Geometría y Álgebra Lineal 2

Santiago Sierra

12 de julio de 2022

Índice

1. Matriz asociada, cambio de base y semejanza

1.1. Representación matricial de una transformación lineal

Se le llama matriz asociada a T en bases A y B a la matriz que representaremos por ${}_B(T)_A$ y cuya i-esima columna son las coordenadas del vector $T(v_1)$ en la base B.
Sea $T : V \to W$ una TL, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una base de W.

$$\begin{array}{l} T(v_1) = a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + \ldots + a_{m2}w_m \\ T(v_n) = a_{1m}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m \end{array}$$

Es decir:

$$coord_B(T(v_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, coord_B(T(v_2)) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, coord_B(T(v_n)) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición 1.1. Se le llama representación matricial de T en las bases A y B o matriz asociada a T en las bases A y B, a la matriz que representaremos por ${}_B(T)_A$ y cuya i-esima columna son las coordenadas del vector $T(v_i)$ en la base B.

$$\begin{aligned} {}_B(T)_A &= \big([\mathrm{coord}_B\, T(v_1)] \quad [\mathrm{coord}_b\, T(v_2)] \quad \cdots \quad [\mathrm{coord}_B\, T(v_n)]\big) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Corolario 1.0.1. La transformación lineal coordenadas es un isomorfismo entre V y $\mathbb{K}^n$

Ejemplo 1.1.
Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que: $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y, x + y) \ \ \forall(x, y) \in \mathbb{R}$.
Y las bases $A = (1, 0), (0, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ y $B = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.
Hallar la matriz asociada a T en dichas bases:

1. Hallamos las imágenes de los vectores de la base A:
   $T(1, 0) = (4, 2, 1)$
   $T(0, 1) = (-2, 1, 1)$

2. Calculamos las coordenadas en la base B:
   $$T(1, 0) = (4, 2, 1) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \to \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{array}$$
   $$coord_B(T(1, 0)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   $$T(0, 1) = (-2, 1, 1) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1) \to \begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{array}$$

3. Tenemos que ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Corolario 1.0.2. Sea $T : V \to W$, $dim(V) = n$ y $dim(W) = m$, la matriz asociada tiene dimensión $m \times n$.

La matriz ${}_B(T)_A$ queda completamente determinada conocidas la transformación lineal T y las bases A y B del dominio y codominio respectivamente.
Recíprocamente, dada una matriz M de tamaño $m \times n$ y dos bases A y B de los espacios V y W respectivamente, queda completamente determinada una transformación lineal T tal que ${}_B(T)_A = M$.
En efecto, conociendo la matriz M, sus columnas son las coordenadas en la base B de las imágenes de dos vectores de la base A, esto nos permite conoces las imágenes de los vectores de la base A y esto es suficiente para determinar T.

Ejemplo 1.2.
Hallar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que ${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde $A = \{(1,0,1),(2,0,0),(0,1,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{(2,-1),(0,2)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$.
$coord_B(T(1,0,1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$coord_B(T(2,0,0)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
$coord_B(T(0,1,0)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$T(1,0,1) = 2(2,-1) + 1(0,2) = (4,0)$
$T(2,0,0) = 3(2,-1) + 0(0,2) = (6,-3)$
$T(0,1,0) = -1(2,-1) + 2(0,2) = (-2,5)$

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(2,0,0) + \gamma(0,1,0) = (\alpha + 2\beta, \gamma, \alpha) \to \begin{array}{c} \alpha = z \\ \gamma = y \\ \beta = \frac{x-z}{2} \end{array}$$

$(x,y,z) = z(1,0,1) + \frac{x-z}{2}(2,0,0) + y(0,1,0)$
Por linealidad de T:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= zT(1,0,1) + \tfrac{x-z}{2}T(2,0,0) + yT(0,1,0) \\ &= z(4,0) + \tfrac{x-z}{2}(6,-3) + y(-2,5) \\ &= (3x - 2y + z, -\tfrac{3}{2}x + 5y + \tfrac{3}{2}z) \end{aligned}$$

Teorema 1.1. Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente y $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces se cumple que:

$$coord_B(Tv) = {}_B(T)_A \; coord_A(v)$$

Ejemplo 1.3. Dado $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y las bases $A = B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ tal que

$${}_B(T)_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $T(2,0,1)$

$$(2,0,-1) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = (\alpha+\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma) \to \begin{array}{c} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -1 \end{array}$$

$$coord_B(T(2,0,1)) = {}_B(T)_A \; coord_A(2,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$T(2,0,1) = 1(1,0,0) + 4(1,1,0) + 9(1,1,1) = (14,13,9)$$

1.2. Matriz asociada y operaciones con transformaciones

Teorema 1.2. Sean dos transformaciones lineales $T : V \to W$ y $S : V \to W$.
Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $E = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W. Entonces:

$$_E(T + S)_B =_E (T)_B +_E (S)_B$$

Teorema 1.3. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal y α un escalar de $\mathbb{K}$.
Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $E = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W. Entonces:

$$_E(\lambda T)_B = \lambda \ _E(T)_B$$

Teorema 1.4. Sean U, V y W espacios vectoriales con $dim(U) = s$, $dim(V) = n$ y $dim(W) = t$, y las transformaciones lineales $S : U \to V$ y $T : V \to W$.
Sea $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $C = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ bases de U, V y W respectivamente. Entonces la matriz asociada a la composición $T \circ S$ es el producto de las matrices asociadas.

$$_C(T \circ S)_A = \ _C(T)_B \ _B(S)_A$$

Observación: Sea $T : V \to W$ un isomorfismo, $T^{-1} : W \to V$ su inversa, B y B' bases de V y W respectivamente. Como $T \circ T^{-1} = Id_W$ se cumple:

$$_{B'}(T)_B \ _B(T^{-1})_{B'} = \ _{B'}(Id_W)_{B'} = I$$

También $T \circ T^{-1} = Id_V$ por lo que

$$_B(T^{-1})_{B'} \ _{B'}(T)_B = \ _B(T)_B = I$$

Por lo que deducimos que la matriz asociada a la transformación inversa es la inversa de la matriz asociada a la transformación:

$$_{B'}(T)_B = A \to \ _B(T^{-1})_{B'} = A^{-1}$$

Observar también $dim(V) = dim(W)$

1.3. Cambio de bases

Sean $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $A' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ del espacio V e $I : V \to V$ la transformación identidad.

Definición 1.2. Llamaremos matriz de cambio de base de la base ("vieja") A a la base ("nueva") A' a la matriz:

$$_{A'}(I)_A$$

Teorema 1.5. Sean A y A' bases del espacio vectorial V. Entonces

$$coord_{A'}(v) = \ _{A'}(I)_A coord_A(v)$$

Teorema 1.6. Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y A, A' bases de V y B, B' bases de W y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

$$_{B'}(T)_{A'} = \ _{B'}(I_W)_B \ _B(T)_A \ _A(I_V)_{A'}$$

Donde $I_V : V \to V$ y $I_W : W \to W$ son las transformaciones lineales identidad en V y W respectivamente.

Teorema 1.7. Sea V un espacio vectorial sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, A y A' bases de V, $I : V \to V$ la transformación lineal identidad. Entonces:

1. $_{A'}(I)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ (Matriz identidad)

2. $_{A'}(I)_A$ es invertible y $[_{A'}(I)_A]^{-1} = \ _A(I)_{A'}$

1.4. Transformaciones y matrices semejantes

Definición 1.3. Operador lineal.
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Llamaremos operador en V a toda transformación lineal $T : V \to V$; o sea, operador es una transformación lineal de un espacio vectorial en si mismo.

Definición 1.4. Sean A y $B \in M(\mathbb{K})_{n\times n}$. Diremos que A y B son semejantes cuando existe $P \in M(\mathbb{K})_{n\times n}$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$.'

Teorema 1.8. Dadas A y $B \in M(\mathbb{K})_{n\times n}$. Las matrices A y B son semejantes si y solo si son matrices asociadas a un mismo operador T en V.

Teorema 1.9. Sean A y B matrices semejantes en $M(\mathbb{K})_{n\times n}$. Entonces:

1. $rango(A) = rango(B)$
2. $traza(A) = traza(B)$
3. $det(A) = det(B)$

Corolario 1.9.1. No vale el reciproco de la proposición anterior, pues para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Se cumple que $rango(A) = rango(B) = 2$, $traza(A) = traza(B) = 2$ y $det(A) = det(B) = 1$.
Sin embargo, no existe P invertible tal que $B = P^{-1}AP$, es decir, A y B no son semejantes. Esto lo podemos observar ya que A es la matriz asociada al operador identidad y B es la matriz asociada a operadores que no son la identidad.

2. Diagonalización

2.1. Valores, Vectores y Subespacios propios

Definición 2.1. Valor y vector propio.
Sea V un espacio vectorial sobre el conjunto de escalares $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ un operador lineal.
Llamamos vector propio de T asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ a todo vector $v \neq \vec{0}$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Corolario 2.0.1.

- El vector nulo se excluye de la definición anterior, pues $T(\vec{0}) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$, $\forall\lambda \in \mathbb{K}$ y consecuentemente todo escalar resultaría valor propio.
- Dada una transformación lineal, los valores propios son números del cuerpo $\mathbb{K}$, sobre el que esta definido el espacio vectorial.
- Si v es vector propio de T asociado al valor propio λ, entonces para cualquier escalar α no nulo, αv también lo es, pues:
$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha\lambda v = \lambda(\alpha v)$$

Definición 2.2. Subespacio propio.
El subespacio S_λ es llamado subespacio propio asociado al valor propio λ.

Sea T y λ un valor propio de T, definimos el subespacio propio como

$$S_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

En estas condiciones,
$$S_\lambda = N(T - \lambda Id)$$

Propiedades de los valores propios:

1. Si T es invertible y λ un valor propio de T, entonces λ^{-n} es valor propio de T^{-n} $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Si λ es valor propio de T, entonces λ^n es valor propio de T^n $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. 0 es valor propio de T si y solo si T no es invertible.
4. A y A^T tienen igual polinomio característico, valores propios y vectores propios.
5. La suma de los valores propios es igual a la $traza(A)$.
6. El producto de los valores propios es igual al $det(A)$.

2.2. Cálculo de valores y vectores propios.

Definición 2.3. Polinomio, ecuación y raíces característica.
Se llama polinomio característico de una matriz cuadrada A al polinomio $X_A(\lambda)$. Se le llama ecuación característica a $X_A(\lambda) = 0$, y raíces características de A a todas las soluciones del polinomio.
Siendo $X_A(\lambda) = det(A - \lambda Id)$

Corolario 2.0.2. Sea A una matriz $n \times n$, su polinomio característico es de grado n en λ, y su termino independiente coincide con del $det(A)$.

Calcular los valores propios de una matriz $A = {}_B(T)_B$ es hallar las raíces del polinomio característico. Una vez se obtenidos los valores propios, podemos hallar los vectores propios con el sistema de ecuaciones $(A - \lambda Id)\,\vec{v} = 0$.

Corolario 2.0.3. Sean A, $B \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$ dos matrices semejantes.
Entonces $X_A(\lambda) = X_B(\lambda)$, por lo tanto, tienen iguales valores propios.
Observar que esto es una condición necesaria, pero no suficiente para asegurar la semejanza entre matrices.

Definición 2.4. Polinomio característico de un operador lineal.
Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ un operador lineal. Llamamos polinomio característico de T al polinomio característico de cualquier matriz asociada a T.
De misma manera se define la ecuación características raíces características de un operador.
Lo denotamos por X_T.

Teorema 2.1. Sea $A = {}_B(T)_B$, la matriz asociada en la base B a la transformación lineal $T : V \to V$. Entonces v es vector propio de T con valor propio λ si y solo si las coordenadas de v en la base B son una solución no trivial del sistema:

$$(A - \lambda Id)\, coord_B\,(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.2. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, $T : V \to V$ un operador lineal; B una base de V y $A = {}_B(T)_B$. Entonces λ es valor propio de T si y solo si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $det\,(A - \lambda Id) = 0$.
Es decir, los valores propios de la matriz asociada y del operador lineal se comparten.

Ejemplo 2.1. Practico 2 Ejercicio 3

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_B(T)_B = A$, donde $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

1. Hallar los valores propios y los subespacios propios de A.
2. Hallar los valores propios y los subespacios propios de T.

1.

$$det\,(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 4\right) \to \lambda = \pm 2 \text{ Valores propios.}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \to -2x + 2y = 0 \to x = y$$

$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\right\} = \{(1,1,0),(0,0,1)\} \text{ Subespacio propio.}$$
$$S_2 \xrightarrow{b} (x,x,z) = x \underbrace{(1,1,0)}_{\text{Vector propio}} + z \underbrace{(0,0,1)}_{\text{Vector propio}}$$

$$S_{-2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \to \begin{matrix} z = 0 \\ x = -y \end{matrix}$$

$$S_{-2} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y \wedge z = 0\right\} = \{(1,-1,0)\} \text{ Subespacio propio.}$$
$$S_{-2} \xrightarrow{b} (x,-x,0) = x \underbrace{(1,-1,0)}_{\text{Vector propio}}$$

2. Sabemos que se comparten los valores propios de la matriz asociada y de la transformación lineal, por lo tanto también son $\lambda = \pm 2$.
Y tenemos por el Teorema 2.1 que:
$coord_B(v_1) = (1,1,0) \to v_1 = 1\,(1,0,0) + 1(1,1,0) + 0\,(1,1,1) = (2,1,0)$
$coord_B(v_2) = (0,0,1) \to v_2 = 0(1,0,0) + 0(1,1,0) + 1(1,1,1) = (1,1,1)$
Por lo tanto, $S_2 = \{(2,1,0),(1,1,1)\}$
$coord_B(v_3) = (1,-1,0) \to v_3 = 1(1,0,0) - 1(1,1,0) + 0(1,1,1) = (0,-1,0)$
Por lo tanto, $S_{-2} = \{(0,-1,0)\}$

2.3. Transformaciones y Matrices diagonalizables.

Definición 2.5. Transformaciones lineales diagonalizables
Sea $T: V \to V$ una transformación lineal. Se le llama diagonalizable si existe alguna base B tal que la matriz ${}_B(T)_B$ es una matriz diagonal, es decir, una matriz en la que todos los términos fuera de su diagonal principal son nulos.

Definición 2.6. Matrices diagonalizables
Una matriz cuadrada se llama diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.

Ejemplo 2.2. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por: $T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Si se elige como base de $\mathbb{R}^3$ a $B' = \{(0,1,-1),(0,0,1),(1,0,-1)\}$ resulta:

$$T(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

O sea, $T(0,1,-1) = 4(0,1,-1) + 0(0,0,1) + 0(1,0,-1)$.
Análogamente tenemos:
$T(0,0,1) = (0,0,2) = 0(0,1,-1) + 2(0,0,1) + 0(1,0,-1)$
$T(1,0,-1) = (3,0,-3) = 0(0,1,-1) + 0(0,0,1) + 3(1,0,-1)$
Entonces ${}_B(T)_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, por lo tanto T es diagonalizable.

Teorema 2.3. T es diagonalizable si y solo si existe alguna base de V constituida por vectores propios de T. En este caso la matriz asociada en una base de vectores propios (tomada como base de partida y llegada) es diagonal.

Corolario 2.3.1. Si T es diagonalizable, su forma diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

es única a menos del orden de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ que son los valores propios de T.

Teorema 2.4. Una matriz $A \in M_{n\times n}$ es diagonalizable si tiene n vectores propios linealmente independientes.

Teorema 2.5. Sea $T: V \to V$ una transformación lineal; $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ valores propios dos a dos distintos; y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vectores propios correspondientes a cada uno de los valores propios anteriores. Entonces, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Corolario 2.5.1. Si $dim(V) = n$, $T: V \to V$ tiene n valores propios todos distintos entonces T es diagonalizable.
De todas maneras, el reciproco de lo anterior es falso, puede ser diagonalizable teniendo valores propios iguales, un contra ejemplo es el siguiente.

Ejemplo 2.3. ¿Es diagonalizable la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$?

$$det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 & 0 \\ 0 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(7-\lambda)$$

Entonces $\begin{matrix} \lambda = 2 & \text{raíz doble} \\ \lambda = 7 & \end{matrix}$

Para $\lambda = 2$, los vectores propios asociados (x, y, z) cumplen la ecuación $y = 0$.
Por lo tanto $S_2 = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3\}$
Para $\lambda = 7$ los vectores propios verifican el sistema

$$\begin{cases} -5x - 5y = 0 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow x = -y = z$$

Por lo tanto $S_7 = \{(x, -x, x) \in \mathbb{R}^3\}$.
Resulta entonces que $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, -1, 1)\}$ es una base de vectores propios de A, y por lo tanto A resulta diagonalizable. Una forma diagonal es $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Definición 2.7. Multiplicidad algébrica.
Sea λ un valor propio de $A = {}_B(T)_B$, la multiplicidad algebraica es el numero de factores $(\lambda - t)$ en el polinomio característico tras la factorización.
Lo denotamos como $ma(\lambda)$

Ejemplo 2.4. Sea $X_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 3)^2$, $ma(1) = 1$, $ma(4) = 1$, $ma(3) = 2$

Definición 2.8. Multiplicidad geométrica.
La multiplicidad geométrica de un valor propio es la dimensión del espacio propio asociado.
Lo denotamos como $mg(\lambda)$, y lo podemos calcular como, $mg(\lambda) = n - rango(A - \lambda Id)$.
Siendo $A \in M_{n\times n}$

Corolario 2.5.2. Para cualquier valor propio λ se cumple que $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda) \leq n$

Teorema 2.6. T es diagonalizable si y solo si los valores propios pertenecen al cuerpo y ademas se cumple que $ma(\lambda) = mg(\lambda)$.

Teorema 2.7. Si una matriz A es diagonalizable, existe P invertible (cuyas columnas son los vectores propios de A) tal que $P^{-1}AP = D \rightarrow A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz diagonal.

Volviendo al ejemplo anterior, podemos probar si $A = PDP^{-1}$, siendo $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 2.8. Para hallar A^n basta calcular $A^n = PD^nP^{-1}$.
Siendo D^n de la forma $\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{pmatrix}$

2.4. Teorema de Gershgorin

Definición 2.9. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{C})_{n\times n}$ llamaremos r_i a la suma de los módulos de las entradas de la fila i-esima de A, exceptuando la entrada ubicada en la diagonal.

$$r_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

Sea C_i el disco de centro a_{ii} y radio r_i

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

Teorema 2.9. Teorema de Gershgorin
Sea $A \in M(\mathbb{C})_{n\times n}$

1. Si λ es valor propio de A entonces $\lambda \in \cup_i C_i$.
   Es decir, cada valor propio se encuentra en algún circulo C_i

2. Si $M = C_{i_1} \cup \cdots \cup C_{i_m}$ es disjunta con la unión de los restantes discos, entonces en M hay exactamente m valores propios de A.

Corolario 2.9.1. Como A y A^T comparten los valores propios, podemos analizar tanto las filas como las columnas para aproximar mejor los valores propios.

Ejemplo 2.5. Consideremos $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 3 & 25 & 0 \\ 2 & 1 & 32 \end{pmatrix}$.

Para esta matriz como $a_{11} = 10 + 0i$ el circulo va a ser de centro (10,0), en un caso que sea de la forma $a_{nn} = x + yi$ el circulo va a ser de centro (x, y), $r_1 = |1| + |-1| = 2$, $a_{22} = 25$, $r_2 = 3$, $a_{33} = 32$ y $r_3 = 3$, por lo tanto

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 10| \leq 2\}$$
$$C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 25| \leq 3\}$$
$$C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 32| \leq 3\}$$

En este caso como los centros de todos los círculos están sobre el eje real, todos los valores propios van a ser reales.
Tenemos que los valores propios van a estar en los intervalos $[8, 12], [22, 28], [29, 35]$, y como los círculos son disjuntos, tenemos que son 3 valores propios todos distintos, por lo que tenemos que A es diagonalizable.

3. Forma Canónica de Jordan

3.1. Subespacios invariantes

Definición 3.1. Dado un operador $T : V \to V$ decimos que un subespacio W es invariante si $T(W) \subset W$. Es decir si hay un vector $v \in W$, entonces $T(v) \in W$

Corolario 3.0.1. Sean V un espacio de dimensión finita, $T : V \to V$ una transformación lineal y W un subespacio invariante. Entonces existe una base B de V tal que

$$_B(T)_B = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Corolario 3.0.2. Si $V = U \oplus W$ y ambos subespacios son invariantes, entonces existe una base donde

$$_B(T)_B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

El caso mas sencillo de subespacio invariante es cuando $v \neq 0$ es vector propio, en ese caso el subespacio generado por v es invariante.

3.2. Forma Canónica de Jordan

Definición 3.2. Sub-bloque de Jordan.
Se le llama sub-bloque de Jordan de un valor propio λ y tamaño $k \times k$ de la forma

$$SJ_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.1. El sub-bloque de Jordan de tamaño 3 y valor propio 2 es:

$$SJ_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definición 3.3. Bloque de Jordan.
Se llama bloque de Jordan de tamaño $m \times m$ y valor propio λ a una matriz cuadrada $m \times m$ por

- Uno o mas bloques de Jordan de distintos o igual tamaño con el mismo valor propio.
- Ceros en los restantes términos del ejemplo del bloque.

Ejemplo 3.2. Un bloque de Jordan de tamaño 5 y valor propio 2 puede ser:

$$J(2) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.1. Forma Canónica de Jordan.
Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y T un operador lineal tal que su polinomio característico

$$X_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_q)^{m_q}$$

Entonces existe una base B de V tal que

$$_B(T)_B = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & & \\ & J(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_q) \end{pmatrix}$$

Donde cada bloque $J(\lambda_i)$ es un bloque de Jordan de valor propio λ_i, cuyo tamaño es su magnitud algebraica.

Corolario 3.1.1. Supongamos que λ es un valor propio de una transformación lineal T. Entonces la cantidad de sub-bloques de Jordan de valor propio λ es igual a la multiplicidad geométrica de λ.
Un sub-bloque debe también terminar siempre con una columna correspondiente a un vector propio, y por lo tanto la cantidad de sub-bloques coincide con la cantidad de vectores propios que existan en la base B.

Ejemplo 3.3. Hallar bases de Jordan
Sea un operador lineal de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

no es diagonalizable.
Sus valores propios son 2 y 7, $S_2 = \{(1, 0, 0)\}$ y $S_7 = \{(1, -1, 1)\}$ y $ma(2) = 2$. En consecuencia, la forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Para calcular una base de Jordan $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ asociada al operador, observemos que $Av_1 = 2v_1 + v_2$, $Av_2 = 2v_2$ y $Av_3 = 7v_3$. Por lo tanto v_2 y v_3 son vectores propios asociados a 2 y 7 respectivamente, por lo cual podemos elegir $v_2 = (1, 0, 0)$ y $v_3 = (1, -1, 1)$. Ahora podemos decir que $v_1 = (x, y, z)$. Como sabemos que $Av_1 = 2v_1 + v_2$ por lo tanto $(A - 2I)v_1 = v_2$, entonces:

$$(A - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema tenemos que $v_1 = (x, 0, 1)$ con $x \in \mathbb{R}$, entonces podemos elegir $v_1 = (0, 0, 1)$, por lo cual tenemos que la base de Jordan B resulta $B = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, -1, 1)\}$.

3.3. Teorema de Cayley-Hamilton

Un operador T o una matriz A verifican su polinomio característico, esto significa que, ya sea el operador $X_T(T)$ es el operador nulo o que $X_A(A)$ es la matriz nula.

Teorema 3.2. Sea $T : V \to V$ un operador, λ un valor propio, v un vector propio asociado a λ y $P(x)$ un polinomio. Entonces se cumple que el vector v es vector propio del operador $P(T)$ con valor propio $P(\lambda)$.

Corolario 3.2.1. Sea $P(x) = X_T(x)$ el polinomio característico de T, y μ un valor propio y v un vector asociado a μ, entonces:

$$X_T(T)(v) = X_T(\mu)v = 0v = 0$$

Para transformaciones no diagonalizables hay que tener mas cuidado. Podemos observar que si μ es valor propio, el polinomio característico se factoriza como

$$X_T(x) = (x - \mu)P(x)$$

Por lo tanto, $X_T(T) = (T - \mu Id)P(T)$. Como v es vector propio asociado a μ, tenemos

$$X_T(T)(v) = P(T)(Tv - \mu v) = 0$$

Cuando v no es vector propio, debemos proceder de otra manera.

Corolario 3.2.2. Dados un operador T en V y v un vector no nulo en V. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ que cumple que

$$\begin{array}{ll} \{v, T(v), \dots, T^k(v)\} & \text{Es linealmente independiente} \\ \{v, T(v), \dots, T^k(v), T^{k+1}(v)\} & \text{Es linealmente dependiente} \end{array}$$

Definición 3.4. Notamos con $[v]_T$ al subespacio generador por $\{v, T(v), \dots, T^k(v)\}$.

Corolario 3.2.3. Sea $T^{k+1}(v) = \sum_{i=0}^{k} a_i T^i(v)$. El subespacio $[v]_T$ es invariante por T y la matriz asociada a T en la base $\{v, Tv, \dots, T^k v\}$ del subespacio es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_k \end{pmatrix}$$

Teorema 3.3. Cayley-Hamilton.
Sean $T : V \to V$ un operador en un espacio de dimensión finita V y $X_T(x)$ el polinomio característico de T. Entonces el operador $X_T(T)$ es el operador nulo.

4. Producto interno y norma

4.1. Producto interno

Definición 4.1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, una función de dos variables

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$$

es un producto interno en V si verifica:

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ $\forall u, v, w \in V$.
2. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ $\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$
3. $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ $\forall u, v \in V$, la barra indica el complejo conjugado.
4. $\langle u, u\rangle$ real y $\langle u, u\rangle \geq 0$ $\forall u \in V$, y $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Corolario 4.0.1. La propiedad 1, dice que la función $\langle\ ,\ \rangle$ es aditiva en la primera componente (se sobrentiende que la segunda componente permanece fija).

Corolario 4.0.2. La propiedad 2, dice que la función $\langle\ ,\ \rangle$ es homogénea en la primera componente, mientras que la segunda permanece fija.
Cuando se cumplen las propiedades 1 y 2 se dice que la función $\langle\ ,\ \rangle$ es lineal en la primera componente.

Corolario 4.0.3. Si $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en el $\mathbb{K}$-espacio vectorial V se tiene que

a) $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ $\forall u, v, w \in V$

b) $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle$ $\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

c) $\langle u, \vec{0}\rangle = \langle \vec{0}, u\rangle = 0$ $\forall u \in V$

Definición 4.2. Definimos el producto interno usual de un cuerpo $\mathbb{K}^n$ como

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}$$

4.2. Norma

Definición 4.3. Sea V un espacio vectorial. Una norma en V es una función tal que a cada vector v le hace corresponder un real indicado como $||v||$, y cumple:

1. $||\lambda v|| = |\lambda|||v|| \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall v \in V$.

2. $||v|| \geq 0 \ \forall v \in V \ \ ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$

3. $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ Desigualdad triangular.

Teorema 4.1. Todo espacio vectorial con producto interno es un espacio vectorial normado definiendo la norma de la siguiente manera:

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

A esta norma la llamamos norma inducida por el producto interno.

Corolario 4.1.1. El reciproco no es cierto, es decir, hay normas que no son normas inducidas por ningún producto interno en V.

Corolario 4.1.2. En el caso que se considere el espacio ordinario, la norma de un vector referida al producto escalar coincide con su módulo.

Teorema 4.2. Desigualdad de Cauchy-Schwarz Sea V un espacio con producto interno, para todo par de vectores $v, w \in V$ se tiene

$$|\langle v, u\rangle| \leq ||v|| \ ||u||$$

donde la norma es la inducida por el producto interno. La igualdad vale si y solo si $\{v, u\}$ es linealmente independiente.

Corolario 4.2.1. Si V es un espacio vectorial real con producto interno, y v, w son dos vectores no nulos, la desigualdad de Cauchy-Schwarz permite asegurar que

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \ ||w||} \leq 1$$

por ello se define el angulo α entre los vectores v, w por $cos(\alpha) = \frac{\langle v, w\rangle}{||v|| \ ||w||}$

Corolario 4.2.2. Desigualdad triangular
Si V es un espacio vectorial con producto interno $v, w \in V$, se tiene $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$.

4.3. Ortogonalidad y ortonormalidad

Definición 4.4. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Dados $v,\ w \in V$, se dice que v y w son ortogonales, y se escribe como $v \perp w$, cuando $\langle v, w\rangle = 0$.

Esta definición coincide con la ortogonalidad en el espacio ordinario, trabajando con el producto interno usual.

Definición 4.5. Sea $A \subset V$. Se dice que A es un conjunto ortogonal si los elementos de A son ortogonales dos a dos, o sea, $\forall v,\ w \in A,\ v \neq w$ se cumple $v \perp w$.
Si ademas $||v|| = 1\ \forall v \in A$ se dice que A es un conjunto ortonormal.

Corolario 4.2.3.

- $0 \perp v\ \forall v \in V$.
- $v \perp v \Leftrightarrow v = 0$.
- Si A es un conjunto ortogonal y $\vec{0} \notin A$ el conjunto:

$$\left\{ \frac{1}{||v||} v \ / \ v \in A \right\}$$

  es ortonormal. A este proceso se le llama normalizar.

Teorema 4.3. Todo conjunto ortogonal que no tiene el vector nulo es linealmente independiente. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $\{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \vec{0}$ con $i = 1, \ldots, r$. Entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es linealmente independiente.

Teorema 4.4. Pitágoras.
Sea V un producto interno y $\{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortogonal. Entonces $|| \sum_{i=1}^{r} v_i ||^2 = \sum_{i=1}^{r} ||v_i||^2$

Teorema 4.5. Método de ortonormalización de Gram-Schmidt.
Sean V un espacio vectorial con producto interno y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base de V. Entonces existe $B = \{y_1, \ldots, y_n\}$ tal que B es una base ortonormal de V y $[v_1, \ldots, v_k] = [y_1, \ldots, y_k]\ \forall k = 1, \ldots, n$.
<u>Método:</u>
Tomamos $u_1 = v_1$, entonces $[v_1] = [u_1]$.
Sea $u_2 = v_2 - cu_1$ donde

$$c = \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{||u_1||^2}$$

Generalizando decimos que

$$u_k = v_k - c_{k-1}u_{k-1} - \cdots - c_1 u_1$$

donde $c_j = \frac{\langle v_k, u_j\rangle}{||u_j||^2}\ \forall k = 2, \ldots, n$, se obtiene un sistema $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ortogonal tal que $[u_1, \ldots, u_n] = [v_1, \ldots, v_k]\ \forall k = 1, \ldots, n$.
Finalmente tomando $y_j = \frac{1}{||u_j||} u_j$ se tiene que $B = \{y_1, \ldots, y_n\}$ en condiciones adecuadas.

Corolario 4.5.1. Todo espacio vectorial de dimensión finita con producto interno tiene una base ortonormal.

Corolario 4.5.2. Este método es también aplicable a subespacios vectoriales.

Teorema 4.6. Propiedades de las bases ortonormales.
Sea V un espacio vectorial con producto interno y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal. Entonces:

1. Si $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$ y $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ entonces $\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha \overline{\beta_i}$.
2. $\forall v \in V$ se tiene que: $v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v, v_n\rangle v_n$.
3. $\forall v \in V$ se tiene que: $||v||^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, v_i\rangle|^2$.

Corolario 4.6.1. Para hallar un producto interno para el cual $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base ortonormal primero recordemos que todos sus vectores son ortogonales entre ellos y ademas $\langle v_i, v_i\rangle = 1$, con esto, llamamos

$$v = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$
$$w = (y_1, y_2, \cdots, y_n) = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

Luego, se despeja $\alpha_i,\ \beta_i$ respectivamente sobre x_i e y_i, para después hacer

$$\langle v, w\rangle = \langle (x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n\rangle = \langle (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n), (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n)\rangle = \langle \alpha_1 v_1, \beta_1 v_1\rangle + \cdots + \langle \alpha_n v_n, \beta_n v_n\rangle$$

Por las propiedades que comente al principio, nos queda $\alpha_1\overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n\overline{\beta_n}$, aquí deshacemos la sustitución cambiando α y β por sus valores respecto a x_i e y_i, para así hallar el producto interno.

4.4. Complemento ortogonal

Definición 4.6. Sea V un espacio vectorial con producto interno, si $S \subset V$. Llamamos complemento ortogonal de S al conjunto

$$\begin{aligned} S^{\perp} &= \{v \in V \ : \ v \perp s \ \ \forall s \in S\} \\ &= \{v \in V \ : \ \langle v, s\rangle = 0 \ \ \forall s \in S\} \end{aligned}$$

Note que no se pide que S sea un subespacio vectorial de V.

Corolario 4.6.2. Sea V un espacio vectorial con producto interno y S un sub-conjunto de V. Entonces $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.

Corolario 4.6.3. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $B = \{s_1, s_2, \cdots, s_r\}$ es una base de un subespacio S entonces $v \in S^{\perp} \ \Leftrightarrow \ v \perp s_i \ \forall i = 1, 2, \cdots, r$.

Teorema 4.7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y W un subespacio de V:

$$dim(V) = dim(W) + dim(W^{\perp})$$

Corolario 4.7.1. Sea V un espacio vectorial con producto interno, y S un sub-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $V = S \oplus S^{\perp}$.

Propiedades:

- Si $A \subset B \Leftarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
- $A^{\perp} = [A]^{\perp}$.
- $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
- $S = (S^{\perp})^{\perp}$.
- $(S + W)^{\perp} = S^{\perp} \cap W^{\perp}$.
- $(S \cap W)^{\perp} = S^{\perp} + W^{\perp}$.

4.5. Proyección ortogonal

Sea V un espacio vectorial con producto interno, S un subespacio tal que $V = S \oplus S^{\perp}$. Eso implica que dado $v \in V$ existen y son únicos $v_S \in S$, $v_{S^\perp}$ tales que

$$v = v_S + v_{S^\perp}$$

Definición 4.7. Dado $v \in V$ llamamos proyección ortogonal de v sobre el subespacio S al vector $P_S(v) = v_S$. Si V tiene dimensión finita y $B_S = \{s_1, \cdots, s_k\}$ es una base ortonormal de S, entonces

$$P_S(v) = \sum_{i=1}^{k} \langle v, s_i \rangle s_i \ ; \ s_i \in S$$

Corolario 4.7.2. La definición de proyección ortogonal no depende de la base elegida.
Como vimos en el corolario 4.6.3; $P_S(v)$ es el único vector de S tal que sumado con un vector de $S^{\perp}$ da v.

Corolario 4.7.3. Como $V = S \oplus S^{\perp}$ podemos hallar la proyección, usando que la diferencia $v - s$ esté en $S^{\perp}$. Es más si se tiene una proyección, se tiene la proyección sobre el complemento ortogonal como lo indica el siguiente corolario.

Corolario 4.7.4. Del mismo corolario 4.6.3, observando que $(S^{\perp})^{\perp} = S$ se desprende que:

$$v = P_S(v) + P_{S^\perp}(v)$$

Teorema 4.8. Sea V un espacio vectorial con producto interno y S un sub-espacio de dimensión finita. Entonces: $||v - P_S(v)|| \leq ||v - s|| \ \forall s \in S$.

Corolario 4.8.1. El vector $P_S(v)$ es el vector de S que mejor se aproxima a v, en el sentido del teorema anterior. En el sentido de que $||v - P_S(v)||$ hace mínima a $||v - s||$. Es decir, si queremos calcular la mínima, basta calcular $||v - P_S(v)||$.

Corolario 4.8.2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $S \subset V$ un subespacio vectorial y $P_S(v)$ la proyección ortogonal de v sobre S; es decir $P_S(v)$ es el único vector que verifica que $P_S(v) \in S$ y $v - P_S(v) \in S^{\perp}$. Se cumple:

1. $P_S(s) = s \ \forall s \in S$.
2. $P_S(v) = \vec{0} \ \forall v \in S^{\perp}$.
3. $P_S^2 = P_S \circ P_S = P_S$.
4. La función $P_S : V \to V$ dada por $v \xrightarrow{P_S} P_S(v)$ es una transformación lineal.
5. $Im(P_S) = S$ y $Ker(P_S) = S^{\perp}$
6. $||v||^2 = ||P_S(v)||^2 + ||P_{V^\perp}(v)||^2 \ \forall v \in V$.
7. $P_S(v)|| \leq ||v||$.
8. $\langle v, P_S(v) \rangle = ||P_S(v)||^2 \ \forall v \in V$.

4.6. Aproximación por mínimos cuadrados

Antes habíamos estudiado la resolución de sistemas de ecuaciones lineales del tipo

$$A\vec{X} = \vec{b} \text{ donde } A \in M(\mathbb{R})_{m\times n}$$

Donde decíamos que si el sistema no tenia soluciones era incompatible, pero la pregunta que queda es si podemos encontrar una solución que lo aproxime lo mejor posible en algún sentido.
La respuesta es si, y esto es multiplicando ambos lados por la transpuesta de A, es decir $A^tA\vec{X} = A^t\vec{b}$.

Ejemplo 4.1. Practico 7 ejercicio 3 parte 2
En un experimento se midió según el tiempo una cierta magnitud y, obteniéndose los siguientes valores Aplicando el método de mínimos cuadrados hallar la "mejorrecta que ajuste los datos anteriores ($y = \alpha t+\beta$).

x	y
0	0
1	1
3	2
4	5

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 0\alpha+\beta \\ 1 = 1\alpha+\beta \\ 2 = 3\alpha+\beta \\ 5 = 4\alpha+\beta \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Como este sistema es incompatible, podemos usar el método de mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 26 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene solución, donde $\alpha = \frac{11}{10}$ y $\beta = -\frac{1}{5}$. Por lo que nos queda la función $y = \frac{11}{10}t - \frac{1}{5}$ que es la recta que mejor aproxima los datos.

5. Transformaciones en espacios con producto interno

Corolario 5.0.1. Sea V un espacio con producto interno. Si $\langle v, w_1\rangle = \langle v, w_2\rangle$ para todo $v \in V$ entonces $w_1 = w_2$.

Teorema 5.1. Teorema de Riesz
Dada $T : V \to \mathbb{K}$ lineal y V tal que si M es un subespacio de V, se cumple que $V = M \oplus M^{\perp}$, entonces existe un único $w \in V$ tal que

$$T(v) = \langle v, w\rangle$$

5.1. Adjunta de una transformación

Teorema 5.2. Sean V y W espacios con producto interno y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces existe una única transformación lineal $T^* : W \to V$ tal que:

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T^*(w)\rangle_V$$

Definición 5.1. La transformación T^* es llamada la adjunta de T.

Corolario 5.2.1. Propiedades del adjunto:

1. $(T + S)^* = T^* + S^*$.
2. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
3. $(TS)^* = S^*T^*$.
4. T es invertible si y sólo si T^* lo es y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
5. $(T^*)^* = T$.
6. λ es valor propio de $T \Leftrightarrow \overline{\lambda}$ es valor propio de T^*.
7. $det(T) = det(T^*)$.
8. $Ker(T^*) = (Im(T))^{\perp}$.
9. $Im(T^*) = (Ker(T))^{\perp}$.
10. $Ker(T^*T) = Ker(T)$.
11. $dim(Im(T^*T)) = dim(Im(T))$.

Corolario 5.2.2. Sean V y W espacios con producto interno, B y C bases ortonormales de V y W respectivamente. Entonces:

$${}_B(T^*)_C = \overline{[{}_C(T)_B]}^T$$

5.2. Transformaciones lineales auto-adjuntas

Definición 5.2. Transformación lineal auto-adjunta
Sea $T : V \to V$ una transformación lineal. Diremos que T es auto-adjunta si y solo si

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle \ \forall v, w \in V$$

Es lo mismo que decir que T coincide con T^*.

Teorema 5.3. Sea V un espacio vectorial real con producto interno, B una base ortonormal de V y $T : V \to V$ lineal, T es auto-adjunta si y solo si ${}_B(T)_B$ es simétrica.

Corolario 5.3.1. Recordar que una matriz A es simétrica cuando $A = A^t$.

Corolario 5.3.2. Sean T_1 y T_2 operadores auto-adjuntos:

- $T_1 + T_2$ es auto-adjunto y αT_1 es auto-adjunto $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $T_1 \circ T_2$ es auto-adjunto si y sólo si T_1 y T_2 conmutan.

Corolario 5.3.3. Sea T una transformación auto-adjunta, entonces T es diagonalizable.

Definición 5.3. Se dice que una matriz A es hermética si y solo si $A = (\overline{A})^t$ (la matriz conjugada se obtiene conjugando cada una de sus entradas).

Teorema 5.4. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno, B una base ortonormal de V y $T : V \to V$ lineal, T es auto-adjunta si y solo si ${}_B(T)_B$ es hermética.

Teorema 5.5. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y $T : V \to V$ lineal, T es auto-adjunta si y solo si $\langle T(v), v\rangle \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$.

Teorema 5.6. Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno. Si $T : V \to V$ es auto-adjunta entonces todas las raíces del polinomio característico de T son reales.

Teorema 5.7. Sea $A \in M(\mathbb{C})_{n\times n}$. Si A es hermética entonces todas las raíces del polinomio característico de A son reales.

Teorema 5.8. Sea $A \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$. Si A es simétrica entonces todas las raíces del polinomio característico de A son reales.

Teorema 5.9. Sea V un espacio vectorial real con producto interno. Si $T : V \to V$ auto-adjunta entonces todas las raíces del polinomio característico T son reales.

Teorema 5.10. Teorema espectral para transformaciones auto-adjuntas
Sea V un espacio vectorial, real o complejo, de dimensión finita. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal auto-adjunta, entonces existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.

Corolario 5.10.1. Sea V un espacio vectorial real o complejo, de dimensión finita. Si $T : V \to V$ es una transformación lineal auto-adjunta y $\lambda_1,\ \lambda_2$ son valores propios distintos de T, entonces los subespacios propios asociados a dichos valores propios son perpendiculares.

Teorema 5.11. Si existe una base ortonormal B del espacio V formada por vectores propios y las raíces de X_T son reales entonces T es auto-adjunta.

Teorema 5.12. Teorema espectral para matrices simétricas
Si $A \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$ es una matriz simétrica, entonces $\exists P \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$ invertible con $P^{-1} = P^t$ tal que $A = PDP^t$ siendo $D \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$ una matriz diagonal.

5.3. Transformaciones ortogonales y unitarias

Definición 5.4. Una transformación T es unitaria cuando T preserva el producto interno, esto es:

$$\langle T(v_1), T(v_2)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \ \forall v_1, v_2 \in V$$

En el caso particular que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ diremos que T es ortogonal.

Corolario 5.12.1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal, es equivalente:

1. T es unitaria (T conserva el producto interno).
2. T conserva la norma ($||T(v)|| = ||v|| \ \forall v \in V$).
3. T lleva bases ortonormales en bases ortonormales ($\forall B = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base ortonormal de V se tiene que $T(B) = \{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$ también es base ortonormal de V).
4. T lleva una base ortonormal en otra base ortonormal ($\exists B_0 = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ base ortonormal de V se tiene que $T(B_0) = \{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$ también es base ortonormal de V).

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con producto interno.

Definición 5.5. Una transformación lineal $T : V \to V$ es antihermitica $\Leftrightarrow T = -T^*$.

Corolario 5.12.2. Si T es antihermitica y λ es valor propio de T, entonces $Re(\lambda) = 0$, es decir, es completamente imaginario.

Corolario 5.12.3. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal, se cumple que:

1. $(T + T^*)$ es auto-adjunta.
2. $(T - T^*)$ es antihermitica.

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal antihermitica:

1. $T - I$ es invertible.
2. $U = (T + I)(T - I)^{-1}$ es unitaria y $U - I$ es invertible.

Sea $U : V \to V$ una transformación lineal unitaria con $U - I$ invertible, $T = (U + I)(U - I)^{-1}$ es antihermitica.

5.4. Matrices ortogonales y unitarias

Definición 5.6. Sea $A \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$, A es ortogonal cuando A es invertible y $A^{-1} = A^t$.
Sea $A \in M(\mathbb{C})_{n\times n}$, A es unitaria si A es invertible y $A^{-1} = \overline{A}^t$.

Corolario 5.12.4. Si $(AB)_{ij}$ s el elemento ij de la matriz AB se cumple que $(AB)_{ij} = \langle A_{(i)}, B^{(j)}\rangle$ donde $\langle\ ,\ \rangle$ el producto interno habitual en $\mathbb{R}^n$.
De forma similar, para el caso complejo, se tiene que si $A, B \in M(\mathbb{C})_{n\times n}$, entonces

$$(A\overline{B})_{ij} = \langle A_{(i)}, B^{(j)}\rangle$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto interno habitual en $\mathbb{C}^n$.

Corolario 5.12.5. Sea $A \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$. Entonces A es ortogonal si y solo si sus columnas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ considerado con el producto interno habitual.
De misma forma, en los complejos se tiene que si $A \in M(\mathbb{C})_{n\times n}$, A es unitaria si y solo si sus columnas son una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ considerando el producto interno habitual.

Corolario 5.12.6. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y B una base ortonormal de V y $T : V \to V$ lineal. Entonces T es ortogonal $\Leftrightarrow$ $_B(T)_B$ es una matriz ortogonal.

Corolario 5.12.7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, B una base ortonormal de V y $T : V \to V$ lineal. T es unitaria $\Leftrightarrow$ $_B(T)_B$ es una matriz unitaria.

Corolario 5.12.8. Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Si $T : V \to V$ es unitaria entonces sus valores propios tienen módulo 1.

Corolario 5.12.9. Si $A \in M(\mathbb{C})_{n\times n}$ es unitaria entonces las raíces de su polinomio característico tienen módulo 1.

Corolario 5.12.10. Si $A \in M(\mathbb{R})_{n\times n}$ es ortogonal entonces las raíces de su polinomio característico son complejos de modulo 1, es decir las raíces pueden a ser 1 y -1 pues para ser valores propios tienen que ser reales.

Corolario 5.12.11. Si V es sobre $\mathbb{R}$ se concluye que todas las raíces del polinomio característico de $T : V \to V$ unitaria son complejos de módulo 1, al igual que el corolario anterior, los valores propios pueden a ser 1 y -1.

5.5. Teorema espectral para transformaciones lineales unitarias

El teorema espectral es solo válido para el caso de espacio vectorial complejo.

Teorema 5.13. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Si T es unitaria entonces existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.

Corolario 5.13.1. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Si existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T y los valores propios de T tienen módulo 1 entonces T es unitaria.

6. Formas cuadráticas

Definición 6.1. Un polinomio es homogéneo si todos sus monomios son del mismo grado.

Definición 6.2. Forma cuadrática.
Una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ es un polinomio con n variables, coeficientes reales, de grado 2 y homogéneo.

Ejemplo 6.1. En el caso de una función en dos variables tenemos que $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 6.2. En el caso de tres variables $f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$.

Ejemplo 6.3. En un caso genérico de n variables, la forma cuadrática adopta la forma

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}x_k^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} 2a_{ij}x_{ij}$$

Corolario 6.0.1. Notar que se ha escrito los coeficientes de los términos cruzados como $2a_{ij}$, la forma cuadrática que es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ puede expresarse a través de una matriz simétrica:

$$Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x^T Ax$$

Por lo que $x^T Ax$ es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$.

6.1. Aplicación del teorema espectral a las formas cuadráticas

Siendo A la matriz simétrica $n \times n$ real, el teorema espectral afirma:
Existe una matriz ortogonal P tal que: $P^t AP = D$ donde D es la matriz diagonal constituida por los valores propios de A en la diagonal principal.
Ademas las columnas de P son una base ortonormal de vectores propios de A.

En consecuencia: Sea $x^T Ax$ una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$, existe un cambio de variable $x = Px'$ ortogonal tal que la forma cuadrática toma la expresión

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2$$

donde $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

6.2. Expresión canónica de una forma cuadrática

Como vimos antes, aplicando el teorema espectral una forma cuadrática la podemos escribir de la forma $\lambda_1 x_1'^2 + \cdots + \lambda_n x_n'^2$.
Se puede efectuar un nuevo cambio de variable, lineal e invertible, de siguiente modo:

- Si $\lambda_i > 0$ $x_i'' = \sqrt{\lambda_i} x_i'$.
- Si $\lambda_j < 0$ $x_j'' = \sqrt{-\lambda_j} x_j'$.
- Si $\lambda_h = 0$ $x_h'' = x_h'$.

Lo que resulta:

- Si $\lambda_i > 0$ $x_i''^2 = \lambda_i x_i'^2$.
- Si $\lambda_j < 0$ $-x_j''^2 = \lambda_j x_j'^2$.
- Si $\lambda_h = 0$ $0x_h''^2 = \lambda_h x_h'^2$.

La forma cuadrática queda ahora expresada como la suma de algunos $x_i''^2$ menos los $x_h''^2$.
Reordenando los nombres de las incógnitas para que primero queden las sumadas y después las que restan, resulta:

$$\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \cdots + \tilde{x}_p^2 - \tilde{x}_{p-1}^2 - \cdots - \tilde{x}_{p+q}^2$$

Donde p es la cantidad de valores propios positivos de A y q la cantidad de valores propios negativos.
A esta expresión se llama canónica.

Teorema 6.1. Teorema de Silvester o Ley de Inercia
Sea $X^t AX$ una forma cuadrática. Al hacer cambios de variable lineales e invertibles, pueden cambiar la matriz A, y sus valores propios, pero no cambia la cantidad de valores propios positivos ni negativos.

Corolario 6.1.1. Cada forma cuadrática tiene una única expresión canónica.

6.3. Estudio del signo de una forma cuadrática

Sea $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vector de $\mathbb{R}^n$. Sea $f(X)$ una forma cuadrática, se observa que $f(0) = 0$.

Definición 6.3. Clasificación de formas cuadráticas
Las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ se clasifican en:

- Definidas positivas: Si $f(X) \geq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n$ y $X = \vec{0}$ es el único vector tal que $f(X) = 0$.
- Semidefinidas positivas: Si $f(X) \geq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n$ y $\exists X_0 \neq \vec{0} \ / \ f(X_0) = 0$.
- Definidas negativas: Si $f(X) \leq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n$ y $X = \vec{0}$ es el único vector tal que $f(X) = 0$
- Semidefinidas negativas: Si $f(X) \leq 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n$ y $\exists X_0 \neq \vec{0} \ / \ f(X_0) = 0$.
- Indefinida: Si no esta incluida en ninguno de los casos anteriores.

Ejemplo 6.4. Sea $f(x, y) = xy$, $f(x, y)$ es indefinida en $\mathbb{R}^2$ puesto que el vector $(1, 1)$ toma un valor positivo y en el $(-1, 1)$ un valor negativo.

Ejemplo 6.5. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $f(x, y, z)$ es definida positiva en $\mathbb{R}^3$.

Teorema 6.2. Teorema de clasificación
Sea la forma cuadrática $X^t AX$, y λ los valores propios de A:

- Si $\lambda > 0$ entonces es definida positiva.
- Si $\lambda \geq 0$ es semidefinida positiva.
- Si $\lambda < 0$ es definida negativa.
- Si $\lambda \leq 0$ es semidefinida negativa.
- Si algunos valores propios son negativos y otros positivos, es indefinida.

Definición 6.4. Se llama índice de la forma cuadrática $X^t AX$ a la cantidad de valores propios propios positivos de la matriz A.
Le llamamos coíndice a la cantidad de valores propios negativos, rango a la suma indice mas coíndice, y signatura a la diferencia del indice menos el coíndice.

Corolario 6.2.1. El rango de la forma cuadrática es igual al rango de la matriz A.

Corolario 6.2.2. Conociendo el rango (r) y la signatura (s) se puede hallar el índice (p) y el coíndice (q):

$$p = \frac{r + s}{2} \text{ y } q = \frac{r - s}{2}$$

Corolario 6.2.3. Conociendo p y q puede calificarse la forma cuadrática y escribirse la expresión canónica.

6.4. Formas cuadráticas degeneradas

Definición 6.5. La forma cuadrática $X^t AX$ de $\mathbb{R}^n$, es degenerada si el rango es menor que n.

Corolario 6.2.4. Para una forma cuadrática $X^t AX$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. Es degenerada.
2. 0 es valor propio de A.
3. $\exists Y \neq \vec{0}, \ Y \in \mathbb{R}^n$ tal que $X^t AY = 0, \ \forall X \in \mathbb{R}^n$.