Decomposição de Módulos Livres de Torção como Soma Direta de Módulos de Posto 1

Santiago Miler Quispe Mamani
Instituto de Ciências Exatas/UFJF
Orientadora: F. A. Ribeiro

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Sumário

Enunciado do teorema principal

Teorema

Seja R um domínio de integridade Noetheriano cujo fecho inteiro $\overline{R}$ é um R-módulo finitamente gerado. Então, todo R-módulo livre de torção é uma soma direta de módulos de posto 1 se, e somente se, $\mu^*(R) \leq 2$. Além disso, neste caso, todo R-módulo livre de torção de posto 1 é um S-módulo projetivo para um único anel S tal que $R \subseteq S \subseteq \overline{R}$.

Para isso, precisaremos de algumas definições e alguns resultados sobre módulos de livres de torção. Todo *módulo* significará módulo finitamente gerado.

Enunciado do teorema principal

Teorema

Seja R um domínio de integridade Noetheriano cujo fecho inteiro $\overline{R}$ é um R-módulo finitamente gerado. Então, todo R-módulo livre de torção é uma soma direta de módulos de posto 1 se, e somente se, $\mu^*(R) \leq 2$. Além disso, neste caso, todo R-módulo livre de torção de posto 1 é um S-módulo projetivo para um único anel S tal que $R \subseteq S \subseteq \overline{R}$.

Para isso, precisaremos de algumas definições e alguns resultados sobre módulos de livres de torção. Todo *módulo* significará módulo finitamente gerado.

Condição necessária para decomposição

Definição

Sejam A um domínio de integridade e M um A-módulo. Um elemento $x \in M$ é um elemento de torção de M se $Ann(x) := \{a \in A; ax = 0\} \neq \{0\}$, isto é, se x é anulado por algum elemento não-nulo de A.

Os elementos de torção de M formam um submódulo de M, chamado o *submódulo de torção* de M e denotado por $T(M)$.

Definição

Um A-módulo M é dito livre de torção se $T(M) = \{0\}$.

Condição necessária para decomposição

Definição

Sejam A um domínio de integridade e M um A-módulo. Um elemento $x \in M$ é um elemento de torção de M se $Ann(x) := \{a \in A; ax = 0\} \neq \{0\}$, isto é, se x é anulado por algum elemento não-nulo de A.

Os elementos de torção de M formam um submódulo de M, chamado o *submódulo de torção* de M e denotado por $T(M)$.

Definição

Um A-módulo M é dito livre de torção se $T(M) = \{0\}$.

Condição necessária para decomposição

Definição

Sejam A um domínio de integridade e M um A-módulo. Um elemento $x \in M$ é um elemento de torção de M se $Ann(x) := \{a \in A; ax = 0\} \neq \{0\}$, isto é, se x é anulado por algum elemento não-nulo de A.

Os elementos de torção de M formam um submódulo de M, chamado o *submódulo de torção* de M e denotado por $T(M)$.

Definição

Um A-módulo M é dito livre de torção se $T(M) = \{0\}$.

Definição

Seja M um R-módulo. Definimos o inteiro positivo $\mu_R(M)$ como sendo o menor número de elementos necessários para gerar M, isto é,

$$\mu_R(M) := \min\{n \in \mathbb{N} : \ M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, x_1 \ldots, x_n \in M\}$$

e

$$\mu^*(R) := \sup\{\mu_R(\mathfrak{A}) : \ \mathfrak{A} \text{ é um ideal finitamente gerado de } R\}.$$

Definição

Seja M um R-módulo. Definimos o inteiro positivo $\mu_R(M)$ como sendo o menor número de elementos necessários para gerar M, isto é,

$$\mu_R(M) := \min\{n \in \mathbb{N} : \ M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, x_1 \ldots, x_n \in M\}$$

e

$$\mu^*(R) := \sup\{\mu_R(\mathfrak{A}) : \ \mathfrak{A} \text{ é um ideal finitamente gerado de } R\}.$$

Definição

Seja R um domínio de integridade com o corpo de frações L e seja M um R-módulo. Definimos o posto de M, denotado por $\operatorname{rank}_R M$, *por:*

$$\operatorname{rank}_R M := \dim_L L \otimes_R M.$$

Lema

Sejam R um domínio de integridade e M um R-módulo finitamente gerado, livre de torção e de posto 1. Então, M é isomorfo a um ideal de R.

Definição

Seja R um domínio de integridade com o corpo de frações L e seja M um R-módulo. Definimos o posto de M, denotado por $\operatorname{rank}_R M$, *por:*

$$\operatorname{rank}_R M := \dim_L L \otimes_R M.$$

Lema

Sejam R um domínio de integridade e M um R-módulo finitamente gerado, livre de torção e de posto 1. *Então, M é isomorfo a um ideal de R.*

Definição

Um submódulo N de um módulo M é dito ser fechado em M se M/N for livre de torção. Para um subconjunto S de M, definimos o fecho de S em M como sendo o menor submódulo fechado de M contendo S.

Proposição

Seja R um domínio de integridade para o qual todo R-módulo livre de torção é soma direta de módulos de posto no máximo k $(k \geq 1)$. Então, para cada ideal maximal $\mathfrak{M}$ de R, $\mu^*(R_{\mathfrak{M}}) \leq k+1$.

Se R é Noetheriano, $\mathbb{K} - \dim R$ denota a *dimensão de Krull* de R, isto é, o comprimento máximo de uma cadeia de ideais primos em R.

Definição

Um submódulo N de um módulo M é dito ser fechado em M se M/N for livre de torção. Para um subconjunto S de M, definimos o fecho de S em M como sendo o menor submódulo fechado de M contendo S.

Proposição

Seja R um domínio de integridade para o qual todo R-módulo livre de torção é soma direta de módulos de posto no máximo k $(k \geq 1)$. Então, para cada ideal maximal $\mathfrak{M}$ de R, $\mu^*(R_{\mathfrak{M}}) \leq k+1$.

Se R é Noetheriano, $\mathbb{K} - \dim R$ denota a *dimensão de Krull* de R, isto é, o comprimento máximo de uma cadeia de ideais primos em R.

Definição

Um submódulo N de um módulo M é dito ser fechado em M se M/N for livre de torção. Para um subconjunto S de M, definimos o fecho de S em M como sendo o menor submódulo fechado de M contendo S.

Proposição

Seja R um domínio de integridade para o qual todo R-módulo livre de torção é soma direta de módulos de posto no máximo k $(k \geq 1)$. Então, para cada ideal maximal $\mathfrak{M}$ de R, $\mu^*(R_{\mathfrak{M}}) \leq k+1$.

Se R é Noetheriano, $\mathbb{K} - \dim R$ denota a *dimensão de Krull* de R, isto é, o comprimento máximo de uma cadeia de ideais primos em R.

Anéis comutativos com condição mínima restrita

Definição

Um anel R será chamado um anel com a condição mínima restrita, ou simplesmente RM-anel, se para todo ideal $I \neq \{0\}$ em R, R/I satisfaz a condição mínima (isto é, R/I é Artiniano).

Definição

Dizemos que um anel R tem posto finito k se todo ideal em R for gerado por k elementos.

Teorema

Seja R um domínio de integridade local. Então, R tem posto finito se, e somente se, satisfaz a condição mínima restrita.

Proposição (COHEN)

Seja R um domínio de integridade Noetheriano para o qual $\mu^*(R_{\mathfrak{M}}) \leq k$, para todo ideal maximal $\mathfrak{M}$. Então, $\mathbb{K} - \dim R \leq 1$ (dimensão de Krull) e $\mu^*(R) \leq \max\{2, k\}$.

Demonstração do teorema principal

Com as proposições anteriores é possível mostrar uma implicação.

Demonstração ($\Rightarrow$) Se R for um domínio de integridade Noetheriano, tal que todo R-módulo livre de torção A é soma direta de módulos de posto 1, então, pela Proposição 1, $\mu^*(R_{\mathfrak{M}}) \leq 2$, para todo ideal maximal $\mathfrak{M}$ de R e, pela Proposição 2[*COHEN*], concluímos que $\mu^*(R) \leq 2$.

Condição suficiente para a decomposição

Ideais Fracionários

Definição

Sejam A um domínio de integridade e $\mathbb{K}$ seu corpo de frações. Um A-submódulo M de $\mathbb{K}$ é um ideal fracionário de A se $xM \subseteq A$, para algum $x \neq 0$ em A.

Seja M um ideal fracionário. O conjunto de todos $x \in \mathbb{K}$ tais que $xM \subseteq A$ é denotado por $(A : M)$, isto é, $(A : M) := \{x \in \mathbb{K} \ : \ xM \subseteq A\}$.

Observação

Denotaremos por M^{-1} o A-módulo $(A : M)$.

Lema

Seja R um domínio de integridade Noetheriano com $\dim R \leq 1$ *e sejam* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ *ideais não nulos de R tais que* $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{B}^{-1}$. *Então, se* $\mu_R(\mathfrak{A}) \leq 2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

Proposição

Seja R um domínio de integridade Noetheriano, tal que $\mu^*(R) \leq 2$. *Então, um submódulo projetivo fechado de um R-módulo livre de torção é um somando direto.*

Lema

Seja R um domínio de integridade Noetheriano com $\dim R \leq 1$ *e sejam $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ ideais não nulos de R tais que $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{B}^{-1}$. Então, se $\mu_R(\mathfrak{A}) \leq 2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.*

Proposição

Seja R um domínio de integridade Noetheriano, tal que $\mu^*(R) \leq 2$. Então, um submódulo projetivo fechado de um R-módulo livre de torção é um somando direto.

Lema

Seja R um domínio de integridade local Noetheriano com ideal maximal $\mathfrak{M}$ e fecho inteiro $\overline{R}$. Suponhamos $\mu^*(R) = 2$. Então,

- *$R_1 = \mathfrak{M}^{-1}$ é um anel próprio finitamente gerado e inteiro sobre R.*
- *Todo ideal não principal $\mathfrak{A}$ de R é um R-módulo; isto é, $R_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.*
- *Se S é um anel próprio finitamente gerado e inteiro sobre R, então $R_1 \subseteq S$ e $\mu^*(S) \leq 2$.*

Lema

Seja R um domínio de integridade local Noetheriano com ideal maximal $\mathfrak{M}$ e fecho inteiro $\overline{R}$. Suponhamos $\mu^*(R) = 2$. Então,

- *$R_1 = \mathfrak{M}^{-1}$ é um anel próprio finitamente gerado e inteiro sobre R.*
- *Todo ideal não principal $\mathfrak{A}$ de R é um R-módulo; isto é, $R_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.*
- *Se S é um anel próprio finitamente gerado e inteiro sobre R, então $R_1 \subseteq S$ e $\mu^*(S) \leq 2$.*

Lema

Seja R um domínio de integridade local Noetheriano com ideal maximal $\mathfrak{M}$ e fecho inteiro $\overline{R}$. Suponhamos $\mu^*(R) = 2$. Então,

- $R_1 = \mathfrak{M}^{-1}$ *é um anel próprio finitamente gerado e inteiro sobre R.*
- *Todo ideal não principal $\mathfrak{A}$ de R é um R-módulo; isto é, $R_1\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$.*
- *Se S é um anel próprio finitamente gerado e inteiro sobre R, então $R_1 \subseteq S$ e $\mu^*(S) \leq 2$.*

Lema

Seja R um anel comutativo Noetheriano e $0 \to A \to B \to C \to 0$ uma sequência exata de R-módulos finitamente gerados. Então, a sequência se decompõe se, e somente se, a sequência se decompõe localmente.

Lema

Seja R um domínio de integridade Noetheriano local com ideal maximal $\mathfrak{M}$ e $\mathbb{K} - \dim R = 1$. Seja A um R-módulo livre de torção e $\alpha \in A \backslash \{0\}$, tal que $\overline{\{\alpha\}}$ é um somando direto de A. Então, existe um inteiro $n > 0$ tal que se $\alpha' \equiv \alpha \ (mod\, \mathfrak{M}^n A)$, $\overline{\{\alpha'\}}$ é um somando direto de A.

Para a demonstração do Teorema Principal, faremos indução no comprimento $l(\overline{R}/R)$, onde $\overline{R}$ é o fecho inteiro de R. O caso $l(\overline{R}/R) = 0$ é o caso clássico para domínios de Dedekind que veremos a seguir.

Decomposição de módulos livres de torção sobre domínios de Dedekind

Definição

Um anel R é dito ser um Domínio de Dedekind (ou também um anel de Dedekind) se R é um domínio de integridade e se todo ideal em R é um produto de ideais primos.

Teorema (Decomposição em Domínios de Dedekind)

Seja R um domínio de integridade no qual todo ideal finitamente gerado é invertível e seja M um R-módulo com submódulo de torção T. Então, T é somando direto de M e M/T é isomorfo a uma soma direta de módulos de posto 1.

Corolário

Sejam R um domínio de Dedekind e M um R-módulo finitamente gerado e livre de torção. Então, M é isomorfo a uma soma direta de módulos de posto 1.

Corolário

Sejam R um domínio de ideais principais e M um R-módulo finitamente gerado e livre de torção. Então, M é isomorfo a uma soma direta de módulos de posto 1.

Demonstração do teorema principal

Demonstração ($\Leftarrow$) Para a demonstração desta implicação faremos indução no comprimento finito $l(\overline{R}/R)$. Suponhamos $l(\overline{R}/R) = 0$. Então, $R = \overline{R}$ e R é integralmente fechado. Como $\mu^*(R) \leq 2$ por hipótese, temos, pela Proposição 2[*COHEN*], que $\mathbb{K} - \dim R \leq 1$.

- Se $\mathbb{K} - \dim R = 0$, como R é um domínio de integridade, R é um corpo e o resultado segue da teoria de Álgebra Linear.
- Se $\mathbb{K} - \dim R = 1$, então R é um domínio de Dedekind e, pelo Corolário 1, o resultado segue.

Demonstração do teorema principal

Dividiremos o restante da demonstração em três casos:

- Caso local
- Caso semi-local
- Caso geral

Demonstração do teorema principal

Dividiremos o restante da demonstração em três casos:

- Caso local
- Caso semi-local
- Caso geral

Demonstração do teorema principal

Dividiremos o restante da demonstração em três casos:

- Caso local
- Caso semi-local
- Caso geral

Primeiro Caso: R é um domínio de integridade local Noetheriano, cujo fecho inteiro $\overline{R}$ é um R-módulo finitamente gerado e $\mu^*(R) \leq 2$. Seja A um R-módulo livre de torção. Devemos mostrar que A é soma direta de módulos de posto 1.

Sem perda de generalidade, podemos supor que A não tem somando direto livre. Seja $A_0 = \overline{\{\alpha\}}$ um submódulo fechado de posto 1. Pelo Lema 1, A_0 é isomorfo, como R-módulo, a um ideal de R.

Primeiro Caso: R é um domínio de integridade local Noetheriano, cujo fecho inteiro $\overline{R}$ é um R-módulo finitamente gerado e $\mu^*(R) \leq 2$. Seja A um R-módulo livre de torção. Devemos mostrar que A é soma direta de módulos de posto 1.

Sem perda de generalidade, podemos supor que A não tem somando direto livre. Seja $A_0 = \overline{\{\alpha\}}$ um submódulo fechado de posto 1. Pelo Lema 1, A_0 é isomorfo, como R-módulo, a um ideal de R.

Se A_0 for cíclico, isto é, $A_0 \cong Rx$, A_0 é livre e, portanto, projetivo. Então, pela Proposição 3, A_0 é um somando direto de A, o que é absurdo, pois por hipótese A não tem somando direto livre.

Logo, A_0 não é principal. Pelo Lema 3-(ii), A_0 é um R_1-módulo, isto é, $R_1 A_0 = A_0$ onde $R_1 = \mathfrak{M}^{-1}$ e $\mathfrak{M}$ é o único ideal maximal de R. Desde que todo elemento de A está em um submódulo fechado de posto 1, temos que A é um R_1-módulo. Pelo Lema 3-(i) e (ii), temos que $l_{R_1}(\overline{R}/R_1) < l_R(\overline{R}/R)$ e $\mu^*(R_1) \leq 2$, respectivamente.

Se A_0 for cíclico, isto é, $A_0 \cong Rx$, A_0 é livre e, portanto, projetivo. Então, pela Proposição 3, A_0 é um somando direto de A, o que é absurdo, pois por hipótese A não tem somando direto livre.

Logo, A_0 não é principal. Pelo Lema 3-(ii), A_0 é um R_1-módulo, isto é, $R_1 A_0 = A_0$ onde $R_1 = \mathfrak{M}^{-1}$ e $\mathfrak{M}$ é o único ideal maximal de R. Desde que todo elemento de A está em um submódulo fechado de posto 1, temos que A é um R_1-módulo. Pelo Lema 3-(i) e (ii), temos que $l_{R_1}(\overline{R}/R_1) < l_R(\overline{R}/R)$ e $\mu^*(R_1) \leq 2$, respectivamente.

Observação

Não podemos terminar a demonstração no caso local por indução porque $R_1 = \mathfrak{M}^{-1}$ é semi-local.

De fato, sendo R_1 inteiro sobre R, temos que $\dim R_1 = \dim R$ e $\mathfrak{q}$ é um ideal maximal de R_1, se e somente se, $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ for um ideal maximal de R. Como $\dim R_1 = \dim R \leq 1$ todo ideal primo próprio de R_1 é maximal. Então, como $\mathfrak{M}$ é um ideal de R_1 ($\mathfrak{M}R_1 = R_1$), os ideais maximais de R_1 são os primos de R_1 pertencentes a $\mathfrak{M}$.

Tratemos então de mostrar que A tem um somando direto de posto 1 no caso R semi-local.

Segundo Caso: R é um domínio de integridade semi-local Noetheriano, cujo fecho inteiro $\overline{R}$ é um R-módulo finitamente gerado e $\mu^*(R) \leq 2$. Seja A um R-módulo livre de torção. Devemos mostrar que A tem um somando direto de posto 1.

Faremos indução no comprimento $l_R(\overline{R}/R)$.

Se $l_R(\overline{R}/R) = 0$, R é domínio de Dedekind e A é soma direta de módulos de posto 1 (Corolário 1). Portanto tem um somando direto de posto 1.

Suponhamos a afirmação verdadeira se R for semi-local tal que $l_R(\overline{R}/R) < r$. Devemos mostrar que a afirmação vale para anéis semi-locais tais que $l_R(\overline{R}/R) = r$.

Seja $\mathfrak{M}$ um ideal maximal de R e seja A um R-módulo livre de torção. Então, $A_{\mathfrak{M}}$ é um $R_{\mathfrak{M}}$-módulo livre de torção. Como no caso local, supondo que $A_{\mathfrak{M}}$ não tem somando direto livre, temos que $A_{\mathfrak{M}}$ é um R_1- módulo livre de torção, para um anel R_1 tal que $R_{\mathfrak{M}} \subset R_1 \subset \overline{R_{\mathfrak{M}}}$ e $l_{R_1}(\overline{R_{\mathfrak{M}}}/R_1) < l_{R_{\mathfrak{M}}}(\overline{R_{\mathfrak{M}}}/R_{\mathfrak{M}})$. Observemos neste momento que $l_{R_{\mathfrak{M}}}(\overline{R_{\mathfrak{M}}}/R_{\mathfrak{M}}) \leq l_R(\overline{R}/R) = r$. Então, como R_1 é também semi-local, podemos usar a hipótese de indução e garantir que $A_{\mathfrak{M}}$ tem um somando direto de posto 1 da forma $\overline{\{\alpha\}}$, para algum α in A.

Sendo R semi-local, sejam $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ os ideais maximais de R. Para cada $i = 1, \ldots, r$, seja $\alpha_i \in A$ tal que o fecho de $\{\alpha_i\}$ no $R_{\mathfrak{M}_i}$-módulo $A_{\mathfrak{M}_i}$ é um somando direto. Pelo Lema 5, existe $n_i > 0$ tal que se $\alpha \equiv \alpha_i \pmod{\mathfrak{M}_i^{n_i} A_{\mathfrak{M}_i}}$, então $\overline{\{\alpha\}}$ em $A_{\mathfrak{M}_i}$ é um somando direto de $A_{\mathfrak{M}_i}$.

Como $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ são comaximais, $\mathfrak{M}_1^{n_1}, \ldots, \mathfrak{M}_r^{n_r}$ são comaximais, quaisquer que sejam os inteiros positivos $n_1, \ldots, n_r$, então podemos escolher $\alpha \in A$, tal que $\alpha \equiv \alpha_i \pmod{\mathfrak{M}_i^{n_i} A_{\mathfrak{M}_i}}$, $\forall\, i = 1, \ldots, r$. Seja $A_0 = \overline{\{\alpha\}}$, o fecho de α em A. Desde que, o fecho comuta com a localização a sequência exata

$$0 \to A_0 \to A \to A/A_0 \to 0$$

se decompõe localmente. Logo, pelo Lema 4, A_0 é um somando direto de A.

Terceiro Caso: R é um domínio de integridade Noetheriano, cujo fecho inteiro $\overline{R}$ é um R-módulo finitamente gerado e $\mu^*(R) \leq 2$. Seja A um R-módulo livre de torção. Devemos mostrar que A é soma direta de módulos de posto 1.
Seja $I \subseteq R$ o condutor de $\overline{R}$ para R, isto é,

$$I = \{a \in R \ : \ a\overline{R} \subseteq R\} = Ann(\overline{R}/R)$$

e sejam $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$ os ideais maximais de R contendo I.

Como $\mathbb{K} - \dim R \leq 1$, os ideais maximais de R contendo I são os primos pertencentes a I. Seja $S = R - \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{M}_i$. Então, A_S é um R_S-módulo e R_S é semi-local. Pelo caso semi-local podemos escolher $\alpha \in A$, não nulo, tal que o fecho de $\{\alpha\}$ em A_S é um somando direto do R_S-módulo A_S. Seja $A_0 = \overline{\{\alpha\}}$ o fecho de α em A.

É possível mostrar que a sequência de R-módulos

$$0 \to A_0 \to A \to A/A_0 \to 0$$

se decompõe localmente. Para $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_i$, com $i = 1, \ldots, r$, o reultado segue por construção. Para $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$, $R_{\mathfrak{M}}$ é um domínio de valorização discreta.

De fato, se $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_r$, então $I \not\subseteq \mathfrak{M}$. Logo, existe $a \in I$, tal que $a \notin \mathfrak{M}$, isto é, $a\overline{R} \subseteq R$, $a \notin \mathfrak{M}$. Assim,

$$\overline{R} \subseteq \frac{1}{a}R \subset R_{\mathfrak{M}} \Rightarrow \overline{R}R_{\mathfrak{M}} \subseteq R_{\mathfrak{M}}.$$

Por outro lado, segue da injetividade da aplicação $R \longrightarrow \overline{R}$, que $R_{\mathfrak{M}} \subseteq \overline{R}R_{\mathfrak{M}}$. Portanto, $\overline{R_{\mathfrak{M}}} = \overline{R}R_{\mathfrak{M}} = R_{\mathfrak{M}}$ e $R_{\mathfrak{M}}$ é integralmente fechado. Concluímos assim que $R_{\mathfrak{M}}$ é Noetheriano, $\mathbb{K} - \dim R_{\mathfrak{M}} = 1$ e é integralmente fechado, isto é, um anel de valorização discreta.

Então, $R_{\mathfrak{M}}$ é um domínio de ideais principais e, por conseguinte, $(A/A_0)_{\mathfrak{M}}$ é $R_{\mathfrak{M}}$-módulo livre. De fato, A_0 fechado, implica (A/A_0) livre de torção. Como $R_{\mathfrak{M}}$ é domínio de valorização discreta, $(A/A_0)_{\mathfrak{M}}$ livre de torção é livre. Logo,

$$0 \to A_0 \to A \to A/A_0 \to 0$$

se decompõe como $R_{\mathfrak{M}}$-módulo, isto é, A_0 é somando direto. Finalmente, $A = A_0 \oplus B$, e por indução no posto de A, B é soma direta de R-módulos de posto 1.

Aplicação do teorema principal

Singularidades de nós e cúspides

Aqui vamos usar o Teorema Principal para descrever módulos livres de torção finitamente gerados sobre dois domínios de integridade específicos.

Exemplo: Curva Nodal

Sejam k um corpo algebricamente fechado e $\mathcal{C} \subset k^2$ a curva plana definida pela equação

$$Y^2 - X^2 - X^3 = 0.$$

É fácil ver que $p = (0,0)$ é o único ponto singular de $\mathcal{C}$ e que o anel das funções regulares em p, denotado por R, é $R = k[x,y]_{\mathfrak{M}}$, onde $x = \overline{X}$, $y = \overline{Y} \in k[X,Y]/\langle Y^2 - X^2 - X^3 \rangle$ e $\mathfrak{M} = \langle x, y \rangle$. Então, R é um anel local Notheriano de dimensão igual a 1.

$\vdash$: O corpo de frações de R é $k(y/x)$.

De fato, sabemos que $k(x, y)$ que é o corpo de frações de $k[x, y]$ e de R. Como $y^2 = x^2 + x^3$ em $k[x, y]$, temos que $x + 1 = (y/x)^2$ e $y = (y/x)^3 - (y/x)$ pertencem a $k(y/x)$. Logo, $k[x, y] \subset k(y/x)$ e, portanto, $k(x, y) \subset k(y/x)$. Claramente, temos que $k(y/x) \subset k(x, y)$. Logo, $k(x, y)$, o corpo de frações de $k[x, y]$ e de R é igual a $k(y/x)$.

$\vdash$: O fecho inteiro de $k[x, y]$ é $k[y/x]$.

Das inclusões $k[x, y] \subset k[y/x] \subset k(y/x)$ e da igualdade $(y/x)^2 = x + 1 \in k[x, y]$, temos que $k[y/x]$ é inteiro sobre $k[x, y]$. Para mostrar que os elementos inteiros de $k(x/y)$ estão em $k[y/x]$, façamos $t = y/x$ para simplificar as notações. Suponhamos $z = a(t)/b(t) \in K(t)$ inteiro sobre $k[x, y] = k[t^2 - 1, t^3 - t]$.

Então, existe
$p(T) = T^n + \ldots + a_1 T + a_0 \in k[x, y] = k[t^2 - 1, t^3 - t][T]$,
polinômio não nulo, tal que

$$\frac{a(t)^n}{b(t)^n} + \cdots + a_1 \frac{a(t)}{b(t)} + a_0 = 0 \Rightarrow$$
$$a(t)^n + a_{n-1} a(t)^{n-1} b(t) + \ldots + a_1 a(t) b(t)^{n-1} + a_0 b(t)^n = 0 \Rightarrow$$
$$a(t)^n = -a_{n-1} a(t)^{n-1} b(t) - \ldots - a_1 a(t) b(t)^{n-1} - a_0 b(t)^n.$$

Como t é transcendente sobre k, podemos supor que $a(t)$ e $b(t)$ não tem fator comum e portanto, última equação segue que $b(t) \in k$.

$\vdash$: O fecho inteiro de R é $\overline{R} = k[y/x]_{\mathfrak{M}}$. Além diso,
$\overline{R} = R + (y/x)R$.

De fato, como localização comuta com fecho inteiro, temos que

$$\overline{R} = \overline{k[x, y]_{\mathfrak{M}}} = \overline{k[x, y]}_{\mathfrak{M}} = k[y/x]_{\mathfrak{M}}.$$

De $(y/x)^2 = x + 1 \in R$, segue que $\overline{R} = R + (y/x)R$.

$\vdash$: $\overline{R}/R$ é um k-espaço vetorial e $\dim_k(\overline{R}/R) = 1$.

Vimos na afirmação anterior que $\overline{R} = R + (y/x)R$. Mas todo elemento em $R = k[x,y]_{\mathfrak{M}}$ é a localização de um polinômio da forma $f(x,y) = \sum a_{ij}x^i y^j + a_{00}$, onde $a_{ij} \in k$, para todo i,j. Logo, $(y/x)R = R + (y/x)k$ e $\overline{R} = R + k(y/x)$. Daí segue que $\overline{R}/R \cong k$.

$\vdash$: O ideal $\mathfrak{M} \subset R \subset \overline{R}$ é um ideal de $\overline{R}$.

De fato, $\mathfrak{M} = \langle x, y \rangle = xR + yR$,

$$x(\frac{y}{x}) = y \in \langle x, y \rangle \quad \text{e} \quad y(\frac{y}{x}) = \frac{y^2}{x} = \frac{x^2 + x^3}{x} = x + x^2 \in \langle x, y \rangle$$

$$\Rightarrow \mathfrak{M}\overline{R} \subset \mathfrak{M}.$$

Na verdade, temos que $\mathfrak{M} = \langle x \rangle \overline{R}$, pois

$$\langle x, y \rangle \overline{R} = x\overline{R} + y\overline{R} = x\overline{R} + x(\frac{y}{x})\overline{R} \subset x\overline{R}.$$

Observe ainda que $x = (y/x)^2 - 1 = (y/x - 1)(y/x + 1) \subset \overline{R}$ implica que $(y/x - 1)\overline{R}$ e $(y/x + 1)\overline{R}$ são os únicos ideais maximais de $\overline{R}$ contendo $\mathfrak{M}$.

$\vdash$: Todo ideal em $\overline{R}$ é principal.

Para simplificar as notações, vamos usar $t = y/x$ e, nesse caso, teremos:

$$k[x, y] = k[t^2-1, t^3-t], \mathfrak{M} = \langle x, y\rangle = \langle t^2-1, t^3-t\rangle \text{ e } \overline{k[x, y]} = k[t],$$

$$R = k[t^2 - 1, t^3 - t]_{\mathfrak{M}}, \overline{R} = k[t]_{\mathfrak{M}} \text{ e } \mathfrak{M} = \langle t^2 - 1\rangle\overline{R}.$$

Observemos que todo ideal em $k[t]$ é principal e, portanto, todo ideal em $\overline{R} = k[t]_{\mathfrak{M}}$ é principal. Mais do que isso, todo polinômio em $k[t]$ pode ser escrito na forma

$$f(t) = (t-1)^n(t+1)^m g(t), \text{ onde } n, m \in \mathbb{N}, \ g(1) \neq 0 \text{ e } g(-1) \neq 0. \quad (1)$$

Logo, todo ideal J em $\overline{R} = k[t]_{\mathfrak{M}}$ é da forma

$$J = (t-1)^n(t+1)^m k[t]_{\mathfrak{M}}, \text{ para algum par } (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

já que $g(1) \neq 0$ e $g(-1) \neq 0$ é equivalente a $g(t) \notin \mathfrak{M}$, ou seja, é invertível em $k[t]_{\mathfrak{M}}$.

Nesse ponto é importante salientar a seguinte propriedade do anel $\overline{R}$. Sejam $J = (t-1)^n(t+1)^m k[t]_{\mathfrak{M}}$ e $P = (t-1)^{1+n}(t+1)^{1+m}k[t]_{\mathfrak{M}}$ ideias de $\overline{R}$ tais que $n, m \in \mathbb{N}$. Então, $P \subset J$ e $\dim_k(J/P) = 2$. De fato, J/P é isomorfo a $k \times k$, ou mais explicitamente,

$$J/P \cong (t-1)^n(t+1)^m[k + (t-1)k].$$

Logo, $\dim_k(J/P) = 2$.

$\vdash$: Todo ideal em R é um ideal gerado por no máximo dois elementos.

Seja $I \subset R$ um ideal. Como R é local, temos que $I \subset \mathfrak{M} \subset \overline{R}$. Segue da equação 1 que todo elemento em $\overline{R}$ é da forma $f(t) = (t-1)^n(t+1)^m g(t)$, onde $n, m \in \mathbb{N}$, $g(t) \in k[t]_{\mathfrak{M}}$ e $g(t) \notin \mathfrak{M}$. Sejam n, m os menores inteiros positivos tais que $(t-1)^n(t+1)^m g(t) \in I$ e $g(t)$ é invertível em R. Então,

$$(t-1)^n(t+1)^m g(t)k + (t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R} \subset I \subset (t-1)^n(t+1)^m\overline{R}.$$

Mas
$(t-1)^n(t+1)^m g(t)k + (t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R} \subsetneq (t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R}$
implica

$$\dim_k\left(\frac{(t-1)^n(t+1)^m\overline{R}}{(t-1)^n(t+1)^m g(t)k + (t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R}}\right) < \dim_k\left(\frac{(t-1)^n(t+1)^m\overline{R}}{(t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R}}\right) = 2.$$

Logo,

$$\dim_k\left(\frac{(t-1)^n(t+1)^m\overline{R}}{(t-1)^n(t+1)^m g(t)k + (t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R}}\right) \leq 1.$$

Por outro lado,
$(t-1)^n(t+1)^m g(t)k+(t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R} \subsetneq (t-1)^n(t+1)^m\overline{R}$,
pois $(t-1)^{n+1}(t+1)^m \in (t-1)^n(t+1)^m\overline{R}$, mas
$(t-1)^{n+1}(t+1)^m \notin (t-1)^n(t+1)^m g(t)k+(t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R}$
(lembre que $g(t)$ é invertível em $\mathfrak{M}$).

Logo,

$$\dim_k \left(\frac{(t-1)^n(t+1)^m\overline{R}}{(t-1)^n(t+1)^m g(t)k+(t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R}} \right) = 1.$$

Temos então que

$$I = (t-1)^n(t+1)^m g(t)k + (t-1)^{n+1}(t+1)^{m+1}\overline{R} = (t-1)^n(t+1)^m R$$

ou

$$I = (t-1)^n(t+1)^m\overline{R} = (t-1)^n(t+1)^m R + (t-1)^n(t+1)^{m+1}R,$$

já que $\overline{R} = R + (t+1)R$ como R-módulo.

Usando o Teorema 1, temos que todo R-módulo M livre de torção e finitamente gerado se decompõe, isto é,

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots M_n,$$

onde M_i são R-módulos livres de torção e posto 1, para todo $i = 1, \dots, n$.

Além disso, para cada M_i, existe um único anel $R \subset S_i \subset \overline{R}$, tal que é M_i é um S_i-módulo projetivo. Mas, $\overline{R}/R \cong k$ implica $S_i = R$ ou $S_i = \overline{R}$. Logo,

$$M \cong R^{\oplus a} \bigoplus \overline{R}^{\oplus b}.$$

Temos também que $\overline{R} \cong \mathfrak{M}$, como R-módulo o que nos permite escrever

$$M \cong R^{\oplus a} \bigoplus \mathfrak{M}^{\oplus b}.$$

O caso cuspidal é análogo e vamos apenas explicitar as diferenças.

Exemplo: Curva Cuspidal

Sejam k um corpo algebricamente fechado e $\mathcal{C} \subset \mathbb{K}^2$ a curva plana definida por

$$Y^2 - X^3 = 0.$$

Então, $p = (0,0)$ é o único ponto singular de $\mathcal{C}$ e o anel das funções regulares em p, é o anel

$$R = \mathbb{K}[x, y]_{\mathfrak{M}},$$

onde $x = \overline{X}$, $y = \overline{Y} \in \mathbb{K}[X, Y]/\langle Y^2 - X^3 \rangle$ e $\mathfrak{M} = \langle x, y \rangle$. É fácil ver que R é um anel local Notheriano de dimensão igual a 1 .

$\vdash$: O corpo de frações de R é $k(x, y) = k(y/x)$.

$\vdash$: O fecho inteiro de $k[x, y]$ é $k[y/x]$.

$\vdash$: O fecho inteiro de R é $\overline{R} = k[y/x]_{\mathfrak{M}}$. Além diso, $\overline{R} = R + (y/x)R$.

$\vdash$: $\overline{R}/R$ é um k-espaço vetorial e $\dim_k(\overline{R}/R) = 1$.

$\vdash$: O ideal $\mathfrak{M} \subset R \subset \overline{R}$ é um ideal de $\overline{R}$.

$\vdash$: Todo ideal em $\overline{R}$ é principal.

Como no caso nodal, façamos $t = y/x$. Nesse caso, teremos:

$$k[x, y] = k[t^2, t^3], \mathfrak{M} = \langle x, y \rangle = \langle t^2, t^3 \rangle \text{ e } \overline{k[x, y]} = k[t],$$

$$R = k[t^2, t^3]_{\mathfrak{M}}, \overline{R} = k[t]_{\mathfrak{M}} \text{ e } \mathfrak{M} = \langle t^2 \rangle \overline{R}.$$

Observemos que todo ideal em $k[t]$ é principal e, portanto, todo ideal em $\overline{R} = k[t]_{\mathfrak{M}}$ é principal. Mais do que isso, todo polinômio em $k[t]$ pode ser escrito na forma

$$f(t) = t^n g(t), \text{ onde } n \in \mathbb{N}, \ t^2 \nmid g(t). \tag{2}$$

Logo, todo ideal J em $\overline{R} = k[t]_{\mathfrak{M}}$ é da forma

$$J = t^{2n}k[t]_{\mathfrak{M}}, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Também nesse caso, temos que se $J = t^{2n}k[t]_{\mathfrak{M}}$ e $P = t^{2n+2}k[t]_{\mathfrak{M}}$ são ideias de $\overline{R}$ tais que $n \in \mathbb{N}$. Então, $\dim_k(J/P) = 2$. De fato,

$$J/P \cong t^{2n}[k + tk].$$

Logo, $\dim_k(J/P) = 2$.

$\vdash$: Todo ideal em R é um ideal gerado por no máximo dois elementos.

Seja $I \subset R$ um ideal. Como R é local, temos que $I \subset \mathfrak{M} \subset \overline{R}$. Segue da equação 2 que todo elemento em $\overline{R}$ é da forma $f(t) = t^{2n}g(t)$, onde $n\mathbb{N}$, $g(t) \in k[t]$ e $g(t) \notin \mathfrak{M}$. Seja n o menor inteiro positivo tal que $t^{2n}g(t) \in I$ e $g(t)$ é invertível em R. Então,

$$t^{2n}g(t)k + t^{2n+2}\overline{R} \subset I \subset t^{2n+2}\overline{R}.$$

Mas $t^{2n}g(t)k + t^{2n+2}\overline{R} \subsetneq t^{2n}\overline{R}$ implica

$$\dim_k\left(\frac{t^{2n}\overline{R}}{t^{2n}g(t)k + t^{2n+2}\overline{R}}\right) < \dim_k\left(\frac{t^{2n}\overline{R}}{t^{2n+2}\overline{R}}\right) = 2.$$

Logo,

$$\dim_k\left(\frac{t^{2n}\overline{R}}{t^{2n}g(t)k + t^{2n+2}\overline{R}}\right) \leq 1.$$

Por outro lado, $t^{2n}g(t)k + t^{2n+2}\overline{R} \subsetneq t^{2n}\overline{R}$, pois $t^{2n+2} \in t^{2n}\overline{R}$, mas $t^{2n+2} \notin t^{2n}g(t)k + t^{2n+2}\overline{R}$ (lembre que $g(t)$ é invertível em $\mathfrak{M}$).

Logo,

$$\dim_k \left(\frac{t^{2n}\overline{R}}{t^{2n}g(t)k + t^{2n+2}\overline{R}} \right) = 1.$$

Temos então que

$$I = t^{2n}g(t)k + t^{2n+2}\overline{R} = t^{2n}R$$

ou

$$I = t^{2n}\overline{R} = t^{2n}R + t^{2n+1}R,$$

já que $\overline{R} = R + tR$ como R-módulo.

Usando o Teorema 1, temos que todo R-módulo M livre de torção e finitamente gerado se decompõe, isto é,

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots M_n,$$

onde M_i são R-módulos livres de torção e posto 1, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Além disso, para cada M_i, existe um único anel $R \subset S_i \subset \overline{R}$, tal que é M_i é um S_i-módulo projetivo. Mas, $\overline{R}/R \cong R/\mathfrak{M}$ implica $S_i = R$ ou $S_i = \overline{R}$. Logo,

$$M \cong R^{\oplus a} \bigoplus \overline{R}^{\oplus b}.$$

Temos também que $\overline{R} \cong \mathfrak{M}$, como R-módulo o que nos permite escrever

$$M \cong R^{\oplus a} \bigoplus \mathfrak{M}^{\oplus b}.$$

Referências

- SERRE, J. P. *Faisceaux algébriques cohérents* Ann. of Math., 61, p. 197-278, 1955.
- SESHADRI, C. S. *Triviality of vector bundles over the product of the affine space* K^2 Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 44, 456-458, 1958.
- SESHADRI, C. S. *Algebraic vector bundles over the product of an affine curve and the affine line*, Proc. Amer. Math. Soc.,10, p. 670-673, 1959.
- BASS, H. *Injective dimension in Noetherian ring*, Trans. Amer. Math. Soc., 102, p. 18-29, 1962.

Obrigado!