Punto 3 :

- Para hallar la formula de Simpson 1/3 hay que integrar un polinomio interpolador

→ 1. Tenemos que elegir los puntos por los que pasa el polinomio

$x_0 = a \quad , \quad x_1 = x_m \, , \quad x_2 = b$ siendo $x_m = \dfrac{a+b}{2}$

→ 2. Luego tenemos que crear el polinomio interpolador

$$\Omega = \{(a, f(a)), (x_m, f(x_m)), (b, f(b))\}$$

$$P(x) = f(x_0)L(x_0) + f(x_1)L(x_1) + f(x_2)L(x_2)$$

Donde:

$$L(a) = \frac{(x - x_m)(x - b)}{(a - x_m)(a - b)}$$

$$L(h) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x_m - a)(x_m - b)}$$

$$L(b) = \frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}$$

→ Integrar:

$$\int_a^b f(a)L(a) + f(x_m)L(x_m) + f(b)L(b)\, dx$$

Vamos a partir la integral en 3 integrales y calcularlas.

Primera integral:

$$\frac{f(a)}{(a-x_m)(a-b)}\int_a^b (x-b)(x-x_m)\,dx$$

$$=\frac{f(a)}{(a-x_m)(a-b)}\int_a^b x^2-bx-x_m x-bx_m \quad dx$$

$$=\frac{f(a)}{(a-x_m)(a-b)}\left(\frac{b^3-a^3}{3}-b^2+a^2(b-x_m)-b+a(bx_m)\right)$$

$$=\frac{1}{6}(a-b)f(a)$$

Segunda integral:

$$\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx$$

$$=\frac{2}{3}(a-b)f(x_m)$$

Tercera integral

$$\frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\cdot\int_a^b (x-a)(x-x_m)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(a-b)f(b)$$

Menas Noches A

★ Entonces, la integral queda:

$$\int_a^b \frac{f(a)(x-b)(x-x_m)}{(a-x_n)(a-b)} + \frac{f(x_m)(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} + \frac{f(b)(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m} \, dx$$

$$= \frac{1}{6}(a-b)(f(a)) + \frac{2^{\times 2}}{3_{\times 2}}(a-b)(f(x_m)) + \frac{1}{6}(a-b)(f(b))$$

$= h = \dfrac{(a-b)}{2}$ (el espacio entre puntos, el salto)

$$= \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f(x_m) + f(b)\Big)$$

- Hemos llegado a la formula de Simpson 1/3