ECUACIÓN PROPUESTA PROYECTO ECUACIONES DIFERENCIALES

Kevin Santiago Monroy Ortiz
Sergio Moreno Tabares
Santiago Ubaque Anzola

Ecuación:

$$\frac{dR}{dt} = -\kappa R(t) + s(t)$$

con $k > 0$ y condición inicial $R(0) = R_0$

1. **Reescribir en forma estándar**

$$\frac{dR}{dt} + \kappa R(t) = s(t)$$

Es una ecuación lineal de primer orden con coeficiente k constante.

2. **Factor integrante**

$$\mu(t) = e^{\int \kappa\, dt} = e^{\kappa t}$$

Multiplicamos la ecuación por ($\mu(t)$):

$$e^{\kappa t}\frac{dR}{dt} + \kappa e^{\kappa t} R = e^{\kappa t} s(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\kappa\, t} R(t)\right) = e^{\kappa\, t} s(t)$$

3. **Integrar**

Integramos en (t):

$$e^{\kappa\, t} R(t) = \int_0^t e^{\kappa\, \tau} s(\tau) d\tau + C$$

Aplicando la condición inicial ($R(0) = R_0$):

$$e^0 R_0 = \int_0^0 e^{\kappa\, \tau} s(\tau) d\tau + C \Rightarrow C = R_0$$

Por tanto, la solución general (con la constante ajustada por la condición inicial) es:

$$R(t) = e^{-\kappa t}\left(R_0 + \int_0^t e^{\kappa \tau} s(\tau) d\tau \right)$$

Esta es la solución exacta y explícita para cualquier ($s(t)$) integrable.

4. **Comprobación (diferenciación)**
   Comprobemos que cumple la ecuación diferenciando ($R(t)$).

   Definimos ($I(t) = \int_0^t e^{\kappa \tau} s(\tau) d\tau$). Entonces

$$R(t) = e^{-\kappa t}\big(R_0 + I(t)\big)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\kappa\, e^{-\kappa t}\big(R_0 + I(t)\big) + e^{-\kappa t} I'(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\kappa\, e^{-\kappa t}\big(R_0 + I(t)\big) + s(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\kappa\, R(t) + s(t)$$

   que es exactamente la ecuación original. Comprobado.

5. **Casos particulares útiles**
   - **A. Sin mantenimiento: ($s(t) = 0$).**

$$R(t) = R_0 e^{-\kappa t}$$

     decaimiento exponencial clásico (vida útil determinada por ($\frac{1}{\kappa}$)).

   - **B. Mantenimiento continuo constante: ($s(t) = S$) (constante).**
     Integral: ($\int_0^t e^{\kappa \tau} S\, d\tau = \left(\frac{S}{\kappa}\right)(e^{\kappa t} - 1)$).
     Entonces

$$R(t) = e^{-\kappa t}\left(R_0 + \left(\frac{S}{\kappa}\right)(e^{\kappa t} - 1)\right) = \left(\frac{S}{\kappa}\right) + \left(R_0 - \frac{S}{\kappa}\right) e^{-\kappa t}$$

     Interpretación: existe un valor asintótico ($R(\infty) = \frac{S}{\kappa}$). Si ($\frac{S}{\kappa}$) representa una “recuperación continua”, el rendimiento tiende a ese equilibrio.

C. **Mantenimiento puntual (reparaciones instantáneas):**
Si ($s(t)$) modela impulsos ($\Sigma_j A_j \delta(t - t_j)$), la solución entre impulsos es exponencial ($R(t^-) = R(t_j^+) e^{-\kappa (t - t_j)}$) y en cada ($t_j$) hay un salto ($R(t_j^+) = R(t_j^-) + A_j$). Esto modela intervenciones discretas que aumentan instantáneamente (R).

D. **Mantenimiento periódico (pulsos finitos):**
Se puede modelar ($s(t)$) como sumas de funciones pulso (por ejemplo, rectangulares) y usar la solución general integrando numéricamente para ver el efecto de frecuencia y magnitud de mantenimiento.

6) Observaciones prácticas para el proyecto

- (κ) controla la rapidez de degradación; estimarlo a partir de datos reales (p. ej. benchmark a lo largo del tiempo) permitirá calibrar el modelo.
- ($s(t)$) puede representar:
  - mantenimiento continuo (monto por unidad de tiempo),
  - intervenciones discretas (pulsos o deltas),
  - políticas periódicas (mantenimiento programado cada (T) unidades).
- Con la solución analítica puedes comparar políticas (sin mantenimiento, mantenimiento continuo, mantenimiento periódico) y calcular métricas: tiempo hasta que ($R(t)$) cae bajo un umbral, tiempo promedio entre reemplazos, coste acumulado, etc.