Miniproyecto 1

(Santiago Moncayo Sarria)

Punto 3. La razón entre las coordenadas

Se quiere demostrar de manera intuitiva pero contundente que:

$$dx\, dy = |J|\, d\xi\, d\eta,$$

donde $|J|$ es el determinante del Jacobiano de la transformación.

1. Transformación de coordenadas

Sea una transformación de variables en $\mathbb{R}^2$:

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta).$$

Aquí (ξ, η) son las variables del nuevo sistema de coordenadas, mientras que (x, y) son las coordenadas cartesianas originales.

El Jacobiano de esta transformación es la matriz:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix},$$

cuyo determinante mide la deformación local de áreas al pasar de un sistema de coordenadas a otro.

2. Geometría del diferencial de área

Consideremos un rectángulo infinitesimal en el plano (ξ, η) de lados $d\xi$ y $d\eta$. Este rectángulo tiene área:

$$dA_{\xi\eta} = d\xi\, d\eta.$$

Al transformar al plano (x, y), los vectores que representan los lados del rectángulo se convierten en:

$$\mathbf{v}_\xi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} d\xi, \qquad \mathbf{v}_\eta = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\eta.$$

Por lo tanto, el área en el plano (x, y) está dada por el área del paralelogramo generado por $\mathbf{v}\xi$ y $\mathbf{v}\eta$:

$$dA_{xy} = |\mathbf{v}\xi \times \mathbf{v}\eta|.$$

3. Cálculo mediante determinante

El producto cruz en 2D (considerando un análogo en 3D con componente k) es:

$$\mathbf{v}\xi \times \mathbf{v}\eta = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & 0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & 0 \end{bmatrix}.$$

Su magnitud es:

$$|\mathbf{v}\xi \times \mathbf{v}\eta| = \left| \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \right| d\xi\, d\eta.$$

Es decir:

$$dA_{xy} = |J|\, d\xi\, d\eta.$$

4. Comprobación con Coordenadas polares

Consideremos el cambio $(\xi, \eta) = (r, \theta)$, con:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

El Jacobiano es:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Su determinante es:

$$|J| = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Por tanto:

$$dx\, dy = r\, dr\, d\theta.$$

Este resultado es bien conocido y confirma que el Jacobiano funciona como factor de escala de áreas al cambiar de coordenadas cartesianas a polares.

El determinante Jacobiano $|J|$ representa el factor de escala de área entre los sistemas de coordenadas. Cada diferencial de área en (ξ, η), al transformarse al plano (x, y), se multiplica por $|J|$.

De esta manera se concluye de forma contundente:

$$\boxed{dx\, dy = |J|\, d\xi\, d\eta.}$$