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^{N-1})$, l'application $v \mapsto v(\cdot, 0)$ de $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}_+^N})$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{N-1})$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ sur $L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. De plus, (2.13) est vraie pour ce prolongement. Ce procédé, appliqué à un ouvert Ω de classe \mathcal{C}^1 , va nous permettre de définir l'application trace.

Théorème 2.34. — *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert de classe \mathcal{C}^1 et de frontière bornée (ou $\Omega = \mathbb{R}_+^N$). Alors l'application $\gamma_0 : v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$ de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $\mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, encore notée γ_0 et appelée application trace.*

Démonstration. — Le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ venant d'être démontré, traitons de cas Ω de classe \mathcal{C}^1 et de frontière bornée. Par prolongement par continuité, ce résultat se déduit de la densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$ (Corollaire 2.30) et de l'inégalité suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, on a

$$\|\gamma_0 v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.14)$$

Pour démontrer cette inégalité, on utilise une partition de l'unité telle que définie dans le Lemme 2.29 pour $\Gamma = \partial\Omega$, couplée à des fonctions ϕ_i définies comme au début de la preuve du Théorème 2.27 ci-dessus. Pour $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, on pose

$$w_i = (\theta_i v) \circ \phi_i.$$

D'après le Lemme 2.33 et en utilisant la régularité des fonctions θ_i et ϕ_i , on obtient

$$\|w_i(\cdot, 0)\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq \|w_i\|_{H^1(\mathbb{R}_+^N)} \leq C_i \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Pour conclure à (2.14), il suffit de se convaincre de l'équivalence des normes suivantes :

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |v(x)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=1}^n \|(\theta_i v) \circ \phi_i\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})}^2 \right)^{1/2}$$

qui résulte encore des propriétés de la partition de l'unité et des régularités des fonctions bijectives ϕ_i . \square

2.4.3. Applications du théorème de trace. — La première application du théorème de trace est une généralisation de la formule de Green (intégration par parties) sur $H^1(\Omega)$.

Théorème 2.35. — Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, de classe C^1 et de frontière bornée. Alors, $\forall u, v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u \gamma_0 v n_i d\sigma \quad 1 \leq i \leq N$$

où n_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur normal sortant $n(x)$ au point $x \in \partial\Omega$.

Démonstration. — Ce théorème résulte de la même formule dans le cas où $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ et Ω de classe C^1 , voir la Proposition C.5 dans l'annexe C, couplée avec la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ (Corollaire 2.30) et la continuité de l'application trace γ_0 . \square

Remarque 2.36. — Par commodité, on omettra souvent le “ γ_0 ” dans cette expression :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv n_i d\sigma$$

Corollaire 2.37. — Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, de classe C^1 et de frontière bornée. Pour $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on note $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 = u|_{\Omega}$ et $u_2 = u|_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega}$. On a alors

$$u \in H^1(\mathbb{R}^N) \iff \begin{cases} u_1 \in H^1(\Omega) \\ u_2 \in H^1(\mathbb{R}^N \setminus \Omega) \\ \gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2. \end{cases}$$

Démonstration. — (\implies) Pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on a toujours $u_1 = u|_{\Omega} \in H^1(\Omega)$. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a l'identité

$$\langle \nabla u_1, \varphi \rangle = - \langle u_1, \nabla \varphi \rangle = - \int_{\Omega} u_1 \nabla \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^N} u \nabla \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \varphi dx,$$

(on a utilisé le fait que le prolongement de φ par 0 hors de Ω est une fonction-test $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$) qui entraîne l'estimation

$$|\langle \nabla u_1, \varphi \rangle| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \varphi dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

puis que $\nabla u_1 \in L^2(\Omega)$ avec $\nabla u_1 = \nabla u|_{\Omega}$.

Cette remarque entraîne que si $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, alors $u_1 \in H^1(\Omega)$ et $u_2 \in H^1(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Montrons la troisième propriété. Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, on peut trouver une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi_n \rightarrow u$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. Par définition de γ_0 , on a

$$\gamma_0(\varphi_n|_{\Omega}) = \varphi_n|_{\partial\Omega} = \gamma_0(\varphi_n|_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega}). \quad (2.15)$$

Par ailleurs, on a $\varphi_n|_{\Omega} \rightarrow u|_{\Omega} = u_1$ dans $H^1(\Omega)$ et $\varphi_n|_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \rightarrow u|_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} = u_2$ dans $H^1(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ (cela découle encore de la remarque ci-dessus). Donc, par continuité de l'application trace, on peut passer à la limite dans (2.15), ce qui donne $\gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2$.

(\impliedby) Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et $i \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\langle \partial_i u, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^N} u \partial_i \varphi dx = - \int_{\Omega} u_1 \partial_i \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} u_2 \partial_i \varphi dx.$$

Or, la formule de Green donne

$$\int_{\Omega} u_1 \partial_i \varphi dx = - \int_{\Omega} \partial_i u_1 \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u_1 \gamma_0 \varphi n_i d\sigma,$$

où n est le vecteur normal unitaire sortant de Ω . De même, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} u_2 \partial_i \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \partial_i u_2 \varphi dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_0 u_2 \gamma_0 \varphi n_i d\sigma$$

(noter que $-n$ est le vecteur normal unitaire sortant de $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$). Comme par hypothèse, $\gamma_0 u_1 = \gamma_0 u_2$, on a donc

$$\langle \partial_i u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \partial_i u_1 \varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \partial_i u_2 \varphi dx.$$

Ainsi la fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$ définie par $\partial_i u_1$ sur Ω et par $\partial_i u_2$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ s'identifie presque partout à $\partial_i u$. Cela montre bien que $u \in H^1(\Omega)$. \square

Une autre application intéressante du théorème de trace est une caractérisation plus intuitive de l'espace $H_0^1(\Omega)$ défini par la Définition 2.20.

Théorème 2.38. — Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert de classe \mathcal{C}^1 et de frontière bornée (ou $\Omega = \mathbb{R}_+^N$). Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u \in H_0^1(\Omega)$.
- (ii) La fonction $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$.
- (iii) $\gamma_0 u = 0$.

Démonstration. — (i) \Rightarrow (iii). On a $H_0^1(\Omega) \subset \text{Ker } \gamma_0$. En effet, soit $u \in H_0^1(\Omega)$ et soit φ_n une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_n \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$. Par continuité de l'application trace, on a $\gamma_0 \varphi_n \rightarrow \gamma_0 u$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Mais, comme les fonctions φ_n sont à support compact dans Ω , on a $\gamma_0 \varphi_n = 0$. Donc $\gamma_0 u = 0$ presque partout sur $\partial\Omega$.

(iii) \Rightarrow (ii). Il suffit d'appliquer le Corollaire 2.37 à la fonction \tilde{u} . En effet, on a $\tilde{u}|_{\Omega} = u \in H^1(\Omega)$, $\tilde{u}|_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} = 0 \in H^1(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)$ et $\gamma_0 u = \gamma_0 0 = 0$, donc $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

(ii) \Rightarrow (i). C'est la partie la plus compliquée de cette preuve. En raisonnant encore par partitions de l'unité, on peut voir qu'encore une fois, il suffit de montrer le résultat pour $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Considérons donc une fonction $u \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$ telle que son prolongement \tilde{u} par 0 hors de \mathbb{R}_+^N appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$. On va montrer que u est la limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^N)$. Il faut combiner trois techniques : troncature, translation et régularisation par convolution.

Troncature. Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ une fonction de troncature, telle que $\chi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\chi(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Pour $M \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tilde{u}^M(x) = \chi(x/M) \tilde{u}(x)$. Il est immédiat de voir que $\tilde{u}^M \rightarrow \tilde{u}$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $M \rightarrow +\infty$.

Translation. Pour tout $h > 0$, on note $\tau_h \tilde{u}$ la fonction translatée définie par

$$\tau_h \tilde{u}^M(x', x_N) = \tilde{u}^M(x', x_N - h).$$

On a facilement que $\partial_i \tau_h \tilde{u}^M = \tau_h \partial_i \tilde{u}^M$, donc la fonction $\tau_h \tilde{u}^M$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$. On vérifie en outre que $\tau_h \tilde{u}^M \rightarrow \tilde{u}^M$ dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $h \rightarrow 0$ (pour montrer ce résultat pour la norme L^2 , il convient d'approcher la fonction L^2 par une fonction \mathcal{C}_c^0 , ensuite il est facile d'en déduire l'analogie pour la norme H^1).

Régularisation. Le support de la fonction $\tau_h \tilde{u}^M$ est compact et est inclus dans $\{(x', x_n) : x_n \geq h\}$: il est donc inclus dans un certain ouvert ω tel que $\bar{\omega} \subset \mathbb{R}_+^N$ et $\bar{\omega}$ est compact. D'après le Corollaire 2.19, il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^N)$ qui converge vers $\tau_h \tilde{u}^M$ dans $H^1(\mathbb{R}_+^N)$ (c'est l'étape de régularisation par convolution). En faisant tendre $M \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow 0$ et $n \rightarrow +\infty$, par extraction diagonale on construit une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^N)$ qui converge vers u dans $H^1(\mathbb{R}_+^N)$. \square

2.5. Un résultat de compacité

Le but de cette section est de démontrer le théorème de compacité suivant.

Théorème 2.39 (de Rellich). — *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , de classe C^1 . Alors l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.*

Rappelons que, si X et Y sont deux espaces de Banach, une application linéaire $A : X \rightarrow Y$ est dite compacte si pour toute suite $u_n \in X$ bornée, il existe une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ telle que $Au_{\varphi(n)}$ converge dans Y . Le théorème précédent signifie donc que, si Ω est borné et de classe C^1 , alors de toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration. — Considérons une suite u_n bornée dans $H^1(\Omega)$ et notons $v_n = Pu_n$ son prolongement dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ selon l'opérateur de prolongement défini dans le Théorème 2.27. Alors v_n est une suite bornée de $H^1(\mathbb{R}^N)$. De plus, comme Ω est borné, quitte à multiplier v_n par une fonction de troncature régulière, à support compact et valant 1 sur Ω , on peut sans perte de généralité supposer que les fonctions v_n ont toutes leur support inclus dans un même compact $K \subset \mathbb{R}^N$.

Un résultat classique d'analyse fonctionnelle dit que tout ensemble borné d'un espace de Hilbert (qui est donc réflexif) est faiblement relativement compact. Ainsi, en considérant l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^N)$, la suite v_n étant bornée dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on peut extraire une sous-suite de v_n (encore notée v_n) qui converge vers $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ pour la topologie faible $L^2(\mathbb{R}^N)$. Notons que le support de v est aussi inclus dans K . En effet, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N \setminus K)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus K} v(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} v(x) \varphi(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^N} v_n(x) \varphi(x) dx = 0,$$

ce qui entraîne que $v|_{\mathbb{R}^N \setminus K}$ est nulle presque partout (par le Lemme 2.6). Dans la suite, on note $w_n = v_n - v$. La suite w_n est une suite de fonctions bornées dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, à support dans K , et convergeant vers 0 faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.

On va maintenant utiliser la caractérisation de $H^1(\mathbb{R}^N)$ par la transformée de Fourier. On rappelle en effet que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ si, et seulement si, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $(1 + |\xi|^2)^{1/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, et alors

$$\|u\|_{H^1} = \|(1 + |\xi|^2)^{1/2} \hat{u}\|_{L^2}.$$

Par le théorème de Plancherel, on a

$$\begin{aligned}
\|w_n\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{w}_n(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{|\xi| \leq M} |\widehat{w}_n(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{1+M^2} \int_{|\xi| \geq M} (1+|\xi|^2) |\widehat{w}_n(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{|\xi| \leq M} |\widehat{w}_n(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{1+M^2} \sup_n \|w_n\|_{H^1}^2.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Démontrons que, pour tout $M > 0$, la première intégrale converge vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^N$. Comme le support de w_n est inclus dans K , on a

$$\widehat{w}_n(\xi) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix \cdot \xi} w_n(x) \mathbf{1}_K(x) dx,$$

où $\mathbf{1}_K$ désigne la fonction indicatrice de K . Comme K est borné, la fonction $x \mapsto e^{-ix \cdot \xi} \mathbf{1}_K(x)$ est clairement une fonction de $L^2(\mathbb{R}^N)$, donc la convergence faible L^2 de w_n vers 0 entraîne que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{w}_n(\xi) = 0.$$

De plus, par Cauchy-Schwarz, on a la majoration uniforme suivante

$$|\widehat{w}_n(\xi)| \leq (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |w_n(x)| \mathbf{1}_K(x) dx \leq (2\pi)^{-N/2} |K|^{1/2} \sup_n \|w_n\|_{L^2}.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, pour montrer que, pour tout $M > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|\xi| \leq M} |\widehat{w}_n(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Il ne reste plus qu'à conclure. Pour tout $\varepsilon > 0$, on commence à choisir M tel que $\frac{1}{1+M^2} \sup_n \|w_n\|_{H^1}^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$. Ensuite, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $\int_{|\xi| \leq M} |\widehat{w}_n(\xi)|^2 d\xi < \frac{\varepsilon^2}{2}$. En insérant ces inégalités dans (2.16), on obtient $\|w_n\|_{L^2} \leq \varepsilon$. ON vient de démontrer que la sous-suite v_n converge vers v pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R}^N)$. La restriction $u_n = v_n|_{\Omega}$ converge donc vers $v|_{\Omega}$ dans $L^2(\Omega)$. \square

Ce théorème joue un rôle important dans la théorie spectrale des opérateurs elliptiques. On peut aussi lui trouver une application intéressante pour obtenir des inégalités de type Poincaré par des démonstrations par l'absurde. On renvoie pour cela à un exercice vu en TD.

CHAPITRE 3

PROBLEMES ELLIPTIQUES LINEAIRES

3.1. Introduction : Un problème de minimisation

Dans de nombreuses situations, la résolution d'une EDP elliptique peut être associée à la recherche d'un équilibre en terme d'énergie. Par exemple, lorsque l'EDP régit un problème d'élasticité, il peut s'agir de trouver la solution qui minimise les efforts subits par une membrane élastique sous contraintes.

On se propose de regarder le problème modèle suivant. On cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \int_{\Omega} f(x)u(x)dx$$

où $u \in H_0^1(\Omega)$ et Ω est un domaine borné de classe C^1 .

Interprétation physique : On cherche, parmi un ensemble d'états possibles, celui qui correspond à la plus petite énergie. Exemple : si l'on considère l'équilibre d'une membrane élastique, on recherche la position en laquelle la membrane subira le moins d'efforts, de tensions internes.

Lemme 3.1. — Soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors J admet un unique minimiseur $u \in H_0^1(\Omega)$.

Démonstration. — Montrons d'abord que $\inf J > -\infty$. Cela découle de l'inégalité de Poincaré : il existe une constante C_{Ω} telle que, pour tout $u \in H_0^1$, $\|u\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|\nabla u\|_{L^2}$, donc

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C_{\Omega} \|f\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Or la fonction $t \mapsto g(t) = \frac{1}{2}t^2 - C_{\Omega} \|f\|_{L^2} t$ est minorée car

$$g(t) = \frac{1}{2}(t - C_{\Omega} \|f\|_{L^2})^2 - \frac{1}{2}C_{\Omega}^2 \|f\|_{L^2}^2 \geq -\frac{1}{2}C_{\Omega}^2 \|f\|_{L^2}^2$$

Ainsi $J(u) \geq -\frac{1}{2}C_{\Omega}^2 \|f\|_{L^2}^2$, ce qui donne que $j = \inf J > -\infty$.

Montrons que l'infimum est atteint. Par définition de l'infimum, il existe une suite $u_n \in H_0^1(\Omega)$ telle que $j \leq J(u_n) < j + \frac{1}{n}$. Montrons que cette suite est de Cauchy dans

$H^1(\Omega)$. Pour cela, on remarque que, pour tout $(v, w) \in (H_0^1(\Omega))^2$, on a

$$\begin{aligned} J(v) + J(w) - 2J\left(\frac{v+w}{2}\right) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla v|^2 + |\nabla w|^2 - 2 \left| \nabla \left(\frac{v+w}{2} \right) \right|^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v-w)|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{2} (1 + C_{\Omega}^2)^{-1} \|v-w\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

avec l'inégalité de Poincaré. Par conséquent, en notant $C'_{\Omega} = \frac{1}{2}(1 + C_{\Omega}^2)^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} C'_{\Omega} \|u_n - u_p\|_{H^1}^2 &\leq J(u_n) + J(u_p) - 2J\left(\frac{u_n + u_p}{2}\right) \\ &\leq J(u_n) + J(u_p) - 2j \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_n$ est donc de Cauchy dans $H^1(\Omega)$ qui est complet. Donc il existe $u \in H^1(\Omega)$ tel que $u_n \rightarrow u$ dans $H^1(\Omega)$.

Or, $H_0^1(\Omega)$ est fermé dans $H^1(\Omega)$ (par définition, car c'est l'adhérence de l'ensemble des fonctions-test) donc $u \in H_0^1(\Omega)$. Par ailleurs, il est facile de voir que J est continue sur $H^1(\Omega)$, ce qui entraîne $J(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = j$. On conclut donc que $u = \min_{v \in H_0^1} J(v)$.

Il reste à montrer l'unicité du minimiseur. Soient v et w deux minimiseurs de J sur $H_0^1(\Omega)$. On a

$$C'_{\Omega} \|v - w\|_{H^1}^2 \leq J(v) + J(w) - 2J\left(\frac{v+w}{2}\right) = 2j - 2J\left(\frac{v+w}{2}\right) \leq 0,$$

donc $v = w$. □

En réalité, ce qui nous intéresse surtout ici c'est le point de vue différentiel.

Lemme 3.2. — *La fonctionnelle J est de classe \mathcal{C}^1 sur H^1 et sa différentielle est donnée par*

$$dJ_u(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Omega} f v.$$

Démonstration. —

$$J(u+v) - J(u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx$$

La continuité de J est évidente :

$$|J(u+v) - J(u)| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \frac{1}{2} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} = \mathcal{O}(\|v\|_{H^1}).$$

La différentiabilité est aussi évidente. En posant

$$L_u(v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

alors L_u est clairement continue sur H^1 et on a

$$|J(u+v) - J(u) - L_u(v)| \leq \frac{1}{2} \|v\|_{H^1}^2 = o(\|v\|_{H^1})$$

Enfin, le caractère \mathcal{C}^1 découle de $|L_u(v) - L_{\tilde{u}}(v)| \leq \|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2}$, qui entraîne

$$\|L_u - L_{\tilde{u}}\| \leq \|\nabla(u - \tilde{u})\|_{L^2}.$$

□

Corollaire 3.3. — *Le minimiseur u de J sur $H_0^1(\Omega)$ satisfait :*

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad (3.1)$$

ou encore

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{au sens des distributions,} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.2)$$

Démonstration. — L'équation (3.1) découle directement de $dJ_u = 0$, que l'on vérifie ainsi. Pour $t \in \mathbb{R}$ et pour $v \in H_0^1$, on a

$$dJ_u(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t}$$

avec $J(u + tv) \geq J(u)$, donc

$$\begin{cases} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \leq 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \geq 0 & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

ce qui donne, en passant à la limite, à la fois $dJ_u(v) \leq 0$ et $dJ_u(v) \geq 0$.

Prenons $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (3.1) (noter que $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} f v dx \\ &\Updownarrow \\ \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle &= \langle f, v \rangle \\ &\Updownarrow \\ \left\langle -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, v \right\rangle &= \langle f, v \rangle, \end{aligned}$$

d'où $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Les autres propriétés de (3.2) proviennent de $u \in H_0^1(\Omega)$. □

Bilan. A partir d'un problème de minimisation, on a résolu (c.a.d. trouvé une solution à) une EDP elliptique (l'équation de Laplace), au sens des distributions. Cela signifie que la solution n'étant que dans $H^1(\Omega)$ a priori, on ne peut définir son Laplacien que dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

On a aussi, ainsi, trouvé une formulation intermédiaire (3.1). Tout ceci nous fournit les idées directrices de ce chapitre. On va résoudre les **problèmes elliptiques** au sens des distributions (on parle de **solutions faibles**) en se ramenant non pas à un problème de minimisation (ce n'est pas toujours possible), mais à une formulation du type (3.1) appelée **formulation variationnelle**.

Remarque 3.4. — On a vu que J admet un unique minimiseur. On verra plus loin que (3.1) et (3.2) admettent une unique solution. A ce stade du développement, ceci n'est pas encore démontré.

3.2. Solutions faibles pour le problème de Dirichlet

3.2.1. L'équation de Laplace. — On s'intéresse à l'EDP suivante :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

Définition 3.5. — Une fonction u est dite solution faible de (3.3) si $u \in H_0^1(\Omega)$ et si $-\Delta u = f$ au sens des distributions.

Remarque 3.6. — A priori, pour cette définition, on n'a besoin que des hypothèses suivantes : Ω ouvert, et $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On va néanmoins supposer des hypothèses plus fortes, permettant d'utiliser la notion de traces pour interpréter la condition aux limites, et permettant aussi d'utiliser l'inégalité de Poincaré. Nous supposerons toujours Ω borné, de classe \mathcal{C}^1 .

Remarque 3.7. — Rappelons que le dual de $H_0^1(\Omega)$, appelé $H^{-1}(\Omega)$, a été identifié, lors du Théorème 2.24, à un sous-espace de distributions et que l'on a l'identification (2.6) dans ce théorème. Par conséquent, le Laplacien d'une fonction $H^1(\Omega)$ appartient à $H^{-1}(\Omega)$ et il est donc clair que nous ferons les hypothèses minimales sur f suivantes : $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Quelques petits calculs. Soit u une solution faible de (3.3) et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors on a successivement

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ \left\langle -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle &= \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle &= \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx &= \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \end{aligned}$$

Soit $v \in H_0^1$ et φ_n une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers v . En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{cases} u \in H_0^1 \\ \forall v \in H_0^1 \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \end{cases} \quad (3.4)$$

On passe ainsi de l'EDP (3.2) à ce problème intermédiaire. Le point intéressant est qu'on a en fait l'équivalence entre les deux problèmes.

Lemme 3.8. — Soit Ω borné, de classe \mathcal{C}^1 et $f \in H^{-1}(\Omega)$. Une fonction u est solution faible de (3.3) si, et seulement si, elle vérifie (3.4).

Définition 3.9. — Une **formulation variationnelle** est la donnée

- d'un espace de Hilbert V
- d'une forme bilinéaire continue $a(\cdot, \cdot)$ sur $V \times V$
- d'une forme linéaire continue $\ell(\cdot)$ sur V

et consiste à rechercher une solution du problème

$$\begin{cases} u \in V \\ \forall v \in V \quad a(u, v) = \ell(v). \end{cases} \quad (3.5)$$

Application ici. La formulation (3.4) est appelée *formulation variationnelle* du problème de Dirichlet pour le Laplacien (3.3). Elle rentre bien dans le cadre de la Définition 3.9, où l'on a : $V = H_0^1(\Omega)$, $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$ et $\ell(v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$. On vérifie sans difficulté la continuité de a : par Cauchy-Schwarz,

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

La continuité de ℓ est codée dans l'information $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Le point fort de cette approche repose sur la possibilité d'utiliser le théorème de Lax-Milgram :

Théorème 3.10 (Lax-Milgram). — *On se donne une formulation variationnelle selon la Définition 3.9. On suppose que la forme bilinéaire a est **coercive**, c'est à dire :*

$$\exists \alpha > 0 : \quad \forall u \in V, \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2.$$

Alors le problème (3.5) admet une unique solution u .

De plus, si a est symétrique, alors u est l'unique minimiseur de $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$ sur V .

Démonstration. — On applique tout d'abord par deux fois le théorème de représentation de Riesz. Pour tout $v \in V$ fixé, $w \mapsto a(v, w)$ est une forme linéaire continue sur V . Il existe donc un unique $A(v) \in V$ tel que $\forall w, a(v, w) = (A(v), w)$. De la bilinéarité de a , on déduit la linéarité de A . Et, en prenant $w = A(v)$, on a

$$\|A(v)\|^2 = a(v, A(v)) \leq M \|v\| \|A(v)\|,$$

d'où

$$\|A(v)\| \leq M \|v\|,$$

c'est-à-dire, A est continue. De même, il existe $u_0 \in V$ tel que $\forall w \in V, \ell(w) = (u_0, w)$.

Il s'agit alors de trouver u tel que : $\forall w, a(u, w) = \ell(w)$, ce qui se réécrit

$$A(u) = u_0.$$

On va utiliser le théorème du point fixe de Banach :

Soit X un espace de Banach et
 $T : X \times X$ strictement contractante,
alors T admet un unique point fixe.

Soit $T(v) = v - \lambda(A(v) - u_0)$ avec $\lambda > 0$ à fixer. Si T admet un point fixe alors ce point fixe vérifie le résultat attendu pour $u : A(u) = u_0$.

On cherche donc une valeur de λ telle que T soit strictement contractante. On calcule

$$\begin{aligned}\|T(v) - T(w)\|^2 &= \|v - w - \lambda A(v - w)\|^2 \\ &= \|v - w\|^2 - 2\lambda(A(v - w), v - w) + \lambda^2 \|A(v - w)\|^2 \\ &\leq \|v - w\|^2 - 2\lambda a(v - w, v - w) + \lambda^2 M^2 \|v - w\|^2 \\ &\leq (1 - 2\lambda\alpha + \lambda^2 M^2) \|v - w\|^2.\end{aligned}$$

Il suffit alors de trouver λ tel que $1 - 2\lambda\alpha + \lambda^2 M^2 < 1$, ce qui est vérifié dès lors que $\lambda < \frac{2\alpha}{M^2}$. Prenons par exemple $\lambda = \frac{\alpha}{M^2}$ et alors T est contractante.

Pour traiter le cas où a est symétrique, il suffit de reprendre point par point la démonstration du premier lemme du chapitre (en exercice). \square

Remarque 3.11. — Dans le théorème de Lax-Milgram, on obtient en plus une estimation *a priori* sur la solution. En effet, dans

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = \ell(v),$$

il suffit de prendre $v = u$ et on obtient $a(u, u) = \ell(u)$. Ainsi, en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire a ,

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) = \ell(u) \leq \|\ell\|_{V'} \|u\|$$

d'où $\|u\| \leq \frac{\|\ell\|_{V'}}{\alpha}$.

Théorème 3.12. — Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$, où Ω est un ouvert borné de classe \mathcal{C}^1 . Alors (3.3) admet une unique solution faible u . De plus, il existe une constante c , ne dépendant que de Ω , telle que

$$\|u\|_{H^1} \leq c \|f\|_{H^{-1}}.$$

Démonstration. — D'après le Lemme 3.8 (et les propriétés de continuité de a et f), il suffit de montrer que la formulation variationnelle (3.4). Pour appliquer le théorème de Lax-Milgram, il suffit de vérifier la coercivité de la forme bilinéaire. La coercivité de a se vérifie grâce à l'inégalité de Poincaré :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u dx = \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq C_{\Omega} \|u\|_{H^1}^2.$$

\square

3.2.2. Problèmes elliptiques d'ordre 2. — On s'intéresse maintenant au problème elliptique d'ordre 2 général introduit au début du cours :

$$-\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0(x)u = f(x) \quad \text{sur } \Omega, \quad (3.6)$$

avec condition aux limite de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3.7)$$

Les hypothèses sont les suivantes.

- Sur le domaine : Ω borné, de classe \mathcal{C}^1 .
- Sur les données : a_{ij} , b_i , a_0 de classe $L^\infty(\Omega)$; $f \in H^{-1}(\Omega)$.

– Sur l'opérateur : uniforme ellipticité, il existe une constante $c_0 > 0$ telle que

$$\text{Pour presque tout } x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2.$$

Lemme 3.13. — *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $u \in H^1(\Omega)$ satisfait (3.6) au sens des distributions et (3.7) au sens des traces.
- (ii) u satisfait la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1} \end{cases} \quad (3.8)$$

où

$$a(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} a_0(x) u v dx.$$

Une fonction u satisfaisant ces propriétés est dite solution faible de (3.6), (3.7).

Démonstration. — Simple généralisation de ce qui a été fait pour le Laplacien, laissée en exercice. \square

Il convient désormais de s'intéresser à l'utilisation du théorème de Lax-Milgram, et plus précisément à la coercivité de a . On a

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx + \int_{\Omega} a_0(x) u^2 dx \\ &\stackrel{\text{unif. ellipticité}}{\geq} c_0 \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx + \int_{\Omega} a_0(x) u^2 dx \\ &\stackrel{\text{Inég. Poincaré}}{\geq} \frac{c_0}{1 + C_{\Omega}^2} \|u\|_{H^1}^2 + 2 \text{ termes d'ordres inférieurs.} \end{aligned}$$

Il y a donc deux situations :

- (i) Les cas favorables où les termes d'ordres inférieurs sont positifs :
 - Par exemple, si pour tout i , on a $b_i = 0$ p.p. et $a_0 \geq 0$ p.p. sur Ω .
 - Ou encore, plus généralement, si $\operatorname{div} b_i \leq 0$ au sens des distributions et $a_0(x) \geq 0$ p.p. sur Ω . En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} b_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi dx = \sum_{i=1}^N \left\langle b_i, \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\varphi^2}{2} \right) \right\rangle = - \left\langle \operatorname{div} b, \frac{\varphi^2}{2} \right\rangle \geq 0,$$

cette propriété de signe reste donc vraie, par densité, pour $\sum_{i=1}^N \int_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx$, avec $u \in H_0^1(\Omega)$.

- (ii) Les cas défavorables où les termes d'ordres inférieurs n'ont pas de signe *a priori*. Dans ce cas, le problème (3.6), (3.7) peut avoir plusieurs solutions faibles ou n'en avoir aucune. Voici deux contre-exemples, en dimension un :

– Pour le problème

$$\begin{cases} -u'' - \pi^2 u = 0 & \text{sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

l'ensemble des solutions est $\{\alpha \sin \pi x, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

– Pour le problème

$$\begin{cases} -u'' - \pi^2 u = 1 & \text{sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

il n'y a pas de solution faible. En effet, une solution u vérifierait la formulation variationnelle, donc, pour tout $v \in H_0^1(0, 1)$,

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - \pi^2 \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx.$$

Prenons $v(x) = \sin(\pi x)$. En remarquant que $v \in H^2(0, 1)$, la formule de Green donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(x)v'(x)dx &= - \int_0^1 u(x)v''(x)dx + u(1)v'(1) - u(0)v'(0) \\ &= \pi^2 \int_0^1 u(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

Donc, on devrait avoir $\int_0^1 \sin(\pi x)dx = 0$, alors que cette intégrale vaut $2/\pi$.

Théorème 3.14. — *Sous les hypothèses ci-dessus :*

- (i) Si, de plus, $\operatorname{div} b_i \leq 0$ au sens des distributions et $a_0 \geq 0$ p.p. sur Ω , alors (3.6), (3.7) admet une unique solution faible.
- (ii) Sinon, il existe $\varepsilon_0 \geq 0$ tel que, dès que $\|b\|_{L^\infty} + \|a_0\|_{L^\infty} \leq \varepsilon_0$, le problème (3.6), (3.7) admet une unique solution faible.

Démonstration. — Avec l'analyse précédente, il suffit dans chaque cas de montrer la coercivité de la forme bilinéaire. Dans le cas (i), on a déjà vu que, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$a(u, u) \geq c_1 \|u\|_{H^1}^2 \quad \text{avec} \quad c_1 = \frac{c_0}{1 + C_\Omega^2}.$$

Dans le cas (ii), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq c_1 \|u\|_{H^1}^2 + \sum_i \int_\Omega b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u + \int_\Omega a_0 u^2 \\ &\geq c_1 \|u\|_{H^1}^2 - \|b\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|u\|_{L^2} - \|a_0\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2}^2 \\ &\geq (c_1 - 2\varepsilon_0) \|u\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

donc $\varepsilon_0 = \frac{c_1}{4}$ convient. □

3.3. Régularité H^2

Dans cette section nous nous intéressons à la régularité de la solution selon la régularité de la donnée f . Soit u solution de (3.3) ou de (3.6), (3.7).

- Si $f \in H^{-1}(\Omega)$ mais $f \notin L^2(\Omega)$, on ne peut pas espérer $u \in H^2(\Omega)$.
- En revanche, si $f \in L^2(\Omega)$, en dimension 1, on récupère directement $u \in H^2(\Omega)$. En effet : $u'' = \Delta u \in L^2(\Omega)$.
- En dimension supérieure, le résultat reste vrai mais plus compliqué à établir. En effet, l'information disponible est seulement qu'une combinaison linéaire de certaines dérivées secondes est dans L^2 , et on veut en déduire que toutes les dérivées secondes sont dans L^2 . C'est le caractère elliptique du problème qui effectue ce transfert de régularité.

Théorème 3.15 (Régularité H^2 pour le Laplacien). — Soit u solution faible de (3.3) et Ω borné, de classe C^2 . Si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u \in H^2(\Omega)$, et il existe une constante $c > 0$, ne dépendant que de Ω , telle que $\|u\|_{H^2} \leq c \|f\|_{L^2}$.

Démonstration. — Supposons avoir montré que $u \in H^2(\Omega)$. Alors l'existence de la constante c provient du théorème de l'application ouverte de Banach. En effet, l'application

$$\begin{aligned} H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) &\longmapsto L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto -\Delta u \end{aligned}$$

est un opérateur linéaire continu et bijectif, son inverse l'est donc aussi. Il reste à montrer la régularité. Cela se fait en deux étapes :

(i) Régularité intérieure : $\forall \chi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad u\chi \in H^2(\Omega)$.

(ii) Régularité au voisinage du bord : $u \in H^2(\Omega)$.

Mais avant de traiter le cas Ω régulier quelconque, on va traiter deux cas particuliers qui s'avéreront utiles.

Étape 1 : $\Omega = \mathbb{R}^N$.

On cherche à montrer que

$$(u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ et } \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)) \implies u \in H^2(\mathbb{R}^N).$$

Commençons par une preuve non rigoureuse mais intuitive. Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $-\Delta u = f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Alors on a

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\mathbb{R}^N} f v dx.$$

Imaginons que l'on puisse prendre $v = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, pour $i \in \{1, \dots, N\}$. Il vient alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx.$$

Par intégration par partie, on obtient la relation

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \leq \|f\|_{L^2} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2}. \quad (3.9)$$

D'où

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

En revenant à l'étape intermédiaire (3.9), il vient donc, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\sum_j \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2}^2$$

et $u \in H^2(\Omega)$. Cependant, cette démonstration n'est pas rigoureuse, car $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ n'est a priori pas une fonction-test admissible. Pour permettre un tel raisonnement, il nous faut passer par des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^N)$ qui approcheront $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, les quotients différentiels.

Lemme 3.16. — Soit $\Omega = \mathbb{R}^N$ ou $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ et e_i le i -ème vecteur de la base canonique. Si $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, on suppose de plus que $i \leq N - 1$. Pour tout $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$\tau_h u(x) = u(x + h e_i) \quad p.p., \text{ et } D_h u = \frac{\tau_h u - u}{h}.$$

(i) Si $u \in H^1(\Omega)$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\|D_h u\|_{L^2(V)} \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Soit $u \in L^2(\Omega)$. Supposons qu'il existe C_1 indépendante de h telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad \|D_h u\|_{L^2} \leq C_1.$$

Alors on a $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ et

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2} \leq C_1. \quad (3.10)$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que l'on a l'intégration par parties discrète, pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} u D_{-h} v \, dx = - \int_{\Omega} D_h u v \, dx.$$

Preuve de (i). On raisonne par densité et on prouve l'inégalité pour $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. On a alors, pour $h \neq 0$,

$$D_h u(x) = \frac{u(x + h e_i) - u(x)}{h} = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t h e_i) dt,$$

donc, par Cauchy-Schwarz et Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D_h u(x))^2 dx &\leq \int_{\Omega} \left(\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t h e_i) dt \right)^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t h e_i) \right)^2 dt dx \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x + t h e_i) \right)^2 dx dt = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Preuve de (ii). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Par intégration par parties discrète, on a

$$\left| \int_{\Omega} u(x) D_h \varphi(x) dx \right| = \left| \int_{\Omega} D_{-h} u(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|D_{-h} u\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq C_1 \|\varphi\|_{L^2}.$$

En passant à la limite $h \rightarrow 0$, cela donne donc, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\left| \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle \right| = \left| \left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \right| \leq C_1 \|\varphi\|_{L^2}.$$

La distribution $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ se prolonge donc par continuité en une forme linéaire continue sur L^2 et par le théorème de représentation de Riesz sur L^2 , $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ s'identifie elle-même à une fonction de L^2 (voir la Remarque 2.7) et on a l'estimation (3.10). \square

On effectue maintenant la preuve rigoureuse de la régularité H^2 , en utilisant la technique des translations de Nirenberg. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, on prend alors $v = D_{-h} D_h u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, (combinaison linéaire de fonctions appartenant à $H^1(\mathbb{R}^N)$). On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla (D_{-h} D_h u) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f D_{-h} D_h u \, dx$$

et, par intégration par partie discrète (noter que les opérateurs ∇ et D_h commutent),

$$\|D_h \nabla u\|_{L^2}^2 = \|\nabla D_h u\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(D_h u) \cdot \nabla(D_h u) dx \leq \|f\|_{L^2} \|D_{-h} D_h u\|_{L^2}$$

En utilisant le Lemme 3.16 (i), il vient alors

$$\|D_h \nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2} \|\nabla D_h u\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \|D_h \nabla u\|_{L^2}$$

d'où $\|D_h \nabla u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$ et, en utilisant le Lemme 3.16 (ii), on obtient donc que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla u) \in L^2(\Omega)$. Il s'en suit que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Étape 2 : $\Omega = \mathbb{R}_+^N$.

On peut reproduire la preuve ci-dessus, à condition de ne prendre que des translations tangentielles, donc $i \in \{1, \dots, N-1\}$. On obtient donc

$$\forall i \in \{1, \dots, N-1\}, \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega).$$

Pour traiter la dernière dérivée seconde, on utilise simplement l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = \Delta u - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -f - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \in L^2(\Omega).$$

Étape 3 : Ω borné, de classe \mathcal{C}^2 .

On ne va faire qu'esquisser cette preuve, pour la détails on pourra se référer à [2]. On utilise des partitions de l'unité et on écrit $u = \sum_{i=0}^n \theta_i u$. Comme $\theta_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$-\Delta(\theta_0 u) = \theta_0 f - 2\nabla \theta_0 \cdot \nabla u - u \Delta \theta_0 \in L^2(\mathbb{R}^N),$$

en identifiant $\theta_0 u$ et son prolongement par zéro sur \mathbb{R}^N . Donc l'Étape 1 nous donne que $\theta_0 u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Le traitement des autres termes $\theta_i u$, $1 \leq i \leq n$ est plus délicat. Il faut utiliser une application $\phi_i : Q \rightarrow O_i$ bijective telle que

$$\phi_i \in \mathcal{C}^2(\overline{Q}), \quad \phi_i^{-1} \in \mathcal{C}^2(\overline{O_i}), \quad \phi_i(Q_+) = O_i \cap \Omega, \quad \phi_i(Q_0) = O_i \cap \partial\Omega$$

et considérer la fonction $v_i = (\theta_i u) \circ \phi_i$. Ensuite, l'équation de Laplace $-\Delta(\theta_i u) = f_i \in L^2(O_i)$ se transporte sur Q_+ en une équation elliptique du second ordre. Il faut donc adapter la technique des translations de Nirenberg dans le cas \mathbb{R}_+^N à cette équation elliptique, ce qui est possible dès lors que les coefficients de cette équation sont dans \mathcal{C}^1 (on fait une intégration par parties dans la preuve...). On montre ainsi que $v_i \in H^2(Q_+)$, puis on revient à $\theta_i u$ grâce à ϕ_i^{-1} . \square

Quelques généralisations.

– Opérateur uniformément elliptique d'ordre 2. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifie

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad (3.11)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$ et $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, alors $u \in H^2(\Omega)$.

- Régularité supérieure : si Ω est de classe \mathcal{C}^{k+1} et si les fonctions a_{ij} sont de classe $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, alors la solution de (3.11) satisfait

$$f \in H^{k-1}(\Omega) \implies u \in H^{k+1}(\Omega).$$

- Espaces L^p : si Ω est de classe \mathcal{C}^2 et si les fonctions a_{ij} sont de classe $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, alors

$$f \in L^p(\Omega), \quad 1 < p < +\infty \implies u \in W^{2,p}(\Omega)$$

Le résultat est faux pour $p = 1$ ou $p = +\infty$.

3.4. Autres problèmes aux limites

3.4.1. Condition de Dirichlet non homogène. — Dans cette section, on garde un opérateur uniformément elliptique :

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u$$

en considérant, pour simplifier un peu, que nous n'avons pas de terme d'ordre 1, et que l'on a $a_0 \geq 0$ presque partout. Les hypothèses sont toujours :

- Domaine Ω borné, de classe \mathcal{C}^1 .
- Données a_{ij}, a_0 de classe $L^\infty(\Omega)$; $f \in H^{-1}(\Omega)$.
- Opérateur \mathcal{L} uniformément elliptique.

Définition 3.17. — Soit Ω un ouvert de classe \mathcal{C}^1 , de frontière bornée. On note

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{v \in L^2(\partial\Omega) : \exists V \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v = \gamma_0 V\}$$

l'image de $H^1(\Omega)$ par l'application trace γ_0 . Muni de la norme

$$\|v\| = \inf\{\|V\|_{H^1} \mid V \in H^1(\Omega) \text{ est tel que } \gamma_0 V = v\},$$

c'est un espace de Banach.

Théorème 3.18. — Sous les hypothèses ci-dessus, on suppose de plus que $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors il existe une unique solution faible $u \in H^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & (\Omega) \\ u = g & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (3.12)$$

Démonstration. — On définit une solution faible de (3.12) par : $u \in H^1(\Omega)$ et

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{au sens des distributions} \\ \gamma_0 u = g. \end{cases}$$

La propriété d'unicité de la solution découle du théorème d'unicité de la solution du problème de Dirichlet homogène. Pour ce qui est de l'existence, on se ramène au problème de Dirichlet homogène en introduisant une fonction G appelée relèvement de g : Soit $G \in H^1(\Omega)$ tel que $\gamma_0 G = g$. La fonction G n'est bien entendu pas unique et existe bien par définition de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. De plus, comme on a la caractérisation

$$H^{-1}(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \exists f_0, f_1, \dots, f_N \in L^2(\Omega), v = f_0 + \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right\},$$

il est clair que, comme les coefficients a_{ij} et a_0 sont dans L^∞ , on a $\mathcal{L}G \in H^{-1}(\Omega)$. En posant alors $\tilde{u} = u - G$, on aura que u est solution faible de (3.12) si, et seulement si

$$\begin{cases} \mathcal{L}\tilde{u} = f - \mathcal{L}G & \text{au sens des distributions} \\ \gamma_0\tilde{u} = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire si \tilde{u} est solution faible d'un problème elliptique avec conditions de Dirichlet homogène. Le Théorème 3.14 (i) nous dit donc qu'il existe un unique tel \tilde{u} . \square

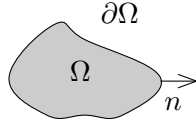
Remarque 3.19. — Supposons que Ω est de classe \mathcal{C}^2 et que $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Si de plus $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{3/2}(\partial\Omega) = \{\gamma_0 G, G \in H^2(\Omega)\}$, alors on peut choisir un relèvement de g tel que $\mathcal{L}G \in L^2(\Omega)$ et on aura donc $\tilde{u} \in H^2(\Omega)$ par le théorème de régularité elliptique, d'où l'on déduit que $u \in H^2(\Omega)$.

3.4.2. Le problème de Neumann pour le Laplacien. — On souhaite maintenant imposer des conditions aux limites sur les dérivées de u (comme il est naturel de le faire en dimension 1). Quelques remarques préliminaires s'imposent.

Remarque 3.20. — Remplacer “ $u = 0$ sur $\partial\Omega$ ” par “ $\nabla u = 0$ sur $\partial\Omega$ ” n'est pas une idée convenable en dimension supérieure à 1. En effet, remplacer une condition scalaire par une condition vectorielle revient à imposer N conditions aux limites au lieu d'une seule. La condition la plus naturelle issue des problèmes modélisés porte sur la dérivée normale de u . Pour $x \in \partial\Omega$, la dérivée normale à u au point x est

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \nabla u \cdot n(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i(x),$$

où $n(x)$ désigne le vecteur normal à $\partial\Omega$ au point x , unitaire et dirigé vers l'extérieur. Remarquons que $n(x)$ est une fonction vectorielle continue sur le bord, de module 1. Ainsi, si $\nabla_x u \in L^2(\partial\Omega)$, on aura $\frac{\partial u}{\partial n}$ comme produit d'une fonction L^2 par une fonction L^∞ .



La condition aux limites dite de Neumann homogène s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et correspond physiquement à un “flux nul de u à travers $\partial\Omega$ ”.

Remarque 3.21. — Malheureusement, lorsque $u \in H^1(\Omega)$, sa dérivée normale sur $\partial\Omega$ n'a pas nécessairement de sens alors que c'est bien le cas pour $u \in H^2(\Omega)$ selon la théorie des traces. Il ne sera donc pas possible de définir une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & (\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & (\partial\Omega) \end{cases} \quad (3.13)$$

avec $u \in H^1(\Omega)$, où la première équation $-\Delta u = f$ serait prise au sens des distributions et où $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ serait prise au sens des traces.

L'idée consistant à changer d'espace fonctionnel et à remplacer $H^1(\Omega)$ par $H^2(\Omega)$ nous amènerait à considérer un espace trop restrictif et ne fonctionne pas. On y reviendra plus loin.

Solution : on va supposer d'abord $u \in H^2(\Omega)$, définir une formulation variationnelle en élargissant ensuite l'espace à $H^1(\Omega)$. La solution faible du problème sera définie comme étant la solution de la formulation variationnelle.

Remarque 3.22. — Il est impossible que le problème (3.13) admette une unique solution. En effet, si u est solution alors $u+c$ est aussi solution, quelle que soit la constante $c \in \mathbb{R}$. On va alors s'intéresser au problème suivant, qui aura une meilleure propriété de coercivité :

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f & (\Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 & (\partial\Omega). \end{cases} \quad (3.14)$$

Le cas sans terme d'ordre 0 est abordé en TD.

Quelques petits calculs. Soit u solution du problème (3.14), où l'on suppose $u \in H^2(\Omega)$, ce qui entraîne donc que l'on doit s'être donné une fonction $f \in L^2(\Omega)$. On multiplie la première équation par une fonction-test $v \in H^1(\Omega)$, et l'on utilise la formule de Green suivante. Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} -\Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma$$

Ainsi, si u est solution du problème, puisque $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, on obtient

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx$$

A ce stade, on cherche $u \in H^2(\Omega)$ et la fonction-test se trouve dans $H^1(\Omega)$. Or, il nous est indispensable que l'espace de la solution et celui des fonctions de base soient identiques, en vue de l'utilisation du théorème Lax-Milgram, et aussi en vue de la discrétisation qui suivra. On peut alors envisager de prendre la fonction test dans $H^2(\Omega)$. Mais on imagine bien que cela risque d'être inadapté dans la mesure où le problème initial amenait naturellement à considérer des fonctions-tests H^1 seulement. Regardons ce qu'il se passe effectivement dans le cas d'un tel choix. Chercher $u \in H^2(\Omega)$ tel que

$$\forall v \in H^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

L'existence et l'unicité d'une solution pour ce problème seraient liées à la coercivité de la forme bilinéaire impliquée. Et cela reviendrait à dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que : $\forall u \in H^2(\Omega), \|u\|_{H^1}^2 \geq \alpha \|u\|_{H^2}^2$. Cela se traduirait par une équivalence des normes $\|\cdot\|_{H^1}$ et $\|\cdot\|_{H^2}$ sur $H^2(\Omega)$, ce qui induirait $H^2(\Omega) = H^1(\Omega)$. En effet, $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ et alors aussi dans $(H^2(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ puisque $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $(H^2(\Omega), \|\cdot\|_{H^2})$ et que l'on considère qu'il y a équivalence des deux normes dans $H^2(\Omega)$. De fait, $H^1(\Omega) = H^2(\Omega)$. On remarquera la différence avec le cas (H_0^1, H^1) .

On est en fait dans une impasse avec un tel choix : l'espace qui convient aux problèmes elliptiques d'ordre 2 est effectivement $H^1(\Omega)$.

Définition 3.23 (Solutions fortes, solutions faibles). —

Une fonction $u \in H^2(\Omega)$ qui vérifie $-\Delta u + u = f$ au sens $L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sur $\partial\Omega$ au sens des traces est dite **solution forte** de (3.14). La formulation variationnelle de (3.14) s'écrit

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \end{cases} \quad (3.15)$$

Une fonction u satisfaisant (3.15) est dite **solution faible** de (3.14).

Théorème 3.24. — Soit Ω borné, de classe \mathcal{C}^1 et $f \in L^2(\Omega)$. Alors (3.14) admet une unique solution faible u . De plus, si Ω est de classe \mathcal{C}^2 , alors cette solution faible est en fait l'unique solution forte du problème.

Démonstration. — Pour la première partie du théorème, on utilise le théorème de Lax-Milgram, avec l'espace de Hilbert $V = H^1(\Omega)$, la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx$$

qui est le produit scalaire sur $H^1(\Omega)$, donc clairement continue et coercive, et la forme linéaire continue

$$v \mapsto \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Démontrons maintenant la seconde partie du théorème. Tout d'abord, les calculs ci-dessus montrent que toute solution forte du problème est solution faible. Remontons les calculs dans l'autre sens. Soit u satisfaisant (3.15). En prenant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient facilement $-\Delta u + u = f$ au sens des distributions. Si l'on suppose de plus que $u \in H^2(\Omega)$, alors en appliquant la formule de Green, on obtient, quel que soit $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} (u - f) v \, dx = 0.$$

Si l'on sait que $H^{1/2}(\Omega)$, l'ensemble des traces des fonctions $H^1(\Omega)$, est dense dans $L^2(\Omega)$, alors on peut en déduire que $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en tant que fonction $L^2(\partial\Omega)$: u est solution forte du problème.

Ce résultat de densité se montre de la façon suivante. Tout d'abord, remarquons que le cas $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, dont le bord est $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ est très simple. On sait déjà que l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^{N-1})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^{N-1})$. Comme il est clair que toute fonction $\varphi(x') \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^{N-1})$ est trace d'une fonction $\Phi \in H^1(\mathbb{R}_+^N)$ (prendre $\Phi(x', x_N) = \varphi(x')\chi(x_N)$ où χ est une fonction $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $\chi(0) = 1$), on en conclut que $H^{1/2}(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$. On en déduit le même résultat dans le cas Ω borné de classe \mathcal{C}^1 en utilisant l'argument habituel de partitions de l'unités pour se ramener à \mathbb{R}_+^N .

Il reste à montrer que toute solution faible est dans $H^2(\Omega)$. En fait, un examen de la preuve de la régularité H^2 pour le problème de Dirichlet (donc pour la formulation variationnelle (3.15) avec $H^1(\Omega)$) montre que l'on peut remplacer partout $H_0^1(\Omega)$ par $H^1(\Omega)$ dans cette preuve (les seules intégrations par parties sont tangentielles au bord). Sous réserve donc que Ω est de classe \mathcal{C}^2 (ce qui était utilisé dans cette démonstration), et comme on a pris soin dès le début de choisir $f \in L^2(\Omega)$, on en déduit donc par cet argument que $u \in H^2(\Omega)$, donc que la solution faible est l'unique solution forte. \square

Conclusion. La démarche de résolution du problème de Neumann homogène est donc la suivante.

- On définit la formulation variationnelle sur $H^1(\Omega)$ en supposant la solution $u \in H^2(\Omega)$ (donc en partant d’une solution forte) pour permettre les calculs.
- Sur $H^1(\Omega)$, la formulation variationnelle est bien posée. Toute la difficulté vient de son interprétation.
- La solution faible u satisfait l’équation au sens des distributions et, dès qu’elle est dans $H^2(\Omega)$, elle satisfait la condition aux limites au sens des traces.
- En fait, dès que Ω est assez régulier, on dispose d’un théorème de régularité H^2 qui nous dit que la solution est une solution forte. La boucle est bouclée...

Remarque 3.25. — Considérons les deux problèmes variationnels :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \end{cases} \quad (3.16)$$

et

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx \end{cases} \quad (3.17)$$

Dans le premier cas, on a vu que u est la solution faible du problème de Dirichlet, tandis que dans le deuxième cas il s’agit de la solution du problème de Neumann.

- La condition de Dirichlet est présente dans la définition de l’espace fonctionnel $H_0^1(\Omega)$: On dit que c’est une **condition essentielle**.
- La condition de Neumann est présente implicitement dans la formulation variationnelle. On dit que c’est une **condition naturelle**.

3.4.3. Le problème de Neumann pour \mathcal{L} elliptique. — On s’intéresse ici à nouveau à un opérateur de la forme

$$\mathcal{L}u = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0 u.$$

On ébauche seulement la théorie. La question principale que l’on veut aborder ici est : quelle condition naturelle est associée à la formulation variationnelle suivante ?

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \forall v \in H^1(\Omega) \quad a(u, v) = \ell(v) \end{cases} \quad (3.18)$$

où l’on a repris les formes bilinéaires et linéaires suivante :

$$\begin{cases} a(u, v) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} a_0 u v \, dx, \\ \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, dx. \end{cases}$$

Remarque 3.26. — S’il existe $\alpha > 0$ tel que $a_0 \geq \alpha$ presque partout, alors le problème (3.18) est bien posé.

Une fonction satisfaisant (3.18) est solution faible d’un problème restant à préciser. Cherchons le problème aux dérivées partielles associé à (3.18). En considérant $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

dans (3.18), on établit que $\mathcal{L}u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Considérons maintenant $v \in H^1(\Omega)$ et $u \in H^2(\Omega)$. Alors, en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j v d\sigma = 0$$

donc la condition aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial n_a} := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j = 0.$$

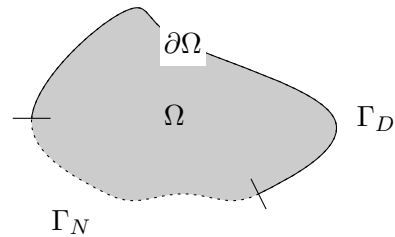
Sous la condition que Ω est de classe \mathcal{C}^2 et si $f \in L^2(\Omega)$, alors on a un résultat de régularité H^2 pour u , ce qui donne un sens à cette condition au bord. On dit que $\frac{\partial u}{\partial n_a}$ est la dérivée conormale associée à l'opérateur $-\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$.

3.4.4. Conclusion, démarche générale. — Il existe de nombreuses conditions aux limites possibles, que nous n'étudierons pas dans ce cours. Voici quelques exemples :

- Condition de Neumann non homogène : $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur $\partial\Omega$. La formule de Green et la prise en compte de la condition aux limites engendrent la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\partial\Omega} g v d\sigma.$$

- Condition mixte Dirichlet-Neumann. Si on décompose $\partial\Omega = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, alors on pose

$$\begin{cases} u = g_1 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$


The diagram shows a shaded, irregularly shaped domain Ω . The boundary of Ω is labeled $\partial\Omega$. The boundary is divided into two parts: Γ_D (Dirichlet boundary) and Γ_N (Neumann boundary). Γ_D is the part of the boundary that is more curved and pointed, while Γ_N is the part that is more straight and concave. The domain Ω is shaded in light gray.

- Condition de Fourier-Robin : $\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0$ (étudiée en TD).
- Condition oblique : $\frac{\partial u}{\partial n} + \beta \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$ où $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ est une dérivée tangentielle au bord.
- etc ...

Dans tous les cas, on applique la même démarche :

- On commence par établir la **formulation variationnelle** du problème. On suppose $u \in H^2(\Omega)$, on multiplie l'équation par $v \in H^1(\Omega)$, on applique la formule de Green et, en utilisant les conditions aux limites, on obtient un espace V (en général inclus dans $H^1(\Omega)$), une forme bilinéaire a continue sur V , une forme linéaire ℓ continue sur V , ...
- On définit une **solution faible** du problème comme solution de la formulation variationnelle, dont on détermine, si possible, l'existence et l'unicité par le théorème de Lax-Milgram.

- On cherche ensuite à revenir au problème initial. Souvent l'équation elliptique est vraie au sens des distributions mais les conditions aux limites ne sont obtenues que *formellement*, c'est-à-dire sous réserve d'une régularité H^2 de la solution u du problème variationnel.
- Parfois, on a un théorème de régularité H^2 qui permet de montrer que la solution faible est solution forte, mais il peut être difficile à obtenir (ou faux). Génériquement, une **solution forte** est telle que tous les termes de l'EDP sont définis presque partout, et telle que la condition de bord est définie au sens des traces.

3.5. Approximation variationnelle, introduction à la méthode des éléments finis

3.5.1. Approximation interne d'un problème variationnel. — Soit (V, a, ℓ) une formulation variationnelle telle que les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont vérifiées. Alors, il existe une unique solution u au problème :

$$\begin{cases} u \in V \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = \ell(v). \end{cases} \quad (FV)$$

Soit V_h un sous-espace de dimension finie de V . L'approximation interne de (FV) sur V_h consiste à considérer :

$$\begin{cases} u_h \in V_h \\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h). \end{cases} \quad (FV_h)$$

Lemme 3.27. — *Si a est continue et coercive sur V et si ℓ est continue, alors (FV) et (FV_h) admettent chacune une unique solution. De plus, (FV_h) équivaut à la résolution d'un système linéaire $A_h U_h = B_h$ où A_h est inversible.*

Démonstration. — Le résultat d'existence et unicité se montre directement par le théorème de Lax-Milgram.

Pour écrire l'équivalence avec le système linéaire, on introduit une base $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ de V_h . On écrit, $u_h = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j$, on exploite la linéarité de (FV_h) et on écrit la relation de (FV_h) pour la base de V_h . On obtient ainsi le système linéaire souhaité, avec

$$(A_h)_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad (U_h)_i = u_i, \quad (B_h)_i = \ell(\varphi_i).$$

De la coercivité de a , on déduit le caractère défini-positif de A_h . □

Il est par suite essentiel de comparer les solutions u et u_h de (FV) et (FV_h) . Dans la pratique, la construction de l'espace V_h est basée sur un procédé de discrétisation du domaine Ω . Et l'indice h correspond à un paramètre mesurant la finesse de cette discrétisation. Il est alors naturel de s'intéresser à la convergence de u_h vers u ou de V_h vers V lorsque h tend vers 0.

Lemme 3.28 (Lemme de Céa). — *On suppose les hypothèses du lemme précédent satisfaites. Alors on a*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$$

où M est la constante de continuité de a et α sa constante de coercivité.

Démonstration. — Soit $w_h \in V_h \subset V$, alors

$$a(u, w_h) = \ell(w_h) = a(u_h, w_h).$$

Ainsi, $\forall w_h \in V_h, \quad a(u - u_h, w_h) = 0$.

Et donc, pour tout $v_h \in V_h$, on a

$$\alpha \|u - u_h\|_V^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\|_V \|u - v_h\|_V$$

car $w_h = u_h - v_h \in V_h$. □

Conclusion :

Pour approcher le problème (FV) , il s'agit alors de trouver un sous-espace V_h qui permette de :

- rendre petite la quantité $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$.

- obtenir facilement une base de V_h et calculer aisément A_h et B_h .

3.5.2. La méthode des éléments finis. — On considère maintenant une formulation variationnelle (V, a, ℓ) associée à un problème elliptique avec conditions aux limites, posé sur un domaine Ω . On va construire un sous-espace V_h de dimension finie de l'espace $V \subset H^1(\Omega)$.

Ce travail s'effectue en trois étapes :

- Construction d'un maillage, une approximation/discrétisation de Ω .
- Construction d'une famille libre de fonctions définies sur les éléments de la discrétisation.
- Considération de l'espace vectoriel engendré par cette famille libre de fonctions.

Pour commencer, on introduit donc une **discrétisation** du domaine Ω : on considère un **maillage** de Ω . On appelle maillage, une famille \mathcal{T}_h d'éléments T simples (segments en 1D ; triangles ou quadrangles en 2D ; tétraèdres, hexaèdres, prismes en 3D ; ...) vérifiant les propriétés suivantes :

$$\Omega_h \stackrel{\text{notation}}{=} \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T \text{ est une approximation de } \Omega,$$

$$\forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h, \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{ou bien} & T_1 \cap T_2 = T_1 = T_2, \\ \text{ou bien} & T_1 \cap T_2 = \emptyset, \\ \text{ou bien} & T_1 \cap T_2 = \text{un sommet commun}, \\ \text{ou bien} & T_1 \cap T_2 = \text{une arête commune si dimension} \geq 2, \\ \text{ou bien} & T_1 \cap T_2 = \text{une face commune si dimension} \geq 3. \end{array} \right.$$

Le paramètre h est généralement défini comme égal à $\max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$. Ce paramètre caractérise la **finesse** du maillage. Plus h est petit, plus Ω_h est proche de Ω .

Plutôt que de construire un espace V_h et d'en chercher une base, on construit une famille libre de fonctions dont on considèrera l'espace qu'elles engendrent. On peut effectivement construire des fonctions polynomiales (donc simples à manipuler), et à supports localisés à quelques éléments du maillage \mathcal{T}_h . De telles fonctions sont directement définies à partir des éléments T de \mathcal{T}_h . L'aspect localisé des supports engendrera une matrice A_h creuse facilitant la résolution numérique.

Le choix le plus simple pour de telles fonctions consisterait à prendre des fonctions constantes par morceaux. Une fonction de base φ_i de cet espace vaudrait 1 sur un élément T_i de \mathcal{T}_h et vaudrait 0 sur tout autre élément de \mathcal{T}_h . Ce choix simple ne permet cependant pas de résoudre tout problème variationnel issu d'une EDP elliptique et est généralement insuffisant pour les EDP elliptiques d'ordre 2.

Par la suite, nous regardons en détail le cas des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_1 en dimension 1. Considérons le problème

$$\begin{aligned} -u'' + a_0 u &= f & \Omega =]0, 1[\\ u(0) &= 0, & u(1) = 0. \end{aligned}$$

où $a_0 \in L^\infty(0, 1)$, $a_0 \geq 0$ presque partout sur $]0, 1[$ et $f \in H^{-1}(0, 1)$.

On sait que ce problème est bien posé et admet une unique solution faible satisfaisant la formulation variationnelle (FV) suivante :

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(0,1), \\ a(u,v) &= \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 a_0 uv dx, \\ \ell(v) &= \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}. \end{aligned}$$

Introduisons un maillage (une subdivision) uniforme de $[0,1]$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{1}{N+1}$ et $x_j = jh$ pour $j = 0, \dots, N+1$. Notons enfin T_j^+ l'élément $[x_j, x_{j+1}]$, et T_j^- l'élément $[x_{j-1}, x_j]$, pour $j = 0, \dots, N+1$ avec la convention $x_{-1} = -h$ et $x_{N+2} = (N+2)h$.

Il s'agit ensuite de définir l'espace V_h . Pour cela, considérons l'espace

$$W_h = \{v \in C([0,1]) : v|_{T_j} \in \mathbb{P}_1 \text{ pour } j = 0, \dots, N\}$$

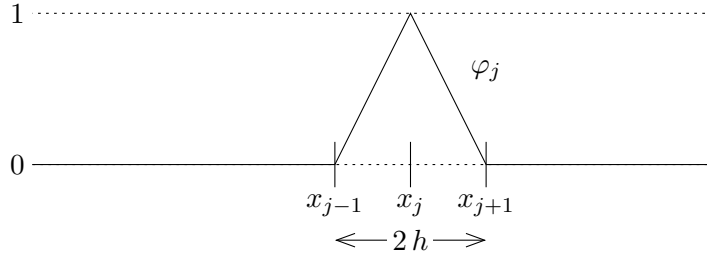
Ensuite, on pose $V_h = V \cap W_h = H_0^1 \cap W_h = \{v \in W_h : v(0) = v(1) = 0\}$.

Lemme 3.29 (Base de W_h). — *L'espace W_h est un s.e.v. de dimension $N+2$ de $H_0^1(0,1)$ et V_h est un s.e.v. de dimension N de $H_0^1(0,1)$.*

Une base de W_h est constituée des $N+2$ **fonctions-chapeaux** définies par :

$$\text{Pour } 0 \leq j \leq N+1, \quad \varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & \text{si } x \in T_j^- = [x_{j-1}, x_j], \\ \frac{x_{j+1} - x}{h} & \text{si } x \in T_j^+ = [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{si } x \notin T_j^- \cup T_j^+ = [x_{j-1}, x_{j+1}]. \end{cases}$$

Enfin, une base de V_h est constituée des N fonctions $(\varphi_j)_{j=1, \dots, N}$.



Démonstration. — On montre facilement que l'on définit ainsi une famille libre. On peut aussi vérifier que toute fonction de W_h s'exprime de manière unique par ses valeurs aux points $(x_j)_{j=0, \dots, N+1}$. Soit $v \in W_h$, alors on a

$$v = \sum_{i=0}^{N+1} v(x_i) \varphi_i$$

Et toute fonction de V_h l'est par ses valeurs aux points $(x_j)_{j=1, \dots, N}$. □

Par suite, il s'agit de calculer la matrice A_h et le second membre B_h du système linéaire correspondant à l'approximation variationnelle :

$$(A_h)_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$$

et

$$(B_h)_i = \langle f, \varphi_i \rangle_{H^{-1}, H^1}.$$

Dans le cas particulier où $a_0 = 0$, on retrouve en fait la matrice relative à la méthode des différences finies (le vérifier en exercice) :

$$(A_h)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } |i - j| > 1, \\ -1/h & \text{si } j = i + 1 \text{ ou } j = i - 1, \\ 2/h & \text{si } j = i. \end{cases}$$

De manière générale, le calcul de ces objets repose sur des méthodes d'intégration numérique : méthode des trapèzes, formule de quadrature de Gauss, ... Nous reviendrons plus tard sur les techniques utilisées pour le calcul de A_h et B_h par l'introduction des matrices et second-membres élémentaires.

Enfin, la résolution du système linéaire se fait par des méthodes appropriées. Ici, on se trouve dans le cas d'une matrice creuse, on choisit alors généralement des méthodes directes qui prennent en compte la structure creuse et le profil particulier de la matrice (méthode de Cholesky) mais rien n'interdit l'utilisation de méthodes itératives ou de méthodes du gradient comme le gradient conjugué. Les méthodes itératives peuvent avoir recours à un préconditionnement.

Nous allons désormais nous intéresser aux propriétés de convergence de la méthode numérique.

3.5.2.1. Convergence et estimation d'erreur. —

Définition 3.30. — Soit $v \in H^1(0, 1)$. On pose

$$\Pi_h v(x) = \sum_{j=0}^{N+1} v(x_j) \varphi_j(x).$$

Il s'agit de l'interpolée \mathbb{P}_1 de v sur le maillage \mathcal{T}_h (i.e. sur l'espace W_h).

Lemme 3.31. — *Il existe une constante c indépendante de h telle que*

$$\|\Pi_h v\|_{H^1} \leq c \|v\|_{H^1}$$

Démonstration. — Pour $x \in]x_j, x_{j+1}[$, on a

$$(\Pi_h v)'(x) = \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [(\Pi_h v)'(x)]^2 dx &= \frac{(v(x_{j+1}) - v(x_j))^2}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(x) dx \right)^2 \\ &\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} (v'(x))^2 dx \quad \text{par Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$

Il en découle $\|(\Pi_h v)'\|_{L^2} \leq \|v'\|_{L^2}$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|\Pi_h v\|_{L^2} &\leq \max_{[0,1]} |\Pi_h v| \\ &\leq \max_{[0,1]} |v| \quad \text{par définition de } v \\ &\leq c \|v\|_{H^1}. \end{aligned}$$

□

Lemme 3.32. — a) Il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que

$$\forall v \in H^1(0, 1), \quad \|v - \Pi_h v\|_{L^2(0,1)} \leq ch \|v'\|_{L^2(\Omega)}.$$

b) D'autre part, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que

$$\begin{aligned} \forall v \in H^2(0, 1), \quad & \|v - \Pi_h v\|_{L^2(0,1)} \leq ch^2 \|v''\|_{L^2(\Omega)} \\ & \|v' - (\Pi_h v)'\|_{L^2(0,1)} \leq ch \|v''\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

$$c) \forall v \in H^1(0, 1), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v' - (\Pi_h v)'\|_{L^2(0,1)} = 0.$$

Démonstration. — *Preuve du point a).* On raisonne sur $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$, qui est dense dans $H^1(0, 1)$. Soit $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Par définition de $\Pi_h v$, on a

$$\begin{aligned} v(x) - \Pi_h v(x) &= v(x) - \left(v(x_j) + \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} (x - x_j) \right) \\ &= \int_{x_j}^x v'(t) dt - \frac{x - x_j}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v'(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $0 \leq \frac{x - x_j}{h} \leq 1$,

$$|v(x) - (\Pi_h v)(x)| \leq 2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(t)| dt$$

et donc par Cauchy-Schwarz :

$$(v - \Pi_h v)^2(x) \leq 4h \int_{x_j}^{x_{j+1}} (v'(t))^2 dt,$$

ce qui conduit à (du fait que $h = x_{j+1} - x_j$) :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} (v - \Pi_h v)^2(x) dx \leq 4h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} (v'(t))^2 dt$$

d'où le premier résultat en sommant sur j .

Preuve du point b). On raisonne à nouveau avec $v \in C^\infty([0, 1])$, par densité de cet espace dans $H^2(0, 1)$. Soit $x \in]x_j, x_{j+1}[$. Par la formule des accroissements finis, en reprenant la première relation de la démonstration du a),

$$v(x) - \Pi_h v(x) = (x - x_j)v'(x_j + \theta_x) - (x - x_j)v'(x_j + \theta_j)$$

où $0 \leq \theta_x \leq x - x_j$ et $0 \leq \theta_j \leq h$. Donc

$$\begin{aligned} |v(x) - \Pi_h v(x)| &\leq (x - x_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)| dt \\ |v(x) - \Pi_h v(x)|^2 &\leq (x - x_j)^2 h \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

et alors

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v(x) - \Pi_h v(x)|^2 dx \leq \frac{h^4}{3} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt$$

car $\int_{x_j}^{x_{j+1}} (x - x_j)^2 dx = h^3/3$. On obtient ainsi le premier résultat en sommant sur j .

Pour la majoration de $\|v' - \Pi_h v'\|_{L^2}$ on procède de même : sur $]x_j, x_{j+1}[$

$$\begin{aligned} v'(x) - (\Pi_h v)'(x) &= v'(x) - \frac{v(x_{j+1}) - v(x_j)}{h} \\ &= v'(x) - v'(x_j + \theta_j) \end{aligned}$$

$$|v'(x) - (\Pi_h v)'(x)| \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)| dt$$

$$|v'(x) - (\Pi_h v)'(x)|^2 \leq h \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt \quad (\text{Cauchy-Schwarz})$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} |v'(x) - (\Pi_h v)'(x)|^2 dx \leq h^2 \int_{x_j}^{x_{j+1}} |v''(t)|^2 dt$$

On conclut en sommant sur j .

Preuve du point c). Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $v \in H^1(0, 1)$. On peut trouver $\varphi \in C^\infty([0, 1])$ tel que $\|v - \varphi\|_{H^1} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et donc tel que

$$\|v' - \varphi'\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \|(\Pi_h v)' - (\Pi_h \varphi)'\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

notamment en considérant le lemme précédent. En utilisant b), il vient enfin l'existence de h tel que

$$\|\varphi' - (\Pi_h \varphi)'\|_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

□

Lemme 3.33. — Soit $v \in H^1(0, 1)$ alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v - \Pi_h v\|_{H^1(0,1)} = 0$$

et si de plus $v \in H^2(0, 1)$ alors il existe $c > 0$ indépendante de h telle que

$$\|v - \Pi_h v\|_{H^1(0,1)} \leq ch \|v''\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. — Cela découle des deux lemmes précédents. En effet, on travaille à h petit (destiné à tendre vers 0), et donc $h^2 \leq h$. □

Théorème 3.34. — Soit $f \in H^{-1}(0, 1)$ et $u \in H_0^1(0, 1)$, $u_h \in V_h$ les solutions de (FV) et (FV_h) . On a alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(0,1)} = 0$$

Si de plus $f \in L^2(\Omega)$ alors $u \in H^2(\Omega)$ et on a les estimations

$$\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq ch \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.19)$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.20)$$

Démonstration. — D'après le lemme de Céa, on a $\|u - u_h\|_{H^1(0,1)} \leq \|u - \Pi_h u\|_{H^1(0,1)}$. Les estimations en norme H^1 découlent alors de la proposition précédente et du contrôle de v'' par f dans L^2 d'après les résultats de régularité lorsque $f \in L^2$. Montrons maintenant l'estimation (3.20) : en norme L^2 , la convergence est d'ordre 2. Cette preuve repose sur un argument de dualité : on a en effet

$$\|u - u_h\|_{L^2} = \sup_{g \in L^2, g \neq 0} \frac{\int_0^1 g(u - u_h) dx}{\|g\|_{L^2}}. \quad (3.21)$$

Pour tout $g \in L^2(0, 1)$, on définit $\phi_g \in H^2(0, 1)$ comme étant la solution de la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \phi_g \in H_0^1(0, 1) \\ \forall v \in H_0^1(0, 1), \quad a(v, \phi_g) = \int_0^1 gv \, dx. \end{cases}$$

On a donc $\|\phi_g\|_{H^2} \leq \|g\|_{L^2}$ et aussi, comme $u - u_h \in H_0^1(0, 1)$,

$$a(u - u_h, \phi_g) = \int_0^1 g(u - u_h) \, dx.$$

Comme $\Pi_h \phi_g \in V_h$, on a $a(u - u_h, \Pi_h \phi_g) = 0$, donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(u - u_h) \, dx &= a(u - u_h, \phi_g - \Pi_h \phi_g) \\ &\leq C \|u - u_h\|_{H^1} \|\phi_g - \Pi_h \phi_g\|_{H^1} \\ &\leq Ch^2 \|f\|_{L^2} \|\phi_g\|_{H^2} \leq Ch^2 \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé (3.19) et le Lemme 3.33 appliqué à $\phi_h \in H^2(0, 1)$. En insérant cette inégalité dans (3.21), on obtient (3.20). \square

3.5.2.2. Calcul de la matrice et du second-membre du système. — La prise en compte du caractère creux de la matrice se fait par la considération d'objets intermédiaires : les matrices élémentaires et les second-membres élémentaires :

$$(A_h)_{ij} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h / T \subset \text{Supp } \varphi_i \cap \text{Supp } \varphi_j} \left(\int_T \varphi'_j \varphi'_i + \int_T a_0 \varphi_j \varphi_i \right)$$

Dans le cas \mathbb{P}_1 , $\int_T \varphi'_j \varphi'_i$ est non nulle dès lors que x_i et x_j sont des sommets de T . Notons X_α , $\alpha = 1, 2$ les sommets de T . La donnée de $\int_T \varphi'_j \varphi'_i$, pour i, j tels que x_i, x_j sont des sommets de T équivaut à la donnée de $\left(\int_T \tilde{\varphi}'_\alpha \tilde{\varphi}'_\beta \right)_{\alpha, \beta=1,2}$ où la correspondance est établie par le choix de (α, β) tels que $x_i = X_\beta$, $x_j = X_\alpha$.

En toute rigueur, la donnée d'un maillage est :

- (i) Une liste de points (les points x_i , $i = 0, \dots, N + 1$ ici).
- (ii) La définition des $T \in \mathcal{T}_h$ par la donnée de leurs sommets, dans un ordre prédéfini (indispensable pour la définition de la normale notamment dans le cas de problèmes surfaciques).

Cette deuxième information donne une table de correspondance entre la numérotation locale des sommets des $T \in \mathcal{T}_h$ (X_α) et la numérotation globale de ces sommets en tant que points du maillage de la liste donnée en (i) (x_i).

Cette correspondance fait le lien entre les quantités $\int_T \varphi'_j \varphi'_i$ pour $i, j = 1, \dots, N$ et $T \in \mathcal{T}_h$, et les quantités $\int_T \tilde{\varphi}'_\alpha \tilde{\varphi}'_\beta$ pour $\alpha, \beta = 1, 2$ et $T \in \mathcal{T}_h$.

L'objet suivant est appelé matrice élémentaire relative à T :

$$\left(\int_T \tilde{\varphi}'_\alpha \tilde{\varphi}'_\beta \right)_{\alpha, \beta=1,2}$$

Il en va de même avec la quantité $\int_T a_0 \varphi_j \varphi_i$ associée à un élément de la matrice élémentaire donnée par $\left(\int_T a_0 \tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\beta \right)_{\alpha, \beta=1,2}$, ainsi que pour $\int_T f \varphi_i$ associé à un élément du second-membre élémentaire donné par $\left(\int_T f \tilde{\varphi}_\beta \right)_{\beta=1,2}$.

Un algorithme éléments-finis s'écrit alors :

- ★ Calcul des matrices / second-membres élémentaires :
 - Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$
 - Pour tout $\alpha = 1, 2$
 - calcul de $b_T(\alpha) = \int_T f \tilde{\varphi}_\alpha$
 - Pour tout $\beta = 1, 2$
 - calcul de $m_T(\alpha, \beta) = \int_T \tilde{\varphi}'_\alpha \tilde{\varphi}'_\beta + \int_T a_0 \tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\beta$
- ★ Assemblage de la matrice A_h et du second-membre B_h :
 - Initialisation de B_h à 0.
 - Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$
 - Pour tout $\beta = 1, 2$
 - $i =$ numéro global du sommet β de T .
 - $(B_h)_i \leftarrow (B_h)_i + b_T(\beta)$
 - Pour tout $\alpha = 1, 2$
 - $j =$ numéro global du sommet α de T .
 - Si $(A_h)_{ij}$ a déjà été rencontré alors
 - $(A_h)_{ij} \leftarrow (A_h)_{ij} + m_T(\alpha, \beta)$
 - Sinon
 - Initialisation de $(A_h)_{ij}$ à $m_T(\alpha, \beta)$.

Remarque 3.35. — De manière générale, on peut remarquer les points suivants.

- ★ Le stockage de $(A_h)_{ij}$ prend en considération son caractère creux, ainsi que la résolution du système.
- ★ Ici, (α, β) parcourent les sommets des $T \in \mathcal{T}_h$. De manière plus générale, ils parcourent les nœuds du maillage qui sont effectivement les sommets dans le cas \mathbb{P}_1 , mais le centre de gravité des $T \in \mathcal{T}_h$ dans le cas \mathbb{P}_0 , et bien plus dans le cas \mathbb{P}_2 où les fonctions de base de V_h ne sont plus seulement supportées par les sommets mais aussi par les milieux des arêtes des éléments de \mathcal{T}_h .
- ★ Ici, le calcul de $\int_0^1 \varphi'_j \varphi'_i$ ne présente aucune difficulté mais il n'en va pas de même en général (approximation \mathbb{P}_2 , dimension supérieure, ...) d'où cette stratégie qui s'avère alors bien pratique.

3.5.2.3. Calcul des matrices et second-membres élémentaires. — Le calcul de $(\int_T \tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\beta)_{\alpha\beta}$, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ se fait numériquement par le biais d'un élément de référence. Soit \hat{T} un élément de référence :

- ★ $[0, 1]$ ici, en 1D.
- ★ $[(0, 0), (1, 0), (0, 1)]$ en 2D – triangles.
- ★ $[(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)]$ en 2D – quadrangles.

Alors, pour $T \in \mathcal{T}_h$ il existe une unique application affine F_T qui transforme \hat{T} en T et :

$$\int_T \tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\beta = \int_{\hat{T}} (\tilde{\varphi}_\alpha \circ F_T) (\tilde{\varphi}_\beta \circ F_T) JF_T$$

Ainsi, le calcul de toutes les matrices élémentaires s'effectue par la considération d'une unique formule de quadrature définie sur l'élément de référence.

Il en va de même avec les second-membres élémentaires.

3.5.2.4. La dimension supérieure. — La dimension supérieure requiert la considération du fait que $\Omega_h = \cup_{T \in \mathcal{T}_h}$ est en général différent de Ω . En effet, si, en 2D par exemple, Ω est courbe et Ω_h constitué de triangles droits, alors $\Omega_h \neq \Omega$. Evidemment, $\Omega_h \rightarrow \Omega$ quand

$h \rightarrow 0$, mais convient de prendre cette approximation en considération dans l'estimation de l'erreur éléments-finis.

On peut aussi choisir des éléments $T \in \mathcal{T}_h$ courbes, par exemple des triangles dont les bords sont \mathbb{P}^2 et définis par les sommets du triangle ainsi que les “milieux” des segments courbes. En général mais pas de manière systématique, il convient de choisir le même espace \mathbb{P}_k pour la construction de Ω_h et la définition de V_h . Dans ce cas, on parle d'éléments-finis isoparamétrique et les fonctions de base de V_h sont portées par les nœuds définissant Ω_h .

ANNEXE A

RAPPELS SUR LES ESPACES L^p

Cette annexe, ainsi que l'Annexe B reprennent les notes [4] de F. Nier.

A.1. Densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$

Tout ce dont on a besoin ici est la propriété suivante de la mesure de Lebesgue : pour tout ensemble borélien E de \mathbb{R}^n

$$|E| = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compact}}} |K| = \inf_{\substack{E \subset \Omega \\ \Omega \text{ ouvert}}} |\Omega|,$$

où on a noté

$$|E| = \text{mesure de } E = \int 1_E(x) dx.$$

Remarque A.1. — On rappelle que la tribu borélienne sur un espace topologique est la famille de parties stable par union dénombrable et passage au complémentaire engendrée par les ouverts. Une mesure étant fixée (ici la mesure de Lebesgue dx), on complète cette tribu en rajoutant tous les ensembles de mesure nulle. Par abus de langage, on appelle ici borélien un élément de la tribu borélienne complétée pour la mesure de Lebesgue.

La démonstration qui se fait en trois étapes est rappelée ci-dessous.

Démonstration. — a) Une fonction caractéristique de compact peut être approchée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une suite de fonctions continues. Soit K un compact de \mathbb{R}^n , on prend

$$f^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \frac{d(x,K)}{\varepsilon} & \text{si } d(x,K) < \varepsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $\Omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n, d(x,K) < \varepsilon\}$ et on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$1_K(x) \leq f^\varepsilon(x) \leq 1_{\Omega^\varepsilon}(x).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|1_K - f^\varepsilon(x)\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} (f^\varepsilon(x) - 1_K(x)) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1_{\Omega^\varepsilon}(x) - 1_K(x)) dx = |\Omega^\varepsilon| - |K| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

puisque $|K| = \inf_{\substack{K \subset \Omega \\ \Omega \text{ ouvert}}} |\Omega| = \inf_{\varepsilon > 0} |\Omega^\varepsilon|.$

- b) La fonction caractéristique d'un borélien peut être approchée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une famille de fonctions caractéristiques de compact. On écrit tout simplement pour un borélien E : $|E| = \sup_{\substack{K \in E \\ K \text{ compact}}} |K|$. Pour $K \subset E$, la norme $\|1_E - 1_K\|_{L^1}$ n'est autre

que $|E| - |K|$ qui est arbitrairement petit.

En conséquence, une fonction caractéristique de borélien peut être approchée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une suite de fonctions continues. Par linéarité, il en est de même de toute combinaison linéaire finie, i.e. toute fonction étagée $\sum_{k=1}^N \lambda_k 1_{E_k}(x)$ peut être approchée dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une suite de fonctions continues.

- c) Toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ est limite d'une suite de fonctions étagées. En fait, on fixe un représentant (toujours noté f) qui est une fonction mesurable intégrable. En écrivant $f = f_+ - f_-$, on se ramène au cas $f \geq 0$. On prend alors

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} 1_{f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}[)}(x) + n 1_{f^{-1}([n, +\infty))}(x).$$

On a alors $0 \leq s_n(x) \leq f(x)$ et $s_n(x) \rightarrow f(x)$ presque partout. Le théorème de Lebesgue (convergence dominée) donne alors $\|f - s_n\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

□

A.2. Autres rappels sur les espaces L^p

Définition A.2. — Pour $1 \leq p \leq +\infty$,

- a) $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, dx)$ désigne l'espace des fonctions mesurables f telles que :

$$\text{si } p < +\infty : \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx < +\infty ; \quad \text{si } p = +\infty : \exists C_f > 0, |f(x)| \leq C_f.$$

- b) $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ est le quotient de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, dx)$ par la relation d'équivalence $(f \sim g) \Leftrightarrow (f(x) = g(x) \text{ p.p.})$. Il est muni de la norme

$$p < +\infty : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} ; \quad p = +\infty : \|f\|_\infty = \text{Sup ess } |f(x)|.$$

Remarque A.3. — a) $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ est un espace de Banach, ce qui signifie que $\|\cdot\|_p$ est bien une norme (elle vérifie l'inégalité triangulaire $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (inégalité de Minkowski) et $\|f\|_p$ ne s'annule que si le vecteur f est nul) et que $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ avec cette norme est complet. Par le théorème de densité précédent, c'est d'ailleurs le complété de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^n)$.

- b) Nécessité de passer au quotient : $\|\cdot\|_p$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. En effet la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ aurait une norme nulle. Dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, on n'a plus ce problème puisque une telle fonction s'identifie au vecteur nul.

On rappelle sans démonstration l'inégalité de Hölder et les propriétés liées.

Proposition A.4. — a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n, dx)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

- b) Pour $1 \leq p < +\infty$, le dual topologique de $L^p(\mathbb{R}^n)$ s'identifie à $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. (Faux pour $p = +\infty$.)
- c) Si pour $i = 1, \dots, N$ on a $f_i \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n, dx)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_N} \leq 1$, alors le produit $f_1 \dots f_N$ appartient à $L^r(\mathbb{R}^n, dx)$ avec

$$\|f_1 \dots f_N\|_r \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{p_i}.$$

Le résultat suivant est utile. L'argument de sa démonstration est similaire à celui utilisé pour montrer la complétude de $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$.

Proposition A.5. — Si $p < +\infty$, de toute suite convergeant vers u dans $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout vers u .

Démonstration. — Puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ si et seulement si $\|u_n - u\|_1 \rightarrow 0$ il suffit de le démontrer pour $p = 1$. Pour $p = 1$, on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. En choisissant pour chaque k un représentant de u_{n_k} , on peut dire que la fonction $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{n_{k+1}} - u_{n_k}|(x)$ est une fonction mesurable positive d'intégrale ≤ 2 (Lemme de Fatou). On en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ la suite

$$u_{n_k}(x) = u_{n_0}(x) + \sum_{i=0}^{k-1} u_{n_{i+1}}(x) - u_{n_i}(x)$$

converge absolument. Notons $v(x)$ cette limite ponctuelle (p.p.), en posant $v(x) = 0$ pour l'ensemble de mesure nulle où la série ne converge pas. Le lemme de Fatou donne alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x) - u_{n_k}(x)| dx \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_{n_{i+1}}(x) - u_{n_i}(x)| dx \leq \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

En conséquence v est également limite de $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et s'identifie donc à u . En conclusion, la sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge presque partout vers $u(x)$. \square

Remarque A.6. — Il est important de noter que la convergence presque partout n'est vraie qu'en extrayant une sous-suite. On pourra s'en convaincre en considérant la suite u_n définie de la façon suivante : On prend l'unique $l \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{l(l+1)}{2} \leq n < \frac{(l+1)(l+2)}{2}$ et on pose $u_n(x) = 1_{[\frac{n}{l+1} - \frac{l}{2}, \frac{n+1}{l+1} - \frac{l}{2}]}(x)$.

On termine ce paragraphe par les inégalités pour le produit de convolution

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy.$$

Proposition A.7. — a) Pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$, on a $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ avec

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

b) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n, dx)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r}$ alors on a $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n, dx)$ avec

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r} \right).$$

Démonstration. — On rappelle brièvement la démonstration de a). Après avoir pris des représentants, on vérifie avec le changement de variables $u = x - y$, $v = y$ que l'intégrale positive

$$\int \int |f(x - y)g(y)| \, dx dy = \int \int |f(u)| |g(v)| \, du dv$$

vaut $\|f\|_1 \|g\|_1$ qui est fini. Le théorème de Fubini dit alors deux choses : l'intégrale

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) \, dy$$

est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ et on a l'inégalité

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Pour le b), il est commode de raisonner par dualité. Il suffit de montrer que pour tout $r \in [1, \infty]$, on a

$$I = \int \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x - y)h(y)| \, dx dy \leq \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_{r^*}.$$

En effet, si $r = 1$, en prenant $h \equiv 1$, on obtient directement que $\|f * g\|_1 \leq I \leq \|f\|_p \|g\|_q$, et si $r > 1$, on utilise que le dual de L^{r^*} est L^r . Réécrivons cette intégrale double ainsi : $I = \int \int \alpha(x, y)\beta(x, y)\gamma(x, y) \, dx dy$, avec

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) &= |f(x)|^{p/r} |g(x - y)|^{q/r}, \\ \beta(x, y) &= |g(x - y)|^{q/p^*} |h(y)|^{r^*/p^*}, \\ \gamma(x, y) &= |f(x)|^{p/q^*} |h(y)|^{r^*/q^*}. \end{aligned}$$

En remarquant que $1/p^* + 1/q^* + 1/r = 1$, on applique l'inégalité de Hölder pour obtenir $|I| \leq \|\alpha\|_r \|\beta\|_{p^*} \|\gamma\|_{q^*}$, ce qui donne le résultat souhaité. □

ANNEXE B

FORMULES DE LEIBNIZ ET DE TAYLOR

On rappelle ici les formules de Leibniz et de Taylor avec reste intégral, écrites à l'ordre quelconque ici pour des fonctions f et g supposées de classe \mathcal{C}^∞ . Pour les retrouver, le plus simple est de commencer par le cas à une variable.

B.1. Fonction d'une variable

Formule de Leibniz $\alpha \in \mathbb{N}$:

$$\partial_x^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)! \beta!} \partial_x^\beta f \partial_x^{\alpha - \beta} g = \sum_{\alpha^1 + \alpha^2 = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha^1! \alpha^2!} \partial_x^{\alpha^1} f \partial_x^{\alpha^2} g.$$

Formule de Taylor avec reste intégral $m \in \mathbb{N}$: Elle s'obtient par intégration par parties utilisant $(1 - t)^k = \left(\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1} \right)'$:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + \int_0^1 f'(t) dt = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t) dt \\ &= \sum_{k \leq m} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) + (m+1) \int_0^1 (1-t)^m \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(t) dt. \end{aligned}$$

B.2. Fonctions de plusieurs variables

On rappelle les notations pour les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Formule de Leibnitz $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\partial_x^\alpha(fg) = \sum_{\alpha^1 + \alpha^2 = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha^1! \alpha^2!} \left(\partial_x^{\alpha^1} f \right) \left(\partial_x^{\alpha^2} g \right), \quad \alpha^1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1), \quad \alpha^2 = (\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2).$$

Démonstration. — On écrit $\partial_x^\alpha(fg) = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}(fg)$ et on applique la formule de Leibnitz en dimension 1 à chaque $\partial_{x_i}^{\alpha_i}$. □

On vérifie facilement par récurrence la généralisation

$$\partial_x^\alpha (f_1 f_2 \dots f_k) = \sum_{\alpha^1 + \dots + \alpha^k = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha^1! \alpha^2! \dots \alpha^k!} (\partial_{x_1}^{\alpha^1} f_1) (\partial_{x_2}^{\alpha^2} f_2) \dots (\partial_x^{\alpha^k} f_k).$$

Formule de Taylor avec reste intégral $m \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(a + t(b-a)) + (m+1) \int_0^1 (1-t)^m \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(a + t(b-a)) dt.$$

Démonstration. — On applique la formule en dimension 1 à la fonction $\varphi(t) = f(a + t(b-a))$ puis on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt}(t) &= \left(\left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \partial_{x_i} \right] f \right) (a + t(b-a)), \\ \frac{d^k \varphi}{dt^k}(t) &= \left(\left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \partial_{x_i} \right]^k f \right) (a + t(b-a)). \end{aligned}$$

Les opérateurs différentiels $(b_i - a_i) \partial_{x_i}$ commutent. On peut donc utiliser la formule du multinôme $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^k = k! \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} X^\alpha$, valable dans tout anneau commutatif (Le coefficient $\frac{k!}{\alpha!}$ s'obtient en calculant la dérivée α -ième par rapport à X de chaque côté, ou bien par récurrence). On obtient

$$\frac{1}{k!} \frac{d^k \varphi}{dt^k}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha f(a + t(b-a)).$$

□

ANNEXE C

MESURE SUPERFICIELLE ET FORMULE DE GREEN

Cette annexe reprend des éléments de [3].

C.1. La mesure superficielle

Soit ω un ouvert de \mathbb{R}^{N-1} et $F : \omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 . On dit que F est un *plongement* si F et F' sont injectives (F' injective signifie que pour tout $x \in \omega$ la matrice $F'(x)$ est de rang $N - 1$). Alors $F'(x)^* F'(x)$ est une matrice carrée d'ordre $N - 1$, définie positive et d'éléments génériques $\partial_i F(x) \cdot \partial_j F(x)$.

Définition C.1. — On note $S = \{F(x) : x \in \omega\}$. Si u est une fonction continue de S dans \mathbb{R} , à support compact, on pose

$$\int_S u(\sigma) d\sigma = \int_\omega u(F(x)) \det (F'(x)^* F'(x))^{1/2} dx.$$

La mesure $d\sigma$ est appelée *mesure superficielle* sur S .

Proposition C.2. — La mesure superficielle est indépendante du plongement F .

Démonstration. — Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^{N-1} et $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un autre plongement tel que $S = G(\Omega)$. Alors $h = F^{-1} \circ G$ est un C^1 -difféomorphisme de Ω sur ω . Soit u continue à support compact de S dans \mathbb{R} . On note $\widetilde{d\sigma}$ la mesure superficielle définie à l'aide de G :

$$\int_S u(\sigma) \widetilde{d\sigma} = \int_\Omega u(G(y)) \det (G'(y)^* G'(y))^{1/2} dy.$$

On a $G = F \circ h$ et $G'(y) = F'(h(y))h'(y)$, donc

$$\int_S u(\sigma) \widetilde{d\sigma} = \int_\Omega u(F \circ h(y)) \det (F'(h(y))^* F'(h(y)))^{1/2} |\det h'(y)| dy \quad (\text{C.1})$$

$$= \int_\omega u(F(x)) \det (F'(x)^* F'(x))^{1/2} dx = \int_S u(\sigma) d\sigma, \quad (\text{C.2})$$

par la formule du changement de variable dans une intégrale. \square

Très souvent, on sera amené à intégrer une fonction sur le bord d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dans ce cas, le bord sera défini localement par un plongement et la mesure superficielle aura une définition locale.

Définition C.3 (Régularité du domaine). — Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , $\partial\Omega$ sa frontière. L'ouvert Ω est dit de classe \mathcal{C}^k pour $k \geq 1$ si, pour tout point $\sigma_0 \in \partial\Omega$, on peut trouver un voisinage ouvert ω_0 de σ_0 , une boule $B(0, r) \subset \mathbb{R}^N$, une bijection $\Phi : B(0, r) \rightarrow \omega_0$ et une application continue $\varphi : B(0, r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

- (i) $\Phi(0) = \sigma_0$ et les fonctions Φ , Φ^{-1} et φ sont de classe \mathcal{C}^k .
- (ii) $\overline{\Omega} \cap \omega_0 = \Phi(B(0, r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+))$ et $\partial\Omega \cap \omega_0 = \Phi(B(0, r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}))$.
- (iii) Il existe une matrice de rotation R_0 et $b_0 \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$\overline{\Omega} \cap \omega_0 \subset R_0 \{(y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : y_N \geq \varphi(y')\} + b_0,$$

$$\partial\Omega \cap \omega_0 \subset R_0 \{(y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : y_N = \varphi(y')\} + b_0.$$

Remarque C.4. — On remplace parfois \mathcal{C}^k par Lipschitzien dans cette définition. Par ailleurs, si Ω est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $\sigma_0 = \Phi(0)$ alors l'application $F(y') = R_0(y', \varphi(y')) + b_0$, définie sur $B(0, r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$, est un plongement. Avec ces notations, la normale extérieure à $\partial\Omega$ en un point $\sigma = R_0(y, \varphi(y)) + b_0 \in \partial\Omega \cap \omega_0$ est donnée par \vec{n}

$$n(\sigma) = R_0 \frac{(\nabla\varphi(y), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(y)|^2}} \quad \Omega$$

(elle ne dépend pas des choix de Φ et φ).

C.2. Intégration par parties

Proposition C.5 (Formule d'intégration par parties ou formule de Green)

Soit Ω un ouvert de classe \mathcal{C}^1 et $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\int_{\Omega} \partial_i u(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma) n_i(\sigma) d\sigma.$$

Démonstration. — Cette démonstration se fait en trois étapes.

a) On suppose d'abord que

$$\Omega = \{(x', x_N) : x_N > \varphi(x')\}, \quad \partial\Omega = \{(x', x_N) : x_N = \varphi(x')\}$$

où $\varphi : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Si $1 \leq i \leq N-1$, on pose

$$g(x', x_N) = \int_{-\infty}^{x_N} \partial_i u(x', s) ds, \quad f(x', x_N) = \int_{-\infty}^{x_N} u(x', s) ds.$$

Alors, on a

$$\int_{\Omega} \partial_i u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\varphi(x')}^{+\infty} \partial_i u(x', x_N) dx_N dx' = - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(x', \varphi(x')) dx'.$$

Par ailleurs, si on note $h(x') = f(x', \varphi(x'))$, comme $i < N$ on a

$$\partial_i h(x') = g(x', \varphi(x')) + u(x', \varphi(x')) \partial_i \varphi(x')$$

et comme h est à support compact (car u est à support compact, ce qui entraîne qu'il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $|x'| \geq \lambda$, $g(x') = 0$ et $f(x') = 0$), on a

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \partial_i h(x') dx' = 0$$

donc

$$-\int_{\mathbb{R}^{N-1}} g(x', \varphi(x')) dx' = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x', \varphi(x')) \partial_i \varphi(x') dx' \quad (\text{C.3})$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x', \varphi(x')) n_i(x', \varphi(x')) \sqrt{1 + |\nabla \varphi(x')|^2} dx' \quad (\text{C.4})$$

$$= \int_{\partial\Omega} u(\sigma) n_i(\sigma) d\sigma. \quad (\text{C.5})$$

On a ici utilisé le plongement $F(x') = (x', \varphi(x'))$ et on peut calculer que

$$\det(F'(x)^* F'(x)) = 1 + |\nabla \varphi|^2$$

(Pour cela, soit A la matrice de termes $\partial_i \varphi \partial_j \varphi$. Voir que $F'^* F' = I + A$ et que les valeurs propres de A sont $(0, 0, \dots, |\nabla \varphi|^2)$ car A est la projection orthogonale sur $\nabla \varphi$, à une constante près).

Si $i = N$, on a

$$\int_{\Omega} \partial_N u(x) dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\varphi(x)}^{+\infty} \partial_N u(x', x_N) dx_N dx' \quad (\text{C.6})$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} u(x', \varphi(x')) dx' \quad (\text{C.7})$$

$$= \int_{\partial\Omega} u(\sigma) n_N(\sigma) d\sigma, \quad \text{car } n_N(\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi|^2}}. \quad (\text{C.8})$$

- b) On suppose que Ω est du type précédent après rotation et translation : $\Omega = R\Omega_0 + b$, où $b \in \mathbb{R}^N$, R est une matrice de rotation et Ω_0 est comme à l'étape **a**. Le résultat que l'on souhaite montrer est équivalent à celui-ci : pour toute fonction vectorielle $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \cdot n(\sigma) d\sigma.$$

Soient $y = R^*(x - b) \in \Omega_0$ et $v(y) = u(Ry + b)$. Alors on a $Du(x) = Dv(y)R^*$. Or

$$\operatorname{div} u(x) = \operatorname{tr}(Du(x)) = \operatorname{tr}(Dv(y)R^*) = \operatorname{tr}(R^*Dv(y)) = \operatorname{tr}(D(R^*v(y))),$$

ce qui entraîne, en utilisant l'étape **a**,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u(x) dx = \int_{\Omega_0} \operatorname{tr}(D(R^*v(y))) dy = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_0} \partial_i(R^*v(y)) dy \quad (\text{C.9})$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{\partial\Omega_0} (R^*v(y))_i (n_0)_i(\sigma_0) d\sigma_0 = \int_{\partial\Omega_0} (R^*v(y)) \cdot n_0(\sigma_0) d\sigma_0 \quad (\text{C.10})$$

$$= \int_{\partial\Omega_0} u(Ry + b) \cdot (Rn_0(\sigma_0)) d\sigma_0 = \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \cdot n(\sigma) d\sigma. \quad (\text{C.11})$$

- c) Cas général. En chaque point $\sigma \in \partial\Omega$, on peut trouver un ouvert $\omega_{0,\sigma}$ et des fonctions $\Phi_\sigma, \varphi_\sigma$ remplissant les conditions de la Définition C.3. On peut alors recouvrir $\partial\Omega \cap$

Supp u (qui est compact) par un nombre fini d'ouverts $\omega_k := \omega_{\sigma_k}$, pour $1 \leq k \leq K$.
On considère ensuite une partition de l'unité $(\psi_k)_{0 \leq k \leq K}$ avec

$$\text{Supp } \psi_k \subset \subset \omega_k, \quad \sum_{k=0}^K \psi_k(x) \equiv 1, \quad \bar{\omega}_0 \subset \Omega, \quad (\bar{\Omega} \cap \text{Supp } u) \subset \bigcup_{k=0}^K \omega_k.$$

Alors, on a

$$\int_{\Omega} \partial_i u(x) dx = \sum_{k=0}^K \int_{\omega_k} \partial_i (u(x) \psi_k(x)) dx$$

et deux cas se présentent. Si $1 \leq i \leq K$ alors on utilise l'étape **b** :

$$\int_{\omega_k} \partial_i (u(x) \psi_k(x)) dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma) \psi_k(\sigma) n_i(\sigma) d\sigma$$

et si $i = 0$, on a

$$\int_{\omega_0} \partial_i (u(x) \psi_k(x)) dx = 0.$$

En faisant la somme, on obtient le résultat souhaité.

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-M. Bony. *Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier*. Editions de l'École polytechnique, Ellipses, 2001.
- [2] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [3] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer, 1993.
- [4] F. Nier, *Rappel et formules*, Université de Rennes 1, 2004.
- [5] P.-A. Raviart et J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [6] L. Sainsaulieu. *Calcul Scientifique*. Masson, Paris, 1996.
- [7] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition. Hermann, Paris, 1966.
- [8] C. Zuily. *Distributions et équations aux dérivées partielles*. Hermann, Paris, second edition, 1986.