Matemática Discreta 1

Santiago Sierra

6 de noviembre de 2022

Índice

1. Relaciones

1.1. Definición de Relaciones

Definición 1.1. Para los conjuntos $A,\ B \subseteq U$, el producto cartesiano de A y B se denota por $A \times B$, y

$$A \times B = \{(a, b)\ /\ a \in A \land b \in B\}$$

Corolario 1.0.1. Notamos como $|A|$ al cardinal de un conjunto, que representa la cantidad de elementos en A.

Corolario 1.0.2. Si los conjuntos $A,\ B$ son finitos, se sigue de la regla del producto que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Aunque generalmente no ocurre que $A \times B = B \times A$, tenemos que $|A \times B| = |B \times A|$.

Definición 1.2. Para los conjuntos $A, B \subseteq U$, cualquier subconjunto de $A \times B$ es una relación de A en B. A los subconjuntos de $A \times A$ se les llama relaciones sobre A.

Definición 1.3. Relación binaria
Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados pertenecientes al producto cartesiano de dos conjuntos que cumple una propiedad $P(a, b)$ en particular, es decir:

$$R = \{(a, b) \in A \times B\ /\ P(a, b)\}$$

Notaremos como aRb para indicar que $(a, b) \in R$ y $a\not{R}b$ para expresar que $(a, b) \notin R$

Corolario 1.0.3. En general, para conjuntos finitos $A,\ B$, existen $2^{|A \times B|} = 2^{|A||B|}$ relaciones de A en B, incluyendo la relación vacía y la propia relación $A \times B$.

Definición 1.4. Relación inversa Si R es una relación sobre A, entonces R^{-1} es una relación sobre A definida por $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x,\ \forall x, y \in A$.
Es decir, da vuelta el par ordenado.

Corolario 1.0.4. $(R^{-1})^{-1} = R$.

Corolario 1.0.5. $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

Definición 1.5. $\overline{R} = R^C = A \times A - R = \{(a, b) \in A \times A : (a, b) \notin R\}$.

$$a\overline{R}b \Leftrightarrow a\not{R}b$$

1.2. Tipos de relaciones

Definición 1.6. Sea R una relación en un conjunto A:

- La relación R es reflexiva si:
$$\forall a \in A,\ aRa$$
- La relación R es irreflexiva si:
$$\forall a \in A,\ a\not{R}a$$
- La relación R es simétrica si:
$$\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow bRa$$
- La relación R es anti-simétrica si:
$$\left.\begin{matrix} aRb \\ bRa \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b$$
- La relación R es asimétrica si:
$$aRb \Rightarrow b\not{R}a$$
Una relación asimétrica no puede ser reflexiva ni simétrica, e implica la anti-simétrica.
- La relación R es transitiva si:
$$\left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right\} \Rightarrow aRc$$

Corolario 1.0.6. R es simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.

Corolario 1.0.7. Si R es reflexiva, simétrica, etc, R^{-1} es del mismo tipo.

Definición 1.7. Una relación R sobre un conjunto A es un orden parcial, o una relación de orden parcial, si R es reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

Definición 1.8. Una relación de equivalencia R sobre un conjunto A es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

1.3. Producto, unión e intersección de relaciones

Definición 1.9. Si A, B, C son conjuntos y $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$, entonces la relación compuesta RS es una relación de A en C definida como $RS = \{(x, z)/x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y \in B/(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$.

Teorema 1.1. Sean A, B, C, D conjuntos y $R_1 \subseteq A \times B,\ R_2 \subseteq B \times C,\ R_3 \subseteq C \times D$.
Entonces $R_1(R_2R_3) = (R_1R_2)R_3$.

Definición 1.10. Dado un conjunto A y una relación R sobre A, definimos las potencias de R en forma recursiva como:

- $R^1 = R$.
- Para $n \in \mathbb{Z}^+,\ R^{n+1} = R\ R^n$.

Ejemplo 1.1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$, entonces $R^2 = \{(1, 4), (1, 2), (3, 4)\}$, $R^3 = \{(1, 4)\}$ y para $n \geq 4,\ R^n = \emptyset$.

1.4. Representación matricial y dígrafos

1.4.1. Representación matricial

Definición 1.11. Una matriz cero-uno $m \times n$, $E = (e_{ij})_{m\times n}$ es una disposición rectangular de números en m filas y n columnas, donde cada e_{ij} para $1 \leq i \leq m$, y $1 \leq j \leq n$, denota la entrada de la i-esima columna de E y cada una de dichas entradas es 0 o 1.

Definición 1.12. Si R es una relación entre A y B, entonces R puede ser representado por la matriz M cuyos indices de fila y columna indexan los elementos de a y b, respectivamente, de manera que las entradas de M quedan definidas por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & aRb \\ 0 & a\not{R}b \end{cases}$$

Corolario 1.1.1. Sea A un conjunto y R una relación sobre A, si $M(R)$ es la matriz de la relación, entonces:

- $M(R) = 0$, la matriz con todos los elementos iguales a 0, si y sólo si $R = \emptyset$.
- $M(R) = 1$, la matriz con todos los elementos iguales a 1, si y sólo si $R = A \times A$.
- $M(R^m) = [M(R)]^m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Corolario 1.1.2. Sean R y S relaciones, y $M(R),\ M(S)$ sus matrices respectivamente,
entonces $M(R) \cdot M(S) = M(RS)$, pero ningún termino excede el 1.

Definición 1.13. Sean E y F dos matrices cero-uno $m \times n$. Decimos que E es menor que F y escribimos $E \leq F$, si $e_{ij} \leq f_{ij}$, para todos $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$.
En caso que exista al menos un elemento que no cumpla esto, las matrices no son comparables

Ejemplo 1.2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.14. Intersección o producto coordenada a coordenada
Si $M,\ N \in \mathcal{M}_{r\times s} \Rightarrow M \cap N \in \mathcal{M}_{r\times s} / (M \cap N) = M_{ij} \cdot N_{ij}$.

Teorema 1.2. Dado un conjunto A con y una relación R sobre A, sea M la matriz de relación para R, entonces:

- R es reflexiva $\Leftrightarrow Id_{|A|} \leq M$. En el caso contrario, es irreflexiva.
- R es simétrica $\Leftrightarrow M = M^t$.
- R es transitiva $\Leftrightarrow MM = M^2 \leq M$.
- R es anti-simétrica $\Leftrightarrow M \cap M^t \leq Id_{|A|}$.
  Recordar, esta matriz se forma operando los elementos correspondientes de M y M^t con las reglas $0 \cap 0 = 0 \cap 1 = 1 \cap 0 = 0$ y $1 \cap 1 = 1$ (lo mismo que multiplicación coordenada a coordenada).

Corolario 1.2.1. Sean las relaciones $R,\ S$, y $M(R),\ M(S)$ las matrices de las relaciones, entonces:

- $M(R)^t = M(R^{-1})$.
- $M(R) + M(S) = M(R \cup S)$.
- $M(R) \cap M(S) = M(R \cap S)$.

Corolario 1.2.2. Conteo de Relaciones
Sea $|A| = n$:

- Cantidad de relaciones reflexivas: 2^{n^2-n}
  Tenemos 2 posibilidades, 0 o 1, en la diagonal siempre tiene que haber 1, y la matriz va a tener un total de n^2 entradas, y les restamos n que son las entradas que ya están ocupadas por la diagonal.

- Cantidad de relaciones simétricas: $2^{\frac{n^2+n}{2}}$
  Devuelta, 2 posibilidades, la diagonal no importan las entradas si son 0 o 1, solo que sea simétrica, por lo que podemos elegir las entradas de la triangular superior y se determinan las del otro lado, que son $\frac{n^2-n}{2}$, pero les sumamos n de la diagonal, $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$.

- Cantidad de relaciones anti-simétricas: $2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$
  Las posibilidades de la diagonal son 2^n, y fuera de la diagonal, los elementos m_{ij} y m_{ji}, pueden ser ambos 0, o uno 0 y el otro 1, por lo que son 3 posibilidades, y determinando la triangular superior ya se determina el otro lado, y son $\frac{n^2-n}{2}$ entradas.

1.4.2. Dígrafos de relaciones

Definición 1.15. Sea A un conjunto finito no vació, un grafo dirigido o dígrafo G sobre A esta formado por los elementos de A, llamados vértices o nodo de G, y un subconjunto E de $A \times A$, conocido como las aristas o arcos de G. Si $a, b \in V$ y $(a, b) \in E$, entonces existe una arista de a a b.
El vértice a es el origen o fuente de la arista, y b es el termino, o vértice terminal, y decimos que b es adyacente desde a, y que a es adyacente hacia b. Ademas, si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq (b, a)$. Una arista de la forma (a, a) es una lazo en a.

1.5. Relaciones de equivalencia y particiones

Definición 1.16. Dado un conjunto A y un conjunto de indices I, sea $\emptyset \neq A_i \subseteq A \; \forall i \in I$. Entonces $\{A_i\}_{i \in I}$ es una partición de A si

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{y} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i, j \in I \; / \; i \neq j$$

Cada subconjunto A, es una celda o bloque de la partición.

Definición 1.17. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Para cualquier $x \in A$, la clase de equivalencia de x, que se denota con $[x]$, se define como $[x] = \{y \in A \; / \; yRx\}$.

Teorema 1.3. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, y $x, y \in A$, entonces

- $x \in [x]$.
- $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$.
- $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$ o $[a] \cap [b] \Rightarrow [a] = [b]$.

Teorema 1.4. Si A es un conjunto, entonces:

- Cualquier relación de equivalencia R sobre A induce una partición de A.
- Cualquier partición de A da lugar a una relación de equivalencia R sobre A.

Teorema 1.5. Para cualquier conjunto A, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de relaciones de equivalencia sobre A y el conjunto de particiones de A.

Definición 1.18. Dada una relación de equivalencia R en un conjunto A, se llama conjunto cociente de A determinado por R al conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Se le representa por A/R. Es decir:

$$A/R = \{[a] \; / \; a \in A\}$$

1.6. Conjuntos parcialmente ordenados

Para analizar el concepto de orden, sea A un conjunto y R una relación sobre A, el par (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado, si la relación sobre A es un orden parcial.

Definición 1.19. Diagrama de Hasse
En general, si R es un orden parcial sobre un conjunto finito A, construimos un diagrama de Hasse para R sobre A trazando un segmento de x hacia arriba, hacia y, si $x, y \in A$ son tales que xRy y, lo que es mas importante, si no existe otro elemento $z \in A$ tal que xRz y zRy. Si adoptamos el convenio de leer el diagrama de abajo hacia arriba, no es necesario dirigir las aristas.

Definición 1.20. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que A es totalmente ordenado si $\forall x, y \in A$ ocurre que xRy o yRx.
En este caso, decimos que R es un orden total.

Definición 1.21. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento $x \in A$ es un elemento maximal de A si $\forall a \in A,\ a \neq x \Rightarrow x \not{R} a$. Un elemento $y \in A$ es un elemento minimal de A si $\forall b \in A,\ b \neq y \Rightarrow b \not{R} y$.

Teorema 1.6. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado y A es finito, entonces A tiene un elemento maximal y uno minimal.

Definición 1.22. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado, entonces decimos que $x \in A$ es un elemento mínimo si $xRa\ \forall a \in A$. El elemento $y \in A$ es un elemento máximo si $aRy\ \forall a \in A$.

Teorema 1.7. Si el conjunto parcialmente ordenado (A, R) tiene un elemento máximo o mínimo, entonces ese elemento es único.

Definición 1.23. Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado con $B \subseteq A$. Un elemento $x \in A$ es una cota inferior de B si $xRb\ \forall b \in B$. De manera similar, un elemento $y \in A$ es una cota superior de B si $bRy\ \forall b \in B$. Un elemento $x' \in A$ es una máxima cota inferior o ínfimo de B si es una cota inferior de B y si para todas las demás cotas inferiores x'' de B tenemos que $x''Rx'$. De forma análoga, $y' \in A$ es una mínima cota superior o supremo de B si es una cota superior de B y si $y'Ry''$ para todas las demás cotas superiores de y'' de B.

Teorema 1.8. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$, entonces B tiene a lo sumo un ínfimo y supremo.

Definición 1.24. El conjunto parcialmente ordenado (A, R) es un retículo si para cualesquiera $x, y \in A$, los elementos $sup\{x, y\}$ e $inf\{x, y\}$ existen en A.

Definición 1.25. Cadena
Sea $B \subseteq A$, B es cadena si $\forall a, b \in B\ aRb$ o bRa.

Definición 1.26. Anticadena
Sea $B \subseteq A$, B es anticadena si $\begin{cases} a \not{R} b \\ b \not{R} a \end{cases}$ con $a \neq b$.

Teorema 1.9. Sea n el largo de la cadena mas larga $\Rightarrow$ A se puede particionar en n anticadenas disjuntas. Sea m la cantidad de elementos de la anticadena mas grande $\Rightarrow$ A se puede particionar en m cadenas disjuntas.

2. Teoría de Grafos

2.1. Introducción

Definición 2.1. Sea V un conjunto finito no vació, y sea $A \subseteq V \times V$. El par (V, A) es un grafo sobre V, donde V es el conjunto de vértices o nodos, y A es su conjunto de aristas. Escribimos $G = (V, A)$ para denotar tal grafo.

Corolario 2.0.1. Para cualquier arista $(a, b) \in A$ se dice que:

- La arista (a, b) es incidente con los vértices a y b.
- a, b son los extremos de (a, b).
- a es el origen de (a, b).
- b es el termino de (a, b).

Definición 2.2. Dados dos vértices $u, v \in V$ con $G = (V, A)$, decimos que son vértices adyacentes si $(u, v) \in A$, ademas se dice que u y v son adyacentes, y que u es adyacente hacia v.

Definición 2.3. Dados $v \in V,\ a \in A$ con $G = (V, A)$, decimos que la arista a es incidente al vértice v si $\exists u \in V$ tal que $a = (u, v)$.

Definición 2.4. Una arista de la forma (a, a) es un lazo.

Definición 2.5. Un vértice $a \in V$ esta aislado cuando no hay ningún vértice adyacente con a.

Corolario 2.0.2. Un vértice con un lazo no está aislado.

Definición 2.6. Dado $G = (V, A)$ grafo, llamamos:

- Orden de G al número de vértices, $m = |V|$.
- Tamaño de G al número de aristas, $n = |A|$.

2.2. Tipos de caminos

Definición 2.7. Camino
Sea $G = (V, A)$ un grafo, un camino (en G) es una sucesión finita y alternada de vértices y aristas, de la forma:

$$c = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, a_n, v_n$$

donde $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ y $1 \leq i \leq n$.
Siendo n el número de aristas, y la longitud del camino.

Corolario 2.0.3. Un camino puede repetir vértices y/o aristas.

Definición 2.8. Un camino $c = v_0, \ldots, v_n$ esta cerrado cuando $v_0 = v_n$. De otra forma, esta abierto.

Definición 2.9. Un recorrido es un camino sin repetición de aristas.

Definición 2.10. Un camino simple es un camino sin repetición de vértices (con la excepción posible de los extremos).

Definición 2.11. Un ciclo es un camino simple cerrado.

Corolario 2.0.4. Un ciclo de longitud 1 es un lazo.

- En un grafo dirigido, pueden existir ciclos de longitud 2.
- En un grafo no dirigido todos los ciclos tienen longitud ≥ 3.

Nombre	Origen = Termino?	Vértices Repetidos?	Aristas Repetidas?
Camino			
Camino Cerrado	Si		
Camino Simple		No	No
Recorrido			No
Circuito	Si		No
Circuito Simple	Si	No	No

Corolario 2.0.5. Se suele considerar como iguales los circuitos simples que pasan por las mismas aristas.

Teorema 2.1. Sean a y b dos vértices distintos de un grafo G, si existe un camino desde a hasta b, entonces existe (otro) camino simple desde a hasta b.

2.3. Grafos conexos y disconexos

Definición 2.12. Un grafo $G = (V, A)$ es conexo cuando $\forall a, b \in V,\ a \neq b$, existe un camino (simple) desde a hasta b.
Un grafo dirigido es conexo, cuando el grafo subyacente (olvidando la orientación de las aristas) es conexo.

Definición 2.13. Un grafo (dirigido o no) es disconexo cuando no es conexo.

Definición 2.14. Componentes Conexas
Dado $G = (V, A)$ se considera la relación $(\sim) \subset V^2$ definida por $v \sim v' \Leftrightarrow$ existe un camino desde v hasta v'. Es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia correspondiente son las componentes conexas del grafo G.

Definición 2.15. Cuando G es finito, se escribe $K(G)$ al numero de componentes conexas de G.

Corolario 2.1.1. Las componentes conexas de un grafo dirigido se definen a partir del grafo no dirigido subyacente.

Definición 2.16. Multigrafo
Un multigrafo es una terna (V, A, ext) donde:

- V es el conjunto de vértices.
- A es el conjunto de aristas.
- ext: $E \to V^2$, $ext(e) = (a, b)$ quiere decir $a \xrightarrow{e} b$.

Es decir, de un vértice pueden salir múltiples aristas.

2.4. Subgrafos, grafos complementarios

Definición 2.17. Sea $G = (V, A)$ un grafo, un subgrafo de G es un grafo $G' = (V', A')$ tal que $\begin{cases} V' \subset V \\ E' \subset E \end{cases}$.

Corolario 2.1.2. $G' = (V', A')$ tiene que ser un grafo: $E' \subset V'^2$.

Definición 2.18. Sea $G = (V, A)$ un grafo, un subgrafo recubridor de G es un subgrafo $G' = (V', A') \subset G$ tal que $V' = V$.

Definición 2.19. Grafo completo
Un grafo $G = (V, A)$ es completo si es:

- No dirigido.
- No tiene lazos.
- $\forall a, b \in V,\ a \neq b,\ \{a, b\} \in A$.

De modo equivalente $\forall a, b \in V,\ \{a, b\} \in A \Leftrightarrow a \neq b$.
Se escribe K_n el grafo completo con n vértices.

Corolario 2.1.3. K_n tiene n vértices y $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

Corolario 2.1.4. Todo grafo $G = (V, A)$ sin lazos es un subgrafo del grafo completo $\hat{G} = (V, \hat{A})$ donde $\hat{A} = \{\{a, b\} \in V^2\ /\ a \neq b\}$.