Punto 4.

Muestre que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j$$

Dem:

~~Tenemo~~ Tome $Ax = b$, por lo que obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + & \text{———} & + a_{1n}x_n = b_1 \\ | & & | \quad | \quad | \\ a_{n1}x_1 + & \text{———} & + a_{nn}x_n = b_n \end{matrix}$$

Ahora, la matriz de representación $[A|b]$ del sistema sería:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & - & a_{1n} & b_1 \\ | & | & & | & | \\ a_{n1} & a_{n2} & - & a_{nn} & b_n \end{array}\right] = [A|b]$$

De tal manera que:

$$R_i = (a_{i1} \ a_{i2} - a_{in} \mid b_i) \quad \forall \ i = [0, n]$$

Luego si tomamos $i \in [2, n]$ y $j \in [1, i-1]$, tenemos que:

la operación $\frac{a_{ji}}{a_{ii}} R_i - R_j \to R_j'$ hace $\forall j \neq i \ a_{ji} = 0$.

Por lo tanto:

$$[A|b]' = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & - & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \searrow & | & b_2 \\ | & | & \searrow & 0 & | \\ a_{n1} & a_{n2} & - & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Note que $[A|b]'$ es una matriz triangular superior, por lo tanto podemos despejar los X como:

$$a_{11} x_1 = b_1 \longrightarrow (\dagger)\ x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \longrightarrow x_2 = \frac{b_2 - a_{21} x_1}{a_{22}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n = b_n \longrightarrow (\dagger)\ x_n = \frac{b_n - a_{n(n-1)} x_{n-1} - \cdots - a_{n1} x_1}{a_{nn}}$$

Por lo que, podemos generaliza que:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{ii}} \qquad \forall i \in [2, n]$$

Finalmente, si se toma $a_{ii} = 1$, $\forall\, i \in [2, n]$, obtenemos:

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j \qquad \blacksquare$$