

# Matemática Discreta 1

Santiago Sierra

# Índice general

<b>Chapter 1</b>	<b>Relaciones</b>	<b>Page 2</b>
1.1	Definición de Relaciones	2
1.2	Tipos de relaciones	4
1.3	Producto, unión e intersección de relaciones	5
1.4	Representación matricial y dígrafos	6
	Representación matricial — 6 • Dígrafos de relaciones — 7	
1.5	Relaciones de equivalencia y particiones	8
1.6	Conjuntos parcialmente ordenados	9
<b>Chapter 2</b>	<b>Teoría de Grafos</b>	<b>Page 11</b>
2.1	Introducción	11
2.2	Tipos de caminos	13
2.3	Grafos conexos y desconexos	14
2.4	Subgrafos, grafos complementarios	14
2.5	Isomorfismos de grafos	16
2.6	Caminos eulerianos y hamiltonianos	18
2.7	Grafos planos	19

# Capítulo 1

## Relaciones

### 1.1. Definición de Relaciones

#### Definición 1.1.1

Para los conjuntos  $A, B \subseteq U$ , el producto cartesiano de  $A$  y  $B$  se denota por  $A \times B$ , y

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

#### Corolario 1.1.1

Notamos como  $|A|$  al cardinal de un conjunto, que representa la cantidad de elementos en  $A$ .

#### Corolario 1.1.2

Si los conjuntos  $A, B$  son finitos, se sigue de la regla del producto que  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ . Aunque generalmente no ocurre que  $A \times B = B \times A$ , tenemos que  $|A \times B| = |B \times A|$ .

#### Definición 1.1.2

Para los conjuntos  $A, B \subseteq U$ , cualquier subconjunto de  $A \times B$  es una relación de  $A$  en  $B$ . A los subconjuntos de  $A \times A$  se les llama relaciones sobre  $A$ .

#### Definición 1.1.3: Relación binaria

Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados pertenecientes al producto cartesiano de dos conjuntos que cumple una propiedad  $P(a, b)$  en particular, es decir:

$$R = \{(a, b) \in A \times B / P(a, b)\}$$

Notaremos como  $aRb$  para indicar que  $(a, b) \in R$  y  $a \not R b$  para expresar que  $(a, b) \notin R$

#### Corolario 1.1.3

En general, para conjuntos finitos  $A, B$ , existen  $2^{|A \times B|} = 2^{|A||B|}$  relaciones de  $A$  en  $B$ , incluyendo la relación vacía y la propia relación  $A \times B$ .

#### Definición 1.1.4: Relación inversa

Si  $R$  es una relación sobre  $A$ , entonces  $R^{-1}$  es una relación sobre  $A$  definida por  $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x, \forall x, y \in A$ . Es decir, da vuelta el par ordenado.

**Corolario 1.1.4**

$$(R^{-1})^{-1} = R.$$

**Corolario 1.1.5**

$$R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}.$$

**Definición 1.1.5**

$$\overline{R} = R^c = A \times A - R = \{(a, b) \in A \times A : (a, b) \notin R\}.$$

$$a\overline{R}b \Leftrightarrow a \not R b$$

## 1.2. Tipos de relaciones

### Definición 1.2.1

Sea  $R$  una relación en un conjunto  $A$ :

- La relación  $R$  es reflexiva si:

$$\forall a \in A, aRa$$

- La relación  $R$  es irreflexiva si:

$$\forall a \in A, a \not R a$$

- La relación  $R$  es simétrica si:

$$\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow bRa$$

- La relación  $R$  es anti-simétrica si:

$$\left. \begin{array}{l} aRb \\ bRa \end{array} \right\} \Rightarrow a = b$$

- La relación  $R$  es asimétrica si:

$$aRb \Rightarrow b \not R a$$

Una relación asimétrica no puede ser reflexiva ni simétrica, e implica la anti-simétrica.

- La relación  $R$  es transitiva si:

$$\left. \begin{array}{l} aRb \\ bRc \end{array} \right\} \Rightarrow aRc$$

### Corolario 1.2.1

$R$  es simétrica  $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ .

### Corolario 1.2.2

Si  $R$  es reflexiva, simétrica, etc,  $R^{-1}$  es del mismo tipo.

### Definición 1.2.2

Una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  es un orden parcial, o una relación de orden parcial, si  $R$  es reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

### Definición 1.2.3

Una relación de equivalencia  $R$  sobre un conjunto  $A$  es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

### 1.3. Producto, unión e intersección de relaciones

#### Definición 1.3.1

Si  $A, B, C$  son conjuntos y  $R \subseteq A \times B$  y  $S \subseteq B \times C$ , entonces la relación compuesta  $RS$  es una relación de  $A$  en  $C$  definida como  $RS = \{(x, z) / x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y \in B / (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$ .

#### Teorema 1.3.1

Sean  $A, B, C, D$  conjuntos y  $R_1 \subseteq A \times B$ ,  $R_2 \subseteq B \times C$ ,  $R_3 \subseteq C \times D$ .  
Entonces  $R_1(R_2R_3) = (R_1R_2)R_3$ .

#### Definición 1.3.2

Dado un conjunto  $A$  y una relación  $R$  sobre  $A$ , definimos las potencias de  $R$  en forma recursiva como:

- $R^1 = R$ .
- Para  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $R^{n+1} = R R^n$ .

#### Ejemplo 1.3.1

Si  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ , entonces  $R^2 = \{(1, 4), (1, 2), (3, 4)\}$ ,  $R^3 = \{(1, 4)\}$  y para  $n \geq 4$ ,  $R^n = \emptyset$ .

## 1.4. Representación matricial y dígrafos

### 1.4.1. Representación matricial

#### Definición 1.4.1

Una matriz cero-uno  $m \times n$ ,  $E = (e_{ij})_{m \times n}$  es una disposición rectangular de números en  $m$  filas y  $n$  columnas, donde cada  $e_{ij}$  para  $1 \leq i \leq m$ , y  $1 \leq j \leq n$ , denota la entrada de la  $i$ -ésima columna de  $E$  y cada una de dichas entradas es 0 o 1.

#### Definición 1.4.2

Si  $R$  es una relación entre  $A$  y  $B$ , entonces  $R$  puede ser representado por la matriz  $M$  cuyos índices de fila y columna indexan los elementos de  $a$  y  $b$ , respectivamente, de manera que las entradas de  $M$  quedan definidas por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & aRb \\ 0 & a \not R b \end{cases}$$

#### Corolario 1.4.1

Sea  $A$  un conjunto y  $R$  una relación sobre  $A$ , si  $M(R)$  es la matriz de la relación, entonces:

- $M(R) = 0$ , la matriz con todos los elementos iguales a 0, si y sólo si  $R = \emptyset$ .
- $M(R) = 1$ , la matriz con todos los elementos iguales a 1, si y sólo si  $R = A \times A$ .
- $M(R^m) = [M(R)]^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

#### Corolario 1.4.2

Sean  $R$  y  $S$  relaciones, y  $M(R)$ ,  $M(S)$  sus matrices respectivamente, entonces  $M(R) \cdot M(S) = M(RS)$ , pero ningún término excede el 1.

#### Definición 1.4.3

Sean  $E$  y  $F$  dos matrices cero-uno  $m \times n$ . Decimos que  $E$  es menor que  $F$  y escribimos  $E \leq F$ , si  $e_{ij} \leq f_{ij}$ , para todos  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

En caso que exista al menos un elemento que no cumpla esto, las matrices no son comparables

#### Ejemplo 1.4.1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

#### Definición 1.4.4: Intersección o producto coordenada a coordenada

Si  $M, N \in \mathcal{M}_{r \times s} \Rightarrow M \cap N \in \mathcal{M}_{r \times s} / (M \cap N) = M_{ij} \cdot N_{ij}$ .

### Teorema 1.4.1

Dado un conjunto  $A$  con  $y$  una relación  $R$  sobre  $A$ , sea  $M$  la matriz de relación para  $R$ , entonces:

- $R$  es reflexiva  $\Leftrightarrow Id_{|A|} \leq M$ . En el caso contrario, es irreflexiva.
- $R$  es simétrica  $\Leftrightarrow M = M^t$ .
- $R$  es transitiva  $\Leftrightarrow MM = M^2 \leq M$ .
- $R$  es anti-simétrica  $\Leftrightarrow M \cap M^t \leq Id_{|A|}$ .  
Recordar, esta matriz se forma operando los elementos correspondientes de  $M$  y  $M^t$  con las reglas  $0 \cap 0 = 0 \cap 1 = 1 \cap 0 = 0$  y  $1 \cap 1 = 1$  (lo mismo que multiplicación coordenada a coordenada).

### Corolario 1.4.3

Sean las relaciones  $R$ ,  $S$ , y  $M(R)$ ,  $M(S)$  las matrices de las relaciones, entonces:

- $M(R)^t = M(R^{-1})$ .
- $M(R) + M(S) = M(R \cup S)$ .
- $M(R) \cap M(S) = M(R \cap S)$ .

### Corolario 1.4.4 Conteo de Relaciones

Sea  $|A| = n$ :

- Cantidad de relaciones reflexivas:  $2^{n^2-n}$   
Tenemos 2 posibilidades, 0 o 1, en la diagonal siempre tiene que haber 1, y la matriz va a tener un total de  $n^2$  entradas, y les restamos  $n$  que son las entradas que ya están ocupadas por la diagonal.
- Cantidad de relaciones simétricas:  $2^{\frac{n^2+n}{2}}$   
Devuelta, 2 posibilidades, la diagonal no importan las entradas si son 0 o 1, solo que sea simétrica, por lo que podemos elegir las entradas de la triangular superior y se determinan las del otro lado, que son  $\frac{n^2-n}{2}$ , pero les sumamos  $n$  de la diagonal,  $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$ .
- Cantidad de relaciones anti-simétricas:  $2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$   
Las posibilidades de la diagonal son  $2^n$ , y fuera de la diagonal, los elementos  $m_{ij}$  y  $m_{ji}$ , pueden ser ambos 0, o uno 0 y el otro 1, por lo que son 3 posibilidades, y determinando la triangular superior ya se determina el otro lado, y son  $\frac{n^2-n}{2}$  entradas.

## 1.4.2. Dígrafos de relaciones

### Definición 1.4.5

Sea  $A$  un conjunto finito no vacío, un grafo dirigido o dígrafo  $G$  sobre  $A$  esta formado por los elementos de  $A$ , llamados vértices o nodo de  $G$ , y un subconjunto  $E$  de  $A \times A$ , conocido como las aristas o arcos de  $G$ . Si  $a, b \in V$  y  $(a, b) \in E$ , entonces existe una arista de  $a$  a  $b$ .

El vértice  $a$  es el origen o fuente de la arista, y  $b$  es el termino, o vértice terminal, y decimos que  $b$  es adyacente desde  $a$ , y que  $a$  es adyacente hacia  $b$ . Además, si  $a \neq b$ , entonces  $(a, b) \neq (b, a)$ . Una arista de la forma  $(a, a)$  es una lazo en  $a$ .



## 1.5. Relaciones de equivalencia y particiones

### Definición 1.5.1

Dado un conjunto  $A$  y un conjunto de índices  $I$ , sea  $\emptyset \neq A_i \subseteq A \forall i \in I$ . Entonces  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una partición de  $A$  si

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ y } A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \in I / i \neq j$$

Cada subconjunto  $A_i$ , es una celda o bloque de la partición.

### Definición 1.5.2

Sea  $R$  una relación de equivalencia sobre un conjunto  $A$ . Para cualquier  $x \in A$ , la clase de equivalencia de  $x$ , que se denota con  $[x]$ , se define como  $[x] = \{y \in A / yRx\}$ .

### Teorema 1.5.1

Si  $R$  es una relación de equivalencia sobre un conjunto  $A$ , y  $x, y \in A$ , entonces

- $x \in [x]$ .
- $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$ .
- $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$  o  $[a] \cap [b] \Rightarrow [a] = [b]$ .

### Teorema 1.5.2

Si  $A$  es un conjunto, entonces:

- Cualquier relación de equivalencia  $R$  sobre  $A$  induce una partición de  $A$ .
- Cualquier partición de  $A$  da lugar a una relación de equivalencia  $R$  sobre  $A$ .

### Teorema 1.5.3

Para cualquier conjunto  $A$ , existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de relaciones de equivalencia sobre  $A$  y el conjunto de particiones de  $A$ .

### Definición 1.5.3

Dada una relación de equivalencia  $R$  en un conjunto  $A$ , se llama conjunto cociente de  $A$  determinado por  $R$  al conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Se le representa por  $A/R$ . Es decir:

$$A/R = \{[a] / a \in A\}$$

## 1.6. Conjuntos parcialmente ordenados

Para analizar el concepto de orden, sea  $A$  un conjunto y  $R$  una relación sobre  $A$ , el par  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado, si la relación sobre  $A$  es un orden parcial.

### Definición 1.6.1: Diagrama de Hasse

En general, si  $R$  es un orden parcial sobre un conjunto finito  $A$ , construimos un diagrama de Hasse para  $R$  sobre  $A$  trazando un segmento de  $x$  hacia arriba, hacia  $y$ , si  $x, y \in A$  son tales que  $xRy$  y, lo que es mas importante, si no existe otro elemento  $z \in A$  tal que  $xRz$  y  $zRy$ . Si adoptamos el convenio de leer el diagrama de abajo hacia arriba, no es necesario dirigir las aristas.

### Definición 1.6.2

Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que  $A$  es totalmente ordenado si  $\forall x, y \in A$  ocurre que  $xRy$  o  $yRx$ .  
En este caso, decimos que  $R$  es un orden total.

### Definición 1.6.3

Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento  $x \in A$  es un elemento maximal de  $A$  si  $\forall a \in A, a \neq x \Rightarrow x \not R a$ . Un elemento  $y \in A$  es un elemento minimal de  $A$  si  $\forall b \in A, b \neq y \Rightarrow b \not R y$ .

### Teorema 1.6.1

Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado y  $A$  es finito, entonces  $A$  tiene un elemento maximal y uno minimal.

### Definición 1.6.4

Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado, entonces decimos que  $x \in A$  es un elemento mínimo si  $xRa \forall a \in A$ . El elemento  $y \in A$  es un elemento máximo si  $aRy \forall a \in A$ .

### Teorema 1.6.2

Si el conjunto parcialmente ordenado  $(A, R)$  tiene un elemento máximo o mínimo, entonces ese elemento es único.

### Definición 1.6.5

Sea  $(A, R)$  un conjunto parcialmente ordenado con  $B \subseteq A$ . Un elemento  $x \in A$  es una cota inferior de  $B$  si  $xRb \forall b \in B$ . De manera similar, un elemento  $y \in A$  es una cota superior de  $B$  si  $bRy \forall b \in B$ .  
Un elemento  $x' \in A$  es una máxima cota inferior o ínfimo de  $B$  si es una cota inferior de  $B$  y si para todas las demás cotas inferiores  $x''$  de  $B$  tenemos que  $x''Rx'$ . De forma análoga,  $y' \in A$  es una mínima cota superior o supremo de  $B$  si es una cota superior de  $B$  y si  $y'Ry''$  para todas las demás cotas superiores de  $y''$  de  $B$ .

### Teorema 1.6.3

Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado y  $B \subseteq A$ , entonces  $B$  tiene a lo sumo un ínfimo y supremo.

**Definición 1.6.6**

El conjunto parcialmente ordenado  $(A, R)$  es un retículo si para cualesquiera  $x, y \in A$ , los elementos  $\sup\{x, y\}$  e  $\inf\{x, y\}$  existen en  $A$ .

**Definición 1.6.7: Cadena**

Sea  $B \subseteq A$ ,  $B$  es cadena si  $\forall a, b \in B$   $aRb$  o  $bRa$ .

**Definición 1.6.8: Anticadena**

Sea  $B \subseteq A$ ,  $B$  es anticadena si  $\begin{cases} a \not R b \\ b \not R a \end{cases}$  con  $a \neq b$ .

**Teorema 1.6.4**

Sea  $n$  el largo de la cadena mas larga  $\Rightarrow A$  se puede particionar en  $n$  anticadenas disjuntas.

Sea  $m$  la cantidad de elementos de la anticadena mas grande  $\Rightarrow A$  se puede particionar en  $m$  cadenas disjuntas.

## Capítulo 2

# Teoría de Grafos

### 2.1. Introducción

#### Definición 2.1.1

Sea  $V$  un conjunto finito no vacío, y sea  $A \subseteq V \times V$ . El par  $(V, A)$  es un grafo sobre  $V$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices o nodos, y  $A$  es su conjunto de aristas. Escribimos  $G = (V, A)$  para denotar tal grafo.

#### Corolario 2.1.1

Para cualquier arista  $(a, b) \in A$  se dice que:

- La arista  $(a, b)$  es incidente con los vértices  $a$  y  $b$ .
- $a, b$  son los extremos de  $(a, b)$ .
- $a$  es el origen de  $(a, b)$ .
- $b$  es el termino de  $(a, b)$ .

#### Definición 2.1.2

Dados dos vértices  $u, v \in V$  con  $G = (V, A)$ , decimos que son vértices adyacentes si  $(u, v) \in A$ , además se dice que  $u$  y  $v$  son adyacentes, y que  $u$  es adyacente hacia  $v$ .

#### Definición 2.1.3

Dados  $v \in V$ ,  $a \in A$  con  $G = (V, A)$ , decimos que la arista  $a$  es incidente al vértice  $v$  si  $\exists u \in V$  tal que  $a = (u, v)$ .

#### Definición 2.1.4

Una arista de la forma  $(a, a)$  es un lazo.

#### Definición 2.1.5

Un vértice  $a \in V$  está aislado cuando no hay ningún vértice adyacente con  $a$ .

#### Corolario 2.1.2

Un vértice con un lazo no está aislado.

**Definición 2.1.6**

Dado  $G = (V, A)$  grafo, llamamos:

- Orden de  $G$  al número de vértices,  $m = |V|$ .
- Tamaño de  $G$  al número de aristas,  $n = |A|$ .

## 2.2. Tipos de caminos

### Definición 2.2.1: Camino

Sea  $G = (V, A)$  un grafo, un camino (en  $G$ ) es una sucesión finita y alternada de vértices y aristas, de la forma:

$$c = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n$$

donde  $a_i = (v_{i-1}, v_i)$  y  $1 \leq i \leq n$ .

Siendo  $n$  el número de aristas, y la longitud del camino.

### Corolario 2.2.1

Un camino puede repetir vértices y/o aristas.

### Definición 2.2.2

Un camino  $c = v_0, \dots, v_n$  está cerrado cuando  $v_0 = v_n$ . De otra forma, está abierto.

### Definición 2.2.3

Un recorrido es un camino sin repetición de aristas.

### Definición 2.2.4

Un camino simple es un camino sin repetición de vértices (con la excepción posible de los extremos).

### Definición 2.2.5

Un ciclo es un camino simple cerrado.

### Corolario 2.2.2

Un ciclo de longitud 1 es un lazo.

- En un grafo dirigido, pueden existir ciclos de longitud 2.
- En un grafo no dirigido todos los ciclos tienen longitud  $\geq 3$ .

Nombre	Origen = Terminó?	Vértices Repetidos?	Aristas Repetidas?
Camino			
Camino Cerrado	Si		
Camino Simple		No	No
Recorrido			No
Circuito	Si		No
Circuito Simple	Si	No	No

### Corolario 2.2.3

Se suele considerar como iguales los circuitos simples que pasan por las mismas aristas.

### Teorema 2.2.1

Sean  $a$  y  $b$  dos vértices distintos de un grafo  $G$ , si existe un camino desde  $a$  hasta  $b$ , entonces existe (otro) camino simple desde  $a$  hasta  $b$ .

## 2.3. Grafos conexos y desconexos

### Definición 2.3.1

Un grafo  $G = (V, A)$  es conexo cuando  $\forall a, b \in V, a \neq b$ , existe un camino desde  $a$  hasta  $b$ .

Un grafo dirigido es conexo, cuando el grafo subyacente (olvidando la orientación de las aristas) es conexo.

### Definición 2.3.2

Un grafo (dirigido o no) es desconexo cuando no es conexo.

### Definición 2.3.3: Componentes Conexas

Dado  $G = (V, A)$  se considera la relación  $(\sim) \subset V^2$  definida por  $v \sim v' \Leftrightarrow$  existe un camino desde  $v$  hasta  $v'$ .

Es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia correspondiente son las componentes conexas del grafo  $G$ .

### Definición 2.3.4

Cuando  $G$  es finito, se escribe  $K(G)$  al numero de componentes conexas de  $G$ .

#### Corolario 2.3.1

$G$  es conexo  $\Leftrightarrow K(G) = 1$ .

#### Corolario 2.3.2

Las componentes conexas de un grafo dirigido se definen a partir del grafo no dirigido subyacente.

### Definición 2.3.5: Multigrafo

Un multigrafo es una terna  $(V, A, ext)$  donde:

- $V$  es el conjunto de vértices.
- $A$  es el conjunto de aristas.
- $ext: A \rightarrow V^2, ext(a) = (x, y)$  quiere decir  $x \xrightarrow{a} y$ .

Es decir, de un vértice pueden salir múltiples aristas.

## 2.4. Subgrafos, grafos complementarios

### Definición 2.4.1

Sea  $G = (V, A)$  un grafo, un subgrafo de  $G$  es un grafo  $G' = (V', A')$  tal que  $\begin{cases} V' \subset V \\ A' \subset A \end{cases}$ .

#### Corolario 2.4.1

$G' = (V', A')$  tiene que ser un grafo:  $A' \subset V'^2$ .

#### Definición 2.4.2

Sea  $G = (V, A)$  un grafo, un subgrafo recubridor de  $G$  es un subgrafo  $G' = (V', A') \subset G$  tal que  $V' = V$ .

#### Definición 2.4.3: Grafo completo

Un grafo  $G = (V, A)$  es completo si es:

- No dirigido.
- No tiene lazos.
- $\forall a, b \in V, a \neq b, \{a, b\} \in A$ .

De modo equivalente  $\forall a, b \in V, \{a, b\} \in A \Leftrightarrow a \neq b$ .

Se escribe  $K_n$  el grafo completo con  $n$  vértices.

#### Corolario 2.4.2

$K_n$  tiene  $n$  vértices y  $\frac{n(n-1)}{2}$  aristas.

#### Corolario 2.4.3

Todo grafo  $G = (V, A)$  sin lazos es un subgrafo recubridor de algún grafo completo  $\hat{G} = (V, \hat{A})$  donde  $\hat{A} = \{\{a, b\} \in V^2 / a \neq b\}$ .

#### Definición 2.4.4

Si  $G = (V, A)$  es un grafo sin lazos, el grafo complementario de  $G$  está definido por  $\overline{G} = (V, \overline{A})$  con  $\overline{A} = \{\{a, b\} \in V^2 / a \neq b \wedge \{a, b\} \notin A\}$ .

#### Corolario 2.4.4

El complementario no tiene lazos.

#### Corolario 2.4.5

El complementario del complementario es el grafo inicial:  $\overline{\overline{G}} = G$ .



## 2.5. Isomorfismos de grafos

### Definición 2.5.1

Un isomorfismo entre dos grafos  $G_1 = (V_1, A_1)$  y  $G_2 = (V_2, A_2)$  es una función  $f : V_1 \rightarrow V_2$  tal que:

- $f$  es biyectiva.
- $\forall a, b \in V_1, \{a, b\} \in A_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in A_2$ .

Dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos cuando existe un isomorfismo  $f : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$ .

### Corolario 2.5.1

Si  $G_1$  es isomorfo con  $G_2$ , entonces  $G_2$  es isomorfo con  $G_1$ .

### Corolario 2.5.2

Si el grafo  $G_1$  es isomorfo con el grafo  $G_2$ , y el grafo  $G_2$  es isomorfo con el grafo  $G_3$ , entonces el grafo  $G_1$  es isomorfo con  $G_3$ .

### Corolario 2.5.3

De modo análogo se define la noción de isomorfismo para los grafos dirigidos y los multigrafos.

### Corolario 2.5.4

Para cada  $n \geq 3$ , se define el grafo  $C_n = (V_n, A_n)$  que es el ciclo de orden  $n$ , con  $V_n = \{1, \dots, n\}$  y  $A_n = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ .

### Definición 2.5.2

En un grafo  $G$  sin lazos, un ciclo de orden  $n$  ( $\geq 3$ ) es un subgrafo de  $G$  isomorfo a  $C_n$ .

### Definición 2.5.3: Árboles

Un árbol es un grafo finito sin lazos, conexo, y sin ciclos.

### Definición 2.5.4: Bosque

Un bosque es un grafo cuyos componentes conexos son arboles.

### Definición 2.5.5

Sea  $G$  un grafo, un árbol recubridor de  $G$  es un subgrafo recubridor de  $G$  que es un árbol.

### Definición 2.5.6

Un bosque recubridor de  $G$  es un bosque  $B \subset G$  tal que  $B$  es un subgrafo recubridor de  $G$ , cada árbol de  $B$  es un árbol recubridor de una componente conexa de  $G$ .

### Teorema 2.5.1

Un grafo es conexo si y sólo si tiene un árbol recubridor.

**Teorema 2.5.2**

Un grafo  $G = (V, A)$  es un árbol si y solo si  $\forall v, w \in V, v \neq w$ , existe un único camino simple de  $v$  a  $w$ .

**Definición 2.5.7**

En un grafo  $G$  el grado de un vértice  $v$  es el numero de aristas incidentes a  $v$ , y lo notamos como  $gr_G(v)$ .

**Corolario 2.5.5**

Si un vértice tiene un lazo, se cuenta 2 veces.

**Corolario 2.5.6**

En un árbol con al menos 2 vértices, existe (al menos) un vértice de grado 1.

**Teorema 2.5.3**

Si  $G = (V, A)$  es un árbol no vacío, entonces:  $|V| = |A| + 1$ .

**Teorema 2.5.4**

Sea  $G = (V, A)$  un grafo finito sin lazos, las siguientes propiedades son equivalentes:

- $G$  es un árbol.
- $G$  es conexo, y si se elimina cualquier arista de  $G$  se obtiene un bosque de 2 árboles.
- $G$  no contiene ciclos, y  $|V| = |E| + 1$ .
- $G$  es conexo, y  $|V| = |E| + 1$ .
- $G$  no contiene ciclos, y cualquier arista suplementaria entre 2 vértices de  $V$  introduce un ciclo.

## 2.6. Caminos eulerianos y hamiltonianos

### Definición 2.6.1

Sea  $G$  un grafo o multigrafo, para cualquier vértice  $v$  de  $G$ , se llama grado de  $v$  y se escribe  $gr_G(v)$  (o  $gr(v)$ ) el número de aristas incidentes con  $v$ , contando cada lazo (en  $v$ ) 2 veces.

### Corolario 2.6.1

Cualquier grafo o multigrafo  $G$  finito  $G = (V, A)$ , tenemos que  $\sum_{v \in V} gr(v) = 2|E|$ .

### Corolario 2.6.2

En cualquier grafo finito, la cantidad de vértices de grado impar es par.

### Definición 2.6.2

Un grafo o multigrafo es regular cuando todos sus vértices tienen el mismo grado.  
Es  $k$ -regular cuando todos sus vértices tienen grado  $k$ .

### Corolario 2.6.3

Si  $G = (V, A)$  es  $k$ -regular, entonces  $k|V| = 2|A|$ .

### Definición 2.6.3: Caminos y circuitos eulerianos

En un grafo o multigrafo  $G$  finito no orientado, un recorrido euleriano es un recorrido que pasa por cada arista del grafo (1 vez cada una).  
De misma manera definimos los circuitos eulerianos, con la diferencia de que tiene que ser un circuito.

### Teorema 2.6.1

Sea  $G$  un grafo o multigrafo no dirigido  $G = (V, A)$  no vacío y sin vértices aislados.  
Entonces,  $G$  tiene un circuito euleriano si y solo si  $G$  es conexo y todos los vértices son de grado par.

### Corolario 2.6.4

Sea  $G$  un grafo o multigrafo no dirigido, sin vértices aislados,  $G$  tiene un recorrido euleriano si y solo si  $G$  es conexo y todos los vértices de  $G$  tienen grado par, excepto por 2.

### Definición 2.6.4: Caminos y ciclos hamiltonianos

Sea  $G$  un grafo o multigrafo dirigido o no, un camino hamiltoniano un camino simple de  $G$  que pasa por todos los vértices de  $G$ .  
Un ciclo hamiltoniano de  $G$  es un ciclo de  $G$  que pasa por todos los vértices de  $G$ .

### Corolario 2.6.5

No hay relación entre los caminos y ciclos hamiltonianos con los recorridos y circuitos eulerianos.

### Corolario 2.6.6

Cada grafo que tiene un ciclo hamiltoniano tiene un camino hamiltoniano (sacando cualquier arista).

### Definición 2.6.5

Un grafo es hamiltoniano si tiene un ciclo hamiltoniano.

Un grafo es semi-hamiltoniano si tiene un camino hamiltoniano pero ningún ciclo hamiltoniano.

### Corolario 2.6.7

$K_n$  es hamiltoniano.

### Definición 2.6.6

Un torneo es un grafo dirigido  $G = (V, A)$  tal que para todos los vértices  $x \neq y \in V$ , tenemos que  $(x \rightarrow y) \in A$  o (exclusivo)  $(y \rightarrow x) \in A$ .

### Definición 2.6.7: Inclusión

Un torneo es un grafo obtenido a partir de  $K_n$  ( $n \geq 1$ ) orientando cada arista.

### Teorema 2.6.2

Todo torneo tiene un camino hamiltoniano.

### Teorema 2.6.3

Sea  $G = (V, A)$  un grafo no dirigido sin lazos, si para todos  $x \neq y \in V$ , tenemos que  $gr(x) + gr(y) \geq n - 1$  (con  $n = |V|$ ), entonces existe un camino hamiltoniano.

### Corolario 2.6.8

Sea  $G$  un grafo no dirigido sin lazos con  $|V| = n$ , si  $gr(x) \geq \frac{n-1}{2}$  para todo  $x \in V$ , entonces  $G$  tiene un camino hamiltoniano.

### Teorema 2.6.4

Sea  $G$  un grafo no dirigido sin lazos, con  $|V| = n$ , si para todos  $x \neq y \in V$ , tenemos que  $gr(x) + gr(y) \geq n$  entonces existe un ciclo hamiltoniano.

### Corolario 2.6.9

Si  $gr(x) \geq \frac{n}{2}$  para todo  $x \in V$ , entonces  $G$  tiene un ciclo hamiltoniano.

## 2.7. Grafos planos

### Definición 2.7.1

Un grafo o multigrafo  $G$  es plano si se puede dibujar  $G$  en el plano ( $\mathbb{R}^2$ ) que sus aristas se intersequen solo en los extremos que comparten.

### Corolario 2.7.1

La definición se basa en la noción de representación de un grafo  $G$  en el plano. Formalmente, una representación de  $G$  en el plano es una función que:

- Asocia a cada vértice  $v \in V$  a un punto  $f(v) \in \mathbb{R}^2$ .

- Asocia a cada arista  $a \in A$  de extremos  $v_1, v_2 \in V$ , una línea continua  $f(a) \in \mathbb{R}^2$  que junta  $f(v_1)$  y  $f(v_2)$ .

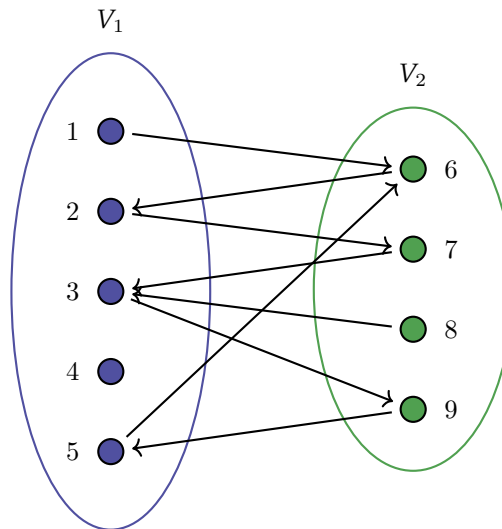
Dicha representación es una inmersión (encaje) cuando:

- $f$  es inyectiva sobre  $V$ .
- $f(a)$  es una línea inyectiva.
- $f(a)$  intersecta  $f(a')$  (con  $a \neq a'$ ) en los extremos.

Cuando tal inmersión existe se dice que  $G$  es plano.

### Definición 2.7.2

Un grafo  $G = (V, A)$  es bipartito si existe una partición  $V = V_1 \cup V_2$  ( $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \neq \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ ) tal que toda arista de la forma  $\{v_1, v_2\}$  con  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$ .



### Corolario 2.7.2

Un grafo bipartito es completo cuando  $\{v_1, v_2\} \in A$  para todos  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$ .

### Corolario 2.7.3

En un grafo bipartito, todos los ciclos tienen longitud par.

### Definición 2.7.3

$K_{m,n}$  es un grafo bipartito completo con  $|V_1| = m$ ,  $|V_2| = n$ , con  $m + n$  vértices y  $m \times n$  aristas.

#### Definición 2.7.4

Sea  $G = (V, A)$  un grafo o multigrafo:

- Una subdivisión elemental de  $G$  es un grafo  $G' = (V', A')$  obtenido a partir de  $G$ , reemplazando una arista  $\{u, v\} \in A$  por 2 aristas  $\{u, w\}, \{w, v\} \in E'$  ( $w$  un nuevo vértice).
- Una subdivisión de  $G$  es un grafo  $G'$  obtenido mediante finitas subdivisiones elementales de  $G$ :

$$G \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \cdots \rightarrow G_n = G'$$

#### Corolario 2.7.4

Si  $G'$  es una subdivisión de  $G$ :

1.  $K(G) = K(G')$ . En particular:  $G$  conexo  $\Leftrightarrow G'$  conexo.
2.  $G$  plano  $\Leftrightarrow G'$  plano.

#### Corolario 2.7.5

Si un grafo  $G$  es plano, entonces todos sus subgrafos son planos también.

Al contrario, si  $G$  contiene un subgrafo no plano (por ejemplo: un subgrafo isomorfo a una subdivisión de  $K_{3,3}$  o  $K_5$ ) entonces  $G$  no puede ser plano.

#### Teorema 2.7.1 Teorema de Kuratowski

Un grafo no es plano si y solo si contiene un subgrafo  $G' \subset G$  isomorfo a una subdivisión de  $K_{3,3}$  o  $K_5$ .

#### Corolario 2.7.6

Cada inmersión de un grafo plano en el plano define finitas regiones (todas finitas, salvo una)

#### Teorema 2.7.2

Sea  $G = (V, A)$  un grafo o multigrafo plano conexo con  $|V| = v$  y  $|A| = a$ . Sea  $r$  el numero de regiones en el plano determinadas por una inmersión (o representación) plana de  $G$ , una de estas regiones tiene un área infinita y se conoce como región infinita, entonces  $v - a + r = 2$ .

#### Corolario 2.7.7

Mas generalmente, si  $G$  es plano (conexo o no),  $v - e + r = 1 + K(G)$ .

#### Definición 2.7.5

Sea  $G = (V, A)$  un grafo plano con  $r \geq 1$  regiones  $R_1, \dots, R_r$  a través de una inmersión dada en el plano. Dado  $i \in [1, \dots, r]$  el grado de  $R_i$  es el numero de aristas que forman la frontera de  $R_i$ .

#### Corolario 2.7.8

$$\sum_{i=1}^r gr(R_i) = 2a \quad (= 2|A|).$$

#### Corolario 2.7.9

Si  $G = (V, A)$  es un grafo simple, sin lazos, conexo, plano y no vacío, entonces  $3r \leq 2e$  y  $e \leq 3v - 6$ .