Ejercicios integración

1 Método de trapecio simple

Para la integral definida:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Para este método se cambia el integrando por un polinomio interpolador de grado uno, el cual se define en el conjunto

$$\Omega = \{(a, f(a)), (b, f(b))\}$$

Utilizando el método de interpolación de Lagrange, el polinomio interpolador es:

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{1} f(x_i)L_i(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \quad \forall x \, [a,b]$$

De modo que el valor de la integral es aproximadamente

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b P_1(x)dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} f(a)\,dx + \int_a^b \frac{x-a}{b-a} f(b)dx$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\int_a^b x-b\,dx + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b x-a\,dx = \frac{f(a)}{a-b}\left(\int_a^b x\,dx - b\int_a^b dx\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\int_a^b x\,dx - a\int_a^b dx\right)$$

$$= \frac{f(a)}{a-b}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_a^b - bx\Big|_a^b\right) + \frac{f(b)}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_a^b - ax\Big|_a^b\right) =$$

$$= \frac{f(a)}{(a-b)}\left[\frac{(b^2-a^2)}{2} - b^2 + ba\right] + \frac{f(b)}{(b-a)}\left[\frac{(b^2-a^2)}{2} - ab + a^2\right]$$

$$= \frac{-f(a)}{2(b-a)}\left[b^2-a^2-2b^2+2ba\right] + \frac{f(b)}{2(b-a)}\left[b^2-a^2-2ab+2a^2\right]$$

$$-\frac{f(a)\left[-b^2-a^2+2ab\right]+f(b)\left[b^2+a^2-2ab\right]}{2(b-a)}$$

$$\frac{f(a)\left[a^2+b^2-2ab\right]+f(b)\left[a^2+b^2-2ab\right]}{2(b-a)}$$

$$\frac{f(a)+f(b)\left[(b-a)^2\right]}{2\cancel{(b-a)}} = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

2. Error para la regla de trapecio simple

Cuando se realiza la interpolación se introdujo un error de estimación asociado a esta. Suponiendo que $f(x)$ es continua y derivable de clase C^2 en el intervalo $[a,b]$

$$f(x) = P_1(x) + \epsilon(x)$$

Al expandir por polinomios de Taylor

$$\epsilon(x) = \frac{f''(\xi)(x-a)(x-b)}{2} \qquad a \le \xi \le b$$

· El error asociado a la integración por el método de trapecio está dado por

$$E = \int_a^b \epsilon(x)\,dx$$

$$E = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b) = \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x^2-(a+b)x+ab)\,dx$$

$$\frac{f''(\xi)}{2}\left(\int_a^b x^2dx-(a+b)\int_a^b x\,dx+ab\int_a^b dx\right) = \frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_a^b-(a+b)\frac{x^2}{2}\Big|_a^b+abx\Big|_a^b\right)$$

$$\frac{f''(\xi)}{2}\left(\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{(a+b)}{2}(b^2-a^2)+ab(b-a)\right)$$

$$\frac{f''(\xi)}{12}\left(2(b^3-a^3)-3(a+b)(b^2-a^2)+6ab(b-a)\right) =$$

$$\frac{f''(\xi)}{12}\left(2b^3-2a^3-3ab^2-3b^3+3a^3+3a^2b+6ab^2-6a^2b\right)$$

$$\frac{f''(\xi)}{12}(-b^3+3ab^2-3a^2b+a^3)$$

$$-\frac{f''(\xi)}{12}(b^3-3ab^2+3a^2b-a^3) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 = \frac{f''(\xi)}{12}h^3$$

D | M | A

3. Regla de Simpson simple.

Para la integral definida

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

Se cambia el integrando por un polinomio interpolador de grado dos, definido en el conjunto $\Omega=\{(a,f(a)),(x_m,f(x_m)),(b,f(b))\}$ con $x_m=\frac{a+b}{2}$

Con el método de interpolación de Lagrange, el polinomio interpolador se define como

$$f(x)\approx P_2(x)=\frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)}f(x_m)+\frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}f(b)\quad \forall x\in[a,b]$$

De modo que la integral tiene un valor aproximado:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b P_2(x)dx=\int_a^b\frac{(x-b)(x-x_m)}{(a-b)(a-x_m)}f(a)dx+\int_a^b\frac{(x-a)(x-b)}{(x_m-a)(x_m-b)}f(x_m)dx+\int_a^b\frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}f(b)dx$$

$$=\frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\int_a^b(x^2-(b+x_m)x+bx_m)dx+\frac{f(x_m)}{(x_m-a)(x_m-b)}\int_a^b(x^2-(a+b)x+ab)dx$$

$$+\frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\int_a^b x^2-(a+x_m)x+ax_m\,dx$$

El primer término es:

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b-\frac{(b+x_m)}{2}x^2\Big|_a^b+bx_m\,x\Big|_a^b\right)$$

$$=\frac{f(a)}{(a-b)(a-x_m)}\left(\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{(b+x_m)}{2}(b^2-a^2)+bx_m(b-a)\right)$$

$$=\frac{f(a)}{6(a-b)(a-x_m)}\left(2(b^3-a^3)-3(b+x_m)(b^2-a^2)+6bx_m(b-a)\right)$$

$$=\frac{f(a)}{6(a-b)(a-x_m)}\left(2b^3-2a^3-3b^3-3x_mb^2+3a^2b+3x_ma^2+6x_mb^2-6abx_m\right)$$

$$=\frac{f(a)}{6(a-b)(a-x_m)}\left(-b^3-3x_mb^2+3a^2b+3x_ma^2+6x_mb^2-6abx_m-2a^3\right)$$

El segundo término es:

$$\frac{f(x_m)}{6(x_m-a)(x_m-b)}\left(2(b^3-a^3)-3(a+b)(b^2-a^2)+6ab(b-a)\right)$$

$$=\frac{-f(x_m)}{6(x_m-a)(x_m-b)}\left(b^3-3ab^2+3a^2b-a^3\right)=\frac{-f(x_m)}{6(x_m-a)(x_m-b)}(b-a)^3=\frac{-f(x_m)h^3}{6(x_m-a)(x_m-b)}$$

FeperMate

El tercer término es:

$$\frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\left(2(b^3-a^3)-3(a+x_m)(b^2-a^2)+6a\,x_m(b-a)\right)$$

$$=\frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\left(2b^3-\underline{2a^3}-\underline{3ab^2}-3\underline{x_m b^2}+\underline{3a^3}+3a^2\underline{x_m}+6x_m ab-6a^2x_m\right)$$

$$=\frac{f(b)}{(b-a)(b-x_m)}\left(-a^3-3ab^2-3x_m b^2+3a^2x_m+6x_m ab-6a^2x_m+2b^3\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{f(a)}{6(a-b)(a-x_m)}\left(-b^3-3x_m b^2+3a^2b+3x_m a^2+6x_m b^2-6ab\,x_m-2a^3\right)$$

$$-\frac{f(x_m)b^3}{6(x_m-a)(x_m-b)}+\frac{f(b)}{6(b-a)(b-x_m)}\left(-a^3-3ab^2-3x_m b^2+3a^2x_m+6x_m ab-6a^2x_m+2b^3\right)$$