Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Teoria das distribuições e seus espaços topológicos

Autor: Thiago Henrique Hebeler

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Hoepfner

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso B

Profs Responsáveis: Ivo Machado da Costa
Liane Bordignon
Vera Lúcia Carbone

São Carlos, 20 de dezembro de 2010.

Teoria das distribuições e seus espaços topológicos

Autor: Thiago Henrique Hebeler

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Hoepfner

Disciplina: Trabalho de Conclusão de Curso B

Profs Responsáveis: Ivo Machado da Costa
Liane Bordignon
Vera Lúcia Carbone

São Carlos, 20 de dezembro de 2010.

Thiago Henrique Hebeler

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner

Agradecimentos

Para chegar a escrever estes agradecimentos tive de começar minha jornada muito antes daqui, por isso, para não cometer a injustiça de esquecer alguém, agradeço de antemão a todos aqueles que participaram da minha vida de alguma maneira e ajudaram a construir a pessoa que sou neste momento. Dessa maneira gostaria de agradecer de forma mais calorosa ao meu pai Carlos, minha madrasta Elaine, minha mãe Eliana, todos os meus cinco irmãos Carlos, Thais, Gustavo, Thamirys e Renzo e a minha namorada Isabella.

Gostaria, também, de agradecer algumas pessoas que participaram de maneira direta na construção deste trabalho.

Primeiramente, agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática, estes que sou muito grato por terem me ensinado durante estes quatro anos de curso.

Entre estes destaco o professor Marcus Vinicius de Araújo Lima, por ter me orientado em outros trabalhos e me dado o primeiro voto de confiança.

Em especial, o professor Gustavo Hoepfner o qual se empenhou muito para a realização deste projeto.

Por fim, agradeço a Deus pela vida e oportunidades que me deu e continua a dar.

Resumo

Este trabalho fora feito em dois tempos, primeiro estudamos os conceitos básicos de distribuições e usamos os resultados obtidos para obter importantes aplicações, tais como: i) regularização de distribuições; e ii) existência do traço de funções no sentido das distribuições e discutimos alguns resultados relacionados com o traço de uma função, até aqui foi o que realizamos durante o trabalho de conclusão de curso A.

Na segunda parte, focamos nos espaços vetoriais topológicos como, por exemplo, C^∞ e C_c^∞, vendo uma topologia que os tornam completos. Depois voltamos a discutir alguns resultados com as distribuições.

Sumário

Prefácio

O cálculo clássico para funções de várias variáveis é inadequado quando se deseja ter uma teoria simples e geral para equações diferenciais parciais. Por exemplo, as equações

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \tag{0.1}$$

não têm as mesmas soluções. A primeira equação é satisfeita por $u(x, y) = |x|$ enquanto que $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ não está definida para $x = 0$. Existem duas formas, aparentemente opostas, de fazer com que as duas equações (0.1) tenham as mesmas soluções: i) restringir o espaço de soluções admissíveis a funções bastante regulares para que o teorema de Schwarz possa ser aplicado ou ii) suplementar as funções com novos objetos, as "funções generalizadas", de modo que a derivação seja sempre possível. Assim, mesmo que $u(x, y) = |x|$ não seja diferenciável no sentido clássico, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ será um objeto "independente de y"e portanto $u(x, y)$ irá satisfazer a segunda equação em (0.1). A vantagem da segunda forma de agir deve-se, entre outras razões, a que é útil contar com o maior número possível de candidatos quando se deseja resolver uma equação. É claro que, ao fazer isto, é importante preservar tantas propriedades dos espaços de funções quantas forem possíveis.

Começamos o primeiro capítulo falando de funções indefinidamente diferenciáveis que se anulam fora de um conjunto compacto, as funções teste, C_c^∞, e com isso, definimos o produto de convolução e mostramos que o conjunto das funções C^∞ é denso em L^1 (e em geral L^p, $p < \infty$). Outro resultado importante foi a construção de uma função teste, constante num compacto dado, resultado este nos permitiu mostrar que $C_c^\infty \subset C^\infty$ densamente e portanto, C_c^∞ é denso em L^p, $1 \leq p < \infty$. Depois, colocamos uma topologia em nosso espaço de funções teste e definimos funcionais lineares contínuos nestes espaços, o qual chamamos de distribuições. Vimos exemplos de distribuições e olhamos para alguns espaços de funções —tais como L^1_{loc} e portanto L^p, C^k, entre outros— como subespaços do espaço das distribuições.

No segundo capítulo focamos as operações com as distribuições tais como o produto por uma função suave e a derivação. Relacionamos os conceitos de derivada no sentido das distribuições e a clássica, obtendo resultados de regularização tais como: i) se a distribuição está definida no conjunto das funções testes em (a, b) e a derivada de ordem k é nula então a distribuição é, na verdade, um polinômio de grau menor ou igual a $k-1$; e ii) toda distribuição definida em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ possui uma primitiva.

No terceiro capítulo, introduzimos o conceito de partição da unidade, uma ferramenta útil para localização: como se dá a igualdade de duas distribuições em $C_c^\infty(\Omega)$ e definimos o suporte de uma distribuição. Com isso, definimos o espaço das distribuições com suporte compacto, bem como vimos condições necessárias e suficientes para um funcional linear definido em C_c^∞ (ou C^∞) seja contínuo.

Estudamos condições que garantem a existência do traço de funções no sentido das distribuições. Tal condição é também necessária.

Continuamos o trabalho vendo, no quarto capítulo, algumas propriedades dos espaços vetoriais topológicos, definindo os espaços de Fréchet, por exemplo. Tal capítulo fora de extrema importância para conseguirmos entender os conceitos que foram desenvolvidos no quinto capítulo tais como a definição de $C_c^\infty(\Omega)$ como sendo o limite indutivo dos espaços $C_c^\infty(K)$, com $K \subset\subset \Omega$.

Por fim, retomamos as distribuições como foco e provamos resultados relacionados à ordem da distribuição e sobre traços.

Capítulo 1

Elementos Básicos da Teoria

1.1 Considerações iniciais

Um elemento $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, isto é, uma n-upla de inteiros não negativos, será chamada de multi-índice. Denotaremos por

$$|\alpha| \doteq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \;\; \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Escrevemos $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j}$, onde $i = \sqrt{-1}$, e

$$D^\alpha = D_1^\alpha \cdots D_n^\alpha,$$

isto é,

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \quad \text{e} \quad D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Além disso, se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ escrevemos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

e

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Observação 1.1. *Assim, temos que a Regra de Leibniz é escrita como*

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\partial^{\alpha-\beta} f)(\partial^\beta g),$$

onde $\beta \leq \alpha$ significa $\beta_k \leq \alpha_k, \; \forall \; k = 1, \ldots, n$.

Observação 1.2. *Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $B(a, r) \subset U$. Se f é de classe C^{m+1}, então a fórmula de Taylor de f de ordem m em a se escreve como*

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!}(x-a)^\alpha + R_{m+1}(x-a), \quad |x-a| < r,$$

em que R_{m+1} é o resto de Lagrange, dado por

$$R_{m+1}(x-a) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{\partial^\alpha f(\theta_x)}{\alpha!}(x-a)^\alpha, \text{ para algum } \theta_x \in [a,x]. \tag{1.1}$$

1.2 Os espaços L^p

Nesta seção, e ao longo do texto, usaremos a integral de Lebesgue.

Definição 1.3. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O espaço $L^p(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis f em Ω tal que*

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

Uma norma em $L^p(\Omega)$ é dada por:

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e para $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$$

em que o supremo é o supremo essencial.

A função $\|\cdot\|_p$ define uma norma que faz de $L^p(\Omega)$ um espaço de Banach, vide [R2, Teorema 3.11].

Enumeraremos agora alguns fatos conhecidos que serão usados posteriormente, o leitor poderá consultar [R2] e [F] para melhor se familiarizar com os espaços L^p, bem como para uma demonstração dos fatos a seguir.

Observação 1.4.

1. *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e q seu expoente conjugado, isto é:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então vale a **desigualdade de Hölder***: se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ com*

$$\int_\Omega |fg| \, dx \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

2. *Os elementos de L^p são, na verdade, classes de equivalência pois a integral não se altera se mudarmos a função num conjunto de medida nula. Assim quaisquer dois representantes de uma mesma classe se coincidem q.t.p.*

Teorema 1.5. *Dados $1 \leq p < \infty$ e um aberto Ω, o conjunto das funções contínuas em Ω é denso em $L^p(\Omega)$.*

Para uma demonstração, vide [R2, Teorema 10.4].

Definição 1.6 (Função Localmente Integrável)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é localmente integrável em $L^p(\Omega)$, e denotaremos isto por $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, se f for uma função mensurável e para qualquer compacto $K \subset \Omega$ e*

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty.$$

Observação 1.7. *Claramente tem-se que qualquer $f \in L^\infty(\Omega)$ é também de $L^p_{loc}(\Omega)$ qualquer que seja $1 \leq p < \infty$.*

Usando a desigualdade de Hölder temos

Proposição 1.8. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Então $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$.*

Demonstração: Vejamos apenas o caso em que $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Peguemos K um subconjunto compacto de Ω e $f \in L^p_{loc}(\Omega)$. Considere χ_K a função característica de K, isto é, a função que vale um nos pontos do conjunto K e zero fora deste. Temos que χ_K pertence a $L^q_{loc}(\Omega)$ para qualquer que seja q. Com isto, aplicando a Desigualdade de Hölder vemos que

$$\int_K |f(x)|dx = \int_K |f(x)|\chi_K(x)\, dx \leq \left[\int_K |f(x)|^p dx\right]^{1/p} |K|^{1/q} < \infty,$$

em que q o expoente conjugado de p. □

Teorema 1.9 (Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Suponha que $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis em Ω tal que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe para todo $x \in \Omega$. Se existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \qquad n = 1, 2, \ldots,\ x \in \Omega,$$

então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx.$$

Para uma demonstração, vide [R2, Teorema 1.34].

1.3 Funções teste

Quando estudamos funções temos que definir o domínio desta, é neste sentido que trabalharemos com o espaço das funções teste o qual será o domínio das distribuições. Além disso, nesta seção destaco dois teoremas de grande importância no nosso estudo, o primeiro faz uso de uma operação nos espaços de funções: o produto convolução, já o último constrói uma função teste constante em um compacto e que se anula fora de uma vizinhança do compacto.

Definição 1.10. *Seja f uma função contínua definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. O suporte de $f(x)$, $S(f)$, é o fecho em Ω do conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tal que $f(x) \neq 0$. Isto é,*

$$S(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \bigcap \Omega.$$

Propriedades 1.11. *Sejam f, g funções definidas em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então*

a. $S(f') \subseteq S(f)$;

b. $S(fg) = S(f) \cap S(g)$;

c. $S(f+g) \subseteq S(f) \cup S(g)$.

Demonstração:

a. Observe que

$$\begin{aligned} x \notin S(f) &\Rightarrow \exists\ r > 0 \text{ tal que se } y \in B(x,r), f(y) = 0 \\ &\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x \notin S(f'). \end{aligned}$$

b. Temos

$$\begin{aligned} x \in int(S(fg)) &\Leftrightarrow \exists\ r > 0 \text{ tal que se } y \in B(x,r), f(y)g(y) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f(y) \neq 0 \text{ e } g(y) \neq 0 \text{ em } B(x,r) \\ &\Leftrightarrow x \in int(S(f)) \text{ e } x \in int(S(g)) \\ &\Leftrightarrow x \in [int(S(f))] \cap [int(S(g))]. \end{aligned}$$

c. Note que

$$\begin{aligned} x \notin S(f) \cup S(g) &\Rightarrow \exists\ r > 0 \text{ tal que se } y \in B(x,r), f(y) = 0 = g(y) \\ &\Rightarrow 0 = f(y) + g(y), \forall\ y \in B(x,r) \Rightarrow x \notin S(f+g). \end{aligned}$$

Mostrando as afirmações. □

Definição 1.12. *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções teste em Ω, ou seja, o conjunto das funções a valores complexos indefinidamente diferenciáveis e com suporte compacto em Ω.*

Observação 1.13. *Dado Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, $C_c^\infty(\Omega) \neq \varnothing$.*

De fato, seja

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{(|x|^2-1)^{-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Note que, $S(\phi)$ é igual à bola fechada de centro 0 e raio 1, e como para todo $k \in \mathbb{N}$ vale $\lim\limits_{t\to 0^-} \left(e^{\frac{1}{t}}\right)^{(k)} = 0$, temos que $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. De modo mais geral, nem sempre teremos $0 \in \Omega$, porém basta tomarmos $p \in \Omega$ arbitrário, como Ω é aberto existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(p,r) \subset \Omega$ e definamos

$$\phi_{p,r}(x) = \begin{cases} e^{(|x-p|^2-r^2)^{-1}} & x \in B(p,r) \\ 0 & x \neq B(p,r). \end{cases}$$

Assim $\phi_{p,r} \in C_c^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.14. *Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\int \phi(x)\, dx = 1,\ \phi \geq 0,\ S(\phi) \subseteq \{x : |x| \leq 1\}, \tag{1.2}$$

e seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e definamos para $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(x) = \int f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy = \varepsilon^{-n}\int f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy. \tag{1.3}$$

Então,

i. *$f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;*

ii. *se $f(x) = 0$ q.t.p. fora do conjunto fechado A, $S(f_\varepsilon) \subseteq A + \{x : |x| \leq \varepsilon\}$;*

iii. *se f é contínua e $S(f)$ é compacto, $f_\varepsilon \to f$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$.*

Demonstração: A segunda expressão de f_ε mostra que

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x_o)| &= \varepsilon^{-n}\left|\int f(y)\left(\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x_o-y}{\varepsilon}\right)\right)dy\right| \\ &\leq \varepsilon^{-n}\int |f(y)|\left|\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{x_o-y}{\varepsilon}\right)\right|dy \\ &\leq C\int_K |f(y)|\sup|\nabla(\phi)||x-x_o|dy \\ &\leq C|x-x_o|. \end{aligned} \tag{1.4}$$

em que K é um compacto que contém $x - \varepsilon S(\phi)$ para x próximo de x_o. Logo, f_ε é contínua em x_o. Note que,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f_\varepsilon(x+he_i)-f_\varepsilon(x)}{h} &= \varepsilon^{-n}\lim_{h\to 0}\frac{\int f(y)\left(\phi\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)dy}{h}\\
&= \varepsilon^{-n}\lim_{h\to 0}\frac{\int f(y)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\left(\frac{x-y+rhe_i}{\varepsilon}\right)\frac{h}{\varepsilon}dy}{h}\\
&\to \varepsilon^{-n-1}\int f(y)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy \text{ q.t.p.},
\end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Cominada, Teorema 1.9. Como podemos fazer este processo indefinidamente, temos que $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. O que prova ***i***.

Agora, provemos ***ii***. Se $f(x) = 0$ q.t.p. fora do conjunto fechado A, então a $f_\varepsilon(x)$ é não nula se existir $|y| < 1$ tal que $x - \varepsilon y \in A$. Mas

$$x - \varepsilon y \in A \Rightarrow x - \varepsilon y + \varepsilon y \in A + \varepsilon y \Rightarrow x \in A + \varepsilon y \subseteq A + \{x : |x| \leq \varepsilon\}.$$

Para mostrarmos ***iii***, tomemos $A = S(f)$ e, pelo item ***ii***, concluimos que $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, uma vez que $S(f_\varepsilon) \subseteq S(f) + \{x : |x| \leq \varepsilon\}$ =compacto. Além disso,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_\varepsilon(x)| &= \left|\int_{S(\phi)}(f(x) - f_\varepsilon(x-\varepsilon y))\phi(y)dy\right|\\
&\leq \sup_{|y|\leq 1}|f(x) - f(x-\varepsilon y)|\left|\int_{S(\phi)}\phi(y)dy\right|\\
&\leq \sup_{|y|\leq 1}|f(x) - f(x-\varepsilon y)| \to 0,
\end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$, pois f é uma função contínua num compacto, portanto, f é uniformemente contínua neste compacto. □

Corolário 1.15. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f_ε é definida como em (1.3) quando $\varepsilon > 0$. Então $\|f_\varepsilon\|_1 = \int |f_\varepsilon|dx \leq \|f\|_1$. Além disso, $\|f_\varepsilon - f\|_1 \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Demonstração: Pelo Teorema de Fubini, e a invariância por translações de dx nos permitem concluir que

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon\|_1 &= \int |f_\varepsilon|dx = \int\left|\int f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy\right|dx\\
&\leq \int\left(\int |f(x-\varepsilon y)|\phi(y)dy\right)dx\\
&= \int \phi(y)\left(\int |f(x-\varepsilon y)|dx\right)dy = \|f\|_1,
\end{aligned}$$

pois, por (1.2), $\int \phi dy = 1$. Por outro lado, dado $\delta > 0$, existe g contínua e com suporte compacto tal que $\|f - g\|_1 < \delta$, uma vez que C_c^o é denso em L^p, $1 \leq p < \infty$. Então

$$\|f - f_\varepsilon\|_1 = \|f - g + g - g_\varepsilon + g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - g_\varepsilon\|_1 + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_1.$$

Note que,

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_1 &= \left\| \int g(x-\varepsilon y)\phi(y)dy - \int f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy \right\|_1 \\ &= \left\| \int (g(x-\varepsilon y) - f(x-\varepsilon y))\phi(y)dy \right\|_1 \\ &= \|(g-f)_\varepsilon\|_1 \le \|g-f\|_1. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\|f - f_\varepsilon\|_1 \le \|f-g\|_1 + \|g-g_\varepsilon\|_1 + \|f-g\|_1 < 2\delta + \|g-g_\varepsilon\|_1.$$

Pelo Teorema 1.14, temos que $g_\varepsilon \to g$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$ e $S(g_\varepsilon)$ contém um compacto fixo, independente de ε, para $0 < \varepsilon < 1$.

Em particular, $\|g - g_\varepsilon\| < \delta$ se ε for suficientemente pequeno, e $\|f - f_\varepsilon\| < 3\delta$ se $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ para um certo ε_o. □

Corolário 1.16. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e f_ε é definida como em (1.3) quando $\varepsilon > 0$. Então $\|f_\varepsilon\|_p = \int |f_\varepsilon|dx \le \|f\|_p$. Além disso, $\|f_\varepsilon - f\|_p \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.*

Demonstração: Análoga à demonstração do Corolário 1.15, fazendo uso da desigualdade de Minkowski para integrais. □

Corolário 1.17. *Seja K um subconjunto compacto de um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Então existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $0 \le \psi \le 1$ e $\psi = 1$ numa vizinhança de K.*

Demonstração: Seja $\delta = d(K, \partial\Omega) = \inf\{|x-y|,\ x \in K,\ y \in \Omega\}$ se $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, ou $\delta = 1$ caso $\Omega = \mathbb{R}^n$. Note que, $\delta > 0$, pois é a distância entre um compacto e um fechado disjunto.

Consideremos números positivos $\varepsilon,\ \varepsilon_1$, tais que $\varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon < \delta$, e seja a função

$$f = \chi_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in K_1 \doteq K + \{|x| \le \varepsilon_1\} \\ 0 & \text{se } t \notin K_1. \end{cases}$$

Então, $\psi = f_\varepsilon = \int f(x-\varepsilon y)\phi(y)dy$, onde ϕ satisfaz (1.2). Assim, temos que $S(f_\varepsilon) \subseteq K_1 + \{|x| \le \varepsilon\} = K + \{|x| \le \varepsilon_1\} + \{|x| \le \varepsilon\} \subseteq K + \{|x| \le \varepsilon + \varepsilon_1\}$, e portanto, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Para concluirmos a nossa demonstração, devemos mostrar que $\psi = 1$ numa vizinhança de K. Sejam $U = \{x \in \Omega : d(x,K) < \varepsilon_1 - \varepsilon\}$ e $U' = K + \{x \in \Omega : |x| < \varepsilon_1 - \varepsilon\}$, afirmamos que $U = U'$. De fato, se $y \in U'$, então $y = x_1 + x_2$ com $x_1 \in K$ e $|x_2| < \varepsilon_1 - \varepsilon$. Logo,

$$d(y,K) \le d(y,x_1) = d(x_1 + x_2, x_1) = |x_2| < \varepsilon_1 - \varepsilon \Rightarrow y \in U.$$

Para $y \in U$, temos que ou $y \in K \Rightarrow y \in U'$, ou $y \in U \setminus K$, como $d(y,K) \leq \varepsilon_1 - \varepsilon$, então existe $x_1 \in B(y, \varepsilon_1 - \varepsilon) \cap K$. Portanto, $y = x_1 + (y - x_1) \in U'$.

Assim, se $x \in K + \{|x| < \varepsilon_1 - \varepsilon\}$, temos que

$$x - \varepsilon y \in K + \{|x| < \varepsilon_1 - \varepsilon\} + \{|x| \leq \varepsilon\} = K + \{|x| < \varepsilon_1\} \subseteq K_1.$$

Logo,

$$f_\varepsilon(x) = \int f(x - \varepsilon y)\phi(y)dy = \int_{|y|<1} f(x - \varepsilon y)\phi(y)dy = \int 1\phi(y)dy = 1.$$

□

Definição 1.18. *Uma sequência (ϕ_j) de funções $C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$ se*

i *existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subseteq K$, $j = 1, 2, \ldots$, e*

ii *para todo natural m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.*

1.4 Distribuições

Já sabemos como acontece a convergência em $C_c^\infty(\Omega)$, assim podemos definir funcionais contínuos em $C_c^\infty(\Omega)$. Tal funcional é uma distribuição. Veremos alguns exemplos de distribuições e como se dá a identificação entre espaços de funções como subespaço das distribuições.

Definição 1.19. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto. Um funcional linear contínuo $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ é dito uma distribuição em Ω. Isto é, sejam $\phi_1, \phi_2 \in C_c^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e (ϕ_j) é uma sequência em $C_c^\infty(\Omega)$, então se $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ satisfaz:*

- *$u(\phi_1 + \lambda\phi_2) = u(\phi_1) + \lambda u(\phi_2)$;*
- *se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então $u(\phi_j) \to u(0) = 0$,*

então u é uma distribuição. Denotamos o espaço das distribuições em Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$, e $u(\phi) = \langle u, \phi \rangle$.

Exemplo 1.20. *Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ definimos a distribuição "delta de Dirac" por $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$. De fato, δ é linear:*

$$\langle \delta, \phi_1 + \lambda\phi_2 \rangle = (\phi_1 + \lambda\phi_2)(0) = \phi_1(0) + \lambda\phi_2(0) = \langle \delta, \phi_1 \rangle + \lambda \langle \delta, \phi_2 \rangle.$$

δ é contínua: se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então

$$\langle \delta, \phi_j \rangle = \phi_j(0) \to 0.$$

Exemplo 1.21.
$$\langle T, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |t|\phi'(t)dt, \ \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$
T define uma distribuição. De fato, T é linear:

$$\begin{aligned}\langle T, \phi_1 + \lambda\phi_2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} |t|(\phi_1'(t) + \lambda\phi_2'(t))dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |t|\phi_1'(t)dt + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} |t|\phi_2'(t)dt = \langle T, \phi_1 \rangle + \lambda \langle T, \phi_2 \rangle ;\end{aligned}$$

T é contínua: se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, existe a tal que $S(\phi_j) \subseteq [-a, a]$, $\forall\, j$. Daí,

$$|\langle T, \phi_j \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} |t|\phi_j'(t)dt \right| \leq \int_{-a}^{a} |t||\phi_j'(t)|dt \leq a^2 \sup_{t \in S(\phi_j')} |\phi_j'(t)| \to 0.$$

Exemplo 1.22. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, Ω aberto de $\mathbb{R}^n$, então T_f definida por*

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int f(x)\phi(x)\ dx, \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

é uma distribuição.

De fato, T_f é linear:

$$\begin{aligned}\langle T_f, \phi_1 + \lambda\phi_2 \rangle &= \int f(\phi_1 + \lambda\phi_2)dx \\ &= \int f\phi_1 dx + \lambda \int f\phi_2 dx = \langle T_f, \phi_1 \rangle + \lambda \langle T_f, \phi_2 \rangle ,\end{aligned}$$

e T_f é contínua: se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, então

$$|\langle T_f, \phi_j \rangle| = \left| \int_{S(\phi_j)} f(t)\phi_j(t)dt \right| \leq \sup_{t \in K} |\phi_j(t)| \int_K |f(t)|dt \to 0,$$

onde K é um compacto que contém o suporte de ϕ_j, $\forall\ j$.

Teorema 1.23. *Se f, g pertencem a $L^1_{loc}(\Omega)$ e são tais que*

$$\langle T_f, \phi \rangle = \langle T_g, \phi \rangle ,\ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

então $f = g$ q.t.p.

Demonstração: Seja K um compacto de Ω, $h(x) \doteq f(x) - g(x)$ e $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ dada pelo Corolário 1.17. Estendendo por zero fora de Ω temos que $\psi h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Consideremos

$$\begin{aligned}(\psi h)_\varepsilon(x) &= \varepsilon^{-n} \int (\psi h)(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \varepsilon^{-n} \int (\psi f)(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy - \varepsilon^{-n} \int (\psi g)(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= \langle T_f, \beta_x \rangle - \langle T_g, \beta_x \rangle = 0,\end{aligned}$$

onde

$$\beta_x(y) = \varepsilon^{-n}\psi(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \in C_c^\infty(\Omega).$$

Pelo Corolário 1.15, temos que $\|(\psi h)_\varepsilon - \psi h\|_1 \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Assim, $\|\psi h\|_1 = 0 \Rightarrow \psi h = 0$ *q.t.p.*, e portanto, $f = g$ *q.t.p.* em K. Ou seja

$$|\{x \in K : f(x) \neq g(x)\}| = 0, \quad \forall\ K \subset\subset \Omega.$$

Consideremos a sequência $K_n = \{x \in \Omega : |x| \leq n \text{ e } d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$ de compactos de Ω. Como $\bigcup K_n = \Omega$, temos

$$|\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}| \leq \bigcup_n |\{x \in K_n : f(x) \neq g(x)\}| = 0.$$

Portanto $f = g$ *q.t.p.* em Ω. □

Observação 1.24. *Denotaremos*

$$\langle f, \phi\rangle = \langle T_f, \phi\rangle = \int f\phi dx.$$

Logo, podemos identificar as funções f localmente integráveis com o funcional T_f do Exemplo 1.22. Analogamente, podemos considerar muitos espaços de funções, entre outros $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$; $C^k(\Omega)$, $1 \leq k \leq \infty$; como subespaços de $\mathcal{D}'(\Omega)$. ***Neste sentido é que as distribuições são funções generalizadas.***

Capítulo 2

Regularização

2.1 Operações com distribuições

Se $u_1,\ u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos

$$\begin{aligned} \langle u_1 + u_2, \phi \rangle &\doteq \langle u_1, \phi \rangle + \langle u_2, \phi \rangle , \\ \langle \lambda u_1, \phi \rangle &\doteq \lambda \langle u_1, \phi \rangle . \end{aligned}$$

Para definir operações mais gerais no espaço das distribuições suponharemos que existam dois operadores lineares e contínuos L e L' de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C_c^\infty(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega (L\phi)\psi dx = \int_\Omega \phi(L'\psi)dx,\ \forall\ \phi, \psi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.1}$$

Se vale (2.1) então chamamos L' de transposto formal de L e vice-versa.

Definição 2.1. *Dizemos que L (L') é contínua se $L\phi_j \to 0$ ($L'\phi_j \to 0$) em $C_c^\infty(\Omega)$ toda vez que $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$.*

Observação 2.2. *Note que, por hipótese, ϕ, $L\phi$, ψ e $L\psi \in C_c^\infty(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$, e portanto, podemos reescrever (2.1) como $\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L'\psi \rangle$. Neste caso, podemos estender o operador L a um operador $\widetilde{L} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que*

$$\langle \widetilde{L}u, \psi \rangle = \langle u, L'\psi \rangle ,\ \forall\ u \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \forall\ \psi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Observe que, $\widetilde{L}u$ é um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. De fato, $\widetilde{L}u$ é linear:

$$\begin{aligned} \left\langle \widetilde{L}u, \phi + \lambda\psi \right\rangle &= \langle u, L'(\phi + \lambda\psi) \rangle = \langle u, L'(\phi) + \lambda L'(\psi) \rangle \\ &= \langle u, L'(\phi) \rangle + \lambda \langle u, L'(\psi) \rangle = \left\langle \widetilde{L}u, \phi \right\rangle + \lambda \left\langle \widetilde{L}u, \psi \right\rangle . \end{aligned}$$

$\widetilde{L}u$ é contínuo: seja $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, como L' é contínuo e $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, temos que

$$\left\langle \widetilde{L}u, \phi_j \right\rangle = \langle u, L'\phi_j \rangle \to 0.$$

Além disso, se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ então $L'\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, e portanto, $\langle u, L'\phi_j \rangle \to 0$. Logo, $\widetilde{L}u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Assim, se $u \in C_c^\infty(\Omega)$, segue de (2.1) que $\int (Lu)\phi dx = \left\langle \widetilde{L}u, \phi \right\rangle$, ou seja, $\widetilde{L}u \in L^1_{loc}$ e $Lu = \widetilde{L}u$.

Logo, $\widetilde{L}$ é uma extensão de L, e frequentemente, denotamos por L o operador original e a sua extensão $\widetilde{L}$.

Exemplo 2.3 (Produto por funções C^∞)**.** *Seja $f \in C^\infty(\Omega)$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, e definamos $L : C_c^\infty(\Omega) \to C_c^\infty(\Omega)$ dada por $(L\phi)(x) = f(x)\phi(x)$.*

Note que,

$$\begin{aligned} \langle L\phi, \psi \rangle &= \int (L\phi)(x)\psi(x)dx = \int f(x)\phi(x)\psi(x)dx \\ &= \int \phi(x)f(x)\psi(x)dx = \int \phi(x)(L\psi)(x)dx = \langle \phi, L\psi \rangle . \end{aligned}$$

Logo, $L = L'$. Como,

$$L(\phi_1 + \lambda\phi_2)(x) = f(x)(\phi_1 + \lambda\phi_2) = f(x)\phi_1 + \lambda f(x)\phi_2 = L(\phi_1) + \lambda L(\phi_2),$$

temos que L é linear. Provemos a continuidade de L.
Se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, existe $K \subset\subset \Omega$ tal que $S(\phi_j) \subset K$, $\forall\ j$. Como $\partial^\alpha f\big|_K$ é limitada, vemos que

$$L\phi_j = f\phi_j \to 0, \text{ em } C_c^\infty(\Omega).$$

E a operação "multiplicação por f" fica definida para qualquer distribuição u por:

$$\langle fu, \phi \rangle = \langle u, f\phi \rangle . \tag{2.2}$$

Exemplo 2.4 (Derivação)**.** *Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ coordenadas cartesianas em Ω e definamos $L = \frac{\partial}{\partial x^j}$.*

Sejam $\phi,\ \psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e escolha $a_j,\ b_j$ tal que $\Pi_j(S(\phi\psi)) \subseteq [a_j, b_j]$, em que Π_j é a projeção na $j-$ésima coordenada. Estendendo $\phi\psi$ como zero fora de Ω obtemos, integrando por partes em relação à variável x_j e usando o Teorema de Fubini,

$$\int_\Omega (L\phi)\psi dx = \int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x^j}(x)\psi(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}(x)\psi(x)dx_1 \ldots dx_n.$$

Como,

$$\begin{aligned} \int_{a_j}^{b_j} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}(x)\psi(x)dx_j &= (\phi\psi)(x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n)\Big|_{a_j}^{b_j} + \\ &- \int_{a_j}^{b_j} \phi(x)\frac{\partial \psi}{\partial x^j}(x)dx_j = -\int_{a_j}^{b_j} \phi\frac{\partial \psi}{\partial x^j}dx_j \end{aligned}$$

Vemos que $-\frac{\partial}{\partial x^j}$ é o transposto formal de $\frac{\partial}{\partial x^j}$, e podemos definir

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x^j}, \phi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right\rangle, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{2.3}$$

Resta-nos mostrar a continuidade de $L = \frac{\partial}{\partial x^j}$, uma vez que o operador derivada já é linear. Se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x^j} \to 0, \text{ em } C_c^\infty$$

o que mostra a continuidade de $\frac{\partial}{\partial x^j}$.

Exemplo 2.5. *Um operador diferencial linear com coeficientes C^∞ é uma combinação de derivações e multiplicações por funções C^∞. Se L é um tal operador é possível encontrar L' aplicando reiteradamente (2.2) e (2.3).*

Exemplo 2.6. *Seja $T : \Omega \to \Omega$ um difeomorfismo, isto é, uma bijeção de Ω sobre Ω, tal que T e T^{-1} são de classe C^∞ e definamos $L_T\phi = \phi \circ T, \ \phi \in C_c^\infty(\Omega)$.*

Note que, $S(\phi \circ T) = T^{-1}(S(\phi))$. De fato,

$$\begin{aligned} x \notin S(\phi \circ T) \ &\Leftrightarrow \ (\phi \circ T) = 0 \Leftrightarrow \phi(T) = 0, \text{ numa vizinhança de } x \\ &\Leftrightarrow \ T(x) \notin S(\phi) \Leftrightarrow x \notin T^{-1}(S(\phi)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como, função contínua "leva" compacto em compacto, temos que $L_T \in C_c^\infty(\Omega)$. Para encontrar L' consideremos a integral a seguir e apliquemos o teorema de mudança de variáveis nela,

$$\int_\Omega \phi(T(y))\psi(y)dy = \int_\Omega \phi(x)\psi(T^{-1}(x))|J(T^{-1})(x)|dx.$$

Assim, somos impulsionados a definir $L'_T\psi = |J(T^{-1})|\psi \circ T^{-1}$. Como a matriz jacobiana de T^{-1} é não singular e seu determinante nunca nulo, $|J(T^{-1})|$ resulta diferenciável. Quando $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definamos então

$$\langle u \circ T, \psi \rangle = \left\langle u, (\psi \circ T^{-1})|J(T^{-1})| \right\rangle. \tag{2.5}$$

Exemplo 2.7 (Translação)**.** *Seja $a \in \mathbb{R}^n$ e a função $\tau_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\tau_a(x) = x - a$. Definimos a translação de $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ como a função $\phi_a(x) = \phi \circ \tau_a(x) = \phi(x-a)$. Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, a translação de u se define usando (2.5), isto é,*

$$\langle u_a, \phi \rangle \doteq \langle u \circ \tau_a, \phi \rangle = \left\langle u, \phi \circ \tau_a^{-1} \right\rangle = \langle u, \phi \circ \tau_{-a} \rangle.$$

Assim, temos

$$\langle u_a, \phi \rangle = \langle u, \phi(x+a) \rangle. \tag{2.6}$$

Exemplo 2.8 (Reflexão). *Seja Ω um aberto simétrico em relação a origem e consideremos $\eta(x) = -x$. Assim, definimos a reflexão de ϕ por $\check{\phi}(x) = \phi \circ \eta(x) = \phi(-x)$. Logo, se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definimos sua reflexão por:*

$$\langle \check{u}, \phi \rangle \doteq \langle u \circ \eta, \phi \rangle = \langle u, \phi \circ \eta \rangle = \left\langle u, \check{\phi} \right\rangle, \ \forall \ \phi \in C_c^{\infty}(\Omega). \tag{2.7}$$

já que $(\check{\phi})^{-1} = \check{\phi}$.

2.2 Derivadas distribucionais e derivadas clássicas

Neste momento, podemos nos perguntar quais relações podemos ter entre as derivadas clássicas e as distribucionais, para isso comecemos vendo o cálculo da derivada no sentido das distribuições de uma função $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, tal que os limites

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0^+), \ \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0^-)$$

existam e sejam finitos. Assim, denotamos com $\{f'\}$ a função definida como $\frac{df}{dx}$ se $x \neq 0$ e não definida para $x = 0$ e suponhamos que $\{f'\} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Antes de calcularmos f', a derivada de f no sentido das distribuições, notemos que se $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, então $S(\phi) \subseteq [-N, N]$, para algum $N > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \langle f', \phi \rangle &= -\langle f, \phi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-N}^{-\varepsilon} f \phi' dx + \int_{\varepsilon}^{N} f \phi' dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-N}^{-\varepsilon} f' \phi dx + \int_{\varepsilon}^{N} f' \phi dx \right) - \lim_{\varepsilon \to 0} \left(f(x)\phi(x) \Big|_{N}^{-\varepsilon} + f(x)\phi(x) \Big|_{\varepsilon}^{N} \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\langle f', \phi \rangle = (f(0^+) - f(0^-))\phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{f'\} \phi dx. \tag{2.8}$$

Exemplo 2.9. *Derivemos, no sentido das distribuições, a função de Heaviside, isto é, a função $H(x)$, definida por*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & se \ x > 0 \\ 0, & se \ x < 0. \end{cases}$$

Note que, $H(x)$ como função de L^1_{loc} não precisa estar definida na origem. Além disso, $H(0^+) = 1$, $H(0^-) = 0$ e $\{H'\} = 0$. Assim, para toda $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$, temos que

$$\langle H', \phi \rangle = (H(0^+) - H(0^-))\phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{H'\} \phi dx = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

E portanto, a derivada distribucional de $H(x)$ é a distribuição delta de Dirac do Exemplo 1.20.

Exemplo 2.10. *A função $f(x) = \frac{1}{x}$ em $\mathbb{R}$ não é localmente integrável, porém, num sentido apropriado, ela define uma distribuição.*

De fato, note que $\frac{d\ln|x|}{dx} = \frac{1}{x}$, se $x \neq 0$ e $g(x) = \ln|x|$ é locamente integrável uma vez que

$$\left|\int_{-1}^{1} \ln|x|dx\right| = \left|x\ln|x|\Big|_{-1}^{1} - x\Big|_{-1}^{1}\right| = 2,$$

além disso $\ln|x|$ é contínua para $x \neq 0$.

Se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, existe $N > 0$ tal que $S(\phi) \subseteq [-N, N]$, logo,

$$\begin{aligned} \langle g', \phi\rangle = -\langle g, \phi'\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-N}^{\varepsilon} \ln|x|\phi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{N} \ln|x|\phi'(x)dx\right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx + (\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon))\ln\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Pela desigualdade do valor médio temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)|\ln\varepsilon \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in[-\varepsilon,\varepsilon]}|\phi'(t)|2\varepsilon\ln\varepsilon = C\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon = 0.$$

Portanto,

$$-\langle \ln x, \phi'\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}dx. \tag{2.9}$$

Chamamos tal distribuição de valor principal de $\frac{1}{x}$, e a denotamos por $v.p.\frac{1}{x}$. Portanto, $(\ln x)' = v.p.\frac{1}{x}$ no sentido das distribuições.

Exemplo 2.11. *Para qualquer $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ arbitrária, temos que*

$$\langle f\delta, \phi\rangle = \langle \delta, f\phi\rangle = f(0)\phi(0) = f(0)\langle \delta, \phi\rangle = \langle f(0)\delta, \phi\rangle.$$

Logo, $f\delta = f(0)\delta$, e consequentemente, somente o valor de f em $x = 0$ é relevante para o resultado do produto $f\delta$. Analogamente,

$$\begin{aligned} \langle f\delta', \phi\rangle &= \langle \delta', f\phi\rangle = -\langle \delta, f'\phi + f\phi'\rangle = -(f'(0)\phi(0) + f(0)\phi(0)) \\ &= -\langle f'(0)\delta, \phi\rangle + \langle f(0)\delta', \phi\rangle = \langle f(0)\delta' - f'(0)\delta, \phi\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$f\delta' = f(0)\delta' - f'(0)\delta.$$

Exemplo 2.12. *Como $x\frac{1}{x} = 1$, para $x \neq 0$. É natural que $x(v.p.\frac{1}{x}) = 1$. De fato,*

$$\begin{aligned} \left\langle x\left(v.p.\frac{1}{x}\right), \phi\right\rangle &= \left\langle v.p.\frac{1}{x}, x\phi\right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} \frac{x\phi(x)}{x}dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int \phi dx - \int_{|x|\leq\varepsilon} \phi dx\right) = \int \phi dx = \langle 1, \phi\rangle, \end{aligned}$$

uma vez que,

$$\left|\int_{|x|\leq\varepsilon}\phi dx\right| \leq \int_{|x|\leq\varepsilon}|\phi| \leq \int_{|x|\leq\varepsilon}\sup|\phi| = \sup|\phi|2\varepsilon \to 0,$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Exemplo 2.13 (Regra de Leibniz). *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que*

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial(fu)}{\partial x^j},\phi\right\rangle &= -\left\langle fu,\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right\rangle = -\left\langle u, f\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right\rangle\\ &= -\left\langle u,\frac{\partial(f\phi)}{\partial x^j}-\phi\frac{\partial f}{\partial x^j}\right\rangle\\ &= -\left\langle u,\frac{\partial(f\phi)}{\partial x^j}\right\rangle-\left\langle u,-\phi\frac{\partial f}{\partial x^j}\right\rangle\\ &= \left\langle\frac{\partial u}{\partial x^j},f\phi\right\rangle-\left\langle\frac{\partial f}{\partial x^j}u,-\phi\right\rangle=\left\langle f\frac{\partial u}{\partial x^j}+\frac{\partial f}{\partial x^j}u,\phi\right\rangle,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial(fu)}{\partial x^j} = f\frac{\partial u}{\partial x^j}+\frac{\partial f}{\partial x^j}u,\ \forall\ f\in C_c^\infty(\Omega),\ \forall\ u\in\mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.10}$$

Teorema 2.14 (Regularização). *Se u e f são contínuas em $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ e $\{\frac{\partial u}{\partial x^j}\} = f$ então u é diferenciável em relação a x^j e $\frac{\partial u}{\partial x^j} = f$ no sentido clássico.*

Demonstração: Primeiro, suponhamos que $S(u)$ é um compacto. Assim, se u_ε é dado por (1.3), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^j}(x) &= \varepsilon^{-n}\int u(y)\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]dy = -\varepsilon^{-n}\int u(y)\frac{\partial}{\partial y^j}\left[\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]dy\\ &= \varepsilon^{-n}\int\frac{\partial u}{\partial y^j}(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy = \varepsilon^{-n}\int f(y)\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy = f_\varepsilon(x).\end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.14 *iii*, temos que $u_\varepsilon \to u$ e $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^j} = f_\varepsilon \to f$ uniformemente quando $\varepsilon\to 0$. E portanto, $\frac{\partial u}{\partial x^j} = f$ no sentido usual [E, pag. 302].

No caso geral, seja $x_o\in\Omega$ e a função $\psi\in C_c^\infty(\Omega)$, dada pelo Corolário 1.17, tal que esta seja igual a 1 numa vizinhança de x_o. Logo, $S(\psi u)$ é um compacto e

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial x^j} = \frac{\partial\psi}{\partial x^j}u+\psi\frac{\partial u}{\partial x^j} = \frac{\partial\psi}{\partial x^j}u+\psi f$$

é contínua. Então, pela primeira parte da demonstração, concluímos que

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial x^j} = \frac{\partial\psi}{\partial x^j}u+\psi f \tag{2.11}$$

no sentido clássico. Mas na vizinhança de x_o temos que ψ vale 1, então a equação (2.11) se reduz a $\frac{\partial u}{\partial x^j} = f$ no sentido clássico. Como x_o é arbitrário temos a igualdade em Ω. □

Observação 2.15. *O Teorema 2.14 nos diz que para funções suficientemente regulares teremos igualdade entre a derivada clássica e a derivada no sentido das distribuições.*

2.3 Derivadas e Primitivas

Motivados por resultados do Cálculo decorrentes do Teorema do Valor Médio, vejamos o análogo para distribuições.

Lema 2.16. *Uma função teste $\phi \in C_c^\infty(a,b)$ é a derivada de outra função teste ψ se, e somente se, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 0$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\phi(x) = \psi'(x)$ e $S(\psi) \subseteq [-N, N]$ para certo $N \in \mathbb{R}$, então

$$0 = \psi(N) - \psi(-N) = \int_{-N}^{N} \psi'(t)dt = \int \phi dt.$$

($\Leftarrow$) Dada $\phi \in C_c^\infty(a,b)$, sejam a' e b' tais que $S(\phi) = [a', b'] \subset (a,b)$ e definamos

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt.$$

Se $x < a'$, temos que

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(x)dx \equiv 0.$$

Se $x > b'$, temos que

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt = \psi(x).$$

Portanto, $\psi \in C_c^\infty(a,b)$. □

Teorema 2.17. *Se $u \in \mathcal{D}'(a,b)$ e $u' = 0$, então $u = cte$.*[1]

Demonstração: Seja $\phi_o \in C_c^\infty(a,b)$ tal que $\int \phi_o = 1$. Dada $\phi \in C_c^\infty(a,b)$ escrevemos

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(x) - \left(\int \phi dt\right) \phi_o(x) + \left(\int \phi dt\right) \phi_o(x) \\ &= \psi'(x) + \left(\int \phi dt\right) \phi_o(x), \end{aligned} \tag{2.12}$$

pois

$$\int \left(\phi(x) - \left(\int \phi dt\right) \phi_o(x)\right) dx = \int \phi(x)dx - \int \phi dt \int \phi_o(x)dx = 0,$$

[1] As funções constantes pertencem a $L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'$ e é nesse sentido que $u = cte$.

então, pelo Lema 2.16, existe $\psi \in C_c^\infty(a,b)$ tal que

$$\psi'(x) = \phi(x) - \left(\int \phi dt\right) \phi_o(x).$$

Por hipótese,

$$\langle u, \psi' \rangle = - \langle u', \psi \rangle = - \langle 0, \psi \rangle = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle u, \phi \rangle &= \left\langle u, \psi' + \left(\int \phi dt\right) \phi_o(x) \right\rangle = \langle u, \psi' \rangle + \int \phi(t) dt \, \langle u, \phi_o \rangle \\ &= \int \langle u, \phi_o \rangle \, \phi(t) dt = \int c\phi(t) dt = \langle c, \phi \rangle \,, \end{aligned}$$

ou seja, $u = c$, com $c = \langle u, \phi_o \rangle$. □

Corolário 2.18. *Se $u \in \mathcal{D}'(a,b)$ e $u^{(k)} = 0$, então u é um polinômio de grau menor ou igual a $k-1$.*

Demonstração: Provemos por indução sobre k. Pelo Teorema 2.17, temos que vale para $k = 1$. Suponhamos, assim, que valha para $k = n-1$, $n > 2$.

Provemos que vale para $k = n$. De fato, se tivermos que $u^{(n)} = 0$, então definimos $v = u^{(n-1)}$. Logo, pelo Teorema 2.17, concluímos que existe constante c tal que $v = c$. Então,

$$\left(u - c\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)^{(n-1)} = u^{(n-1)} - c = v - c = 0$$

no sentido das distribuições. Portanto, pela hipótese de indução,

$$u - c\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j,$$

para certos a_j, $j = 0, \ldots, n-2$. □

Corolário 2.19. *Toda distribuição $u \in \mathcal{D}'(a,b)$ tem uma primitiva.*

Demonstração: Seja $\phi_o \in C_c^\infty(a,b)$ tal que $\int \phi_o = 1$ e definamos

$$\langle v, \phi \rangle = - \langle u, F(\phi) \rangle$$

em que

$$F(\phi)(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\phi(t) - \left(\int \phi ds\right) \phi_o(t)\right) dt.$$

Note que $S(F(\phi)) \subset S(\phi) \cup S(\phi_o)$. Logo,

$$\left\langle \frac{dv}{dx}, \phi \right\rangle = -\left\langle v, \frac{d\phi}{dx} \right\rangle = \left\langle u, F\left(\frac{d\phi}{dx}\right) \right\rangle.$$

Como $F\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = \phi$, segue que $\frac{dv}{dx} = u$ em $\mathcal{D}'$. v é linear, pois a integral é linear

$$\begin{aligned}
\langle v, \phi_1 + \lambda\phi_2 \rangle &= -\left\langle u, \int_{-\infty}^{x} \left((\phi_1 + \lambda\phi_2)(t) - \left(\int (\phi_1 + \lambda\phi_2) ds \right) \phi_o(t) \right) dt \right\rangle \\
&= -\left\langle u, \int_{-\infty}^{x} \left(\phi_1(t) - \left(\int \phi_1 ds \right) \phi_o(t) \right) dt \right\rangle + \\
&\quad -\lambda \left\langle u, \int_{-\infty}^{x} \left(\phi_2(t) - \left(\int \phi_2 ds \right) \phi_o(t) \right) dt \right\rangle \\
&= \langle v, \phi_1 \rangle + \lambda \langle v, \phi_2 \rangle .
\end{aligned}$$

Se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(a,b)$, existe $K \subset\subset (a,b)$ tal que $S(\phi_j) \subset K$, para todo j. Daí, $S(F(\phi_j)) \subset S(\phi_j) \cup S(\phi_o) \subset K \cup S(\phi_o) = K'$ para todo j. Além disso, as derivadas de $F(\phi_j)$ convergem uniformemente para zero em K'. Então

$$\langle v, \phi_j \rangle = -\left\langle u, \int_{-\infty}^{x} \left(\phi_j(t) - \left(\int \phi_j ds \right) \phi_o(t) \right) dt \right\rangle \to 0,$$

pois u é uma distribuição. O que prova a continuidade da v. $\square$

Capítulo 3

Localização e valores de fronteira

3.1 Partições da unidade

Quando queremos comparar duas funções as aplicamos num determinado ponto do domínio destas, porém não podemos fazer isso com as distribuições. Para localizarmos distribuições faremos uso de partições da unidade.

Definição 3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Uma sequência $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ de funções pertencentes a $C_c^\infty(\Omega)$ se diz uma partição da unidade de Ω se para $j = 1, 2, \ldots$ tivermos:*

1. *todo ponto $x \in \Omega$ possui uma vizinhança que intersepta apenas um número finito de $S(\phi_j)'s$;*
2. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \equiv 1,\ x \in \Omega$;
3. $0 \leq \phi_i(x) \leq 1,\ x \in \Omega$.

Observação 3.2. *Para cada $x_o \in \Omega$ fixo, seja U_o a vizinhança de x_o dada por 1. Se $y \in U_o$, a soma infinita $\sum \phi_i(y)$ terá, na verdade, um número finito e fixo de parcelas não nulas, ou seja, localmente a série é uma soma finita. Logo, podemos diferenciá-la termo a termo e obtermos*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}(x) \equiv 0.$$

Definição 3.3. *Dada uma cobertura aberta $\mathcal{V} = (V_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de Ω, dizemos que uma partição da unidade (ϕ_i) está subordinada a $\mathcal{V}$, se para todo $\alpha \in \Lambda$ existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $S(\phi_i) \subseteq \mathcal{V}_\alpha$.*

Teorema 3.4. *Seja K um compacto de $\mathbb{R}^n$ e consideremos abertos $V_1, \ldots, V_l$ tais que $K \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{l} V_j$. Então existem funções $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$, $j = 1, 2, \ldots, l$ tais que:*

1. $\sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) \leq 1$;

2. $\sum_{j=1}^{l} \phi_j(x) = 1$, *numa vizinhança de* K;

3. $0 \leq \phi_j \leq 1$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Para cada $j = 1, \ldots, l$ existe compacto $K_j \subset V_j$ de forma que $K \subset \bigcup_{j=1}^{l} K_j$. Com efeito, dado $j = 1, \ldots, l$, escreva $V_j = \bigcup_{\nu} U_\nu^j$, em que $\overline{U_\nu^j} \subset U_{\nu+1}^j$. Seja $B_\nu = \bigcup_{j=1}^{l} U_\nu^j$. Temos

$$\overline{B}_\nu = \overline{\bigcup_{j=1}^{l} U_\nu^j} \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} \overline{U}_\nu^j \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} U_{\nu+1}^j = B_{\nu+1}.$$

Assim

- $\overline{B}_\nu \subset\subset B_{\nu+1} \subset \bigcup_j V_j$ e

- $\bigcup_\nu \overline{B}_\nu = \bigcup_\nu \left(\bigcup_{j=1}^{l} \overline{U}_\nu^j \right) = \bigcup_{j=1}^{l} \left(\bigcup_\nu \overline{U}_\nu^j \right) = \bigcup_{j=1}^{l} V_j$.

Por hipótese, K está contido na união dos V_j, assim, temos que existe ν_o tal que $K \subset\subset B_{\nu_o} \subset B_{\nu_o+1}$. Logo, para cada $j = 1, \ldots, l$ tome $K_j = \overline{U_{\nu_o}^j} \subset\subset V_j$, e portanto,

$$K \subset\subset B_{\nu_o} \subset \bigcup_{j=1}^{l} \overline{U}_{\nu_o}^j = \bigcup_{j=1}^{l} K_j.$$

Pelo Corolário 1.17, obtemos funções $\psi_j \in C_c^\infty(V_j)$, $j = 1, \ldots, l$ tais que $0 \leq \psi_j \leq 1$ e $\psi_j = 1$ numa vizinhança de K_j. Assim, definamos $\phi_1 = \psi_1$, $\phi_2 = \psi_2(1-\psi_1)$,..., $\phi_l = \psi_l(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{l-1})$. Afirmamos que

$$\sum_{j=1}^{l} \phi_j = 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_l).$$

De fato, provemos por indução em l. Se $l = 1$, temos

$$\phi_1 = 1 - (1-\psi_1) = 1 - 1 + \psi_1 = \psi_1.$$

Suponhamos que valha para $l = n-1$, então

$$\sum_{j=1}^{n-1} \phi_j = 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_{l-1}).$$

Assim, para $l = n$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \phi_j &= \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j + \phi_l = 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_{l-1}) \\ &+ \psi_l(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{l-1}) = 1-(1-\psi_1)(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_l).\end{aligned}$$

Como, $(1-\psi_j) = 0$ numa vizinhança de K_j, verifica-se *2*. Note que,

$$0 \leq \psi_j \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\psi_j \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1-\psi_j \leq 1,$$

e assim obtemos *3* e *1*. □

Definição 3.5. *Dizemos que u_1, $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ são iguais num aberto $U \subseteq \Omega$ se para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$, temos*

$$\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle .$$

Teorema 3.6. *Sejam u_1, $u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tais que todo ponto de Ω tenha uma vizinhança onde $u_1 = u_2$. Então $u_1 = u_2$ em Ω.*

Demonstração: Queremos mostrar que $\langle u_1, \phi \rangle = \langle u_2, \phi \rangle$, $\forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Para isso, tomemos $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, e seja $K = S(\phi)$. Como K é compacto existe uma cobertura finita $V_1, \ldots, V_l$ de K formada por abertos onde u_1 e u_2 coincidem. Sejam $\phi_j \in C_c^\infty(V_j)$ dadas pelo Teorema 3.4, então podemos escrever

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^{l} \phi_j(x)\phi(x). \tag{3.1}$$

Logo, $\phi_j\phi \in C_c^\infty(V_j)$, pois $S(\phi_j\phi) \subset S(\phi_j) \subset V_j$. Então,

$$\begin{aligned}\langle u_1, \phi \rangle &\overset{(3.1)}{=} \left\langle u_1, \sum_{j=1}^{l} \phi_j(x)\phi(x) \right\rangle = \sum_{j=1}^{l} \langle u_1, \phi_j(x)\phi(x) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{l} \langle u_2, \phi_j(x)\phi(x) \rangle = \langle u_2, \phi \rangle \Rightarrow u_1 = u_2, \text{ em } \Omega.\end{aligned}$$

Concluindo a demonstração. □

Definição 3.7. *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos suporte de u, $S(u)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais u é nulo.*

Exemplo 3.8. *O suporte da distribuição delta de Dirac é igual a $\{0\}$, isto é, $S(\delta) = \{0\}$.*

Com efeito, como,

$$\langle \delta, \phi \rangle = \langle 0, \phi \rangle \,, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

concluímos que, $S(\delta) \subseteq \{0\}$.

Agora, mostremos que $S(\delta) \neq \varnothing$. Para isso, consideremos $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$, para todo x pertencente à bola fechada de centro 0 e raio $\varepsilon > 0$. Logo,

$$\langle \delta, \psi \rangle = \psi(0) = 1,$$

e portanto, $S(\delta) \neq \varnothing$.

Exemplo 3.9. *Consideremos a distribuição u tal que*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta,$$

para $c_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Assim, temos que $S(u) = \{0\}$.

Como, $S(\delta) = \{0\}$, temos que $S(u) \subseteq \{0\}$. Para provarmos a igualdade, mostraremos que $S(u) \neq \varnothing$. Note que, existe β com $|\beta| \leq m$ tal que $c_\beta \neq 0$. Consideremos $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(x) = 1$, para todo x pertencente à bola fechada de centro 0 e raio $\varepsilon > 0$, e consideremos também, $x^\beta \psi = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \psi(x)$. Temos

$$\partial^\alpha (x^\beta \psi) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \partial^\gamma (x^\beta) \partial^{\alpha - \gamma}(\psi)$$

Daí, $\partial^\beta (x^\beta \psi)(0) = \beta! \psi(0) \neq 0$ e $\partial^\alpha (x^\beta \psi)(0) = 0$ para $\alpha \neq \beta$. Portanto

$$\begin{aligned} \left\langle u, x^\beta \psi \right\rangle &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta, x^\beta \psi \right\rangle = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (-1)^{|\alpha|} \left\langle \delta, \partial^\alpha (x^\beta \psi) \right\rangle = c_\beta (-1)^{|\beta|} \beta! \psi(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $S(u) = \{0\}$.

Observação 3.10. *Se F é um fechado de Ω, então $\Omega \setminus F$ é um aberto de Ω. Logo, dizer que u se anula em $\Omega \setminus F$ significa que as distribuições u e 0 se coincidem em $\Omega \setminus F$.*

Portanto, pelo Teorema 3.6, temos que a união de abertos onde u se anula é também um aberto onde u se anula. Logo, existe um maior aberto onde u se *anula. Tal aberto é $\Omega \setminus S(u)$. De fato, seja F_i um dos fechados tal que $u = 0$ em $\Omega \setminus F_i = U_i$, então*

$$\begin{aligned} \Omega \setminus S(u) &= \Omega \bigcap (S(u))^c = \Omega \bigcap \left(\bigcup_i F_i^c \right) \\ &= \bigcup_i \left(\Omega \bigcap F_i^c \right) = \bigcup_i (\Omega \setminus F_i) = \bigcup_i U_i. \end{aligned}$$

Em particular, temos que $S(u)$ é um subconjunto fechado de Ω.

Observação 3.11. *Se u é uma função contínua em Ω, então definimos a distribuição u como um elemento de $L^1_{loc}(\Omega)$, e assim, temos duas definições para o suporte da u, porém estas são equivalentes.*

De fato, consideremos $S(u)$ como o suporte definido para funções e $\widetilde{S}(u)$ o suporte para distribuições.

$$\begin{aligned} x \notin S(u) &\Leftrightarrow \exists \text{ vizinhança de } \; x, V_x : \; u|_{V_x} = 0 \; q.t.p. \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \langle u, \phi \rangle = 0, \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(V_x) \\ &\Leftrightarrow u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(V_x) \\ &\Leftrightarrow x \notin \widetilde{S}(u). \end{aligned}$$

Em que a implicação $\Leftarrow$ em $(*)$ segue do Teorema 1.23.

Definição 3.12. *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos o suporte singular de u, $SS(u)$, como a interseção de todos os fechados de Ω fora dos quais de $u \in C^\infty$, ou seja, $SS(u)$ é a interseção de todos os fechados de Ω tais que para cada um destes fechados F existe uma função $f \in C^\infty(\Omega \setminus F)$ tal que*

$$\langle u, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle = \int f \phi dx, \; \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega \setminus F).$$

Exemplo 3.13. *O suporte singular da distribuição delta de Dirac é igual a $\{0\}$, isto é, $SS(\delta) = \{0\}$.*

De fato, seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$. Logo,

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) = 0 = \langle 0, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle, \; \forall\, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Portanto, $SS(\delta) \subseteq \{0\}$.

Se $SS(u) = \varnothing$, existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\langle \delta, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle, \; \forall\, \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Em particular, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, vemos que $f \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pois se existe $x_o \neq 0$ tal que $f(x_o) \neq 0$, então $f(x) > 0$ (ou $f(x) < 0$) em $B(x_o, r)$, para algum $r < |x_o|$. Se $0 \leq \phi \in C_c^\infty(B(x_o, r))$ e $\phi \equiv 1$ em $B(x_o, \frac{r}{2})$. Segue que

$$0 < (>) \int f\phi = \langle \delta, \phi \rangle = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \ \forall\ x \neq 0.$$

O que não pode acontecer, mostrando a afirmação. Como $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, concluímos que $f \equiv 0$. Mostrando que, $S(\delta) = \varnothing$, uma contradição em vista do Exemplo 3.8.

3.2 Distribuições com suporte compacto

Nesta seção, veremos um subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e faremos resultados de extensão destes subespaços às funções suaves. Além disso, provaremos alguns resultados que garantem a continuidade de distribuições.

Definição 3.14. *Denotamos por $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, o subespaço de $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com suporte compacto.*

Teorema 3.15. *Seja $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, então existe um único funcional linear $\tilde{u} : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ tal que:*

- $\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle\,,\ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega)$;
- $\langle \tilde{u}, \phi \rangle = 0$, *se* $\phi \in C^\infty(\Omega)$ *e* $S(\phi) \cap S(u) = \varnothing$.

Demonstração: Pelo Corolário 1.17, temos que existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que esta é igual a 1 numa vizinhança de $S(u)$. Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, então podemos reescrevê-la como

$$\phi = \phi\psi + (1 - \psi)\phi = \phi_1 + \phi_2,$$

onde $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_2) \cap S(u) = \varnothing$. De fato, se

$$\begin{aligned} x \in S(\phi_2) \quad &\Rightarrow \quad x \in S((1-\psi)\phi) \Rightarrow x \in S(1-\psi) \cap S(\phi) \\ &\Rightarrow \quad x \in S(1-\psi) \Rightarrow x \in \Omega \setminus \{x \in \Omega : \psi(x) = 1\} \Rightarrow x \notin S(u), \end{aligned}$$

pois $\psi(x) = 1$ se $x \in S(u)$.

Existência: Para $\phi \in C^\infty(\Omega)$, definamos $\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi_1 \rangle$, onde $\phi = \phi_1 + \phi_2$ é qualquer decomposição de ϕ com $\phi_1 \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_2) \cap S(u) = \varnothing$. Observe que pelo início da demonstração que tal decomposição de ϕ existe. Agora, se $\phi = \phi_1' + \phi_2'$ é outra decomposição de ϕ tal que $\phi_1' \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_2') \cap S(u) = \varnothing$. Então, $\phi_1 - \phi_1' = \phi_2' - \phi_2$. Logo,

$$S(\phi_1 - \phi_1') \cap S(u) = S(\phi_2' - \phi_2) \cap S(u) = (S(\phi_2') \cap S(\phi_2)) \cap S(u) = \varnothing.$$

Assim, temos que $\phi_1 - \phi_1' \in C_c^\infty(\Omega)$ está suportada num aberto onde u se anula, ou seja, $u(\phi_1 - \phi_1') = 0 \Rightarrow \langle u, \phi_1 \rangle = \langle u, \phi_1' \rangle$, e consequentemente, $\tilde{u}$ está bem definida.

Seja $\varphi_i = \varphi_i \psi + (1-\psi)\varphi_i$, $i = 1, 2$. Note que,

$$\varphi_1 + \lambda\varphi_2 = (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)\psi + (1-\psi)(\varphi_1 + \lambda\varphi_2).$$

Assim,

$$\langle \tilde{u}, \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \rangle = \langle u, (\varphi_1 + \lambda\varphi_2)\psi \rangle = \langle u, \varphi_1\psi \rangle + \lambda \langle u, \varphi_2\psi \rangle = \langle \tilde{u}, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle \tilde{u}, \varphi_2 \rangle .$$

Logo, $\tilde{u}$ é um funcional linear. Verifiquemos, agora, que $\tilde{u}$ satisfaz as condições do teorema. De fato, se $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, \varphi + 0 \rangle = \langle u, \varphi \rangle$. Por outro lado, se $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ e $S(\varphi) \cap S(u) = \varnothing$, então $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle \tilde{u}, 0 + \varphi \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$.

Unicidade: Suponhamos que existam $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ funcionais lineares satisfazendo as condições do teorema. Assim, se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, pelo início da demonstração, temos que,

$$\langle \tilde{u}_1, \phi \rangle = \langle \tilde{u}_1, \phi_1 \rangle + \langle \tilde{u}_1, \phi_2 \rangle = \langle u, \phi_1 \rangle + 0 = \langle \tilde{u}_2, \phi_1 \rangle + \langle \tilde{u}_2, \phi_2 \rangle = \langle \tilde{u}_2, \phi \rangle .$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 3.16. *Uma sequência (ϕ_j) de funções $C^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C^\infty(\Omega)$ se para todo compacto K e todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero em K quando $j \to \infty$.*

Observação 3.17. *Se uma sequência (ϕ_j) de funções pertencentes a $C_c^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_c^\infty(\Omega)$, então (ϕ_j) também converge a zero em $C^\infty(\Omega)$. De fato, seja $(\phi_j) \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Então, existe K compacto tal que*

- *$K \supset S(\phi_j)$, $\forall\ j$;*
- *$D^\alpha \phi_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente em K, $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Seja $K' \subseteq \Omega$ um compacto qualquer e α' um multi-índice arbitrário. Como

$$\sup_{K'} |D^{\alpha'} \phi_j| \leq \sup_K |D^{\alpha'} \phi_j| \to 0,$$

vemos que $\phi_j \to 0$ em $C^\infty(\Omega)$.

Porém, vejamos que a recíproca é falsa. De fato, considere $\Omega = \mathbb{R}$ e $\phi_n(x) = 2^{-n}\phi_o(n^{-1}x)$, onde $S(\phi_o) \subseteq [-1, 1]$ e $\phi_o(x) = 1$ se $|x| \leq \frac{1}{2}$. Note que,

$$|\phi_n^{(k)}(x)| = |2^{-n} n^{-k} \phi_o^{(k)}(n^{-1}x)| \leq C n^{-k} 2^{-n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}$. *Por outro lado,* $S(\phi_n(x)) \supseteq [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$, *pois*

$$\phi_o\left(\frac{x}{n}\right) = 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\frac{n}{2} \leq x \leq \frac{n}{2},$$

e portanto, os suportes das ϕ_n *não estão contidos num compacto fixo.*

Teorema 3.18. *Seja* u *um funcional linear em* $C^\infty(\Omega)$. *Então* u *é contínuo se, e somente se, existem um compacto* $K \subset \Omega$, *uma constante positiva* C *e um natural* m *tais que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |D^\alpha \phi|, \ \forall\ \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{3.2}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que a desigualdade (3.2) é falsa para qualquer escolha de C, K, m, e consideremos $K_n = \{x : |x| \leq n \text{ e } d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$.

Note que cada K_n é um compacto e, além disso, todo compacto $K \subset \Omega$ está inteiramente contido em algum K_{n_o}, $n_o \in \mathbb{N}$.

Assim, tomando $C = m = n$ e $K = K_n$, existe uma função $\phi_n \in C^\infty(\Omega)$ tal que (3.2) não seja verdadeira. Ou seja,

$$r_n \doteq |\langle u, \phi_n\rangle| > n \sum_{|\alpha|\leq n} \sup_{K_n} |D^\alpha \phi_n|, \tag{3.3}$$

em particular, temos que $r_n > 0$.

Definamos $\psi_n = \frac{\phi_n}{r_n}$. Observe que $\psi_n \to 0$ em $C^\infty(\Omega)$. De fato, sejam $K \subset \Omega$ compacto, β um multi-índice e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > |\beta|$ e $K \subseteq K_n$. Então, por (3.3), temos que

$$\sup_K |D^\beta \psi_n| \leq \sum_{|\alpha|\leq n} \sup_{K_n} |D^\alpha \psi_n| < \frac{1}{n}.$$

Entretanto,

$$|\langle u, \psi_n\rangle| = |r_n^{-1} \langle u, \phi_n\rangle| = 1,$$

o que contradiz a continuidade de u.

($\Leftarrow$) Se $\phi_j \to 0$ em $C^\infty(\Omega)$, então

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |D^\alpha \phi_j| \to 0,$$

uma vez que as derivadas de qualquer ordem de ϕ_j tendem uniformemente a zero em qualquer compacto de Ω. Logo $\langle u, \phi_j\rangle \to 0$. □

Observação 3.19. *Notemos que o compacto* K *dado pelo Teorema 3.18 satisfaz:*

$$S(u) \subseteq K.$$

Teorema 3.20. *Seja u um funcional linear em $C_c^\infty(\Omega)$. Então u é contínuo se, e somente se, para cada compacto $K \subset \Omega$, existem uma constante positiva C e um natural m tais que*

$$|\langle u, \phi\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |D^\alpha \phi|, \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega),\ S(\phi) \subseteq K. \tag{3.4}$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponhamos que a tese é falsa. Assim, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que, para quaisquer escolha de C e m a equação (3.4) é falsa. Assim, tomando $C = m = n$ existe uma função $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$, $S(\phi_n) \subseteq K$ tal que (3.4) não é verdadeira. Ou seja,

$$r_n \doteq |\langle u, \phi_n\rangle| > n \sum_{|\alpha|\leq n} \sup_K |D^\alpha \phi_n|, \tag{3.5}$$

em particular, temos que $r_n > 0$.

Definamos $\psi_n = \frac{\phi_n}{r_n}$. Observe que $\psi_n \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. De fato, tome K o mesmo compacto de cima, assim já temos que $S(\psi_n) \subseteq K$, $n = 1, 2, \ldots$. Seja β um multi-índice arbitrário. Se $n > |\beta|$ então, por (3.5), temos que

$$\sup_K |D^\beta \psi_n| \leq \sum_{|\alpha|\leq n} \sup_K |D^\alpha \psi_n| < \frac{1}{n}.$$

Entretanto,

$$|\langle u, \psi_n\rangle| = |r_n^{-1} \langle u, \phi_n\rangle| = 1,$$

o que contradiz a continuidade de u.

($\Leftarrow$) Se $\phi_j \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi_j) \subseteq K$, $j = 1, 2, \ldots$, então existe $j_o \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_j$ para todo $j \geq j_o$. Assim, para este j_o, existem C, m tais que

$$|\langle u, \phi_j\rangle| \leq C| \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_{j_o}} |D^\alpha \phi_j| \to 0,$$

uma vez que as derivadas de qualquer ordem de ϕ_j tendem uniformemente a zero em K_{j_o}. Logo,$\langle u, \phi_j\rangle \to 0$. □

Observação 3.21. *Se o mesmo inteiro m pode ser usado em (3.4) para todo K dizemos que u é uma distribuição de ordem menor ou igual a m, e denotamos o conjunto destas distribuições por $\mathcal{D}'^m(\Omega)$.*

Teorema 3.22. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ se, e somente se, existe um funcional linear contínuo v de $C^\infty(\Omega)$ tal que a restrição $v\big|_{C_c^\infty(\Omega)} = u$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, pelo Teorema 3.15, podemos estender u a um funcional $\tilde{u}$ em $C^\infty(\Omega)$. De fato, como $S(u)$ é compacto temos pelo Corolário 1.17 que existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ que vale 1 numa vizinhança de $S(u)$, segue que $\langle \tilde{u}, \phi \rangle = \langle u, \phi\psi \rangle$, $\forall\ \phi \in C^\infty(\Omega)$.

Assim, aplicando o Teorema 3.20 a u com $K_o = S(\psi)$ obtemos para certos $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $\phi \in C^\infty(\Omega)$ arbitrária que

$$\begin{aligned} |\langle \tilde{u}, \phi \rangle| &= |\langle u, \psi\phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_o} |D^\alpha(\psi\phi)| \\ &\leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sup_{K_o} |D^\beta\phi||D^{\alpha-\beta}\psi| \\ &\leq C' \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{K_o} |D^\alpha\phi|,\ \forall\ \phi \in C^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.18, $\tilde{u}$ é contínuo em $C^\infty(\Omega)$. Portanto, basta definirmos $v = \tilde{u}$.

($\Leftarrow$) Pelo Teorema 3.18, existem $C \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{N}$ e K compacto tais que

$$|\langle v, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |D^\alpha\phi|,\ \forall\ \phi \in C^\infty(\Omega). \tag{3.6}$$

Se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $S(\phi) \cap K = \varnothing$, temos por (3.6) que

$$|\langle u, \phi \rangle| = |\langle v, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |D^\alpha\phi| = 0.$$

Assim,

$$|\langle u, \phi \rangle| = |\langle 0, \phi \rangle|,\ \forall\ \phi \in C_c^\infty(\Omega \setminus K).$$

Então, $u = 0$ em $\Omega \setminus K$, e portanto, $S(u) \subset K$ pois K é um fechado de Ω fora do qual u se anula. Logo, $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. □

Observação 3.23 **($C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$).** *Considere a sequência de compactos $K_n = \{x : |x| \leq n$ e $d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\}$ e $\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ valendo 1 numa vizinhança de K_n. Logo, dada $\phi \in C^\infty(\Omega)$, a sequência $\phi_n = \psi_n\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ e, além disso, $\phi_n - \phi \to 0$ em $C^\infty(\Omega)$. De fato, seja K um compacto contido em Ω, então existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_{n_o}$, $\forall\ n \geq n_o$. Então, fixado α, temos que*

$$\begin{aligned} D^\alpha(\phi_n - \phi) &= D^\alpha(\phi\psi_n - \phi) = D^\alpha(\phi(\psi_n - 1)) \\ &= \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta(\phi) D^{\alpha-\beta}(\psi_n - 1) \to 0, \end{aligned}$$

pois $(\psi_n - 1) = 0$ numa vizinhança de K_n, e consequentemente, de K se $n \geq n_o$. Assim, temos que $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $C^\infty(\Omega)$.

Como funções contínuas que coincidem num conjunto denso são idênticas, concluímos que o funcional v do Teorema 3.22 é único. Logo, podemos identificar $\mathcal{E}'(\Omega)$ com o espaço dos funcionais lineares contínuos em $C^\infty(\Omega)$.

Exemplo 3.24. *Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $f(x)$ é zero q.t.p. fora de um compacto K, então $S(f) \subseteq K$, e consequentemente $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$.*

Agora, se $f \in \mathcal{E}'(\Omega)$, então $S(f) = K$, para algum compacto $K \in \Omega$. Logo, temos que f se anula no aberto $\Omega \setminus K$, então, pelo Teorema 1.23, concluimos que $f = 0$ q.t.p. em $\Omega \setminus K$.

Exemplo 3.25. *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ tal que $S(u) = \{0\}$, então*

$$u = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta, \tag{3.7}$$

com $c_\alpha \in \mathbb{R}^n$.

De fato, seja $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \leq \varepsilon\}$ e $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int \phi = 1$, $\phi \geq 0$ e $S(\phi) \subset \{x : |x| \leq 1\}$. Definamos,

$$f_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \int_{B_{2\varepsilon}} \phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy.$$

De modo análogo à demonstração do Corolário 1.17, temos que $f_\varepsilon = 1$ em B_ε e $S(f_\varepsilon) \subseteq B_{3\varepsilon}$. Além disso,

$$\langle u, \psi \rangle = \langle u, f_\varepsilon \psi \rangle, \forall\ \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{3.8}$$

já que $S(\psi(1 - f_\varepsilon))$ e $\{0\}$ são disjuntos, pois

$$S(\psi(1 - f_\varepsilon)) = S(\psi) \bigcap S(1 - f_\varepsilon) \subset B_\varepsilon^c.$$

Usando a equação (3.4) com $K = B_1$, $\phi = f_\varepsilon \psi$ para $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, teremos

$$|\langle u, \psi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{B_1} |D^\alpha(f_\varepsilon \psi)|. \tag{3.9}$$

Por outro lado, temos o polinômio de Taylor de ψ,

$$\psi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha \psi(0)}{\alpha!} x^\alpha + R_{m+1}(x), \tag{3.10}$$

com o resto de Langrange (1.1)

$$R_{m+1}(x) = \sum_{|\alpha| = m+1} \frac{\partial^\alpha \psi(\theta_x)}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{|\alpha| = m+1} H(x) x^\alpha, \quad \theta_x \in [0, x].$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left|\partial^\beta R_{m+1}(x)\right| &= \left|\sum_{|\alpha|=m+1}\sum_{\gamma\le\beta}\binom{\beta}{\gamma}\partial^{\beta-\gamma}H(x)\partial^\gamma(x^\alpha)\right| \\
&\le M\sum_{|\alpha|=m+1}\sum_{\gamma\le\beta}|x|^{|\alpha|-|\gamma|}\le M\sum_{|\alpha|=m+1}|x|^{|\alpha|-|\beta|} \\
&\le M'|x|^{m+1-|\beta|}, \quad |x|<1, \quad |\beta|\le m+1. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Note que, M' é uma constante dependente apenas de ψ e m.

Por (3.8) e (3.10), obtemos

$$\begin{aligned}
\langle u,\psi\rangle &= \sum_{|\alpha|\le m}\frac{D^\alpha\psi(0)}{\alpha!}\langle u,x^\alpha\rangle+\langle u,R_{m+1}\rangle \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha\langle\delta,D^\alpha\psi\rangle+\langle u,R_{m+1}\rangle \\
&= \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}b_\alpha\langle D^\alpha\delta,\psi\rangle+\langle u,R_{m+1}\rangle \\
&= \left\langle\sum_{|\alpha|\le m}c_\alpha D^\alpha\delta,\psi\right\rangle+\langle u,R_{m+1}\rangle,
\end{aligned}$$

onde $b_\alpha=\frac{\langle u,x^\alpha\rangle}{\alpha!}$ e $c_\alpha=(-1)^{|\alpha|}b_\alpha$. Note que, $\langle u,x^\alpha\rangle$ está bem definido, pois $u\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Assim, basta mostrarmos que $\langle u,R_{m+1}\rangle=0$ para concluirmos a demonstração.

Pela fórmula (3.9) com $\psi=R_{m+1}$, temos

$$|\langle u,R_{m+1}\rangle|\le c\sum_{|\alpha|\le m}\sup_{B_1}|D^\alpha(f_\varepsilon R_{m+1})|. \qquad (3.12)$$

A estimativa (3.11) nos mostra que

$$\sup_{|x|\le3\varepsilon}|D^\beta R_{m+1}(x)|\le M'\sup_{|x|\le3\varepsilon}|x|^{m+1-|\beta|}=M''(3\varepsilon)^{m+1-|\beta|},\ |\beta|\le m+1.$$

E da definição de f_ε, temos

$$\begin{aligned}
\sup|D^\alpha f_\varepsilon(x)| &= \sup\left|\varepsilon^{-n}\int D^\alpha\left(\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right)dy\right| \\
&= \sup\left|\varepsilon^{-n}\int D^\alpha\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon^{|\alpha|}}dy\right| \\
&= \sup\left|\varepsilon^{-|\alpha|-n}\int D^\alpha\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)dy\right|=\varepsilon^{-|\alpha|}cte.
\end{aligned}$$

Então, pela Regra de Leibniz, obtemos

$$\begin{aligned} |D^{\alpha}(f_{\varepsilon}R_{m+1})| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|D^{\alpha}f_{\varepsilon}|\left|D^{\alpha-\beta}R_{m+1}\right| \\ &\leq M''\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\varepsilon^{-|\beta|}\varepsilon^{m+1-|\alpha-\beta|} \\ &= C\varepsilon^{m+1-|\alpha|}, \qquad m+1\geq|\alpha|. \end{aligned}$$

Logo, a equação (3.12), nos mostra que

$$|\langle u, R_{m+1}\rangle| \leq c\sum_{|\alpha|\leq m} M''\varepsilon^{m+1-|\alpha|},$$

porém R_{m+1} não depende de ε, então $\langle u, R_{m+1}\rangle = 0$.

Observação 3.26. *Note que, não usamos o fato de u estar suportada na origem. Assim, se $S(u)=\{a\}$, $a\in\mathbb{R}^n$, podemos aplicar uma translação e obtermos*

$$u=\sum_{|\alpha|\leq m} c_{\alpha}D^{\alpha}\delta_a,$$

onde $\langle\delta_a,\phi\rangle=\phi(a)$.

3.3 Existência de traços

Os resultados da seção anterior nos deram ferramentas muito fortes, com isso, apresentaremos condições necessárias e suficientes no crescimento de uma função complexa $f(z)$ quando $\Im z\to 0$ que garante a existência do $\lim_{y\to 0} f(\cdot+iy)=f_o$ em $\mathcal{D}'^k$, para algum $k\in\mathbb{N}$.

Definição 3.27. *Dizemos que uma sequência $u_j\in\mathcal{D}'(\Omega)$ $j=1,2,\dots$ converge a $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ se $\langle u_j,\phi\rangle$ converge a $\langle u,\phi\rangle$ para toda $\phi\in C_c^{\infty}(\Omega)$. Neste caso, escrevemos $u_j\to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Teorema 3.28. *Sejam $I=(a,b)$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $Z=\{z\in\mathbb{C}:\Re z\in I,\ 0<\Im z<\gamma\}$. Se f é uma função analítica em Z tal que para algum inteiro não negativo N*

$$|f(z)|\leq\frac{C}{(\Im z)^N},\ z\in Z,$$

então $f(\cdot+iy)$ tem um limite $f_o\in\mathcal{D}'^{N+1}(I)$ quando $y\to 0$, ou seja,

$$\lim_{y\to 0}\int f(x+iy)\phi(x)dx=\langle f_o,\phi\rangle\,,\ \forall\ \phi\in C_c^{N+1}(I).$$

Demonstração: Se $N = 0$, temos que a função é limitada, então basta estendê-la continuamente para o fecho de Z e f_o será a restrição de f ao conjunto I. Caso $N > 0$, tomamos $z_o \in Z$ arbitrário e definamos

$$F(z) = \int_{z_o}^{z} f(\eta)d\eta, \ z \in Z,$$

sobre algum caminho em Z.

Assim, temos que $F(z)$ é uma função analítica que independe do caminho, $F'(z) = f(z)$, e se o caminho de $z_o = x_o + iy_o$ até $z = x + iy$ for tomado primeiro na horizontal, e depois, na vertical, obteremos que

$$\begin{array}{ll} |F(z)| \leq C_1(\Im z)^{1-N} & \text{se } N > 1 \\ |F(z)| \leq -C\log(\Im z) + C_1 & \text{se } N = 1. \end{array}$$

De fato, seja $\gamma_1(t) = -t - iy_o, \ x \leq t \leq x_o$ e $\gamma_2(t) = -x - it, \ y_o \leq t \leq y$. Logo,

$$\left|\int_{z_o}^{x+iy_o} f(z)dz\right| = \left|\int_{x_o}^{x} f(\gamma_1(t))dt\right| \leq K_1(b-a), \ \text{e}$$

$$\left|\int_{x+iy_o}^{z} f(z)dz\right| = \left|\int_{y_o}^{y} f(\gamma_2(t))idt\right| \leq K_2\int_{y_o}^{y} t^{-N}dt,$$

e portanto, para $N \neq 1$, temos

$$\left|\int_{x+iy_o}^{z} f(z)dz\right| \leq \frac{K_3 y^{1-N}}{2},$$

e se $N = 1$, obtemos

$$\left|\int_{x+iy_o}^{z} f(z)dz\right| = K_4 \ln y.$$

No caso, $N = 1$ segue que a integral de F, $\widetilde{F}$, é contínua em $\overline{Z}$: como $\widetilde{F}$ já é contínua dentro do retângulo, assim, basta mostrar que $\widetilde{F}$ é limitada. De fato,

$$\begin{aligned} |\widetilde{F}(z)| &\leq \int_{z_o}^{z} |F(w)|dw = \int_{z_o}^{x+iy_o} |F(w)|dw + \int_{x+iy_o}^{z} |F(w)|dw \\ &\leq C_1(y_o) + \int_{0}^{y_o} \ln t dt \leq C_1(y_o) + C_2(y_o), \end{aligned}$$

uma vez que $\log t$ é uma função integrável numa vizinhança de 0.

De maneira análoga, para $N > 1$, temos, depois de $N + 1$ integrações, que $f(z) = G^{(N+1)}(z)$, onde G é contínua em $\overline{Z}$ e analítica em Z. O que mostra

$$\begin{aligned} \langle f(\cdot + iy), \phi\rangle &= \left\langle G^{(N+1)}(\cdot + iy), \phi\right\rangle = (-1)^{N+1}\left\langle G(\cdot + iy), \phi^{(N+1)}\right\rangle \\ &= (-1)^{N+1}\int G(x+iy)\phi^{(N+1)}(x)dx \\ &\xrightarrow{y\to 0} (-1)^{N+1}\int G(x+i0)\phi^{(N+1)}(x)dx = \left\langle G^{(N+1)}(\cdot + i0), \phi\right\rangle \\ &\doteq \langle f_o, \phi\rangle \end{aligned}$$

para toda $\phi \in C_c^{N+1}(I)$. Portanto, $f(\cdot + iy)$ converge para f_o em $\mathcal{D}'^{N+1}(I)$ pelo [Ho, Teorema 2.1.6]. $\square$

Para o próximo resultado usaremos a Fórmula Generalizada de Cauchy:

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Y} \frac{g(x,y)}{z-\zeta}dz - \frac{1}{\pi}\int_Y \frac{\partial g(x,y)}{\partial \bar{z}}\frac{1}{z-\zeta}dxdy, \tag{3.13}$$

com $g \in C^1(Y) \cap C(\bar{Y})$, $\partial Y \in C^1$ e $\zeta \in Y \subset \mathbb{C}$, para uma demonstração veja [Ho, pag. 62-63].

Note que, em particular, a fórmula (3.13), implica que $\partial_{\bar{z}}\dfrac{1}{\pi z} = \delta$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Com efeito, se $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e Y é um aberto com fronteira C^1 que contém o suporte de ϕ, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_{\bar{z}}\frac{1}{\pi z}, \phi \right\rangle &= -\left\langle \frac{1}{\pi z}, \partial_{\bar{z}}\phi \right\rangle \\
&= -\frac{1}{\pi}\int \frac{\partial_{\bar{z}}\phi(z)}{z}dxdy \\
&\overset{(3.13)}{=} \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.
\end{aligned}$$

Teorema 3.29. *Sejam I um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ e $Z^\pm = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \in I, 0 < \pm\Im z < \gamma\}$. Se f é uma função analítica em $Z = Z^+ \cup Z^-$ tal que*

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|\Im z|^N}, \quad z \in Z,$$

então

$$F(\phi) = \int \left(\int f(x+iy)\phi(x,y)dx \right) dy, \quad \phi \in C_c^N(Z \cup I),$$

existe e define uma distribuição em $\mathcal{D}'^N(Z \cup I)$ tal que

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}, \phi \right\rangle = \frac{i}{2}\left\langle f(\cdot + i0) - f(\cdot - i0), \phi(\cdot, 0) \right\rangle, \quad \phi \in C_c^{N+1}(Z \cup I). \tag{3.14}$$

E portanto, $F = f$ em Z.

Demonstração: A demonstração do Teorema 3.28, nos permite construir G em $L^1(Z)$, $|G(z)| \leq C\log(C/|z|)$ tal que $f = G^{(N)}$. Dada $\phi \in C_c^N(Z \cup I)$, obtemos para $|y| > 0$ e integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\int f(x+iy)\phi(x,y)dx &= \int G^{(N)}(x+iy)\phi(x,y)dx \\
&= G(x+iy)\phi(x,y)\Big|_b^a - \int G^{(N-1)}(x+iy)\phi'(x,y)dx \\
&= -\int G^{(N-1)}(x+iy)\phi'(x,y)dx,
\end{aligned}$$

onde $\Pi_1(S(\phi)) \subset [a,b] \subset I$. Usando este argumento N-vezes, obtemos

$$\int f(x+iy)\phi(x,y)dx = (-1)^N \int G(x+iy)\phi^{(N)}(x,y)dx,$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int\int f(x+iy)\phi(x,y)dxdy &\doteq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\int f(x+iy)\phi(x,y)dxdy \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{y>\varepsilon}\int f(x+iy)\phi(x,y)dxdy \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{y<-\varepsilon}\int f(x+iy)\phi(x,y)dxdy \\
&= (-1)^N \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\int G(x+iy)\phi^{(N)}(x,y)dxdy \\
&= (-1)^N \int\int G(x+iy)\phi^{(N)}(x,y)dxdy.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos,

$$F(\phi) = (-1)^N \int\int G(x+iy)\frac{\partial^N\phi(x,y)}{\partial x^N}dxdy, \quad \phi \in C_c^N(Z\cup I),$$

o que prova a primeira afirmação pois

$$|F(\phi)| \le \int\int |G(x+iy)||\phi^{(N)}(x,y)|dxdy \le C\sup|\phi^{(N)}|, \quad \phi \in C_c^N(Z\cup I).$$

Se $\phi \in C_c^{N+1}(Z\cup I)$, então

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial F}{\partial \bar z},\phi\right\rangle &= -\left\langle F,\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}\right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|>\varepsilon}\int f(x+iy)\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial\bar z}dxdy \\
&\overset{(3.13)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{i}{2}\left(\int f(x+i\varepsilon)\phi(x,\varepsilon)dx - \int f(x-i\varepsilon)\phi(x,-\varepsilon)dx\right) \\
&\xrightarrow{\text{T. } 3.28} \frac{i}{2}\langle f(\cdot+i0)-f(\cdot-i0),\phi(\cdot,0)\rangle,
\end{aligned}$$

o que mostra (3.14). □

Observe que o Teorema 3.29 diz que, embora f possa não ser estendida como função para $Z\cup I$, f ainda possui extensão, como distribuição, em $Z\cup I$.

Exemplo 3.30. *Como $\partial_{\bar z}\frac{1}{z} = \pi\delta$, temos por (3.14) que*

$$(x+i0)^{-1} - (x-i0)^{-1} = -2\pi i\delta.$$

O próximo resultado é uma recíproca para o Teorema 3.28.

Teorema 3.31. *Se f é analítica no retângulo*

$$Z = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \in I,\ 0 < \Im z < \gamma\}$$

e $\lim_{y\to 0} f(\cdot + iy)$ existe em $\mathcal{D}'^k(I)$, então

$$|f(z)| \leq \frac{C'}{(\Im z)^{k+1}},\ z \in Z',$$

se Z' é o produto de um intervalo $J \subset\subset I$ e $\left(0, \frac{\gamma}{2}\right)$.

Demonstração: Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ igual a 1 numa vizinhança de $\overline{Z'}$ e com suporte em $W = \{z : \Re z \in I,\ |\Im z| < \gamma\}$. Aplicando (3.13) a $g = f\varphi$ no conjunto $\Im z > \Im \frac{\eta}{2}$, para $\eta = a + bi \in Z'$, temos que

$$f(\eta) = \frac{1}{\pi} \int\int_{y>\frac{b}{2}} f(x+iy) \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial\bar{z}} \frac{1}{z-\eta} dxdy + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(x,\frac{b}{2}) f(x+i\frac{b}{2})}{x-a-i\frac{b}{2}} dx,$$

uma vez que

$$\frac{\partial(f\varphi)}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial(f)}{\partial\bar{z}}\varphi + \frac{\partial(\varphi)}{\partial\bar{z}} f = \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}},$$

pois f é holomorfa.

As hipóteses implicam em um limitante uniforme para $f(\cdot+iy)$ em $\mathcal{D}'^k$, quando $0 < y < \frac{\gamma}{2}$, então a última integral pode ser estimada por

$$\begin{aligned} C_1 \sum_{|\alpha|\leq k} \sup \left| D_x^\alpha \left(\frac{\varphi(x,\frac{b}{2})}{(x-a-i\frac{b}{2})} \right) \right| &\leq C_1 \sum_{|\alpha|\leq k} \left| D_x^\alpha (x-a-i\frac{b}{2})^{-1} \right| \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} C_2 |x-a-i\frac{b}{2}|^{-\beta-1} \\ &\leq C_3 |b|^{-k-1}. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} \left| \int\int_{y>\frac{b}{2}} f(x+iy) \frac{\partial_{\bar{z}}\varphi(x,y)}{z-\eta} dxdy \right| &= \int \left| \int \frac{f(x+iy)}{x+iy-a-ib} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}(x,b) dx \right| dy \\ &= \int \left| \left\langle f(\cdot+iy), \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} \frac{1}{(\cdot+iy-a-ib)} \right\rangle \right| dy \\ &\leq c \int_{\frac{b}{2}<y<\gamma} c_1^{-k-1} dy = constante, \end{aligned}$$

onde $c_1 = d(S(\partial_{\bar{z}}\varphi, Z')) > 0$. O que prova o teorema. $\square$

Capítulo 4

Espaços vetoriais topológicos

4.1 Propriedades básicas

Nessa seção, vamos nos concentrar em algumas propriedades básicas dos espaços vetoriais topológicos, assim como, a sua definição. Destaco como resultado mais importante o teorema que diz que um espaço vetorial topológico localmente convexo tem dimensão finita.

Definição 4.1. *Dizemos que um conjunto $\mathcal{V}$ com a propriedade de ter uma adição e uma multiplicação por escalar no corpo $\mathbb{F}$ definidas é um espaço vetorial se são válidas as seguintes propriedades:*

- $u + v = v + u, \ \forall \ u, v \in \mathcal{V}$;
- $u + (v + w) = (u + v) + w, \ \forall \ u, v, w \in \mathcal{V}$;
- *existe um elemento* $0 \in \mathcal{V}$ *tal que* $0 + u = u, \ \forall \ u \in \mathcal{V}$;
- *para cada* $u \in \mathcal{V}$ *existe* $v \in \mathcal{V}$ *tal que* $u + v = 0$;
- $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u, \ \forall \ u \in \mathcal{V}$ *e* $\forall \ \lambda, \mu \in \mathbb{F}$;
- $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u, \ \forall \ u \in \mathcal{V}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{F}$;
- $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \ \forall \ u, v \in \mathcal{V}$ *e* $\lambda \in \mathbb{F}$;
- $1u = u, \ \forall \ u \in \mathcal{V}$.

Definição 4.2. *Um espaço vetorial X será topológico se existir uma coleção de subconjuntos τ tais que façam que as operações de multiplicação por escalar e soma de dois elementos do espaço sejam contínuas. Chamaremos tais conjuntos de conjuntos abertos, se satisfizerem as seguintes propriedades:*

- *X e $\varnothing$ são abertos;*
- *a interseção finita de conjuntos abertos é um aberto;*
- *a união arbitrária de elementos dessa coleção é um aberto.*

Chamamos esta coleção de topologia e denotamos por (X,τ) o conjunto X com a topologia τ.

Definição 4.3. *Seja X um espaço vetorial topológico com a topologia τ, diz-se:*

a) *X é localmente convexo se existe um base local da origem $\mathscr{B}$ nos quais os membros são convexos. Onde A é um conjunto convexo se para todos $x, y \in A$ e $t \in [0,1]$, temos que $(1-t)x + ty \in A$ e $\mathscr{B}$ é uma base local da origem se para toda vizinhança de zero existe um elemento de $\mathscr{B}$ que está contido na vizinhança.*

b) *Dizemos que um subconjunto E de um espaço vetorial X é dito ser limitado se toda vizinhança V da origem se existe $t_o \in \mathbb{R}$ tal que $E \subset tV$ para todo $t > t_o$. Dizemos também que X é localmente limitado se 0 tem uma vizinhança limitada.*

c) *Um subconjunto $K \subset X$ é compacto se toda cobertura aberta de K tem uma subcobertura finita deste. Dessa forma, X é localmente compacto se 0 tem uma vizinhança com fecho compacto. Onde o fecho $\overline{E}$ de um conjunto E é a interseção de todos os fechados que contém E.*

d) *X é um F-espaço se a sua topologia é induzida por uma métrica d completa.*

e) *X é um espaço de Fréchet se for um F-espaço localmente convexo.*

f) *X tem a propriedade de Heine-Borel se todo fechado e limitado de X for compacto;*

g) *dizemos que um conjunto $A \subset X$ é balanceado se $\alpha A \subset A$ para todo $|\alpha| \leq 1$ no corpo.*

Proposição 4.4. *Se W é balanceado e $s < t$, então $sW \subset tW$.*

Demonstração: Note que, se W é balanceada então tW, para todo $t > 0$, também é balanceada, pois

$$\alpha t W = t\alpha W \subset tW,$$

para todo α com $|\alpha| \leq 1$. Então, como $\left|\frac{s}{t}\right| < 1$, obtemos

$$sW = \frac{s}{t}(tW) \subset tW.$$

Concluindo a nossa demonstração. □

Proposição 4.5. *Seja X um espaço vetorial topológico, se W é uma vizinhança da origem em X, então existe uma vizinhança U de 0 que é simétrica, (ou seja, $U = -U$) e satisfaz $U + U \subset W$.*

Demonstração: Como a operação soma é contínua. Dado W vizinhança de zero, temos que existem vizinhanças V_1, V_2 da origem tais que $V_1 + V_2 \subset W$. Temos que

$$U = V_1 \cap V_2 \cap (-V_1) \cap (-V_2)$$

satisfaz as condições. □

Note que, podemos aplicar a Proposição 4.5 a U no lugar de W e conseguir uma nova vizinhança, da origem, simétrica U' tal que

$$U' + U' + U' + U' \subset W.$$

E assim, podemos continuar procedendo.

Teorema 4.6. *Sejam K e C subespaços de um espaço vetorial topológico X, com K compacto, C fechado e $K \cap C = \varnothing$. Então existe vizinhança V de 0 tal que*

$$(K + V) \cap (C + V) = \varnothing.$$

Demonstração: Se $K = \varnothing$, então $K + V = \varnothing$, e portanto, não há nada a provar. Assim, suponhamos que $K \neq \varnothing$, e consideremos $x \in K$. Como C é fechado e $x \notin C$, temos que $0 \in W = X \setminus C - x = \{y - x;\ y \in (X \setminus C)\}$, então pela Proposição 4.5, temos que existe uma vizinhança simétrica, V_x, da origem tal que $x + V_x + V_x + V_x$ não intersepta C. Como V_x é simétrica, temos que

$$(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \varnothing, \tag{4.1}$$

pois, caso contrário, existe $y \in (x+V_x+V_x)$ e $y \in (C+V_x)$, então $x+z_1+z_2 = c+z_3$, com $z_i \in V_x$ e $c \in C$. Logo, $c = x + z_1 + z_2 - z_3$ está em $(x + V_x + V_x - V_x) = (x + V_x + V_x + V_x)$, o que é uma contradição pela construção de V_x. Como $K \subset \bigcup_{x \in K} (x + V_x)$, pela compacidade de K, temos que existem finitos pontos $x_1, \ldots, x_n$ em K de forma que

$$K \subset (x_1 + V_{x_1}) \cup \cdots \cup (x_n + V_{x_n}).$$

Tome $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$. Então,

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(x_i + V_{x_i} + V_{x_i}),$$

mas, por (4.1), temos que a última união é disjunta a $C + V$. $\square$

Observação 4.7. *Segue do Teorema 4.6 aplicando a dois pontos que todo espaço vetorial topológico é um espaço de Hausdorff.*

Teorema 4.8. *Se $\mathscr{B}$ é uma base local de um espaço vetorial topológico X, então todo membro de $\mathscr{B}$ contém o fecho de algum membro de $\mathscr{B}$.*

Demonstração: Dado $B_1 \in \mathscr{B}$, tome $K = \{0\}$ e $C = X \setminus B_1$, pelo Teorema 4.6, existe V vizinhança da origem tal que $\overline{V} \bigcap((X \setminus B_1) + V) = \varnothing$, pois se $C + V$ é aberto, temos que $(\overline{K + V}) \cap (C + V) = \varnothing$. Logo, $\overline{V} \subset B_1$.

Como $\mathscr{B}$ é base local, existe $B_2 \in \mathscr{B}$ com $B_2 \subset V$. Então, $\overline{B_2} \subset \overline{V}$, e portanto, $\overline{B_2} \subset B_1$. $\square$

Teorema 4.9. *Seja X um espaço vetorial topológico, então*

(a) *se $A \subset X$ então $\bar{A} = \cap(A + V)$, onde V percorre todas as vizinhanças de 0. Note que, se existe um base local de X então basta tomar V como todos os membros da base.*

(b) *se E é um subconjunto limitado de X, então $\overline{E}$ também o é.*

Demonstração:

(a) Note que, $x \in \bar{A}$ se, e somente se, $(x + V) \cap A \neq \varnothing$ para toda vizinhança V da origem. De fato, suponhamos que exista uma vizinhança V da origem tal que $(x + V) \cap A = \varnothing$, tome $F = (x + V)^c$, então $\bar{A} \subset F$. Logo, $x \in F$ e $x \in F^c = x + V$, o que é um absurdo. Por outro lado, se $(x + V) \cap A \neq \varnothing$ para toda V, então se $x \notin \bar{A}$, temos que existe um fechado F que contém A tal que $x \notin F$. Assim, existe V uma vizinhança da origem de modo que $(F + V) \cap (x + V) = \varnothing$, e portanto, $A \cap (x + V) = \varnothing$, chegando a uma contradição.

Agora, $(x + V) \cap A \neq \varnothing$ para toda vizinhança V da origem se, e somente se, $x \in A - V$, para toda tal V. Com efeito, se $a \in (x + V)$ e $a \in A$, então $a = x + v \Rightarrow x = a - v$, para algum $v \in V$, e portanto, $x \in A - V$. Como $-V$ é uma vizinhança de 0 se, e somente se, V o é temos a primeira direção. Reciprocamente, se x pertence a $A - V$, então $x = a - v$ para algum $a \in A$ e $v \in V$. Logo, $x + v = a$, e portanto, $(x + V) \cap A \neq \varnothing$.

(b) Seja V uma vizinhança de 0. De modo análogo à demonstração do Teorema 4.8, temos que $\overline{W} \subset V$ para alguma vizinhança W de 0. Como E é limitado, existe $t_o > 0$ tal que $E \subset tW$, $\forall\ t \geq t_o$. Logo, temos que $\overline{E} \subset t_o\overline{W} \subset t_oV$.

Concluindo a demonstração. □

Teorema 4.10. *Seja X um espaço vetorial topológico, então toda vizinhança de 0 contém uma vizinhança balanceada de 0.*

Demonstração: Seja U uma vizinhança de 0 em X. Como a multiplicação por escalar é contínua, temos que existem $\delta > 0$ e uma vizinhança V de 0 em X de modo que $\alpha V \subset U$, para todo $|\alpha| < \delta$. Consideremos W como a união de todos os conjuntos αV. Logo, W contém U e é uma vizinhança balanceada de 0, pois se $|t| < 1$, então

$$tW = t\bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V = \bigcup_{|\alpha|<\delta} t\alpha V = W.$$

Concluindo a demonstração. □

Teorema 4.11. *Sejam X um espaço vetorial topológico e V uma vizinhança de 0.*

a) se $0 < r_1 < r_2 < \cdots$ e $r_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, então

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_nV.$$

b) todo subconjunto compacto K de X é limitado.

c) se $\delta_1 > \delta_2 > \cdots$ e $\delta_n \to 0$ quando $n \to \infty$, e se V é limitada, então a coleção $\{\delta_nV : n = 1,\ 2,\ 3, \dots\}$ é uma base local de X.

Demonstração:

a. Seja $x \in X$ fixo. Como $f(\alpha) = \alpha x$ é uma função contínua do corpo em X, temos que o conjunto $f^{-1}(V) = \{\alpha;\ \alpha x \in V\}$ é aberto e contém 0, e portanto, contém $\dfrac{1}{r_n}$ para todo n suficientemente grande. Assim, $\dfrac{1}{r_n}\cdot x \in V$, ou seja, $x \in r_nV$, para todo n grande.

b. Dado $0 \in V$, pelo Teorema 4.10, existe W uma vizinhança balanceada de 0 tal que $W \subset V$. Por a),

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nW.$$

Como K é compacto, existem finitos inteiros $n_1 < \cdots < n_s$ tais que

$$K \subset n_1 W \bigcup \cdots \bigcup n_s W = n_s W,$$

pois W é balanceado. Então $K \subset tW \subset tV$, se $t > n_s$.

c. Seja U uma vizinhança de 0 em X. Se V é limitada, então existe $s > 0$ tal que $V \subset tU$, para todo $t > s$. Se n é suficientemente grande tal que $s\delta_n < 1$, tomando $t = \dfrac{1}{\delta_n} > s$, temos que $V \subset \dfrac{1}{\delta_n} \cdot U$. Logo, $\delta_n V \subset U$.

Como queríamos demonstrar. □

Teorema 4.12. *Se n é um inteiro positivo e Y é um subespaço, de dimensão n, de um espaço vetorial topológico complexo X, então Y é fechado.*

Para uma demonstração, vide [R1, Teorema 1.21].

Teorema 4.13. *Todo espaço vetorial topológico localmente compacto X tem dimensão finita.*

Demonstração: A origem de X tem uma vizinhança V na qual seu fecho é compacto. Como V é limitado, então os conjuntos $2^{-n}V$, $n = 1, 2, \ldots,$ formam uma base local de X. Seja $\{x + \frac{1}{2}V\}_{x \in \overline{V}}$ uma cobertura aberta de $\overline{V}$, como $\overline{V}$ é compacto existem $x_1, \ldots, x_m$ em X de forma que

$$\overline{V} \subset (x_1 + \frac{1}{2}V) \bigcup \cdots \bigcup (x_m + \frac{1}{2}V).$$

Seja Y o espaço vetorial gerado por $x_1, \ldots, x_m$. Então, $dim Y \leq m$, logo pelo Teorema 4.12, Y é um subespaço fechado de X.

Como $V \subset Y + \frac{1}{2}V$ e $\lambda Y = Y$, para todo escalar $\lambda \neq 0$, seque que $\frac{1}{2}V \subset Y + \frac{1}{4}V$, logo,

$$V \subset Y + \frac{1}{2}V \subset Y + Y + \frac{1}{4}V = Y + \frac{1}{4}V.$$

Fazendo este processo, temos que

$$V \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y + 2^{-n}V).$$

Então, pelo item a) do Teorema 4.9, temos que $V \subset \overline{Y}$. Porém $Y = \overline{Y}$, então $V \subset Y$. Logo, $jV \subset Y$, $j = 1, 2, \ldots$. Consequentemente $Y = X$, pelo item a) do Teorema 4.11. E portanto, $dim X \leq m$. Como queríamos demonstrar. □

Teorema 4.14. *Se X é um espaço vetorial topológico localmente limitado com a propriedade de Heine-Borel, então X é de dimensão finita.*

Demonstração: Por hipótese, a origem de X tem uma vizinhança V limitada, então, pelo item b) do Teorema 4.9, $\overline{V}$ também é limitada. Assim, $\overline{V}$ é compacto, pois X tem a propriedade de Heine-Borel. Logo, X é localmente compacto, pelo Teorema 4.13, temos que X é de dimensão finita. Concluindo a nossa demonstração. □

Teorema 4.15. *Seja X um espaço vetorial topológico com uma base local enumerável, então existe uma métrica d em X tal que*

- *d é compátivel à topologia de X;*
- *as bolas abertas centradas em 0 são balanceadas;*
- *d é invariante, isto é, $d(x+z, y+z) = d(x, y)$, $\forall\ x, y, z \in X$.*

Além disso, se X for localmente convexo, podemos tomar d satisfazendo as propriedades anteriores e:

- *todas as bolas abertas são convexas.*

Para uma demonstração, vide [R1, Teorema 1.24].

4.2 Seminormas em espaços vetoriais topológicos

Nos espaços de funções temos algumas dificuldades de definir normas de maneira a deixarem o espaço com boas propriedades. Para resolvermos este problema enfraquecemos a definição de normas e definimos as seminormas.

Definição 4.16. *Seja X um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Dizemos que uma função $p : X \to \mathbb{F}$ é uma seminorma se ela satisfaz as seguintes condições:*

- $p(x) \geq 0$, $\forall\ x \in X$;
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{F}$;
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall\ , y \in X$.

Além disso, se uma família $\mathscr{P}$ de seminormas é tal que para toda $f \neq 0$ existe $p \in \mathscr{P}$ de modo que $p(f) \neq 0$ dizemos que esta família de seminormas é separante.

Proposição 4.17. *Seja E um espaço vetorial topológico, e p uma seminorma em E. Então são equivalente:*

i. a bola aberta unitária de p é um conjunto aberto;

ii. p é contínua na origem;

iii. p é contínua em todo ponto.

Demonstração:

i. $\Rightarrow$ *ii.* Seja $B_\varepsilon \doteq \{x \in E;\ p(x) < \varepsilon\}$ a imagem inversa do intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ sobre p. Assim, se $y \in B_\varepsilon$ então $\dfrac{y}{\varepsilon} \in B_1$. Logo, existe $V \subset B_1$ tal que $\dfrac{y}{\varepsilon} \in V \subset B_1$, e portanto, $y \in \varepsilon V \subset \varepsilon B_1 = B_\varepsilon$. Provando a primeira equivalência.

ii. $\Rightarrow$ *iii.* Seja I_x o intervalo aberto centrado em $p(x)$, então existe V vizinhança da origem tal que $p(V) \subset I = I_x - p(x)$. Tome $y \in V_x = x + V$. Note que, $p(y) \in I_x,\ \forall\ y \in V_x$, pois $p(y) - p(x) \leq p(y - x) \in I = I_x - p(x)$. Logo, p é contínua na origem.

iii. $\Rightarrow$ *i.* Como p é contínua temos que a imagem inversa do intervalo $(-1, 1)$ é um aberto de E.

Provando a nossa tese. □

Teorema 4.18. *Seja $\mathscr{P}$ uma família de seminormas separantes num espaço vetorial X. Associado a cada $p \in \mathscr{P}$ e a cada inteiro positivo n o conjunto $V(p, n) = \left\{x :\ p(x) < \dfrac{1}{n}\right\}$. Seja $\mathscr{B}$ a coleção de todas as interseções finitas de conjuntos $V(p, n)$. Então $\mathscr{B}$ é uma base local convexa e balanceada para a topologia τ em X, que torna X num espaço localmente convexo tal que:*

- *toda $p \in \mathscr{P}$ é contínua;*
- *um conjunto $E \subset X$ é limitado se, e somente se, toda $p \in \mathscr{P}$ é limitada em E.*

Para uma demonstração, vide [R1, Teorema 1.37].

Proposição 4.19. *Seja E, F espaços localmente convexos. Um operador linear $f : E \to F$ é contínuo se, e somente, se para toda seminorma q contínua em F existe seminorma p contínua em E tal que, para todo $x \in E$,*

$$q(f(x)) \leq p(x).$$

Demonstração: ($\Rightarrow$) Fixe uma seminorma q contínua em F. Como f é contínua em $0 \in E$, temos que dado $V = \{y : \; q(y) < 1\}$ existe $0 \in U \subset E$ tal que $f(U) \subset V$.

Como U é aberto sub-básico, existe seminorma p' e um real positivo ε de forma que $B \doteq \{p'(x) < \varepsilon\} \subset U$. Tomando $p = \dfrac{2p'}{\varepsilon}$, temos que $B = \{p(x) < 2\}$.

Note que, dado $x \in E$, existe $0 < t$ tal que $tx \in B$. De fato, $p(x) = \lambda$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, então se $\lambda = 0$ a afirmação já se conclui. Agora, se $\lambda > 0$, então $t = \dfrac{1}{p(x)}$ satisfaz.

Assim, $f(tx) \in V$, ou seja, $q(f(tx)) < 1$. Mas

$$tq(f(x)) = q(tf(x)) < 1 \Rightarrow q(f(x)) < \frac{1}{t} = p(x).$$

($\Leftarrow$) Seja $0 \in V \subset F$, existem seminorma q e real positivo ε tal que $\{q(y) < \varepsilon\} \subset V$. Considere p dada pela hipótese e $U \doteq \{p(x) < \varepsilon\}$. Logo,

$$x \in U \Rightarrow p(x) < \varepsilon \Rightarrow q(f(x)) \leq p(x) < \varepsilon \Rightarrow y = f(x) \in V, \; \forall \; x \in U.$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 4.20. *Um operador linear f de um espaço E localmente convexo nele mesmo é contínuo, se e somente, se existe uma seminorma p contínua em E tal que, para todo $x \in E$,*

$$|f(x)| \leq p(x).$$

Demonstração: Basta considerar $q(\cdot) = |\cdot|$ como sendo a seminorma na Proposição 4.19. $\square$

Capítulo 5

Alguns espaços interessantes

5.1 O espaço $C^\infty(K)$

Uma boa propriedade desenvolvida para espaços vetoriais topológicos é a completude. Dessa forma, iremos introduzir uma topologia que torne o espaço $C^\infty(K)$ completo. Tal topologia será dada por seminormas e será equivalente à topologia gerada por uma métrica, porém mostraremos que este espaço não pode ser normado. Nesta seção, iremos considerar $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto de modo que $\overline{intK} = K$.

Proposição 5.1. *O espaço vetorial $C(K)$ das funções de $K \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}$ com a norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}\{|f(x)|\}, \text{ é completo.}$$

Demonstração: Seja $\{f_i\}$ uma sequência de de Cauchy em $C(K)$. Fixado $x \in K$, vemos que a sequência $\{f_n(x)\}$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$, pois

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Como $\mathbb{C}$ é completo, existe $f(x) \in \mathbb{C}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Pela unicidade do limite, esta função está bem definida. Afirmamos que $f \in C(K)$ e $f_n \to f$ em $C(K)$.

De fato, sejam $\varepsilon > 0$ e $x \in K$ dados. Então, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(y) - f_m(y)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{6}, \quad \text{para } n, m \geq n_o \text{ e } \forall\ y \in K. \tag{5.1}$$

Por outro lado, como f_{n_o} é contínua temos que existe V_x, vizinhança de x, tal que

$$|f_{n_o}(y) - f_{n_o}(x)| < \frac{\varepsilon}{6},\ \forall\ y \in V_x.$$

Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
|f_n(y) - f_m(x)| &\leq |f_n(y) - f_{n_o}(y)| + |f_{n_o}(y) - f_{n_o}(x)| + |f_{n_o}(x) - f_m(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, n, m \geq n_o \quad \text{e} \quad y \in V_x.
\end{aligned}
$$

Logo, fazendo $n \to \infty$ e $m \to \infty$, obtemos

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall\, y \in V_x.$$

Portanto, f é contínua. Além disso, fazendo $m \to \infty$ em (5.1), temos que

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_o.$$

Logo, $f_n \to f$ em $C(K)$, e portanto, $C(K)$ é um espaço de Banach. □

A seguir enunciaremos um teorema de extensão que iremos usar para provarmos o próximo resultado. Uma demonstração de tal teorema encontra-se em [Ho, Teorema 2.3.6].

Teorema 5.2 (Teorema da Extensão de Whitney). *Sejam u_α, $|\alpha| \leq j$, funções contínuas em K. Considere para cada α,*

$$U_\alpha(x, y) = \left| u_\alpha(x) - \sum_{|\beta| \leq k - |\alpha|} \frac{u_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta}{\beta!} \right| |x - y|^{|\alpha| - j}, \ \textit{se } x \neq y, \ x, y \in K$$

e $U_\alpha(x, x) = 0$, $x \in K$. Se U_α for contínua em $K \times K$ quando $|\alpha| \leq j$, é possível encontrar $v \in C^j(\mathbb{R}^n)$ com $\partial^\alpha v(x) = u_\alpha(x)$, $x \in K$ e $|\alpha| \leq j$.

Considere o espaço $C^j(K)$ das funções contínuas definidas no compacto K que admitem extensão j-vezes diferenciável de modo que a j-ésima derivada seja contínua, isto é,

$$C^j(K) = \{f \in C(K);\ \exists\, U \supset K \text{ aberto e } f^* \in C^j(U);\ f^*\big|_K = f\}.$$

Proposição 5.3. *Se $f \in C^j(K)$, então*

$$\|f\|_{j,\infty} = \sup_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha f^*\|_{L^\infty(K)}$$

é uma norma em $C^j(K)$ e $(C^j(K), \|\cdot\|_{j,\infty})$ é completo.

Demonstração: Primeiramente, vejamos que $\|\cdot\|_{j,\infty}$ está bem definida. Tome f_1^* e f_2^* duas extensões de f, mostraremos que

$$\sup_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha f_1^*\|_{L^\infty(K)} = \sup_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha f_2^*\|_{L^\infty(K)}. \tag{5.2}$$

Com efeito, se $x \in intK$, temos que $f_1^* \equiv f \equiv f_2^*$ numa vizinhança de x contida no interior de K. Daí,

$$|\partial^\alpha f_1^*(x)| = |\partial^\alpha f_2^*(x)|, \quad |\alpha| \leq j.$$

Se $x \in \partial K$, visto que $\overline{intK} = K$, podemos tomar uma sequência $\{x_n\} \subset intK$ tal que $x_n \to x$, e assim, pela continuidade de $\partial^\alpha f_i^*$, teremos que

$$\partial^\alpha f_1^*(x) = \partial^\alpha f_1^* \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} (\partial^\alpha f_1^*(x_n)) = \lim_{n\to\infty} (\partial^\alpha f_2^*(x_n)) = \partial^\alpha f_2^*(x).$$

Logo, para todo $x \in K$, $\partial^\alpha f_1^*(x) = \partial^\alpha f_2^*(x)$ $|\alpha| \leq j$, o que mostra (5.2). Portanto, $\|\cdot\|_{j,\infty}$ está bem definida. Assim, temos que $\|\cdot\|_{j,\infty}$ define uma norma sobre $C^j(K)$. De fato,

i) Note que, se $\|f\|_{j,\infty} = 0$, então

$$\sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha f^*\|_{L^\infty(K)} = 0 \Rightarrow \partial^\alpha f^* \equiv 0, \ \forall\ |\alpha| \leq j \Rightarrow f^* \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0.$$

Agora, vejamos a volta, isto é, se $f \equiv 0$, então $f^*(x) = 0$, se $x \in K$, então não podemos afirmar que $\partial^\alpha f^* = 0$, porém uma extensão da f seria a função identicamente nula. Como, já mostramos que $\|\cdot\|_{j,\infty}$ não depende da extensão, temos que $\|f\|_{j,\infty} = \sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha f^*\|_{L^\infty(K)} = 0$.

ii) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, então definamos a função F^* como sendo uma extensão de λf. Logo, $f^* = \dfrac{F^*}{\lambda}$ é uma extensão de f. Assim,

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{j,\infty} &= \sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha(\lambda f)^*\|_{L^\infty(K)} = \sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha F^*\|_{L^\infty(K)} \\
&= \sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha \lambda f^*\|_{L^\infty(K)} = |\lambda| \sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha f^*\|_{L^\infty(K)} = |\lambda| \|f\|_{j,\infty}.
\end{aligned}$$

iii) Sejam $f_1, f_2 \in C^j(K)$ e considere H^*, f_2^* extensões de $f_1 + f_2$ e f_2, respectivamente. Seja $f_1^* = H^* - f_2^*$ uma extensão de f_1, então $H^* = f_1^* + f_2^*$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{j,\infty} &= \sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha (f+g)^*\|_{L^\infty(K)} \\
&= \sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha H^*\|_{L^\infty(K)} \\
&\leq \sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha f^*\|_{L^\infty(K)} + \sup_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha g^*\|_{L^\infty(K)} \\
&= \|f\|_{j,\infty} + \|g\|_{j,\infty}.
\end{aligned}$$

Agora, vejamos que $(C^j(K), \|\cdot\|_{j,\infty})$ é completo. Seja $\{f_n\} \subset C^j(K)$ uma sequência de Cauchy, logo para cada n, existe U_n aberto, $K \subset U_n$ e $f_n^* \in C^j(U_n)$ com $f_n^*\big|_K = f_n$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_m\|_{j,\infty} < \varepsilon, \quad \forall\ n, m \geq n_o.$$

Logo, para cada α com $|\alpha| \leq j$ a sequência de funções $\{\partial^\alpha f_n^*\big|_K\}$ é uma sequência de Cauchy em $C(K)$, e como este espaço é completo existe $f_\alpha \in C(K)$ com $\partial^\alpha f_n^*\big|_K \to f_\alpha$, para $|\alpha| \leq j$. Em particular, se $\alpha = 0$, temos que $f_m^*\big|_K \to f_o$, ou seja, $f_n \to f_o$ em $C(K)$. Provemos que $f_o \in C^j(K)$ e $f_n \to f$ em $C^j(K)$.

Pelo Teorema 5.2, existe $f^* \in C^j(\mathbb{R}^n)$ com $\partial^\alpha f^*(x) = f_\alpha(x)$, $x \in K$ e $|\alpha| \leq j$. De fato, seja $g_{n,\alpha} = \partial^\alpha f_n^*\big|_K$, pela diferenciabilidade de $g_{n,\alpha}$ quando $|\beta| \leq j - |\alpha|$ e pela fórmula de Taylor, temos que

$$g_{n,\alpha} - \sum_{|\beta| \leq j - |\alpha|} \frac{\partial^\beta g_{n,\alpha}(y)(x-y)^\beta}{\beta!} = o\left(|x-y|^{j-|\alpha|}\right).$$

Logo,

$$\begin{aligned} U_\alpha(x,y) &= \left| g_{n,\alpha}(x) - \sum_{|\beta| \leq j-|\alpha|} \frac{g_{n,\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta}{\beta!} \right| |x-y|^{|\alpha|-j} \\ &= \left| g_{n,\alpha}(x) - \sum_{|\beta| \leq j-|\alpha|} \frac{\partial^\beta g_{n,\alpha}(y)(x-y)^\beta}{\beta!} \right| |x-y|^{|\alpha|-j} \\ &= o\left(|x-y|^{|\alpha|-j}\right).|x-y|^{|\alpha|-j} \end{aligned}$$

é contínua e tende para zero quando x tende a y. Como $g_{n,\alpha}$ converge uniformemente para f_α em K, temos que

$$U_\alpha^*(x,y) = \left| f_\alpha(x) - \sum_{|\beta| \leq j-|\alpha|} \frac{f_{\alpha+\beta}(y)(x-y)^\beta}{\beta!} \right| |x-y|^{|\alpha|-j} \xrightarrow{x \to y} 0,$$

$U_\alpha^*(x,y)$ é contínua, implicando que f_α satisfaz as hipóteses do teorema 5.2.

Tomando $\alpha = 0$, temos que esta f^* é uma extensão de f_o a $\mathbb{R}^n$, portanto, $f_o \in C^j(K)$. Como $\partial^\alpha f_n^*\big|_K \to f_\alpha\big|_K$ em $C(K)$ para todo α tal que $|\alpha| \leq j$ e $\partial^\alpha f^*\big|_K = \partial^\alpha f_o$, temos que $f_n \to f_o$ em $C^j(K)$. Portanto, $(C^j(K), \|\cdot\|_{j,\infty})$ é completo. $\square$

Defina $C^\infty(K) = \bigcap_{j=0}^{\infty} C^j(K)$. Considere a métrica

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)},$$

em que

$$p_i(f) = \sup_{|\alpha| \leq i} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K)}, \quad f \in C^\infty(K),$$

são seminormas em $C^\infty(K)$. Vejamos que, de fato, temos uma métrica.

i) $d(f,g) \geq 0$, pois p_i é uma seminorma.

ii)

$$0 = d(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)} \Rightarrow p_i(f-g) = 0, \ \forall\ i \in \mathbb{N}.$$

Logo, $f(x) = g(x)$, $\forall\ x \in K$. Por outro lado, se $f \equiv g$, então

$$d(f,g) = d(f,f) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(f-f)}{1+p_i(f-f)} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(0)}{1+p_i(0)} = 0.$$

iii) Como, p_i é seminorma, temos que $p_i(f-g) = p_i(g-f)$. Logo,

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)} = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(g-f)}{1+p_i(g-f)} = d(g,f).$$

iv) Que d satisfaz a desigualdade triangular, segue de

$$\frac{p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)} \leq \frac{p_i(f-h)}{1+p_i(f-h)} + \frac{p_i(h-g)}{1+p_i(h-g)}.$$

Provemos a desigualdade acima. Com efeito, como p_i satisfaz a desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} \frac{p_i(f-g)}{1+p_i(f-g)} = \left(1 + \frac{1}{p_i(f-g)}\right)^{-1} &\leq \left(1 + \frac{1}{p_i(f-h)+p_i(h-g)}\right)^{-1} \\ &= \frac{p_i(f-h)+p_i(h-g)}{1+p_i(f-h)+p_i(h-g)} \\ &\leq \frac{p_i(f-h)}{1+p_i(f-h)} + \frac{p_i(h-g)}{1+p_i(h-g)}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade provém do fato de que para quaisquer números $a, b \in \mathbb{R}^+$, temos que

$$\frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a}{1+a+b} + \frac{b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Concluindo que d define uma métrica em $C^\infty(K)$. □

Proposição 5.4. *Nestas condições temos que* $(C^\infty(K), d)$ *é completo.*

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ sequência de Cauchy em $C^\infty(K)$. Logo, $\{f_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $C^j(K)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Assim, para cada j existe $f^j \in C^j(K)$ tal que $f_n \to f$ em $C^j(K)$. Pela unicidade do limite, $f_n \to f^{j+1}$ em $C^j(K)$.

Como, podemos fazer isso para todo j, temos que $f = f^j \in C^\infty(K)$ e $f_n \to f$ em $C^\infty(K)$. Logo, $C^\infty(K)$ é completo. □

Proposição 5.5. *Suponhamos que K seja infinito. Então $(C^\infty(K), d)$ não é normável, isto é, não existe norma $\|\cdot\|$ tal que*

$$(C^\infty(K), d) = (C^\infty(K), \|\cdot\|).$$

Demonstração: Mostraremos que $C^\infty(K)$ tem a propriedade de Heine-Borel, isto é, todo subconjunto $E \subset X$ tal que E é fechado e limitado, então E é compacto. Feito isso, usaremos o Teorema 4.14 para concluir que se este for normado, então terá dimensão finita. O que não pode acontecer, pois o espaço vetorial gerado por $\{f_\alpha;\ f_\alpha(x) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n},\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n\}$, tem dimensão infinita e está em $C^\infty(K)$.

Seja $E \subset C^\infty(K)$ um subconjunto fechado e limitado. Logo, pelo Teorema 4.18, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n \in \mathbb{R}$ tal que $p_n(f) \leq M_n$, $\forall\ f \in E$, isto é,

$$\sup_{|\alpha| \leq n} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K)} \leq M_n,\ \forall\ f \in E.$$

Vejamos que este fato implica na limitação pontual e equicontinuidade de $\{\partial^\beta f;\ f \in E\}$, para cada $\|\beta| \leq n-1$. De fato, fixado $x \in K$ e escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $V_x = B\left(x, \dfrac{\varepsilon}{M_{|\beta|+1}}\right) \bigcap K$ seja um conexo. Assim, V_x é uma vizinhança de x em K e para todo $y \in V_x$ (suponhamos, sem perda de generalidade, que $y = x + ce_j$),

$$\begin{aligned} \left|\partial^\beta f(y) - \partial^\beta f(x)\right| &\leq \sup_{t\in[0,1]} \left|\partial^{\beta+e_j} f(ty + (1-t)x)\right| |y - x| \\ &\leq M_{|\beta+e_j|}|y - x| \leq \frac{\varepsilon M_{|\beta|+1}}{M_{|\beta|+1}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\{\partial^\beta f;\ f \in E\}$ é equicontínuo quando $|\beta| \leq n-1$. A limitação pontual é clara. Pelo teorema de Arzela-Ascoli, cada $E_\beta = \{\partial^\beta f;\ f \in E\}$, com $|\beta| \leq n-1$ é totalmente limitado em $C(K)$. Como $C(K)$ é completo, E_β tem a propriedade de que cada sequência de E_β possui subsequência uniformemente convergente, e pelo processo de diagonalização de Cantor concluímos que toda sequência de E possui uma subsequência $\{f_i\}$ de modo que $\{\partial^\beta f_i\}$ converge uniformemente sobre K para cada multi-índice β.

Logo, converge na topologia de $C^\infty(K)$. Assim, E é sequencialmente compacto e como $(C^\infty(K), d)$ é métrico temos que E é compacto. Portanto, $(C^\infty(K), d)$ possui a propriedade de Heine-Borel. □

A topologia em $C^\infty(K)$ gerada pelas seminormas $p_i's$, e gerada pelos abertos sub-básicos de $C^\infty(K)$ dadas por

$$V(f, n, \varepsilon) = \{g \in C^\infty(K) :\ p_n(g - f) < \varepsilon\}.$$

Proposição 5.6. *$(C^\infty(K), d)$ é igual a $(C^\infty(K), \{p_n\})$.*

Demonstração: Temos que mostrar que os abertos de $(C^\infty(K), \{p_n\})$ são abertos de $(C^\infty(K), d)$ e vice e versa. Seja $V(f, n, \varepsilon)$ aberto sub-básico de $(C^\infty(K), \{p_n\})$ devemos mostrar que existe $B(g, \varepsilon')$ elemento básico de $(C^\infty(K), d)$ tal que $B(g, \varepsilon') \subset V(f, n, \varepsilon)$.

Para isso, basta encontrar $\varepsilon' > 0$ de modo que $B(f, \varepsilon') \subset V(f, n, \varepsilon)$. Assim, tomando $\varepsilon' = \dfrac{2^{-n}\varepsilon}{1+\varepsilon}$, temos que se $g \in B(f, \varepsilon')$, então

$$d(g, f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(g-f)}{1 + p_i(g-f)} < \varepsilon' = \frac{2^{-n}\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Daí,

$$\frac{2^{-n} p_n(g-f)}{1 + p_n(g-f)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(g-f)}{1 + p_i(g-f)} < \frac{2^{-n}\varepsilon}{1+\varepsilon},$$

então

$$p_n(g-f) + p_n(g-f)\varepsilon < \varepsilon + \varepsilon p_n(g-f) \Rightarrow p_n(g-f) < \varepsilon.$$

Logo, $g \in V(f, n, \varepsilon)$, ou seja, $B(f, \varepsilon) \subset V(f, n, \varepsilon)$.

Por outro lado, seja $B(f, \varepsilon)$ em $C^\infty(K), d)$ queremos encontrar n_o e $\varepsilon' > 0$ de modo que $V(f, n_o, \varepsilon') \subset B(f, \varepsilon)$, isto é, se $p_{n_o}(g-f) < \varepsilon'$, teremos

$$d(g, f) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(g-f)}{1 + p_i(g-f)} < \varepsilon.$$

Como a série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(g-f)}{1 + p_i(g-f)},$$

é convergente, existe $i_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=i_o}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(g-f)}{1 + p_i(g-f)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como a função real $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ é crescente e visto que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $p_i(g-f) \leq p_{i+1}(g-f)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{i_o-1} \frac{2^{-i} p_i(g-f)}{1 + p_i(g-f)} &\leq \sum_{i=0}^{i_o-1} \frac{2^{-i} p_{i_o-1}(g-f)}{1 + p_{i_o-1}(g-f)} \\ &< p_{i_o-1}(g-f) \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2p_{i_o-1}(g-f). \end{aligned}$$

Seja $n_o = i_o - 1$ e $\varepsilon' < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Se g é tal que $p_{i_o-1}(g-f) < \varepsilon'$, temos que

$$\begin{aligned} d(g, f) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(g-f)}{1 + p_i(g-f)} = \sum_{i=0}^{i_o-1} \frac{2^{-i} p_i(g-f)}{1 + p_i(g-f)} + \sum_{i=i_o}^{\infty} \frac{2^{-i} p_i(g-f)}{1 + p_i(g-f)} \\ &< 2p_{i_o-1}(g-f) + \frac{\varepsilon}{2} < 2\varepsilon' + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{2\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, $(C^\infty(K), d) \subset (C^\infty(K), \{p_n\})$. Concluindo a nossa demonstração. $\square$

5.2 Breve comentário sobre o espaço $C_c^\infty(K)$

Definimos o espaço $C_c^\infty(K)$ como sendo o subespaço de $C^\infty(K)$ das funções com suporte compacto contido em K. Dessa forma, consideraremos a topologia de $C_c^\infty(K)$ como sendo a induzida pelo espaço maior. De maneira mais simples do que procedemos na Proposição 5.3, temos que $C_c^\infty(K)$ é completo, pois o Teorema de Whitney não é necessário, uma vez que, a extensão para fora deste compacto seria a função nula.

5.3 O espaço $C^\infty(\Omega)$ e sua topologia

Dado Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ não vazio, definimos o espaço vetorial

$$C^\infty = \{f : \Omega \to \mathbb{C};\ f \in C^j(\Omega),\ \forall\, j \in \mathbb{N}\}.$$

Note que tal espaço contém todas as funções constantes, e portanto, é não vazio. Dessa forma, seja $K \subset \Omega$ compacto, consideremos as seminormas

$$q_{j,K}(f) = \sum_{|\alpha| \leq j} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K)},$$

com isso, definamos os abertos sub-básicos de $C^\infty(\Omega)$ dados pelas seminormas $q_{j,K}$, onde $j \in \mathbb{N}$ e K percorre todos os subconjuntos compactos de Ω. Vejamos como funciona convergência nesta topologia.

Proposição 5.7. *Uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções em $(C^\infty(\Omega), \{q_{j,K}\})$ converge para zero em $(C^\infty(\Omega), \{q_{j,K}\})$ se, e somente se, para todo compacto K contido em Ω e todo inteiro positivo m a derivada de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero em K quando $n \to \infty$.*

Demonstração: Primeiramente, assumamos que ϕ_n converge para zero em $(C^\infty(\Omega), \{q_{j,K}\})$. Por definição, $q_{j,K}(\phi_n) \to 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e todo compacto $K \subset \Omega$. Assim, dado $K \subset\subset \Omega$ e m um inteiro positivo, temos que

$$\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(K)} \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(K)} = q_{m,K}(\phi_n) \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Agora, suponhamos que para todo compacto K contido em Ω e todo inteiro positivo m a derivada de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero em K quando $n \to \infty$, ou seja,

$$\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(K)} \to 0, \ \forall \ m \in \mathbb{N} \text{ e } \forall \ K \subset\subset \Omega$$

quando $n \to \infty$. Portanto,

$$q_{m,K}(\phi_n) = \sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(K)} = \sum_{l=0}^{m} \sum_{|\alpha|=l} \|\partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(K)} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Concluindo a nossa caracterização. □

Escreva $\Omega = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$, sendo $K_i's$ compactos de Ω de modo que $K_i \subset int(K_{i+1})$, $\forall \ i \in \mathbb{N}$, uma tal suquência de compactos pode ser dada por $K_i = \{x \in \Omega : |x| \leq i \text{ e } d(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{i}\}$. Assim, definamos as seminormas

$$p_j(f) = \sum_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K_j)}, \ \forall \ f \in C^\infty(\Omega).$$

Lema 5.8. $(C^\infty(\Omega), \{q_{j,K}\}) = (C^\infty(\Omega), \{p_j\})$.

Demonstração: Note que,

$$p_j(f) = \sum_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K_j)} = q_{j,K_j}.$$

Por outro lado,

$$q_{i,K} = \sum_{|\alpha|\leq i} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K)} \leq \sum_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K_j)} = p_j,$$

se $j \geq i$ e $K \subset K_j$. Concluindo a demonstração. □

Dessa forma, podemos considerar apenas as seminormas p_i para definir a topologia de $C^\infty(\Omega)$, o que nos dá uma grande vantagem, já que estas seminormas são enumeráveis, e portanto, pelos Teoremas 4.15 e 4.18, definem uma topologia que fazem de $C^\infty(\Omega)$ um espaço metrizável, localmente convexo.

Teorema 5.9. *$(C^\infty(\Omega), \{p_j\})$ é completo.*

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ sequência de Cauchy em $(C^\infty(\Omega), \{p_j\})$, isto é, dado $\varepsilon > 0$, para cada j, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_j(f_n - f_m) = \sum_{|\alpha|\leq j} \|\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f_m\|_{L^\infty(K_j)} < \varepsilon, \text{ se } n, m \geq n_o.$$

Assim, temos que $\{f_n\}$ é de Cauchy em $(C^\infty(K_i), q_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned} q_l(f_n - f_m) &= \sum_{|\alpha|\leq l} \|\partial^\alpha (p_n - p_m)\|_{L^\infty(K_i)} \\ &\leq p_j(f_n - f_m), \text{ onde } j = \max\{l, i\}. \end{aligned}$$

Então existe $f^i \in C(K_i)$ tal que $f_n \to f^i$ em $C^\infty(K_i)$. Afirmamos que $f^i = f^{i+\nu}|_{K_i}$, $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} q_l(f^i - f^{i+\nu}) &\leq q_l(f^i - f_n) + q_l(f_n - f^{i+\nu}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{|\alpha|\leq l} \|\partial^\alpha(f_n - f^{i+\nu})\|_{L^\infty(K_{i+\nu})} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

se n for suficientemente grande. Desse modo, $f(x) = f^i(x)$, se $x \in K_i$ está bem definida. Além disso, $f \in C^\infty(\Omega)$, pois dado $x \in \Omega$ existe j_o tal que $x \in intK_j$ para todo $j \geq j_o$, então $f^{(j)}(x)$ existe para todo j. Assim,

$$p_i(f_n - f) = \sum_{|\alpha|\leq i} \|\partial^\alpha(f_n - f^i)\|_{L^\infty(K_i)} < \frac{\varepsilon}{4},$$

para n suficientemente grande. Logo, $(C^\infty(\Omega), \{p_j\})$ é completo. $\square$

5.4 $C_c^\infty(\Omega)$ e a sua topologia

Seja $K_i \subset\subset \Omega$ de forma que $\Omega = \bigcup_i K_i$ e $K_i \subset int(K_{i+1})$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$. Defina as seminormas

$$p_i(f) = \sup_{|\alpha|\leq i} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K_i)},\ \ \forall\ f \in C_c^\infty(\Omega).$$

E a métrica

$$d(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(g-f)}{1+p_i(g-f)}.$$

Dessa forma, a topologia de $C_c^\infty(\Omega)$ dada por esta métrica é dada pelos abertos sub-básicos

$$V(f,n,\varepsilon) = \{g \in C_c^\infty(\Omega) :\ p_n(g-f) < \varepsilon\}.$$

Proposição 5.10. *$(C_c^\infty(\Omega), d)$ não é completo.*

Demonstração: Inicialmente, suponhamos que $\Omega = \mathbb{R}$ e tomemos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $S(\phi) = [0,1]$, $\phi > 0$ em $(0,1)$. Definamos

$$\psi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\phi(x-j).$$

Para cada n fixo, $S(\psi_n) \subset \bigcup_{j=1}^{n} [j, j+1]$ que é compacto, onde $S(\psi_n)$ é compacto. E como $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, temos que $\psi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Provemos que ψ_n é de Cauchy. Para isto basta monstrar que dado $\varepsilon > 0$, e fixado $i \in \mathbb{N}$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $p_i(\psi_n - \psi_m) < \varepsilon$, $\forall\, n, m \geq n_o$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $m \leq n$, assim

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \psi_n(x) - \partial^\alpha \psi_m(x) &= \partial^\alpha \left(\sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\phi(x-j) - \sum_{j=1}^{m} 2^{-j}\phi(x-j) \right) \\ &= \sum_{j=m+1}^{n} 2^{-j}\partial^\alpha \phi(x-j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_i(\psi_n - \psi_m) &= \sup_{|\alpha| \leq i} \left\| \sum_{j=m+1}^{n} 2^{-j}\partial^\alpha \phi(x-j) \right\|_{L^\infty(K_i)} \\ &\leq \sum_{j=m+1}^{n} 2^{-j} \sup_{|\alpha|\leq i} \|\partial^\alpha \phi(x-j)\|_{L^\infty(K_i)} \\ &\leq p_i(\phi) \sum_{j=m+1}^{n} 2^{-j} = 2p_i(\phi)\left(2^{-(n+1)} - 2^{-(m+1)}\right). \end{aligned}$$

Como $2^{-(n+1)} - 2^{-(m+1)} \to 0$ quando $m, n \to \infty$, temos que $\{\psi_n\}$ é de Cauchy.

Por outro lado, se existe o limite ψ_n em $C_c^\infty(\mathbb{R})$, digamos ψ, existiria o limite pontual e este seria igual a ψ no respectivo ponto. Assim, o candidato a ser o limite de ψ_n seria

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}\phi(x-j).$$

Agora, vejamos que tal ψ não pertence a $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Com efeito, como $S(\phi) = [0,1]$, vemos que o suporte de ψ será $\bigcup_{j=1}^{\infty}[j, j+1] = [1, \infty)$ o qual não é compacto em $\mathbb{R}$. E portanto, $(C_c^\infty(\mathbb{R}), d)$ não é completo.

Neste momento, provaremos o caso de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Caso $\partial\Omega$ seja não vazia, escolha $x_n \in \Omega$ tal que $x_n \to p \in \partial\Omega$ e $\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\psi_n(x_n) = 1$ e $S(\psi_n) \cap S(\psi_m) = \varnothing$ para $n \neq m$.

Caso $\partial\Omega = \varnothing$, $\Omega = \mathbb{R}^n$. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\phi \geq 0$ e $S(\phi) = \overline{B(0,1)}$ e $\phi(x) = 1$ para todo $x \in \overline{B\left(0, \frac{1}{2}\right)}$.

Escolha $x_n \in \Omega$ e $\varepsilon_n > 1$ tais que $\|x_n\| \to \infty$ e $B(x_n, \varepsilon_n)$ sejam dois a dois disjuntos. Tome

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\phi\left(\frac{x - x_k}{\varepsilon_k}\right).$$

Afirmamos que a sequência $\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ é de Cauchy com respeito a métrica d. Seja $y \in \left(\overline{B(x_k, \varepsilon_k)}\right)^c$, então $|y - x_k| > \varepsilon_k$, e portanto, $\phi_k(y) = \phi\left(\frac{y - x_k}{\varepsilon_k}\right) =$

0, logo $S(\phi_k) = \overline{B(x_k, \varepsilon_k)}$, e consequentemente, $S(\psi_n) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B(x_k, \varepsilon_k)}$ que é compacto. Dessa forma, $\psi_n \in C_c^\infty(\Omega)$.

Para mostrarmos que $\{\psi_n\}$ é de Cauchy é suficiente mostrar que fixado $i \in \mathbb{N}$ e dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $p_i(\psi_n - \psi_m) < \varepsilon$, para todo $n, m \geq n_o$. Sem perda de generalidade suponhamos que $m < n$. Visto que,

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha(\psi_n(x) - \psi_m(x)) &= \partial^\alpha \left(\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\phi\left(\frac{x - x_k}{\varepsilon_k}\right) - \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\phi\left(\frac{x - x_k}{\varepsilon_k}\right) \right) \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k}\partial^\alpha \left(\phi\left(\frac{x - x_k}{\varepsilon}\right) \right) \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k}\varepsilon_k^{-|\alpha|} \left(\partial^\alpha\phi\right) \left(\frac{x - x_k}{\varepsilon_k}\right) \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k} \left(\partial^\alpha\phi\right) \left(\frac{x - x_k}{\varepsilon_k}\right).
\end{aligned}$$

Assim, teremos que

$$\begin{aligned}
p_i(\psi_n - \psi_m) &= \sup_{|\alpha| \leq i} \|\partial^\alpha(\psi_n - \psi_m)\|_{L^\infty(K_i)} \\
&\leq \sup_{|\alpha| \leq i} \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k} \|\partial^\alpha \phi_k\|_{L^\infty(K_i')} \\
&= \sup_{|\alpha| \leq i} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k} \\
&\leq p_i(\phi) \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k} = p_i(\phi)(2^{-m} - 2^{-n}) \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n, m \to \infty$, e portanto, $\{\psi_n\}$ é de Cauchy.

Agora, provemos que a sequência ψ_n não converge para uma função em $C_c^\infty(\Omega)$. Com efeito, se tal sequência convergisse teríamos a convergência pontual, logo convergiria para a função

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\phi\left(\frac{x - x_k}{\varepsilon_k}\right), \text{ com } S(\psi) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{B(x_k, \varepsilon_k)}.$$

Portanto, $\psi \notin C_c^\infty(\Omega)$, pois tal suporte não é compacto. Dessa forma, mostramos a não completude de $(C_c^\infty(\Omega), d)$. $\square$

Observação 5.11. *A união infinita das bolas* $\overline{B(x_k, \varepsilon_k)}$ *não é compacta, ou seja,*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B(x_k, \varepsilon_k)}$$

não é compacta.

De fato, se fosse compacta, teríamos que este seria fechado e limitado, e como $\{x_n\}$ está contida na união teríamos que $\{x_n\}$ possuiria subsequência convergente, ou seja, existiria $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ tal que $x_{n_j} \to p$. Mas $\|x_{n_j}\| \to \infty$ uma contradição. Concluindo a não compacidade de tal conjunto. $\square$

Dessa forma, concluímos que a técnica usada para definir uma topologia em $C^\infty(\Omega)$ de forma que este espaço seja completo não funcionou para $C_c^\infty(\Omega)$. Assim, devemos definir em $C_c^\infty(\Omega)$ uma topologia mais fina do que esta dada pela métrica d.

Seja $\rho = \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ uma família de funções contínuas definidas em Ω, tal que $\{S(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ é uma família localmente finita de conjuntos, isto é, para todo compacto $K \subset \Omega$, temos que $\#\{\alpha;\ S(\rho_\alpha) \cap K \neq \varnothing\}$ é finito.

Fixado uma tal família considere a seguinte seminorma em $C_c^\infty(\Omega)$

$$p_\rho(\phi) = \sum_\alpha \|\rho_\alpha \partial^\alpha \phi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Assim, definimos uma topologia em $C_c^\infty(\Omega)$, cujos abertos semi-básicos são dados por:

$$V(f, \rho, \varepsilon) = \{g \in C_c^\infty(\Omega);\ p_\rho(g - f) < \varepsilon\}.$$

Proposição 5.12. *A topologia dada pela família de seminormas $\{p_\rho\}$, é mais fina que a dada pela família de seminormas $\{p_i\}$, construída anteriormente.*

Demonstração: Para isso, basta mostrarmos que fixado n_o existe $C > 0$ e $\rho_o = \{\rho_{o,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ tal que

$$p_{n_o}(f) \leq C p_{\rho_o}(f), \quad \forall\ f \in C_c^\infty(\Omega). \tag{5.3}$$

De fato, tome $C = 1$ e $\rho_o = \{\rho_{o,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ em que

$$\rho_{o,\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{se } |\alpha| \leq n_o \\ 0 & \text{se } |\alpha| > n_o \end{cases}$$

Tais $\rho_o = \{\rho_{o,\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}^n}$ pertencem a $C(\Omega)$ e é uma família localmente finita, pois $\rho_{o,\alpha}(x) \neq 0$ exceto para $|\alpha| > n_o$, independente do compacto. E como,

$$\begin{aligned} \sup_{|\alpha| \leq n_o} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(K_{n_o})} &\leq \sup_{|\alpha| \leq n_o} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &= \sup_{|\alpha| \leq n_o} \|\rho_{o,\alpha} \partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \sum_\alpha \|\rho_{o,\alpha} \partial^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} = p_{\rho_o}(f). \end{aligned}$$

Logo, temos que a topologia dada pela família de seminormas $\{p_\rho\}$ é mais fina que a topologia dada pelas seminormas $\{p_i\}$. $\square$

Proposição 5.13. *Uma sequência de funções* $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $(C_c^\infty(\Omega), \{p_\rho\})$ *converge para zero em* $(C_c^\infty(\Omega), \{p_\rho\})$ *se, e somente se,*

(*i*) *existe um compacto* $K \subset \Omega$ *tal que* $S(\phi_n) \subset K,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$;

(*ii*) *para todo* $m \in \mathbb{Z}_+$ *as derivadas de ordem* m *de* ϕ_n *convergem uniformemente para zero quando* $n \to \infty$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $\{\phi_n\}$ uma sequência em $(C_c^\infty(\Omega), \{p_\rho\})$ de forma que ϕ_n converge para zero em $(C_c^\infty(\Omega), \{p_\rho\})$, daí $p_\rho(\phi_n) \to 0$, para toda família $\rho = \{\rho_\alpha\}$ de funções contínuas localmente finita.

Consideremos $K_j \subset\subset \Omega$ tais que $\Omega = \bigcup K_j$ e $K_j \subset intK_{j+1}$. Seja $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ uma função que vale 1 numa vizinhança de K_j, com suporte contido no interior de K_{j+1}. Defina $\psi_j = \varphi_j - \varphi_{j-1},\ n > 1$ e $\psi_1 = \varphi_1$. Como ψ_j vale 1 numa vizinhança de ∂K_j, temos que

$$\phi_n = \sum_n \psi_j \phi_n, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Assim, podemos supor que a sequência ϕ_n tem a propriedade da sequência $\psi_j\phi_n$, isto é, para cada $j \in \mathbb{N}$, $S(\phi_n)$ intercepta, no máximo, os suportes de ϕ_{n-1} e ϕ_{n+1}.

Se não existe compacto $K \subset \Omega$ tal que $S(\phi_n) \subset K$ para todo n, podemos encontrar uma sequência $\{x_n\}$ em Ω e vizinhanças U_n de x_n tal que a família $\{U_n\}$ é localmente finita, U_n só intercepta $S(\phi_n)$ e tais que $\phi_n(x_n) \neq 0$ digamos $\phi_n(x_n) > 0$ e $\phi_n \geq 0$ em U_n. Tome $0 \leq \rho_{o,n} \in C_c^\infty(U_n)$ de forma que $\rho_{o,n}(x_n) = \dfrac{1}{\phi_n(x_n)}$. Assim, a família

$$\rho_\alpha = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_{o,n}, & \text{se } |\alpha| = 0 \\ 0, & \text{se } |\alpha| > 0 \end{cases}$$

é localmente finita, contínua e além disso,

$$\begin{aligned} p_\rho(\phi_n) = \sum_\alpha \|\rho_\alpha \partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} &= \left\| \left(\sum_k \rho_{o,k} \right) \phi_n \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\geq \left\| \frac{1}{\phi_n(x_n)} \cdot \phi_n(x_n) \right\|_{L^\infty(\Omega)} = 1 \end{aligned}$$

O que é uma contradição, logo temos (i). Para (ii), fixe $m \in \mathbb{Z}_+$. Definindo

$$\rho_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{se } |\alpha| = m \\ 0, & \text{se } |\alpha| \neq m. \end{cases}$$

Temos que a família acima é localmente finita e por hipótese,

$$\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} = p_\rho(\phi_n) \to 0.$$

Reciprocamente, suponha que valem (i) e (ii). Seja $\rho = \{\rho_\alpha\}$ uma família localmente finita e K o compacto dado por (i), então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $S(\rho_\alpha) \cap K = \varnothing$, para todo $|\alpha| \geq m$. Temos que

$$\begin{aligned}
p_\rho(\phi_n) &= \sum_\alpha \|\rho_\alpha \partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\overset{(i)}{=} \sum_\alpha \|\rho_\alpha \partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(K)} \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \|\rho_\alpha \partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(K)} \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \|\partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(K)} \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \phi_n\|_{L^\infty(K)} \xrightarrow{(ii)} 0.
\end{aligned}$$

Concluindo a nossa demonstração. □

Proposição 5.14. *$(C_c^\infty(\Omega), \{p_\rho\})$ é completo.*

Demonstração: Seja $\{\psi_n\}$ uma sequência de Cauchy qualquer com relação a topologia, τ_ρ, dada pela família $\{p_\rho\}$. Assim, $\{\psi_n\}$ é de Cauchy em $(C^\infty(\Omega), \{p_n\})$, pela equação (5.3). E pelo Teorema 5.9, este espaço é completo, então existe $\psi \in (C^\infty(\Omega), \{p_n\})$ de forma que $\psi_n \to \psi$.

Vejamos que $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Por absurdo, suponhamos que $S(\psi)$ não seja compacto e exibiremos uma subsequência de $\{\psi_n\}$ que não é de Cauchy. Consideremos $K_i \subset\subset \Omega$ tais que $\Omega = \bigcup K_i$ e $K_i \subset intK_{i+1}$. Assim, temos que existe $x_1 \in \Omega \setminus K_1'$, com $K_1' = K_1$, tal que $\psi(x_1) \neq 0$, então existe n_1 de modo que

$$\|\psi_{n_1} - \psi\|_{L^\infty(\overline{V_{x_1}})} < \frac{|\psi(x_1)|}{2},$$

com V_{x_1} uma vizinhança do ponto x_1. Seja $K_2' = K_2 \bigcup \left(\bigcup_{j=-1}^{1} S(\psi_{n_1+j}) \right)$, então existe $x_2 \in \Omega \setminus K_2'$ tal que $\psi(x_2) \neq 0$, e portanto, existe n_2 de forma que

$$\|\psi_{n_2} - \psi\|_{L^\infty(\overline{V_{x_2}})} < \frac{|\psi(x_2)|}{2}.$$

Dessa forma, podemos proceder indutivamente. Isto é, encontrar pontos tais que existam vizinhanças destes disjuntas dois a dois tais que

$$\|\psi_{n_j} - \psi\|_{L^\infty(V_{x_j})} < \frac{|\psi(x_j)|}{2}.$$

Agora, mostremos que tal subsequência não é de Cauchy. Seja $\rho_{o,i} \in C_c^\infty(\overline{V_{x_i}})$, com

$$\rho_{o,i}(x_i) = \frac{1}{\psi_{n_i}(x_i)} \quad \text{e} \quad \rho_\alpha = \begin{cases} \sum \rho_{o,i} & \text{se } |\alpha| = 0 \\ 0 & \text{se } |\alpha| \neq 0. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} p_\rho(\psi_{n_l}-\psi_{n_k}) = \sum_\alpha \sup|\rho_\alpha \partial^\alpha(\psi_{n_l}-\psi_{n_k})| &= \sup\left|\sum \rho_{o,i}(\psi_{n_l}-\psi_{n_k})\right| \\ &= \sup|\rho_{o,l}\psi_{n_l}-\rho_{o,l}\psi_{n_k}| \geq 1 \end{aligned}$$

E portanto, temos que $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Agora, vejamos que $\psi_n \to \psi$ em $(C_c^\infty(\Omega), \{p_\rho\})$. Fixemos $\rho = (\rho_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ e seja $\varepsilon > 0$. mostraremos que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_n \in V(\psi,\rho,\varepsilon)$, $\forall\ n \geq n_o$.

Pela mesma construção anterior, vemos que existe um compacto $\widetilde{K} \subset \Omega$, tal que $S(\psi_n)$ e $S(\psi)$ estão contidos em $\widetilde{K}$.

Como a família ρ é localmente finita, existe um inteiro $k > 0$ tal que $\rho_\alpha(x) = 0$, $\forall\ x \in \widetilde{K}$ e $|\alpha| > k$. Assim,

$$\begin{aligned} p_\rho(\psi_n-\psi) &= \sum_\alpha \sup|\rho_\alpha \partial^\alpha(\psi_n-\psi)| \\ &= \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\widetilde{K}} |\rho_\alpha(x)\partial^\alpha(\psi_n(x)-\psi(x))| \\ &\leq \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\widetilde{K}} |\rho_\alpha(x)| \sup_{x\in S(\psi)} |\partial^\alpha(\psi_n(x)-\psi(x))| \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\widetilde{K}} |\rho_\alpha(x)|\right) \sup_{x\in\widetilde{K}}\{|\partial^\alpha(\psi_n-\psi)| :\ |\alpha| \leq k\}. \end{aligned}$$

Escolha $n^* > k$ de modo que $\widetilde{K} \subset K_{n^*}$ e usando o fato que $\psi_n \to \psi$ em $(C^\infty(\Omega), \{p_n\})$, tome $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_{n^*}(\psi_n-\psi) < \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \sup\limits_{x\in S(\psi)} \{|\rho_\alpha(x)|\}+1},\ \forall\ n \geq n_o.$$

Ou seja, se $n \geq n_o$, então

$$\sup_{x\in K_{n^*}} \{|\partial^\alpha(\psi_n-\psi)| :\ |\alpha| \leq n^*\} < \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \sup\limits_{x\in S(\psi)} \{|\rho_\alpha(x)|\}+1}.$$

Logo, tal n_o é o nosso número procurado. E dessa forma, $(C_c^\infty(\Omega), \{p_\rho\})$ é completo. $\square$

Proposição 5.15. *$C_c^\infty(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega), \{p_\rho\})$ não é metrizável, isto é, a topologia gerada por $\{p_\rho\}$ não provém de uma métrica.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que exista uma distância d tal que $d(\phi_n,\phi) \to 0$ se, e somente se, $\phi_n - \phi \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$. Seja $\{K_n\}$ uma sequência de compactos cuja união é Ω e escolha $\phi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n(x) = 1$ numa vizinhança de K_n.

Como $\varepsilon\phi_n \to 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$ se n é fixo e $\varepsilon \to 0$, por hipótese, podemos escolher $\varepsilon_n > 0$ tal que $d(\varepsilon_n\phi_n, 0) < \dfrac{1}{n}$. Assim, $d(\varepsilon_n\phi_n, 0) \to 0$, mas $\varepsilon_n\phi_n \nrightarrow 0$ em $C_c^\infty(\Omega)$, pois $\bigcup_{n=1}^{\infty} S(\varepsilon_n\phi_n) = \Omega$, contradizendo a Proposição 5.13 (i). $\square$

Agora, vejamos como definir a topologia do limite indutivo. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo do complexos. Suponhamos que $E = \cup E_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Onde a sequência E_n é crescente, e E_n é um espaço de Fréchet tal que a injeção natural de E_n em E_{n+1} é um isomorfismo, o que implica que a topologia induziada em E_n por E_{n+1} é idêntica à topologia inicial de E_n.

Assim, **definimos** em E uma estrutura de um espaço localmente convexo, procedendo como se segue. Seja $V \subset E$ um subconjunto convexo então V será um vizinhança do zero se, e somente, se para todo $n = 1, 2, \ldots$, $V \cap E_n$ for uma vizinhança da origem no espaço E_n.

Quando provemos E de tal topologia, dizemos que E é um espaço LF e a sequência $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é uma sequência de definição de E.

Lema 5.16. *Seja E um espaço localmente convexo, E_o um subespaço fechado de E, U uma vizinhança convexa da origem em E_o e x_o um ponto de E que não pertence a U. Então, existe uma vizinhança convexa V de 0 em E, que não contém x_o e tal que $V \cap E_o = u$.*

Para uma demonstração, vide [T, Lema 13.1].

Proposição 5.17. *Seja E um espaço LF, $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de definição de E, F um espaço vetorial topológico localmente convexo arbitrário e u um operador linear de E em F. Então u é contínuo se, e somente se, para cada k, a restrição $u\big|_{E_k}$ de u em E_k é um operador linear contínuo de E_k em F.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja V uma vizinhança de zero em F. Logo, $u^{-1}(V)$ contém uma vizinhança convexa de zero, $U \subset E$. Para cada k, $U_k = U \cap E_k$ é uma vizinhança da origem em E_k, e temos que

$$U_k = u^{-1}(V) \cap E_k = \left(u\big|_{E_k}\right)^{-1}(V).$$

Portanto, $u\big|_{E_k}$ é contínua.

$(\Leftarrow)$ Seja V uma vizinhança de 0 em F. Como F é localmente convexo, podemos assumir que V é convexa, então $u^{-1}(V)$ também é, pois se $u(x),\ u(y) \in$

V então $u(tx + (1-t)y) = tu(x) + (1-t)u(y) \in V$, e portanto, $tx + (1-t)y \in u^{-1}(V)$. Mas, para cada k,

$$u^{-1}(V) \cap E_k = \left(u\big|_{E_k}\right)^{-1}(V)$$

é uma vizinhança de zero em E_k. Assim, como $u^{-1}(V)$ é convexa, esta será uma vizinhança de zero em E. Mostrando a nossa tese. $\square$

Para uma demonstração do próximo resultado veja [T, Teorema 13.1].

Teorema 5.18. *Todo espaço LF é completo.*

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e considere K_j sequência de compactos que esgota Ω. Por resultados anteriores sabemos que $C_c^\infty(K_j)$ é um espaço de Fréchet e que a topologia induzida por $C_c^\infty(K_{j+1})$ em $C_c^\infty(K_j)$ é a mesma topologia que este espaço já tinha originalmente. Assim, podemos considerar $C_c^\infty(\Omega)$ como sendo um espaço LF definido pela sequência de definição $C_c^\infty(K_j)$.

Capítulo 6

Voltando às distribuições

Nesta seção, voltaremos a falar sobre as distribuições veremos que distribuições de ordem zero são medidas e por fim daremos uma outra demonstração para o Teorema 3.28.

Proposição 6.1. *Sejam E e F dois espaços vetoriais topológicos, com E metrizável. Se f é uma função de E em F, então f é contínua se, e somente se, é sequencialmente contínua.*

Para uma demonstração, vide [T, Proposição 8.5].

Proposição 6.2. *Um funcional linear L em $C_c^\infty(\Omega)$. As seguintes condições são equivalentes:*

a) L é contínua (i.e., L é uma distribuição);

b) Para todo compacto $K \subset \Omega$, existe inteiro $m \geq 0$ e constante $C > 0$ tal que

$$|L(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_K \left| \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(x) \right|, \forall\ \varphi \in C_c^\infty(K)$$

c) Para toda sequência $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_k \to 0$ em C_c^∞, tem-se $L(\varphi_k) \to 0$ quando $k \to \infty$.

Demonstração:

a) $\Leftrightarrow$ b) Segue das Proposições 5.17 e 4.19 (ou Teorema 3.20).

a) $\Leftrightarrow$ c) Segue da Proposição 6.1.

Concluindo a nossa demonstração. $\square$

Teorema 6.3. *Se $u \in \mathcal{D}'^k(\Omega)$ tal que para todo c $K \subset \Omega$ existe constante C*

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup |\partial^\alpha \phi|, \ \forall \ \phi \in C_c^\infty(K) \tag{6.1}$$

então existe uma única extensão de $\tilde{u}$ linear em $C_c^k(\Omega)$ tal que a equação (6.1) continua válida para toda $\phi \in C_c^k(K)$ e alguma constante C.

Demonstração: Pelo Teorema 1.14, temos que para toda $\phi \in C_c^k(\Omega)$ podemos achar uma sequência $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ com suporte compacto, K, contido numa vizinhança compacta de $S(\phi)$, tal que

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \sup |\partial^\alpha(\phi - \psi_\varepsilon)| \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{6.2}$$

Assim, definamos $\tilde{u}(\phi) = \lim u(\phi_\varepsilon)$. Usando (6.1) e (6.2), obtemos

$$\begin{aligned} |u(\phi_\varepsilon) - u(\phi_\delta)| = |u(\phi_\varepsilon - \phi_\delta)| &\leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup |\partial^\alpha(\phi_\varepsilon - \phi_\delta)| \\ &\leq C \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \sup |\partial^\alpha(\phi_\varepsilon - \phi)| + \sum_{|\alpha|\leq k} \sup |\partial^\alpha(\phi - \phi_\delta)| \right) \to 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

quando $\varepsilon, \delta \to 0$. Logo, tal limite existe e é independente da sequência escolhida.

Aplicando (6.1) a ϕ_ε e tomando o limite para $\varepsilon \to 0$, concluímos que (6.1) é vália para toda $\phi \in C_c^k$ com suporte no interior de K. □

Como uma medida pode ser definida como um funcional linear em $C_c^0(\Omega)$ satisfazendo a equação (6.1) para $k = 0$, obtemos uma identificação do espaço $\mathcal{D}'^0(\Omega)$ com o espaço das medidas em Ω. Se uma função integrável f é identificada com a medida fdx, como usualmente a teoria de integração faz. Então, fdx é também uma distribuição.

Teorema 6.4. *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $u(\phi) \geq 0$, para toda $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ não-negativa, então u é uma medida positiva.*

Demonstração: Devemos mostrar que u é de ordem 0. Note que, para todo compacto $K \subset \Omega$, pelo Teorema 1.17, temos que existe $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ com $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi = 1$ em K. Então

$$\psi(x) \sup |\phi| \pm \phi(x) \geq 0,$$

se $\phi \in C_c^\infty(K)$ é uma função a valores reais.

Por hipótese e usando a linearidade da u, temos que

$$u(\psi) \sup |\phi| \pm u(\phi) \geq 0,$$

ou equivalentemente,

$$|u(\phi)| \leq u(\psi) \sup |\phi|, \quad \phi \in C_c^\infty(K). \tag{6.4}$$

Agora, se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ é uma função a valores complexos, consideremos a função $e^{i\theta}\phi$, com $\theta \in \mathbb{R}$. Então, usando (6.4), temos que

$$\begin{aligned} |u(e^{i\theta}\phi)| = |u(\Re e^{i\theta}\phi + i\Im E^{i\theta}\phi)| &\leq |u(\Re e^{i\theta}\phi)| + |u(\Im E^{i\theta}\phi)| \\ &\leq u(\psi)\sup|\Re e^{i\theta}\phi| + u(\psi)\sup|\Im e^{i\theta}\phi| \\ &\leq u(\psi)\sup|e^{i\theta}\phi| + u(\psi)\sup|e^{i\theta}\phi| \\ &= 2u(\psi)\sup|\phi|. \end{aligned}$$

Concluindo a demonstração. □

Agora, iremos fazer uma outra demonstração do Teorema 3.28. Vejamos, novamente, seu enunciado.

Teorema 6.5. *Sejam $I = (a, b)$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $Z = \{z \in \mathbb{C} : \Re z \in I,\ 0 < \Im z < \gamma\}$. Se f é uma função analítica em Z tal que para algum inteiro não negativo N*

$$|f(z)| \leq \frac{C}{(\Im z)^N},\ z \in Z,$$

então $f(\cdot + iy)$ tem um limite $f_o \in \mathcal{D}'^{N+1}(I)$ quando $y \to 0$, ou seja,

$$\lim_{y\to 0}\int f(x+iy)\phi(x)dx = \langle f_o, \phi\rangle,\ \forall\ \phi \in C_c^{N+1}(I).$$

Demonstração: Nesta demonstração daremos uma fórmula para f_o. Para cada $\phi \in C_c^{N+1}(I)$, consideremos $\psi(x + i0) \doteq \phi(x)$. Logo, ψ é holomorfa num disco, e portanto,

$$\psi(x, y) = \sum_j \frac{\phi^{(j)}(x)(iy)^j}{j!},$$

uma vez que $z - z_o = x + iy - x - i0 = iy$. Agora, definamos $\Phi(x, y)$ como sendo a ψ truncada no n-ésimo termo, ou seja,

$$\Phi(x, y) = \sum_{j\leq n} \frac{\phi^{(j)}(x)(iy)^j}{j!}.$$

Então $\phi(x,0) = \phi(x)$ e

$$\begin{aligned}
\frac{2\partial\Phi}{\partial\bar{z}} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\Phi &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j\leq n}\frac{\phi^{(j)}(x)(iy)^j}{j!}\right) + i\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_{j\leq n}\frac{\phi^{(j)}(x)(iy)^j}{j!}\right) \\
&= \sum_{j\leq n}\frac{\phi^{(j+1)}(x)(iy)^j}{j!} + \sum_{j\leq n-1}\frac{\phi^{(j+1)}(x)(iy)^j i^2}{j!} \\
&= \sum_{j\leq n}\frac{\phi^{(j+1)}(x)(iy)^j}{j!} - \sum_{j\leq n-1}\frac{\phi^{(j+1)}(x)(iy)^j}{j!} \\
&= \frac{\phi^{(n+1)}(x)(iy)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Fixe Y com $0 < Y < \gamma$. Se $0 < y < \gamma - Y$, obtemos da equação

$$2\int_U \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}dxdy = -i\int_{\partial U}\varphi d(x+iy), \ \varphi \in C_c^1(I),$$

aplicada a $\Phi(z)f(z+iy)$ em $U = I' \times (0,Y)$, com $\overline{I'} \subset\subset I$ e $S(\phi) \subset I'$, obtemos

$$\begin{aligned}
2\int_U \frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}f(z+iy)dxdy &= -i\int_{\partial U}\Phi(x,y)f(z+iy)d(x+iy) \\
&= -i\int\Phi(x,0)f(z)dx + i\int\Phi(x,Y)f(z+iY)dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int\Phi(x,0)f(x+iy)dx &= \int\Phi(x,y)f(x+iY+iy)dx \\
&\quad +2i\iint_{0<\Im z<Y} f(z+iy)\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{z}}dxdy.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $z = x + itY$, com $0 < t < 1$, temos

$$\begin{aligned}
\int\phi(x)f(x+iy)dx = &\int\phi(x,y)f(x+iY+iy)dx \\
&+\iint_0^1 \frac{f(x+itY+iy)\phi^{(n+1)}(x)(iY)^{n+1}t^n}{n!}dxdt.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese,

$$|Yt|^n \,.\, |f(x+i(tY+y))| \leq \frac{C\,|Yt|^n}{|Yt+y|^n} \leq C$$

temos que existe uma limitação uniforme para o integrando na segunda integral quando $y \to 0$, e portanto

$$\begin{aligned}
\int\phi(x)f(x+iy) &\to \int\phi(x,y)f(x+iY)dx \\
&\quad +\iint_0^1 \frac{f(x+itY)\phi^{(n+1)}(x)(iY)^{n+1}t^n}{n!}dxdt.
\end{aligned}$$

Concluindo a demonstração com uma fórmula pra f_o. □

Referências Bibliográficas

[F] Folland, G. B., *Real Analysis, modern techniques and their applications*, Pure and Applied Mathmatics - Willey Interscience Series of Texts, 1999. 1.2

[H] Hoepfner, G., *Equações Diferenciais Parciais*, Notas de Aula, 2009.

[Ho] Hormander, L., *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, I*, Springer Study Edition, 1989. 3.3, 5.1

[Hou] Hounie, J. G., *Teoria Elementar das Distribuições*, IMPA, 1979.

[E] Lima, E. L., *Curso de Análise, 1*, IMPA, 1976. 2.2

[R1] Rudin, W., *Functional Analysis*, McGraw Hill, 1991. 4.1, 4.1, 4.2

[R2] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1987. 1.2, 1.2, 1.2

[T] Treves, F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, 1967. 5.4, 5.4, 6