Matemática Discreta 1

Santiago Sierra

21 de noviembre de 2022

Índice

1. Relaciones **2**
1.1. Definición de Relaciones 2
1.2. Tipos de relaciones 3
1.3. Producto, unión e intersección de relaciones 3
1.4. Representación matricial y dígrafos 4
1.4.1. Representación matricial 4
1.4.2. Dígrafos de relaciones 5
1.5. Relaciones de equivalencia y particiones 5
1.6. Conjuntos parcialmente ordenados 6

2. Teoría de Grafos **7**
2.1. Introducción 7
2.2. Tipos de caminos 8
2.3. Grafos conexos y disconexos 9
2.4. Subgrafos, grafos complementarios 9
2.5. Isomorfismos de grafos 10
2.6. Caminos eulerianos y hamiltonianos 11
2.7. Grafos planos 12

1. Relaciones

1.1. Definición de Relaciones

Definición 1.1. Para los conjuntos $A,\ B \subseteq U$, el producto cartesiano de A y B se denota por $A \times B$, y

$$A \times B = \{(a, b)\ /\ a \in A \wedge b \in B\}$$

Corolario 1.0.1. Notamos como $|A|$ al cardinal de un conjunto, que representa la cantidad de elementos en A.

Corolario 1.0.2. Si los conjuntos $A,\ B$ son finitos, se sigue de la regla del producto que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Aunque generalmente no ocurre que $A \times B = B \times A$, tenemos que $|A \times B| = |B \times A|$.

Definición 1.2. Para los conjuntos $A, B \subseteq U$, cualquier subconjunto de $A \times B$ es una relación de A en B. A los subconjuntos de $A \times A$ se les llama relaciones sobre A.

Definición 1.3. Relación binaria
Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados pertenecientes al producto cartesiano de dos conjuntos que cumple una propiedad $P(a, b)$ en particular, es decir:

$$R = \{(a, b) \in A \times B\ /\ P(a, b)\}$$

Notaremos como aRb para indicar que $(a, b) \in R$ y $a \not{R} b$ para expresar que $(a, b) \notin R$

Corolario 1.0.3. En general, para conjuntos finitos $A,\ B$, existen $2^{|A \times B|} = 2^{|A||B|}$ relaciones de A en B, incluyendo la relación vacía y la propia relación $A \times B$.

Definición 1.4. Relación inversa Si R es una relación sobre A, entonces R^{-1} es una relación sobre A definida por $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x,\ \forall x, y \in A$.
Es decir, da vuelta el par ordenado.

Corolario 1.0.4. $(R^{-1})^{-1} = R$.

Corolario 1.0.5. $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

Definición 1.5. $\overline{R} = R^C = A \times A - R = \{(a, b) \in A \times A : (a, b) \notin R\}$.

$$a\overline{R}b \Leftrightarrow a \not{R} b$$

1.2. Tipos de relaciones

Definición 1.6. Sea R una relación en un conjunto A:

- La relación R es reflexiva si:
$$\forall a \in A,\ aRa$$

- La relación R es irreflexiva si:
$$\forall a \in A,\ a\not{R}a$$

- La relación R es simétrica si:
$$\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow bRa$$

- La relación R es anti-simétrica si:
$$\left.\begin{matrix} aRb \\ bRa \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b$$

- La relación R es asimétrica si:
$$aRb \Rightarrow b\not{R}a$$

  Una relación asimétrica no puede ser reflexiva ni simétrica, e implica la anti-simétrica.

- La relación R es transitiva si:
$$\left.\begin{matrix} aRb \\ bRc \end{matrix}\right\} \Rightarrow aRc$$

Corolario 1.0.6. R es simétrica $\Leftrightarrow R = R^{-1}$.

Corolario 1.0.7. Si R es reflexiva, simétrica, etc, R^{-1} es del mismo tipo.

Definición 1.7. Una relación R sobre un conjunto A es un orden parcial, o una relación de orden parcial, si R es reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

Definición 1.8. Una relación de equivalencia R sobre un conjunto A es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

1.3. Producto, unión e intersección de relaciones

Definición 1.9. Si A, B, C son conjuntos y $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$, entonces la relación compuesta RS es una relación de A en C definida como $RS = \{(x, z)/x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y \in B/(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$.

Teorema 1.1. Sean A, B, C, D conjuntos y $R_1 \subseteq A \times B,\ R_2 \subseteq B \times C,\ R_3 \subseteq C \times D$.
Entonces $R_1(R_2R_3) = (R_1R_2)R_3$.

Definición 1.10. Dado un conjunto A y una relación R sobre A, definimos las potencias de R en forma recursiva como:

- $R^1 = R$.
- Para $n \in \mathbb{Z}^+,\ R^{n+1} = R\ R^n$.

Ejemplo 1.1. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$, entonces $R^2 = \{(1, 4), (1, 2), (3, 4)\}$, $R^3 = \{(1, 4)\}$ y para $n \geq 4,\ R^n = \emptyset$.

1.4. Representación matricial y dígrafos

1.4.1. Representación matricial

Definición 1.11. Una matriz cero-uno $m \times n$, $E = (e_{ij})_{m\times n}$ es una disposición rectangular de números en m filas y n columnas, donde cada e_{ij} para $1 \leq i \leq m$, y $1 \leq j \leq n$, denota la entrada de la i-esima columna de E y cada una de dichas entradas es 0 o 1.

Definición 1.12. Si R es una relación entre A y B, entonces R puede ser representado por la matriz M cuyos indices de fila y columna indexan los elementos de a y b, respectivamente, de manera que las entradas de M quedan definidas por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & aRb \\ 0 & a\not{R}b \end{cases}$$

Corolario 1.1.1. Sea A un conjunto y R una relación sobre A, si $M(R)$ es la matriz de la relación, entonces:

- $M(R) = 0$, la matriz con todos los elementos iguales a 0, si y sólo si $R = \emptyset$.
- $M(R) = 1$, la matriz con todos los elementos iguales a 1, si y sólo si $R = A \times A$.
- $M(R^m) = [M(R)]^m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Corolario 1.1.2. Sean R y S relaciones, y $M(R),\ M(S)$ sus matrices respectivamente,
entonces $M(R) \cdot M(S) = M(RS)$, pero ningún termino excede el 1.

Definición 1.13. Sean E y F dos matrices cero-uno $m \times n$. Decimos que E es menor que F y escribimos $E \leq F$, si $e_{ij} \leq f_{ij}$, para todos $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$.
En caso que exista al menos un elemento que no cumpla esto, las matrices no son comparables

Ejemplo 1.2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.14. Intersección o producto coordenada a coordenada
Si $M,\ N \in \mathcal{M}_{r\times s} \Rightarrow M \cap N \in \mathcal{M}_{r\times s} / (M \cap N) = M_{ij} \cdot N_{ij}$.

Teorema 1.2. Dado un conjunto A con y una relación R sobre A, sea M la matriz de relación para R, entonces:

- R es reflexiva $\Leftrightarrow Id_{|A|} \leq M$. En el caso contrario, es irreflexiva.
- R es simétrica $\Leftrightarrow M = M^t$.
- R es transitiva $\Leftrightarrow MM = M^2 \leq M$.
- R es anti-simétrica $\Leftrightarrow M \cap M^t \leq Id_{|A|}$.
  Recordar, esta matriz se forma operando los elementos correspondientes de M y M^t con las reglas $0 \cap 0 = 0 \cap 1 = 1 \cap 0 = 0$ y $1 \cap 1 = 1$ (lo mismo que multiplicación coordenada a coordenada).

Corolario 1.2.1. Sean las relaciones $R,\ S$, y $M(R),\ M(S)$ las matrices de las relaciones, entonces:

- $M(R)^t = M(R^{-1})$.
- $M(R) + M(S) = M(R \cup S)$.
- $M(R) \cap M(S) = M(R \cap S)$.

Corolario 1.2.2. Conteo de Relaciones
Sea $|A| = n$:

- Cantidad de relaciones reflexivas: 2^{n^2-n}
  Tenemos 2 posibilidades, 0 o 1, en la diagonal siempre tiene que haber 1, y la matriz va a tener un total de n^2 entradas, y les restamos n que son las entradas que ya están ocupadas por la diagonal.

- Cantidad de relaciones simétricas: $2^{\frac{n^2+n}{2}}$
  Devuelta, 2 posibilidades, la diagonal no importan las entradas si son 0 o 1, solo que sea simétrica, por lo que podemos elegir las entradas de la triangular superior y se determinan las del otro lado, que son $\frac{n^2-n}{2}$, pero les sumamos n de la diagonal, $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$.

- Cantidad de relaciones anti-simétricas: $2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$
  Las posibilidades de la diagonal son 2^n, y fuera de la diagonal, los elementos m_{ij} y m_{ji}, pueden ser ambos 0, o uno 0 y el otro 1, por lo que son 3 posibilidades, y determinando la triangular superior ya se determina el otro lado, y son $\frac{n^2-n}{2}$ entradas.

1.4.2. Dígrafos de relaciones

Definición 1.15. Sea A un conjunto finito no vació, un grafo dirigido o dígrafo G sobre A esta formado por los elementos de A, llamados vértices o nodo de G, y un subconjunto E de $A \times A$, conocido como las aristas o arcos de G. Si $a, b \in V$ y $(a, b) \in E$, entonces existe una arista de a a b.
El vértice a es el origen o fuente de la arista, y b es el termino, o vértice terminal, y decimos que b es adyacente desde a, y que a es adyacente hacia b. Ademas, si $a \neq b$, entonces $(a, b) \neq (b, a)$. Una arista de la forma (a, a) es una lazo en a.

1.5. Relaciones de equivalencia y particiones

Definición 1.16. Dado un conjunto A y un conjunto de indices I, sea $\emptyset \neq A_i \subseteq A \ \forall i \in I$. Entonces $\{A_i\}_{i\in I}$ es una partición de A si

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \ \text{ y } \ A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i, j \in I \ / \ i \neq j$$

Cada subconjunto A, es una celda o bloque de la partición.

Definición 1.17. Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Para cualquier $x \in A$, la clase de equivalencia de x, que se denota con $[x]$, se define como $[x] = \{y \in A \ / \ yRx\}$.

Teorema 1.3. Si R es una relación de equivalencia sobre un conjunto A, y $x, y \in A$, entonces

- $x \in [x]$.
- $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$.
- $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$ o $[a] \cap [b] \Rightarrow [a] = [b]$.

Teorema 1.4. Si A es un conjunto, entonces:

- Cualquier relación de equivalencia R sobre A induce una partición de A.
- Cualquier partición de A da lugar a una relación de equivalencia R sobre A.

Teorema 1.5. Para cualquier conjunto A, existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de relaciones de equivalencia sobre A y el conjunto de particiones de A.

Definición 1.18. Dada una relación de equivalencia R en un conjunto A, se llama conjunto cociente de A determinado por R al conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Se le representa por A/R. Es decir:

$$A/R = \{[a] \ / \ a \in A\}$$

1.6. Conjuntos parcialmente ordenados

Para analizar el concepto de orden, sea A un conjunto y R una relación sobre A, el par (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado, si la relación sobre A es un orden parcial.

Definición 1.19. Diagrama de Hasse
En general, si R es un orden parcial sobre un conjunto finito A, construimos un diagrama de Hasse para R sobre A trazando un segmento de x hacia arriba, hacia y, si $x, y \in A$ son tales que xRy y, lo que es mas importante, si no existe otro elemento $z \in A$ tal que xRz y zRy. Si adoptamos el convenio de leer el diagrama de abajo hacia arriba, no es necesario dirigir las aristas.

Definición 1.20. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que A es totalmente ordenado si $\forall x, y \in A$ ocurre que xRy o yRx.
En este caso, decimos que R es un orden total.

Definición 1.21. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento $x \in A$ es un elemento maximal de A si $\forall a \in A,\ a \neq x \Rightarrow x\not{R}a$. Un elemento $y \in A$ es un elemento minimal de A si $\forall b \in A,\ b \neq y \Rightarrow b\not{R}y$.

Teorema 1.6. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado y A es finito, entonces A tiene un elemento maximal y uno minimal.

Definición 1.22. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado, entonces decimos que $x \in A$ es un elemento mínimo si $xRa\ \forall a \in A$. El elemento $y \in A$ es un elemento máximo si $aRy\ \forall a \in A$.

Teorema 1.7. Si el conjunto parcialmente ordenado (A, R) tiene un elemento máximo o mínimo, entonces ese elemento es único.

Definición 1.23. Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado con $B \subseteq A$. Un elemento $x \in A$ es una cota inferior de B si $xRb\ \forall b \in B$. De manera similar, un elemento $y \in A$ es una cota superior de B si $bRy\ \forall b \in B$. Un elemento $x' \in A$ es una máxima cota inferior o ínfimo de B si es una cota inferior de B y si para todas las demás cotas inferiores x'' de B tenemos que $x''Rx'$. De forma análoga, $y' \in A$ es una mínima cota superior o supremo de B si es una cota superior de B y si $y'Ry''$ para todas las demás cotas superiores de y'' de B.

Teorema 1.8. Si (A, R) es un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$, entonces B tiene a lo sumo un ínfimo y supremo.

Definición 1.24. El conjunto parcialmente ordenado (A, R) es un retículo si para cualesquiera $x, y \in A$, los elementos $sup\{x, y\}$ e $inf\{x, y\}$ existen en A.

Definición 1.25. Cadena
Sea $B \subseteq A$, B es cadena si $\forall a, b \in B\ aRb$ o bRa.

Definición 1.26. Anticadena
Sea $B \subseteq A$, B es anticadena si $\begin{cases} a\not{R}b \\ b\not{R}a \end{cases}$ con $a \neq b$.

Teorema 1.9. Sea n el largo de la cadena mas larga $\Rightarrow$ A se puede particionar en n anticadenas disjuntas. Sea m la cantidad de elementos de la anticadena mas grande $\Rightarrow$ A se puede particionar en m cadenas disjuntas.

2. Teoría de Grafos

2.1. Introducción

Definición 2.1. Sea V un conjunto finito no vació, y sea $A \subseteq V \times V$. El par (V, A) es un grafo sobre V, donde V es el conjunto de vértices o nodos, y A es su conjunto de aristas. Escribimos $G = (V, A)$ para denotar tal grafo.

Corolario 2.0.1. Para cualquier arista $(a, b) \in A$ se dice que:

- La arista (a, b) es incidente con los vértices a y b.
- a, b son los extremos de (a, b).
- a es el origen de (a, b).
- b es el termino de (a, b).

Definición 2.2. Dados dos vértices $u, v \in V$ con $G = (V, A)$, decimos que son vértices adyacentes si $(u, v) \in A$, ademas se dice que u y v son adyacentes, y que u es adyacente hacia v.

Definición 2.3. Dados $v \in V,\ a \in A$ con $G = (V, A)$, decimos que la arista a es incidente al vértice v si $\exists u \in V$ tal que $a = (u, v)$.

Definición 2.4. Una arista de la forma (a, a) es un lazo.

Definición 2.5. Un vértice $a \in V$ esta aislado cuando no hay ningún vértice adyacente con a.

Corolario 2.0.2. Un vértice con un lazo no está aislado.

Definición 2.6. Dado $G = (V, A)$ grafo, llamamos:

- Orden de G al número de vértices, $m = |V|$.
- Tamaño de G al número de aristas, $n = |A|$.

2.2. Tipos de caminos

Definición 2.7. Camino
Sea $G = (V, A)$ un grafo, un camino (en G) es una sucesión finita y alternada de vértices y aristas, de la forma:

$$c = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, a_n, v_n$$

donde $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ y $1 \leq i \leq n$.
Siendo n el número de aristas, y la longitud del camino.

Corolario 2.0.3. Un camino puede repetir vértices y/o aristas.

Definición 2.8. Un camino $c = v_0, \ldots, v_n$ esta cerrado cuando $v_0 = v_n$. De otra forma, esta abierto.

Definición 2.9. Un recorrido es un camino sin repetición de aristas.

Definición 2.10. Un camino simple es un camino sin repetición de vértices (con la excepción posible de los extremos).

Definición 2.11. Un ciclo es un camino simple cerrado.

Corolario 2.0.4. Un ciclo de longitud 1 es un lazo.

- En un grafo dirigido, pueden existir ciclos de longitud 2.
- En un grafo no dirigido todos los ciclos tienen longitud ≥ 3.

Nombre	Origen = Termino?	Vértices Repetidos?	Aristas Repetidas?
Camino			
Camino Cerrado	Si		
Camino Simple		No	No
Recorrido			No
Circuito	Si		No
Circuito Simple	Si	No	No

Corolario 2.0.5. Se suele considerar como iguales los circuitos simples que pasan por las mismas aristas.

Teorema 2.1. Sean a y b dos vértices distintos de un grafo G, si existe un camino desde a hasta b, entonces existe (otro) camino simple desde a hasta b.

2.3. Grafos conexos y disconexos

Definición 2.12. Un grafo $G = (V, A)$ es conexo cuando $\forall a, b \in V,\ a \neq b$, existe un camino desde a hasta b.
Un grafo dirigido es conexo, cuando el grafo subyacente (olvidando la orientación de las aristas) es conexo.

Definición 2.13. Un grafo (dirigido o no) es disconexo cuando no es conexo.

Definición 2.14. Componentes Conexas
Dado $G = (V, A)$ se considera la relación $(\sim) \subset V^2$ definida por $v \sim v' \Leftrightarrow$ existe un camino desde v hasta v'.
Es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia correspondiente son las componentes conexas del grafo G.

Definición 2.15. Cuando G es finito, se escribe $K(G)$ al numero de componentes conexas de G.

Corolario 2.1.1. G es conexo $\Leftrightarrow K(G) = 1$.

Corolario 2.1.2. Las componentes conexas de un grafo dirigido se definen a partir del grafo no dirigido subyacente.

Definición 2.16. Multigrafo
Un multigrafo es una terna (V, A, ext) donde:

- V es el conjunto de vértices.
- A es el conjunto de aristas.
- ext: $A \to V^2$, $ext(a) = (x, y)$ quiere decir $x \xrightarrow{a} y$.

Es decir, de un vértice pueden salir múltiples aristas.

2.4. Subgrafos, grafos complementarios

Definición 2.17. Sea $G = (V, A)$ un grafo, un subgrafo de G es un grafo $G' = (V', A')$ tal que $\begin{cases} V' \subset V \\ A' \subset A \end{cases}$.

Corolario 2.1.3. $G' = (V', A')$ tiene que ser un grafo: $A' \subset V'^2$.

Definición 2.18. Sea $G = (V, A)$ un grafo, un subgrafo recubridor de G es un subgrafo $G' = (V', A') \subset G$ tal que $V' = V$.

Definición 2.19. Grafo completo
Un grafo $G = (V, A)$ es completo si es:

- No dirigido.
- No tiene lazos.
- $\forall a, b \in V,\ a \neq b,\ \{a, b\} \in A$.

De modo equivalente $\forall a, b \in V,\ \{a, b\} \in A \Leftrightarrow a \neq b$.
Se escribe K_n el grafo completo con n vértices.

Corolario 2.1.4. K_n tiene n vértices y $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas.

Corolario 2.1.5. Todo grafo $G = (V, A)$ sin lazos es un subgrafo recubridor de algún grafo completo $\hat{G} = (V, \hat{A})$ donde $\hat{A} = \{\{a, b\} \in V^2 \ / \ a \neq b\}$.

Definición 2.20. Si $G = (V, A)$ es un grafo sin lazos, el grafo complementario de G esta definido por $\overline{G} = (V, \overline{A})$ con $\overline{A} = \{\{a, b\} \in V^2 \ / \ a \neq b \wedge \{a, b\} \notin A\}$.

Corolario 2.1.6. El complementario no tiene lazos.

Corolario 2.1.7. El complementario del complementario es el grafo inicial: $\overline{\overline{G}} = G$.

2.5. Isomorfismos de grafos

Definición 2.21. Un isomorfismo entre dos grafos $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ es una función $f : V_1 \to V_2$ tal que:

- f es biyectiva.
- $\forall a, b \in V_1,\ \{a, b\} \in A_1 \Leftrightarrow \{f(a), f(b)\} \in A_2$.

Dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos cuando existe un isomorfismo $f : G_1 \xrightarrow{\sim} G_2$.

Corolario 2.1.8. Si G_1 es isomorfo con G_2, entonces G_2 es isomorfo con G_1.

Corolario 2.1.9. Si el grafo G_1 es isomorfo con el grafo G_2, y el grafo G_2 es isomorfo con el grafo G_3, entonces el grafo G_1 es isomorfo con G_3.

Corolario 2.1.10. De modo análogo se define la noción de isomorfismo para los grafos dirigidos y los multigrafos.

Corolario 2.1.11. Para cada $n \geq 3$, se define el grafo $C_n = (V_n, A_n)$ que es el ciclo de orden n, con $V_n = \{1, \ldots, n\}$ y $A_n = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$.

Definición 2.22. En un grafo G sin lazos, un ciclo de orden n (≥ 3) es un subgrafo de G isomorfo a C_n.

Definición 2.23. Árboles
Un árbol es un grafo finito sin lazos, conexo, y sin ciclos.

Definición 2.24. Bosque
Un bosque es un grafo cuyos componentes conexos son arboles.

Definición 2.25. Sea G un grafo, un árbol recubridor de G es un subgrafo recubridor de G que es un árbol.

Definición 2.26. Un bosque recubridor de G es un bosque $B \subset G$ tal que B es un subgrafo recubridor de G, cada árbol de B es un árbol recubridor de una componente conexa de G.

Teorema 2.2. Un grafo es conexo si y sólo si tiene un árbol recubridor.

Teorema 2.3. Un grafo $G = (V, A)$ es un árbol si y solo si $\forall v, w \in V,\ v \neq w$, existe un único camino simple de v a w.

Definición 2.27. En un grafo G el grado de un vértice v es el numero de aristas incidentes a v, y lo notamos como $gr_G(v)$.

Corolario 2.3.1. Si un vértice tiene un lazo, se cuenta 2 veces.

Corolario 2.3.2. En un árbol con al menos 2 vértices, existe (al menos) un vértice de grado 1.

Teorema 2.4. Si $G = (V, A)$ es un árbol no vació, entonces: $|V| = |A| + 1$.

Teorema 2.5. Sea $G = (V, A)$ un grafo finito sin lazos, las siguientes propiedades son equivalentes:

- G es un árbol.
- G es conexo, y si se elimina cualquier arista de G se obtiene un bosque de 2 árboles.
- G no contiene ciclos, y $|V| = |E| + 1$.
- G es conexo, y $|V| = |E| + 1$.
- G no contiene ciclos, y cualquier arista suplementaria entre 2 vértices de V introduce un ciclo.

2.6. Caminos eulerianos y hamiltonianos

Definición 2.28. Sea G un grafo o multigrafo, para cualquier vértice v de G, se llama grado de v y se escribe $gr_G(v)$ (o $gr(v)$) el número de aristas incidentes con v, contando cada lazo (en v) 2 veces.

Corolario 2.5.1. Cualquier grafo o multigrafo G finito $G = (V, A)$, tenemos que $\sum_{v \in V} gr(v) = 2|E|$.

Corolario 2.5.2. En cualquier grafo finito, la cantidad de vértices de grado impar es par.

Definición 2.29. Un grafo o multigrafo es regular cuando todos sus vértices tienen el mismo grado.
Es k-regular cuando todos sus vértices tienen grado k.

Corolario 2.5.3. Si $G = (V, A)$ es k-regular, entonces $k|V| = 2|A|$.

Definición 2.30. Caminos y circuitos eulerianos
En un grafo o multigrafo G finito no orientado, un recorrido euleriano es un recorrido que pasa por cada arista del grafo (1 vez cada una).
De misma manera definimos los circuitos eulerianos, con la diferencia de que tiene que ser un circuito.

Teorema 2.6. Sea G un grafo o multigrafo no dirigido $G = (V, A)$ no vació y sin vértices aislados.
Entonces, G tiene un circuito euleriano si y solo si G es conexo y todos los vértices son de grado par.

Corolario 2.6.1. Sea G un grafo o multigrafo no dirigido, sin vértices aislados, G tiene un recorrido euleriano si y solo si G es conexo y todos los vértices de G tienen grado par, excepto por 2.

Definición 2.31. Caminos y ciclos hamiltonianos
Sea G un grafo o multigrafo dirigido o no, un camino hamiltoniano un camino simple de G que pasa por todos los vértices de G.
Un ciclo hamiltoniano de G es un ciclo de G que pasa por todos los vértices de G.

Corolario 2.6.2. No hay relación entre los caminos y ciclos hamiltonianos con los recorridos y circuitos eulerianos.

Corolario 2.6.3. Cada grafo que tiene un ciclo hamiltoniano tiene un camino hamiltoniano (sacando cualquier arista).

Definición 2.32. Un grafo es hamiltoniano si tiene un ciclo hamiltoniano.
Un grafo es semi-hamiltoniano si tiene un camino hamiltoniano pero ningún ciclo hamiltoniano.

Corolario 2.6.4. K_n es hamiltoniano.

Definición 2.33. Un torneo es un grafo dirigido $G = (V, A)$ tal que para todos los vértices $x \neq y \in V$, tenemos que $(x \to y) \in A$ o (exclusivo) $(y \to x) \in A$.

Definición 2.34. Inclusión
Un torneo es un grafo obtenido a partir de K_n $(n \geq 1)$ orientando cada arista.

Teorema 2.7. Todo torneo tiene un camino hamiltoniano.

Teorema 2.8. Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido sin lazos, si para todos $x \neq y \in V$, tenemos que $gr(x) + gr(y) \geq n - 1$ (con $n = |V|$), entonces existe un camino hamiltoniano.

Corolario 2.8.1. Sea G un grafo no dirigido sin lazos con $|V| = n$, si $gr(x) \geq \frac{n-1}{2}$ para todo $x \in V$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Teorema 2.9. Sea G un grafo no dirigido sin lazos, con $|V| = n$, si para todos $x \neq y \in V$, tenemos que $gr(x) + gr(y) \geq n$ entonces existe un ciclo hamiltoniano.

Corolario 2.9.1. Si $gr(x) \geq \frac{n}{2}$ para todo $x \in V$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

2.7. Grafos planos

Definición 2.35. Un grafo o multigrafo G es plano si se puede dibujar G en el plano ($\mathbb{R}^2$) que sus aristas se intersequen solo en los extremos que comparten.

Corolario 2.9.2. La definición se basa en la noción de representación de un grafo G en el plano. Formalmente, una representación de G en el plano es una función que:

- Asocia a cada vértice $v \in V$ a un punto $f(v) \in \mathbb{R}^2$.
- Asocia a cada arista $a \in A$ de extremos $v_1, v_2 \in V$, una linea continua $f(a) \in \mathbb{R}^2$ que junta $f(v_1)$ y $f(v_2)$.

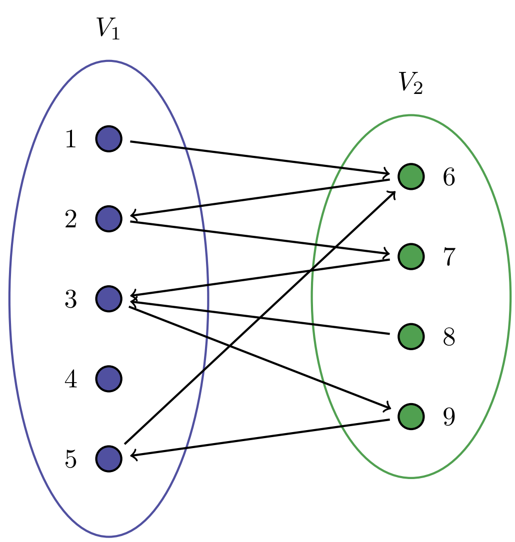
Dicha representación es una inmersión (encaje) cuando:

- f es inyectiva sobre V.
- $f(a)$ es una linea inyectiva.
- $f(a)$ intersecta $f(a')$ (con $a \neq a'$) en los extremos.

Cuando tal inmersión existe se dice que G es plano.

Definición 2.36. Un grafo $G = (V, A)$ es bipartito si existe una partición $V = V_1 \cup V_2$ ($V_1 \cap V_2 = \emptyset,\ V_1 \neq \emptyset,\ V_2 \neq \emptyset$) tal que toda arista de la forma $\{v_1, v_2\}$ con $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Ejemplo 2.1.



Corolario 2.9.3. Un grafo bipartito es completo cuando $\{v_1, v_2\} \in A$ para todos $v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2$.

Corolario 2.9.4. En un grafo bipartito, todos los ciclos tienen longitud par.

Definición 2.37. $K_{m,n}$ es un grafo bipartito completo con $|V_1| = m,\ |V_2| = n$, con $m + n$ vértices y $m \times n$ aristas.

Definición 2.38. Sea $G = (V, A)$ un grafo o multigrafo:

- Una subdivisión elemental de G es un grafo $G' = (V', A')$ obtenido a partir de G, remplazando una arista $\{u, v\} \in A$ por 2 aristas $\{u, w\}, \{w, v\} \in E'$ (w un nuevo vértice).
- Una subdivisión de G es un grafo G' obtenido mediante finitas subdivisiones elementales de G:

$$G \to G_1 \to G_2 \to \cdots \to G_n = G'$$

Corolario 2.9.5. Si G' es una subdivisión de G:

1. $K(G) = K(G')$. En particular: G conexo $\Leftrightarrow$ G' conexo.

2. G plano $\Leftrightarrow$ G' plano.

Corolario 2.9.6. Si un grafo G es plano, entonces todos sus subgrafos son planos también.
Al contrario, si G contiene un subgrafo no plano (por ejemplo: un subgrafo isomorfo a una subdivisión de $K_{3,3}$ o K_5) entonces G no puede ser plano.

Teorema 2.10. Teorema de Kuratowski
Un grafo no es plano si y solo si contiene un subgrafo $G' \subset G$ isomorfo a una subdivisión de $K_{3,3}$ o K_5.

Corolario 2.10.1. Cada inmersión de un grafo plano en el plano define finitas regiones (todas finitas, salvo una)

Teorema 2.11. Sea $G = (V, A)$ un grafo o multigrafo plano conexo con $|V| = v$ y $|A| = a$. Sea r el numero de regiones en el plano determinadas por una inmersión (o representación) plana de G, una de estas regiones tiene un área infinita y se conoce como región infinita, entonces $v - a + r = 2$.

Corolario 2.11.1. Mas generalmente, si G es plano (conexo o no), $v - e + r = 1 + K(G)$.

Definición 2.39. Sea $G = (V, A)$ un grafo plano con $r \geq 1$ regiones $R_1, \cdots, R_r$ a través de una inmersión dada en el plano.
Dado $i \in [1, \cdots, r]$ el grado de R_i es el numero de aristas que forman la frontera de R_i.

Corolario 2.11.2. $\sum_{i=1}^{r} gr(R_i) = 2a$ $(= 2|A|)$.

Corolario 2.11.3. Si $G = (V, A)$ es un grafo simple, sin lazos, conexo, plano y no vació, entonces $3r \leq 2e$ y $e \leq 3v - 6$.