

# Matemática Discreta 1

Santiago Sierra

4 de noviembre de 2022

## Índice

<b>1. Relaciones</b>	<b>2</b>
1.1. Definición de Relaciones . . . . .	2
1.2. Tipos de relaciones . . . . .	3
1.3. Producto, unión e intersección de relaciones . . . . .	3
1.4. Representación matricial y dígrafos . . . . .	4
1.4.1. Representación matricial . . . . .	4
1.4.2. Dígrafos de relaciones . . . . .	5
1.5. Relaciones de equivalencia y particiones . . . . .	5
1.6. Conjuntos parcialmente ordenados . . . . .	6
<b>2. Teoría de Grafos</b>	<b>7</b>

# 1. Relaciones

## 1.1. Definición de Relaciones

**Definición 1.1.** Para los conjuntos  $A, B \subseteq U$ , el producto cartesiano de  $A$  y  $B$  se denota por  $A \times B$ , y

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

**Corolario 1.0.1.** Notamos como  $|A|$  al cardinal de un conjunto, que representa la cantidad de elementos en  $A$ .

**Corolario 1.0.2.** Si los conjuntos  $A, B$  son finitos, se sigue de la regla del producto que  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ . Aunque generalmente no ocurre que  $A \times B = B \times A$ , tenemos que  $|A \times B| = |B \times A|$ .

**Definición 1.2.** Para los conjuntos  $A, B \subseteq U$ , cualquier subconjunto de  $A \times B$  es una relación de  $A$  en  $B$ . A los subconjuntos de  $A \times A$  se les llama relaciones sobre  $A$ .

**Definición 1.3.** Relación binaria

Una relación binaria es un conjunto de pares ordenados pertenecientes al producto cartesiano de dos conjuntos que cumple una propiedad  $P(a, b)$  en particular, es decir:

$$R = \{(a, b) \in A \times B / P(a, b)\}$$

Notaremos como  $aRb$  para indicar que  $(a, b) \in R$  y  $a \not R b$  para expresar que  $(a, b) \notin R$

**Corolario 1.0.3.** En general, para conjuntos finitos  $A, B$ , existen  $2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|}$  relaciones de  $A$  en  $B$ , incluyendo la relación vacía y la propia relación  $A \times B$ .

**Definición 1.4.** Relación inversa Si  $R$  es una relación sobre  $A$ , entonces  $R^{-1}$  es una relación sobre  $A$  definida por  $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x, \forall x, y \in A$ .

Es decir, da vuelta el par ordenado.

**Corolario 1.0.4.**  $(R^{-1})^{-1} = R$ .

**Corolario 1.0.5.**  $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$ .

**Definición 1.5.**  $\bar{R} = R^C = A \times A - R = \{(a, b) \in A \times A : (a, b) \notin R\}$ .

$$a\bar{R}b \Leftrightarrow a \not R b$$

## 1.2. Tipos de relaciones

**Definición 1.6.** Sea  $R$  una relación en un conjunto  $A$ :

- La relación  $R$  es reflexiva si:

$$\forall a \in A, aRa$$

- La relación  $R$  es irreflexiva si:

$$\forall a \in A, a \not R a$$

- La relación  $R$  es simétrica si:

$$\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow bRa$$

- La relación  $R$  es anti-simétrica si:

$$\left. \begin{array}{l} aRb \\ bRa \end{array} \right\} \Rightarrow a = b$$

- La relación  $R$  es asimétrica si:

$$aRb \Rightarrow b \not R a$$

Una relación asimétrica no puede ser reflexiva ni simétrica, e implica la anti-simétrica.

- La relación  $R$  es transitiva si:

$$\left. \begin{array}{l} aRb \\ bRc \end{array} \right\} \Rightarrow aRc$$

**Corolario 1.0.6.**  $R$  es simétrica  $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ .

**Corolario 1.0.7.** Si  $R$  es reflexiva, simétrica, etc,  $R^{-1}$  es del mismo tipo.

**Definición 1.7.** Una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  es un orden parcial, o una relación de orden parcial, si  $R$  es reflexiva, anti-simétrica y transitiva.

**Definición 1.8.** Una relación de equivalencia  $R$  sobre un conjunto  $A$  es una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

## 1.3. Producto, unión e intersección de relaciones

**Definición 1.9.** Si  $A, B, C$  son conjuntos y  $R \subseteq A \times B$  y  $S \subseteq B \times C$ , entonces la relación compuesta  $RS$  es una relación de  $A$  en  $C$  definida como  $RS = \{(x, z) / x \in A \wedge z \in C \wedge \exists y \in B / (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$ .

**Teorema 1.1.** Sean  $A, B, C, D$  conjuntos y  $R_1 \subseteq A \times B$ ,  $R_2 \subseteq B \times C$ ,  $R_3 \subseteq C \times D$ . Entonces  $R_1(R_2R_3) = (R_1R_2)R_3$ .

**Definición 1.10.** Dado un conjunto  $A$  y una relación  $R$  sobre  $A$ , definimos las potencias de  $R$  en forma recursiva como:

- $R^1 = R$ .
- Para  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $R^{n+1} = R R^n$ .

**Ejemplo 1.1.** Si  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ , entonces  $R^2 = \{(1, 4), (1, 2), (3, 4)\}$ ,  $R^3 = \{(1, 4)\}$  y para  $n \geq 4$ ,  $R^n = \emptyset$ .

## 1.4. Representación matricial y dígrafos

### 1.4.1. Representación matricial

**Definición 1.11.** Una matriz cero-uno  $m \times n$ ,  $E = (e_{ij})_{m \times n}$  es una disposición rectangular de números en  $m$  filas y  $n$  columnas, donde cada  $e_{ij}$  para  $1 \leq i \leq m$ , y  $1 \leq j \leq n$ , denota la entrada de la  $i$ -ésima columna de  $E$  y cada una de dichas entradas es 0 o 1.

**Definición 1.12.** Si  $R$  es una relación entre  $A$  y  $B$ , entonces  $R$  puede ser representado por la matriz  $M$  cuyos índices de fila y columna indexan los elementos de  $a$  y  $b$ , respectivamente, de manera que las entradas de  $M$  quedan definidas por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & aRb \\ 0 & a \not R b \end{cases}$$

**Corolario 1.1.1.** Sea  $A$  un conjunto y  $R$  una relación sobre  $A$ , si  $M(R)$  es la matriz de la relación, entonces:

- $M(R) = 0$ , la matriz con todos los elementos iguales a 0, si y sólo si  $R = \emptyset$ .
- $M(R) = 1$ , la matriz con todos los elementos iguales a 1, si y sólo si  $R = A \times A$ .
- $M(R^m) = [M(R)]^m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

**Corolario 1.1.2.** Sean  $R$  y  $S$  relaciones, y  $M(R)$ ,  $M(S)$  sus matrices respectivamente, entonces  $M(R) \cdot M(S) = M(RS)$ , pero ningún término excede el 1.

**Definición 1.13.** Sean  $E$  y  $F$  dos matrices cero-uno  $m \times n$ . Decimos que  $E$  es menor que  $F$  y escribimos  $E \leq F$ , si  $e_{ij} \leq f_{ij}$ , para todos  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

En caso que exista al menos un elemento que no cumpla esto, las matrices no son comparables

**Ejemplo 1.2.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \not\leq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Definición 1.14.** Intersección o producto coordenada a coordenada

Si  $M, N \in \mathcal{M}_{r \times s} \Rightarrow M \cap N \in \mathcal{M}_{r \times s} / (M \cap N) = M_{ij} \cdot N_{ij}$ .

**Teorema 1.2.** Dado un conjunto  $A$  con y una relación  $R$  sobre  $A$ , sea  $M$  la matriz de relación para  $R$ , entonces:

- $R$  es reflexiva  $\Leftrightarrow Id_{|A|} \leq M$ . En el caso contrario, es irreflexiva.
- $R$  es simétrica  $\Leftrightarrow M = M^t$ .
- $R$  es transitiva  $\Leftrightarrow MM = M^2 \leq M$ .
- $R$  es anti-simétrica  $\Leftrightarrow M \cap M^t \leq Id_{|A|}$ .  
Recordar, esta matriz se forma operando los elementos correspondientes de  $M$  y  $M^t$  con las reglas  $0 \cap 0 = 0 \cap 1 = 1 \cap 0 = 0$  y  $1 \cap 1 = 1$  (lo mismo que multiplicación coordenada a coordenada).

**Corolario 1.2.1.** Sean las relaciones  $R$ ,  $S$ , y  $M(R)$ ,  $M(S)$  las matrices de las relaciones, entonces:

- $M(R)^t = M(R^{-1})$ .
- $M(R) + M(S) = M(R \cup S)$ .
- $M(R) \cap M(S) = M(R \cap S)$ .

**Corolario 1.2.2.** Conteo de Relaciones

Sea  $|A| = n$ :

- Cantidad de relaciones reflexivas:  $2^{n^2-n}$   
Tenemos 2 posibilidades, 0 o 1, en la diagonal siempre tiene que haber 1, y la matriz va a tener un total de  $n^2$  entradas, y les restamos  $n$  que son las entradas que ya están ocupadas por la diagonal.
- Cantidad de relaciones simétricas:  $2^{\frac{n^2+n}{2}}$   
Devuelta, 2 posibilidades, la diagonal no importan las entradas si son 0 o 1, solo que sea simétrica, por lo que podemos elegir las entradas de la triangular superior y se determinan las del otro lado, que son  $\frac{n^2-n}{2}$ , pero les sumamos  $n$  de la diagonal,  $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n^2+n}{2}$ .
- Cantidad de relaciones anti-simétricas:  $2^n 3^{\frac{n^2-n}{2}}$   
Las posibilidades de la diagonal son  $2^n$ , y fuera de la diagonal, los elementos  $m_{ij}$  y  $m_{ji}$ , pueden ser ambos 0, o uno 0 y el otro 1, por lo que son 3 posibilidades, y determinando la triangular superior ya se determina el otro lado, y son  $\frac{n^2-n}{2}$  entradas.

**1.4.2. Dígrafos de relaciones**

**Definición 1.15.** Sea  $A$  un conjunto finito no vacío, un grafo dirigido o dígrafo  $G$  sobre  $A$  esta formado por los elementos de  $A$ , llamados vértices o nodo de  $G$ , y un subconjunto  $E$  de  $A \times A$ , conocido como las aristas o arcos de  $G$ . Si  $a, b \in V$  y  $(a, b) \in E$ , entonces existe una arista de  $a$  a  $b$ .

El vértice  $a$  es el origen o fuente de la arista, y  $b$  es el termino, o vértice terminal, y decimos que  $b$  es adyacente desde  $a$ , y que  $a$  es adyacente hacia  $b$ . Además, si  $a \neq b$ , entonces  $(a, b) \neq (b, a)$ . Una arista de la forma  $(a, a)$  es un lazo en  $a$ .

**1.5. Relaciones de equivalencia y particiones**

**Definición 1.16.** Dado un conjunto  $A$  y un conjunto de índices  $I$ , sea  $\emptyset \neq A_i \subseteq A \forall i \in I$ . Entonces  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una partición de  $A$  si

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i \text{ y } A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j \in I / i \neq j$$

Cada subconjunto  $A_i$ , es una celda o bloque de la partición.

**Definición 1.17.** Sea  $R$  una relación de equivalencia sobre un conjunto  $A$ . Para cualquier  $x \in A$ , la clase de equivalencia de  $x$ , que se denota con  $[x]$ , se define como  $[x] = \{y \in A / yRx\}$ .

**Teorema 1.3.** Si  $R$  es una relación de equivalencia sobre un conjunto  $A$ , y  $x, y \in A$ , entonces

- $x \in [x]$ .
- $xRy \Leftrightarrow [x] = [y]$ .
- $[x] \neq [y] \Rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$  o  $[a] \cap [b] \Rightarrow [a] = [b]$ .

**Teorema 1.4.** Si  $A$  es un conjunto, entonces:

- Cualquier relación de equivalencia  $R$  sobre  $A$  induce una partición de  $A$ .
- Cualquier partición de  $A$  da lugar a una relación de equivalencia  $R$  sobre  $A$ .

**Teorema 1.5.** Para cualquier conjunto  $A$ , existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de relaciones de equivalencia sobre  $A$  y el conjunto de particiones de  $A$ .

**Definición 1.18.** Dada una relación de equivalencia  $R$  en un conjunto  $A$ , se llama conjunto cociente de  $A$  determinado por  $R$  al conjunto formado por todas las clases de equivalencia. Se le representa por  $A/R$ . Es decir:

$$A/R = \{[a] / a \in A\}$$

## 1.6. Conjuntos parcialmente ordenados

Para analizar el concepto de orden, sea  $A$  un conjunto y  $R$  una relación sobre  $A$ , el par  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado, si la relación sobre  $A$  es un orden parcial.

**Definición 1.19.** Diagrama de Hasse

En general, si  $R$  es un orden parcial sobre un conjunto finito  $A$ , construimos un diagrama de Hasse para  $R$  sobre  $A$  trazando un segmento de  $x$  hacia arriba, hacia  $y$ , si  $x, y \in A$  son tales que  $xRy$  y, lo que es mas importante, si no existe otro elemento  $z \in A$  tal que  $xRz$  y  $zRy$ . Si adoptamos el convenio de leer el diagrama de abajo hacia arriba, no es necesario dirigir las aristas.

**Definición 1.20.** Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que  $A$  es totalmente ordenado si  $\forall x, y \in A$  ocurre que  $xRy$  o  $yRx$ .

En este caso, decimos que  $R$  es un orden total.

**Definición 1.21.** Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado, entonces un elemento  $x \in A$  es un elemento maximal de  $A$  si  $\forall a \in A, a \neq x \Rightarrow x \not R a$ . Un elemento  $y \in A$  es un elemento minimal de  $A$  si  $\forall b \in A, b \neq y \Rightarrow b \not R y$ .

**Teorema 1.6.** Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado y  $A$  es finito, entonces  $A$  tiene un elemento maximal y uno minimal.

**Definición 1.22.** Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado, entonces decimos que  $x \in A$  es un elemento mínimo si  $xRa \forall a \in A$ . El elemento  $y \in A$  es un elemento máximo si  $aRy \forall a \in A$ .

**Teorema 1.7.** Si el conjunto parcialmente ordenado  $(A, R)$  tiene un elemento máximo o mínimo, entonces ese elemento es único.

**Definición 1.23.** Sea  $(A, R)$  un conjunto parcialmente ordenado con  $B \subseteq A$ . Un elemento  $x \in A$  es una cota inferior de  $B$  si  $xRb \forall b \in B$ . De manera similar, un elemento  $y \in A$  es una cota superior de  $B$  si  $bRy \forall b \in B$ . Un elemento  $x' \in A$  es una máxima cota inferior o ínfimo de  $B$  si es una cota inferior de  $B$  y si para todas las demás cotas inferiores  $x''$  de  $B$  tenemos que  $x''Rx'$ . De forma análoga,  $y' \in A$  es una mínima cota superior o supremo de  $B$  si es una cota superior de  $B$  y si  $y'Ry''$  para todas las demás cotas superiores de  $y''$  de  $B$ .

**Teorema 1.8.** Si  $(A, R)$  es un conjunto parcialmente ordenado y  $B \subseteq A$ , entonces  $B$  tiene a lo sumo un ínfimo y supremo.

**Definición 1.24.** El conjunto parcialmente ordenado  $(A, R)$  es un retículo si para cualesquiera  $x, y \in A$ , los elementos  $\sup\{x, y\}$  e  $\inf\{x, y\}$  existen en  $A$ .

**Definición 1.25.** Cadena

Sea  $B \subseteq A$ ,  $B$  es cadena si  $\forall a, b \in B$   $aRb$  o  $bRa$ .

**Definición 1.26.** Anticadena

Sea  $B \subseteq A$ ,  $B$  es anticadena si  $\begin{cases} a \not R b \\ b \not R a \end{cases}$  con  $a \neq b$ .

**Teorema 1.9.** Sea  $n$  el largo de la cadena mas larga  $\Rightarrow A$  se puede particionar en  $n$  anticadenas disjuntas. Sea  $m$  la cantidad de elementos de la anticadena mas grande  $\Rightarrow A$  se puede particionar en  $m$  cadenas disjuntas.

## 2. Teoría de Grafos

**Definición 2.1.** Sea  $V$  un conjunto finito no vacío, y sea  $A \subseteq V \times V$ . El par  $(V, A)$  es un grafo sobre  $V$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices o nodos, y  $A$  es su conjunto de aristas. Escribimos  $G = (V, A)$  para denotar tal grafo.

**Corolario 2.0.1.** Para cualquier arista  $(a, b) \in A$  se dice que:

- La arista  $(a, b)$  es incidente con los vértices  $a$  y  $b$ .
- $a, b$  son los extremos de  $(a, b)$ .
- $a$  es el origen de  $(a, b)$ .
- $b$  es el termino de  $(a, b)$ .

**Definición 2.2.** Dados dos vértices  $u, v \in V$  con  $G = (V, A)$ , decimos que son vértices adyacentes si  $(u, v) \in A$ , además se dice que  $u$  y  $v$  son adyacentes, y que  $u$  es adyacente hacia  $v$ .

**Definición 2.3.** Dados  $v \in V$ ,  $a \in A$  con  $G = (V, A)$ , decimos que la arista  $a$  es incidente al vértice  $v$  si  $\exists u \in V$  tal que  $a = (u, v)$ .

**Definición 2.4.** Una arista de la forma  $(a, a)$  es un lazo.

**Definición 2.5.** Un vértice  $a \in V$  está aislado cuando no hay ningún vértice adyacente con  $a$ .

**Corolario 2.0.2.** Un vértice con un lazo no está aislado.

**Definición 2.6.** Dado  $G = (V, A)$  grafo, llamamos:

- Orden de  $G$  al número de vértices,  $m = |V|$ .
- Tamaño de  $G$  al número de aristas,  $n = |A|$ .

**Definición 2.7.** Camino Sea  $G = (V, A)$  un grafo, un camino (en  $G$ ) es una sucesión finita y alternada de vértices y aristas, de la forma:

$$c = v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n$$

donde  $a_i = (v_{i-1}, v_i)$  y  $1 \leq i \leq n$ .

Siendo  $n$  el número de aristas.

**Corolario 2.0.3.** Un camino puede repetir vértices y/o aristas.

**Definición 2.8.** Un camino  $c = v_0, \dots, v_n$  está cerrado cuando  $v_0 = v_n$ . De otra forma, está abierto.

**Definición 2.9.** Un recorrido es un camino sin repetición de aristas.

**Definición 2.10.** Un camino simple es un camino sin repetición de vértices (con la excepción posible de los extremos).

**Definición 2.11.** Un ciclo es un camino simple cerrado.

**Corolario 2.0.4.** Un ciclo de longitud 1 es un lazo.

- En un grafo dirigido, pueden existir ciclos de longitud 2.
- En un grafo no dirigido todos los ciclos tienen longitud  $\geq 3$ .