

# Geometría y Álgebra Lineal 2

Santiago Sierra

18 de junio de 2022

## Índice

<b>1. Matriz asociada, cambio de base y semejanza</b>	<b>2</b>
1.1. Representación matricial de una transformación lineal . . . . .	2
1.2. Matriz asociada y operaciones con transformaciones . . . . .	4
1.3. Cambio de bases . . . . .	4
1.4. Transformaciones y matrices semejantes . . . . .	5
<b>2. Diagonalización</b>	<b>5</b>
2.1. Valores, Vectores y Subespacios propios . . . . .	5
2.2. Cálculo de valores y vectores propios. . . . .	6
2.3. Transformaciones y Matrices diagonalizables. . . . .	8
2.4. Teorema de Gershgorin . . . . .	10
<b>3. Forma Canónica de Jordan</b>	<b>11</b>
3.1. Subespacios invariantes . . . . .	11
3.2. Forma Canónica de Jordan . . . . .	11
3.3. Teorema de Cayley-Hamilton . . . . .	13
<b>4. Producto interno y norma</b>	<b>14</b>
4.1. Producto interno . . . . .	14
4.2. Norma . . . . .	14
4.3. Ortogonalidad y ortonormalidad . . . . .	15
4.4. Complemento ortogonal . . . . .	16
4.5. Proyección ortogonal . . . . .	17
<b>5. Transformaciones en espacios con producto interno</b>	<b>18</b>
5.1. Adjunta de una transformación . . . . .	18

# 1. Matriz asociada, cambio de base y semejanza

## 1.1. Representación matricial de una transformación lineal

Se le llama matriz asociada a  $T$  en bases  $A$  y  $B$  a la matriz que representaremos por  ${}_B(T)_A$  y cuya  $i$ -ésima columna son las coordenadas del vector  $T(v_1)$  en la base  $B$ .

Sea  $T : V \rightarrow W$  una TL,  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y  $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  una base de  $W$ .

$$\begin{aligned}T(v_1) &= a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m \\T(v_2) &= a_{12}w_1 + \dots + a_{m2}w_m \\T(v_n) &= a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m\end{aligned}$$

Es decir:

$$\text{coord}_B(T(v_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \text{coord}_B(T(v_2)) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \text{coord}_B(T(v_n)) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Definición 1.1.** Se le llama representación matricial de  $T$  en las bases  $A$  y  $B$  o matriz asociada a  $T$  en las bases  $A$  y  $B$ , a la matriz que representaremos por  ${}_B(T)_A$  y cuya  $i$ -ésima columna son las coordenadas del vector  $T(v_i)$  en la base  $B$ .

$$\begin{aligned}{}_B(T)_A &= ([\text{coord}_B T(v_1)] \quad [\text{coord}_B T(v_2)] \quad \dots \quad [\text{coord}_B T(v_n)]) \\&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Corolario 1.0.1.** La transformación lineal coordenadas es un isomorfismo entre  $V$  y  $\mathbb{K}^n$

### Ejemplo 1.1.

Consideremos la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:  $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y, x + y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Y las bases  $A = (1, 0), (0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$  y  $B = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Hallar la matriz asociada a  $T$  en dichas bases:

1. Hallamos las imágenes de los vectores de la base  $A$ :

$$\begin{aligned}T(1, 0) &= (4, 2, 1) \\T(0, 1) &= (-2, 1, 1)\end{aligned}$$

2. Calculamos las coordenadas en la base  $B$ :

$$\begin{aligned}T(1, 0) &= (4, 2, 1) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \rightarrow \begin{matrix} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{matrix}\end{aligned}$$

$$\text{coord}_B(T(1, 0)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}T(0, 1) &= (-2, 1, 1) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \rightarrow \begin{matrix} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{matrix}\end{aligned}$$

3. Tenemos que  ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Corolario 1.0.2.** Sea  $T : V \rightarrow W$ ,  $\dim(V) = n$  y  $\dim(W) = m$ , la matriz asociada tiene dimensión  $m \times n$ .

La matriz  ${}_B(T)_A$  queda completamente determinada conocidas la transformación lineal  $T$  y las bases  $A$  y  $B$  del dominio y codominio respectivamente.

Recíprocamente, dada una matriz  $M$  de tamaño  $m \times n$  y dos bases  $A$  y  $B$  de los espacios  $V$  y  $W$  respectivamente, queda completamente determinada una transformación lineal  $T$  tal que  ${}_B(T)_A = M$ .

En efecto, conociendo la matriz  $M$ , sus columnas son las coordenadas en la base  $B$  de las imágenes de los vectores de la base  $A$ , esto nos permite conocer las imágenes de los vectores de la base  $A$  y esto es suficiente para determinar  $T$ .

### Ejemplo 1.2.

Hallar la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sabiendo que  ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ , donde  $A = \{(1, 0, 1), (2, 0, 0), (0, 1, 0)\}$  es base de  $\mathbb{R}^3$  y  $B = \{(2, -1), (0, 2)\}$  es base de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\text{coord}_B(T(1, 0, 1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{coord}_B(T(2, 0, 0)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{coord}_B(T(0, 1, 0)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T(1, 0, 1) = 2(2, -1) + 1(0, 2) = (4, 0)$$

$$T(2, 0, 0) = 3(2, -1) + 0(0, 2) = (6, -3)$$

$$T(0, 1, 0) = -1(2, -1) + 2(0, 2) = (-2, 5)$$

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(2, 0, 0) + \gamma(0, 1, 0) = (\alpha + 2\beta, \gamma, \alpha) \rightarrow \begin{aligned} \alpha &= z \\ \gamma &= y \\ \beta &= \frac{x-z}{2} \end{aligned}$$

$$(x, y, z) = z(1, 0, 1) + \frac{x-z}{2}(2, 0, 0) + y(0, 1, 0)$$

Por linealidad de  $T$ :

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= zT(1, 0, 1) + \frac{x-z}{2}T(2, 0, 0) + yT(0, 1, 0) \\ &= z(4, 0) + \frac{x-z}{2}(6, -3) + y(-2, 5) \\ &= (3x - 2y + z, -\frac{3}{2}x + 5y + \frac{3}{2}z) \end{aligned}$$

**Teorema 1.1.** Sean  $V, W$  espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ ,  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $B = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  bases ordenadas de  $V$  y  $W$  respectivamente y  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal, entonces se cumple que:

$$\text{coord}_B(Tv) = {}_B(T)_A \text{coord}_A(v)$$

**Ejemplo 1.3.** Dado  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y las bases  $A = B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  tal que

$${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar  $T(2, 0, 1)$

$$(2, 0, -1) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, 1, 1) = (\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma) \rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta &= 1 \\ \gamma &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{coord}_B(T(2, 0, 1)) = {}_B(T)_A \text{coord}_A(2, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$T(2, 0, 1) = 1(1, 0, 0) + 4(1, 1, 0) + 9(1, 1, 1) = (14, 13, 9)$$

## 1.2. Matriz asociada y operaciones con transformaciones

**Teorema 1.2.** Sean dos transformaciones lineales  $T : V \rightarrow W$  y  $S : V \rightarrow W$ . Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  y  $E = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $W$ . Entonces:

$${}_E(T + S)_B = {}_E(T)_B + {}_E(S)_B$$

**Teorema 1.3.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal y  $\alpha$  un escalar de  $\mathbb{K}$ . Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  y  $E = \{w_1, \dots, w_m\}$  base de  $W$ . Entonces:

$${}_E(\lambda T)_B = \lambda {}_E(T)_B$$

**Teorema 1.4.** Sean  $U, V$  y  $W$  espacios vectoriales con  $\dim(U) = s$ ,  $\dim(V) = n$  y  $\dim(W) = t$ , y las transformaciones lineales  $S : U \rightarrow V$  y  $T : V \rightarrow W$ .

Sea  $A = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ ,  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $C = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$  bases de  $U, V$  y  $W$  respectivamente. Entonces la matriz asociada a la composición  $T \circ S$  es el producto de las matrices asociadas.

$${}_C(T \circ S)_A = {}_C(T)_B {}_B(S)_A$$

Observación: Sea  $T : V \rightarrow W$  un isomorfismo,  $T^{-1} : W \rightarrow V$  su inversa,  $B$  y  $B'$  bases de  $V$  y  $W$  respectivamente. Como  $T \circ T^{-1} = Id_W$  se cumple:

$${}_{B'}(T)_B {}_B(T^{-1})_{B'} = {}_{B'}(Id_W)_{B'} = I$$

También  $T \circ T^{-1} = Id_V$  por lo que

$${}_B(T^{-1})_{B'} {}_{B'}(T)_B = {}_B(T)_B = I$$

Por lo que deducimos que la matriz asociada a la transformación inversa es la inversa de la matriz asociada a la transformación:

$${}_{B'}(T)_B = A \rightarrow {}_B(T^{-1})_{B'} = A^{-1}$$

Observar también  $\dim(V) = \dim(W)$

## 1.3. Cambio de bases

Sean  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $A' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$  del espacio  $V$  e  $I : V \rightarrow V$  la transformación identidad.

**Definición 1.2.** Llamaremos matriz de cambio de base de la base ("vieja")  $A$  a la base ("nueva")  $A'$  a la matriz:

$${}_{A'}(I)_A$$

**Teorema 1.5.** Sean  $A$  y  $A'$  bases del espacio vectorial  $V$ . Entonces

$$coord_{A'}(v) = {}_{A'}(I)_A coord_A(v)$$

**Teorema 1.6.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo  $\mathbb{K}$  y  $A, A'$  bases de  $V$  y  $B, B'$  bases de  $W$  y  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces:

$${}_{B'}(T)_{A'} = {}_{B'}(I_W)_B {}_B(T)_A {}_A(I_V)_{A'}$$

Donde  $I_V : V \rightarrow V$  y  $I_W : W \rightarrow W$  son las transformaciones lineales identidad en  $V$  y  $W$  respectivamente.

**Teorema 1.7.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ ,  $A$  y  $A'$  bases de  $V$ ,  $I : V \rightarrow V$  la transformación lineal identidad. Entonces:

$$1. \quad {}_{A'}(I)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ (Matriz identidad)}$$

$$2. \quad {}_{A'}(I)_A \text{ es invertible y } [{}_{A'}(I)_A]^{-1} = {}_A(I)_{A'}$$

## 1.4. Transformaciones y matrices semejantes

**Definición 1.3.** Operador lineal.

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . Llamaremos operador en  $V$  a toda transformación lineal  $T : V \rightarrow V$ ; o sea, operador es una transformación lineal de un espacio vectorial en si mismo.

**Definición 1.4.** Sean  $A$  y  $B \in M(\mathbb{K})_{n \times n}$ . Diremos que  $A$  y  $B$  son semejantes cuando existe  $P \in M(\mathbb{K})_{n \times n}$  invertible tal que  $B = P^{-1}AP$ .

**Teorema 1.8.** Dadas  $A$  y  $B \in M(\mathbb{K})_{n \times n}$ . Las matrices  $A$  y  $B$  son semejantes si y solo si son matrices asociadas a un mismo operador  $T$  en  $V$ .

**Teorema 1.9.** Sean  $A$  y  $B$  matrices semejantes en  $M(\mathbb{K})_{n \times n}$ . Entonces:

1.  $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$
2.  $\text{traza}(A) = \text{traza}(B)$
3.  $\det(A) = \det(B)$

**Corolario 1.9.1.** No vale el recíproco de la proposición anterior, pues para  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Se cumple que  $\text{rango}(A) = \text{rango}(B) = 2$ ,  $\text{traza}(A) = \text{traza}(B) = 2$  y  $\det(A) = \det(B) = 1$ .

Sin embargo, no existe  $P$  invertible tal que  $B = P^{-1}AP$ , es decir,  $A$  y  $B$  no son semejantes. Esto lo podemos observar ya que  $A$  es la matriz asociada al operador identidad y  $B$  es la matriz asociada a operadores que no son la identidad.

## 2. Diagonalización

### 2.1. Valores, Vectores y Subespacios propios

**Definición 2.1.** Valor y vector propio.

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el conjunto de escalares  $\mathbb{K}$  y  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal.

Llamamos vector propio de  $T$  asociado al valor propio  $\lambda \in \mathbb{K}$  a todo vector  $v \neq \vec{0}$  tal que  $T(v) = \lambda v$ .

**Corolario 2.0.1.**

- El vector nulo se excluye de la definición anterior, pues  $T(\vec{0}) = \lambda \vec{0} = \vec{0}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$  y consecuentemente todo escalar resultaría valor propio.
- Dada una transformación lineal, los valores propios son números del cuerpo  $\mathbb{K}$ , sobre el que está definido el espacio vectorial.
- Si  $v$  es vector propio de  $T$  asociado al valor propio  $\lambda$ , entonces para cualquier escalar  $\alpha$  no nulo,  $\alpha v$  también lo es, pues:

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

**Definición 2.2.** Subespacio propio.

El subespacio  $S_\lambda$  es llamado subespacio propio asociado al valor propio  $\lambda$ .

Sea  $T$  y  $\lambda$  un valor propio de  $T$ , definimos el subespacio propio como

$$S_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

En estas condiciones,

$$S_\lambda = N(T - \lambda Id)$$

Propiedades de los valores propios:

1. Si  $T$  es invertible y  $\lambda$  un valor propio de  $T$ , entonces  $\lambda^{-n}$  es valor propio de  $T^{-n} \forall n \in \mathbb{N}$ .
2. Si  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , entonces  $\lambda^n$  es valor propio de  $T^n \forall n \in \mathbb{N}$ .
3. 0 es valor propio de  $T$  si y solo si  $T$  no es invertible.
4.  $A$  y  $A^T$  tienen igual polinomio característico, valores propios y vectores propios.
5. La suma de los valores propios es igual a la *traza*( $A$ ).
6. El producto de los valores propios es igual al *det*( $A$ ).

## 2.2. Cálculo de valores y vectores propios.

**Definición 2.3.** Polinomio, ecuación y raíces característica.

Se llama polinomio característico de una matriz cuadrada  $A$  al polinomio  $X_A(\lambda)$ . Se le llama ecuación característica a  $X_A(\lambda) = 0$ , y raíces características de  $A$  a todas las soluciones del polinomio. Siendo  $X_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$

**Corolario 2.0.2.** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ , su polinomio característico es de grado  $n$  en  $\lambda$ , y su termino independiente coincide con del  $\det(A)$ .

Calcular los valores propios de una matriz  $A = {}_B(T)_B$  es hallar las raíces del polinomio característico. Una vez se obtenidos los valores propios, podemos hallar los vectores propios con el sistema de ecuaciones  $(A - \lambda Id) \vec{v} = 0$ .

**Corolario 2.0.3.** Sean  $A, B \in M(\mathbb{R})_{n \times n}$  dos matrices semejantes.

Entonces  $X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$ , por lo tanto, tienen iguales valores propios.

Observar que esto es una condición necesaria, pero no suficiente para asegurar la semejanza entre matrices.

**Definición 2.4.** Polinomio característico de un operador lineal.

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita,  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal. Llamamos polinomio característico de  $T$  al polinomio característico de cualquier matriz asociada a  $T$ .

De misma manera se define la ecuación características raíces características de un operador.

Lo denotamos por  $X_T$ .

**Teorema 2.1.** Sea  $A = {}_B(T)_B$ , la matriz asociada en la base  $B$  a la transformación lineal  $T : V \rightarrow V$ . Entonces  $v$  es vector propio de  $T$  con valor propio  $\lambda$  si y solo si las coordenadas de  $v$  en la base  $B$  son una solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda Id) \text{coord}_B(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Teorema 2.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ ,  $T : V \rightarrow V$  un operador lineal;  $B$  una base de  $V$  y  $A = {}_B(T)_B$ . Entonces  $\lambda$  es valor propio de  $T$  si y solo si  $\lambda \in \mathbb{K}$  y  $\det(A - \lambda Id) = 0$ .

Es decir, los valores propios de la matriz asociada y del operador lineal se comparten.

**Ejemplo 2.1.** Practico 2 Ejercicio 3

Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  y la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  ${}_B(T)_B = A$ , donde  $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ .

1. Hallar los valores propios y los subespacios propios de  $A$ .

2. Hallar los valores propios y los subespacios propios de  $T$ .

1.

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 4) \rightarrow \lambda = \pm 2 \text{ Valores propios.}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -2x + 2y = 0 \rightarrow x = y$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\} = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\} \text{ Subespacio propio.}$$

$$S_2 \xrightarrow{b} (x, x, z) = x \underbrace{(1, 1, 0)}_{\text{Vector propio}} + z \underbrace{(0, 0, 1)}_{\text{Vector propio}}$$

$$S_{-2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} z = 0 \\ x = -y \end{matrix}$$

$$S_{-2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y \wedge z = 0\} = \{(1, -1, 0)\} \text{ Subespacio propio.}$$

$$S_{-2} \xrightarrow{b} (x, -x, 0) = x \underbrace{(1, -1, 0)}_{\text{Vector propio}}$$

2. Sabemos que se comparten los valores propios de la matriz asociada y de la transformación lineal, por lo tanto también son  $\lambda = \pm 2$ .

Y tenemos por el Teorema 2.1 que:

$$\text{coord}_B(v_1) = (1, 1, 0) \rightarrow v_1 = 1(1, 0, 0) + 1(1, 1, 0) + 0(1, 1, 1) = (2, 1, 0)$$

$$\text{coord}_B(v_2) = (0, 0, 1) \rightarrow v_2 = 0(1, 0, 0) + 0(1, 1, 0) + 1(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

$$\text{Por lo tanto, } S_2 = \{(2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$\text{coord}_B(v_3) = (1, -1, 0) \rightarrow v_3 = 1(1, 0, 0) - 1(1, 1, 0) + 0(1, 1, 1) = (0, -1, 0)$$

$$\text{Por lo tanto, } S_{-2} = \{(0, -1, 0)\}$$

### 2.3. Transformaciones y Matrices diagonalizables.

**Definición 2.5.** Transformaciones lineales diagonalizables

Sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal. Se le llama diagonalizable si existe alguna base  $B$  tal que la matriz  ${}_B(T)_B$  es una matriz diagonal, es decir, una matriz en la que todos los términos fuera de su diagonal principal son nulos.

**Definición 2.6.** Matrices diagonalizables Una matriz cuadrada se llama diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por:  $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Si se elige como base de  $\mathbb{R}^3$  a  $B' = \{(0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 0, -1)\}$  resulta:

$$T(0, 1, -1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

O sea,  $T(0, 1, -1) = 4(0, 1, -1) + 0(0, 0, 1) + 0(1, 0, -1)$ .

Análogamente tenemos:

$$T(0, 0, 1) = (0, 0, 2) = 0(0, 1, -1) + 2(0, 0, 1) + 0(1, 0, -1)$$

$$T(1, 0, -1) = (3, 0, -3) = 0(0, 1, -1) + 0(0, 0, 1) + 3(1, 0, -1)$$

Entonces  ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , por lo tanto  $T$  es diagonalizable.

**Teorema 2.3.**  $T$  es diagonalizable si y solo si existe alguna base de  $V$  constituida por vectores propios de  $T$ . En este caso la matriz asociada en una base de vectores propios (tomada como base de partida y llegada) es diagonal.

**Corolario 2.3.1.** Si  $T$  es diagonalizable, su forma diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

es única a menos del orden de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  que son los valores propios de  $T$ .

**Teorema 2.4.** Una matriz  $A \in M_{n \times n}$  es diagonalizable si tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes.

**Teorema 2.5.** Sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal;  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  valores propios dos a dos distintos; y  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectores propios correspondientes a cada uno de los valores propios anteriores. Entonces,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es un conjunto linealmente independiente.

**Corolario 2.5.1.** Si  $\dim(V) = n$ ,  $T : V \rightarrow V$  tiene  $n$  valores propios todos distintos entonces  $T$  es diagonalizable.

De todas maneras, el recíproco de lo anterior es falso, puede ser diagonalizable teniendo valores propios iguales, un contra ejemplo es el siguiente.



**Ejemplo 2.3.** ¿Es diagonalizable la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ ?

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(7-\lambda)$$

Entonces  $\lambda = 2$  raíz doble  
 $\lambda = 7$

Para  $\lambda = 2$ , los vectores propios asociados  $(x, y, z)$  cumplen la ecuación  $y = 0$ .

Por lo tanto  $S_2 = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$

Para  $\lambda = 7$  los vectores propios verifican el sistema

$$\begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \rightarrow x = -y = z$$

Por lo tanto  $S_7 = \{(x, -x, x) \in \mathbb{R}^3\}$ .

Resulta entonces que  $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 1)\}$  es una base de vectores propios de  $A$ , y por lo tanto  $A$

resulta diagonalizable. Una forma diagonal es  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

**Definición 2.7.** Multiplicidad algebraica.

Sea  $\lambda$  un valor propio de  $A = {}_B(T)_B$ , la multiplicidad algebraica es el número de factores  $(\lambda - t)$  en el polinomio característico tras la factorización.

Lo denotamos como  $ma(\lambda)$

**Ejemplo 2.4.** Sea  $X_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 3)^2$ ,  $ma(1) = 1$ ,  $ma(4) = 1$ ,  $ma(3) = 2$

**Definición 2.8.** Multiplicidad geométrica.

La multiplicidad geométrica de un valor propio es la dimensión del espacio propio asociado.

Lo denotamos como  $mg(\lambda)$ , y lo podemos calcular como,  $mg(\lambda) = n - rango(A - \lambda Id)$ .

Siendo  $A \in M_{n \times n}$

**Corolario 2.5.2.** Para cualquier valor propio  $\lambda$  se cumple que  $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda) \leq n$

**Teorema 2.6.**  $T$  es diagonalizable si y solo si los valores propios pertenecen al cuerpo y además se cumple que  $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ .

**Teorema 2.7.** Si una matriz  $A$  es diagonalizable, existe  $P$  invertible (cuyas columnas son los vectores propios de  $A$ ) tal que  $P^{-1}AP = D \rightarrow A = PDP^{-1}$ , donde  $D$  es una matriz diagonal.

Volviendo al ejemplo anterior, podemos probar si  $A = PDP^{-1}$ , siendo  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Teorema 2.8.** Para hallar  $A^n$  basta calcular  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

Siendo  $D^n$  de la forma  $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{pmatrix}$

## 2.4. Teorema de Gershgorin

**Definición 2.9.** Dada una matriz  $A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{C})_{n \times n}$  llamaremos  $r_i$  a la suma de los módulos de las entradas de la fila  $i$ -ésima de  $A$ , exceptuando la entrada ubicada en la diagonal.

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Sea  $C_i$  el disco de centro  $a_{ii}$  y radio  $r_i$

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

**Teorema 2.9.** Teorema de Gershgorin

Sea  $A \in M(\mathbb{C})_{n \times n}$

1. Si  $\lambda$  es valor propio de  $A$  entonces  $\lambda \in \cup_i C_i$ .  
Es decir, cada valor propio se encuentra en algún círculo  $C_i$
2. Si  $M = C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_m}$  es disjunta con la unión de los restantes discos, entonces en  $M$  hay exactamente  $m$  valores propios de  $A$ .

**Corolario 2.9.1.** Como  $A$  y  $A^T$  comparten los valores propios, podemos analizar tanto las filas como las columnas para aproximar mejor los valores propios.

**Ejemplo 2.5.** Consideremos  $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$ .

Para esta matriz como  $a_{11} = 10 + 0i$  el círculo va a ser de centro  $(10,0)$ , en un caso que sea de la forma  $a_{nn} = x + yi$  el círculo va a ser de centro  $(x, y)$ ,  $r_1 = |1| + |-1| = 2$ ,  $a_{22} = 25$ ,  $r_2 = 3$ ,  $a_{33} = 32$  y  $r_3 = 3$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\} \\ C_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 3\} \\ C_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z - 32| \leq 3\} \end{aligned}$$

En este caso como los centros de todos los círculos están sobre el eje real, todos los valores propios van a ser reales.

Tenemos que los valores propios van a estar en los intervalos  $[8, 12]$ ,  $[22, 28]$ ,  $[29, 35]$ , y como los círculos son disjuntos, tenemos que son 3 valores propios todos distintos, por lo que tenemos que  $A$  es diagonalizable.

### 3. Forma Canónica de Jordan

#### 3.1. Subespacios invariantes

**Definición 3.1.** Dado un operador  $T : V \rightarrow V$  decimos que un subespacio  $W$  es invariante si  $T(W) \subset W$ . Es decir si hay un vector  $v \in W$ , entonces  $T(v) \in W$

**Corolario 3.0.1.** Sean  $V$  un espacio de dimensión finita,  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal y  $W$  un subespacio invariante. Entonces existe una base  $B$  de  $V$  tal que

$${}_B(T)_B = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

**Corolario 3.0.2.** Si  $V = U \oplus W$  y ambos subespacios son invariantes, entonces existe una base donde

$${}_B(T)_B = \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

El caso mas sencillo de subespacio invariante es cuando  $v \neq 0$  es vector propio, en ese caso el subespacio generado por  $v$  es invariante.

#### 3.2. Forma Canónica de Jordan

**Definición 3.2.** Sub-bloque de Jordan.

Se le llama sub-bloque de Jordan de un valor propio  $\lambda$  y tamaño  $k \times k$  de la forma

$$SJ_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 3.1.** El sub-bloque de Jordan de tamaño 3 y valor propio 2 es:

$$SJ_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Definición 3.3.** Bloque de Jordan.

Se llama bloque de Jordan de tamaño  $m \times m$  y valor propio  $\lambda$  a una matriz cuadrada  $m \times m$  por

- Uno o mas bloques de Jordan de distintos o igual tamaño con el mismo valor propio.
- Ceros en los restantes términos del ejemplo del bloque.

**Ejemplo 3.2.** Un bloque de Jordan de tamaño 5 y valor propio 2 puede ser:

$$J(2) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.1.** Forma Canónica de Jordan. Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$  y  $T$  un operador lineal tal que su polinomio característico

$$X_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$$

Entonces existe una base  $B$  de  $V$  tal que

$${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

Donde cada bloque  $J(\lambda_i)$  es un bloque de Jordan de valor propio  $\lambda_i$ , cuyo tamaño es su magnitud algebraica.

**Corolario 3.1.1.** Supongamos que  $\lambda$  es un valor propio de una transformación lineal  $T$ . Entonces la cantidad de sub-bloques de Jordan de valor propio  $\lambda$  es igual a la multiplicidad geométrica de  $\lambda$ .

Un sub-bloque debe también terminar siempre con una columna correspondiente a un vector propio, y por lo tanto la cantidad de sub-bloques coincide con la cantidad de vectores propios que existan en la base  $B$ .

**Ejemplo 3.3.** Hallar bases de Jordan

Sea un operador lineal de  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz asociada en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable.

Sus valores propios son 2 y 7,  $S_2 = \{(1, 0, 0)\}$  y  $S_7 = \{(1, -1, 1)\}$  y  $ma(2) = 2$ . En consecuencia, la forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Para calcular una base de Jordan  $\{v_1, v_2, v_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  asociada al operador, observemos que  $Av_1 = 2v_1 + v_2$ ,  $Av_2 = 2v_2$  y  $Av_3 = 7v_3$ . Por lo tanto  $v_2$  y  $v_3$  son vectores propios asociados a 2 y 7 respectivamente, por lo cual podemos elegir  $v_2 = (1, 0, 0)$  y  $v_3 = (1, -1, 1)$ . Ahora podemos decir que  $v_1 = (x, y, z)$ . Como sabemos que  $Av_1 = 2v_1 + v_2$  por lo tanto  $(A - 2I)v_1 = v_2$ , entonces:

$$(A - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema tenemos que  $v_1 = (x, 0, 1)$  con  $x \in \mathbb{R}$ , entonces podemos elegir  $v_1 = (0, 0, 1)$ , por lo cual tenemos que la base de Jordan  $B$  resulta  $B = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, -1, 1)\}$ .

### 3.3. Teorema de Cayley-Hamilton

Un operador  $T$  o una matriz  $A$  verifican su polinomio característico, esto significa que, ya sea el operador  $X_T(T)$  es el operador nulo o que  $X_A(A)$  es la matriz nula.

**Teorema 3.2.** Sea  $T : V \rightarrow V$  un operador,  $\lambda$  un valor propio,  $v$  un vector propio asociado a  $\lambda$  y  $P(x)$  un polinomio. Entonces se cumple que el vector  $v$  es vector propio del operador  $P(T)$  con valor propio  $P(\lambda)$ .

**Corolario 3.2.1.** Sea  $P(x) = X_T(x)$  el polinomio característico de  $T$ , y  $\mu$  un valor propio y  $v$  un vector asociado a  $\mu$ , entonces:

$$X_T(T)(v) = X_T(\mu)v = 0v = 0$$

Para transformaciones no diagonalizables hay que tener mas cuidado. Podemos observar que si  $\mu$  es valor propio, el polinomio característico se factoriza como

$$X_T(x) = (x - \mu)P(x)$$

Por lo tanto,  $X_T(T) = (T - \mu Id)P(T)$ . Como  $v$  es vector propio asociado a  $\mu$ , tenemos

$$X_T(T)(v) = P(T)(Tv - \mu v) = 0$$

Cuando  $v$  no es vector propio, debemos proceder de otra manera.

**Corolario 3.2.2.** Dados un operador  $T$  en  $V$  y  $v$  un vector no nulo en  $V$ . Entonces existe  $k \in \mathbb{N}$  que cumple que

$$\begin{array}{ll} \{v, T(v), \dots, T^k(v)\} & \text{Es linealmente independiente} \\ \{v, T(v), \dots, T^k(v), T^{k+1}(v)\} & \text{Es linealmente dependiente} \end{array}$$

**Definición 3.4.** Notamos con  $[v]_T$  al subespacio generador por  $\{v, T(v), \dots, T^k(v)\}$ .

**Corolario 3.2.3.** Sea  $T^{k+1}(v) = \sum_{i=0}^k a_i T^i(v)$ . El subespacio  $[v]_T$  es invariante por  $T$  y la matriz asociada a  $T$  en la base  $\{v, Tv, \dots, T^k v\}$  del subespacio es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_k \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.3.** Cayley-Hamilton.

Sean  $T : V \rightarrow V$  un operador en un espacio de dimensión finita  $V$  y  $X_T(x)$  el polinomio característico de  $T$ . Entonces el operador  $X_T(T)$  es el operador nulo.

## 4. Producto interno y norma

### 4.1. Producto interno

**Definición 4.1.** Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, una función de dos variables

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$$

es un producto interno en  $V$  si verifica:

1.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V.$
2.  $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$
3.  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} \quad \forall u, v \in V$ , la barra indica el complejo conjugado.
4.  $\langle u, u \rangle$  real y  $\langle u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in V$ , y  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

**Corolario 4.0.1.** La propiedad 1, dice que la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es aditiva en la primera componente (se sobrentiende que la segunda componente permanece fija).

**Corolario 4.0.2.** La propiedad 2, dice que la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es homogénea en la primera componente, mientras que la segunda permanece fija.

Cuando se cumplen las propiedades 1 y 2 se dice que la función  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es lineal en la primera componente.

**Corolario 4.0.3.** Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno en el  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial  $V$  se tiene que

- a)  $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle \quad \forall u, v, w \in V$
- b)  $\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$
- c)  $\langle u, \vec{0} \rangle = \langle \vec{0}, u \rangle = 0 \quad \forall u \in V$

**Definición 4.2.** Definimos el producto interno usual de un cuerpo  $\mathbb{K}^n$  como

$$\langle u, v \rangle = u_1 \overline{v_1} + u_2 \overline{v_2} + \cdots + u_n \overline{v_n}$$

### 4.2. Norma

**Definición 4.3.** Sea  $V$  un espacio vectorial. Una norma en  $V$  es una función tal que a cada vector  $v$  le hace corresponder un real indicado como  $\|v\|$ , y cumple:

1.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V.$
2.  $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  Desigualdad triangular.

**Teorema 4.1.** Todo espacio vectorial con producto interno es un espacio vectorial normado definiendo la norma de la siguiente manera:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

A esta norma la llamamos norma inducida por el producto interno.

**Corolario 4.1.1.** El recíproco no es cierto, es decir, hay normas que no son normas inducidas por ningún producto interno en  $V$ .

**Corolario 4.1.2.** En el caso que se considere el espacio ordinario, la norma de un vector referida al producto escalar coincide con su módulo.

**Teorema 4.2.** Desigualdad de Cauchy-Schwarz Sea  $V$  un espacio con producto interno, para todo par de vectores  $v, w \in V$  se tiene

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$$

donde la norma es la inducida por el producto interno. La igualdad vale si y solo si  $\{v, w\}$  es linealmente independiente.

**Corolario 4.2.1.** Si  $V$  es un espacio vectorial real con producto interno, y  $v, w$  son dos vectores no nulos, la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite asegurar que

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq 1$$

por ello se define el ángulo  $\alpha$  entre los vectores  $v, w$  por  $\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$

**Corolario 4.2.2.** Desigualdad triangular

Si  $V$  es un espacio vectorial con producto interno  $v, w \in V$ , se tiene  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ .

### 4.3. Ortogonalidad y ortonormalidad

**Definición 4.4.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno. Dados  $v, w \in V$ , se dice que  $v$  y  $w$  son ortogonales, y se escribe como  $v \perp w$ , cuando  $\langle v, w \rangle = 0$ .

Esta definición coincide con la ortogonalidad en el espacio ordinario, trabajando con el producto interno usual.

**Definición 4.5.** Sea  $A \subset V$ . Se dice que  $A$  es un conjunto ortogonal si los elementos de  $A$  son ortogonales dos a dos, o sea,  $\forall v, w \in A, v \neq w$  se cumple  $v \perp w$ .

Si además  $\|v\| = 1 \forall v \in A$  se dice que  $A$  es un conjunto ortonormal.

**Corolario 4.2.3.**

- $0 \perp v \forall v \in V$ .
- $v \perp v \Leftrightarrow v = 0$ .
- Si  $A$  es un conjunto ortogonal y  $\vec{0} \notin A$  el conjunto:

$$\left\{ \frac{1}{\|v\|} v / v \in A \right\}$$

es ortonormal. A este proceso se le llama normalizar.

**Teorema 4.3.** Todo conjunto ortogonal que no tiene el vector nulo es linealmente independiente. Sea  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con producto interno y  $\{v_1, \dots, v_r\}$  un conjunto ortogonal tal que  $v_i \neq \vec{0}$  con  $i = 1, \dots, r$ . Entonces  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es linealmente independiente.

**Teorema 4.4.** Pitágoras.

Sea  $V$  un producto interno y  $\{v_1, \dots, v_r\}$  un conjunto ortogonal. Entonces  $\|\sum_{i=1}^r v_i\|^2 = \sum_{i=1}^r \|v_i\|^2$

**Teorema 4.5.** Método de ortonormalización de Gram-Schmidt.

Sean  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $\{v_1, \dots, v_k\}$  una base de  $V$ . Entonces existe  $B = \{y_1, \dots, y_n\}$  tal que  $B$  es una base ortonormal de  $V$  y  $[v_1, \dots, v_k] = [y_1, \dots, y_k] \forall k = 1, \dots, n$ .

Método:

Tomamos  $u_1 = v_1$ , entonces  $[v_1] = [u_1]$ .

Sea  $u_2 = v_2 - cu_1$  donde

$$c = \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2}$$

Generalizando decimos que

$$u_k = v_k - c_{k-1}u_{k-1} - \dots - c_1u_1$$

donde  $c_j = \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \forall k = 2, \dots, n$ , se obtiene un sistema  $\{u_1, \dots, u_n\}$  ortogonal tal que  $[u_1, \dots, u_n] = [v_1, \dots, v_k] \forall k = 1, \dots, n$ .

Finalmente tomando  $y_j = \frac{1}{\|u_j\|}u_j$  se tiene que  $B = \{y_1, \dots, y_n\}$  en condiciones adecuadas.

**Corolario 4.5.1.** Todo espacio vectorial de dimensión finita con producto interno tiene una base ortonormal.

**Corolario 4.5.2.** Este método es también aplicable a subespacios vectoriales.

**Teorema 4.6.** Propiedades de las bases ortonormales.

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base ortonormal. Entonces:

1. Si  $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$  y  $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$  entonces  $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}$ .
2.  $\forall v \in V$  se tiene que:  $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$ .
3.  $\forall v \in V$  se tiene que:  $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2$ .

**Corolario 4.6.1.** Para hallar un producto interno para el cual  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base ortonormal primero recordemos que todos sus vectores son ortogonales entre ellos y además  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ , con esto, llamamos

$$\begin{aligned} v &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \\ w &= (y_1, y_2, \dots, y_n) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n \end{aligned}$$

Luego, se despeja  $\alpha_i, \beta_i$  respectivamente sobre  $x_i$  e  $y_i$ , para después hacer

$$\langle v, w \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \langle (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n), (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) \rangle = \langle \alpha_1 v_1, \beta_1 v_1 \rangle + \dots + \langle \alpha_n v_n, \beta_n v_n \rangle$$

Por las propiedades que comente al principio, nos queda  $\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n$ , aquí deshacemos la sustitución cambiando  $\alpha$  y  $\beta$  por sus valores respecto a  $x_i$  e  $y_i$ , para así hallar el producto interno.

## 4.4. Complemento ortogonal

**Definición 4.6.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno, si  $S \subset V$ . Llamamos complemento ortogonal de  $S$  al conjunto

$$\begin{aligned} S^\perp &= \{v \in V : v \perp s \quad \forall s \in S\} \\ &= \{v \in V : \langle v, s \rangle = 0 \quad \forall s \in S\} \end{aligned}$$

Note que no se pide que  $S$  sea un subespacio vectorial de  $V$ .

**Corolario 4.6.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $S$  un sub-conjunto de  $V$ . Entonces  $S^\perp$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

**Corolario 4.6.3.** Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y  $B = \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$  es una base de un subespacio  $S$  entonces  $v \in S^\perp \Leftrightarrow v \perp s_i \forall i = 1, 2, \dots, r$ .

**Teorema 4.7.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita, y  $W$  un subespacio de  $V$ :

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$$



**Corolario 4.7.1.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno,  $A, B$  un subconjunto y  $S$  un sub-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces  $V = S \oplus S^\perp$ .

Propiedades:

- Si  $A \subset B \Leftrightarrow B^\perp \subset A^\perp$ .
- $A^\perp = [A]^\perp$ .
- $A \subset (A^\perp)^\perp$ .
- $S = (S^\perp)^\perp$ .
- $(S + W)^\perp = S^\perp \cap W^\perp$ .
- $(S \cap W)^\perp = S^\perp + W^\perp$ .

## 4.5. Proyección ortogonal

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno,  $S$  un subespacio tal que  $V = S \oplus S^\perp$ . Eso implica que dado  $v \in V$  existen y son únicos  $v_S \in S$ ,  $v_{S^\perp}$  tales que

$$v = v_S + v_{S^\perp}$$

**Definición 4.7.** Dado  $v \in V$  llamamos proyección ortogonal de  $v$  sobre el subespacio  $S$  al vector  $P_S(v) = v_S$ . Si  $V$  tiene dimensión finita y  $B_S = \{s_1, \dots, s_k\}$  es una base ortonormal de  $S$ , entonces

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^k \langle v, s_i \rangle s_i ; s_i \in S$$

**Corolario 4.7.2.** La definición de proyección ortogonal no depende de la base elegida.

Como vimos en el corolario 4.6.3;  $P_S(v)$  es el único vector de  $S$  tal que sumado con un vector de  $S^\perp$  da  $v$ .

**Corolario 4.7.3.** Como  $V = S \oplus S^\perp$  podemos hallar la proyección, usando que la diferencia  $v - s$  esté en  $S^\perp$ . Es más si se tiene una proyección, se tiene la proyección sobre el complemento ortogonal como lo indica el siguiente corolario.

**Corolario 4.7.4.** Del mismo corolario 4.6.3, observando que  $(S^\perp)^\perp = S$  se desprende que:

$$v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$$

**Teorema 4.8.** Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno y  $S$  un sub-espacio de dimensión finita.

Entonces:  $\|v - P_S(v)\| \leq \|v - s\| \forall s \in S$ .

**Corolario 4.8.1.** El vector  $P_S(v)$  es el vector de  $S$  que mejor se aproxima a  $v$ , en el sentido del teorema anterior. En el sentido de que  $\|v - P_S(v)\|$  hace mínima a  $\|v - s\|$ . Es decir, si queremos calcular la mínima, basta calcular  $\|v - P_S(v)\|$ .

**Corolario 4.8.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno,  $S \subset V$  un subespacio vectorial y  $P_S(v)$  la proyección ortogonal de  $v$  sobre  $S$ ; es decir  $P_S(v)$  es el único vector que verifica que  $P_S(v) \in S$  y  $v - P_S(v) \in S^\perp$ . Se cumple:

1.  $P_S(s) = s \forall s \in S$ .
2.  $P_S(v) = \vec{0} \forall v \in S^\perp$ .
3.  $P_S^2 = P_S \circ P_S = P_S$ .
4. La función  $P_S : V \rightarrow V$  dada por  $v \xrightarrow{P_S} P_S(v)$  es una transformación lineal.
5.  $\text{Im}(P_S) = S$  y  $\text{Ker}(P_S) = S^\perp$ .
6.  $\|v\|^2 = \|P_S(v)\|^2 + \|P_{S^\perp}(v)\|^2 \forall v \in V$ .
7.  $\|P_S(v)\| \leq \|v\|$ .
8.  $\langle v, P_S(v) \rangle = \|P_S(v)\|^2 \forall v \in V$ .

## 5. Transformaciones en espacios con producto interno

**Corolario 5.0.1.** Sea  $V$  un espacio con producto interno. Si  $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle$  para todo  $v \in V$  entonces  $w_1 = w_2$ .

**Teorema 5.1.** Teorema de Riesz

Dada  $T : V \rightarrow \mathbb{K}$  lineal y  $V$  tal que si  $M$  es un subespacio de  $V$ , se cumple que  $V = M \oplus M^\perp$ , entonces existe un único  $w \in V$  tal que

$$T(v) = \langle v, w \rangle$$

### 5.1. Adjunta de una transformación

**Teorema 5.2.** Sean  $V$  y  $W$  espacios con producto interno y  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Entonces existe una única transformación lineal  $T^* : W \rightarrow V$  tal que:

$$\langle T(v), w \rangle_W = \langle v, T^*(w) \rangle_V$$

**Definición 5.1.** La transformación  $T^*$  es llamada la adjunta de  $T$ .

**Corolario 5.2.1.** Propiedades del adjunto:

1.  $(T + S)^* = T^* + S^*$ .
2.  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$ .
3.  $(TS)^* = S^* T^*$ .
4.  $T$  es invertible si y sólo si  $T^*$  lo es y  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .
5.  $(T^*)^* = T$ .

**Corolario 5.2.2.** Sean  $V$  y  $W$  espacios con producto interno,  $B$  y  $C$  bases ortonormales de  $V$  y  $W$  respectivamente. Entonces:

$${}_B(T^*)_C = \overline{{}_C(T)_B}^T$$