Punto 21: Teórico

Demostrar que los coheficientes de la expansión de $f(x)$ en polinomios de Legendre $P_n(x)$ es:

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

-> los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ frente al peso $W_1 = 1$:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ (2/\,2n+1) & \text{si } n = m \end{cases}$$

- Usamos la formula de expansion de $f(x)$ en $[-1,1]$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x)$$, Siendo N el grado maximo o número de terminos

Entonces: $m = n \rightarrow P_m(x) \cdot P_n(x) = \frac{2}{2n+1}$

$$\rightarrow f(x) \cdot P_m(x) = \sum_{n=0}^{N} C_n P_n(x) \cdot P_m(x)$$ (Multiplicar ambos lados de la igualdad por $P_m(x)$)

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = \sum_{n=0}^{N} C_n \int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x)\, dx$$ (Integrar)

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\, dx = \sum_{n=0}^{N} C_n \cdot \frac{2}{2n+1}$$

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} f(x) \cdot P_m(x)\, dx = C_n \cdot \frac{2}{2n+1}$$

La sumatoria desaparece ya que el termino donde $n = m$ es el unico que contribuye a la integral, todos los demas dan 0 ya que:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

$$, = 1 \quad \text{si } m = n$$

$$\rightarrow C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) \cdot P_m(x)\, dx$$

$$= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx \quad ✓$$

- Hemos despejado el coheficiente C_n usando las relaciones de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, estos polinomios son una base ortogonal del espacio de las funciones.