Hoja de ecuaciones Física General IV

Ondas

- Onda unidimensional cumple: $\psi(x,t) = f(x,t) = f(x \mp tv)$ (- en caso de que se propague en sentido positivo).

Ondas armónicas

- Son de la forma:

$$\psi(x,t) = A\sin^{k(x\mp vt)}$$
$$\psi(x,t) = A\cos^{k(x\mp vt)}$$

- $k \equiv$ número de onda, $[k] = m^{-1}$ (cantidad de ondas por unidad de longitud).
- $v \equiv$ velocidad de propagación, $[v] = m/s$.
- $A \equiv$ amplitud (sus unidades dependen de la onda).

- $\lambda \equiv$ longitud de onda/ periodo espacial (distancia que recorre una perturbación en un ciclo).
- $\tau \equiv$ periodo temporal, $[\tau] = s$ (tiempo en el que la onda recorre una longitud de onda).
- $\nu \equiv$ frecuencia temporal, $[\nu] = s^{-1} = Hz$ (cantidad de perturbaciones que pasan por unidad de tiempo).
- $\omega \equiv$frecuencia angular, $[\omega] = \frac{rad}{s}$.
- Estas definiciones valen para todas las ondas periódicas.

- Igualdades:

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$
$$\boxed{v = \frac{\lambda}{\tau}}$$
$$\boxed{v = \lambda \cdot \nu}$$
$$\boxed{v = \frac{\omega}{k}}$$
$$\boxed{\nu = \frac{1}{\tau}}$$
$$\boxed{\omega = 2\pi \cdot \nu}$$

- Usando las igualdades se puede escribir la función de una onda armónica como $\psi(x,t) = A\sin(kx \mp \omega t)$

Fase y velocidad de fase

- Se define $\phi \equiv$ fase como el argumento dentro del seno (o coseno): $\phi = kx \mp \omega t + \varepsilon$. Tal que $\varepsilon \equiv$ fase inicial.

- $\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_x = \mp\omega$
- $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_t = k$
- $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\phi = \mp v$

Ecuación de onda

- $$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}}$$

Superposición de ondas

- Superposición de ondas de igual frecuencia y velocidad, con $\alpha_i = k_i x + \varepsilon_i$:

$$E_1 = E_{01} \cdot e^{i(\alpha_1 - \omega t)}$$
$$E_2 = E_{02} \cdot e^{i(\alpha_2 - \omega t)}$$
$$E(x,t) = E_0 \cdot e^{i(\alpha - \omega t)} = E_1 + E_2$$
$$\Rightarrow \boxed{E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$
$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{E_{01}\sin(\alpha_1) + E_{02}\sin(\alpha_2)}{E_{01}\cos(\alpha_1) + E_{02}\cos(\alpha_2)}}$$

- Si $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi m$ están en fase y la interferencia es constructiva.
- Si $\alpha_1 - \alpha_2 = (2k+1)\pi$ es una interferencia destructiva.
- Si $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = cte$ las ondas son coherentes.

Ondas estacionarias

- Un punto de agarre, CC: $E_0[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varepsilon_d)]_{x=0} = 0\ \forall t \Rightarrow\ \varepsilon_d = 2\pi m$.
- Nodo espacial $x_m = m\frac{\lambda}{2}$.
- Nodo temporal $t_m = (2m+1)\frac{\tau}{4}$.
- Onda en una cavidad, CC: $E_0[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varepsilon_d)]_{x,L=0} = 0\ \forall t \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$.

Ondas tridimensionales

- $\psi(\vec{r}, t) = A\sin\left(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t\right)$, donde $\vec{k} \equiv$ vector de propagación de la onda.
- $|\vec{k}| \equiv$ número de onda, $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$.
- Velocidad de fase o velocidad de propagación del frente de onda $\frac{dr_k}{dt} = \pm\frac{\omega}{t} = \pm v$.
- Ecuación de onda tridimensional $\boxed{\nabla^2\psi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}}$
- Onda esférica $\psi(r,t) = (\frac{A}{r}) \cdot e^{ik(r \mp vt)}$.
- El plano de vibración de una onda esta formado por la dirección de propagación y la dirección de la vibración.

Ondas electromagnéticas

- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, en el vacío $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 m/s$.
- Constantes: $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\frac{C}{Vm},\ \mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}\frac{N}{A^2}$.
- Polarización lineal: si la onda no cambia de dirección de vibración.

Para una onda electromagnética con cualquier polarización vale que:

● $\vec{E}$ y $\vec{B}$ están en fase en todos lo puntos del espacio.
● $\vec{E} \perp \vec{B}$.
● $\vec{E} \times \vec{B}$ apunta en la dirección de propagación de la onda $\vec{k}$.
● $\boxed{E_0 = v \cdot B_0}$

● Si $\vec{E}(x_i)$ $(\vec{B}(x_i)) \Rightarrow \; E_{x_i} = 0$ $(B_{x_i} = 0)$.

Energía y vector de Poynting

● Densidad de energía de los campos: $U_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$.
● Densidad de energía de la onda: $U = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$
● **Vector Poynting**: $\vec{S} = c^2 \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \times \vec{B}$ (cantidad de energía por unidad de tiempo y área), $[|\vec{S}|] = \frac{W}{m^2 s}$.
● **Irradiancia**: $I = \langle S \rangle_T = \frac{c^2 \varepsilon_0}{2} \cdot \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle_T = \varepsilon_0 c \cdot \langle E^2 \rangle$ (vale solo para ondas polarizadas linealmente). $[I] = \frac{W}{m^2}$.
● Para cualquier medio: $I = v\varepsilon \langle E^2 \rangle_T$

Presión de radiación

● Superficie perfectamente absorbente: $\langle P(t) \rangle_T = \frac{I}{c}$.
● Superficie perfectamente reflectante: $\langle P(t) \rangle_T = \frac{2I}{c}$

Luz en la materia

● $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$.
● Índice de refracción absoluto: $n = \frac{c}{v} \geq 1$.
● Relación de Maxwell: (para $\mu = \mu_0$) $n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{K_E}$.

Propagación de la luz

● **Ley de reflexión**: el rayo incidente, la normal a la superficie y el rayo reflejado se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia. Además, se cumple $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$.
● **Ley de refracción**: el rayo incidente, la normal a la superficie y el rayo refractado se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia. Además, se cumple la **Ley de Snell** $n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$.
● Principio de reversibilidad: en un sistema da igual la dirección del rayo se mantienen los mismo ángulos.
● Al pasar de medio, la luz mantiene su frecuencia ($\nu = cte$). Entonces se cumple $\lambda_1 = \frac{n_2}{n_2} \lambda_2$.
● **Principio de Fermat**: los rayos de luz siguen la trayectoria que minimiza el tiempo o,equivalentemente, la trayectoria que minimiza la longitud del camino óptico.

● $LCO \equiv$ Longitud de camino óptico, se define como:

$$LCO = \sum_{j=1}^{N} n_j s_j$$

$$LCO = \int_S^P n(s) ds$$

Donde n_j es el índice de refracción de las distintas fases y s_j es la longitud que recorre en cada medio. La longitud de camino óptico se corresponde a la distancia que recorrería la luz en el vacío en el tiempo en que paso a través de los distintos medios, es decir,$LCO = ct$. También se puede ver como la longitud tal que en el vacío hay la misma cantidad de longitud de ondas que en el sistema.

● La ley de reflexión y de Snell pueden ser deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Ecuaciones de Fresnel

Las ecuaciones estarán dadas teniendo en cuenta la dirección del campo eléctrico en el punto de incidencia con respecto al plano de incidencia. Además, los signos de las ecuaciones se relacionan con la dirección en la que se eligieron los campos.

Si $\vec{E}$ es perpendicular al plano de incidencia:

$$r_\perp \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_i\cos(\theta_i) - n_t\cos(\theta_t)}{n_i\cos(\theta_i) + n_t\cos(\theta_t)} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$
$$t_\perp \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_i\cos(\theta_i)}{n_i\cos(\theta_i) + n_t\cos(\theta_t)} = \frac{2\sin(\theta_t)\cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)}$$

Donde r es el **coeficiente de reflexión para la amplitud** y t es el **coeficiente de transmisión para la amplitud**.

Si $\vec{E}$ es paralelo al plano de incidencia:

$$r_\parallel \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{n_t\cos(\theta_i) - n_i\cos(\theta_t)}{n_t\cos(\theta_i) + n_i\cos(\theta_t)} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$$
$$t_\parallel \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2n_i\cos(\theta_i)}{n_t\cos(\theta_i) + n_i\cos(\theta_t)} = \frac{2\sin(\theta_t)\cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)}$$

Si $n_t > n_i \Rightarrow \theta_i > \theta_t$. Cuando la incidencia es normal $\theta_i \sim 0 \Rightarrow \theta_t \sim 0$, así se cumple:

$$[r_\parallel]_{\theta_i=0} = [-r_\perp]_{\theta_i=0} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$$

Se cumple que:

- $r_\perp < 0 \;\forall\, \theta_i \Rightarrow E_{0r}$ y E_{0i} están desfasadas en 180°.
- $r_\perp > 0$ para $\theta_i < \theta_p$.
- $r_\perp < 0$ para $\theta_i > \theta_p$.

Entonces en $\theta_i + \theta_t = 90^\circ \;\Rightarrow\; r_\parallel(\theta_p) = 0$. Donde θ_p es el **ángulo de polarización o de Brewster**. Se puede demostrar:

- $t_\perp - r_\perp = 1 \;\forall\theta_i$.
- $t_\parallel + r_\parallel = 1$ para $\theta_i = 0$.

Si $n_t < n_i \Rightarrow \theta_i < \theta_t$. Entonces, se cumple:

- $r_\perp > 0 \;\forall\theta_i \Rightarrow E_{0r}$ y E_{0i} están en fase.
- $r_\perp(\theta_c) = 1 \;(\theta_t = 90^\circ)$.
- $r_\parallel < 0$ para $\theta_i < \theta'_p$.
- $r_\parallel > 0$ para $\theta_i > \theta'_p$.
- $r_\parallel(\theta_c) = 1$.
- $\theta_p + \theta'_p = 90^\circ$.

Transmitancia y reflectancia

● Reflectancia $R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = r^2$
● Transmitancia $T \equiv \frac{I_t \cos(\theta_t)}{I_i \cos(\theta_i)} = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t^2$

Por conservación de energía:

$$T + R = 1$$

Se tiene además:

- $R \perp = r_\perp^2$
- $R \parallel = r_\parallel^2$
- $T_\perp = \frac{n_:t' cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t_\perp^2$
- $T_\parallel = \frac{n_:t' cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t_\parallel^2$

Si $\theta_i = 0$:

$$R = R \perp = R \parallel = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2$$
$$T = T \perp = T \parallel = \frac{4 n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$

Óptica geométrica

● **Objeto**: cualquier cuerpo desde donde se irradia luz.
● **Imagen**: figura formada por los rayos emitidos por un objeto luego de interactuar con el sistema óptico. Puede ser **real**, si es formada por rayos que emite el objeto que se intersecan; o **virtual** si se forma desde donde parecen venir los rayos.

Espejos planos

- Imagen virtual: $s_i < 0 \;\Rightarrow\; s_i = -s_0$
- Magnificación transversal $M_T = \frac{y'}{y} = 1$

Espejos esféricos cóncavos o convergentes

- Objeto e imagen reales $s_i, s_0 > 0$
- $R > 0$

Se utilizara la aproximación paraxial tal que el ángulo de incidencia sea muy pequeño. Así se puede deducir la ecuación para espejos, que vale para espejos convexos y cóncavos:

$$\boxed{\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{2}{R}}$$

Tal que $R > 0$ en cóncavos y $R < 0$ en convexos.

Se define la **distancia focal objeto**:

$$f_0 = lim_{s_i \to \infty} s_0 = \frac{R}{2}$$

Y **distancia focal imagen**:

$$f_i = lim_{s_0 \to \infty} s_i = \frac{R}{2}$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}}$$

Con $f > 0$ para espejos cóncavos y $f < 0$ para espejos convexos. Además $M_T = -\frac{s_i}{s_0}$, si $M_T > 0$ la imagen es derecha y si $M_T < 0$ la imagen estará invertida.

Para *espejos cóncavos* se tiene que:

- Si $s_0 > 2f$ entonces $s_i > 0$, $f < s_i < 2f$ y $-1 < M_T < 0 \ \Rightarrow$ la imagen será *real*, *invertida* y *disminuida* de tamaño.
- Si $s_0 = 2f$ entonces $s_i = s_0$ y $M_T \ \Rightarrow$ imagen *real*, *invertida* y del mismo tamaño.
- Si $f < s_i < 2f$ entonces $s_i > 0$, $2f < s_i < \infty$ y $M_T < -1 \ \Rightarrow$ imagen *real*, *invertida* y *aumentada*.
- Si $s_0 = f$ entonces no se forma imagen ya que $s_i = \pm\infty$.
- Si $s_0 < f$ entonces $s_i < 0$, $|s_i| > s_0$ y $M_T > 1 \ \Rightarrow$ imagen *real*, *derecha* y *aumentada*.

Para espejos *convexos* la imagen es siempre *virtual* ($s_i < 0$), *derecha* y disminuida ($0 < M_T < 1$).

Imágenes por refracción

Para un rayo que incide en una esfera de radio R que cambia de un medio n_1 a n_2 se cumple que:

$$\boxed{\frac{n_1}{s_0} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

$$M_T = -\frac{n_1 s_i}{n_2 s_0}$$

Se usa la siguiente **convención de signo para superficies esféricas refractoras**:

- $s_0 > 0$ objeto real.
- $s_0 < 0$ objeto virtual.
- $s_i > 0$ imagen real.
- $s_i < 0$ imagen virtual.
- $y, y' > 0$, por encima del eje óptico.

Para **luz proveniente desde la izquierda**:

- $R > 0$ si el centro de curvatura (C) está a la derecha del vértice.
- $R < 0$ si el centro de curvatura (C) está a la izquierda del vértice.

Se define distancia focal objeto y distancia focal imagen como:

$$f_0 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$

$$f_0 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$

Superficies refractoras planas

- $R \to \infty \ \Rightarrow s_i = -\frac{n_2}{n_1} s_0$
- $s_i < 0 \ \forall s_0$, por lo que la imagen será virtual.
- $M_T = 1$