

# Hoja de ecuaciones Física General IV

## Ondas

- Onda unidimensional cumple:  $\psi(x, t) = f(x, t) = f(x \mp vt)$  (- en caso de que se propague en sentido positivo).

## Ondas armónicas

- Son de la forma:

$$\psi(x, t) = A \sin[k(x \mp vt)]$$

$$\psi(x, t) = A \cos[k(x \mp vt)]$$

- $k \equiv$  número de onda,  $[k] = m^{-1}$  (cantidad de ondas por unidad de longitud).
- $v \equiv$  velocidad de propagación,  $[v] = m/s$ .
- $A \equiv$  amplitud (sus unidades dependen de la onda).
- $\lambda \equiv$  longitud de onda/ periodo espacial (distancia que recorre una perturbación en un ciclo).
- $\tau \equiv$  periodo temporal,  $[\tau] = s$  (tiempo en el que la onda recorre una longitud de onda).
- $\nu \equiv$  frecuencia temporal,  $[\nu] = s^{-1} = Hz$  (cantidad de perturbaciones que pasan por unidad de tiempo).
- $\omega \equiv$  frecuencia angular,  $[\omega] = \frac{rad}{s}$ .
- Estas definiciones valen para todas las ondas periódicas.
- Igualdades:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$v = \frac{\lambda}{\tau}$$

$$v = \lambda \cdot \nu$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

(1)

- Usando las igualdades se puede escribir la función de una onda armónica como  $\psi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t)$

## Fase y velocidad de fase

- Se define  $\phi \equiv$  fase como el argumento dentro del seno (o coseno):  $\phi = kx \mp \omega t + \varepsilon$ . Tal que  $\varepsilon \equiv$  fase inicial.
- $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_x = \mp \omega$
- $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_t = k$
- $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\phi = \mp v$

## Ecuación de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} \quad (2)$$

## Superposición de ondas

- Superposición de ondas de igual frecuencia y velocidad, con  $\alpha_i = k_i x + \varepsilon_i$ :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01} \cdot e^{i(\alpha_1 - \omega t)} \\ E_2 &= E_{02} \cdot e^{i(\alpha_2 - \omega t)} \\ E(x, t) &= E_0 \cdot e^{i(\alpha - \omega t)} = E_1 + E_2 \\ \Rightarrow \boxed{E_0^2 &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ \boxed{\tan(\alpha) &= \frac{E_{01} \sin(\alpha_1) + E_{02} \sin(\alpha_2)}{E_{01} \cos(\alpha_1) + E_{02} \cos(\alpha_2)}} \end{aligned} \quad (3)$$

- Si  $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi m$  están en fase y la interferencia es constructiva.
- Si  $\alpha_1 - \alpha_2 = (2k + 1)\pi$  es una interferencia destructiva.
- Si  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = cte$  las ondas son coherentes.

## Ondas estacionarias

- Un punto de agarre, CC:  $E_0[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varepsilon_d)]_{x=0} = 0 \forall t \Rightarrow \varepsilon_d = 2\pi m$ .
- Nodo espacial  $x_m = m \frac{\lambda}{2}$ .
- Nodo temporal  $t_m = (2m + 1) \frac{\tau}{4}$ .
- Onda en una cavidad, CC:  $E_0[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varepsilon_d)]_{x=L=0} = 0 \forall t \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$ .

## Ondas tridimensionales

- $\psi(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t)$ , donde  $\vec{k} \equiv$  vector de propagación de la onda.
- $|\vec{k}| \equiv$  número de onda,  $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ .
- Velocidad de fase o velocidad de propagación del frente de onda  $\frac{dr_k}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v$ .
- Ecuación de onda tridimensional:

$$\boxed{\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \quad (4)$$

- Onda esférica  $\psi(r, t) = \left(\frac{A}{r}\right) \cdot e^{ik(r \mp vt)}$ .
- El plano de vibración de una onda esta formado por la dirección de propagación y la dirección de la vibración.

## Ondas electromagnéticas

- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ , en el vacío  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 m/s$ .
- Constantes:  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$ ,  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$ .
- Polarización lineal: si la onda no cambia de dirección de vibración.

Para una onda electromagnética con cualquier polarización vale que:

- $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están en fase en todos los puntos del espacio.
- $\vec{E} \perp \vec{B}$ .
- $\vec{E} \times \vec{B}$  apunta en la dirección de propagación de la onda  $\vec{k}$ .
- $E_0 = v \cdot B_0$
- Si  $\vec{E}(x_i)$  ( $\vec{B}(x_i)$ )  $\Rightarrow E_{x_i} = 0$  ( $B_{x_i} = 0$ ).

## Energía y vector de Poynting

- Densidad de energía de los campos:  $U_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ .
- Densidad de energía de la onda:  $U = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$
- **Vector Poynting:**  $\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \cdot \vec{E} \times \vec{B}$  (cantidad de energía por unidad de tiempo y área),  
  $[\vec{S}] = \frac{W}{m^2 s}$ .
- **Irradiancia:**  $I = \langle S \rangle_T = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} \cdot \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle_T = \epsilon_0 c \cdot \langle E^2 \rangle$  (vale solo para ondas polarizadas linealmente).  $[I] = \frac{W}{m^2}$ .
- Para cualquier medio:  $I = v \epsilon \langle E^2 \rangle_T$

## Presión de radiación

- Superficie perfectamente absorbente:  $\langle P(t) \rangle_T = \frac{I}{c}$ .
- Superficie perfectamente reflectante:  $\langle P(t) \rangle_T = \frac{2I}{c}$

## Luz en la materia

- $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ .
- Índice de refracción absoluto:  $n = \frac{c}{v} \geq 1$ .
- Relación de Maxwell: (para  $\mu = \mu_0$ )  $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{K_E}$ .

## Propagación de la luz

- **Ley de reflexión:** el rayo incidente, la normal a la superficie y el rayo reflejado se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia. Además, se cumple  $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$ .
- **Ley de refracción:** el rayo incidente, la normal a la superficie y el rayo refractado se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia. Además, se cumple la **Ley de Snell**  
 $n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$ .
- Principio de reversibilidad: en un sistema da igual la dirección del rayo se mantienen los mismo ángulos.
- Al pasar de medio, la luz mantiene su frecuencia ( $\nu = cte$ ). Entonces se cumple  $\lambda_1 = \frac{n_2}{n_1} \lambda_2$ .
- **Principio de Fermat:** los rayos de luz siguen la trayectoria que minimiza el tiempo o, equivalentemente, la trayectoria que minimiza la longitud del camino óptico.
- $LCO \equiv$  **Longitud de camino óptico**, se define como:

$$LCO = \sum_{j=1}^N n_j s_j$$
$$LCO = \int_S^P n(s) ds$$

Donde  $n_j$  es el índice de refracción de las distintas fases y  $s_j$  es la longitud que recorre en cada medio. La longitud de camino óptico se corresponde a la distancia que recorrería la luz en el vacío en el tiempo en que paso a través de los distintos medios, es decir,  $LCO = ct$ . También se puede ver como la longitud tal que en el vacío hay la misma cantidad de longitud de ondas que en el sistema.

- La ley de reflexión y de Snell pueden ser deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell.

## Ecuaciones de Fresnel

Las ecuaciones estarán dadas teniendo en cuenta la dirección del campo eléctrico en el punto de incidencia con respecto al plano de incidencia, y se supone que los medios son de permeabilidad magnética  $\mu_0$ . Además, los signos de las ecuaciones se relacionan con la dirección en la que se eligieron los campos (ver la deducción en el Hecht).

Si  $\vec{E}$  es perpendicular al plano de incidencia:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &\equiv \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\perp} &\equiv \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \end{aligned} \quad (5)$$

Donde  $r$  es el **coeficiente de reflexión para la amplitud** y  $t$  es el **coeficiente de transmisión para la amplitud**.

Si  $\vec{E}$  es paralelo al plano de incidencia:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &\equiv \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos(\theta_i) - n_i \cos(\theta_t)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\parallel} &\equiv \left( \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \end{aligned} \quad (6)$$

Si  $n_t > n_i \Rightarrow \theta_i > \theta_t$ . Cuando la incidencia es normal  $\theta_i \sim 0 \Rightarrow \theta_t \sim 0$ , así se cumple:

$$[r_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [-r_{\perp}]_{\theta_i=0} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$$

Se cumple que:

- $r_{\perp} < 0 \forall \theta_i \Rightarrow E_{0r}$  y  $E_{0i}$  están desfasadas en  $180^\circ$ .
- $r_{\perp} > 0$  para  $\theta_i < \theta_p$ .
- $r_{\perp} < 0$  para  $\theta_i > \theta_p$ .

Entonces en  $\theta_i + \theta_t = 90^\circ \Rightarrow r_{\parallel}(\theta_p) = 0$ . Donde  $\theta_p$  es el **ángulo de polarización o de Brewster**. Se puede demostrar:

- $t_{\perp} - r_{\perp} = 1 \forall \theta_i$ .
- $t_{\parallel} + r_{\parallel} = 1$  para  $\theta_i = 0$ .

Si  $n_t < n_i \Rightarrow \theta_i < \theta_t$ . Entonces, se cumple:

- $r_{\perp} > 0 \forall \theta_i \Rightarrow E_{0r}$  y  $E_{0i}$  están en fase.
- $r_{\perp}(\theta_c) = 1$  ( $\theta_t = 90^\circ$ ).

- $r_{\parallel} < 0$  para  $\theta_i < \theta'_p$ .
- $r_{\parallel} > 0$  para  $\theta_i > \theta'_p$ .
- $r_{\parallel}(\theta_c) = 1$ .
- $\theta_p + \theta'_p = 90^\circ$ .

## Transmitancia y reflectancia

- Reflectancia  $R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = r^2$
- Transmitancia  $T \equiv \frac{I_t \cos(\theta_t)}{I_i \cos(\theta_i)} = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} \left( \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)^2 = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t^2$

Por conservación de energía:

$$T + R = 1$$

Se tiene además:

- $R_{\perp} = r_{\perp}^2$
- $R_{\parallel} = r_{\parallel}^2$
- $T_{\perp} = \frac{n_t t_{\perp} \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t_{\perp}$
- $T_{\parallel} = \frac{n_t t_{\parallel} \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t_{\parallel}$

Si  $\theta_i = 0$ :

$$R = R_{\perp} = R_{\parallel} = \left( \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \right)^2$$

$$T = T_{\perp} = T_{\parallel} = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$

## Óptica geométrica

- **Objeto:** cualquier cuerpo desde donde se irradia luz.
- **Imagen:** figura formada por los rayos emitidos por un objeto luego de interactuar con el sistema óptico. Puede ser **real**, si es formada por rayos que emite el objeto que se intersectan; o **virtual** si se forma desde donde parecen venir los rayos.

## Espejos

### Espejos planos

- Imagen virtual:  $s_i < 0 \Rightarrow s_i = -s_0$
- Magnificación transversal  $M_T = \frac{y'}{y} = 1$

### Espejos esféricos cóncavos o convergentes

- Objeto e imagen reales  $s_i, s_0 > 0$
- $R > 0$

Se utilizara la aproximación paraxial tal que el ángulo de incidencia sea muy pequeño. Así se puede deducir la ecuación para espejos, que vale para espejos convexos y cóncavos:

$$\boxed{\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{2}{R}} \quad (7)$$

Tal que  $R > 0$  en cóncavos y  $R < 0$  en convexos.

Se define la **distancia focal objeto**:

$$f_0 = \lim_{s_i \rightarrow \infty} s_0 = \frac{R}{2}$$

Y **distancia focal imagen**:

$$f_i = \lim_{s_0 \rightarrow \infty} s_i = \frac{R}{2}$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}} \quad (8)$$

Con  $f > 0$  para espejos cóncavos y  $f < 0$  para espejos convexos. Además  $M_T = -\frac{s_i}{s_0}$ , si  $M_T > 0$  la imagen es derecha y si  $M_T < 0$  la imagen estará invertida.

Para espejos **cóncavos** se tiene que:

- Si  $s_0 > 2f$  entonces  $s_i > 0$ ,  $f < s_i < 2f$  y  $-1 < M_T < 0 \Rightarrow$  la imagen será **real**, **invertida** y **disminuida** de tamaño.
- Si  $s_0 = 2f$  entonces  $s_i = s_0$  y  $M_T \Rightarrow$  imagen **real**, **invertida** y del **mismo tamaño**.
- Si  $f < s_0 < 2f$  entonces  $s_i > 0$ ,  $2f < s_i < \infty$  y  $M_T < -1 \Rightarrow$  imagen **real**, **invertida** y **aumentada**.
- Si  $s_0 = f$  entonces no se forma imagen ya que  $s_i = \pm\infty$ .
- Si  $s_0 < f$  entonces  $s_i < 0$ ,  $|s_i| > s_0$  y  $M_T > 1 \Rightarrow$  imagen **virtual**, **derecha** y **aumentada**.

Para espejos **convexos** la imagen es siempre **virtual** ( $s_i < 0$ ), **derecha** y **disminuida**.

## Imágenes por refracción

Para un rayo que incide en una esfera de radio  $R$  que cambia de un medio  $n_1$  a  $n_2$  se cumple que:

$$\boxed{\frac{n_1}{s_0} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}} \quad (9)$$

$$\boxed{M_T = -\frac{n_1 s_i}{n_2 s_0}} \quad (10)$$

Se usa la siguiente **convención de signo para superficies esféricas refractoras**:

- $s_0 > 0$  objeto real.
- $s_0 < 0$  objeto virtual.
- $s_i > 0$  imagen real.
- $s_i < 0$  imagen virtual.
- $y, y' > 0$ , por encima del eje óptico.

Para **luz proveniente desde la izquierda**:

- $R > 0$  si el centro de curvatura ( $C$ ) está a la derecha del vértice.
- $R < 0$  si el centro de curvatura ( $C$ ) está a la izquierda del vértice.

Se define distancia focal objeto y distancia focal imagen como:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{n_1}{n_2 - n_1} R \\ f_i &= \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \end{aligned} \quad (11)$$

## Superficies refractoras planas

- $R \rightarrow \infty \Rightarrow s_i = -\frac{n_2}{n_1} s_0$
- $s_i < 0 \forall s_0$ , por lo que la imagen será virtual.
- $M_T = 1$

## Lentes

Un lente es un dispositivo refractor (un discontinuidad en el medio dominante) que reconfigura la distribución de energía emitida.

### Tipos de lentes

Lente **simple**: dos superficies refractoras, una de ellas curva. La categoría opuesta es lente compuesta.

Lente **delgada**: el espesor de la lente es despreciable con respecto a las demás dimensiones. La categoría opuesta es lente gruesa, en este caso se trata como dos superficies refractoras.

**Sistemas centrados de superficies esféricas**: las superficies son rotacionalmente simétricas alrededor de un eje.

Lentes **convexas**, convergentes o **positivas**.

Lentes **cóncavas**, divergente o **negativa**.

### Ecuación de lentes delgadas

Esta ecuación se deduce a partir de tratar una lente convexa (con cóncava también sale) como dos superficies refractoras de radios  $R_1$  y  $R_2$ , con un espesor  $d$  y coeficientes del medio  $n_m$  y del lente  $n_l$ . Se resuelve primero una superficie, y se toma la imagen formada como objeto de la segunda superficie y se resuelve, teniendo en cuenta la separación entre los vértices de ambas curvas.

Para la primer superficie usando (9) se obtiene:

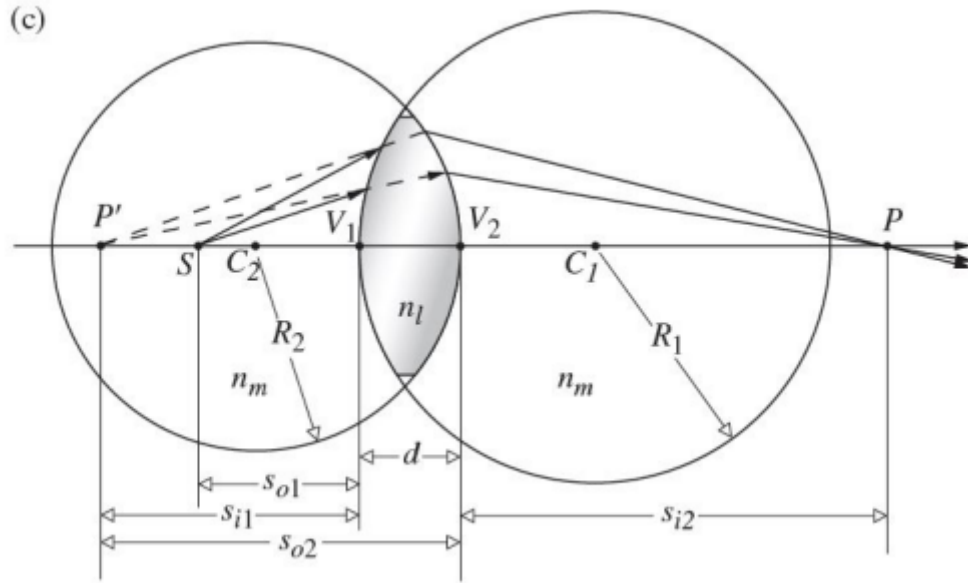
$$\frac{n_m}{s_{01}} + \frac{n_l}{s_{i1}} = \frac{n_l - n_m}{R_1} \quad (12)$$

Para la segunda superficie describiendo las distancias desde  $V_2$ , tal que  $s_{02} = d - s_{i1}$ :

$$\frac{n_l}{d - s_{i1}} + \frac{n_m}{s_{i2}} = \frac{n_m - n_l}{R_2} \quad (13)$$

Si se suma (12) y (13) y  $d \rightarrow 0$  (pues es un lente delgado) se llega a la **ecuación de lentes delgadas** o formula del constructor de lentes:

$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \left( \frac{n_l}{n_m} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (14)$$



## Puntos y planos focales

Se llega a que el foco imagen y objeto son iguales  $f = f_i = f_0$  con:

$$\frac{1}{f} = (n_{lm} - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (15)$$

Con  $n_{lm} = \frac{n_l}{n_m}$ . A partir de (14) se puede escribir la **fórmula gaussiana para lentes delgadas**:

$$\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad (16)$$

Se define potencia  $P$  con unidades de Dioptrías  $[P] = D$  y  $P = \frac{1}{f}$

## Lentes convergentes

Este tipo de lente cumple que  $f > 0$ :

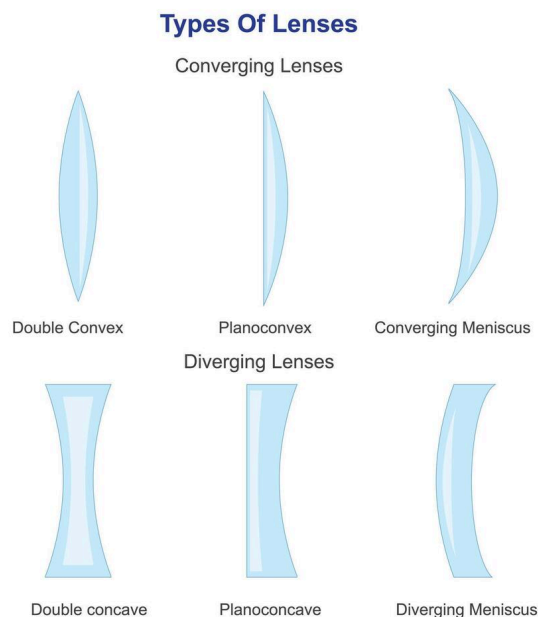
- Lente biconvexa:  $R_1 > 0$  y  $R_2 < 0$ .
- Lente plano-convexa:  $R_1 = \infty$  y  $R_2 < 0$ .
- Lente menisco-convexa:  $R_1 > 0$  y  $R_2 > 0$  con  $R_1 < R_2$ .



## Lentes divergentes

Este tipos de lentes cumple que  $f < 0$ :

- Lente bicóncava:  $R_1 < 0$  y  $R_2 > 0$ .
- Lente plano-cóncava:  $R_1 = \infty$  y  $R_2 > 0$ .
- Lente menisco-cóncava:  $R_1 > 0$  y  $R_2 > 0$  con  $R_1 > R_2$ .



Hay que notar que debido a la fórmula (15) una lente que en un medio es convergente ( $f > 0$ ) si se cambia de medio esta puede llegar a comportarse como una lente divergente.

## Convención de signos

Signos para Lentes y Superficies Esféricas		
Parámetro	Signo	
	+	-
$s_o$	Objeto Real	Objeto Virtual
$s_i$	Imagen Real	Imagen Virtual
$f$	Lente Convergente	Lente Divergente
$y_o$	Objeto Derecho	Objeto Invertido
$y_i$	Imagen Derecha	Imagen Invertida
$M_T$	Imagen Derecha	Imagen Invertida

## Formación de imágenes con trazado de rayos

Para una lente **convergente**:

- Un rayo paralelo al eje óptico pasa por el foco imagen.
- Un rayo que pasa por el foco objeto pasa paralelo al eje óptico.
- Un rayo que pasa por el vértice no cambia de dirección.

Para una lente **divergente**:

- Un rayo paralelo al eje óptico parece venir del foco imagen.
- Un rayo que va a pasar por el foco objeto pasa paralelo al eje óptico.
- Un rayo que pasa por el vértice no cambia de dirección.

## Imágenes formadas por lentes delgadas de objetos reales

Imágenes formados por lentes delgadas de objetos reales				
Lentes Convexas				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaños Relativo
$\infty < s_o < 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo Tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i  > s_o$	Derecha	Aumentada
Lentes Cóncavas				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaños Relativo
Cualquiera	Virtual	$ s_i  <  f $ $s_o >  s_i $	Derecha	Disminuida

## Magnificación transversal

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{s_i}{s_o} \quad (17)$$

Usando trigonometría se puede deducir la **fórmula de Newton**, definiendo  $x_o = s_o - f$  y  $x_i = s_i - f$  se cumple que:

$$x_o x_i = f^2 \quad (18)$$

## Magnificación longitudinal

Se define:

$$M_L \equiv \frac{dx_i}{dx_o} \quad (19)$$

Usando (18) y que  $M_T = \frac{f}{s_i - f}$ :

$$M_L = -\frac{x_i}{x_o} = -\frac{f^2}{x_o^2} = -\frac{x_i^2}{f^2} = -M_T^2 \quad (20)$$

$$M_T = -\frac{f}{x_o} = -\frac{x_i}{f}$$

## Objetos virtuales

Para trazar los rayos en un sistema con un objeto virtual los rayos no salen del objeto si no que apuntan a él en un principio y luego cambian de dirección.

## Aberraciones

- Aberraciones cromáticas: están dadas debido a que el coeficiente  $n$  depende la longitud de onda.
- Aberraciones monocromáticas: hay de dos tipos, primero aquellas que deterioran la imagen haciendo que esta pierda definición (aberración esférica, coma, astigmatismo); y aberraciones que deforman la imagen (campo de curvatura de Petzval y distorsión).

## Combinación de lentes delgadas

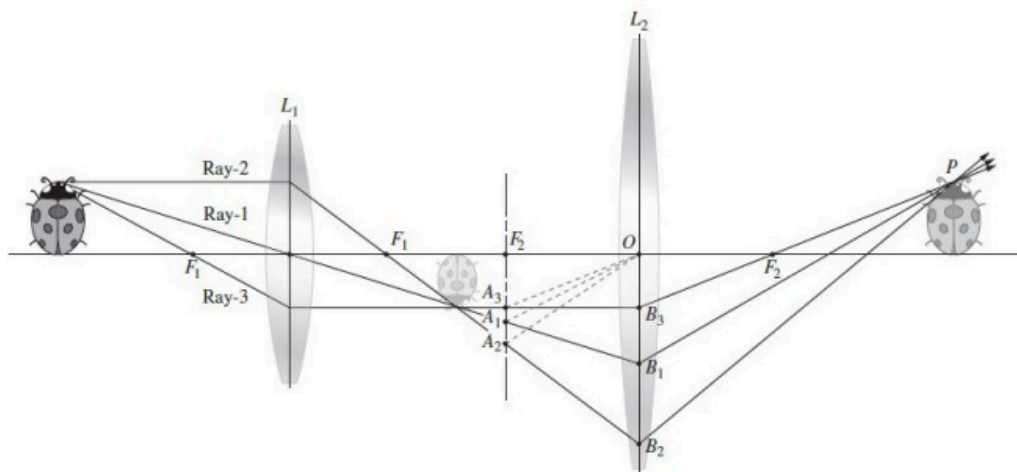
Para resolver un sistema de varias lentes se resuelve una lente y se utiliza la imagen formada como objeto (real o virtual) de la siguiente lente. Para dos lentes se puede demostrar que:

$$s_{i2} = \frac{f_2 d - f_2 \frac{s_{o1} f_1}{(s_{o1} - f_1)}}{d - f_2 - \frac{s_{o1} f_1}{(s_{o1} - f_1)}}$$

Usando que la distancias entre los lentes es  $d$  y que por lo tanto la distancia imagen del 1 será el objeto de la siguiente lente de la siguiente forma:

$$\boxed{s_{o2} = d - s_{i1}} \quad (21)$$

## Como graficar combinación de lentes



Se extiende el rayo hasta el plano formado por el foco del siguiente lente, se une el punto de intersección con el vértice del siguiente lente y el rayo que saldrá de la segunda lente será paralelo a esta recta que une  $A_i$  con  $O$ .

## Distancia focal posterior y frontal

**Distancia focal frontal** ( $dff$ ): es la distancia del vértice de la primer superficie hasta el primer punto focal.

$$dff = \lim_{s_{i2} \rightarrow \infty} s_{o1}$$

Es la distancia la que se debe colocar el objeto para que los rayos salgan paralelos de la segunda lente.

**Distancia focal posterior** ( $dfp$ ): es la distancia desde el vértice de la última superficie hasta el segundo punto focal.

$$dfp = \lim_{s_{o1} \rightarrow \infty} s_{i2}$$

Es la distancia a la que se formara la imagen de la segunda lente si llegan rayos paralelos.

Se tiene que:

$$dfp = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)} \quad (22)$$

$$dff = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)} \quad (23)$$

Si  $d = f_1 + f_2$  entonces  $dff$  y  $dfp \rightarrow \infty$ .

### Lentes en contacto

En este caso se tiene que  $d = 0$ , entonces:

$$dff = dfp = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

En este caso la distancia focal efectiva del sistema es:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (24)$$

Se puede decir que se dos lentes están en contacto el sistema se comporta como una sola lente con distancia focal según la ecuación (24).

Si se generaliza el resultado para  $N$  lentes en contacto con distancias focales  $f_j$ :

$$\frac{1}{f} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{f_j}$$

### Magnificación lateral en un sistema de dos lentes

Es el producto de las magnificaciones de cada lente

$$\begin{aligned} M_T &= M_{T1} M_{T2} \\ \Rightarrow M_T &= \left( -\frac{s_{i1}}{s_{o1}} \right) \left( -\frac{s_{i2}}{s_{o2}} \right) \\ \Rightarrow M_T &= \left( -\frac{f_1}{s_{o1} - f_1} \right) \left( -\frac{s_{i2}}{d - s_{i1}} \right) \\ \Rightarrow M_T &= \frac{f_1 s_{i2}}{d(s_{o1} - f_1) - s_{o1} f_1} \end{aligned}$$

## Diafragma de apertura y de campo

Diafragma de apertura (DA)(AS): determina la cantidad de luz que llega a la imagen.

Diafragma de campo (DC)(FS): determina el campo de visión de un instrumento.

## Cámara fotográfica

Una cámara fotográfica forma una imagen real, invertida, y en general disminuida de tamaño.

La imagen adecuada es la energía por unidad de área que llega al detector la cuál debe de estar dentro de unos límites. Se puede demostrar que la irradiancia es proporcional a  $\left(\frac{D}{f}\right)^2$  donde  $D$  es el tamaño del diafragma y  $f$  es el foco. Se define  $\frac{D}{f} \equiv$  **apertura relativa**. Entonces:

$$I \propto \left(\frac{D}{f}\right)^2 \quad (25)$$

También se define  $f/\# = \frac{f}{D}$ . Así una fotografía bien expuesta, es tal que le llega la cantidad de energía necesaria al sensor para formar una imagen:

$$E = I\Delta t \propto \frac{\Delta t}{(f/\#)^2} \quad (26)$$

## Ojo humano

El ojo humano tiene dos elementos refractores, la cornea y el cristalino, y es equivalente a una lente delgada convexa de foco variable. Algunos conceptos importante relacionados con el ojo:

- Acomodación: es el enfoque fino que realiza el cristalino.
- Punto próximo: es el punto más cercano al que un ojo puede enfocar.

## Miopía-Lente negativa

El ojo forma la imagen antes de la retina cuando los rayos le llegan paralelos. El punto lejano es el punto para el cual el ojo ya no puede enfocar, entonces se necesita que la lente forme una imagen virtual a una distancia menor. Para una lente de contacto se realiza el cálculo directo para la potencia que necesita la lente para formar una imagen antes del punto lejano. En el caso de lentes aéreos se toma como un sistema de dos lentes delgadas separadas por  $d = 16mm$ .

## Hipermetropía-Lente positiva

En este caso el punto próximo esta mas lejos de lo normal, por lo que se utiliza una lente positiva para formar una imagen virtual mas lejana, Usando los datos de  $s_o$  y  $s_i$  se calcula la potencia que debe tener la lente.

# Instrumentos ópticos

## Lupa

Es un instrumento que consiste de una **lente convergente** que aumenta el poder de refracción del ojo. Proporciona un **imagen virtual** de objetos más cercanos que el foco de la lente ( $s_o < f$ ), lo que **genera una imagen derecha y aumentada**. Se define para la lupa el **aumento angular** ( $M_A$ ) como el cociente entre el ángulo  $\alpha_a$ , sobre el ojo formado por la distancia hasta el ojo de la imagen y su altura, y  $\alpha_u$  que sería el ángulo generado por el objeto y su distancia al ojo si no estuviese la lente, es decir:

$$M_A = \frac{\alpha_a}{\alpha_u}$$

Con ángulos tal que con aproximación paraxial:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha_a) &\sim \alpha_a = \frac{y_i}{L} \\ \tan(\alpha_u) &\sim \alpha_u = \frac{y_o}{d_o} \\ \Rightarrow M_A &= -\frac{s_i L}{s_o d_o}\end{aligned}$$

Con  $L$  la distancia desde el ojo hasta la imagen formada y  $d_o$  es la distancia al punto cercano del ojo.

Entonces, usando la ecuación para las lentes y que  $l$  es la distancia del ojo a la lupa se obtiene:

$$M_A = \frac{d_o}{L} \left[ 1 + \frac{1}{f} (L - l) \right] \quad (27)$$

Usando (27) se pueden ver tres casos interesantes:

- Si la distancia del ojo a la lente es la misma que el foco de la lupa  $f = l \Rightarrow M_A = \frac{d_o}{f}$ .
- Si la lupa esta pegada al ojo  $l = 0 \Rightarrow M_A = d_o \left( \frac{1}{L} + \frac{1}{f} \right)$ , además si  $L = d_o \Rightarrow M_A = 1 + \frac{d_o}{f}$  es el **máximo valor**.
- Si el objeto esta sobre el foco de la lente  $s_o = f \Rightarrow L = \infty \Rightarrow M_A = \frac{d_o}{f} \forall l$ .

## Microscopio compuesto

Es un instrumento que consiste de dos lentes colocadas sobre el mismo eje óptico, el primer lente al que entra luz desde el objeto se llama **lente objetivo** y el segundo **lente ocular**, y su objetivo es aumentar objetos cercanos a la lente objetivo (los rayos incidentes al sistema no serán paralelos). El lente objetivo crea una imagen necesariamente entre el foco de la lente ocular y la lente ocular para que este funcione como una lupa y termine magnificando el objeto. Por esto es que la magnificación de un microscopio es la magnificación transversal de la lente objetivo por el aumento angular de la lente ocular:

$$M_P = M_{To} M_{Ae} \quad (28)$$

En el caso en que la imagen de la primer lente se forme en el foco de la segunda  $s_{oe} = f_e$  entonces por lo visto en la lupa  $M_A = \frac{d_0}{f_e}$ . Además, usando la ecuación (20) obtenida de la ecuación de Newton se tiene que si  $L = x_{io}$  (como la imagen se forma sobre el segundo foco  $L$  es la distancia entre los focos de ambas lentes), entonces  $M_T = -\frac{L}{f_o}$ . Para este caso:

$$M_P = -\frac{Ld_0}{f_o f_e}$$

## Telescopio

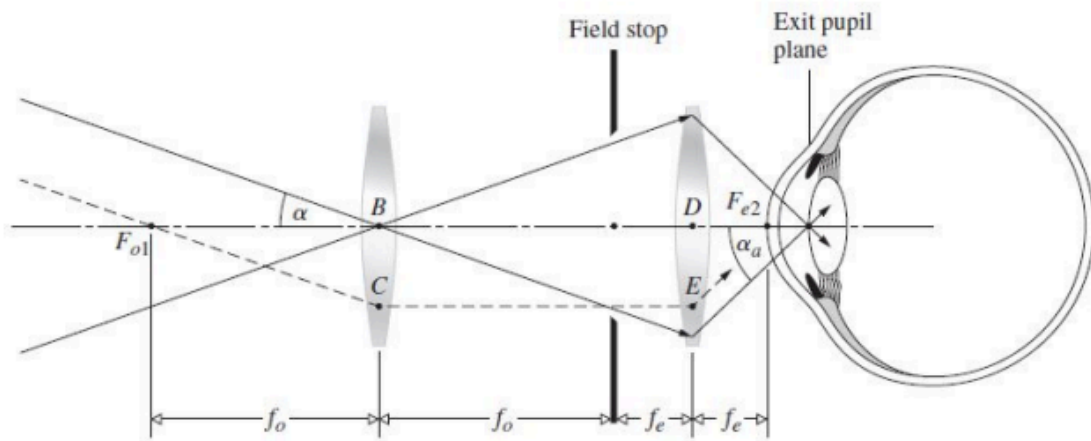
Existen dos tipos de telescopios, los **telescopios refractores** los cuales son similares a los microscopios y utilizan una combinación de lentes, y los telescopios reflectores que usan un espejo curvo y una lente. La idea del telescopio es poder observar objetos grandes y distantes, por lo que **los rayos incidentes** al sistema serán siempre **paralelos**.

Para un telescopio refractor las lentes se llaman igual que las de un microscopio. En un **telescopio afocal** los rayos que inciden y salen del sistema son paralelos, solamente los cambia de dirección para poder magnificar la imagen. En este caso se cumple que  $d = f_o + f_e$  donde  $d$  es la distancia entre los lentes y es llamada la longitud del telescopio.

Se define el aumento de manera similar al de un microscopio:

$$M_P = \frac{\alpha_a}{\alpha} \quad (29)$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo de incidencia de los rayos sobre el lente objetivo con respecto al eje óptico y  $\alpha_a$  es el ángulo de salida de los rayos (salen paralelos) con respecto al eje óptico.



Utilizando aproximación paraxial  $\alpha = -\frac{\overline{BC}}{f_o}$  y  $\alpha_a = \frac{\overline{DE}}{f_e}$ , como  $\overline{BC} = \overline{DE}$  se llega a:

$$M_P = -\frac{f_o}{f_e} \quad (30)$$

## Prismas

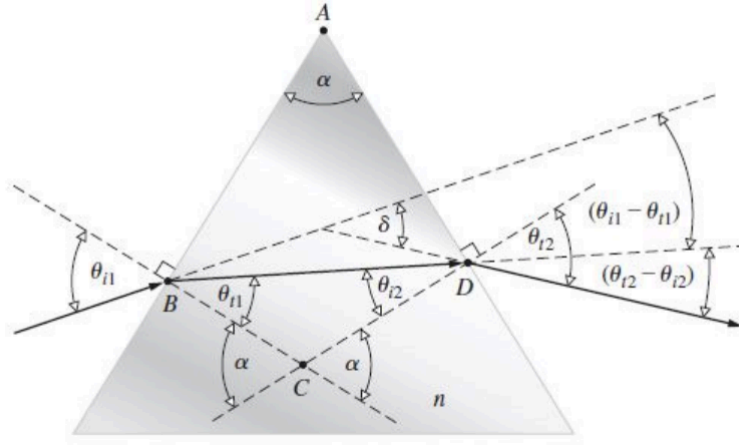
Los prismas sirven como divisores de haces de luz, polarizadores e interferómetros. Hay dos tipos de prismas:

- **Prisma dispersivo:** separa frecuencias constituyentes de la luz.
- **Prisma reflectivo:** produce cambios en la orientación de la imagen o en la dirección de la luz.

## Prisma dispersivo

Para un rayo de luz que atraviesa un prisma se define la **desviación angular**  $\delta$  como el ángulo de diferencia entre el rayo incidente y el rayo que sale del prisma. Haciendo uso de geometría y la ley de Snell se tiene que:

$$\delta = \theta_{i1} + \arcsin \left[ \sin(\alpha) \sqrt{n^2 - \sin^2(\theta_{i1})} - \cos(\alpha) \sin(\theta_{i1}) \right] - \alpha \quad (31)$$



Se puede demostrar que existe un ángulo de incidencia que minimiza  $\delta$ . Si se deriva (31) se iguala la derivada a 0 y se reemplaza se obtiene que:

$$\delta_m = 2 \cdot \arcsin \left[ n \sin \left( \frac{\alpha}{2} \right) \right] - \alpha \quad (32)$$

De (32) se deduce que para un prisma con índice  $n$  y ángulo  $\alpha$  sumergido en un medio  $n'$  se tiene que:

$$\frac{n}{n'} = \frac{\sin \left[ \frac{(\delta_m + \alpha)}{2} \right]}{\sin \left( \frac{\alpha}{2} \right)} \quad (33)$$

En caso que  $\delta$  sea mínimo se cumple que:

$$\theta_{t1} = \theta_{i2} = \frac{\alpha}{2} \quad (34)$$

Es decir el rayo cuya desviación es la mínima atraviesa el prisma de forma paralela a la base.

Existen los llamados prismas de desviación constante que para cada  $\lambda$  saldrá del prisma con una desviación distinta.

## Prisma reflector

El haz se hace incidir en el prisma de tal forma que se produzca al menos una reflexión total interna, con el propósito de cambiar la dirección de la luz.

Para un prisma isósceles se tiene que:

$$\delta = 2\theta_{i1} + \alpha \quad (35)$$

Por lo que la desviación angular no dependerá ni del índice del prisma ni de la longitud de onda de la luz, es un prisma acromático.



# Óptica Física

## Polarización

### Tipos de polarización

**Luz linealmente polarizada** ( $\mathcal{P}$ ): la dirección del campo eléctrico es constante aunque su magnitud y signo varían con el tiempo. Por lo que se puede definir un plano de vibración generado por el vector de propagación y el campo eléctrico.

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y &= \hat{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon)\end{aligned}\tag{36}$$

Si  $\varepsilon > 0$  se dice que  $E_y$  está retrasada respecto de  $E_x$ .

Si  $\varepsilon < 0$  se dice que  $E_y$  está adelantada respecto de  $E_x$ .

Si  $\varepsilon = \pm m\pi$  la onda esta linealmente polarizada.

### Polarización circular

La **polarización circular a derecha** ( $\mathcal{R}$ ) se da cuando  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$  y  $\varepsilon = -\pi/2 + 2m\pi$ , entonces queda:

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \hat{i}E_0 \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y &= \hat{j}E_0 \sin(kz - \omega t) \\ \Rightarrow \vec{E} &= E_0[\hat{i} \cos(kz - \omega t) + \hat{j} \sin(kz - \omega t)]\end{aligned}\tag{37}$$

Si  $\varepsilon = \pi/2 + 2m\pi$  se trata de una polarización circular a izquierda ( $\mathcal{L}$ ) entonces queda:

$$\vec{E} = E_0[\hat{i} \cos(kz - \omega t) - \hat{j} \sin(kz - \omega t)]\tag{38}$$

### Polarización elíptica $\mathcal{E}$

En esta polarización el campo eléctrico rota y cambia de magnitud, de manera que la punta del vector traza una elipse en un plano perpendicular a el vector de propagación.

De forma general:

$$\begin{aligned}\vec{E}_x &= \hat{i}E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y &= \hat{j}E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon)\end{aligned}\tag{39}$$

Nota: la polarización lineal y circular son casos específicos de la polarización elíptica.

A partir de las formas de la expresión (39) se puede deducir la ecuación de la elipse:

$$\begin{aligned}\frac{E_x}{E_{0x}} &= \cos(kz - \omega t) \\ \frac{E_y}{E_{0y}} &= \cos(kz - \omega t) \cos(\varepsilon) - \sin(kz - \omega t) \sin(\varepsilon) \\ \Rightarrow \frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\varepsilon) &= -\sin(kz - \omega t) \sin(\varepsilon)\end{aligned}\tag{40}$$

También se tiene que

$$\sin(kz - \omega t) = \sqrt{1 - \cos^2(kz - \omega t)} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \quad (41)$$

Usando la expresión obtenida en (40):

$$\left[\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\varepsilon)\right]^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right] \sin^2(\varepsilon) \quad (42)$$

Se llega a que:

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right) \cos(\varepsilon) = \sin^2(\varepsilon) \quad (43)$$

Que es la ecuación para una elipse que forma un ángulo  $\alpha$  con el sistema de coordenadas  $(E_x, E_y)$ :

$$\tan(2\alpha) = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos(\varepsilon)}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \quad (44)$$

La convención para saber si la polarización es a izquierda o a derecha es que si se mira a la fuente si gira en sentido **antihorario** es a **izquierda**, y si gira en sentido **horario** es a **derecha**.

## Luz Natural

La luz natural, de una fuente de luz ordinaria tiene un gran numero de emisores atómicos orientados al azar, por lo que la polarización global cambia de manera impredecible y no es posible distinguir un estado de polarización resultante. Matemáticamente la luz natural se representa como dos ondas arbitrarias, de igual amplitud, linealmente polarizadas, ortogonales e incoherentes, es decir  $\varepsilon(t)$  varia rapidamente y al azar.

## Polarizadores

### Dicroísmo o Polarización por absorción selectiva

Existen sustancias llamadas dicroicas que transmiten las ondas cuyo campo eléctrico es paralelo a determinada dirección, y absorbe el campo que vibre en cualquier otra dirección.

En un **polarizador ideal** la intensidad transmitida es la mitad de la incidente, y solo la luz cuyo campo eléctrico sea paralelo al eje de transmisión será transmitida.

Si se tienen dos polarizadores por absorción selectiva tales que sus ejes de transmisión forman un ángulo  $\theta$ , la intensidad que saldrá del segundo polarizador vendrá dada por la **ley de Malus**:

$$I(\theta) = I_1 \cos^2(\theta) \quad (45)$$

Donde  $I_1$  es la intensidad luego del primer polarizador.

### Polarización por reflexión

Por las leyes de Fresnel existe un ángulo de incidencia para el cual el campo eléctrico paralelo al plano de incidencia (formado por el rayo y la normal) reflejado se anula. Este ángulo es llamado ángulo de Brewster y cumple la **ley de Brewster**:

$$\tan(\theta_p) = \frac{n_t}{n_i} \quad (46)$$

Por lo que la luz reflejada está linealmente polarizada en dirección perpendicular al plano de incidencia. El problema de este polarizador es que la luz reflejada es muy débil. Para luz natural se cumple que:

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{I_{r\parallel} + I_{r\perp}}{I_i} = \frac{1}{2}(R_{\parallel} + R_{\perp}) \quad (47)$$

Donde:

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= r_{\parallel}^2 \\ R_{\perp} &= r_{\perp}^2 \end{aligned} \quad (48)$$

Según las expresiones (5) y (6) de las ecuaciones de Fresnel.

## Birrefringencia o polarización por doble refracción

Hay sustancias solidas que debido a que son cristalinas son ópticamente anisotrópicas, por lo que presentan mas de un índice de refracción. Si se tienen dos índices de refracción se define un eje óptico, tal que las ondas **paralelas** tienen un índice de refracción llamado **extraordinario** y las ondas **perpendiculares** tienen otro índice que se denomina **ordinario**:

$$\begin{aligned} n_o &= \frac{c}{v_{\perp}} \\ n_e &= \frac{c}{v_{\parallel}} \end{aligned} \quad (49)$$

Se define la **medida de birrefringencia** como:

$$\Delta n = (n_e - n_o) \quad (50)$$

## Polarización por Dispersión, Esparcimiento o Scattering

El scattering es un fenómeno producido por la absorción de luz por una molécula, y la posterior emisión de la onda en una cierta dirección. Esto genera que la luz que llega de una fuente se disperse en todas las direcciones, como pasa en la atmósfera terrestre.

Se tienen distintos tipos de scattering, que dependen del valor de el radio de las partículas y de la longitud de onda de la luz que llega:

$$x = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (51)$$

Dependiendo del valor de  $x$  se tienen distintos tipos de dispersión. Se tiene que si  $x$  es cercano a 1 se tiene el scattering de Mie, el cual no depende de la longitud de onda que le llega. Para valores menores se tiene scattering de Rayleigh, en el cual la dispersión si depende de  $\lambda$  y es el que produce que el cielo sea azul. Para valores de  $x$  mas pequeños la dispersión se puede considerar nula, y para valores mas altos se puede trabajar con óptica geométrica.

Hay una dirección para la cual una partícula emite luz polarizada, por lo que se puede aprovechar este fenómeno como polarizador.

## Retardadores

Los retardadores son dispositivos ópticos que sirven para cambiar la polarización de la onda incidente. Estos están hechos de materiales birrefringentes cuyo eje óptico es paralelo a la cara en donde incide la luz de forma perpendicular. Por lo tanto, los rayos ordinario y extraordinario se propagan en la misma dirección pero con velocidades diferentes, lo que genera un diferencia de fase, la cual dependerá del espesor de la lámina y de la longitud de onda de la onda incidente. La

onda resultante será la superposición de la onda o y e que tienen una diferencia de fase relativa de  $\Delta\phi$ .

La diferencia de camino óptico entre ambos rayos esta dad por:

$$\Lambda = d|n_o - n_e| \quad (52)$$

Por lo que la diferencia de fase relativa es:

$$\Delta\phi = k_0\Lambda = \frac{2\pi}{\lambda_0}d|n_o - n_e| \quad (53)$$

El estado de polarización de la onda dependerá de el  $\Delta\phi$  y de la amplitud de cada componente.

- Si  $\Delta\phi = 2\pi$  el retardado es igual una longitud de onda, por lo que no se desfasan, y no hay cambio en la polarización.
- Si  $\Delta\phi = \pi$  el retardo es igual a media longitud de onda, y se puede demostrar que rota luz polarizada con un ángulo  $\theta$  con respecto al eje con la velocidad de propagación de la luz mas rápida, en un ángulo  $2\theta$ . Además, invierte el sentido de rotación de la luz circular o elípticamente polarizada.
- Si  $\Delta\phi = \pi/2$  el retardo relativo es de un cuarto de longitud de onda, y se observa que si incide una onda linealmente polarizada se obtiene una onda elípticamente o circularmente polarizada.

Si incide luz natural sobre un retardador no se observa ningun efecto, ya que la luz natural se considera como dos componentes ortogonales con diferencia de fase aleatoria, por lo que sumarle un desfase relativo sigue produciendo una diferencia de fase aleatoria.

Si incide luz linealmente polarizada paralela a los ejes principales tampoco se verá afectada por el retardador.