

Ejercicio 5 (Teórico):

La sustitución hacia adelante sirve para resolver sistemas de ecuaciones de la forma:

$$A \vec{x} = \vec{b} \quad \left(\begin{array}{l} \text{donde } A \text{ es una matriz} \\ n \times n \text{ triangular inferior} \\ \text{y } x, b \in \mathbb{R}^n \end{array} \right)$$

Formula:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} \cdot x_j}{A_{ii}} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Vamos a resolver la} \\ \text{primera, segunda y tercera} \\ \text{ecuación.} \end{array} \right\}$$

$$1. \quad A_{11} \cdot x_1 = b_1 \rightarrow x_1 = \frac{b_1}{A_{11}}$$

$$2. \quad A_{21} \cdot x_1 + A_{22} x_2 = b_2 \rightarrow x_2 = \frac{b_2 - A_{21} \left(\frac{b_1}{A_{11}} \right)}{A_{22}}$$

$$3. \quad A_{31} \cdot x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 = b_3$$

$$\hookrightarrow x_3 = \frac{b_3 - \left(A_{31} \left(\frac{b_1}{A_{11}} \right) + A_{32} \left(\frac{b_2 - A_{21} \left(\frac{b_1}{A_{11}} \right)}{A_{22}} \right) \right)}{A_{33}}$$

Revisemos la sumatoria de la formula 1:

$$\sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} \cdot x_j = A_{i0} x_0 + A_{i1} x_1 + \dots + A_{i,i-1} x_{i-1}$$

Vemos que la combinación lineal es exactamente la misma que aparece al tratar de despejar las ecuaciones 1, 2 y 3, específicamente el factor que se le resta a cada b_i , entonces

$$x_1 = \frac{b_1}{A_{11}} \quad , \quad x_2 = \frac{b_2 - (A_{21} x_1)}{A_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - ((A_{31} x_1) + (A_{32} x_2))}{A_{33}}$$

De esta forma para cada x_i :

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

★ Por ejemplo para x_3 :

$$\sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j = A_{31} x_1 + A_{32} x_2$$

$$x_3 = \frac{b_3 - ((A_{31} x_1 + A_{32} x_2))}{A_{33}}$$

Ejercicio 6 (Teórico):

La sustitución hacia atrás sirve para resolver sistemas de ecuaciones de la forma:

$$A \vec{x} = \vec{b} \quad \left(\text{donde } A \text{ es una matriz triangular superior } n \times n \text{ y } x, b \in \mathbb{R}^n. \right)$$

Ahora vamos a resolver el sistema hacia atrás hallando primero x_n y de últimas x_1 :

Formula

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j}{A_{ii}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Donde } i = n, n-1 \dots 0 \\ \text{Veamos} \end{array} \right.$$

Analicemos la sumatoria:

$$\begin{aligned} \sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j &= A_{(n-1)n} x_n \quad \text{para } i = n-1 \\ &= A_{(n-2)(n-1)} \cdot x_{n-1} + A_{(n-2)n} \cdot x_n \end{aligned}$$

Ahora resolviendo

$$x_n = \frac{b_n}{A_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - \overbrace{(A_{(n-1)n} x_n)}^{\text{Factor}}}{A_{(n-1)(n-1)}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - \overbrace{((A_{(n-2)(n-1)} \cdot x_{n-1}) + (A_{(n-2)n} \cdot x_n))}^{\text{Factor}}}{A_{(n-2)(n-2)}}$$

Para x_i :

$$x_i = \frac{b_i - \left(\sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j \right)}{A_{ii}}$$

Funciona para todo x_i ya que según cambia i el factor cambia según la sumatoria, en general

$$\sum_{j=i+1}^n A_{ij} x_j = A_{i(i+1)} x_{i+1} + A_{i(i+2)} x_{i+2} \dots + A_{in} x_n$$

De esta forma la fórmula funciona para todo x_i