D | M | A

Taller 8. Probabilidad

1. Ejercicios: Axiomas de la probabilidad

1. P_1 y P_2: medidas de probabilidad

$\mathbb{P} = a_1 P_1 + a_2 P_2 \qquad a_1 + a_2 = 1 \qquad a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$

Para saber si $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad se deben verificar los axiomas de Kolmogorov

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Si P_1 y P_2 son medidas de probabilidad entonces

$P_1(\Omega) = 1$

$\mathbb{P}_2(\Omega) = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega) &= a_1 P_1(\Omega) + a_2 P_2(\Omega) \\ &= a_1(1) + a_2(1) \\ &= a_1 + a_2\end{aligned}$$

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ✓

2. $\forall A \in \Im, \mathbb{P}(A) \geq 0$

Si P_1 y P_2 son medidas de probabilidad entonces

$\forall A \in \Im, \mathbb{P}_1(A) \geq 0$ y $\forall A \in \Im, \mathbb{P}_2(B) \geq 0$

$\to \mathbb{P}(A) = a_1 P_1(A) + a_2 \mathbb{P}_2(A)$

Cada uno de estos términos multiplica dos cantidades mayores que cero ya que $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ y $P_1(A), P_2(A) \geq 0$ dado que P_1 y P_2 son espacios medibles. Debido a esto, $\mathbb{P}(A)$ siempre será mayor que cero ó, como mínimo, cuando 2 de estas cantidades sean iguales a cero será igual a cero

$a_1 \mathbb{P}_1(A) \geq 0$ ya que $a_1 \in \mathbb{R}^+$ y $P_1(A) \geq 0$

$a_2 \mathbb{P}_2(A) \geq 0$ ya que $a_2 \in \mathbb{R}^+$ y $P_2(A) \geq 0$

$\to a_1 P_1(A) + a_2 P_2(A) \geq 0 \to \mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Im$ ✓

3. $\mathbb{P}(\cup_i^\infty A_1) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$, si $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j$

Dado que P_1 y P_2 son medidas de probabilidad

$$\begin{aligned}P_1(\cup_i^\infty A_1) &= a_1 P_1(\cup_i^\infty A_i) + a_2 \mathbb{P}_2(\cup_i^\infty A_i) \\ &= a_1 \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_1(A_i) + a_2 \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_2(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_1 \mathbb{P}_1(A_i) + \sum_{i=1}^n a_2 \mathbb{P}_2(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_1 \mathbb{P}_1(A_i) + a_2 \mathbb{P}_2(A_i))\end{aligned}$$

Dado que $\mathbb{P} = a_1 P_1 + a_2 P_2 \to \mathbb{P}(A_i) = a_1 \mathbb{P}_1(A_i) + a_2 \mathbb{P}_2(A_i)$

$\to P_1(\cup_i^\infty A_1) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ ✓

D	M	A

Dado que se cumplen todas los axiomas formulados por Kolmogórov para que los espacios medibles sean espacios de probabilidad, se concluye que $\mathbb{P}$ es un medida de probabilidad

3. Se tiene $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad

Demostración de las propiedades básicas

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

A partir de los axiomas de Kolmogórov se tiene que

$\mathbb{P}(\bigcup_i^\infty A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Dado que $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$
$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$$

$\mathbb{P}(\bigcup_i^\infty A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i) \rightarrow P(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\cancel{A}) + \mathbb{P}(\cancel{B}) - (\cancel{\mathbb{P}(A)} + \mathbb{P}(\cancel{B})) = 0$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ✓

b) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

De los axiomas de Kolmogórov se tiene que
$\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Debido a que Ω es el conjunto que contiene a todos los conjuntos y además es un espacio de probabilidad $P(\bigcup_i^\infty A_i) = \Sigma_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$, $\mathbb{P}(\Omega)$ debes ser la sumatoria de la probabilidad de todos los eventos que sucedieron y la probabidad de que no sucedieron estos mismos.

Es decir $P(\Omega) = \Sigma_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i^c)$

Para un solo evento que tiene cierta probabilidad de suceder y otra de no suceder, se tiene que

$P(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = 1$

$\mathbb{P}(A^c) = 1 - P(A)$ ✓

f) $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$

Debido a que $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad, según los axiomas de Kolmogórov

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \quad \text{si} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$A_1 = A \to i \neq j$ ✓
$A_2 = B$

$\to \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(\emptyset)$ Anteriormente se mostró que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
$\to \mathbb{P}(A\cap B) = \emptyset$

$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) =$

$A = A_1 \to \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right)$
$B = A_2$

Finalmente, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A\cup B)$

Por lo tanto $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A\cup B)$ ✓

Ejercicios: Probabilidad condicional y total

2. Se tienen dos urnas

Urna	Rojas	Negras	Verdes	Total
1	3	1	6	10
2	6	2	2	10

$\mathbb{P}(1)$: Probabilidad de sacar una bola de la urna 1
$\mathbb{P}(2)$: " " " " " " " 2
$\mathbb{P}(1) = 2/6 = 1/3$
$\mathbb{P}(2) = 4/6 = 2/3$

a) Sea Roja: $\mathbb{P}(R) = 1/2$

Dado un suceso B de una partición muestral, por el teorema de la probabilidad se establece que

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1} \mathbb{P}(B/A_i)\,\mathbb{P}(A_i)$$

$$\to \mathbb{P}(R) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(R/A_i)\,\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(R/1)\,\mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(R/2)\,\mathbb{P}(2)$$
$$= (3/10)(1/3) + (3/5)(2/3)$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \checkmark$$

b) Sea negra: $\mathbb{P}(N) = 1/6$

De la misma manera que en el inciso anterior

$$\mathbb{P}(N) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}(N/A_i)\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(N/1)\mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(N/2)\mathbb{P}(2)$$
$$= (1/10)(1/3) + (1/5)(2/3)$$
$$= \frac{1}{30} + \frac{2}{15} = \frac{75}{450} = \frac{25}{150} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \checkmark$$

c) Sea de la urna 1 si se ha obtenido una bola negra: $\mathbb{P}(1/N) = 1/5$

A partir del teorema de Bayes se tiene que

$$P(A_i/B) = \frac{\mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B/A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

$$P(1/N) = \frac{\mathbb{P}(N/1)\mathbb{P}(1)}{\mathbb{P}(N/1)\mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(N/2)\mathbb{P}(2)} = \frac{(1/10)(1/3)}{(1/10)(1/3) + (1/5)(2/3)} = \frac{1/30}{(1/30) + (2/15)}$$

$$= \frac{1/30}{5/30} = \frac{1}{5} \checkmark$$

d) Sea de la urna 2 si se ha obtenido una bola negra: $\mathbb{P}(2/N) = 4/5$

Igualmente que en el inciso anterior, por teorema de Bayes se obtiene que

$$P(2/N) = \frac{\mathbb{P}(N/2)\mathbb{P}(2)}{\mathbb{P}(N/1)\mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(N/2)\mathbb{P}(2)} = \frac{(1/5)(2/3)}{(1/10)(1/3) + (1/5)(2/3)} = \frac{2/15}{5/30} = \frac{4}{5} \checkmark$$

Ejercicios: Técnicas de conteo.

20. Demostración fórmula combinaciones con repetición

$$C_r^n = \binom{n+r-1}{r}$$

Para empezar, las combinaciones con repetición de un conjunto son las distintas formas en que se puede hacer una selección de elementos de un conjunto dado, permitiendo que las selecciones puedan repetirse.

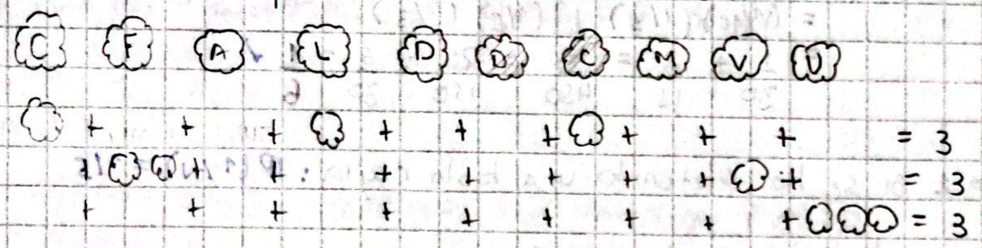
Es decir, se tienen objetos de n tipos diferentes, ¿cuántas k-disposiciones se pueden formar usando estos, si no se toma en cuenta el orden de los elementos en la disposición

De manera similar a los coeficientes binomiales o combinaciones $\binom{n}{k}$ corresponde al número de formas en que se puede seleccionar un subconjuntos de k elementos a partir de un conjunto dado con n elementos.

D | M | A

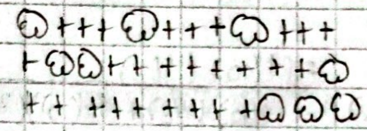
Ahora, para deducir la formula para combinaciones con repeticion se plantea el siguiente ejemplo:

En la heladeria tienen 10 sabores de helado. ¿De cuántas maneras diferentes se puede pedir un cucurucho con 3 bolas?



Arriba se tienen 3 formas diferentes de armar un helado con tres bolas sin importar que estas se repitan

Para el primer caso



Siempre se tienen 9 signos "+", es decir **n-1** (siendo **n** el numero total de sabores de helado) y 3 bolas. En total son 12 elementos

Lo que se está realizando es la permutacion de estos **12** elementos, por lo tanto, la cantidad de helados que se pueden pedir va a ser igual a las permutaciones de **12** elementos **(10 - 1 + 3)** con repeticiones de **3** bolas y repeticiones de **9** (los signos **+**)

Para la permutacion con repeticion se tiene que

$$P_{12}^{3,9} = \frac{12!}{3!\ 9!}$$

Ademas, como se menciono anteriormente $\binom{n}{k}$ corresponde al numero de formas en que se puede seleccionar un subconjunto de **k** elementos a partir de un conjunto dado con **n** elementos, por lo tanto

$n = 12$
$k = 3$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{12!}{3!\,9!}$$

Finalmente, la formula para las combinaciones con repeticion se puede escribir como

$n = 10$ # Sabores de helado
$r = 3$ # bolas de helado

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \binom{n-1+r}{r} = \binom{n+r-1}{r}$$

$$C_r^n = \binom{n+r-1}{r} \checkmark$$

KeeperMaté