

Hoja de ecuaciones Física General IV

Ondas

- Onda unidimensional cumple: $\psi(x, t) = f(x, t) = f(x \mp vt)$ (- en caso de que se propague en sentido positivo).

Ondas armónicas

- Son de la forma:

$$\psi(x, t) = A \sin[k(x \mp vt)]$$

$$\psi(x, t) = A \cos[k(x \mp vt)]$$

- $k \equiv$ número de onda, $[k] = m^{-1}$ (cantidad de ondas por unidad de longitud).
- $v \equiv$ velocidad de propagación, $[v] = m/s$.
- $A \equiv$ amplitud (sus unidades dependen de la onda).
- $\lambda \equiv$ longitud de onda/ periodo espacial (distancia que recorre una perturbación en un ciclo).
- $\tau \equiv$ periodo temporal, $[\tau] = s$ (tiempo en el que la onda recorre una longitud de onda).
- $\nu \equiv$ frecuencia temporal, $[\nu] = s^{-1} = Hz$ (cantidad de perturbaciones que pasan por unidad de tiempo).
- $\omega \equiv$ frecuencia angular, $[\omega] = \frac{rad}{s}$.
- Estas definiciones valen para todas las ondas periódicas.
- Igualdades:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$v = \frac{\lambda}{\tau}$$

$$v = \lambda \cdot \nu$$

$$v = \frac{\omega}{k}$$

$$\nu = \frac{1}{\tau}$$

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

(1)

- Usando las igualdades se puede escribir la función de una onda armónica como $\psi(x, t) = A \sin(kx \mp \omega t)$

Fase y velocidad de fase

- Se define $\phi \equiv$ fase como el argumento dentro del seno (o coseno): $\phi = kx \mp \omega t + \varepsilon$. Tal que $\varepsilon \equiv$ fase inicial.
- $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_x = \mp \omega$
- $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_t = k$
- $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\phi = \mp v$

Ecuación de onda

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} \quad (2)$$

Superposición de ondas

- Superposición de ondas de igual frecuencia y velocidad, con $\alpha_i = k_i x + \varepsilon_i$:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01} \cdot e^{i(\alpha_1 - \omega t)} \\ E_2 &= E_{02} \cdot e^{i(\alpha_2 - \omega t)} \\ E(x, t) &= E_0 \cdot e^{i(\alpha - \omega t)} = E_1 + E_2 \\ \Rightarrow \boxed{E_0^2 &= E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \\ \boxed{\tan(\alpha) &= \frac{E_{01} \sin(\alpha_1) + E_{02} \sin(\alpha_2)}{E_{01} \cos(\alpha_1) + E_{02} \cos(\alpha_2)}} \end{aligned} \quad (3)$$

- Si $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi m$ están en fase y la interferencia es constructiva.
- Si $\alpha_1 - \alpha_2 = (2k + 1)\pi$ es una interferencia destructiva.
- Si $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = cte$ las ondas son coherentes.

Ondas estacionarias

- Un punto de agarre, CC: $E_0[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varepsilon_d)]_{x=0} = 0 \forall t \Rightarrow \varepsilon_d = 2\pi m$.
- Nodo espacial $x_m = m \frac{\lambda}{2}$.
- Nodo temporal $t_m = (2m + 1) \frac{\tau}{4}$.
- Onda en una cavidad, CC: $E_0[\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t + \varepsilon_d)]_{x=L=0} = 0 \forall t \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$.

Ondas tridimensionales

- $\psi(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t)$, donde $\vec{k} \equiv$ vector de propagación de la onda.
- $|\vec{k}| \equiv$ número de onda, $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$.
- Velocidad de fase o velocidad de propagación del frente de onda $\frac{dr_k}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v$.
- Ecuación de onda tridimensional:

$$\boxed{\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}} \quad (4)$$

- Onda esférica $\psi(r, t) = \left(\frac{A}{r}\right) \cdot e^{ik(r \mp vt)}$.
- El plano de vibración de una onda esta formado por la dirección de propagación y la dirección de la vibración.

Ondas electromagnéticas

- $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, en el vacío $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 m/s$.
- Constantes: $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C}{Vm}$, $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$.
- Polarización lineal: si la onda no cambia de dirección de vibración.

Para una onda electromagnética con cualquier polarización vale que:

- \vec{E} y \vec{B} están en fase en todos los puntos del espacio.
- $\vec{E} \perp \vec{B}$.
- $\vec{E} \times \vec{B}$ apunta en la dirección de propagación de la onda \vec{k} .
- $E_0 = v \cdot B_0$
- Si $\vec{E}(x_i)$ ($\vec{B}(x_i)$) $\Rightarrow E_{x_i} = 0$ ($B_{x_i} = 0$).

Energía y vector de Poynting

- Densidad de energía de los campos: $U_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = U_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$.
- Densidad de energía de la onda: $U = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$
- **Vector Poynting:** $\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \cdot \vec{E} \times \vec{B}$ (cantidad de energía por unidad de tiempo y área),
 $[\vec{S}] = \frac{W}{m^2 s}$.
- **Irradiancia:** $I = \langle S \rangle_T = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} \cdot \langle |\vec{E} \times \vec{B}| \rangle_T = \epsilon_0 c \cdot \langle E^2 \rangle$ (vale solo para ondas polarizadas linealmente). $[I] = \frac{W}{m^2}$.
- Para cualquier medio: $I = v \epsilon \langle E^2 \rangle_T$

Presión de radiación

- Superficie perfectamente absorbente: $\langle P(t) \rangle_T = \frac{I}{c}$.
- Superficie perfectamente reflectante: $\langle P(t) \rangle_T = \frac{2I}{c}$

Luz en la materia

- $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$.
- Índice de refracción absoluto: $n = \frac{c}{v} \geq 1$.
- Relación de Maxwell: (para $\mu = \mu_0$) $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{K_E}$.

Propagación de la luz

- **Ley de reflexión:** el rayo incidente, la normal a la superficie y el rayo reflejado se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia. Además, se cumple $\sin(\theta_i) = \sin(\theta_r)$.
- **Ley de refracción:** el rayo incidente, la normal a la superficie y el rayo refractado se encuentran en el mismo plano, llamado plano de incidencia. Además, se cumple la **Ley de Snell**
 $n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$.
- Principio de reversibilidad: en un sistema da igual la dirección del rayo se mantienen los mismo ángulos.
- Al pasar de medio, la luz mantiene su frecuencia ($\nu = cte$). Entonces se cumple $\lambda_1 = \frac{n_2}{n_1} \lambda_2$.
- **Principio de Fermat:** los rayos de luz siguen la trayectoria que minimiza el tiempo o, equivalentemente, la trayectoria que minimiza la longitud del camino óptico.
- $LCO \equiv$ **Longitud de camino óptico**, se define como:

$$LCO = \sum_{j=1}^N n_j s_j$$
$$LCO = \int_S^P n(s) ds$$

Donde n_j es el índice de refracción de las distintas fases y s_j es la longitud que recorre en cada medio. La longitud de camino óptico se corresponde a la distancia que recorrería la luz en el vacío en el tiempo en que paso a través de los distintos medios, es decir, $LCO = ct$. También se puede ver como la longitud tal que en el vacío hay la misma cantidad de longitud de ondas que en el sistema.

- La ley de reflexión y de Snell pueden ser deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Ecuaciones de Fresnel

Las ecuaciones estarán dadas teniendo en cuenta la dirección del campo eléctrico en el punto de incidencia con respecto al plano de incidencia, y se supone que los medios son de permeabilidad magnética μ_0 . Además, los signos de las ecuaciones se relacionan con la dirección en la que se eligieron los campos (ver la deducción en el Hecht).

Si \vec{E} es perpendicular al plano de incidencia:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &\equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\perp} &\equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \end{aligned} \quad (5)$$

Donde r es el **coeficiente de reflexión para la amplitud** y t es el **coeficiente de transmisión para la amplitud**.

Si \vec{E} es paralelo al plano de incidencia:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &\equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos(\theta_i) - n_i \cos(\theta_t)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\parallel} &\equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos(\theta_i)}{n_t \cos(\theta_i) + n_i \cos(\theta_t)} = \frac{2 \sin(\theta_t) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \end{aligned} \quad (6)$$

Si $n_t > n_i \Rightarrow \theta_i > \theta_t$. Cuando la incidencia es normal $\theta_i \sim 0 \Rightarrow \theta_t \sim 0$, así se cumple:

$$[r_{\parallel}]_{\theta_i=0} = [-r_{\perp}]_{\theta_i=0} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}$$

Se cumple que:

- $r_{\perp} < 0 \forall \theta_i \Rightarrow E_{0r}$ y E_{0i} están desfasadas en 180° .
- $r_{\perp} > 0$ para $\theta_i < \theta_p$.
- $r_{\perp} < 0$ para $\theta_i > \theta_p$.

Entonces en $\theta_i + \theta_t = 90^\circ \Rightarrow r_{\parallel}(\theta_p) = 0$. Donde θ_p es el **ángulo de polarización o de Brewster**. Se puede demostrar:

- $t_{\perp} - r_{\perp} = 1 \forall \theta_i$.
- $t_{\parallel} + r_{\parallel} = 1$ para $\theta_i = 0$.

Si $n_t < n_i \Rightarrow \theta_i < \theta_t$. Entonces, se cumple:

- $r_{\perp} > 0 \forall \theta_i \Rightarrow E_{0r}$ y E_{0i} están en fase.
- $r_{\perp}(\theta_c) = 1$ ($\theta_t = 90^\circ$).

- $r_{\parallel} < 0$ para $\theta_i < \theta'_p$.
- $r_{\parallel} > 0$ para $\theta_i > \theta'_p$.
- $r_{\parallel}(\theta_c) = 1$.
- $\theta_p + \theta'_p = 90^\circ$.

Transmitancia y reflectancia

- Reflectancia $R \equiv \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = r^2$
- Transmitancia $T \equiv \frac{I_t \cos(\theta_t)}{I_i \cos(\theta_i)} = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = \frac{n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t^2$

Por conservación de energía:

$$T + R = 1$$

Se tiene además:

- $R_{\perp} = r_{\perp}^2$
- $R_{\parallel} = r_{\parallel}^2$
- $T_{\perp} = \frac{n_t t_{\perp} \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t_{\perp}$
- $T_{\parallel} = \frac{n_t t_{\parallel} \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i)} t_{\parallel}$

Si $\theta_i = 0$:

$$R = R_{\perp} = R_{\parallel} = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2$$

$$T = T_{\perp} = T_{\parallel} = \frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$

Óptica geométrica

- **Objeto:** cualquier cuerpo desde donde se irradia luz.
- **Imagen:** figura formada por los rayos emitidos por un objeto luego de interactuar con el sistema óptico. Puede ser **real**, si es formada por rayos que emite el objeto que se intersectan; o **virtual** si se forma desde donde parecen venir los rayos.

Espejos

Espejos planos

- Imagen virtual: $s_i < 0 \Rightarrow s_i = -s_0$
- Magnificación transversal $M_T = \frac{y'}{y} = 1$

Espejos esféricos cóncavos o convergentes

- Objeto e imagen reales $s_i, s_0 > 0$
- $R > 0$

Se utilizara la aproximación paraxial tal que el ángulo de incidencia sea muy pequeño. Así se puede deducir la ecuación para espejos, que vale para espejos convexos y cóncavos:

$$\boxed{\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{2}{R}} \quad (7)$$

Tal que $R > 0$ en cóncavos y $R < 0$ en convexos.

Se define la **distancia focal objeto**:

$$f_0 = \lim_{s_i \rightarrow \infty} s_0 = \frac{R}{2}$$

Y **distancia focal imagen**:

$$f_i = \lim_{s_0 \rightarrow \infty} s_i = \frac{R}{2}$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{1}{s_0} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}} \quad (8)$$

Con $f > 0$ para espejos cóncavos y $f < 0$ para espejos convexos. Además $M_T = -\frac{s_i}{s_0}$, si $M_T > 0$ la imagen es derecha y si $M_T < 0$ la imagen estará invertida.

Para espejos **cóncavos** se tiene que:

- Si $s_0 > 2f$ entonces $s_i > 0$, $f < s_i < 2f$ y $-1 < M_T < 0 \Rightarrow$ la imagen será **real**, **invertida** y **disminuida** de tamaño.
- Si $s_0 = 2f$ entonces $s_i = s_0$ y $M_T \Rightarrow$ imagen **real**, **invertida** y del **mismo tamaño**.
- Si $f < s_0 < 2f$ entonces $s_i > 0$, $2f < s_i < \infty$ y $M_T < -1 \Rightarrow$ imagen **real**, **invertida** y **aumentada**.
- Si $s_0 = f$ entonces no se forma imagen ya que $s_i = \pm\infty$.
- Si $s_0 < f$ entonces $s_i < 0$, $|s_i| > s_0$ y $M_T > 1 \Rightarrow$ imagen **virtual**, **derecha** y **aumentada**.

Para espejos **convexos** la imagen es siempre **virtual** ($s_i < 0$), **derecha** y **disminuida** ($0 < M_T < 1$).

Imágenes por refracción

Para un rayo que incide en una esfera de radio R que cambia de un medio n_1 a n_2 se cumple que:

$$\boxed{\frac{n_1}{s_0} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}} \quad (9)$$

$$\boxed{M_T = -\frac{n_1 s_i}{n_2 s_0}} \quad (10)$$

Se usa la siguiente **convención de signo para superficies esféricas refractoras**:

- $s_0 > 0$ objeto real.
- $s_0 < 0$ objeto virtual.
- $s_i > 0$ imagen real.
- $s_i < 0$ imagen virtual.
- $y, y' > 0$, por encima del eje óptico.

Para **luz proveniente desde la izquierda**:

- $R > 0$ si el centro de curvatura (C) está a la derecha del vértice.
- $R < 0$ si el centro de curvatura (C) está a la izquierda del vértice.

Se define distancia focal objeto y distancia focal imagen como:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{n_1}{n_2 - n_1} R \\ f_i &= \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \end{aligned} \quad (11)$$

Superficies refractoras planas

- $R \rightarrow \infty \Rightarrow s_i = -\frac{n_2}{n_1} s_0$
- $s_i < 0 \forall s_0$, por lo que la imagen será virtual.
- $M_T = 1$

Lentes

Un lente es un dispositivo refractor (un discontinuidad en el medio dominante) que reconfigura la distribución de energía emitida.

Tipos de lentes

Lente **simple**: dos superficies refractoras, una de ellas curva. La categoría opuesta es lente compuesta.

Lente **delgada**: el espesor de la lente es despreciable con respecto a las demás dimensiones. La categoría opuesta es lente gruesa, en este caso se trata como dos superficies refractoras.

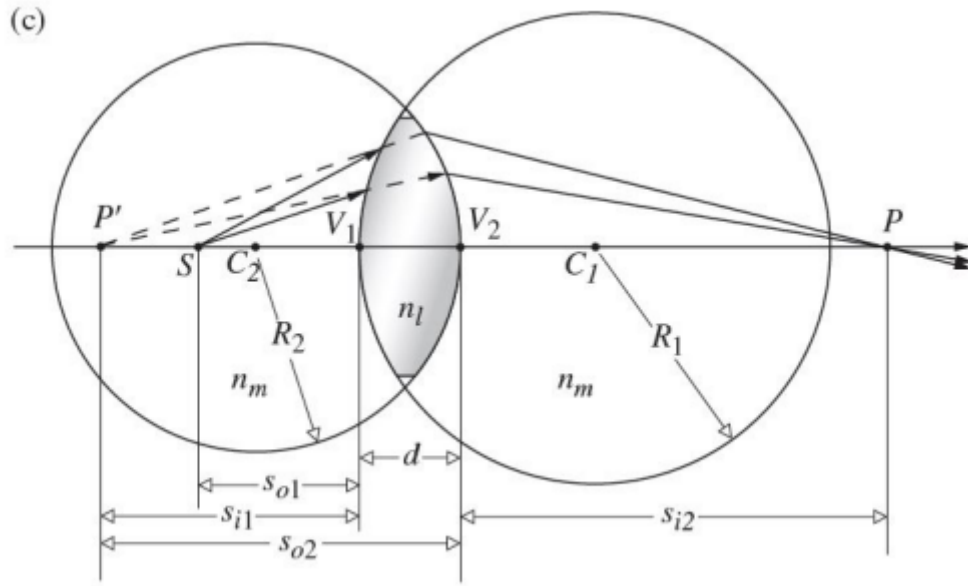
Sistemas centrados de superficies esféricas: las superficies son rotacionalmente simétricas alrededor de un eje.

Lentes **convexas**, convergentes o **positivas**.

Lentes **cóncavas**, divergente o **negativa**.

Ecuación de lentes delgadas

Esta ecuación se deduce a partir de tratar una lente convexa (con cóncava también sale) como dos superficies refractoras de radios R_1 y R_2 , con un espesor d y coeficientes del medio n_m y del lente n_l . Se resuelve primero una superficie, y se toma la imagen formada como objeto de la segunda superficie y se resuelve, teniendo en cuenta la separación entre los vértices de ambas curvas.



Para la primer superficie usando (9) se obtiene:

$$\frac{n_m}{s_{o1}} + \frac{n_l}{s_{i1}} = \frac{n_l - n_m}{R_1} \quad (12)$$

Para la segunda superficie describiendo las distancias desde V_2 , tal que $s_{o2} = d - s_{i1}$:

$$\frac{n_l}{d - s_{i1}} + \frac{n_m}{s_{i2}} = \frac{n_m - n_l}{R_2} \quad (13)$$

Si se suma (12) y (13) y $d \rightarrow 0$ (pues es un lente delgado) se llega a la **ecuación de lentes delgadas** o formula del constructor de lentes:

$$\boxed{\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \left(\frac{n_l}{n_m} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (14)$$

Puntos y planos focales

Se llega a que el foco imagen y objeto son iguales $f = f_i = f_o$ con:

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n_{lm} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} \quad (15)$$

Con $n_{lm} = \frac{n_l}{n_m}$. A partir de (14) se puede escribir la **fórmula gaussiana para lentes delgadas**:

$$\boxed{\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f}} \quad (16)$$

Se define potencia P con unidades de Dioptrías $[P] = D$ y $P = \frac{1}{f}$

Lentes convergentes

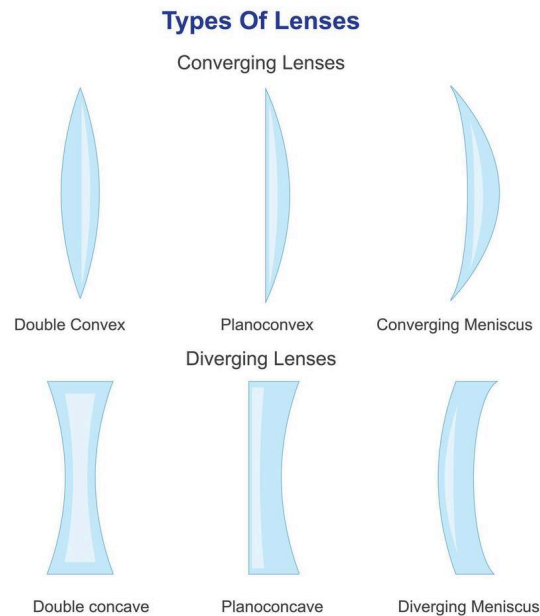
Este tipo de lente cumple que $f > 0$:

- Lente biconvexa: $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$.
- Lente plano-convexa: $R_1 = \infty$ y $R_2 < 0$.
- Lente menisco-convexa: $R_1 > 0$ y $R_2 > 0$ con $R_1 < R_2$.

Lentes divergentes

Este tipos de lentes cumple que $f < 0$:

- Lente bicóncava: $R_1 < 0$ y $R_2 > 0$.
- Lente plano-cóncava: $R_1 = \infty$ y $R_2 > 0$.
- Lente menisco-concava: $R_1 > 0$ y $R_2 > 0$ con $R_1 > R_2$.



Hay que notar que debido a la fórmula (15) una lente que en un medio es convergente ($f > 0$) si se cambia de medio esta puede llegar a comportarse como una lente divergente.

Convección de signos

Signos para Lentes y Superficies Esféricas		
Parámetro	Signo	
	+	-
s_o	Objeto Real	Objeto Virtual
s_i	Imagen Real	Imagen Virtual
f	Lente Convergente	Lente Divergente
y_o	Objeto Derecho	Objeto Invertido
y_i	Imagen Derecha	Imagen Invertida
M_T	Imagen Derecha	Imagen Invertida

Formación de imágenes con trazado de rayos

Para una lente **convergente**:

- Un rayo paralelo al eje óptico pasa por el foco imagen.
- Un rayo que pasa por el foco objeto pasa paralelo al eje óptico.
- Un rayo que pasa por el vértice no cambia de dirección.

Para una lente **divergente**:

- Un rayo paralelo al eje óptico parece venir del foco imagen.
- Un rayo que va a pasar por el foco objeto pasa paralelo al eje óptico.
- Un rayo que pasa por el vértice no cambia de dirección.

Imágenes formadas por lentes delgadas de objetos reales

Imágenes formados por lentes delgadas de objetos reales				
Lentes Convexas				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaños Relativo
$\infty < s_o < 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo Tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$ s_i > s_o$	Derecha	Aumentada
Lentes Cóncavas				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaños Relativo
Cualquiera	Virtual	$ s_i < f $ $s_o > s_i $	Derecha	Disminuida

Magnificación transversal

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{s_i}{s_o} \quad (17)$$

Usando trigonometría se puede deducir la **fórmula de Newton**, definiendo $x_o = s_o - f$ y $x_i = s_i - f$ se cumple que:

$$x_o x_i = f^2 \quad (18)$$

Magnificación longitudinal

Se define:

$$M_L \equiv \frac{dx_i}{dx_o} \quad (19)$$

Usando (18) y que $M_T = \frac{f}{s_i - f}$:

$$M_L = -\frac{x_i}{x_o} = -\frac{f^2}{x_o^2} = -M_T^2 \quad (20)$$

Objetos virtuales

Para trazar los rayos en un sistema con un objeto virtual los rayos no salen del objeto si no que apuntan a él en un principio y luego cambian de dirección.

Aberraciones

- Aberraciones cromáticas: están dadas debido a que el coeficiente n depende la longitud de onda.
- Aberraciones monocromáticas: hay de dos tipos, primero aquellas que deterioran la imagen haciendo que esta pierda definición (aberración esférica, coma, astigmatismo); y aberraciones que deforman la imagen (campo de curvatura de Petzval y distorsión).