D | M | A

Ejercicios álgebra lineal

5 Sustitución hacia atrás

Para empezar, cuando se quiere resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución hacia atrás, se debe llevar el sistema a la forma triangular superior.

De esta manera, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} + \cdots + a_{1n} &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23} + \cdots + a_{2n} &= b_2 \\ a_{33} + \cdots + a_{3n} &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{mn} &= b_m \end{aligned}$$

De forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{1n} \\ a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2n} \\ a_{33} + \cdots + a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & 0 & a_{33} \cdots & a_{3n} & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{mn} & b_n \end{array}\right)}_{}$$

Matriz aumentada

Para hallar más fácilmente el patrón, se puede tomar, por ejemplo, $m,n=5$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & b_5 \end{array}\right)$$

Despejando las ecuaciones de la filas:

$a_{55}x_5 = b_5 \rightarrow x_5 = b_5/a_{55}$ (1)

$a_{44}x_4 + a_{45}x_5 = b_4 \rightarrow x_4 = \dfrac{b_4 - a_{45}x_5}{a_{44}}$ (2)

$a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3 \rightarrow x_3 = \dfrac{b_3 - (a_{34}x_4 + a_{35}x_5)}{a_{33}}$ (3)

$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \rightarrow x_2 = \dfrac{b_2 - (a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5)}{a_{22}}$ (4)

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \rightarrow x_1 = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5)}{a_{11}}$

Debido a que todas la componentes del vector x cumplen con un mismo patrón se puede escribir de forma general

$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)/a_{ii}$ por ejemplo $i=1 \rightarrow x_1 = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5)}{a_{11}}$