

**Práctico 7: Circuitos RLC con corriente alterna. Resonancia.**

**1. Introducción.**

En este práctico se estudiará la respuesta en frecuencia, o función de transferencia, de circuitos RLC (con resistencias, inductancias y capacitores) a los que se les aplica una tensión de corriente alterna (CA). A lo largo de este laboratorio se utilizarán los conceptos desarrollados en la guía “Anexo: Corriente alterna, conceptos y fundamentos”.

Como se verá, la respuesta en frecuencia de los circuitos RLC tiene la característica de lo que se denomina **filtro pasa banda** (PBd) o **filtro elimina banda** (EBd) de banda estrecha o angosta. Un filtro PBd ideal deja pasar, es decir no atenúa, señales de CA que poseen frecuencias dentro de una región determinada de valores, toda señal que posee una frecuencia fuera de ese rango será atenuada completamente. Por otro lado, un filtro EBd actúa de manera opuesta al PBd, atenúa completamente las señales con frecuencias correspondientes a un rango de valores y deja pasar las señales con frecuencias fuera de ese rango. En el caso de los filtros reales, no ideales, las señales pasarán con un poco de atenuación o no serán completamente atenuadas, de acuerdo a la frecuencia de las mismas. Los filtros PBd o EBd de banda angosta o estrecha son aquellos en donde la región de paso o de eliminación de frecuencias corresponde a valores muy cercanos a una frecuencia que se denomina de resonancia del circuito.

En los circuitos eléctricos, la condición de resonancia se produce cuando para una determinada frecuencia el módulo de la impedancia de una parte del circuito se anula o tiende a infinito. A dicha frecuencia se la denomina frecuencia de resonancia del circuito. Este efecto que se produce en la impedancia es aprovechado para construir filtros PBd o EBd de banda estrecha.

A continuación se estudiarán dos tipos de circuitos RLC, uno donde todos sus componentes están en serie (RLC serie) y otro donde la resistencia está en serie con una inductancia y un capacitor que se encuentran conectados en paralelo entre sí (RLC compuesto). El análisis de la respuesta en frecuencia de dichos circuitos pondrá en evidencia cómo la situación de resonancia llevará a una respuesta del tipo filtro PBd en el RLC serie y de tipo filtro EBd en el RLC compuesto.

**2. Circuito RLC serie. Filtro pasa banda estrecho.**

En la Figura 1 (a) se muestra el conexionado para la medición de la función de transferencia  $G(\nu)$  en un circuito RLC serie. Para la obtención de dicha función de transferencia, se obtendrá la relación entre las tensiones complejas  $V_S/V$ . La impedancia dada por la combinación de la inductancia y el capacitor, llámese  $Z_{LC}$ , estará dada por

$$Z_{LC} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\omega L \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] = jX_{LC},$$

(1)

donde se definió

$$\boxed{\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}}, \quad X_{LC} \equiv \omega L \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right], \quad (2)$$

con  $\omega_0$  definida como la frecuencia angular de resonancia, siendo  $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$  la frecuencia de resonancia.

La impedancia total del circuito será

$$\boxed{Z = R + Z_{LC} = R + j\omega L \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}, \quad (3)$$

y la corriente total que ingresa al circuito estará dada por

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V/R}{1 + j \frac{\omega L}{R} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}, \quad (4)$$

donde el módulo y la fase de la corriente serán respectivamente

$$\boxed{|I| = \frac{V_0/R}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega L}{R} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^2}}, \quad \angle I = -\tan^{-1} \left\{ \frac{\omega L}{R} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] \right\}}, \quad (5)$$

siendo el módulo y la fase de la tensión de entrada respectivamente definidos como  $|V| \equiv V_0$  y  $\angle V = 0$ .

Finalmente, para la función de transferencia del circuito RLC serie se tiene

$$G_{\text{PBd}}(\omega) = \frac{V_S}{V} = \frac{I R}{V} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega L}{R} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]}, \quad (6)$$

donde las siglas PBd son usadas para indicar que el comportamiento de ( 6 ) es del tipo de filtro pasa banda, como se verá más adelante en esta guía. El módulo y la fase de la función de transferencia serán respectivamente

$$\boxed{|G_{\text{PBd}}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\omega L}{R} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^2}}, \quad \angle G_{\text{PBd}}(\omega) = -\tan^{-1} \left\{ \frac{\omega L}{R} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] \right\}}, \quad (7)$$

La condición de resonancia se define cuando la frecuencia de la señal de entrada de CA es igual a la frecuencia de resonancia, esto es  $\omega = \omega_0$  (o  $\nu = \nu_0$ ), lo cual produce en el circuito RLC serie que la impedancia  $Z_{LC}$  se anule (ver ecuación ( 1 )), que la impedancia total  $Z$  sea igual a la resistencia  $R$  (ver ecuación ( 3 )), que la corriente sea solo definida por la resistencia y esté en fase con la tensión (ver ecuación ( 5 )), y que la función de transferencia sea igual a 1 (ver ecuaciones ( 6 ) y ( 17 )), esto es

$$\omega = \omega_0 (\nu = \nu_0) \Rightarrow Z_{LC} = 0 \Rightarrow Z = R \Rightarrow |I| = \frac{V_0}{R}, |I| = 0 \Rightarrow G_{\text{PBd}}(\omega_0) = 1. \quad (8)$$

Observando las expresiones ( 5 ) y ( 7 ), se puede concluir que tanto el módulo de la corriente como el de la función de transferencia tienen su máximo cuando la frecuencia es igual a la de resonancia, es decir

$$|I|_{\omega=\omega_0} = \frac{V_0}{R} = |I|_{\text{max}}, \quad |G_{\text{PBd}}(\omega_0)| = 1 = |G_{\text{PBd}}(\omega)|_{\text{max}}. \quad (9)$$

Además, de la expresión en ( 5 ) para la fase de la corriente, podemos concluir que para frecuencias menores que  $\omega_0$  la fase tiene signo positivo, por lo que la corriente adelanta con respecto a la tensión de

entrada y esto indica que la reactancia del circuito se comporta capacitivamente (de la expresión en ( 1 ) se observa que  $X_{LC} < 0$  y  $Z_{LC}$  es un número complejo puro con signo negativo si  $\omega < \omega_0$ ). Lo opuesto ocurre para frecuencias mayores que  $\omega_0$ , la fase de la corriente tiene signo negativo, por lo que esta atrasa con respecto a la tensión de entrada y esto indica que la reactancia del circuito se comporta inductivamente (de la expresión en ( 1 ) se observa que  $X_{LC} > 0$  y  $Z_{LC}$  es un número complejo puro con signo positivo si  $\omega > \omega_0$ ).

A continuación se define el denominado ancho de banda ( $BW$ ) y el factor de calidad ( $Q$ ) del circuito. También se realizará el estudio del comportamiento de la función de transferencia  $G_{PBd}(\nu)$  y de la potencia activa en función de la frecuencia. Concluiremos esta sección con un análisis sobre la influencia de la resistencia del inductor ( $R_L$ ) en la respuesta en frecuencia previamente estudiada.

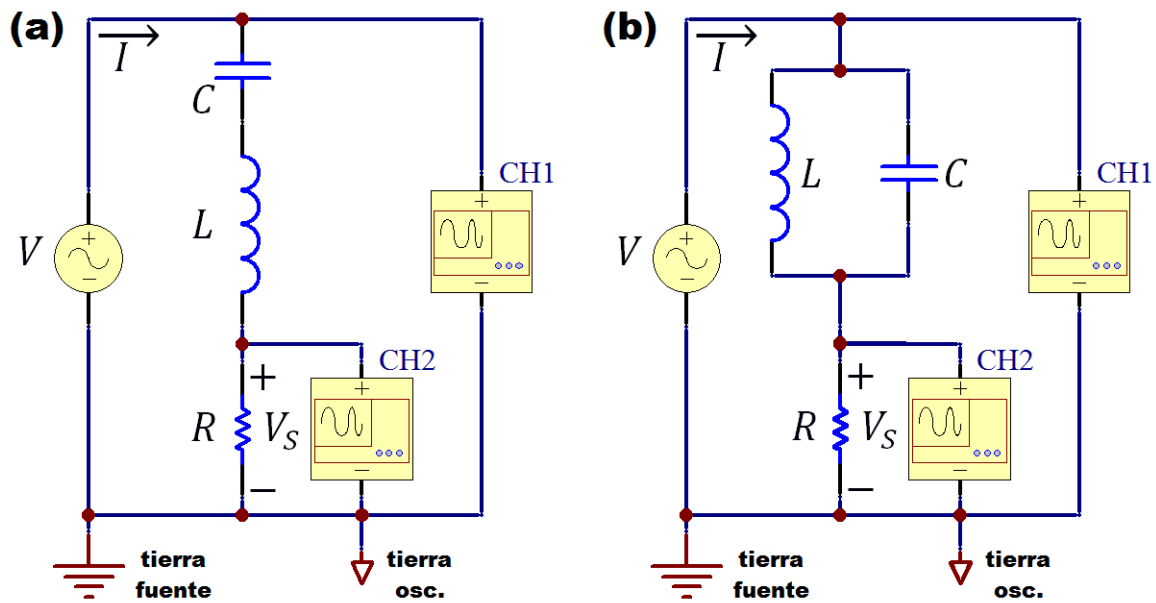


Figura 1: Circuito RLC serie (a) y compuesto (b), conexionado para la medición de la función de transferencia  $G(\nu)$ .

### **Definición del ancho de banda ( $BW$ ) y del factor de calidad ( $Q$ ) en un circuito RLC serie.**

El ancho de banda ( $BW$ , del inglés ‘Bandwidth’) de la función de transferencia, para un circuito RLC serie, se define como el rango de frecuencias en donde el módulo de la función de transferencia es mayor o igual a  $1/\sqrt{2}$  ( $|G_{PBd}(\omega)| \geq 1/\sqrt{2}$ ). Para obtener el ancho de banda se buscan las frecuencias donde se cumple  $|G_{PBd}(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ , de la expresión para el módulo en ( 7 ) esto lleva a que

$$1 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^2 = 2 \Rightarrow \frac{\omega L}{R} \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right] = \pm 1 \Rightarrow \omega^2 \mp \frac{R}{L} \omega - \omega_0^2 = 0,$$

( 10 )

donde el valor  $\pm 1$  corresponde a las dos soluciones de tomar raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad. La ecuación ( 10 ) tiene dos soluciones para cada valor  $\pm 1$ , estas son

$$\omega_{1,2}^- = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4\omega_0^2} = \frac{R}{2L} \left[ \pm \sqrt{1 + \left(2\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2} - 1 \right], \text{ (para } -1),$$

$$\omega_{1,2}^+ = \frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 4\omega_0^2} = \frac{R}{2L} \left[ \pm \sqrt{1 + \left(2\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2} + 1 \right], \text{ (para } +1),$$
( 11 )

de las cuales solo hay dos soluciones con frecuencia positiva, estas son

$$\omega_{h,l} = \frac{R}{2L} \left[ \sqrt{1 + \left(2\frac{\omega_0 L}{R}\right)^2} \pm 1 \right],$$
( 12 )

siendo  $\omega_h$  y  $\omega_l$  dichas soluciones, con  $\omega_h > \omega_l$ , la cuales se denominan como frecuencia alta ('high') y baja ('low') de corte, respectivamente. Además,  $\omega_h$  y  $\omega_l$  corresponden a las soluciones en ( 11 ) para +1 y -1, respectivamente. Observando las expresiones ( 5 ), ( 7 ) y ( 10 ), se concluye que, cuando la frecuencia de la señal de entrada de CA es igual a una de las frecuencias de corte, tanto el módulo de la función de transferencia como el de la corriente caen a un valor que es  $1/\sqrt{2}$  veces su valor máximo, es decir

$$|I|_{\omega=\omega_{h,l}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}R} = \frac{|I|_{max}}{\sqrt{2}}, \quad |G_{PBd}(\omega_{h,l})| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

De esta manera, el ancho de banda se define como la diferencia de las frecuencias de corte medidas en unidades de Hz, esto es

$$BW = \nu_h - \nu_l = \frac{R}{2\pi L},$$
( 13 )

siendo  $\nu_{h,l} = \omega_{h,l}/(2\pi)$ . El cociente entre el ancho de banda y la frecuencia de resonancia da una magnitud que refleja cuán ancha es la región definida por las frecuencias de corte con respecto a la posición de la frecuencia de resonancia. Este cociente define lo que se denomina como factor de calidad ( $Q$ ) del circuito, de la siguiente manera

$$\frac{BW}{\nu_0} = \frac{1}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\nu_0}{BW} = \frac{2\pi\nu_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$
( 14 )

Utilizando la definición ( 14 ) en la expresión ( 12 ), vemos que las frecuencias de corte (en unidades de Hz) se pueden escribir como

$$\nu_{h,l} = \frac{\nu_0}{2Q} \left[ \sqrt{1 + (2Q)^2} \pm 1 \right].$$
( 15 )

A partir de ( 15 ) se puede verificar que

$$\nu_l \nu_h = \nu_0^2.$$
( 16 )

## Análisis de la función de transferencia ( $G(\nu)$ ) en un circuito RLC serie.

Se analizará el comportamiento del módulo y de la fase de la función de transferencia, dados en ( 7 ), como función de la frecuencia  $\nu = \omega/(2\pi)$ . Para representar gráficamente dicho comportamiento, se expresará al módulo en dB y se usará una escala logarítmica para el eje de la frecuencia. De esta manera, se tiene

$$\boxed{|G_{PBd}(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2\right]^2}}, \quad \angle G_{PBd}(\nu) = -\tan^{-1}\left\{Q \frac{\nu}{\nu_0} \left[1 - \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2\right]\right\},} \quad (17)$$

con las definiciones de  $\nu_0$  y de  $Q$  dadas a partir de las expresiones ( 2 ) y ( 14 ), respectivamente, esto es

$$\boxed{\nu_0 \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}, \quad \boxed{Q \equiv \frac{2\pi\nu_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}. \quad (18)$$

El módulo de  $G_{PBd}(\nu)$  en decibels será

$$\boxed{|G_{PBd}(\nu)|_{dB} = 20 \log|G_{PBd}(\nu)| = -10 \log\left\{1 + Q^2 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2\right]^2\right\}}, \quad (19)$$

donde se cumple que

$$|G_{PBd}(\nu)| \leq 1 \Rightarrow |G_{PBd}(\nu)|_{dB} \leq 0[dB], \quad (20)$$

siendo 1 el valor máximo del módulo de la función de transferencia.

A partir de la ecuación ( 16 ), es interesante notar que el logaritmo de las frecuencias de corte  $\nu_{h,l}$  tienen la siguiente propiedad

$$\log(\nu_l \nu_h) = \log(\nu_0^2) \Rightarrow \log(\nu_l) + \log(\nu_h) = 2 \log(\nu_0) \Rightarrow \boxed{\log(\nu_h) - \log(\nu_0) = \log(\nu_0) - \log(\nu_l)}, \quad (21)$$

lo que significa que la distancia entre  $\nu_h$  y  $\nu_0$  es la misma que entre  $\nu_l$  y  $\nu_0$  para un gráfico con el eje de frecuencias en escala logarítmica; esto es, en dicha escala,  $\nu_h$  y  $\nu_l$  están posicionados simétricamente con respecto a  $\nu_0$ . De la misma manera, si tenemos dos frecuencias ubicadas por debajo y por arriba de  $\nu_0$  en un factor de proporcionalidad  $\lambda$ , esto es  $\nu_2 = \lambda\nu_0$  y  $\nu_1 = \nu_0/\lambda$ , con  $\lambda > 1$  y  $\nu_1 < \nu_0 < \nu_2$ , al igual que en ( 21 ) tenemos que

$$\nu_2 = \lambda\nu_0, \quad \nu_1 = \nu_0/\lambda \Rightarrow \log(\nu_1 \nu_2) = \log(\nu_0^2) \Rightarrow \log(\nu_2) - \log(\nu_0) = \log(\nu_0) - \log(\nu_1), \quad (22)$$

por lo que en un gráfico con escala logarítmica en la frecuencia  $\nu_2$  y  $\nu_1$  están posicionados simétricamente con respecto a  $\nu_0$ . Además, de la expresión ( 19 ) tenemos que

$$\begin{aligned} |G_{PBd}(\nu_2)|_{dB} &= -10 \log\left\{1 + Q^2 \lambda^2 \left[1 - \frac{1}{\lambda^2}\right]^2\right\}, \\ |G_{PBd}(\nu_1)|_{dB} &= -10 \log\left\{1 + \frac{Q^2}{\lambda^2} [1 - \lambda^2]^2\right\} = -10 \log\left\{1 + Q^2 \lambda^2 \left[1 - \frac{1}{\lambda^2}\right]^2\right\}, \\ &\Rightarrow |G_{PBd}(\nu_2)|_{dB} = |G_{PBd}(\nu_1)|_{dB}, \end{aligned} \quad (23)$$

con lo que se concluye que el gráfico del módulo de la función de transferencia  $G_{PBd}(\nu)$  es simétrico alrededor de la frecuencia de resonancia  $\nu_0$ .

Analizando los límites de ( 19 ) para muy bajas y muy altas frecuencias, obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\nu \rightarrow 0} |G_{PBd}(\nu)|_{dB} &= -10 \log \left[ Q^2 \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^4 \right] = -20 \log \left( \frac{Q\nu_0}{\nu} \right), \\ \Rightarrow \boxed{\lim_{\nu \rightarrow 0} |G_{PBd}(\nu)|_{dB} &= -20 \log(Q\nu_0) + 20 \log(\nu)},\end{aligned}\tag{24}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\nu \rightarrow \infty} |G_{PBd}(\nu)|_{dB} &= -10 \log \left[ Q^2 \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \right] = -20 \log \left( \frac{\nu}{\nu_0/Q} \right), \\ \Rightarrow \boxed{\lim_{\nu \rightarrow \infty} |G_{PBd}(\nu)|_{dB} &= 20 \log(\nu_0/Q) - 20 \log(\nu)}.\end{aligned}\tag{25}$$

Los resultados dados en ( 24 ) y ( 25 ) muestran los comportamientos asintóticos de  $|G_{PBd}(\nu)|_{dB}$ , donde para bajas frecuencias se tiene una recta con una pendiente positiva de 20[dB] por década y coordenada en el origen dada por  $-20 \log(Q\nu_0)$  y para altas frecuencias se tiene una recta de pendiente negativa de 20[dB] por década y coordenada en el origen dada por  $20 \log(\nu_0/Q)$ . De la expresión ( 24 ), vemos para la asíntota de bajas frecuencias que si  $\nu = Q\nu_0$ , entonces obtenemos el valor  $\lim_{\nu \rightarrow 0} |G_{PBd}(\nu)|_{dB} \Big|_{\nu=Q\nu_0} = 0[\text{dB}]$ , es decir que la recta asintótica de altas frecuencias corta al eje horizontal de 0[dB] en la frecuencia  $Q\nu_0$ . De la misma manera, a partir de la expresión ( 25 ), vemos para la asíntota de altas frecuencias que si  $\nu = \nu_0/Q$ , entonces obtenemos el valor  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |G_{PBd}(\nu)|_{dB} \Big|_{\nu=\nu_0/Q} = 0[\text{dB}]$ , es decir que la recta asintótica de altas frecuencias corta al eje horizontal de 0[dB] en la frecuencia  $\nu_0/Q$ . Además, los valores de  $|G_{PBd}(\nu)|_{dB}$  cuando la frecuencia es igual a la de resonancia ( $\nu_0$ ) o a las de corte ( $\nu_{h,l}$ ) serán

$$|G_{PBd}(\nu_0)| = 1 \Rightarrow \boxed{|G_{PBd}(\nu_0)|_{dB} = 0[\text{dB}]}, \quad |G_{PBd}(\nu_{h,l})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{|G_{PBd}(\nu_{h,l})|_{dB} \approx -3[\text{dB}]}\tag{26}$$

Analizando los límites para la fase de  $G_{PBd}(\nu)$  para muy bajas y muy altas frecuencias, a partir de ( 17 ), se tiene

$$\begin{aligned}\boxed{\lim_{\nu \rightarrow 0} [G_{PBd}(\nu)] &= -\lim_{\nu \rightarrow 0} \left[ \tan^{-1} \left( -Q \frac{\nu_0}{\nu} \right) \right] \approx 90^\circ}, \\ \boxed{\lim_{\nu \rightarrow \infty} [G_{PBd}(\nu)] &= -\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[ \tan^{-1} \left( Q \frac{\nu}{\nu_0} \right) \right] \approx -90^\circ}.\end{aligned}\tag{27}$$

Además, los valores de  $[G_{PBd}(\nu)]$  cuando la frecuencia es igual a la de resonancia ( $\nu_0$ ) o a las de corte ( $\nu_{h,l}$ ) serán

$$\boxed{[G_{PBd}(\nu_l)] = -\tan^{-1}(-1) = 45^\circ, \quad [G_{PBd}(\nu_0)] = 0^\circ, \quad [G_{PBd}(\nu_h)] = -\tan^{-1}(1) = -45^\circ},\tag{28}$$

donde se usó que a partir de ( 11 ) y ( 12 ) la ecuación ( 10 ) lleva a obtener

$$Q \frac{\nu_l}{\nu_0} \left[ 1 - \left( \frac{\nu_0}{\nu_l} \right)^2 \right] = -1, \quad Q \frac{\nu_h}{\nu_0} \left[ 1 - \left( \frac{\nu_0}{\nu_h} \right)^2 \right] = +1.\tag{29}$$

En las Figura 2, Figura 3 y Figura 4 se muestra el comportamiento de la función de transferencia de un circuito RLC serie para el módulo en dB (gráfico (a)) y la fase (gráfico (b)), con una frecuencia de resonancia de  $\nu_0 = 9\text{kHz}$  y un factor de calidad de  $Q = 0.4, 1$  y  $5$ , respectivamente. En dichos gráficos se detallan las asíntotas dadas por las expresiones ( 24 ) y ( 25 ), junto con las frecuencias de corte  $\nu_h$  y  $\nu_l$ . A la región de frecuencias que está comprendida dentro de las frecuencias de corte, donde el módulo de la función de transferencia no decae más de 3[dB], se la denomina **banda de paso**. A la región de

frecuencias por fuera de la banda de paso se la denomina **banda de corte**. En este circuito, el ancho de banda  $BW$  define el ancho en frecuencias de la banda de paso. Como se observa en las figuras, el circuito RLC serie tiene una respuesta en frecuencia en donde la amplitud de la señal de salida es similar a la de entrada para frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia, atenuándose de manera importante para otras frecuencias, este comportamiento es característico de un filtro del tipo **pasa banda de banda angosta o estrecha**.

### Potencia activa, aparente y reactiva en un circuito RLC serie.

A partir de la corriente dada en ( 5 ), la potencia activa se puede calcular como

$$P = \frac{|V| |I|}{2} \cos \phi = \frac{\frac{V_0^2}{2R}}{1 + Q^2 \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \right]^2}, \quad (30)$$

donde se usó la expresión ( 4 ) para obtener

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \right]^2}} \quad (31)$$

De la expresión ( 30 ) puede verse que

$$P|_{\nu=\nu_0} = \frac{V_0^2}{2R} = P_{max}, \quad P|_{\nu=\nu_{h,l}} = \frac{P_{max}}{2}, \quad (32)$$

donde  $P_{max}$  es el valor máximo de la potencia activa y se han utilizado los resultados en ( 29 ). De esta manera, observamos que la potencia activa cae a la mitad de su valor máximo en las frecuencias de corte.

La potencia activa normalizada está dada por

$$\hat{P} = \frac{P}{P_{max}} = \frac{1}{1 + Q^2 \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \right]^2}. \quad (33)$$

El valor de ( 33 ) en dB estará dado por la expresión

$$\hat{P}_{dB} = 10 \log(\hat{P}) = -10 \log \left\{ 1 + Q^2 \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \right]^2 \right\}. \quad (34)$$

La expresión para la potencia activa en decibels ( 34 ) es exactamente igual que para el módulo de la función de transferencia en decibels ( 19 ). Por lo que la gráfica de ( 34 ), en una escala logarítmica para la frecuencia, tendrá el comportamiento analizado en la sección anterior para  $|G_{PBd}(\nu)|_{dB}$ .

En el gráfico (c) de la Figura 2, Figura 3 y Figura 4 se muestra la variación de la potencia normalizada ( 33 ) en función de la frecuencia, para un circuito con una frecuencia de resonancia de  $\nu_0 = 9\text{kHz}$  y un factor de calidad de  $Q = 0.4, 1$  y  $5$ , respectivamente. Se observa en las figuras que la potencia es máxima para la frecuencia de resonancia y cae a la mitad de la potencia máxima en las frecuencias de corte  $\nu_h$  y  $\nu_l$ .

La potencia aparente y la reactiva estarán dadas respectivamente por las expresiones

$$S = \frac{|V| |I|}{2} = \frac{\frac{V_0^2}{2R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2\right]^2}}, \quad Q = \frac{|V| |I|}{2} \sin I = \frac{Q \frac{\nu}{\nu_0} \left[\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 - 1\right] \frac{V_0^2}{2R}}{1 + Q^2 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2\right]^2},$$

( 35 )

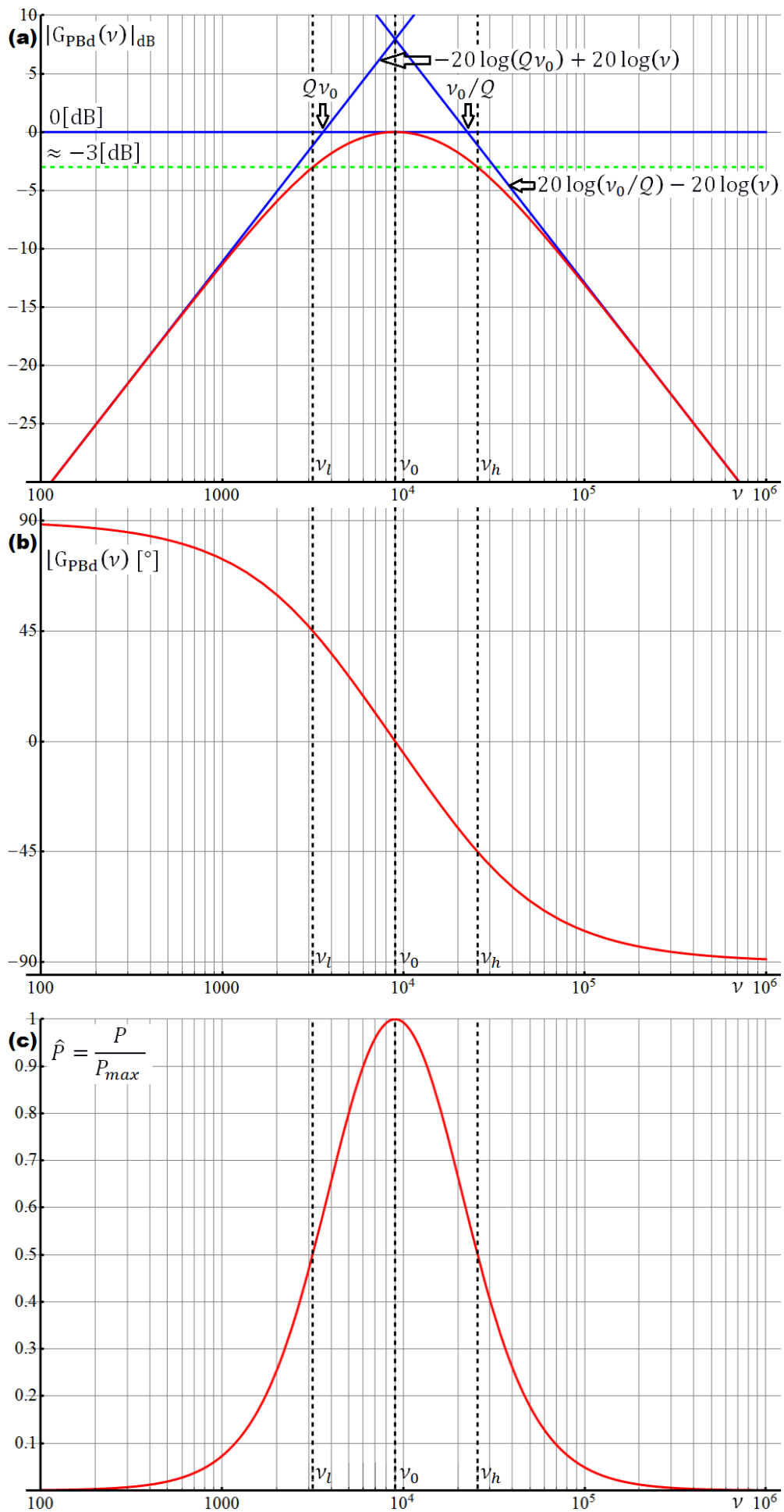
donde se usó la expresión ( 4 ) para obtener

$$\sin I = \frac{Q \frac{\nu}{\nu_0} \left[\left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 - 1\right]}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2\right]^2}}.$$

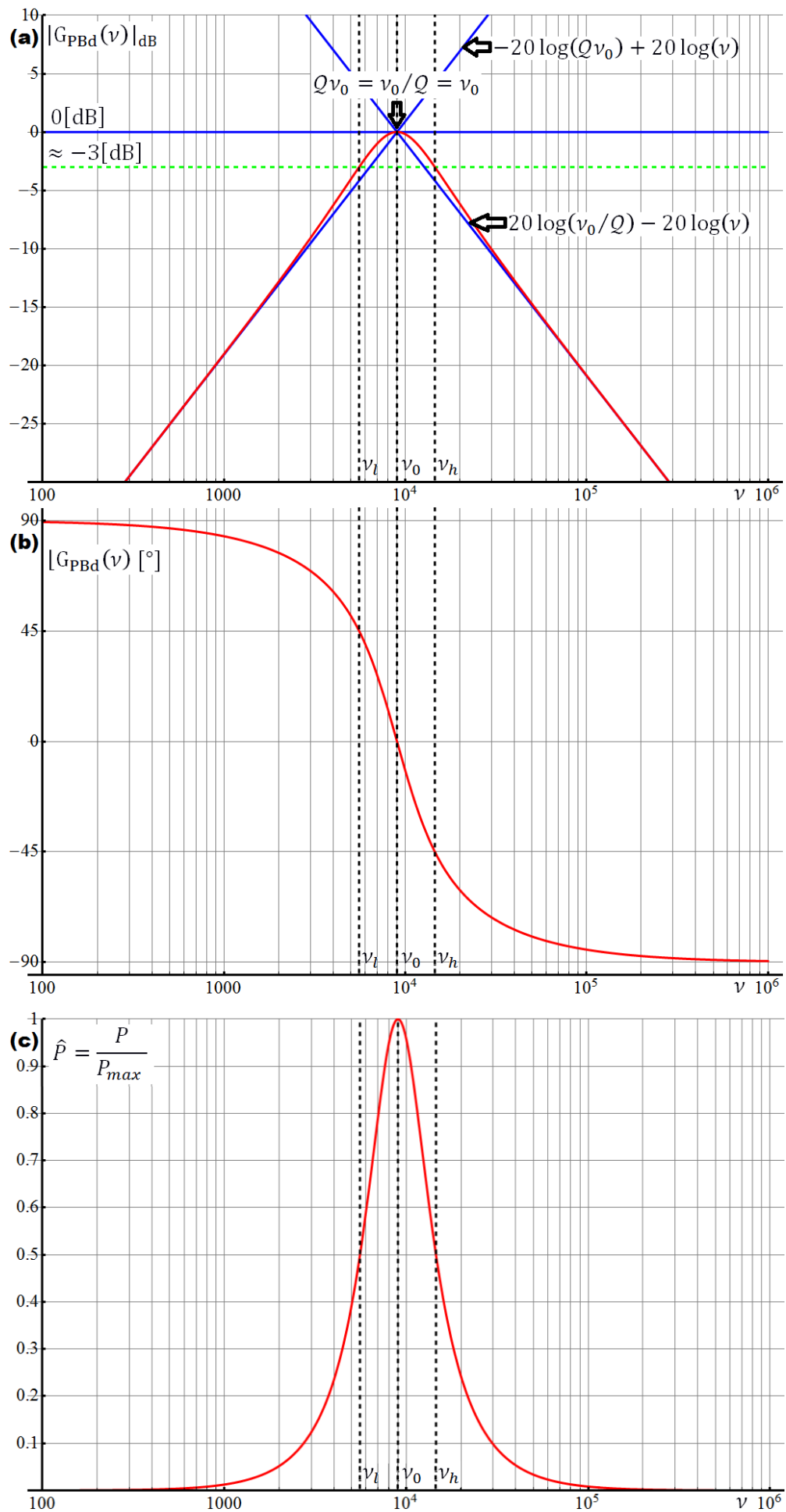
( 36 )

De las expresiones ( 30 ) y ( 35 ) se puede verificar que  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

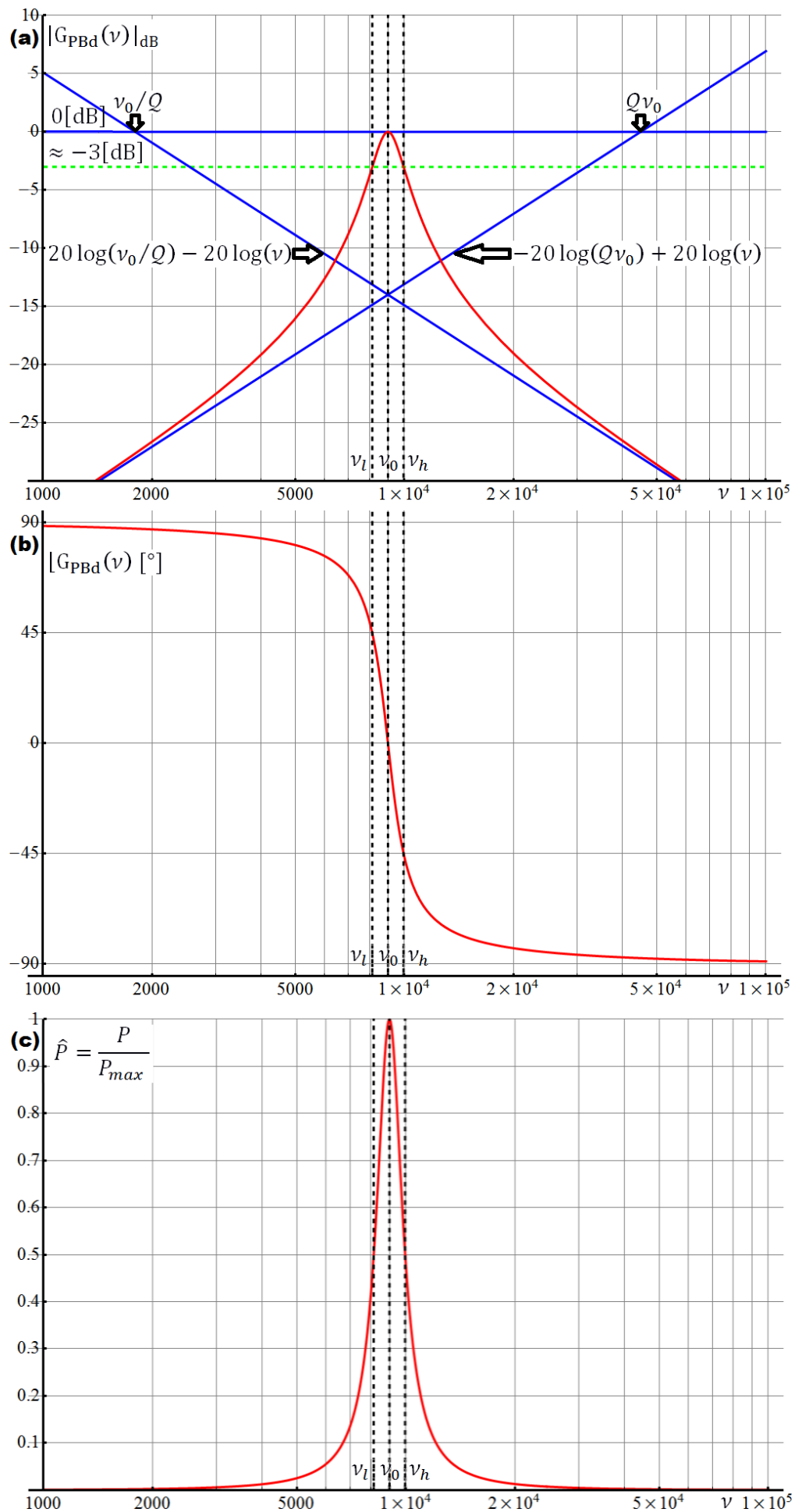




**Figura 2:** Respuesta en frecuencia de un circuito RLC serie Pasa Banda angosta para el módulo **(a)** y la fase **(b)** de la función de transferencia, junto con la potencia activa normalizada **(c)**, siendo  $v_0 = 9\text{kHz}$  y  $Q = 0.4$ .



**Figura 3:** Respuesta en frecuencia de un circuito RLC serie Pasa Banda angosta para el módulo **(a)** y la fase **(b)** de la función de transferencia, junto con la potencia activa normalizada **(c)**, siendo  $\nu_0 = 9\text{kHz}$  y  $Q = 1$ .



**Figura 4:** Respuesta en frecuencia de un circuito RLC serie Pasa Banda angosta para el módulo **(a)** y la fase **(b)** de la función de transferencia, junto con la potencia activa normalizada (c), siendo  $\nu_0 = 9\text{kHz}$  y  $Q = 5$ .

### Análisis de la influencia de la resistencia del inductor ( $R_L$ ) en un circuito RLC serie.

El comportamiento estudiado de la función de transferencia  $G_{PBd}(v)$  ha sido realizado en base al circuito de la Figura 1 (a), donde la inductancia se ha considerado ideal (con  $R_L = 0\Omega$ ). La Figura 5 (a) muestra el mismo circuito RLC serie pero con el agregado de la resistencia del inductor  $R_L$ .

Del circuito en la Figura 5 (a), se puede concluir que la función de transferencia, con la inclusión de  $R_L$ , estará dada por

$$|G_{PBd}(v)| = \frac{\kappa}{\sqrt{1 + Q'^2 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^2\right]^2}}, \quad |G_{PBd}(v)| = -\tan^{-1} \left\{ Q' \frac{v}{v_0} \left[1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^2\right] \right\}, \quad (37)$$

donde se definen

$$v_0 \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad \kappa \equiv \frac{R}{R + R_L}, \quad Q' \equiv \frac{2\pi v_0 L}{R + R_L} = \frac{\omega_0 L}{R + R_L} = \frac{1}{(R + R_L)} \sqrt{\frac{L}{C}} = \kappa Q. \quad (38)$$

Comparando las expresiones en (37) y en (17), observamos que el valor de la frecuencia de resonancia ( $v_0$ ) no se altera por la presencia de  $R_L$ , el cual está dado por la expresión en (38).

Por otro lado, todas las expresiones que dependen del factor de calidad  $Q$  (como ser las frecuencias de corte  $v_h$  y  $v_l$ ) ahora dependerán del factor de calidad  $Q'$ .

De la expresión en (37) para el módulo, se concluye que a la frecuencia de resonancia no se tendrá el valor de 1, sino de  $\kappa$ , el cual es menor que la unidad ( $\kappa < 1$ ). Por lo que la respuesta en frecuencia para el módulo de la función de transferencia en dB será

$$|G_{PBd}(v)|_{dB} = 20 \log \kappa - 10 \log \left\{ 1 + Q'^2 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{v_0}{v}\right)^2\right]^2 \right\}, \quad (39)$$

siendo su valor máximo

$$|G_{PBd}(v)|_{dB(max)} = |G_{PBd}(v_0)|_{dB} = 20 \log \kappa < 0[dB]. \quad (40)$$

De esta manera, el gráfico de  $|G_{PBd}(v)|_{dB}$  para el circuito dado en Figura 5 (a) presentará una atenuación con respecto a la respuesta que se esperaría para el circuito ideal de la Figura 1 (a) para todo el rango de frecuencias.

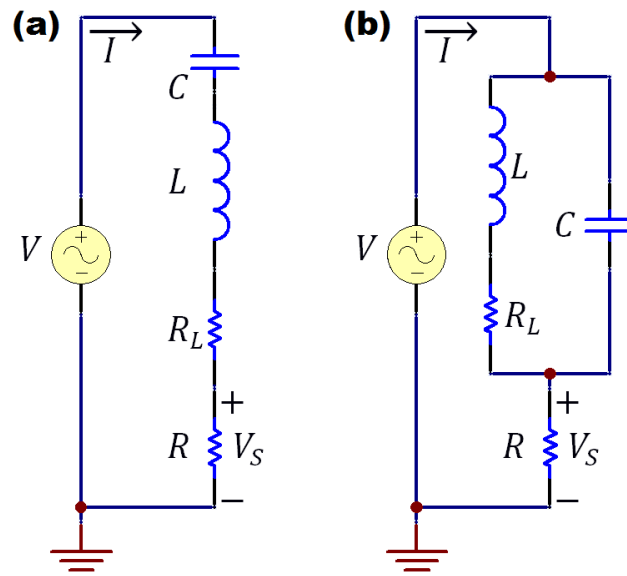


Figura 5: Circuito RLC serie (a) y compuesto (b), donde se ha incluido a la resistencia de la bobina ( $R_L$ ).

### 3. Circuito RLC compuesto. Filtro elimina banda estrecho.

Procedemos de la misma manera que en el caso del circuito RLC serie. En la Figura 1 (b) se muestra el conexionado para la medición de la función de transferencia  $G(v)$  en un circuito RLC compuesto, donde el capacitor esta en paralelo con la inductancia y estos en serie con la resistencia.

La impedancia dada por la combinación de la inductancia y el capacitor, estará dada por

$$Z_{LC} = \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{L/C}{\frac{1}{j\omega C} \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]} = \frac{j\omega L}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]} = jX_{LC}, \quad (41)$$

donde se definió

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad X_{LR} \equiv \frac{\omega L}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}, \quad (42)$$

con  $\omega_0$  definida como la frecuencia angular de resonancia, siendo  $\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$  la frecuencia de resonancia, la cual es la misma que en el circuito RLC serie.

La impedancia total del circuito será

$$Z = R + Z_{LC} = R + \frac{j\omega L}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}, \quad (43)$$

y la corriente total que ingresa al circuito estará dada por

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V/R}{1 + \frac{j\omega L/R}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}}, \quad (44)$$

donde el módulo y la fase de la corriente serán respectivamente

$$|I| = \frac{V_0/R}{\sqrt{1 + \frac{(\omega L/R)^2}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2}}}, \quad \angle I = -\tan^{-1} \left\{ \frac{\omega L/R}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]} \right\}, \quad (45)$$

siendo el módulo y la fase de la tensión de entrada respectivamente definidos como  $|V| \equiv V_0$  y  $\angle V = 0$ .

Finalmente, para la función de transferencia del circuito RLC compuesto se tiene

$$G_{EBd}(\omega) = \frac{V_S}{V} = \frac{I R}{V} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega L/R}{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}}, \quad (46)$$

donde las siglas EBD son usadas para indicar que el comportamiento de ( 46 ) es del tipo de filtro elimina banda, como se verá más adelante en esta guía. El módulo y la fase de la función de transferencia serán respectivamente

$$\boxed{|G_{EBd}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(\omega L/R)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2}}}, \quad \angle G_{EBd}(\omega) = -\tan^{-1} \left\{ \frac{\omega L/R}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} \right\}.}$$

( 47 )

En la condición de resonancia  $\omega = \omega_0$  (o  $\nu = \nu_0$ ), la impedancia  $Z_{LC}$  se vuelve infinita (es un circuito abierto). De la ecuación ( 41 ), se puede observar que en el límite en que  $\omega$  tiende a  $\omega_0$  el módulo de  $Z_{LC}$  tiende a infinito y su fase dependerá de si en dicho límite nos acercamos desde las frecuencias menores que  $\omega_0$ , defínase como  $\omega \rightarrow \omega_0^-$ , o desde las frecuencias mayores que  $\omega_0$ , defínase como  $\omega \rightarrow \omega_0^+$ , con lo que se tiene

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} |Z_{LC}| \rightarrow \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} \angle Z_{LC} = 90^\circ, \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} \angle Z_{LC} = -90^\circ.$$

( 48 )

Estos valores límites de  $Z_{LC}$  producen para el módulo y la fase de la corriente, dados en ( 45 ), los siguientes resultados

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} |I| = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^-} \angle I = -90^\circ, \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0^+} \angle I = 90^\circ.$$

( 49 )

Por otro lado, cuando la frecuencia es nula ( $\omega = 0$ ) o tiende a infinito, a partir de ( 45 ) se verifica que

$$|I|_{\omega=0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} |I| = \frac{V_0}{R} = |I|_{max}, \quad \angle I_{\omega=0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \angle I = 0^\circ.$$

( 50 )

Además, de la expresión en ( 45 ) para la fase de la corriente, podemos concluir que para frecuencias menores que  $\omega_0$  la fase tiene signo negativo, por lo que la corriente atrasa con respecto a la tensión de entrada y esto indica que la reactancia del circuito se comporta inductivamente (de la expresión en ( 41 ) se observa que  $X_{LR} > 0$  y  $Z_{LR}$  es un número complejo puro con signo positivo si  $\omega < \omega_0$ ). Lo opuesto ocurre para frecuencias mayores que  $\omega_0$ , la fase de la corriente tiene signo positivo, por lo que esta adelanta con respecto a la tensión de entrada y esto indica que la reactancia del circuito se comporta capacitivamente (de la expresión en ( 41 ) se observa que  $X_{LR} < 0$  y  $Z_{LR}$  es un número complejo puro con signo negativo si  $\omega > \omega_0$ ).

A continuación se define el ancho de banda ( $BW$ ) y el factor de calidad ( $Q$ ) para el circuito RLC compuesto. También se realizará el estudio del comportamiento de la función de transferencia  $G_{EBd}(\nu)$  y de la potencia activa en función de la frecuencia. Concluiremos esta sección con un análisis sobre la influencia de la resistencia del inductor ( $R_L$ ) en la respuesta en frecuencia previamente estudiada.

### **Definición del ancho de banda ( $BW$ ) y del factor de calidad ( $Q$ ) en un circuito RLC compuesto.**

El ancho de banda ( $BW$ ) de la función de transferencia, para el circuito RLC compuesto de la Figura 1 (b), se define como el rango de frecuencias en donde el módulo de la función de transferencia es menor o igual a  $1/\sqrt{2}$  ( $|G_{EBd}(\omega)| \leq 1/\sqrt{2}$ ). Para obtener el ancho de banda se buscan las frecuencias donde se cumple  $|G_{EBd}(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ , de la expresión para el módulo en ( 47 ) esto lleva a que

$$1 + \frac{(\omega L/R)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2} = 2 \Rightarrow \frac{\omega L/R}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} = \pm 1 \Rightarrow \omega^2 \pm \frac{\omega_0^2 L}{R} \omega - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 \pm \frac{1}{RC} \omega - \omega_0^2 = 0,$$

( 51 )

donde el valor  $\pm 1$  corresponde a las dos soluciones de tomar raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad. La ecuación ( 10 ) tiene dos soluciones para cada valor  $\pm 1$ , estas son

$$\omega_{1,2}^- = \frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + 4\omega_0^2} = \frac{1}{2RC} \left[ \pm \sqrt{1 + (2\omega_0 CR)^2} + 1 \right], \text{ (para } -1),$$

$$\omega_{1,2}^+ = -\frac{1}{2RC} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2 + 4\omega_0^2} = \frac{1}{2RC} \left[ \pm \sqrt{1 + (2\omega_0 CR)^2} - 1 \right], \text{ (para } +1),$$

( 52 )

de las cuales solo hay dos soluciones con frecuencia positiva, estas son

$$\omega_{h,l} = \frac{1}{2RC} \left[ \sqrt{1 + (2\omega_0 CR)^2} \pm 1 \right],$$

( 53 )

siendo  $\omega_h$  y  $\omega_l$  dichas soluciones, con  $\omega_h > \omega_l$ , la cuales se denominan como frecuencia alta ('high') y baja ('low') de corte, respectivamente. Además,  $\omega_h$  y  $\omega_l$  corresponden a las soluciones en ( 55 ) para  $-1$  y  $+1$ , respectivamente. Observando las expresiones ( 45 ), ( 47 ), y ( 51 ), se concluye que, cuando la frecuencia de la señal de entrada de CA es igual a una de las frecuencias de corte, tanto el módulo de la función de transferencia como el de la corriente caen a un valor que es  $1/\sqrt{2}$  veces su valor máximo, es decir

$$|I|_{\omega=\omega_{h,l}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}R} = \frac{|I|_{max}}{\sqrt{2}}, \quad |G_{EBd}(\omega_{h,l})| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

( 54 )

De esta manera, el ancho de banda en unidades de Hz será

$$BW = v_h - v_l = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{\omega_0^2 L}{2\pi R} = v_0 \frac{\omega_0 L}{R},$$

( 55 )

siendo  $v_{h,l} = \omega_{h,l}/(2\pi)$ . El factor de calidad ( $Q$ ) para el circuito RLC compuesto se obtiene de la siguiente manera

$$\frac{BW}{v_0} = \frac{1}{Q} \Rightarrow Q = \frac{v_0}{BW} = 2\pi v_0 CR = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{2\pi v_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

( 56 )

Utilizando la definición ( 56 ) en la expresión ( 53 ), vemos que las frecuencias de corte (en unidades de Hz) se pueden escribir como

$$v_{h,l} = \frac{v_0}{2Q} \left[ \sqrt{1 + (2Q)^2} \pm 1 \right],$$

( 57 )

que es la misma expresión que la ( 15 ) para el circuito RLC serie, con lo que se tiene también que

$$v_l v_h = v_0^2.$$

( 58 )

### **Análisis de la función de transferencia ( $G(v)$ ) en un circuito RLC compuesto.**

Se analizará el comportamiento del módulo y de la fase de la función de transferencia, dados en ( 47 ), como función de la frecuencia  $v = \omega/(2\pi)$ . Para representar gráficamente dicho comportamiento, se expresará al módulo en dB y se usará una escala logarítmica para el eje de la frecuencia. De esta manera, se tiene

$$\boxed{|G_{EBd}(\nu)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2 \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]^2}}}, \quad |G_{EBd}(\nu) = -\tan^{-1} \left\{ \frac{1}{Q \frac{\nu_0}{\nu} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]} \right\}}, \quad (59)$$

con las definiciones de  $\nu_0$  y de  $Q$  dadas a partir de las expresiones ( 42 ) y ( 56 ), respectivamente, esto es

$$\boxed{\nu_0 \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}, \quad \boxed{Q \equiv 2\pi\nu_0 CR = \frac{R}{2\pi\nu_0 L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}}. \quad (60)$$

El módulo de  $G_{EBd}(\nu)$  en decibels será

$$\boxed{|G_{EBd}(\nu)|_{dB} = 20 \log |G_{EBd}(\nu)| = -10 \log \left\{ 1 + \left\{ Q \frac{\nu_0}{\nu} \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \right] \right\}^{-2} \right\}}, \quad (61)$$

donde se cumple que

$$|G_{EBd}(\nu)| \leq 1 \Rightarrow |G_{EBd}(\nu)|_{dB} \leq 0[dB], \quad (62)$$

siendo 1 el valor máximo del módulo de la función de transferencia.

Dado que las frecuencias de corte  $\nu_{h,l}$ , para el circuito RLC compuesto, cumplen con la condición ( 58 ), la cual es idéntica a la condición ( 16 ) para el circuito RLC serie, entonces se cumple la expresión ( 21 ), por lo que  $\nu_h$  y  $\nu_l$  están posicionados simétricamente con respecto a  $\nu_0$ . De igual manera, dos frecuencias definidas como  $\nu_2 = \lambda\nu_0$  y  $\nu_1 = \nu_0/\lambda$ , con  $\lambda > 1$  y  $\nu_1 < \nu_0 < \nu_2$ , cumplen con la condición ( 22 ) y estarán están posicionados simétricamente con respecto a  $\nu_0$ . Además, de la expresión ( 61 ) tenemos que

$$\begin{aligned} |G_{EBd}(\nu_2)|_{dB} &= -10 \log \left\{ 1 + \left\{ Q \frac{1}{\lambda} [1 - \lambda^2] \right\}^{-2} \right\}, \\ |G_{EBd}(\nu_1)|_{dB} &= -10 \log \left\{ 1 + \left\{ Q \lambda \left[ 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right] \right\}^{-2} \right\} = -10 \log \left\{ 1 + \left\{ Q \frac{1}{\lambda} [1 - \lambda^2] \right\}^{-2} \right\}, \\ &\Rightarrow |G_{EBd}(\nu_2)|_{dB} = |G_{EBd}(\nu_1)|_{dB}, \end{aligned} \quad (63)$$

con lo que se concluye que el gráfico del módulo de la función de transferencia  $G_{EBd}(\nu)$  es simétrico alrededor de la frecuencia de resonancia  $\nu_0$ .

Analizando los valores de ( 61 ) en la frecuencia de resonancia  $\nu = \nu_0$ , cuando  $\nu \rightarrow 0$  y en el límite de muy altas frecuencias ( $\nu \rightarrow \infty$ ), obtenemos

$$\boxed{|G_{EBd}(\nu_0)| = 0 \Rightarrow \lim_{\nu \rightarrow \nu_0} |G_{EBd}(\nu)|_{dB} \rightarrow -\infty}, \quad (64)$$

$$\boxed{|G_{EBd}(0)|_{dB} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} |G_{EBd}(\nu)|_{dB} = -10 \log[1] = 0[dB]}, \quad (65)$$

Al igual que en el caso de la corriente, dada por las expresiones en ( 45 ), en el límite en que  $\nu$  tiende a  $\nu_0$  la fase de  $G_{EBd}(\nu)$  dependerá de si en dicho límite nos acercamos desde las frecuencias menores que  $\nu_0$ , defínase como  $\nu \rightarrow \nu_0^-$ , o desde las frecuencias mayores que  $\nu_0$ , defínase como  $\nu \rightarrow \nu_0^+$ , con lo que se tiene



$$\boxed{\lim_{\nu \rightarrow \nu_0^-} [G_{EBd}(\omega) = -90^\circ, \quad \lim_{\nu \rightarrow \nu_0^+} [G_{EBd}(\omega) = 90^\circ]}, \quad (66)$$

con lo cual la función de transferencia  $G_{EBd}(\nu)$  presentaría una discontinuidad en la fase para  $\nu = \nu_0$ .

Por otro lado, para  $\nu = \nu_0$  y en el límite de muy altas frecuencias ( $\nu \rightarrow \infty$ ), obtenemos

$$\boxed{[G_{EBd}(0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} [G_{EBd}(\omega) = 0^\circ]}. \quad (67)$$

Además, los valores de  $[G_{PBd}(\nu)$  cuando la frecuencia es igual a las de corte ( $\nu_{h,l}$ ) serán

$$\boxed{[G_{EBd}(\nu_l) = -\tan^{-1}(1) = -45^\circ, \quad [G_{EBd}(\nu_h) = -\tan^{-1}(-1) = 45^\circ]}, \quad (68)$$

donde se usó que a partir de (52) y (53) la ecuación (51) lleva a obtener

$$Q \frac{\nu_0}{\nu_l} \left[ 1 - \left( \frac{\nu_l}{\nu_0} \right)^2 \right] = +1, \quad Q \frac{\nu_0}{\nu_h} \left[ 1 - \left( \frac{\nu_h}{\nu_0} \right)^2 \right] = -1. \quad (69)$$

En la Figura 6 se muestra el comportamiento de la función de transferencia de un circuito RLC compuesto para el módulo en dB (gráfico (a)) y la fase (gráfico (b)), con una frecuencia de resonancia de  $\nu_0 = 3.8\text{kHz}$  y un factor de calidad de  $Q = 0.4$ . En los gráficos de la figura se detallan las frecuencias de corte  $\nu_h$  y  $\nu_l$ . A la región de frecuencias que está comprendida dentro de las frecuencias de corte, donde el módulo de la función de transferencia cae por debajo de  $-3[\text{dB}]$ , se la denomina **banda de corte**. A la región de frecuencias por fuera de la banda de corte se la denomina **banda de paso**. En este circuito, el ancho de banda  $BW$  define el ancho en frecuencias de la banda de corte. Como se observa en la figura, el circuito RLC compuesto tiene una respuesta en frecuencia en donde la amplitud de la señal de salida es prácticamente anulada para frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia, dejando pasar las señales con frecuencias lejanas a la de resonancia, este comportamiento es característico de un filtro del tipo **elimina banda de banda angosta o estrecha**.

### Potencia activa, aparente y reactiva en un circuito RLC compuesto.

A partir de la corriente dada en (45), la potencia activa se puede calcular como

$$\boxed{P = \frac{|V| |I|}{2} \cos \angle I = \frac{\frac{V_0^2}{2R}}{1 + \frac{1}{Q^2 \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \right]^2}}, \quad (70)$$

donde se usó la expresión (44) para obtener

$$\cos \angle I = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2 \left( \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \right]^2}}}. \quad (71)$$

De la expresión (70) puede verse que

$$P|_{\nu=0} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} P = \frac{V_0^2}{2R} = P_{max}, \quad \lim_{\nu \rightarrow \nu_0} P = 0, \quad P|_{\nu=\nu_{h,l}} = \frac{P_{max}}{2}, \quad (72)$$

donde  $P_{max}$  es el valor máximo de la potencia activa y se han utilizado los resultados en ( 69 ). De esta manera, observamos que la potencia activa cae a la mitad de su valor máximo en las frecuencias de corte.

La potencia activa normalizada está dada por

$$\hat{P} = \frac{P}{P_{max}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q^2 \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]^2}}.$$

( 73 )

El valor de ( 73 ) en dB estará dado por la expresión

$$\hat{P}_{dB} = 10 \log(\hat{P}) = -10 \log \left\{ 1 + \left\{ Q \frac{\nu_0}{\nu} \left[ 1 - \left( \frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \right] \right\}^{-2} \right\}.$$

( 74 )

La expresión para la potencia activa en decibeles ( 74 ) es exactamente igual que para el módulo de la función de transferencia en decibeles ( 61 ).

En el gráfico (c) de la Figura 6 se muestra la variación de la potencia normalizada ( 73 ) en función de la frecuencia, para un circuito RLC compuesto con una frecuencia de resonancia de  $\nu_0 = 3.8\text{kHz}$  y un factor de calidad de  $Q = 0.4$ . Se observa en la figura que la potencia es nula para la frecuencia de resonancia y cae a la mitad de la potencia máxima en las frecuencias de corte  $\nu_h$  y  $\nu_l$ .

La potencia aparente y la reactiva estarán dadas respectivamente por las expresiones

$$S = \frac{|V| |I|}{2} = \frac{\frac{V_0^2}{2R}}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2 \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]^2}}}, \quad Q = \frac{|V| |I|}{2} \sin|I| = \frac{\frac{V_0^2/2R}{Q \frac{\nu_0}{\nu} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]}}{1 + \frac{1}{Q^2 \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]^2}},$$

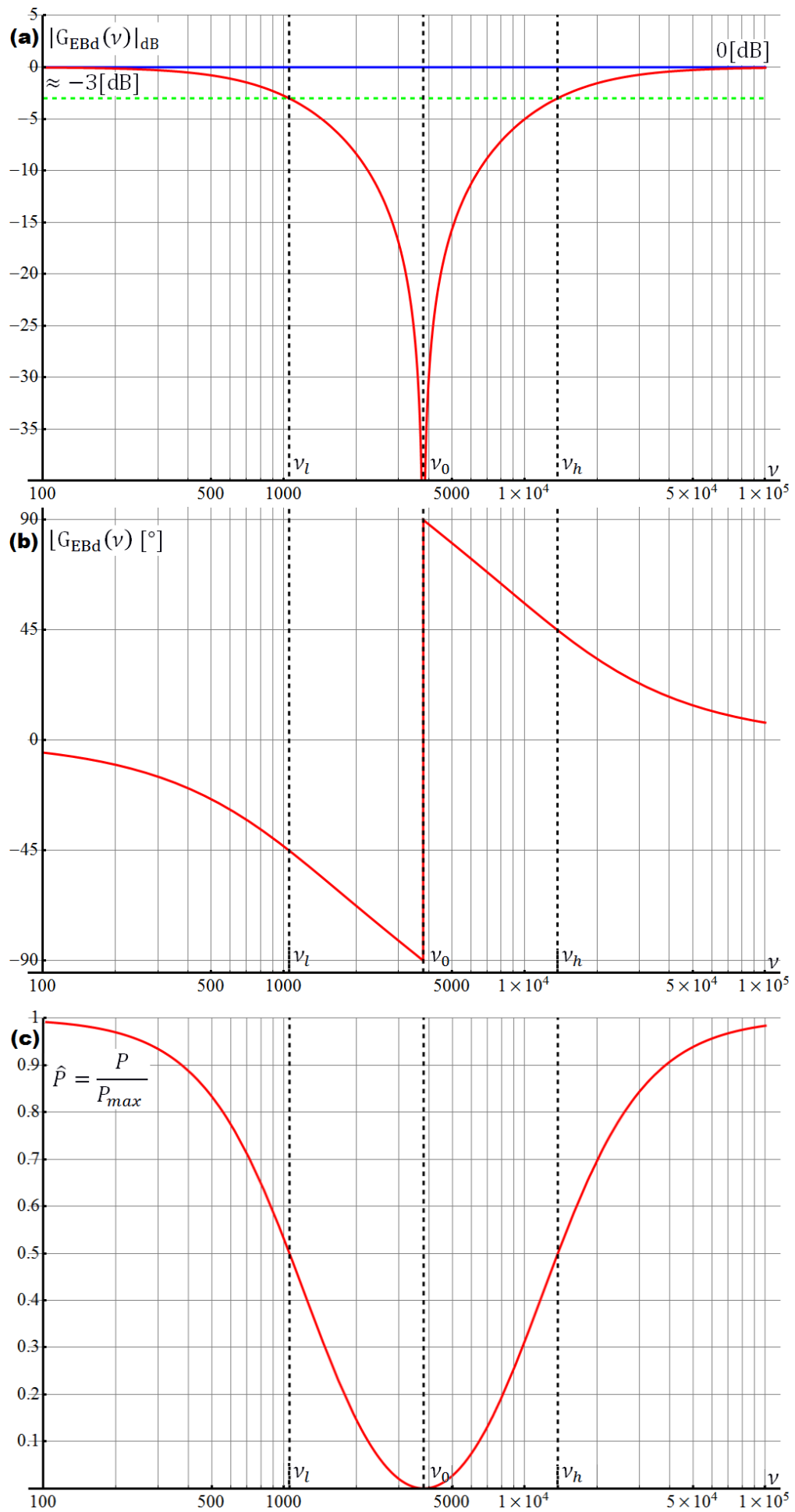
( 75 )

donde se usó la expresión ( 44 ) para obtener

$$\sin|I| = \frac{\frac{1}{Q \frac{\nu_0}{\nu} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]}}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2 \left(\frac{\nu_0}{\nu}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]^2}}}.$$

( 76 )

De las expresiones ( 70 ) y ( 75 ) se puede verificar que  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .



**Figura 6:** Respuesta en frecuencia de un circuito RLC compuesto Elimina Banda angosta para el módulo **(a)** y la fase **(b)** de la función de transferencia, junto con la potencia activa normalizada **(c)**, siendo  $\nu_0 = 3.8\text{kHz}$  y  $Q = 0.4$ .

## **Análisis de la influencia de la resistencia del inductor ( $R_L$ ) en un circuito RLC compuesto.**

El comportamiento estudiado de la función de transferencia  $G_{EBd}(\nu)$  ha sido realizado en base al circuito de la Figura 1 (b), donde la inductancia se ha considerado ideal (con  $R_L = 0\Omega$ ). La Figura 5 (b) muestra el mismo circuito RLC compuesto pero con el agregado de la resistencia del inductor  $R_L$ .

Del circuito en la Figura 5 (b), se observa que la impedancia resultante entre el inductor (con  $R_L$ ) y el capacitor será

$$Z_{LC} = \frac{(R_L + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R_L + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{(R_L + j\omega L) \frac{1}{j\omega C}}{R_L + \frac{1}{j\omega C} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} = \frac{\left(1 + j\frac{\omega L}{R_L}\right) \frac{1}{j\omega C}}{1 - j\frac{L}{\omega R_L C} \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} = \frac{\left(1 + jQ_L \frac{\nu}{\nu_0}\right) \frac{1}{j2\pi\nu C}}{1 - jQ_L \frac{\nu_0}{\nu} \left[1 - \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2\right]}, \quad (77)$$

donde se define el factor de calidad propio de la inductancia como

$$Q_L = \frac{\omega_0 L}{R_L} = \frac{2\pi\nu_0 L}{R_L}. \quad (78)$$

De ( 77 ) puede observarse que en la condición de resonancia tenemos

$$Z_{LC}|_{\nu=\nu_0} = (1 + jQ_L) \frac{1}{j2\pi\nu_0 C} = \frac{L}{R_L C} + \frac{1}{j2\pi\nu_0 C}, \quad (79)$$

con lo cual la función de transferencia será

$$G_{EBd}(\nu_0) = \frac{R}{R + Z_{LC}|_{\nu=\nu_0}} = \frac{R}{R + \frac{L}{R_L C} + \frac{1}{j2\pi\nu_0 C}}. \quad (80)$$

De la expresión ( 80 ) se concluye que la resistencia  $R_L$  lleva a que la impedancia  $Z_{LC}$  no tienda a infinito en la condición de resonancia y por lo tanto la función de transferencia  $G_{EBd}(\nu_0)$  no se anulará, sino que tendrá el valor definido por ( 80 ). Por lo tanto, el valor de  $|G_{EBd}(\nu_0)|_{dB}$  no tenderá a  $-\infty$ , como se ve en la Figura 6 (a), sino que tendrá un valor negativo finito.

También se pueden calcular los siguientes valores límites para  $Z_{LC}$

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} Z_{LC} = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1/j2\pi\nu C}{-jQ_L \frac{\nu_0}{\nu}} = \frac{1}{Q_L 2\pi\nu_0 C} = R_L, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} Z_{LC} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{jQ_L \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right) \frac{1}{j2\pi\nu C}}{jQ_L \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{j2\pi\nu C} = 0, \quad (81)$$

de lo que se extrae que para bajas frecuencias la impedancia de la rama de la inductancia y el capacitor se comporta como  $R_L$ . Además, el comportamiento es asimétrico en la frecuencia para estos límites.

De esta manera, para  $\nu = 0$  la función de transferencia será

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} G_{EBd}(\nu) = \frac{R}{R + R_L} = \kappa, \quad (82)$$

por lo que el módulo de  $G_{EBd}(\nu)$  presentará una atenuación para bajas frecuencias y será menor que 1, por lo que  $|G_{EBd}(\nu = 0)|_{dB} = 20 \log \kappa < 0[dB]$ . Para el límite de altas frecuencias tendremos que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} |G_{EBd}(\nu = 0)| = 1, \quad (83)$$

dado que de ( 81 ) tenemos  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} Z_{LC} = 0$ .

## 4. Actividades de Laboratorio.

### 4.1. Objetivos.

- Estudiar la respuesta en frecuencia en circuitos RLC.
- Medir la frecuencia de resonancia ( $\nu_0$ ) por medio de la figura de Lissajous.
- Hacer gráficos lineal- $\log_{10}$  del módulo en decibels y de la fase de la función de transferencia, de la potencia activa, reactiva y aparente, vs. frecuencia.
- Medir las frecuencias de corte ( $\nu_h$  y  $\nu_l$ ), el ancho de banda ( $BW$ ) y el factor de calidad ( $Q$ ).

### 4.2. Elementos a utilizar.

- Resistencias,  $R \approx 10\Omega$ ,  $100\Omega$ .
- Capacitor,  $C \approx 0.22\mu\text{F}$ ,  $1\mu\text{F}$ .
- Inductancia,  $L(N = 300) \approx 1.8\text{mHy}$ .
- Generador de funciones.
- Amplificador.
- Osciloscopio.
- Multímetro de precisión.
- Multímetro LCR.
- Cables de conexión con ficha banana y cocodrilo.
- Cables de conexión tipo BNC.
- Cables de conexión BNC-cocodrilo.

### 4.3. Tareas.

- 4.3.1. Mida el valor de  $R$  (la de  $\approx 10\Omega$  y la de  $\approx 100\Omega$ ),  $L$  y  $C$  (el de  $\approx 0.22\mu\text{F}$  y el de  $\approx 1\mu\text{F}$ ), con sus errores. Utilice un multímetro de precisión o el LCR.
- 4.3.2. Mida el valor de la resistencia  $R_L$  de la inductancia, con su error. Utilice un multímetro de precisión o el LCR.
- 4.3.3. Sin encenderlos conecte todos los instrumentos a la línea de tensión de 220 V-  
**IMPORTANTE:** para conectar el osciloscopio use un cable de alimentación sin conexión de tierra. El osciloscopio debe quedar con tierra flotante. Usaremos como tierra “real” la de la fuente de alimentación y/o generador de funciones (GF).
- 4.3.4. Conecte la salida del GF a la entrada del Amplificador/Seguidor (A/S).
- 4.3.5. Respuesta en frecuencia del circuito RLC serie Pasa Banda.
  - 1) Encienda el osciloscopio (OSC) y el GF, verifique que no haya nada conectado a la salida del A/S, luego encienda el A/S.
  - 2) Con la ayuda del OSC, configure el GF para una salida del A/S con una señal sinusoidal con una frecuencia de 100Hz y una amplitud de  $\pm 1.5\text{V}$  aprox.
  - 3) Seleccione una resistencia, una inductancia y un capacitor con los siguientes valores:  
 $R \approx 100\Omega$ ,  $L(N = 300) \approx 1.8\text{mHy}$ ,  $C \approx 0.22\mu\text{F}$ .

- 4) Conecte la resistencia, la inductancia y el capacitor en serie, como se muestra en la Figura 1 (a).
- 5) Apague el A/S y luego conecte la salida de **baja impedancia** del A/S como fuente de alimentación ( $V$ ) del circuito RLC, como se muestra en la Figura 1 (a).
- 6) Conecte los Canales 1 y 2 del OSC como se muestra en el circuito de la Figura 1 (a), observe bien como se conecta la tierra de cada canal. Para disminuir el ruido en la medición puede limitar el ancho de banda de cada canal.
- 7) Encuentre el valor de la frecuencia de resonancia  $\nu_0$  utilizando el OSC para mostrar la figura de Lissajous. Para ello, configure primero los dos canales con la misma escala y luego pase al modo de visualización XY, a continuación varíe la frecuencia en el GF hasta que las elipses que obtiene se transformen en un segmento de una recta. **Cuando  $\nu = \nu_0$ , para el circuito RLC serie se obtendrá un segmento de una recta a  $45^\circ$  y para el circuito RLC compuesto se obtendrá un segmento de una recta horizontal (con CH1 midiendo  $V$  y CH2 midiendo  $V_S$ ).** Magnifique las elipses, aumentando las escalas de los canales, para determinar el momento preciso en que  $\nu = \nu_0$ . Para medir  $\nu_0$ , una vez que obtiene el segmento de una recta, puede pasar al modo Y(t) y medir la frecuencia de la señal de entrada, o realizar la lectura en el GF (si este lo permite).
- 8) Mida diez valores de la tensión de salida en función de la frecuencia. Distribuya los valores espaciándolos equidistantes en forma logarítmica, como se indica en la Guía “Anexo: Corriente alterna, conceptos y fundamentos”, utilice como frecuencia mínima y máxima a la correspondiente a una década por debajo y por arriba, respectivamente, de la frecuencia de resonancia que midió en 7) ( $\nu_a = \nu_0/10$ ,  $\nu_b = 10\nu_0$ ). Verifique cada vez que la tensión de entrada se mantiene constante, mida el valor de dicha tensión. Simultáneamente mida la diferencia de fase entre la tensión de entrada y la corriente (fase de la tensión medida sobre la resistencia). Mida el valor medio del producto de las señales de entrada y de salida (utilice la función matemática  $\times$  del OSC). **En resumen, medir con la función de adquisición del OSC la frecuencia en CH1 ( $\nu$ ), el V pico-a-pico en CH2 ( $V_{Spp}$ ), el V pico-a-pico en CH1 ( $V_{pp}$ ), el V medio ( $\overline{V_x}$ ) de la función producto ( $\times$ ), y con los cursores medir la diferencia de tiempo ( $\Delta t$ ) entre el mismo cruce por cero de las señales.**
- 9) Realice los gráficos de  $|G_{PBd}(\nu)|_{dB}$ ,  $|G_{PBd}(\nu)$  y de la potencia aparente, activa y reactiva en escala lineal-log<sub>10</sub>. Con las mediciones obtenida en 8) para cada frecuencia  $\nu$ , para obtener  $|G_{PBd}(\nu)|_{dB}$  debe calcular  **$20 \log(V_{Spp}/V_{pp})$** , para obtener  $|G_{PBd}(\nu) \equiv \varphi$  debe calcular  **$\varphi = 2\pi\nu \Delta t$**  (debe asignar correctamente el signo de  $\varphi$ ; + o – si  $V_S$  adelanta o atrasa, respectivamente, con respecto a  $V$ ), para obtener la potencia aparente ( $S$ ) debe calcular  **$S = V_{pp}V_{Spp}/(8R)$** .  
 A la potencia activa ( $P$ ) obténgala de dos formas: i) realice el cálculo de  **$P = \overline{V_x}/R$**  y muéstrela en la unidad correcta (mW o W), ii) realice el cálculo de  **$P = S \cos \varphi$** . Superponga los gráficos obtenidos por cada método para compararlos.  
 A la potencia reactiva ( $Q$ ) obténgala de dos formas: i) realice el cálculo de  **$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$** , con  $P$  calculado como  **$\overline{V_x}/R$** , ii) realice el cálculo de  **$Q = S \sin \varphi$** . Superponga los gráficos obtenidos por cada método para compararlos.
- 10) Determine, midiendo directamente sobre el gráfico de  $|G_{PBd}(\nu)|_{dB}$ , el valor de  $\nu_0$  y de las frecuencias de corte  $\nu_h$  y  $\nu_l$ , obtenga con ellos el valor del ancho de banda  $BW$  y del factor de calidad  $Q$ .
- 11) Ajuste las funciones correspondientes a los datos experimentales, obtenga del ajuste el valor de  $\nu_0$  y del factor de calidad  $Q$ , con estos valores calcule las frecuencias de corte

$v_h$  y  $v_l$  y el ancho de banda  $BW$ , verifique la relación  $Q = v_0/BW$ . Compare estos resultados con los obtenidos en el punto 10).

#### 4.3.6. Respuesta en frecuencia del circuito RLC compuesto Elimina Banda.

- 1) Apague el A/S y desarme el circuito.
- 2) Seleccione una resistencia, una inductancia y un capacitor con los siguientes valores:  
 $R \approx 10\Omega$ ,  $L(N = 300) \approx 1.8\text{mHy}$ ,  $C \approx 1\mu\text{F}$ .
- 3) Conecte en paralelo el capacitor y la inductancia, y a estos en serie con la resistencia, como se muestra en el circuito de la Figura 1 (b).
- 4) Conecte la salida de **baja impedancia** del A/S como fuente de alimentación ( $V$ ) del circuito RLC, como se muestra en la Figura 1 (b).
- 5) Conecte los Canales 1 y 2 del OSC como se muestra en el circuito de la Figura 1 (b), observe bien como se conecta la tierra de cada canal.
- 6) Encienda el A/S y realice las mismas tareas que realizó en los puntos 7)-11) anteriores.

#### 4.3.7. Escriba un resumen de los resultados obtenidos, con los gráficos correspondientes de las mediciones y de los ajustes realizados, y las conclusiones en su cuaderno de laboratorio.

-----●-----