Punto 1 (Teórico) Algebra lineal:

Demostrar recursividades

$$P(\theta) \begin{cases} x_0 = 4\sin^2\theta \\ x_n = 4x_{n-1} - (x_{n-1})^2 \end{cases}$$

Supongamos que para algun $n$ $x_n = 4\sin^2(2^n\theta)$
demostrar que $x_{n+1} = 4\sin^2(2^{n+1}\theta)$

$x_{n+1} = 4x_n - x_n^2$ entonces

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 4(4\sin^2(2^n\cdot\theta)) - (4\sin^2(2^n\cdot\theta))^2 \\ &= 16\sin^2(2^n\cdot\theta) - 16\sin^4(2^n\cdot\theta) \\ &= 16\sin^2(2^n\theta)(1-\sin^2(2^n\theta)) \\ &= 16\sin^2(2^n\theta)(\cos^2(2^n\theta)) \end{aligned}$$

Angulo doble : $\sin(2\cdot 2^n\theta) = 2\sin(2^n\theta)\cos(2^n\theta)$

$(\phi = 2^n\theta)$

$$4\sin^2(2^{n+1}\theta) = 4(\sin^2(2^n\theta)(\cos^2(2^n\theta))$$

Caso base ) $n=0$ : $x_0 = 4\sin^2(2^0\theta) = 4\sin^2(\theta)$

(Funciona)! $n=1$ : $x_1 = 4\sin^2(2\theta)$

$$P(\theta) = \begin{cases} x_0 = \sin^2\theta \\ x_{n+1} = 4x_n - 4x_n^2 \end{cases}$$

• entonces, $x_n = \sin^2(2^n\theta)$, demostremos $x_{n+1} = \sin^2(2^{n+1}\theta)$

$$x_n = \sin^2(2^n\theta) \rightarrow x_{n+1} = 4x_n - 4(x_n)^2$$

$$x_{n+1} = 4\sin^2(2^n\theta) - 4\sin^4(2^n\theta)$$
$$= 4\sin^2(2^n\theta)(1-\sin^2(2^n\theta))$$
$$= 4\sin^2(2^n\theta)(\cos^2(2^n\theta))$$

Angulo doble $\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)$

$$x_{n+1} = \sin^2(2^{n+1}\theta)$$

Caso base: $n=0$, $x_0 = \sin^2(2^0\theta)$
$= \sin^2(\theta)$

(Funciona)! $n=1$, $x_1 = \sin(2\theta)$

Ejercicio 5 (Teórico):

La sustitucion hacia adelante sirve para resolver sistemas de ecuaciones de la forma:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \left(\begin{array}{l}\text{donde } A \text{ es una matriz} \\ n \times n \text{ triangular inferior} \\ \text{y } x, b \in \mathbb{R}^n\end{array}\right)$$

Formula:

- $$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} \cdot x_j}{A_{ii}} \quad (1)$$

- $$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$ Vamos a resolver la primera, segunda y tercera ecuación.

1. $A_{11} \cdot x_1 = b_1 \rightarrow x_1 = \frac{b_1}{A_{11}}$

2. $A_{21} \cdot x_1 + A_{22} x_2 = b_2 \rightarrow x_2 = \dfrac{b_2 - A_{21}\left(\frac{b_1}{A_{11}}\right)}{A_{22}}$

3. $A_{31} \cdot x_1 + A_{32} x_2 + A_{33} x_3 = b_3$

$$\hookrightarrow x_3 = \frac{b_3 - \left(A_{31}\left(\frac{b_1}{A_{11}}\right) + A_{32}\left(\frac{b_2 - A_{21}\left(\frac{b_1}{A_{11}}\right)}{A_{22}}\right)\right)}{A_{33}}$$

Revisemos la sumatoria de la formula 1:

$$\sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} \cdot x_j = A_{i0} x_0 + A_{i1} x_1 \cdots + A_{ii-1} x_{i-1}$$

Vemos que la combinacion lineal es exactamente la misma que aparece al tratar de despejar las ecuaciones 1, 2 y 3, especificamente el factor que se le resta a cada $b_i$, entonces →

$$x_1 = \frac{b_1}{A_{11}} \quad , \quad x_2 = \frac{b_2 - (A_{21} x_1)}{A_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - ((A_{31} x_1) + (A_{32} x_2))}{A_{33}}$$

De esta forma para cada $x_i$:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

* Por ejemplo para $x_3$:

$$\sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j = A_{31} x_1 + A_{32} x_2$$

$$x_3 = \frac{b_3 - ((A_{31} x_1 + A_{32} x_2))}{A_{33}}$$

## Ejercicio 6 (Teórico):

La sustitucion hacia atras sirve para regolver sistemas de ecuaciones de la Forma:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \left(\begin{array}{l}\text{donde } A \text{ es una matriz triangular} \\ \text{superior } n \times n \text{ y } x, b \in \mathbb{R}^n.\end{array}\right)$$

Ahora vamos a resolver el sistema hacia atras hallando primero $x_n$ y de ultimas $x_1$:

**Formula**

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{Donde } i = n, n-1 \dots 0 \\ \text{Veamos}\end{array}\right.$$

Analicemos la sumatoria:

$$\sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j = A_{(n-1)n} x_n \quad \text{para } i = n-1$$

$$= A_{(n-2)(n-1)} \cdot x_{n-1} + A_{(n-2)n} \cdot x_n$$

Ahora resolviendo

$$x_n = \frac{b_n}{A_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - \overbrace{(A_{(n-1)n} x_n)}^{\text{Factor}}}{A_{(n-1)(n-1)}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - \overbrace{((A_{(n-2)(n-1)} \cdot x_{n-1}) + (A_{(n-2)n} \cdot x_n))}^{\text{Factor}}}{A_{(n-2)(n-2)}}$$

Para $x_i$:

$$x_i = \frac{b_i - \left(\sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j\right)}{A_{ii}}$$

Funciona para todo $x_i$ ya que segun cambia $i$ el factor cambia según la sumatoria, en general

$$\sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j = A_{i(i+1)} x_{i+1} + A_{i(i+2)} x_{i+2} \cdots + A_{in} x_n$$

De esta forma la formula funciona para todo $x_i$