Probabilidad y Estadistica

Santiago Sierra

Índice general

Capítulo 1

1.1. Cálculo de probabilidades

Definición 1.1.1

La probabilidad de un evento A, es un número real en el intervalo $[0, 1]$ que denotaremos por $P(A)$.

Definición 1.1.2: Espacio muestral

Es el conjunto Ω de todos los resultados posibles de un evento. Los elementos del espacio muestral se denotan usualmente por la letra ω y se llaman eventos simples o elementales.

Definición 1.1.3: Cardinal

Es el número de elementos de un evento, lo escribimos como $|A|$.

Definición 1.1.4: Probabilidad Clásica

Sea A un subconjunto de un espacio muestral Ω de cardinalidad finita. Definimos la probabilidad de un evento A como:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Definición 1.1.5: σ-álgebra

$$\mathcal{M} \text{ es } \sigma\text{-álgebra} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega \in \mathcal{M} \\ \text{Si } A \in \mathcal{M} \rightarrow A^c \in \mathcal{M} \\ \text{Si } A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M} \rightarrow \cup_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{M} \end{cases}$$

Definición 1.1.6: Espacio de probabilidad

Diremos que $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ con $\Omega \neq \emptyset$ es un espacio de probabilidad si y solo si $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra de conjuntos de Ω, y si $P : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1]$ es una función tal que:

- $P(\Omega) = 1$.
- Si $A_1, A_2, \ldots, A_n \cdots \in \mathcal{M}$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

Proposición 1.1.1 Propiedades de una probabilidad

1. $P(\emptyset) = 0$.

   Demostración: $\Omega = \Omega \uplus \emptyset \longrightarrow P(\Omega) = P(\Omega \uplus \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$.
   Por la propiedad 2, tenemos que $P(\Omega) = 1$, por lo que nos queda $1 = 1 + P(\emptyset) \longrightarrow P(\emptyset) = 0$. 😄

2. $P(A) \leq 1$ para cualquier evento A.

   Demostración: $\Omega = A \uplus A^c \longrightarrow (1 =)P(\Omega) = P(A) + P(A^c)$, como $P(A^c) \geq 0$ por la primera propiedad, nos queda que $P(A) \leq 1$. 😄

3. $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   Demostración:

$$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \tag{1.1}$$
$$\longrightarrow P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c) \tag{1.2}$$
$$\longrightarrow P(A^c) = 1 - P(A) \tag{1.3}$$

😄

4. Si $A \subseteq B \longrightarrow \; P(A) \leq P(B)$.

   Demostración:

$$B = A \uplus (B \backslash A) \longrightarrow \; P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \tag{1.4}$$
$$\longrightarrow P(A) \leq P(B) \tag{1.5}$$

😄

5. $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B) \; \forall A, B$.

   Demostración:

$$B = (B \backslash A) \uplus (A \cap B) \longrightarrow P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B) \tag{1.6}$$
$$\longrightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B) \tag{1.7}$$

😄

6. Si $A \subset B \longrightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.

   Demostración: Como A esta incluido en B, tenemos que $A \cap B = A$. 😄

7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   Demostración:

$$P(A \cup B) = P((A \cap B) \cup (A/B) \cup (B/A) \tag{1.8}$$
$$= P(A \cap B) + {\color{red}P(A/B)} + {\color{blue}P(B/A)} \tag{1.9}$$
$$= P(A \cap B) + {\color{red}P(A) - P(A \cap B)} + {\color{blue}P(B) - P(A \cap B)} \tag{1.10}$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.11}$$

😄

8. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

9. Sea $\{C_n\}_n$ una sucesión de conjuntos tales que:

   - $\cup_{i=1}^{\infty} C_i = \Omega$
   - $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$

   Entonces $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)\ \forall A$.

   Demostración: $A = \uplus_{i=1}^{\infty}(A \cap C_i) \rightarrow\ P(A) = P(\uplus_{i=1}^{\infty}(A \cap C_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$. 😄

10. Continuidad de las probabilidades

    - $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \ldots A_i \in \mathcal{M} \rightarrow P(\cup_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{m\to\infty} P(A_m)$.
    - $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \ldots A_i \in \mathcal{M} \rightarrow P(\cap_{m=1}^{\infty} A_m) = \lim_{m\to\infty} P(A_m)$.

Definición 1.1.7: Leyes de Morgan

- $\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c$.
- $\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^c$.

1.2. Modelo de equiprobabilidad

Cuando Ω es finito y ademas todos sus elementos tienen igual probabilidad, entonces $A \subset \Omega\ P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

1.3. Probabilidad Condicional

Definición 1.3.1

Sean A y B dos eventos de un espacio muestral Ω, y supongamos que $P(B) > 0$. Definimos la probabilidad condicional de A dado B como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

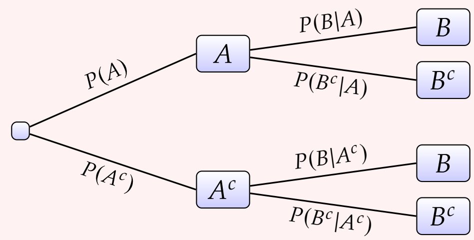
Representa la probabilidad de A cuando se sabe que el evento B ha ocurrido

Proposición 1.3.1

- $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ si $P(B) \neq 0$.
- $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$ si $P(A) \neq 0$.
- $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$ si $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$.
- Si $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega\ B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall i \neq j\ P(B_n) \neq 0\ \forall n$.
  - $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n)$.
  - $P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_m)P(B_m)}$.
- $P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$ si $P(B) \neq 0$.
- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$ si $P(C) \neq 0$.

Definición 1.3.2: Diagrama de árbol

Un árbol de probabilidad es una representación grafica de un conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio, donde cada nodo del árbol representa un evento y cada rama representa la probabilidad de que ocurra un resultado especifico.



Para usar el arbol de probabilidad, podemos seguir una ruta especifica desde el nodo raiz hasta un nodo terminal para determinar la probabilidad de que ocurra un resultado particular. Por ejemplo, para encontrar la probabilidad de que ocurra el evento B, podemos seguir la ruta de la izquierda desde el nodo raiz hasta el nodo terminal etiquetado con B y sumar las probabilidades a lo largo de esa ruta. En este caso la suma seria $P(B) = P(A) * P(B|A) + P(A^c) * P(B|A^c)$.

Definición 1.3.3: Independencia de conjuntos

Sean $A, B \in \mathcal{M}$ se dicen independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Corolario 1.3.1

Si A y B son independientes, y $P(B) \neq 0$, entonces $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$.

Corolario 1.3.2

$\emptyset$ y Ω son independientes de A $\forall A$.

Definición 1.3.4

A, B, C son independientes si y solo si:

1. Los conjuntos son independientes 2 a 2.
2. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Proposición 1.3.2

Si A y B son independientes, entonces también lo son:

1. A y B^c.
2. A^c y B.
3. A^c y B^c.

Capítulo 2

Variables aleatorias

Definición 2.0.1: Variables aleatorias

Una variable aleatoria es una función $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada elemento del espacio muestral ω asigna un numero real $X(\omega)$.
La distribución de X queda determinada por los valores posibles que puede tomar y las probabilidades con que efectivamente lo hace.

Definición 2.0.2: Variable aleatoria discreta

Una variable aleatoria X es discreta si su recorrido es numerable. Es decir, si podemos ordenar en una sucesión $R_X = \{x_1, x_2 \dots\}$ los valores posibles que puede tomar. El recorrido de X puede ser tanto finito como infinito.

Definición 2.0.3: Función de probabilidad puntual

Una función de probabilidad de una v.a. es la función $P : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ definida por $P_X(x) = P(X = x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.
La distribución de X queda entonces determinada por su función de probabilidad puntual.

Definición 2.0.4: Función de distribución de una v.a. X

Dada X v.a. en $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Corolario 2.0.1 Propiedades

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $F_X(x)$ es monótona creciente.
3. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.
4. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.
5. F_X es continua por derecha ($\lim_{x\to a^+} F_X(x) = F_X(a)$).

Teorema 2.0.1
Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple las propiedades anteriores entonces $\exists\ (\Omega, \mathcal{M}, P)$ y $\exists\ X$ variable aleatoria tal que $F_X = F$.

Proposición 2.0.1

Si defino $F_X(a^-) = \lim_{x \to a^-} F_X(x)$ entonces:

1. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
2. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$.
3. $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$.
4. $P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.
5. $P(X > a) = 1 - F_X(a)$.
6. $P(X \geq a) = 1 - F_X(a^-)$.
7. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

Lenma 2.0.1

1. Conociendo la F_X puedo calcular la probabilidad de cualquier intervalo.
2. De (7) deduzco que conociendo F_X puedo obtener P_X.
3. $P(X = a) =$"salto de F_X en el punto a".

Definición 2.0.5: Clasificación de variables aleatorias

Hay 3 tipos

1. Discretas: Una variable aleatoria X es discreta si y solo si $Rec(X)$ es finito o infinito numerable.
2. Absolutamente continuas.
3. Mixtas.

Definición 2.0.6: Modelos de Variables discretas

1. Variable Bernoulli:
   Notación: $X \sim Ber(p)$ con
   $$X = \begin{cases} 1 & \text{caso de éxito} \\ 0 & \text{caso de fracaso} \end{cases}$$
   $P = P(X = 1) = P(\text{éxito})$, toda v.a. con $Rec(X) = \{0, 1\}$ es Bernoulli donde éxito$= \{X = 1\}$.

2. Binomial $X \sim Bin(m, p)$
   Se repiten m veces pruebas independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada prueba.
   X = cantidad de éxitos en las m pruebas.
   $Rec(X) = \{1, 2, \dots, n\}$.
   $P(X = x) = C_x^m p^x (1-p)^{m-x}$.

3. Geométrica $X \sim Geo(p)$
   Se repiten pruebas independientes de Bernoulli con probabilidad p de éxito en cada prueba hasta que ocurra el primer éxito.
   X = cantidad de pruebas.
   $P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$.

4. Binomial Negativa $X \sim BinNeg(r, p)$
   Igual a la geométrica pero se realiza hasta el r-esimo éxito.
   X = canitdad de pruebas.
   $Rec(X) = \{r, r+1, r+2, \dots\}$
   $P(X = x) = C_{r-1}^{x-1} p^r (1-p)^{x-r}$.
   Si $r = 1$ queda $Geo(p)$.

Ejemplo 2.0.1 (Bernoulli)

Tiro un dado $X = \begin{cases} 1 & \text{si sale el 5} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \sim Ber(p = \frac{1}{6})$, en este caso el éxito seria que salga el 5.

Ejemplo 2.0.2 (Binomial)

Tiro un dado 20 veces:

1. Hallar P(exactamente 10 veces sale el 5).
   Defino X =cantidad de veces que sale el 5 en las 20 tiradas.
   $P(X = 10) \longrightarrow X \sim Bin(m = 20, p = \frac{1}{6})$ el éxito es que sale el 5 en una tirada, entonces
   $$P(X = 10) = C_{10}^{20} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

2. Hallar P(al menos 2 veces sale un numero par).
   Defino X = cantidad de veces que sale un numero par en las 20 tiradas, es decir $X \sim Bin(m = 20, p = \frac{1}{2})$ siendo el éxito que salga par en una tirada.
   $$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - C_0^{20} \left(\frac{1}{2}\right)^{20} - C_1^{20} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

Ejemplo 2.0.3 (Geométrica)

Se sabe que las precipitaciones máximas mensuales en diciembre superan los $200mm$ 1 vez cada 100 años, calcular P(haya que esperar al menos 5 años para que se vuelvan a superar los $200mm$)
Definimos X = cantidad de años hasta superar los $200mm$ en diciembre $\sim Geo(p = \frac{1}{100})$, entonces $P(X \geq 5) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5)$, solo queda remplazar con la formula.

Teorema 2.0.2 Primer Teorema de Continuidad

Sea $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ $(\{A_n\}_n)$. Entonces:

- Existe $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$
  Demostración: Como $a_n = P(A_n)$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ converge.

- Ademas: $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$
  Demostración: Como $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_n$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.
  También $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n)$ Con $A_1 \cup A_2 = A_1 \uplus (A_2 \backslash A_1)$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \uplus (A_2 \backslash A_1) \uplus (A_3 \backslash A_1)$
  Sea $\{B_n\}_n$ tal que $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, entonces $\cup_{n=1}^{\infty}$

Definición 2.0.7

Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F_X(z) = P(x \in z)$

Proposición 2.0.2

Propiedades de la fda:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1 \ \forall x$.
2. F_X es creciente si $x \leq y \to F_X(x) \leq F_X(y)$
3. $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
4. $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim_{x\to a^+} F_X(x) = F_X(a)$
6. $P(x = a) = F_X(a) - \lim_{x\to a^-} F_X(x)$
7. $P(x < a) = F_X(a) - P(x = a)$
8. $P(a < X \leq b) = P(x \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$, y $(a < X \leq b) = \{x \leq b\} \backslash \{x \leq a\}$.

2.1. Variables aleatorias discretas con nombre

Definición 2.1.1: Variable aleatoria Bernoulli

Diremos que $X \sim Ber(p)$ (”X”distribuye como una Bernoulli de parámetro p) con $p \in [0, 1]$ si $Rec(\mathrm{X}) = \{0, 1\}$ y $p_x(1) = p$ y $p_x(0) = 1 - p$

Que modela? Modelamos experimentos en donde hay dos resultados posibles: Éxito (E) o Fracaso (F), $X(w) \begin{cases} 1 \text{ si } w \in E \\ 0 \text{ si } w \in F \end{cases}$.

Definición 2.1.2: Variable aleatoria binomial

Diremos que $X \sim Bin(n, p)$ (con $n \in \mathbb{N}$ y $p \in (0, 1)$) si $Rec(X) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ y $p_x(k) = C^n_k p^k (1-p)^{n-k} \geq 0$.

Verificar $\sum_{k\in Rec(X)} p_x(k) = 1$

$\sum_{k=0}^n C^n_k p^k (1 - p)^{n-k} = [\cancel{p} + (1 - \cancel{p})]^n = 1^n = 1$

Que modelamos?

Hacemos m repeticiones del experimento tipo Bernoulli

$X = \#$ de Éxitos en esos m experimentos.

$P(X = k) = C^n_k p^k (1 - p)^{n-k}$, siendo C^n_k las # de formas de tener k éxitos ($n - k$ F)

Corolario 2.1.1

Si $X \sim Bin(n, p) \to X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ siendo $X_i \sim Bin(p)$ ïndependientes”.

Definición 2.1.3: Variable Aleatoria Geométrica

Diremos que $X \sim Geo(p)$ con $p \in (0,1)$ si $Rec(X) = \{1,2,3,\dots\} \in \mathbb{N}^+$ y $p_x(k) = (1-p)^{k-1}p$
$\sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = \cancel{p}\frac{1}{\cancel{1}-(\cancel{1}-\cancel{p})} = 1$
Que modela?
Se tienen repeticiones del tipo Bernoulli (con E o F) hasta que ocurre el primer Éxito $X = \#$ de repeticiones del experimento.
$P(X = k) = P(F, F, \dots, F, E) = (1-p)^k p$

Ejemplo 2.1.1

Tirar la moneda HASTA que salga cara.

Corolario 2.1.2

Perdida de memoria: Sea $X \sim Geo(p)$
$P(X > m + n / X > n) = P(x > m)$