

# Hoja de ecuaciones Física General IV

## Ondas

- Onda unidimensional cumple:  $\psi(x, t) = f(x, t) = f(x \mp vt)$  (- en caso de que se propague en sentido positivo).

## Ondas armónicas

- Son de la forma:

$$\psi(x, t) = A \sin[k(x \mp vt)]$$

$$\psi(x, t) = A \cos[k(x \mp vt)]$$

- $k \equiv$  número de onda,  $[k] = m^{-1}$  (cantidad de ondas por unidad de longitud).
- $v \equiv$  velocidad de propagación,  $[v] = m/s$ .
- $A \equiv$  amplitud (sus unidades dependen de la onda).
- $\lambda \equiv$  longitud de onda/ periodo espacial (distancia que recorre una perturbación en un ciclo).
- $\tau \equiv$  periodo temporal,  $[\tau] = s$  (tiempo en el que la onda recorre una longitud de onda).
- $\nu \equiv$  frecuencia temporal,  $[\nu] = s^{-1} = Hz$  (cantidad de perturbaciones que pasan por unidad de tiempo).
- $\omega \equiv$  frecuencia angular,  $[\omega] = \frac{rad}{s}$ .
- Estas definiciones valen para todas las ondas periódicas.
- Igualdades:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$v = \frac{\lambda}{\tau}$$

$$v = \lambda \cdot \nu$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

(1)

- Usando las igualdades se puede escribir la función de una onda armónica como  $\psi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t)$

## Fase y velocidad de fase

- Se define  $\phi \equiv$  fase como el argumento dentro del seno (o coseno):  $\phi = kx \mp \omega t + \varepsilon$ . Tal que  $\varepsilon \equiv$  fase inicial.
- $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_x = \mp \omega$
- $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_t = k$
- $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\phi = \mp v$

## Ecuación de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} \quad (2)$$

## Superposición de ondas

- Superposición de ondas de igual frecuencia y velocidad, con  $\alpha_i = k_i x + \varepsilon_i$ :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01} \cdot e^{i(\alpha_1 - \omega t)} \\ E_2 &= E_{02} \cdot e^{i(\alpha_2 - \omega t)} \\ E(x, t) &= E_0 \cdot e^{i(\alpha - \omega t)} = E_1 + E_2 \\ \Rightarrow \boxed{E_0^2 &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ \boxed{\tan(\alpha) &= \frac{E_{01} \sin(\alpha_1) + E_{02} \sin(\alpha_2)}{E_{01} \cos(\alpha_1) + E_{02} \cos(\alpha_2)}} \end{aligned} \quad (3)$$

- Si  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi m$  están en fase y la interferencia es constructiva.
- Si  $\alpha_1 - \alpha_2 = (2k + 1)\pi$  es una interferencia destructiva.
- Si  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = cte$  las ondas son coherentes.

## Ondas estacionarias

- Un punto de agarre, CC:  $E_0[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varepsilon_d)]_{x=0} = 0 \forall t \Rightarrow \varepsilon_d = 2\pi m$ .
- Nodo espacial  $x_m = m \frac{\lambda}{2}$ .
- Nodo temporal  $t_m = (2m + 1) \frac{\tau}{4}$ .
- Onda en una cavidad, CC:  $E_0[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varepsilon_d)]_{x=L=0} = 0 \forall t \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$ .

## Ondas tridimensionales

- $\psi(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t)$ , donde  $\vec{k} \equiv$  vector de propagación de la onda.
- $|\vec{k}| \equiv$  número de onda,  $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ .
- Velocidad de fase o velocidad de propagación del frente de onda  $\frac{dr_k}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v$ .
- Ecuación de onda tridimensional:

$$\boxed{\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \quad (4)$$

- Onda esférica  $\psi(r, t) = \left(\frac{A}{r}\right) \cdot e^{ik(r \mp vt)}$ .
- El plano de vibración de una onda esta formado por la dirección de propagación y la dirección de la vibración.

## Ondas electromagnéticas

- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ , en el vacío  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 m/s$ .
- Constantes:  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$ ,  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$ .
- Polarización lineal: si la onda no cambia de dirección de vibración.

Para una onda electromagnética con cualquier polarización vale que:

- $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están en fase en todos los puntos del espacio.
- $\vec{E} \perp \vec{B}$ .
- $\vec{E} \times \vec{B}$  apunta en la dirección de propagación de la onda  $\vec{k}$ .
- $E_0 = v \cdot B_0$
- Si  $\vec{E}(x_i)$  ( $\vec{B}(x_i)$ )  $\Rightarrow E_{x_i} = 0$  ( $B_{x_i} = 0$ ).

## Energía y vector de Poynting

- Densidad de energía de los campos:  $U_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ .
- Densidad de energía de la onda:  $U = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$
- **Vector Poynting:**  $\vec{S} = v^2 \epsilon \cdot \vec{E} \times \vec{B}$  (cantidad de energía por unidad de tiempo y área),  
[ $|\vec{S}|$ ] =  $\frac{W}{m^2 s}$ .
- **Irradiancia:**  $I = \langle S \rangle_T = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} \cdot \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle_T = \epsilon_0 c \cdot \langle E^2 \rangle$  (vale solo para ondas polarizadas linealmente). [ $I$ ] =  $\frac{W}{m^2}$ .
- Para cualquier medio:  $I = v \epsilon \langle E^2 \rangle_T$

Nota: Siempre que aparece  $c$  y  $\epsilon_0$  se puede reemplazar de forma más general con  $v$  y  $\epsilon$  respectivamente.

## Presión de radiación

- Superficie perfectamente absorbente:  $\langle P(t) \rangle_T = \frac{I}{c}$ .
- Superficie perfectamente reflectante:  $\langle P(t) \rangle_T = \frac{2I}{c}$

## Luz en la materia

- $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ .
- Índice de refracción absoluto:  $n = \frac{c}{v} \geq 1$ .
- Relación de Maxwell: (para  $\mu = \mu_0$ )  $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{K_E}$ .

## Propagación de la luz

- **Ley de reflexión:** el rayo incidente, la normal a la superficie y el rayo reflejado se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia. Además, se cumple  $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$ .
- **Ley de refracción:** el rayo incidente, la normal a la superficie y el rayo refractado se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia. Además, se cumple la **Ley de Snell**  
 $n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$ .
- Principio de reversibilidad: en un sistema da igual la dirección del rayo se mantienen los mismos ángulos.
- Al pasar de medio, la luz mantiene su frecuencia ( $\nu = cte$ ). Entonces se cumple  $\lambda_1 = \frac{n_2}{n_1} \lambda_2$ .
- **Principio de Fermat:** los rayos de luz siguen la trayectoria que minimiza el tiempo o, equivalentemente, la trayectoria que minimiza la longitud del camino óptico.
- $LCO \equiv$  **Longitud de camino óptico**, se define como:

$$LCO = \sum_{j=1}^N n_j s_j$$
$$LCO = \int_S^P n(s) ds$$

Donde  $n_j$  es el índice de refracción de las distintas fases y  $s_j$  es la longitud que recorre en cada medio. La longitud de camino óptico se corresponde a la distancia que recorrería la luz en el vacío en el tiempo en que paso a través de los distintos medios, es decir,  $LCO = ct$ . También se puede ver como la longitud tal que en el vacío hay la misma cantidad de longitud de ondas que en el sistema.

- La ley de reflexión y de Snell pueden ser deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell.

## Ecuaciones de Fresnel

Las ecuaciones estarán dadas teniendo en cuenta la dirección del campo eléctrico en el punto de incidencia con respecto al plano de incidencia, y se supone que los medios son de permeabilidad magnética  $\mu_0$ . Además, los signos de las ecuaciones se relacionan con la dirección en la que se eligieron los campos (ver la deducción en el Hecht).

Si  $\vec{E}$  es perpendicular al plano de incidencia:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &\equiv \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\perp} &\equiv \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \end{aligned} \quad (5)$$

Donde  $r$  es el **coeficiente de reflexión para la amplitud** y  $t$  es el **coeficiente de transmisión para la amplitud**.

Si  $\vec{E}$  es paralelo al plano de incidencia:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &\equiv \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos(\theta_i) - n_i \cos(\theta_t)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\parallel} &\equiv \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \end{aligned} \quad (6)$$

Si  $n_t > n_i \Rightarrow \theta_i > \theta_t$ . Cuando la incidencia es normal  $\theta_i \sim 0 \Rightarrow \theta_t \sim 0$ , así se cumple:

$$[r_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [-r_{\perp}]_{\theta_i=0} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$$

Se cumple que:

- $r_{\perp} < 0 \forall \theta_i \Rightarrow E_{0r}$  y  $E_{0i}$  están desfasadas en  $180^\circ$ .
- $r_{\perp} > 0$  para  $\theta_i < \theta_p$ .
- $r_{\perp} < 0$  para  $\theta_i > \theta_p$ .

Entonces en  $\theta_i + \theta_t = 90^\circ \Rightarrow r_{\parallel}(\theta_p) = 0$ . Donde  $\theta_p$  es el **ángulo de polarización o de Brewster**. Se puede demostrar:

- $t_{\perp} - r_{\perp} = 1 \forall \theta_i$ .
- $t_{\parallel} + r_{\parallel} = 1$  para  $\theta_i = 0$ .

Si  $n_t < n_i \Rightarrow \theta_i < \theta_t$ . Entonces, se cumple:

- $r_{\perp} > 0 \forall \theta_i \Rightarrow E_{0r}$  y  $E_{0i}$  están en fase.
- $r_{\perp}(\theta_c) = 1$  ( $\theta_t = 90^\circ$ ).

- $r_{\parallel} < 0$  para  $\theta_i < \theta'_p$ .
- $r_{\parallel} > 0$  para  $\theta_i > \theta'_p$ .
- $r_{\parallel}(\theta_c) = 1$ .
- $\theta_p + \theta'_p = 90^\circ$ .

## Transmitancia y reflectancia

- Reflectancia  $R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = r^2$
- Transmitancia  $T \equiv \frac{I_t \cos(\theta_t)}{I_i \cos(\theta_i)} = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t^2$

Por conservación de energía:

$$T + R = 1$$

Se tiene además:

- $R_{\perp} = r_{\perp}^2$
- $R_{\parallel} = r_{\parallel}^2$
- $T_{\perp} = \frac{n_t t_{\perp} \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t_{\perp}$
- $T_{\parallel} = \frac{n_t t_{\parallel} \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t_{\parallel}$

Si  $\theta_i = 0$ :

$$R = R_{\perp} = R_{\parallel} = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2$$

$$T = T_{\perp} = T_{\parallel} = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$

## Óptica Geométrica

- **Objeto:** cualquier cuerpo desde donde se irradia luz.
- **Imagen:** figura formada por los rayos emitidos por un objeto luego de interactuar con el sistema óptico. Puede ser **real**, si es formada por rayos que emite el objeto que se intersectan; o **virtual** si se forma desde donde parecen venir los rayos.

## Espejos

### Espejos planos

- Imagen virtual:  $s_i < 0 \Rightarrow s_i = -s_0$
- Magnificación transversal  $M_T = \frac{y'}{y} = 1$

### Espejos esféricos cóncavos o convergentes

- Objeto e imagen reales  $s_i, s_0 > 0$
- $R > 0$

Se utilizara la aproximación paraxial tal que el ángulo de incidencia sea muy pequeño. Así se puede deducir la ecuación para espejos, que vale para espejos convexos y cóncavos:

$$\boxed{\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{2}{R}} \quad (7)$$

Tal que  $R > 0$  en cóncavos y  $R < 0$  en convexos.

Se define la **distancia focal objeto**:

$$f_0 = \lim_{s_i \rightarrow \infty} s_0 = \frac{R}{2}$$

Y **distancia focal imagen**:

$$f_i = \lim_{s_0 \rightarrow \infty} s_i = \frac{R}{2}$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}} \quad (8)$$

Con  $f > 0$  para espejos cóncavos y  $f < 0$  para espejos convexos. Además  $M_T = -\frac{s_i}{s_0}$ , si  $M_T > 0$  la imagen es derecha y si  $M_T < 0$  la imagen estará invertida.

Para **espejos cóncavos** se tiene que:

- Si  $s_0 > 2f$  entonces  $s_i > 0$ ,  $f < s_i < 2f$  y  $-1 < M_T < 0 \Rightarrow$  la imagen será **real, invertida y disminuida** de tamaño.
- Si  $s_0 = 2f$  entonces  $s_i = s_0$  y  $M_T \Rightarrow$  imagen **real, invertida** y del **mismo tamaño**.
- Si  $f < s_0 < 2f$  entonces  $s_i > 0$ ,  $2f < s_i < \infty$  y  $M_T < -1 \Rightarrow$  imagen **real, invertida y aumentada**.
- Si  $s_0 = f$  entonces no se forma imagen ya que  $s_i = \pm\infty$ .
- Si  $s_0 < f$  entonces  $s_i < 0$ ,  $|s_i| > s_0$  y  $M_T > 1 \Rightarrow$  imagen **virtual, derecha y aumentada**.

Para espejos **convexos** la imagen es siempre **virtual** ( $s_i < 0$ ), **derecha** y **disminuida**.

## Imágenes por refracción

Para un rayo que incide en una esfera de radio  $R$  que cambia de un medio  $n_1$  a  $n_2$  se cumple que:

$$\boxed{\frac{n_1}{s_0} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}} \quad (9)$$

$$\boxed{M_T = -\frac{n_1 s_i}{n_2 s_0}} \quad (10)$$

Se usa la siguiente **convención de signo para superficies esféricas refractoras**:

- $s_0 > 0$  objeto real.
- $s_0 < 0$  objeto virtual.
- $s_i > 0$  imagen real.
- $s_i < 0$  imagen virtual.
- $y, y' > 0$ , por encima del eje óptico.

Para **luz proveniente desde la izquierda**:

- $R > 0$  si el centro de curvatura ( $C$ ) está a la derecha del vértice.
- $R < 0$  si el centro de curvatura ( $C$ ) está a la izquierda del vértice.

Se define distancia focal objeto y distancia focal imagen como:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{n_1}{n_2 - n_1} R \\ f_i &= \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \end{aligned} \quad (11)$$

## Superficies refractoras planas

- $R \rightarrow \infty \Rightarrow s_i = -\frac{n_2}{n_1} s_0$
- $s_i < 0 \forall s_0$ , por lo que la imagen será virtual.
- $M_T = 1$

## Lentes

Un lente es un dispositivo refractor (un discontinuidad en el medio dominante) que reconfigura la distribución de energía emitida.

### Tipos de lentes

Lente **simple**: dos superficies refractoras, una de ellas curva. La categoría opuesta es lente compuesta.

Lente **delgada**: el espesor de la lente es despreciable con respecto a las demás dimensiones. La categoría opuesta es lente gruesa, en este caso se trata como dos superficies refractoras.

**Sistemas centrados de superficies esféricas**: las superficies son rotacionalmente simétricas alrededor de un eje.

Lentes **convexas**, convergentes o **positivas**.

Lentes **cóncavas**, divergente o **negativa**.

### Ecuación de lentes delgadas

Esta ecuación se deduce a partir de tratar una lente convexa (con cóncava también sale) como dos superficies refractoras de radios  $R_1$  y  $R_2$ , con un espesor  $d$  y coeficientes del medio  $n_m$  y del lente  $n_l$ . Se resuelve primero una superficie, y se toma la imagen formada como objeto de la segunda superficie y se resuelve, teniendo en cuenta la separación entre los vértices de ambas curvas.

Para la primer superficie usando (9) se obtiene:

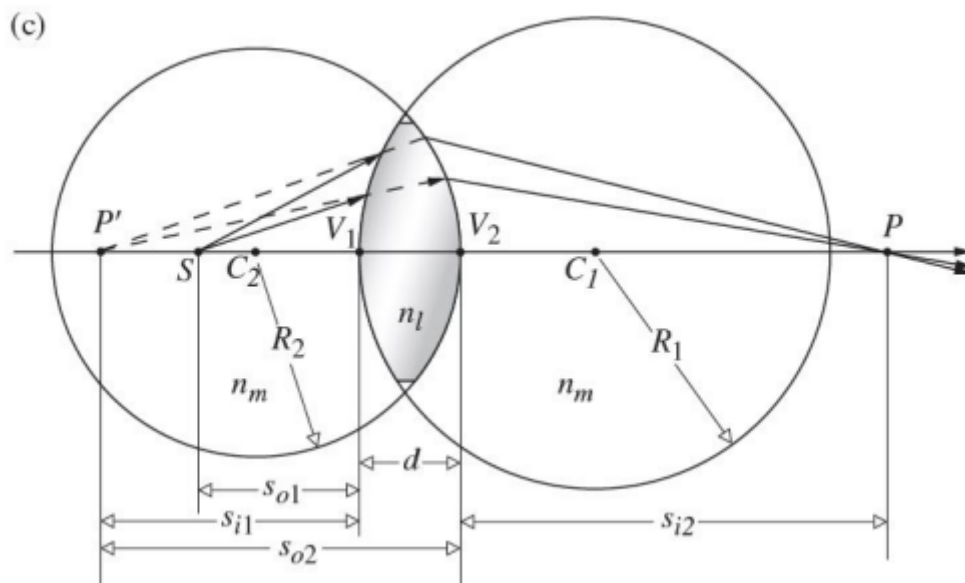
$$\frac{n_m}{s_{01}} + \frac{n_l}{s_{i1}} = \frac{n_l - n_m}{R_1} \quad (12)$$

Para la segunda superficie describiendo las distancias desde  $V_2$ , tal que  $s_{02} = d - s_{i1}$ :

$$\frac{n_l}{d - s_{i1}} + \frac{n_m}{s_{i2}} = \frac{n_m - n_l}{R_2} \quad (13)$$

Si se suma (12) y (13) y  $d \rightarrow 0$  (pues es un lente delgado) se llega a la **ecuación de lentes delgadas** o formula del constructor de lentes:

$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \left( \frac{n_l}{n_m} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14)$$



## Puntos y planos focales

Se llega a que el foco imagen y objeto son iguales  $f = f_i = f_0$  con:

$$\frac{1}{f} = (n_{lm} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15)$$

Con  $n_{lm} = \frac{n_l}{n_m}$ . A partir de (14) se puede escribir la **fórmula gaussiana para lentes delgadas**:

$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (16)$$

Se define potencia  $P$  con unidades de Dioptrías  $[P] = D$  y  $P = \frac{1}{f}$

## Lentes convergentes

Este tipo de lente cumple que  $f > 0$ :

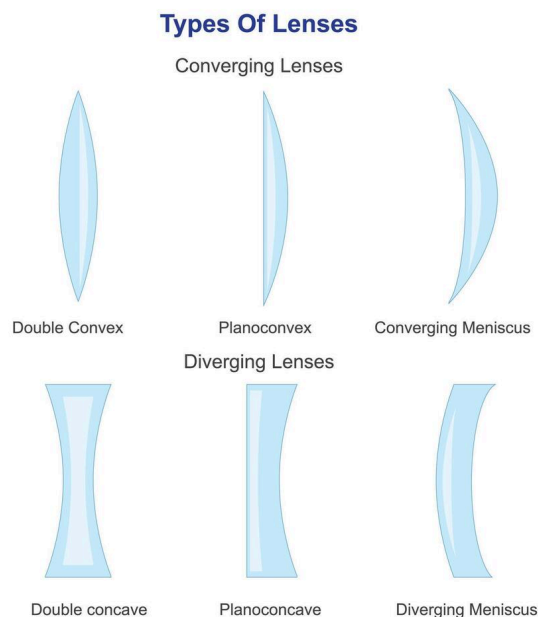
- Lente biconvexa:  $R_1 > 0$  y  $R_2 < 0$ .
- Lente plano-convexa:  $R_1 = \infty$  y  $R_2 < 0$ .
- Lente menisco-convexa:  $R_1 > 0$  y  $R_2 > 0$  con  $R_1 < R_2$ .



## Lentes divergentes

Este tipos de lentes cumple que  $f < 0$ :

- Lente bicóncava:  $R_1 < 0$  y  $R_2 > 0$ .
- Lente plano-cóncava:  $R_1 = \infty$  y  $R_2 > 0$ .
- Lente menisco-cóncava:  $R_1 > 0$  y  $R_2 > 0$  con  $R_1 > R_2$ .



Hay que notar que debido a la fórmula (15) una lente que en un medio es convergente ( $f > 0$ ) si se cambia de medio esta puede llegar a comportarse como una lente divergente.

## Convención de signos

Signos para Lentes y Superficies Esféricas		
Parámetro	Signo	
	+	-
$s_o$	Objeto Real	Objeto Virtual
$s_i$	Imagen Real	Imagen Virtual
$f$	Lente Convergente	Lente Divergente
$y_o$	Objeto Derecho	Objeto Invertido
$y_i$	Imagen Derecha	Imagen Invertida
$M_T$	Imagen Derecha	Imagen Invertida

## Formación de imágenes con trazado de rayos

Para una lente **convergente**:

- Un rayo paralelo al eje óptico pasa por el foco imagen.
- Un rayo que pasa por el foco objeto pasa paralelo al eje óptico.
- Un rayo que pasa por el vértice no cambia de dirección.

Para una lente **divergente**:

- Un rayo paralelo al eje óptico parece venir del foco imagen.
- Un rayo que va a pasar por el foco objeto pasa paralelo al eje óptico.
- Un rayo que pasa por el vértice no cambia de dirección.

## Imágenes formadas por lentes delgadas de objetos reales

Imágenes formados por lentes delgadas de objetos reales				
Lentes Convexas				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaños Relativo
$\infty < s_o < 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo Tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i  > s_o$	Derecha	Aumentada
Lentes Cóncavas				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaños Relativo
Cualquiera	Virtual	$ s_i  <  f $ $s_o >  s_i $	Derecha	Disminuida

## Magnificación transversal

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{s_i}{s_o} \quad (17)$$

Usando trigonometría se puede deducir la **fórmula de Newton**, definiendo  $x_o = s_o - f$  y  $x_i = s_i - f$  se cumple que:

$$x_o x_i = f^2 \quad (18)$$

## Magnificación longitudinal

Se define:

$$M_L \equiv \frac{dx_i}{dx_o} \quad (19)$$

Usando (18) y que  $M_T = \frac{f}{s_i - f}$ :

$$M_L = -\frac{x_i}{x_o} = -\frac{f^2}{x_o^2} = -\frac{x_i^2}{f^2} = -M_T^2 \quad (20)$$

$$M_T = -\frac{f}{x_o} = -\frac{x_i}{f}$$

## Objetos virtuales

Para trazar los rayos en un sistema con un objeto virtual los rayos no salen del objeto si no que apuntan a él en un principio y luego cambian de dirección.

## Aberraciones

- Aberraciones cromáticas: están dadas debido a que el coeficiente  $n$  depende la longitud de onda.
- Aberraciones monocromáticas: hay de dos tipos, primero aquellas que deterioran la imagen haciendo que esta pierda definición (aberración esférica, coma, astigmatismo); y aberraciones que deforman la imagen (campo de curvatura de Petzval y distorsión).

## Combinación de lentes delgadas

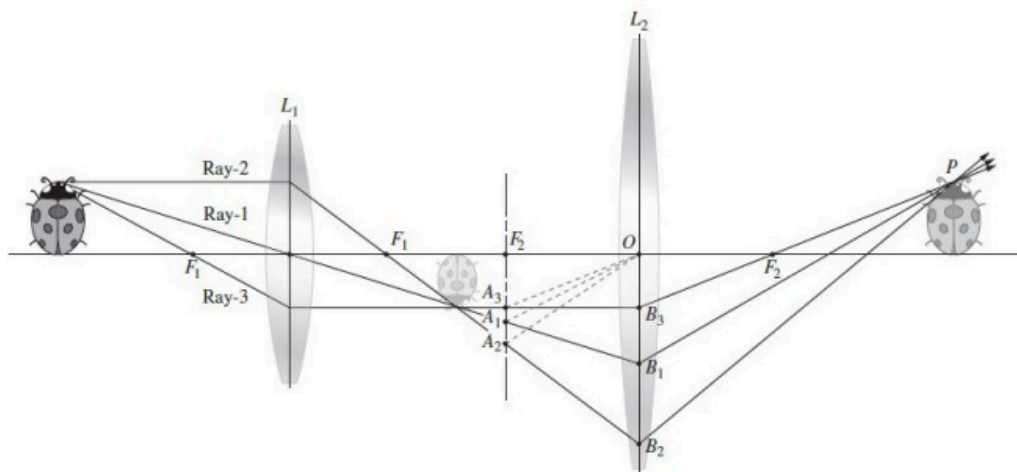
Para resolver un sistema de varias lentes se resuelve una lente y se utiliza la imagen formada como objeto (real o virtual) de la siguiente lente. Para dos lentes se puede demostrar que:

$$s_{i2} = \frac{f_2 d - f_2 \frac{s_{o1} f_1}{(s_{o1} - f_1)}}{d - f_2 - \frac{s_{o1} f_1}{(s_{o1} - f_1)}}$$

Usando que la distancias entre los lentes es  $d$  y que por lo tanto la distancia imagen del 1 será el objeto de la siguiente lente de la siguiente forma:

$$\boxed{s_{o2} = d - s_{i1}} \quad (21)$$

## Como graficar combinación de lentes



Se extiende el rayo hasta el plano formado por el foco del siguiente lente, se une el punto de intersección con el vértice del siguiente lente y el rayo que saldrá de la segunda lente será paralelo a esta recta que une  $A_i$  con  $O$ .

## Distancia focal posterior y frontal

**Distancia focal frontal** ( $dff$ ): es la distancia del vértice de la primer superficie hasta el primer punto focal.

$$dff = \lim_{s_{i2} \rightarrow \infty} s_{o1}$$

Es la distancia la que se debe colocar el objeto para que los rayos salgan paralelos de la segunda lente.

**Distancia focal posterior** ( $d_{fp}$ ): es la distancia desde el vértice de la última superficie hasta el segundo punto focal.

$$d_{fp} = \lim_{s_{o1} \rightarrow \infty} s_{i2}$$

Es la distancia a la que se formara la imagen de la segunda lente si llegan rayos paralelos.

Se tiene que:

$$d_{fp} = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)} \quad (22)$$

$$d_{ff} = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)} \quad (23)$$

Si  $d = f_1 + f_2$  entonces  $d_{ff}$  y  $d_{fp} \rightarrow \infty$ .

## Lentes en contacto

En este caso se tiene que  $d = 0$ , entonces:

$$d_{ff} = d_{fp} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

En este caso la distancia focal efectiva del sistema es:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (24)$$

Se puede decir que si dos lentes están en contacto el sistema se comporta como una sola lente con distancia focal según la ecuación (24).

Si se generaliza el resultado para  $N$  lentes en contacto con distancias focales  $f_j$ :

$$\frac{1}{f} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{f_j}$$

## Magnificación lateral en un sistema de dos lentes

Es el producto de las magnificaciones de cada lente

$$\begin{aligned} M_T &= M_{T1} M_{T2} \\ \Rightarrow M_T &= \left( -\frac{s_{i1}}{s_{o1}} \right) \left( -\frac{s_{i2}}{s_{o2}} \right) \\ \Rightarrow M_T &= \left( -\frac{f_1}{s_{o1} - f_1} \right) \left( -\frac{s_{i2}}{d - s_{i1}} \right) \\ \Rightarrow M_T &= \frac{f_1 s_{i2}}{d(s_{o1} - f_1) - s_{o1} f_1} \end{aligned}$$

## Diafragma de apertura y de campo

Diafragma de apertura (DA)(AS): determina la cantidad de luz que llega a la imagen.

Diafragma de campo (DC)(FS): determina el campo de visión de un instrumento.

## Cámara fotográfica

Una cámara fotográfica forma una imagen real, invertida, y en general disminuida de tamaño.

La imagen adecuada es la energía por unidad de área que llega al detector la cuál debe de estar dentro de unos límites. Se puede demostrar que la irradiancia es proporcional a  $\left(\frac{D}{f}\right)^2$  donde  $D$  es el tamaño del diafragma y  $f$  es el foco. Se define  $\frac{D}{f} \equiv$  **apertura relativa**. Entonces:

$$I \propto \left(\frac{D}{f}\right)^2 \quad (25)$$

También se define  $f/\# = \frac{f}{D}$ . Así una fotografía bien expuesta, es tal que le llega la cantidad de energía necesaria al sensor para formar una imagen:

$$E = I\Delta t \propto \frac{\Delta t}{(f/\#)^2} \quad (26)$$

## Ojo humano

El ojo humano tiene dos elementos refractores, la cornea y el cristalino, y es equivalente a una lente delgada convexa de foco variable. Algunos conceptos importante relacionados con el ojo:

- Acomodación: es el enfoque fino que realiza el cristalino.
- Punto próximo: es el punto más cercano al que un ojo puede enfocar.

## Miopía-Lente negativa

El ojo forma la imagen antes de la retina cuando los rayos le llegan paralelos. El punto lejano es el punto para el cual el ojo ya no puede enfocar, entonces se necesita que la lente forme una imagen virtual a una distancia menor. Para una lente de contacto se realiza el cálculo directo para la potencia que necesita la lente para formar una imagen antes del punto lejano. En el caso de lentes aéreos se toma como un sistema de dos lentes delgadas separadas por  $d = 16mm$ .

## Hipermetropía-Lente positiva

En este caso el punto próximo esta mas lejos de lo normal, por lo que se utiliza una lente positiva para formar una imagen virtual mas lejana, Usando los datos de  $s_o$  y  $s_i$  se calcula la potencia que debe tener la lente.

# Instrumentos ópticos

## Lupa

Es un instrumento que consiste de una **lente convergente** que aumenta el poder de refracción del ojo. Proporciona un **imagen virtual** de objetos más cercanos que el foco de la lente ( $s_o < f$ ), lo que **genera una imagen derecha y aumentada**. Se define para la lupa el **aumento angular** ( $M_A$ ) como el cociente entre el ángulo  $\alpha_a$ , sobre el ojo formado por la distancia hasta el ojo de la imagen y su altura, y  $\alpha_u$  que sería el ángulo generado por el objeto y su distancia al ojo si no estuviese la lente, es decir:

$$M_A = \frac{\alpha_a}{\alpha_u}$$

Con ángulos tal que con aproximación paraxial:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_a) &\sim \alpha_a = \frac{y_i}{L} \\ \tan(\alpha_u) &\sim \alpha_u = \frac{y_o}{d_o} \\ \Rightarrow M_A &= -\frac{s_i L}{s_o d_o}\end{aligned}$$

Con  $L$  la distancia desde el ojo hasta la imagen formada y  $d_o$  es la distancia al punto cercano del ojo.

Entonces, usando la ecuación para las lentes y que  $l$  es la distancia del ojo a la lupa se obtiene:

$$M_A = \frac{d_o}{L} \left[ 1 + \frac{1}{f} (L - l) \right] \quad (27)$$

Usando (27) se pueden ver tres casos interesantes:

- Si la distancia del ojo a la lente es la misma que el foco de la lupa  $f = l \Rightarrow M_A = \frac{d_o}{f}$ .
- Si la lupa esta pegada al ojo  $l = 0 \Rightarrow M_A = d_o \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{f} \right)$ , además si  $L = d_o \Rightarrow M_A = 1 + \frac{d_o}{f}$  es el **máximo valor**.
- Si el objeto esta sobre el foco de la lente  $s_o = f \Rightarrow L = \infty \Rightarrow M_A = \frac{d_o}{f} \forall l$ .

## Microscopio compuesto

Es un instrumento que consiste de dos lentes colocadas sobre el mismo eje óptico, el primer lente al que entra luz desde el objeto se llama **lente objetivo** y el segundo **lente ocular**, y su objetivo es aumentar objetos cercanos a la lente objetivo (los rayos incidentes al sistema no serán paralelos). El lente objetivo crea una imagen necesariamente entre el foco de la lente ocular y la lente ocular para que este funcione como una lupa y termine magnificando el objeto. Por esto es que la magnificación de un microscopio es la magnificación transversal de la lente objetivo por el aumento angular de la lente ocular:

$$M_P = M_{To} M_{Ae} \quad (28)$$

En el caso en que la imagen de la primer lente se forme en el foco de la segunda  $s_{oe} = f_e$  entonces por lo visto en la lupa  $M_A = \frac{d_0}{f_e}$ . Además, usando la ecuación (20) obtenida de la ecuación de Newton se tiene que si  $L = x_{io}$  (como la imagen se forma sobre el segundo foco  $L$  es la distancia entre los focos de ambas lentes), entonces  $M_T = -\frac{L}{f_o}$ . Para este caso:

$$M_P = -\frac{Ld_0}{f_o f_e}$$

## Telescopio

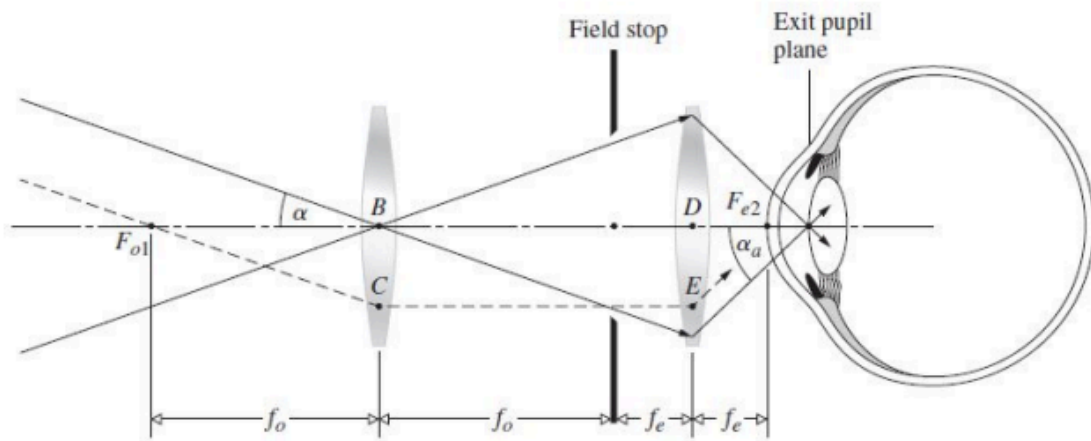
Existen dos tipos de telescopios, los **telescopios refractores** los cuales son similares a los microscopios y utilizan un combinación de lentes, y los telescopios reflectores que usan un espejo curvo y una lente. La idea del telescopio es poder observar objetos grandes y distantes, por lo que **los rayos incidentes** al sistema serán siempre **paralelos**.

Para un telescopio refractor las lentes se llaman igual que las de un microscopio. En un **telescopio afocal** los rayos que inciden y salen del sistema son paralelos, solamente los cambia de dirección para poder magnificar la imagen. En este caso se cumple que  $d = f_o + f_e$  donde  $d$  es la distancia entre los lentes y es llamada la longitud del telescopio.

Se define el aumento de manera similar al de un microscopio:

$$M_P = \frac{\alpha_a}{\alpha} \quad (29)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo de incidencia de los rayos sobre el lente objetivo con respecto al eje óptico y  $\alpha_a$  es el ángulo de salida de los rayos (salen paralelos) con respecto al eje óptico.



Utilizando aproximación paraxial  $\alpha = -\frac{\overline{BC}}{f_o}$  y  $\alpha_a = \frac{\overline{DE}}{f_e}$ , como  $\overline{BC} = \overline{DE}$  se llega a:

$$M_P = -\frac{f_o}{f_e} \quad (30)$$

## Prismas

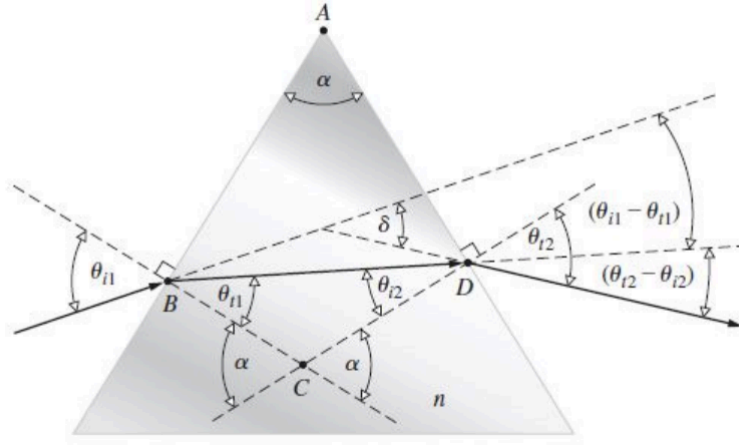
Los prismas sirven como divisores de haces de luz, polarizadores e interferómetros. Hay dos tipos de prismas:

- **Prisma dispersivo:** separa frecuencias constituyentes de la luz.
- **Prisma reflectivo:** produce cambios en la orientación de la imagen o en la dirección de la luz.

## Prisma dispersivo

Para un rayo de luz que atraviesa un prisma se define la **desviación angular**  $\delta$  como el ángulo de diferencia entre el rayo incidente y el rayo que sale del prisma. Haciendo uso de geometría y la ley de Snell se tiene que:

$$\delta = \theta_{i1} + \arcsin \left[ \sin(\alpha) \sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_{i1})} - \cos(\alpha) \sin(\theta_{i1}) \right] - \alpha \quad (31)$$



Se puede demostrar que existe un ángulo de incidencia que minimiza  $\delta$ . Si se deriva (31) se iguala la derivada a 0 y se reemplaza se obtiene que:

$$\delta_m = 2 \cdot \arcsin \left[ n \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \alpha \quad (32)$$

De (32) se deduce que para un prisma con índice  $n$  y ángulo  $\alpha$  sumergido en un medio  $n'$  se tiene que:

$$\boxed{\frac{n}{n'} = \frac{\sin \left[ \frac{(\delta_m + \alpha)}{2} \right]}{\sin \left( \frac{\alpha}{2} \right)}} \quad (33)$$

En caso que  $\delta$  sea mínimo se cumple que:

$$\theta_{t1} = \theta_{i2} = \frac{\alpha}{2} \quad (34)$$

Es decir el rayo cuya desviación es la mínima atraviesa el prisma de forma paralela a la base.

Existen los llamados prismas de desviación constante que para cada  $\lambda$  saldrá del prisma con una desviación distinta.

## Prisma reflector

El haz se hace incidir en el prisma de tal forma que se produzca al menos una reflexión total interna, con el propósito de cambiar la dirección de la luz.

Para un prisma isósceles se tiene que:

$$\delta = 2\theta_{i1} + \alpha \quad (35)$$

Por lo que la desviación angular no dependerá ni del índice del prisma ni de la longitud de onda de la luz, es un prisma acromático.



# Óptica Física

## Polarización

### Tipos de polarización

**Luz linealmente polarizada** ( $\mathcal{P}$ ): la dirección del campo eléctrico es constante aunque su magnitud y signo varían con el tiempo. Por lo que se puede definir un plano de vibración generado por el vector de propagación y el campo eléctrico.

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y &= \hat{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon)\end{aligned}\tag{36}$$

Si  $\varepsilon > 0$  se dice que  $E_y$  está retrasada respecto de  $E_x$ .

Si  $\varepsilon < 0$  se dice que  $E_y$  está adelantada respecto de  $E_x$ .

Si  $\varepsilon = \pm m\pi$  la onda esta linealmente polarizada.

### Polarización circular

La **polarización circular a derecha** ( $\mathcal{R}$ ) se da cuando  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$  y  $\varepsilon = -\pi/2 + 2m\pi$ , entonces queda:

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y &= \hat{j}E_0 \sin(kz - \omega t) \\ \Rightarrow \vec{E} &= E_0[\hat{i} \cos(kz - \omega t) + \hat{j} \sin(kz - \omega t)]\end{aligned}\tag{37}$$

Si  $\varepsilon = \pi/2 + 2m\pi$  se trata de una polarización circular a izquierda ( $\mathcal{L}$ ) entonces queda:

$$\vec{E} = E_0[\hat{i} \cos(kz - \omega t) - \hat{j} \sin(kz - \omega t)]\tag{38}$$

### Polarización elíptica $\mathcal{E}$

En esta polarización el campo eléctrico rota y cambia de magnitud, de manera que la punta del vector traza una elipse en un plano perpendicular a el vector propagación.

De forma general:

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y &= \hat{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon)\end{aligned}\tag{39}$$

Nota: la polarización lineal y circular son casos específicos de la polarización elíptica.

A partir de las formas de la expresión (39) se puede deducir la ecuación de la elipse:

$$\begin{aligned}\frac{E_x}{E_{0x}} &= \cos(kz - \omega t) \\ \frac{E_y}{E_{0y}} &= \cos(kz - \omega t) \cos(\varepsilon) - \sin(kz - \omega t) \sin(\varepsilon) \\ \Rightarrow \frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\varepsilon) &= -\sin(kz - \omega t) \sin(\varepsilon)\end{aligned}\tag{40}$$

También se tiene que

$$\sin(kz - \omega t) = \sqrt{1 - \cos^2(kz - \omega t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \quad (41)$$

Usando la expresión obtenida en (40):

$$\left[\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\varepsilon)\right]^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right] \sin^2(\varepsilon) \quad (42)$$

Se llega a que:

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right) \cos(\varepsilon) = \sin^2(\varepsilon) \quad (43)$$

Que es la ecuación para una elipse que forma un ángulo  $\alpha$  con el sistema de coordenadas  $(E_x, E_y)$ :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos(\varepsilon)}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (44)$$

La convención para saber si la polarización es a izquierda o a derecha es que si se mira a la fuente si gira en sentido **antihorario** es a **izquierda**, y si gira en sentido **horario** es a **derecha**.

## Luz Natural

La luz natural, de una fuente de luz ordinaria tiene un gran numero de emisores atómicos orientados al azar, por lo que la polarización global cambia de manera impredecible y no es posible distinguir un estado de polarización resultante. Matemáticamente la luz natural se representa como dos ondas arbitrarias, de igual amplitud, linealmente polarizadas, ortogonales e incoherentes, es decir  $\varepsilon(t)$  varia rapidamente y al azar.

## Polarizadores

### Dicroísmo o Polarización por absorción selectiva

Existen sustancias llamadas dicroicas que transmiten las ondas cuyo campo eléctrico es paralelo a determinada dirección, y absorbe el campo que vibre en cualquier otra dirección.

En un **polarizador ideal** la intensidad transmitida es la mitad de la incidente, y solo la luz cuyo campo eléctrico sea paralelo al eje de transmisión será transmitida.

Si se tienen dos polarizadores por absorción selectiva tales que sus ejes de transmisión forman un ángulo  $\theta$ , la intensidad que saldrá del segundo polarizador vendrá dada por la **ley de Malus**:

$$I(\theta) = I_1 \cos^2(\theta) \quad (45)$$

Donde  $I_1$  es la intensidad luego del primer polarizador.

### Polarización por reflexión

Por las leyes de Fresnel existe un ángulo de incidencia para el cual el campo eléctrico paralelo al plano de incidencia (formado por el rayo y la normal) reflejado se anula. Este ángulo es llamado ángulo de Brewster y cumple la **ley de Brewster**:

$$\tan(\theta_p) = \frac{n_t}{n_i} \quad (46)$$

Por lo que la luz reflejada está linealmente polarizada en dirección perpendicular al plano de incidencia. El problema de este polarizador es que la luz reflejada es muy débil. Para luz natural se cumple que:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{I_{r\parallel} + I_{r\perp}}{I_i} = \frac{1}{2}(R_{\parallel} + R_{\perp}) \quad (47)$$

Donde:

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= r_{\parallel}^2 \\ R_{\perp} &= r_{\perp}^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Según las expresiones (5) y (6) de las ecuaciones de Fresnel.

## Birrefringencia o polarización por doble refracción

Hay sustancias solidas que debido a que son cristalinas son ópticamente anisotrópicas, por lo que presentan mas de un índice de refracción. Si se tienen dos índices de refracción se define un eje óptico, tal que las ondas **paralelas** tienen un índice de refracción llamado **extraordinario** y las ondas **perpendiculares** tienen otro índice que se denomina **ordinario**:

$$\begin{aligned} n_o &= \frac{c}{v_{\perp}} \\ n_e &= \frac{c}{v_{\parallel}} \end{aligned} \quad (49)$$

Se define la **medida de birrefringencia** como:

$$\Delta n = (n_e - n_o) \quad (50)$$

## Polarización por Dispersión, Esparcimiento o Scattering

El scattering es un fenómeno producido por la absorción de luz por una molécula, y la posterior emisión de la onda en una cierta dirección. Esto genera que la luz que llega de una fuente se disperse en todas las direcciones, como pasa en la atmósfera terrestre.

Se tienen distintos tipos de scattering, que dependen del valor de el radio de las partículas y de la longitud de onda de la luz que llega:

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (51)$$

Dependiendo del valor de  $x$  se tienen distintos tipos de dispersión. Se tiene que si  $x$  es cercano a 1 se tiene el scattering de Mie, el cual no depende de la longitud de onda que le llega. Para valores menores se tiene scattering de Rayleigh, en el cual la dispersión si depende de  $\lambda$  y es el que produce que el cielo sea azul. Para valores de  $x$  mas pequeños la dispersión se puede considerar nula, y para valores mas altos se puede trabajar con óptica geométrica.

Hay una dirección para la cual una partícula emite luz polarizada, por lo que se puede aprovechar este fenómeno como polarizador.

## Retardadores

Los retardadores son dispositivos ópticos que sirven para cambiar la polarización de la onda incidente. Estos están hechos de materiales birrefringentes cuyo eje óptico es paralelo a la cara en donde incide la luz de forma perpendicular. Por lo tanto, los rayos ordinario y extraordinario se propagan en la misma dirección pero con velocidades diferentes, lo que genera un diferencia de fase, la cual dependerá del espesor de la lámina y de la longitud de onda de la onda incidente. La

onda resultante será la superposición de la onda o y e que tienen una diferencia de fase relativa de  $\Delta\phi$ .

La diferencia de camino óptico entre ambos rayos esta dad por:

$$\Lambda = d|n_o - n_e| \quad (52)$$

Por lo que la diferencia de fase relativa es:

$$\Delta\phi = k_0\Lambda = \frac{2\pi}{\lambda_0}d|n_o - n_e| \quad (53)$$

El estado de polarización de la onda dependerá de el  $\Delta\phi$  y de la amplitud de cada componente.

- Si  $\Delta\phi = 2\pi$  el retardado es igual una longitud de onda, por lo que no se desfasan, y no hay cambio en la polarización.
- Si  $\Delta\phi = \pi$  el retardo es igual a media longitud de onda, y se puede demostrar que rota luz polarizada con un ángulo  $\theta$  con respecto al eje con la velocidad de propagación de la luz mas rápida, en un ángulo  $2\theta$ . Además, invierte el sentido de rotación de la luz circular o elípticamente polarizada.
- Si  $\Delta\phi = \pi/2$  el retardo relativo es de un cuarto de longitud de onda, y se observa que si incide una onda linealmente polarizada se obtiene una onda elípticamente o circularmente polarizada.

Si incide luz natural sobre un retardador no se observa ningun efecto, ya que la luz natural se considera como dos componentes ortogonales con diferencia de fase aleatoria, por lo que sumarle un desfase relativo sigue produciendo una diferencia de fase aleatoria.

Si incide luz linealmente polarizada paralela a los ejes principales tampoco se verá afectada por el retardador.

## Interferencia

La interferencia es la interacción de dos o mas ondas de luz que producen una irradiancia que se desvía de la suma de las irradiancias de las componentes. Se considerarán casos en los que haya dos fuentes puntuales de ondas monocromáticas de la misma frecuencia, un medio de propagación homogéneo, la separación entre las fuentes debe ser mucho mayor a la longitud de onda ( $a \gg \lambda$ ), problemas en los que el punto de observación sea lo suficientemente lejano para que los frentes de onda puedan ser considerados como planos, y que las ondas estarán linealmente polarizadas.

La irradiancia en caso de interferencia tendrá un término mas en la suma de las irradiancias de cada onda:

$$I_T = I_1 + I_2 + I_{12} \quad (54)$$

$$I_{12} = 2\varepsilon v \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle_T$$

$I_{12}$  se llama **término de interferencia**.

Se puede demostrar que:

$$I_{12} = \varepsilon v \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(\delta) \quad (55)$$

Donde  $\delta$  es la diferencia de fase dada por la diferencia de camino óptico:

$$\delta = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (56)$$

Si tienen el mismo número de onda:

$$\delta = k\Lambda + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (57)$$

La ecuación (57) vale para onda esféricas.

- Si  $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2 \Rightarrow I_{12} = 0$ .
- Si  $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2 \Rightarrow I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta)$

De este ultimo caso si se tienen dos campos paralelos (como será el caso las rendijas), se puede ver que:

- Si  $\delta = 2m\pi$  se tiene un máximo de irradiancia.
- Si  $\delta = (2m + 1)\pi$  se tiene un mínimo en la irradiancia .

Si se tienen dos campos con amplitudes iguales, la irradiancia mínima será 0 y la máxima 4 veces la de una sola de las ondas.

### Condiciones para la interferencia

- Las ondas deben tener la misma frecuencia.
- Las ondas deben ser monocromáticas y de igual longitud de onda.
- Las ondas deben tener igual amplitud para obtener un patrón de máximo contraste.
- Las fuentes deben ser coherentes.

## Interferómetros de división de frente de onda

### Experimento de Young

La m-ésima franja brillante:

$$y_m \simeq m\lambda \frac{s}{a} \quad (58)$$

Donde  $s$  es la distancia de las rendijas a la pantalla y  $a$  es la separación entre las rendijas.

$$\Delta y \simeq \frac{\lambda s}{a} \quad (59)$$

### Doble espejo y biprisma de Fresnel

En ambos casos se traslada el problema a uno de Young, en el doble espejo de Fresnel se usa que el ángulo entre las imágenes de los espejos medido desde el punto de unión es 2 veces el ángulo formado entre horizontal y el segundo espejo.

En ambos vale que :

$$\Delta y \simeq \frac{\lambda s}{a} \quad (60)$$

En el biprisma de Fresnel:

$$a = 2\alpha(n - 1)d \quad (61)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo del prisma,  $d$  es la distancia del prisma a la fuente puntual, y  $n$  es el índice de refracción del prisma.

## Espejo de Lloyd

La diferencia de fase en este interferómetro se le suma  $\pi$  debido a las leyes de Fresnel. La  $m$ -ésima franja oscura es:

$$y_m \simeq m\lambda \frac{s}{a} \quad (62)$$

Por lo que su patrón será el complementario al de Young.

## Interferómetros de división de amplitud

En este tipo de interferómetros la onda que incide sobre un espejo, parte se refleja y parte se transmite, y la onda transmitida vuelve a reflejarse. Así se divide la amplitud de una onda incidente. En este caso habrá interferencia siempre y cuando no se haya destruido la coherencia entre las dos ondas.

### Películas dieléctricas. Interferencia de dos haces

Si se tiene una película de espesor  $d$ , de alguna sustancia con índice de refracción  $n_f$  entre dos medios caracterizados por los índices  $n_1$  (incidente), y  $n_2$  (posterior); si incide luz con un ángulo  $\theta_i$  y se transmite con un ángulo  $\theta_t$ . La diferencia de camino óptico será:

$$\Lambda = 2n_f d \cos(\theta_t) \quad (63)$$

Si la película esta sumergida en un solo medio ( $n_1 = n_2$ ), entonces por las ecuaciones de Fresnel la diferencia de fase entre las ondas se le debe sumar o restar  $\pi$  en caso de que  $\theta < 30^\circ$ :

$$\delta = k_0 \Lambda \pm \pi \quad (64)$$

Entonces el máximo de interferencia:

$$d \cos(\theta_t) = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{4n_f} \quad (65)$$

Y el mínimo:

$$d \cos(\theta_t) = 2m \frac{\lambda_0}{4n_f} \quad (66)$$

Si el ángulo de incidencia es cercano a 0 se forman las **franja de Haidinger**.

### Franjas de igual espesor

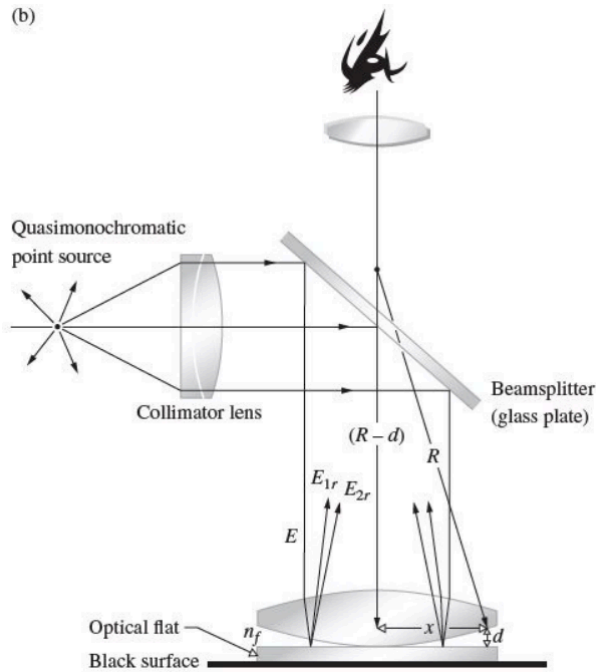
Se colocan 3 materiales de distinto índice de refracción en forma de cuña, si incide luz con un ángulo cercano a 0, se forman las **Franjas de Fizeau**. Si la cuña tiene ángulo pequeño  $\alpha$ , y el índice del material del medio es  $n_f$ :

$$\Lambda = 2n_f d \cos(\theta_t) \simeq 2n_f d \quad (67)$$

Como  $\alpha$  pequeño, con  $x$  la distancia al vértice de la cuña:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &\simeq \alpha = \frac{d}{x} \\ \Rightarrow \delta &= \frac{4\pi}{\lambda_0} n_f x \alpha - \pi \end{aligned} \quad (68)$$

## Anillos de Newton



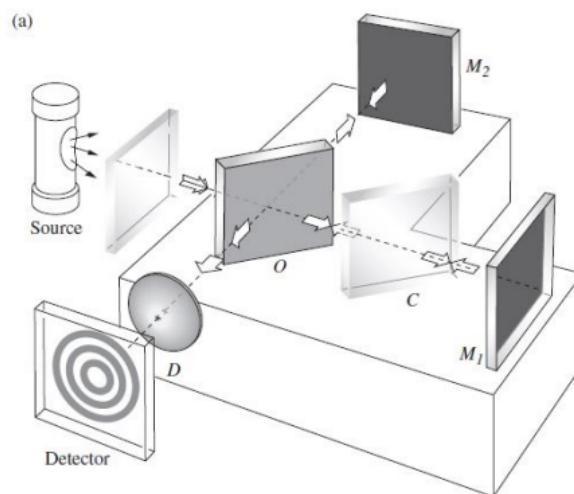
Si se tiene la situación de la imagen se usa la expresión del radio de la lente  $R$ , usando que  $R \gg d$  y la ecuación (67) se obtienen las siguientes expresiones para el radio de las franjas de máximo y mínimo:

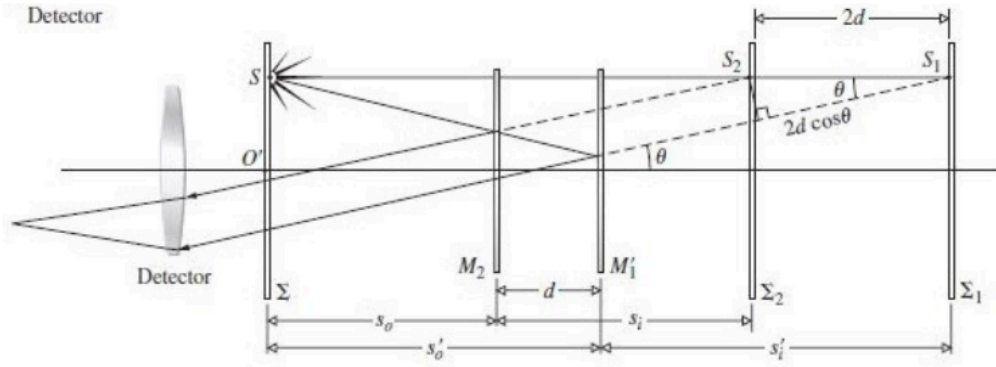
$$x_{max} = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda_f R \right]^{1/2} \quad (69)$$

$$x_{min} = (m \lambda_f R)^{1/2}$$

En los anillos de Newton (franjas de Fizeau)  $m$  disminuye hacia el centro, y en las franjas de Haidinger  $m$  aumenta hacia el centro.

## Interferómetros con espejos: de Michelson





El interferómetro de Michelson se puede construir geoméricamente, y de esta forma resolver el patrón de interferencia:

$$\Lambda = 2d \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \delta = k_0 2d \cos(\theta) + \pi \quad (70)$$

Si se cuentan el número de franjas  $N$  que pasan en una distancia  $\Delta d$ :

$$\Delta d = N \frac{\lambda_0}{2} \quad (71)$$

La franja oscura central cumple:

$$2d = m_0 \lambda_0 \quad (72)$$

## Recubrimientos antirreflectantes

Si se tiene un película dieléctrica de índice  $n_f$  sobre un sustrato de índice  $n_s$  en un medio de índice  $n_0$ , en situación de incidencia normal ( $\theta_i \simeq 0$ ):

$$[r_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [-r_{\perp}]_{\theta_i=0} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \quad (73)$$

Entonces la reflectancia es:

$$R_1 = \frac{(n_0 n_s - n_f^2)^2}{(n_0 n_s + n_f^2)^2} \quad (74)$$

Si se quiere que sea antirreflectante  $R_1 \simeq 0$ .

El espesor de la película esta dado por:

$$e = \frac{\lambda_0}{4} \quad (75)$$

## Difracción

La difracción es un fenómeno producido por la interferencia dada por la combinación de muchas ondas luminosas. Además, en general se da por la desviación de la luz cuando esta se encuentra con un obstáculo o rendija, es decir la difracción es un fenómeno de borde. Se puede explicar este fenómeno con el principio de Huygens-Fresnel, cada punto sin obstrucción (sobre la rendija) sirve como fuente de ondas esféricas, y el campo en un punto es la superposición de todas estas ondas secundarias.



Existen dos tipos de difracción, la **difracción es de Fresnel** o de campo cercano, que se da cuando la fuente puntual y la pantalla están relativamente cerca de del obstáculo, por lo que las ondas que llegan no se pueden considerar planas. En la **difracción de Fraunhofer** o de campo lejano, la fuente de luz y la pantalla están lo suficientemente lejos como para considerar que las ondas que llegan son de frente plano. Solo se tratan situaciones en las que se de la difracción de Fraunhofer.

Se considera que la difracción es de Fraunhofer si para  $R$  la distancia menor entre la fuente y la rendija o la pantalla y la rendija, y  $b$  la dimensión más grande de la abertura se cumple:

$$R > \frac{b^2}{\lambda} / R \gg \frac{b^2}{2\lambda}$$

## Múltiples osciladores coherentes

Si se tienen  $N$  osciladores separados por una distancia  $d$  sobre una misma recta, y se observa el campo eléctrico en un punto  $P$  muy lejano tal que es mucho mayor a la extensión del conjunto de osciladores, y la amplitud del campo de cada oscilador es la misma. Se puede deducir que si la intensidad de cada oscilador es  $I_0$ , la intensidad es:

$$I = I_0 \left[ \frac{\sin(N \frac{\delta}{2})}{\sin(\frac{\delta}{2})} \right]^2 \quad (76)$$

Con:

$$\delta = kd \sin(\theta) \quad (77)$$

Y la irradiancia en los máximos es:

$$I_N = N^2 I_0 \quad (78)$$

## Una rendija

Un ranura con una abertura  $b$  mucho menor que la longitud de la onda, se puede ver como una fuente lineal de osciladores ideales, como las fuentes secundarias del principio de Huygens-Fresnel. Cada punto emite una onda secundaria esférica. En este caso el módulo del campo eléctrico es:

$$E = \frac{\epsilon_0}{r} \sin(\omega t - kr) \quad (79)$$

Donde  $\epsilon_0$  es la eficacia de la fuente.

Si se tienen un numero  $N$  de osciladores por unidad de longitud, en un pequeño segmento  $\Delta y_i$  hay  $\Delta y_i \frac{N}{b}$  osciladores. Si se divide la rendija en  $M$  segmentos iguales, el  $i$ -ésimo segmento aporta a la intensidad:

$$E_i = \frac{\epsilon_0}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \left( \frac{N \Delta y_i}{b} \right) \quad (80)$$

El campo total será:

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{\epsilon_L}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \Delta y_i \quad (81)$$

Con  $\epsilon_L$  la eficacia por unidad de longitud. Entonces, para una rendija de apertura  $b$ :

$$E = \epsilon_L \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{r} \sin(\omega t - kr) dy \quad (82)$$

Ahora haciendo uso de la integral, para una rendija de apertura  $b$  se deduce que la irradiancia esta dada por:

$$\boxed{I(\theta) = I(0) \left( \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right)^2}$$

$$\boxed{\beta = \frac{b\pi}{\lambda} \sin(\theta)}$$
(83)

La anchura (extensión angular) del máximo central esta dada por:

$$\theta_1 = \frac{\lambda}{b} \quad (84)$$

## Una ranura rectangular alargada

Haciendo la integral (82) se obtiene que para una ranura alargada de ancho  $b \sim \lambda$ , y una largo  $l \sim cm$ , la irradiancia es:

$$I(\theta) = I(0) \left[ \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2 \quad (85)$$

Con  $\beta$  igual a (83).

Si  $b$  es chico, entonces  $\beta$  es chico entonces  $I$  decae rápido a 0. Aunque, se pueden observar máximos subsidiarios.

La **irradiancia mínima** se da cuando:

$$\beta = m\pi$$

$$\Rightarrow b \sin(\theta) = m\lambda \quad (86)$$

La **irradiancia máxima** se da cuando:

$$\tan(\beta) = \beta \quad (87)$$

## Doble rendija

Para dos rendijas de ancho  $b$ , con separación entre los centros igual a  $a$ , si se realiza la integral (82) se obtiene que la irradiancia para un punto con apertura angular  $\theta$  medido desde una de las rendijas es:

$$\boxed{I(\theta) = 4I_0 \left[ \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2 \cdot \cos^2(\alpha)}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin(\theta)}$$

$$\boxed{\beta = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\theta)}$$
(88)

Se tendrán los **mínimos de difracción** en  $\beta = \pm m\pi / m \neq 0$ , y los **mínimos de interferencia** en  $\alpha = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ .

## Múltiples ranuras

Cuando se tienen  $N$  ranuras de ancho  $b$  separadas por una distancia  $a$ , la irradiancia es:

$$I(\theta) = I_0 \left[ \frac{\sin(\beta)}{\beta} \right]^2 \left[ \frac{\sin(N\alpha)}{\sin(\alpha)} \right]^2 \quad (89)$$

Con:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{b\pi}{\lambda} \sin(\theta) \\ \alpha &= \frac{a\pi}{\lambda} \sin(\theta) \end{aligned} \quad (90)$$

Los máximos principales dados por la interferencia cumplirán:

$$\alpha = m\pi / m \in \mathbb{Z} \quad (91)$$

Entre cada máximo principal hay  $N - 1$  mínimos cuando:

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{N}, \pm \frac{2\pi}{N}, \dots, \pm \frac{(N-1)\pi}{N}, \pm \frac{(N+1)\pi}{N} \quad (92)$$

Entre cada mínimo subsidiario hay un máximo subsidiario, entonces hay  $N - 2$  máximos que se dan aproximadamente cuando:

$$\alpha = \pm \frac{3\pi}{2N}, \pm \frac{5\pi}{2N}, \dots \quad (93)$$

Vale para  $N$  rendijas que para un ángulo  $\theta_m$  en el que hay mínimo:

$$r \sin(\theta_m) = \frac{m\lambda}{2} \quad (94)$$

Donde  $r$  será  $a$  si se quiere un mínimo de interferencia o  $b$  si es para difracción.

Para un máximo principal de interferencia vale que:

$$a \sin(\theta_M) = m\lambda \quad (95)$$

Como el seno tiene que ser menor a 1, existirán una cantidad de  $m$ 's limitados.

## Red de difracción

Una red de difracción es un conjunto repetitivo de elementos difractores.

Para dos rayos que inciden sobre una red de difracción separados por una distancia  $a$ :

$$a[\sin(\theta_m) - \sin(\theta_i)] = m\lambda \quad (96)$$

Donde  $m$  es el orden del máximo.

Para incidencia normal se tiene que:

$$a \sin(\theta_m) = m\lambda \quad (97)$$

El valor del ángulo  $\theta_m$  depende de la longitud de onda.

## Espectroscopia con redes

Las redes de difracción se utilizan para determinar el espectro de luz con el que emite una fuente. Se define la resolución del espectrómetro ( $R$ ), y determina la capacidad del dispositivo de distinguir longitudes de onda que difieren muy poco entre sí:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (98)$$

Donde  $\lambda$  es la longitud de onda media y  $\Delta\lambda$  es el límite de resolución. El criterio para decidir la resolución es que la distancia angular entre el mínimo adyacente a un máximo principal y el otro máximo, debe cumplir:

$$\Delta\alpha = \frac{\pi}{N} \quad (99)$$

Entonces:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN \quad (100)$$

Donde  $N$  es la cantidad de líneas de la red y  $m$  es el orden del máximo que se toma para calcular la resolución.

## Abertura rectangular

Si se tiene una abertura rectangular cuyas dimensiones horizontales y verticales son comparables, el patrón obtenido es distinto al de una rendija. La intensidad del patrón de difracción es:

$$I(Y, Z) = I(0) \left[ \frac{\sin(\beta')}{\beta'} \right]^2 \left[ \frac{\sin(\alpha')}{\alpha'} \right]^2$$

$$\beta' = \frac{kbY}{2R}$$

$$\alpha' = \frac{kaZ}{2R}$$

Donde  $k$  es el número de onda,  $Y$  y  $Z$  son los ejes de un sistema coordenado sobre una pantalla,  $a$  es la longitud de la abertura a lo largo del eje  $Z$  y  $b$  es la longitud en el eje  $Y$ . El valor de  $R$  es:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad (102)$$

Donde  $X$  es la distancia de la abertura a la pantalla. Por otro lado el valor de  $I(0)$  es la intensidad en el máximo central, la cuál está dada por:

$$I(0) = \frac{\epsilon_A^2 A^2}{2R^2} \quad (103)$$

Donde  $\epsilon_A$  es la eficacia de la fuente por unidad de área, y  $A$  es el área de la abertura.

Los mínimos de este patrón se dan cuando:

$$\beta' \text{ ó } \alpha' = m\pi \quad m \neq 0 \Rightarrow I(Y, Z) = 0 \quad (104)$$

Entonces los mínimos se dan cuando:

$$Y = m \frac{\lambda R}{b} \quad \text{ó} \quad Z = m \frac{\lambda R}{a} \quad (105)$$

Sobre el  $\beta', \alpha' = 0$  los máximos subsidiarios se dan cuando:

$$\beta'_m = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \quad (106)$$

Y su intensidad relativa de los máximos subsidiarios será:

$$\frac{I}{I(0)} = \frac{1}{\beta_m'^2} \quad (107)$$

Vale análogamente lo mismo en el eje  $\alpha', \beta' = 0$ .

## Abertura circular

Si se tiene una abertura circular de radio  $a$  el patrón de difracción sobre una pantalla a una distancia  $X$  esta dado por:

$$I(q) = I(0) \left[ \frac{2J_1\left(\frac{kaq}{R}\right)}{\frac{kaq}{R}} \right]^2 \quad (108)$$

Donde  $q$  es la doordenada radial sobre la pantalla,  $J_1$  es la función de Bessel de orden 1,  $k$  es el número de onda de la luz. El valor de  $R$  es:

$$R = \sqrt{X^2 + q^2} \quad (109)$$

$I(0)$  es la intensidad en el máximo central:

$$I(0) = \frac{\epsilon_A^2 A^2}{2R^2} \quad (110)$$

Sea  $\theta$  el ángulo formado entre el eje óptico y una recta que une el centro de la abertura con el punto en la pantalla, se puede ver que:

$$\sin(\theta) = \frac{q}{R} \quad (111)$$

Entonces el patrón de interferencia es:

$$I(\theta) = I(0) \left\{ \frac{2J_1[ka \sin(\theta)]}{ka \sin(\theta)} \right\}^2 \quad (112)$$

El maximo central forma un disco que esta dado por el primer cero de la funcion  $J_1$ . Este disco es llamado **Disco de Airy**. Su radio ( $q_1$ ) es:

$$q_1 = 1,22 \frac{R\lambda}{2a} \quad (113)$$

Si a la rendija se le coloca una lente de distancia focal  $f \simeq R$ , entonces:

$$q_1 = 1,22 \frac{f\lambda}{2a} \quad (114)$$

Para ceros de orden superior se iguala el argumento de la función  $J_1$  a sus ceros de orden superior. Por otro lado los máximos secundarios estarán dados por los ceros de la función  $J_2$  de Bessel.

## Resolución de imágenes: Criterio de Rayleigh

Si se toma el semi-ancho angular del disco de Airy  $\Delta\theta = q_1/f$ , usando la ecuación (114):

$$\Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (115)$$

Una imagen se dice que está resuelta si  $\Delta\theta$  es menor que una separación angular máxima entre dos fuentes  $\Delta\phi$  definida por algún criterio.

Según el **criterio de Rayleigh** dos imágenes están resueltas si el centro del disco de Airy de una de ellas está ubicado en el primer mínimo del patrón de la segunda imagen, es decir:

$$\Delta\phi_{\min} = \Delta\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (116)$$

Si  $\Delta l$  es la separación entre los centros de cada imagen:

$$\Delta l_{\min} = 1,22 \frac{f\lambda}{D} \quad (117)$$

Además se define el **poder de resolución** tal que menor sea el límite de resolución mayor definición tendrá la imagen:

$$\frac{1}{\Delta\phi_{\min}} \text{ ó } \frac{1}{\Delta l_{\min}} \quad (118)$$

## Física Moderna

Hasta el siglo XIX la física conocida se podría resumir la mecánica de Newton, el Electromagnetismo y la Termodinámica y la Teoría Cinética. Estas teorías son base de lo que se denomina Física Clásica. Sin embargo la Física Clásica no podía explicar distintos fenómenos observados experimentalmente:

- **Espectros continuos:** Sólidos y líquidos calientes emiten radiación con espectros continuos ( $I(\lambda)$ ).
- **Espectros de líneas:** Al producirse descargas eléctricas en una gas se emite un espectro discreto, debido a la estructura interna del átomo.
- **Efecto Fotoeléctrico:** las superficies metálicas emiten electrones al ser iluminadas.
- **Emisión de Rayos X:** al producirse descargas eléctricas en gases se observa la emisión de radiación muy penetrante (Rayos X).

## Espectro continuo. Radiación térmica

La radiación térmica es la radiación emitida por un cuerpo debido a su temperatura. Esta radiación se emite en todo el espectro pero dependiendo de la temperatura se emite mas de un tipo de longitud de onda. La curva es la misma para todas las temperaturas.

### Ley de Stefan

La intensidad total radiada:

$$I = \int_0^{\infty} I(\lambda) d\lambda = \sigma T^4 \quad (119)$$

Donde  $T$  es la temperatura en Kelvin, y  $\sigma$  es la constante de Stefan-Boltzmann:

$$\sigma = 5,67037 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad (120)$$

### Ley de desplazamiento de Wien

Existe una relación entre la longitud de onda donde la irradiancia es máxima y la temperatura:

$$\lambda_{\max} T = 2,8978 \cdot 10^{-3} mK \quad (121)$$

### Cuerpo negro

Este tipo de análisis depende de las características superficiales del objeto y de la cantidad de radiación que el medio refleja. Para simplificar esto se define un **Cuerpo Negro**. Un cuerpo negro es un superficie ideal que absorbe toda la radiación electromagnética de todas las longitudes de onda que inciden sobre él y no refleja nada. Además, emite radiación en cualquier longitud de onda. Por lo que se dice que un cuerpo negro es un **absorbente y emisor ideal**.

Se puede fabricar teóricamente uno de estos cuerpos. Si se tiene una caja metálica en equilibrio térmico a temperatura  $T$ , llena de radiación que es emitida y reflejada por las paredes, con un orificio que permite que parte de la radiación escape. Entonces el orificio es un cuerpo negro, ya que toda la radiación que incide sobre este se pierde dentro de la caja y la radiación que emite es de todas las longitudes de onda dentro de la cavidad.

Si la caja tiene una densidad volumétrica de energía por unidad de longitud de onda  $u(\lambda)$ . Para un instante la mitad de la radiación en la caja se moverá alejándose del orificio y la otra acercándose a una velocidad  $c$ . Se puede demostrar haciendo un promedio sobre los ángulos de incidencia sobre el orificio que la energía fluyendo en dirección al orificio es:

$$I(\lambda) = \frac{1}{4} c u(\lambda) \quad (122)$$

Ahora si se realiza un análisis usando las teorías electromagnética y termodinámica clásica, el número de ondas estacionarias con longitud de onda entre  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$  es:

$$N(\lambda) = \frac{8\pi V}{\lambda^4} \quad (123)$$

Con  $V$  el volumen de la caja. Del Principio de equipartición de la energía:  $E_{prom} = k_B T$ . Se obtiene que la densidad de energía de radiación es el número de ondas estacionarias por unidad de volumen por la energía promedio. Con lo que se consigue la **Ley de Rayleigh-Jeans**:

$$I(\lambda) = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT \quad (124)$$

Con lo que cuando la longitud de onda tiende a 0 la irradiancia diverge. Este problema teórico se llamó la catástrofe ultravioleta. Para poder explicarla se desarrolló la Teoría Cuántica.

## Teoría Cuántica

Se propone que un átomo oscilando **solo puede absorber o emitir energía de manera discreta**:

$$E_n = n\varepsilon \quad (125)$$

Donde  $\varepsilon$  es la cantidad básica de energía llamada **cuanto**. La energía de este cuanto está determinada por la frecuencia:

$$\varepsilon = h\nu \quad (126)$$

Donde  $h$  es la **constante de Planck**:

$$h = 6,6206696 \cdot 10^{-34} J_s \quad (127)$$

Si se considera que la energía es discreta, el número de osciladores con energía  $E_n$ :

$$N_n = N \left( 1 - \exp \left( - \frac{\varepsilon}{kT} \right) \right) \exp \left( - \frac{n\varepsilon}{kT} \right) \quad (128)$$

Se puede demostrar que la energía promedio es:

$$E_{prom} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (129)$$

Esta energía cumple que:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_{prom} &= kT \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} E_{prom} &= 0 \end{aligned} \quad (130)$$

### Ley de Radiación de Planck

$$I(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (131)$$

A partir de esta ley se pueden deducir las leyes de Wien y de Stefan con:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \quad (132)$$

Además cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  se obtiene la Ley de Rayleigh-Jeans.

### Poder emisivo

Los cuerpos reales no son cuerpos negros perfectos, por lo que la Ley de Stefan se puede modificar:

$$I = \varepsilon \sigma T^4 \quad (133)$$

Donde  $\varepsilon$  es el **poder emisivo**:

$$\varepsilon = \frac{\text{Radiación emitida}}{\text{Radiación emitida como si fuese un cuerpo negro}}$$



# Efecto Fotoeléctrico

Este fenómeno se da cuando una superficie metálica es iluminada y emite electrones denominados **fotoelectrones**. Los resultados experimentales son:

- Para una dada frecuencia de luz, la energía cinética máxima es independiente de la intensidad de la luz.
- El efecto fotoeléctrico solo ocurre para la luz cuya frecuencia sea mayor que una dada **frecuencia umbral**  $\nu_c$ , la cual depende del material.
- Los fotoelectrones se emiten casi instantáneamente, con tiempos menores a  $10^{-9}$  s desde que la luz incide.

La teoría clásica realiza otras predicciones que no se corresponden a las observadas:

- La energía cinética máxima debería ser proporcional a la intensidad de la luz.
- El efecto debería ocurrir para luz de cualquier frecuencia.
- El primer fotoelectrón debería ser emitido unos segundos después de que la superficie es iluminada.

Einstein usando la idea de Planck, propuso que la energía de radiación electromagnética está concentrada en paquetes o cuantos denominados **fonones**, con energía:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (134)$$

El fotón viaja a la velocidad de la luz  $c$ , su dirección de movimiento es la dirección de la propagación de la onda electromagnética, y tiene masa en reposo igual a cero, pero momento lineal:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (135)$$

Einstein propone que el fotoelectrón es emitido como resultado de la interacción con un solo fotón cuya energía se entrega instantáneamente.

La **función trabajo**  $\phi$  es la cantidad mínima de energía que el electrón debe ganar para escapar del material. Si  $h\nu > \phi$  entonces:

$$K_{max} = h\nu - \phi = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = eV_0 \quad (136)$$

Donde  $V_0$  es el **potencial de frenado**.

Se tiene que:

$$h\nu_c = \phi \Rightarrow K_{max} = 0 \quad (137)$$

Entonces:

$$\nu_c = \frac{\phi}{h} \quad (138)$$

$$\lambda_c = \frac{hc}{\phi} \quad (139)$$

## Espectro atómico de línea y niveles de energía

Al realizar descargas eléctricas a un gas este emite luz en ciertas longitudes de onda, esto se conoce como espectro de emisión. Un fenómeno similar sucede si se atraviesa un gas con luz blanca, el gas absorberá todos el espectro excepto ciertas longitudes de onda, esto es denominado espectro de absorción. Además **en el patrón de emisión hay mas líneas que en un patrón de absorción.**

Balmer encontró que las longitudes de onda del espectro de líneas de **absorción** del **hidrógeno** en el **espectro visible** se pueden agrupar como:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)} \text{ con } n = 3, 4, 5 \dots \quad (140)$$

Donde R es la **Constante de Rydberg**:

$$R = 1,097 \cdot 10^7 m^{-1} \quad (141)$$

Con  $n = 3$   $\lambda$  es la longitud de onda mas larga del espectro visible. Y cuando  $n \rightarrow \infty$  la longitud de onda es la mínima.

Posteriormente se encontró que para una longitud de onda mínima  $\lambda_{\text{limite}}$ :

$$\boxed{\lambda = \lambda_{\text{limite}} \frac{n^2}{n^2 - n_0^2}} \quad n = n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots \quad (142)$$

Con lo que se obtuvieron otras series para distintos rangos del espectro electromagnético:

**Serie de Lyman:**  $n_0 = 1$ , para el ultravioleta:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ con } n = 2, 3, 4, \dots \quad (143)$$

**Serie de Paschen:**  $n_0 = 3$  para el infrarrojo:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ con } n = 4, 5, 6, \dots \quad (144)$$

**Serie de Brackett:**  $n_0 = 4$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ con } n = 5, 6, 7, \dots \quad (145)$$

**Serie de Pfund**  $n_0 = 5$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ con } n = 6, 7, 8, \dots \quad (146)$$

## Átomo nuclear

Se sabía que los átomos:

- Eran más chicos que la longitud de onda del visible del orden de  $10^{-10}m$ .
- Eran estables.
- Casi toda la masa del átomo estaba asociada a la carga positiva.
- Salvo el átomo de hidrógeno, todos los átomos tienen mas de un electrón.
- Son eléctricamente neutros.

## Modelo atómico de Thomson

El modelo consistía de una esfera uniforme de carga positiva con un diámetro de  $10^{-10}m$  donde se encontraban embebidos los  $Z$  electrones.

Se realizaron experimentos de dispersión para determinar la distribución de carga eléctrica. Los que consistían en bombardear al átomo con partículas cargadas y medir el ángulo de deflexión con respecto a la dirección original. Se considera que el electrón hace una fuerza despreciable sobre la partícula, y la fuerza repulsiva debido a la carga positiva del núcleo no afecta al átomo.

## Modelo atómico de Rutherford

Rutherford observó que algunas partículas alfa eran deflectadas casi  $180^\circ$ , lo que no concordaba con el modelo. Por lo que la carga positiva debía estar concentrada en un espacio pequeño en el centro del átomo. El núcleo era una estructura pequeña y densa con un radio aproximado de  $10^{-15}m$  que contiene toda la carga positiva y el 99,95% de la masa del átomo.

### Modelo de Bohr

Propone que los electrones giran en orbitas alrededor del núcleo. Pero esto implica, según la teoría clásica electromagnética, como la carga esta acelerada debería emitir radiación lo que causa que el electro colapse hacia el núcleo, además de que la radiación seria continua.

Bohr propone que los electrones solo se pueden mover en ciertas orbitas circulares alrededor del núcleo sin emitir radiación, llamados **estados estacionarios**. Cada orbita tiene definida una energía, y el átomo solo emite radiación cuando hay una transición de una orbita a otra en forma de un fotón:

$$\boxed{\Delta E = h\nu} \quad (147)$$

Además, el momento angular del electrón esta cuantizado:

$$\boxed{L_n = mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar} \quad (148)$$

Con:

$$\boxed{\hbar = \frac{h}{2\pi}} \quad (149)$$

Y donde  $n$  es el **número cuántico principal**.

A partir de esto para el átomo de hidrógeno se tiene que la fuerza eléctrica en una de las órbitas:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} = m \frac{v_n^2}{r_n} \quad (150)$$

Donde  $m$  es la masa del electrón,  $v_n$  es la velocidad del electrón y  $r_n$  es el radio orbital.

Además del momento angular se puede obtener que:

$$v_n = \frac{n\hbar}{2\pi m r_n} \quad (151)$$

Despejando se obtiene:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0}{m\pi} \left( \frac{nh}{e} \right)^2 \quad (152)$$

$$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 nh} \quad (153)$$

La orbita mas pequeña corresponde a  $n = 1$ , y su radio es conocido como **radio de Bohr**:

$$a_0 = \varepsilon_0 \frac{h^2}{m\pi e^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} m \quad (154)$$

El cual es consistente con las dimensiones atómicas. Además los demás radios son:

$$r_n = a_0 n^2 \quad (155)$$

Los **niveles de energía** para el hidrógeno en ese modelo están dados por:

$$K_n = \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{m e^4}{8 n^2 h^2} \quad (156)$$

$$U_n = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{m e^4}{4 n^2 h^2} \quad (157)$$

Entonces:

$$E_n = U_n + K_n = -\frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{m e^4}{8 n^2 h^2} \quad (158)$$

Así la transición de un estado  $n$  al estado  $n = 2$  corresponde a la serie de Balmer donde la diferencia de de energía entre los estados se emite como un fotón de longitud de onda  $\lambda$ :

$$E_n - E_2 = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{m e^4}{8 h^2} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{hc}{\lambda} \quad (159)$$

Del modelo se obtiene que la constante de Rydberg es:

$$R = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \frac{m e^4}{8 h^3 c} \quad (160)$$

Lo que es una confirmación directa de la teoría de Bohr.

Además el modelo de Bohr puede explicar porque el espectro de emisión tiene mas líneas que el espectro de absorción. Cuando un átomo absorbe luz este se excita y sube el nivel de energía de un electrón a partir del estado fundamental, mientras para emitir fotones se produce una caída en el nivel de energía que puede darse desde cualquier nivel de energía a cualquier otro menor. Las series vistas solo describen el espectro de absorción por este motivo, solo dan las líneas que se producen por un cambio de nivel de energía que involucra al estado fundamental.

### Niveles de energía del Hidrógeno

$$E_n = -\frac{13,6 eV}{n^2} \quad (161)$$

El **estado fundamental** con  $n = 1$  es  $E_1 = -13,6 eV$ .

Los **estados excitados** son los correspondientes a  $n > 1$ .

La **energía de ionización** (necesaria para extraer el electrón) se define como la energía necesaria para pasar de el estado fundamental con  $n = 1$  a  $n = \infty$ . Por lo que la energía de ionización es  $E = 13,6eV$ .

El modelo de Bohr es capaz de explicar los valores experimentales dentro del 0,1%. Estos se pueden mejorar si se considera que el núcleo no esta en reposo, y realizando los cálculos con la masa reducida  $m_r$ .

### Átomos hidrogenoides

El modelo de Bohr puede usarse para cualquier átomo con un solo electrón. Por lo que se puede utilizar para átomos hidrogenoides con  $Z > 1$  y un solo electrón. En estos casos:

$$r_n = \frac{\epsilon_0}{\pi m Z} \left( \frac{nh}{e} \right)^2 = a_0 \frac{n^2}{Z} \quad (162)$$

$$E_n = -\frac{1}{\epsilon_0^2} \frac{m Z^2 e^4}{8 n^2 h^2} = -13,6eV \frac{Z^2}{n^2} \quad (163)$$

En estos átomos las orbitas son más pequeñas y tiene mayor energía (negativa), por lo que los electrones están unidos más fuertemente al núcleo.

### Experimento de Frank-Hertz

Se estudio el movimiento de electrones a través de vapores de mercurio bajo la acción de un campo eléctrico. Se observó que al ir variando el voltaje la tensión subía y llegado a un voltaje específico descendía. Esto debido a que llegado a un voltaje que es múltiplo de 4,9V los átomos pueden absorber energía de los electrones lo que baja la corriente. Este experimento fue una confirmación de que la energía que puede absorber un átomo esta cuantizada.

El modelo de Bohr combinó elementos de la física clásica con nuevos postulados inconsistentes con esta. El modelo:

- No es capaz de explicar que sucede durante cada transición entre orbitas.
- No puede modelar átomos de mas de un electrón.
- Un electrón girando forma un momento magnético pero el átomo de hidrógeno no tiene momento magnético en su estado fundamental.
- Viola el Principio de Incertidumbre de Heisenberg.
- No puede explicar dobletes de las líneas espectrales.

### Producción y dispersión de Rayos X

Rutge realizó experimentos similares a los de Frank-Hertz pero utilizando voltajes cercanos a los  $10^5 V$  y observó que se emitía una radiación muy penetrante, los Rayos X.

La emisión de rayos X se produce por dos efectos, la radiación de frenado la cual resulta en un espectro continuo y la transición electrónica que es característica del elemento y da un espectro discreto.

## Radiación de frenado

Esta se produce a la deflexión de electrones debido a la interacción con los átomos. Al acelerarse el electrón emite un fotón con longitud de onda:

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{K} = \frac{hc}{e\Delta V} \quad (164)$$

Donde  $K$  es la energía cinética del electrón.

## Transición electrónica, radiación característica

Esta se produce cuando el electrón "libre" interactúa con un electrón del átomo lo que genera la emisión de un fotón y la deflexión del electrón. El fotón emitido es debido a que un electrón de una capa superior ocupa el hueco del electrón expulsado.

### Efecto Compton

El efecto se produce cuando un fotón incide sobre un electrón, lo que produce la dispersión del fotón y del electrón. Para el análisis se considera la colisión de un solo fotón con un solo electrón el cual se supone en reposo.

Si incide un fotón con longitud de onda  $\lambda$ , y este se dispersa con un ángulo  $\theta$  respecto a su dirección original, y con longitud de onda  $\lambda'$  se tiene que la energía del fotón luego de la colisión es:

$$\boxed{\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} [1 - \cos(\theta)]} \quad \text{con } E' \leq E \quad (165)$$

Y las longitudes de onda se relacionan:

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} [1 - \cos(\theta)]} \quad \text{con } \lambda' \geq \lambda \quad (166)$$

Para el electrón se define una longitud de onda de Compton:

$$\boxed{\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2,426 pm} \quad (167)$$

La energía cinética del electrón luego de la colisión:

$$K_e = E - E' \quad (168)$$

Y el ángulo de salida es:

$$\boxed{\tan(\phi) = \frac{p' \sin(\theta)}{p - p' \cos(\theta)} = \frac{E' \sin(\theta)}{E - E' \cos(\theta)}} \quad (169)$$

Nota: Dependiendo la velocidad que tenga el electrón luego del choque dependerá si es necesario tratar la energía cinética con mecánica clásica o relativista.

## Dualidad onda-partícula

La luz presenta comportamientos tanto de onda (interferencia y difracción), como comportamiento de partícula (efecto fotoeléctrico, producción de Rayos X, espectros de línea). Por lo que la luz no es ni una onda ni una partícula sino es ambas, y muestra una naturaleza o la otra dependiendo el experimento. Ambas descripciones son necesarias para completar el modelo de

la naturaleza y son complementarias, aunque nunca se necesita de ambas descripciones al mismo tiempo para poder explicar un fenómeno.

### Principio de complementariedad o correspondencia

Bohr propuso este principio que dicta que la teoría cuántica debe acordar con la teoría clásica en el límite en el cuál la teoría clásica esta de acuerdo con los experimentos, es decir cuando los números cuánticos son grandes.

Esto sucede en todo lo que hasta aquí se ha desarrollado.

### Ondas de De Broglie

De Broglie postuló que cualquier partícula libre con momento lineal  $p$  tiene asociada una longitud de onda  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (170)$$

Para partículas no relativistas:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (171)$$

Esta suposición implica que una partícula no es un punto geométrico sino una entidad repartida por el espacio cuya distribución espacial es una función de onda como las usadas para ondas electromagnéticas.

A partir del postulado de De Broglie se puede pensar que en el modelo de Bohr el electrón es una onda estacionaria ajustada a un círculo de radio igual al radio de Bohr:

$$\begin{aligned} 2\pi r &= n\lambda = n \frac{h}{mv} \\ \Rightarrow mvr &= n\hbar \end{aligned} \quad (172)$$

Este comportamiento ondulatorio de partículas ha sido comprobado en muchas partículas, con las que se puede realizar interferencia y difracción. Estos fenómenos se comportan igual que la luz solo que se utiliza la longitud de onda de De Broglie.

### Probabilidad e incertidumbre

Mientras que en la mecánica clásica es posible describir la posición y el estado de movimiento de una partícula en cualquier instante, en mecánica cuántica hay limitaciones en la precisión con la que se puede determinar la posición y velocidad de una partícula, por lo que se trabaja con probabilidades.

En mecánica cuántica no es posible hacer una determinación simultánea de la posición y el momento de una partícula con precisión ilimitada. Esto se conoce como el Principio de Incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (173)$$

Donde  $x$  es cualquier coordenada cartesiana.

El principio se puede escribir también como:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \quad (174)$$

El modelo de Bohr viola el principio de incertidumbre pues el electrón describe una órbita exacta a una velocidad exacta.

La segunda relación del principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \hbar} \quad (175)$$

Este principio implica que existe un límite impuesto por la naturaleza (no por nuestra capacidad de medición) en la precisión con la cual podemos realizar experimentos.

Se puede demostrar que si  $|\Delta\lambda/\lambda| \ll 1$  entonces:

$$\left| \frac{\Delta E}{E} \right| = \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| \quad (176)$$