

Punto 3 :

- Para hallar la formula de Simpson $1/3$ hay que integrar un polinomio interpolador

→ 1. Tenemos que elegir los puntos por los que pasa el polinomio

$$x_0 = a, \quad x_1 = h, \quad x_2 = b \quad \text{siendo } h = \frac{a+b}{2}$$

→ 2. Luego tenemos que crear el polinomio interpolador

$$\Omega = \{(a, f(a)), (x_m, f(x_m)), (b, f(b))\}$$

$$P(x) = f(x_0)L(x_0) + f(x_1)L(x_1) + f(x_2)L(x_2)$$

Donde:

$$L(a) = \frac{(x - x_m)(x - b)}{(a - x_m)(a - b)}$$

$$L(h) = \frac{(x - a)(x - b)}{(x - x_m)(x_m - a)(x_m - b)} = \frac{(x - a)(x - b)}{\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)}$$

$$L(b) = \frac{(x - a)(x - x_m)}{(b - a)(b - x_m)} = \frac{4(x - a)(x - h)}{(b - a)^2}$$

→ Integrar:

$$\int_a^b f(x) L(x) dx = \int_a^b \left(f(a)L(a) + f(x_m)L(x_m) + f(b)L(b) \right) dx$$

→ Vamos a partir la integral en 3 integrales y calcularlas.

Primera integral:

$$\begin{aligned} & \frac{f(a)}{(a-x_m)(a-b)} \int_a^b (x-b)(x-x_m) dx \\ &= \frac{f(a)}{(a-x_m)(a-b)} \int_a^b x^2 - bx - x_m x - bx_m dx \\ &= \frac{f(a)}{(a-x_m)(a-b)} \left(\frac{b^3 - a^3}{3} - b^2 + a^2 (b-x_m) - b + a(bx_m) \right) \\ &= \frac{1}{6} (a-b) f(a) \end{aligned}$$

Segunda integral:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)} \int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{2}{3} (a-b) f(x_m) \end{aligned}$$

Tercera integral

$$\begin{aligned} & \frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)} \int_a^b (x-a)(x-x_m) dx \\ &= \frac{1}{6} (a-b) f(b) \end{aligned}$$

★ Entonces, la integral queda:

$$\int_a^b \frac{f(a)(x-b)(x-x_m)}{(a-x_n)(a-b)} + \frac{f(x_m)(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} + \frac{f(b)(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)} dx$$

$$= \frac{1}{6} (a-b) (f(a)) + \frac{2}{3} (a-b) (f(x_m)) + \frac{1}{6} (a-b) (f(b))$$

$$= h = \frac{(a-b)}{2} \text{ (el espacio entre puntos, el salto)}$$

$$= \frac{h}{3} (f(a) + 4f(x_m) + f(b))$$

- Hemos llegado a la formula de Simpson

1/3