

Punto 25 (Teórico) Parcial 2:

* Vamos a hallar a mano la regla de cuadratura de Laguerre de 2 puntos

(a) Usemos la formula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre para hallar el de orden 2.

$$\triangleright L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad \dots \text{(Formula de Rodrigues)}$$

$$\text{Para orden 2: } L_2(x) = \frac{e^x}{2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^{-x})$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{e^x}{2!} \cdot (e^{-x} x^2 - 4e^{-x} x + 2e^{-x}) \\ &= \frac{e^x}{2!} (e^{-x} (x^2 - 4x + 2)) \end{aligned}$$

$$L_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1 = \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 2)$$

(b) Hallar las raices de $L_2(x)$:

$$L_2(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 2) = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

(c) Vamos a integrar para hallar los pesos de la cuadratura

$$\sigma(x) = e^{-x}, \quad x_0 = 2 - \sqrt{2}, \quad x_1 = 2 + \sqrt{2}$$

Peso
1

$$\begin{aligned} w_0 &= \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x - 2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2}} \right) dx = \frac{1}{-2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} (x - 2 - \sqrt{2}) dx \quad \begin{array}{l} \text{Por Partes} \\ (u = x - 2 - \sqrt{2}) \\ (dv = e^{-x}) \end{array} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{-x} (x - 2 - \sqrt{2}) + \int e^{-x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{-x} (x - 2 - \sqrt{2} + 1) \right) \Big|_0^{\infty} \quad [\text{Integral sin evaluar}] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} (t - 1 - \sqrt{2}) - (e^{-0} (0 - 1 - \sqrt{2})) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t - 1 - \sqrt{2}}{\frac{1}{e^t}} \right) + (1 + \sqrt{2}) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} + 1 + \sqrt{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \approx 0.853553 \end{aligned}$$

Primer
Peso !!

Peso
2

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_0^{\infty} e^{-x} \left(\frac{x - 2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}} \right) dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} (x - 2 + \sqrt{2}) dx \quad \begin{array}{l} \text{Por Partes} \\ (u = x - 2 + \sqrt{2}) \\ (dv = e^{-x}) \end{array} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-e^{-x} (x - 2 + \sqrt{2}) + \int e^{-x} dx \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{-x} (-x + 2 - \sqrt{2} - 1) \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t + 1 - \sqrt{2}}{\frac{1}{e^t}} \right) + (e^0 (-0 + 1 - \sqrt{2})) \right] \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \right) + 1 - \sqrt{2} \right] = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \approx 0.146446 \end{aligned}$$

Segundo
Peso !!

$$w_0 = 0.853553$$

$$w_1 = 0.146446$$

Corresponden a los pesos de orden 2

Scribe

(d) Mostrar que la regla para el polinomio de grado 3 es:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^3 dx = \sum_{i=0}^1 w_i f(x_i) = 6$$

► Usemos primero la función Gamma para resolver la integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = (n-1)! \quad \left(\begin{array}{l} \text{reemplazo } x \text{ por } n \\ \text{para no confundir} \end{array} \right)$$

★ Notemos que $t^{n-1} = x^3 \rightarrow n=4$, entonces:-

ya que ambos acompañan a la e^{-x} .

$$(n-1)! = (4-1)! = 3! = 6 = \Gamma(4)$$

► Usemos la cuadratura ahora. ya: $f(x) = x^3$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^3 dx = \sum_{i=0}^1 w_i f(x_i) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

$$= 0.853553 (2 - \sqrt{2})^3 + 0.146446 (2 + \sqrt{2})^3$$

$$= 0.171572 + 5.828402$$

$$= 5.9999974 \quad \text{wow!}$$

• El error por el cual no da 6 exacto es porque no se usaron los demás decimales, pero la precisión es inmensa