Integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

Santiago Orjuela Convers

Abril 2020

Se implementó un código en R para poder calcular el valor de la integral de la función $f(x) = e^{-x^2}$ en el intervalo $[0, 1]$. El código utiliza el método de integración usual, que es mediante la suma de Riemann. Este método consiste en particionar el intervalo sobre el que se va a integrar en segmentos de igual longitud n, es decir, $\frac{b-a}{n}$. Luego, se cálcula el área de cada uno de los rectángulos y posteriormente se suman, arrojando una aproximación del área bajo la curva de la función. A médida que $n \to \infty$, la suma de las áreas de los rectángulos será igual al valor de la integral. El código que creé en R tiene tres parámetros que son: n, a, b, donde n es el número de rectángulos para estimar el valor de la integral, a es el límite inferior de la integral, y por último b es el valor superior de la integral. El código es el siguiente.

```r
integral <- function(n,a,b){
  c<- abs(b-a)
  d <- min(a,b)
  i<-1:n; area <- sum((c/n)*exp(-(d+(c*i/n))^2))
  return(area)
}
```

Apenas se ingresan los parámetros en la función, a una variable c se le asigna el valor de la diferencia entre a y b, a una variable d se le asigna el mínimo de a y de b porque para calcular los puntos de los rectángulos, se suma el límite inferior más la longitud que se quiere del segmento. Por último, se asigna una variable i para indexar la suma. Como en este caso se quiere integrar la función sobre el intervalo $[0, 1]$ entonces se fijará $a = 0$ y $b = 1$. Se mostrarán los resultados para varios valores de n.

```r
integral(10,0,1)

## [1] 0.7146048

integral(50,0,1)

## [1] 0.7404784
```

```r
integral(100,0,1)

## [1] 0.7436574

integral(500,0,1)

## [1] 0.7461918

integral(1000,0,1)

## [1] 0.746508

integral(100000,0,1)

## [1] 0.746821

integral(10000000,0,1)

## [1] 0.7468241

integral(100000000,0,1)

## [1] 0.7468241
```

Ahora, para visualizar mejor los datos, colocaré en una tabla los resultados que se obtuvieron anteriormente.

```r
tabla <- data.frame("Rectángulos"=c(10,50,100,500,1000,
100000,10000000,100000000),
"Integral"=c(integral(10,0,1),integral(50,0,1),integral(100,0,1),
integral(500,0,1),
integral(1000,0,1),integral(100000,0,1),integral(10000000,0,1),
integral(100000000,0,1)))
print(tabla)

##   Rectángulos  Integral
## 1       1e+01 0.7146048
## 2       5e+01 0.7404784
## 3       1e+02 0.7436574
## 4       5e+02 0.7461918
## 5       1e+03 0.7465080
## 6       1e+05 0.7468210
## 7       1e+07 0.7468241
## 8       1e+08 0.7468241
```

Es claro que a medida que se van tomando más rectángulos sobre la partición del intervalo, el valor que arroja la función se acerca cada vez más al valor real de la integral. Con los valores expuestos anteriormente se puede observar que para 100,000,000 el valor es 0,7468241. El valor de la integral arrojado por el cómputo de Wolfram Alpha es: $\frac{1}{2}\sqrt(\pi)Erf(1) \approx 0{,}746824$, por lo que el resultado arrojado por el programa es lo deseado. La gráfica de la función en cuestión es la siguiente.

```
x <- seq(0,1,0.01)
plot(x,exp(-x^2),main="Función",
xlab="x",ylab="f(x)",col="blue")
```