Hojas de ecuaciones de Métodos Matemáticos de la Física I

Números complejos

- $\mathbb{C} = \{a, b \in \mathbb{R},\ a + i \cdot b\}$
- $Re(z) = a$
- $Im(z) = b$

Representación polar

- Módulo de un número complejo: $|a + i \cdot b| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argumento principal: $Arg(z) \in [-\pi, \pi]$
- Representación polar: sea $Arg(z) = \alpha \Rightarrow\ z = |z| \cdot [\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)]$
- Argumento: $arg(z) = \{Arg(z) + 2\pi \cdot n;\ n \in \mathbb{N}\}$

Propiedades de módulo y argumento

- $-|z| \leq Re(z); Im(z) \leq |z|$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|$
- $\sqrt{2} \cdot |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

- Conjugado: $\bar{z} = a - i \cdot b$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $arg(\bar{z}) = arg(z)$
- $arg(z_1 \cdot z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$
- $arg(\bar{z} \cdot z) = 0$

- Exponencial: $exp(x + i \cdot y) = e^x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))$

Raíces de números complejos

- Lema: $\forall z \neq 0$ y $\forall\ q \in \mathbb{N};\ q \geq 1,\ \ \exists q$ números complejos w_k $(0 \leq k \leq q - 1)$ tal que :
$w_k^q = z$ con $|w_k| = \sqrt[q]{z}$ y $arg(w_k) = \frac{arg(z) + 2\pi k}{q}$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

- Sea $f(z) = u + i \cdot v$ con $z = x + i \cdot y\ \Rightarrow\ u(x, y)\ \wedge\ v(x, y)$:

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$

- Si <u>no</u> se cumplen la ecuaciones en un abierto $\Rightarrow\ f$ no analítica en el abierto.
- Si se cumplen y las derivadas parciales son continuas en un abierto $\Rightarrow\ f$ es analítica en el abierto.
- Si se cumplen las ecuaciones pero las derivadas parciales no son continuas $\Rightarrow\ f$ no analítica.

Cauchy-Riemann en coordenadas polares

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Longleftrightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \wedge \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial r}$

Laplaciano

- $\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- $\nabla^2 f(r, \theta) = r^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$

Función exponencial

- Definición: $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Funciones trigonométricas

- $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$
- $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

Inversas

- $\sin^{-1}(z) = -i \cdot \ln(iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}})$
- $\cos^{-1}(z) = -i \cdot \ln(z + i \cdot (1-z^2)^{\frac{1}{2}})$
- $\frac{i}{2} \cdot \ln(\frac{i+z}{i-z})$

Funciones hiperbólicas

- $\sinh(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$
- $\cosh(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

Integrales

- Sea $f(t) = u(t) + i \cdot v(t),\ t \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \cdot \int_a^b v(t)dt$.
- Integración compleja: sea γ un camino suave tal que $\gamma = \{t \in [a,b] \to \ z(t)\}$ y una función f a valores complejos, definida y continua sobre $[\gamma]$ se define: $\boxed{\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(z(t))\ z'(t)\ dt}$
- Largo del camino: $\ell(\gamma) = \int_\gamma |dz|$
- $\boxed{\left|\int_\gamma f(z)\ dz\right| \leq max_{[z\in\gamma]}(|f(z)|) \cdot \ell(\gamma)}$

Primitiva

- Teorema: si γ es un camino cerrado con punto inicial z_1 y punto final z_2. Sea f una función que admite primitiva F en un abierto que contiene $[\gamma] \ \Rightarrow \boxed{\int_\gamma f(z)\ dz = F(z_2) - F(z_1)}$
- Proposición: sean γ_1 y γ_2 caminos cerrados simples, $[\gamma_1],\ [\gamma_2] \in D$ (Disco), $[\gamma_1] \subset D_1$ (Dominio encerrado por $[\gamma_1]$). Sea $A \subset D_1$ tal que su frontera es $[\gamma_1]\ \cup [\gamma_2]$. Si f es analítica en A y su frontera $\Rightarrow \ \oint_{\gamma_1} f(z)\ dz = \oint_{\gamma_2} f(z)\ dz$.

Representación integral de Cauchy

- Teorema: sea f analítica en un disco A, y γ un camino cerrado simple orientado positivamente, con $[\gamma] \subset A$.

$\forall z_0 \in \text{Dominio encerrado por } \gamma \Rightarrow \boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\ dz}$; y $\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz}$

- Cotas de Cauchy: Sea C un camino circular de radio R tal que f es analítica dentro de $C \Rightarrow$ $\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{R^n} \cdot max_{z\in C}(\left|f(z)\right|)$.

Series de Laurent

- Definición (serie de Laurent):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz$$

Tipos de singularidades

- Singularidad evitable: si $lim_{z\to z_0} f(z)\ \exists$.
- Polo de orden n: si $lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n \cdot f(z) \neq 0,\ \ \pm\infty$.
- Singularidad esencial: si la parte principal de la serie de Laurent es infinita.

Principio del argumento

- Si f analítica y no se anula sobre la curva cerrada simple $\gamma \ \Rightarrow \ \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz = N_c(f) - N_p(f)$.

Tal que $N_c(f),\ N_p(f)$ son respectivamente la cantidad de ceros contando su orden y la cantidad de polos contando su orden que encierra $[\gamma]$.

Residuos

• Definición:

$$\bullet\ f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \ \Rightarrow\ Res[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C f(z)\, dz = c_{-1}$$

• Proposición: si en z_0 hay una singularidad aislada de f de orden n $\Rightarrow$

$\boxed{Res[f, z_0] = lim_{z\to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-z_0)^n \cdot f(z)\Big)}$

• Teorema de los residuos: $\boxed{\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} Res[f, z_j]}$

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ecuaciones separables

• Se escriben de la forma: $A(x)\cdot dx + B(y)\cdot dy = 0$
• Solución: se integran ambos términos.

Ecuaciones exactas

• Se pueden escribir de la forma: $A(x,y)\cdot dx + B(x,y)\cdot dy = 0$ con $A(x,y) = \lambda(x)\cdot\mu(y)\ \wedge\ B(x,y) = \alpha(x)\cdot\beta(y) \Rightarrow$ la ecuación es exacta.
• Si se cumple que $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \Rightarrow$ la ecuación es exacta.
• Solución: se integra como un campo en cualquier camino (la integral del campo obtenido no depende del camino).

Factor integrante

• Si $A(x,y)\cdot dx + B(x,y)\cdot dy = 0$ no es exacta puede $\exists\lambda(x,y)$ tal que $\lambda(x,y)\cdot A(x,y)\cdot dx + \lambda(x,y)\cdot B(x,y)\cdot dy = 0$ si es exacta.

• Para una ecuación lineal de primer orden de la forma $y' + f(x)\cdot y = g(x) \Rightarrow$ $\boxed{\lambda(x) = e^{\int f(x)\, dx}}$

Cambios de variable

Ecuación de Bernoulli:

$$y' + f(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n \to \boxed{v = y^{1-n}}$$

Ecuación de Clairaut:

$$y - xy' = f(y') \to \text{se deriva con respecto a } x \to y''[f'(y') + x] = 0$$

Homogeneidad:

• $f(x,y)$ es homogénea de grado r si $f(ax, ay) = a^r\cdot f(x,y)\ \forall a$.
• Una ecuación diferencial $A(x,y)\cdot dx + B(x,y)\cdot dy = 0$ si A y B son homogéneas del mismo grado.
• Se remplaza en este caso $\boxed{y = vx}$

Generalización de la homogeneidad:

• Si $A(x,y)\cdot dx + B(x,y)\cdot dy = 0$ es dimensionalmente consistente con:

$$A(ax, a^m y) = a^r\cdot A(x,y)$$
$$B(ax, a^m y) = a^{r-m+1}\cdot B(x,y)$$

• Se sustituye $\boxed{y = vx^m}$

Ecuaciones lineales a coeficientes constantes

• $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = f(x)$

Homogénea

• $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$. Este tipo de ecuaciones tienen n soluciones y_i linealmente independientes entre ellas tal que la solución general es combinación lineal de las $y_i \to y = c_n y_n + c_{n-1}y_{n-1} + \ldots + c_1 y_1$.

● Para resolver se propone $y = e^{mx}$

$$\rightarrow a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m + a_0 = 0$$
$$\rightarrow \text{Se obtienen } m_i : \; i = 1, \ldots, n$$

Si m_i son todos distintos $\rightarrow y = c_n e^{m_n x} + c_{n-1} e^{m_{n-1} x} + \ldots + c_1 e^{m_1 x}$
Si hay m_i iguales se puede multiplicar por x hasta que todas las soluciones y_i sean LI entre ellas.

● Para ver si dos funciones son LI se define el Wronskiano:

$$w(y_1, y_2) = det\left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \right)$$

Si $w(y_1, y_2) \neq 0 \Rightarrow y_1, y_2$ son LI.
Si $w(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow y_1, y_2$ son LD.

No homogénea

● Se resuelve la ecuación homogénea, y luego se propone una solución particular y_p dependiendo de la forma de $f(x)$.

$f(x)$	y_p
c	A
$ax + b$	$Ax + b$
$ax^2 + bx + c$	$Ax^2 + Bx + C$
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
$\sin(\mu x)$	$A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$
$\cos(\mu x)$	$A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)$
$e^{\mu x}$	$Ae^{\mu x}$
$(ax + b) \cdot e^{\mu x}$	$(Ax + B) \cdot e^{\mu x}$
$(ax^2 + bx + c) \cdot e^{\mu x}$	$(Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{\mu x}$
$e^{\lambda x} \cdot \sin(\mu x)$	$Ae^{\lambda x} \cdot \sin(\mu x) + Be^{\lambda x} \cdot \cos(\mu x)$

Variación de parámetros

● Si se conocen las soluciones homogéneas de la ecuación $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = s(x)$, $y_1, \; y_2$:

$$\boxed{y_p = A \cdot y_1 + B \cdot y_2}$$
$$\boxed{A = -\int \frac{y_2(x) \cdot s(x)}{w(y_1, y_2) \cdot p(x)} \, dx}$$
$$\boxed{B = \int \frac{y_1(x) \cdot s(x)}{w(y_1, y_2) \cdot p(x)} \, dx}$$

Reducción de orden

● Si se conoce una solución y_1 de la ecuación diferencial homogénea $y'' + f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0 \Rightarrow \boxed{y_2 = z(x) \cdot y_1}$

Ecuaciones notables

● Ecuación de Legendre: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell + 1)y = 0$
● Ecuación de Bessel: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$
● Ecuación de Laguerre: $xy'' + (1 - x)y' + ay = 0$
● Ecuación de Hermite: $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$

Puntos singulares de una ecuación diferencial de segundo orden

● Dada la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
● Si $p(x_0)$ y $q(x_0)$ son finitas $\Rightarrow x_0$ es un punto regular de la ecuación.
● Si $p(x)$ o $q(x)$ divergen para $x \rightarrow x_0 \Rightarrow x_0$ es un punto singular de la ecuación.
● Si x_0 es un punto singular y se cumple que $lim_{x \to x_0}(x - x_0) \cdot p(x) \; \exists \; \wedge \; lim_{x \to x_0}(x - x_0)^2 \cdot q(x) \; \exists \Rightarrow x_0$ es un punto singular regular.
● Si x_0 es un punto singular y $lim_{x \to x_0}(x - x_0) \cdot p(x) \nexists \; \vee \; lim_{x \to x_0}(x - x_0)^2 \cdot q(x) \nexists \Rightarrow x_0$ es un punto singular irregular.

Método de Frobenius, solución en forma de serie

● Sea la ecuación diferencial de la forma $L[y] = x^2y'' + x[x\,p(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0$, tal que:

$$\boxed{[x\,p(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n}$$

$$\boxed{[x^2 q(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n}$$

$$\text{Se propone como solución: } \boxed{\phi = x^r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

● Para resolver, se plantea:

$$\boxed{L[\phi] = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[(r+n)\cdot(r+n-1)\cdot a_n \cdot x^{n+r}\Big] + \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k\right) \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)\cdot a_n \cdot x^{n+r}\right] + \left(\sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+r}\right) = 0}$$

$$\rightarrow \boxed{L[\phi] = F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(n+r)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \Big[(r+k)\cdot p_{n-k} + q_{n-k}\Big] \right\} \cdot x^{n+r} = 0} \quad (1)$$

$$\text{Se define: } \boxed{F(r+n) = (r+n)(r+n-1) + p_0 \cdot (r+n) + q_0}$$

● Para calcular se plantea que por (1) cada término debe ser idénticamente igual a 0.
● Para $n = 0 \Rightarrow F(r) = 0$, asi se calculan r_1 y r_2 , con $\boxed{r_1 \leq r_2}$.
● Con los demás términos se obtiene la siguiente relación de recurrencia, con la cuál se obtienen los a_n :

$$\boxed{a_n(r_1) = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot \Big[(r_1+k)\cdot p_{n-k} + q_{n-k}\Big]}{F(r_1+n)}}$$

● Así la primera solución obtenida es $y_1 = x^{r_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Segunda solución

$$\bullet \text{ Si } \ r_1 = r_2 \Rightarrow \boxed{y_2 = y_1 \cdot ln(x) + x^{r_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$$

$$\bullet \text{ Si } \ r_1 - r_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{y_2 = y_1 \cdot \gamma \cdot ln(x) + x^{r_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$$

$$\bullet \text{ Si } \ r_1 - r_2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{y_2 = x^{r_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$$

● Se remplazan estas expresiones en la ecuación y se calculan γ y b_n .

Series de Fourier

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\big]}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\, dx}$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx}$$

Condiciones de Dirichlet

● La serie de Fourier converge a f si cumple las siguiente condiciones:
● $f(x)$ tiene un número finito de discontinuidades finitas en el intervalo de periodicidad.
● $f(x)$ tiene un número finito de valores extremos (máximos y mínimos) en el intervalo de periodicidad.

● Las sumas parciales convergen en media:

$$lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$
$$\text{con } f(x_0^{\pm}) = lim_{\delta\to 0^{\pm}} f(x_0 + \delta)$$

● Se puede escribir el desarrollo de Fourier haciendo uso de números complejos:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}}$$
$$\text{con } \boxed{c_n = \frac{1}{2}(a_n - i \cdot b_n)} \text{ si } n > 0$$
$$\boxed{c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + i \cdot b_n)}$$
$$\boxed{c_0 = \frac{a_0}{2}}$$

● Teorema de Abel: sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$ con parte real e imaginaria $u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \cos(n\theta)$ y $v(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \sin(n\theta)$, si $u(1,\theta)$ y $v(1,\theta)$ son convergentes para un dado $\theta \Rightarrow\ u(1,\theta) + i \cdot v(1,\theta) = lim_{r\to 1} f(r \cdot e^{i\theta}) = lim_{r\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}$.

● Para una función analítica el desarrollo de Laurent coincide con el desarrollo de Fourier.

Cambio de intervalo

$$[0, 2\pi] \to [-L, L]$$
$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]}$$
$$\boxed{a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx}$$
$$\boxed{b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\, dx}$$