Sección 2.1.5

10. a) Sea $|v_1\rangle = a_i x^i$ y $|v_2\rangle = b_i x^i \in P_n$

Donde $a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

1) $|v_1\rangle + |v_2\rangle = a_i x^i + b_i x^i = (a_i + b_i) x^i$

Como cada a_i y $b_i \in \mathbb{R}$ entonces $a_i + b_i = c_i \in \mathbb{R}$

Por tanto $|v_1\rangle + |v_2\rangle = c_i x^i \in P_n$

2) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha |v_1\rangle = \alpha (a_i x^i) = (\alpha a_i) x^i$

$\alpha a_i \in \mathbb{R}$ ya que cada a_i y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$\alpha |v_1\rangle = (\alpha a_i) x^i \in P_n$

3) Sean $|v_1\rangle = a_i x^i$, $|v_2\rangle = b_i x^i$, $|v_3\rangle = c_i x^i$

$(|v_1\rangle + |v_2\rangle) + |v_3\rangle = ((a_i x^i + b_i x^i)) + c_i x^i$

$= (a_i + b_i) x^i + c_i x^i = (a_i + b_i + c_i) x^i =$

Como $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ presentan asociatividad respecto a suma

$(a_i + b_i + c_i) x^i = a_i x^i + (b_i + c_i) x^i = |v_1\rangle + (b_i x^i + c_i x^i)$

$= |v_1\rangle + (|v_2\rangle + |v_3\rangle)$

4) $|v_1\rangle + |v_2\rangle = a_i x^i + b_i x^i = (a_i + b_i) x^i$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$, por tanto, presentan conmutatividad respecto a suma

$(a_i + b_i) x^i = (b_i + a_i) x^i = b_i x^i + a_i x^i = |v_2\rangle + |v_1\rangle$

5) Sea $|0\rangle = a_i x^i$ con $a_i = 0$

$|0\rangle + |v\rangle = a_i x^i + b_i x^i = (a_i + b_i) x^i = (0 + b_i) x^i = b_i x^i = |v\rangle$

6) Sea $|-v_1\rangle = (-a_i) x^i$

$|-v_1\rangle + |v_1\rangle = (-a_i) x^i + (a_i x^i) = (-a_i + a_i) x^i = 0 x^i = |0\rangle$

7. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $|v\rangle = a_i x^i \in P_n$

$\alpha(\beta|v\rangle) = \alpha(\beta(a_i x^i)) = \alpha(\beta a_i x^i) = \alpha\beta a_i x^i$

$= (\alpha\beta)(a_i x^i) = (\alpha\beta)|v\rangle$

8. $(\alpha+\beta)|v\rangle = (\alpha+\beta)(a_i x^i) = (\alpha a_i + \beta a_i)x^i$

$= (\alpha a_i x^i + \beta a_i x^i) = \alpha|v\rangle + \beta|v\rangle$

9. $\alpha(|v_1\rangle + |v_2\rangle) = \alpha(a_i x^i + b_i x^i) = \alpha a_i x^i + \alpha b_i x^i$

$= \alpha|v_1\rangle + \alpha|v_2\rangle$

10. Sea $1 \in \mathbb{R}$

$1|v\rangle = 1(a_i x^i) = 1a_i x^i = a_i x^i = |v\rangle$

b) No sería un espacio vectorial ya que incumple la cerradura bajo producto por un escalar.

Contraejemplo: Sea $\alpha = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ y $|v\rangle = x = 0 + 1x$

$\alpha|v\rangle = \frac{1}{2}(0+1x) = 0 + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$, pero el coeficiente $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, por tanto $|v\rangle \notin P_n$ con $a_i \in \mathbb{Z}$.

c) I

1) $|0\rangle = 0x^i \in P_{n-1}$

2) $|v_1\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad |v_2\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$

$|v_1\rangle + |v_2\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in P_{n-1}$

$a_i + b_i = c_i \in \mathbb{R}$

3) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha|v\rangle = \alpha\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha a_i x^i \in P_{n-1}$

$\alpha a_i \in \mathbb{R}$

d) es subespacio

día | mes | año

II $S: \{a_i x^i \,/\, i = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$

1) $|0\rangle = 0x^i \in S$ ✓

2) $|v_1\rangle = a_i x^i,\ |v_2\rangle = b_i x^i \in S$

$|v_1\rangle + |v_2\rangle = a_i x^i + b_i x^i = (a_i + b_i)x^i = c_i x^i = c_{2n} x^{2n}$

$\in S$ ✓

3) $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha|v\rangle = \alpha(a_i x^i) = \alpha a_i x^i = \alpha a_{2n} x^{2n} \in S$ ✓

S es subespacio

III $S: \{x(a_i x^i) \,/\, i \in \mathbb{N}\}$

1) $|0\rangle = x(0x^i) = x0x^i = 0x^i \in S$ ✓

2) $|v_1\rangle = x(a_i x^i),\ |v_2\rangle = x(b_i x^i)$

$|v_1\rangle + |v_2\rangle = x(a_i x^i) + x(b_i x^i) = x(a_i x^i + b_i x^i)$

$= x((a_i + b_i)x^i) = x(c_i x^i) \in S$ ✓

3) $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha|v\rangle = \alpha(x(a_i x^i)) = x(\alpha a_i x^i) \in S$ ✓

S es subespacio

IV $S: \{(x-1)(a_i x^i) \,/\, i \in \mathbb{N}\}$

1) $|0\rangle = (x-1)0x^i = 0x^i \in S$ ✓

2) $|v_1\rangle = (x-1)(a_i x^i),\ |v_2\rangle = (x-1)(b_i x^i)$

$|v_1\rangle + |v_2\rangle = (x-1)(a_i x^i) + (x-1)(b_i x^i) = (x-1)(a_i x^i + b_i x^i)$

$= (x-1)((a_i + b_i)x^i) = (x-1)(c_i x^i) \in S$ ✓

3) $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha|v\rangle = \alpha(x-1)(a_i b_i) = (x-1)(\alpha a_i b_i) \in S$ ✓

S es subespacio

día | mes | año

Sección 2.2.4

6a) Sea $|a\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$, $|b\rangle = b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$, $|c\rangle = c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $|a\rangle + |b\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha} + b^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle$

$a^{\alpha} + b^{\alpha} = c^{\alpha} \in \mathbb{R}$ ya que $a^{\alpha}, b^{\alpha} \in \mathbb{R}$

$c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = |c\rangle \in V$

2) $\alpha|a\rangle = \alpha(a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) = \alpha a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle \in V$

$\alpha a^{\alpha} \in \mathbb{R}$

3) $(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = (a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) + c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$
$= (a^{\alpha} + b^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle + c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = ((a^{\alpha} + b^{\alpha}) + c^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle$
$= (a^{\alpha} + (b^{\alpha} + c^{\alpha}))|q_{\alpha}\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + (b^{\alpha} + c^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = |a\rangle +$
$(b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + c^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$

4) $|a\rangle + |b\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha} + b^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle$
$= (b^{\alpha} + a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = |b\rangle + |a\rangle$

5) Sea $|0\rangle = 0|q_{\alpha}\rangle = 0 + 0|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle$
$|0\rangle + |a\rangle = 0|q_{\alpha}\rangle + a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (0 + a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = |a\rangle$

6) Sea $|-a\rangle = (-a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = -a_0 + -a_1|q_1\rangle + -a_2|q_2\rangle + -a_3|q_3\rangle$
$|-a\rangle + |a\rangle = (-a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle + a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (-a^{\alpha} + a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = 0|q_{\alpha}\rangle$
$= |0\rangle$

7) $\alpha(\beta|a\rangle) = \alpha(\beta a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) = \alpha\beta a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (\alpha\beta)a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$
$= (\alpha\beta)|a\rangle$

8) $(\alpha + \beta)|a\rangle = (\alpha + \beta)a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (\alpha a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + \beta a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle)$
$= \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$

día | mes | año

a) $\alpha(|a\rangle+|b\rangle)=\alpha(a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle+b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle)=\alpha a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle+\alpha b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$
$=\alpha|a\rangle+\alpha|b\rangle$

10) Sea $1\in\mathbb{R}$

$1|a\rangle=1a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle=a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle=|a\rangle$

b) $|a\rangle=|b\rangle\odot|r\rangle=(b^0,\vec{b})\odot(r^0,\vec{r})=(b^0+b^1|q_1\rangle+b^2|q_2\rangle$
$+b^3|q_3\rangle)\odot(r^0+r_1|q_1\rangle+r_2|q_2\rangle+r_3|q_3\rangle$
$=(b^0r^0+b^0r_1|q_1\rangle+b_0r_2|q_2\rangle+b_0r_3|q_3\rangle+b^1|q_1\rangle r^0$
$+b_1|q_1\rangle r_1|q_1\rangle+b_1|q_1\rangle r_2|q_2\rangle+b_1|q_1\rangle r_3|q_3\rangle+b_2|q_2\rangle r^0$
$+b_2|q_2\rangle r_1|q_1\rangle+b_2|q_2\rangle r_2|q_2\rangle+b_2|q_2\rangle r_3|q_3\rangle$
$+b_3|q_3\rangle r_0+b_3|q_3\rangle r_1|q_1\rangle+b_3|q_3\rangle r_2|q_2\rangle+b_3|q_3\rangle r_3|q_3\rangle)$
$=b^0r^0+b^0\vec{r}+r^0\vec{b}+(-\vec{b}\cdot\vec{r})+\vec{b}\times\vec{r})$

$$b\times r=\begin{vmatrix}|q_1\rangle & |q_2\rangle & |q_3\rangle\\ b_1 & b_2 & b_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}=(b_2r_3-b_3r_2)|q_1\rangle + (b_3r_1-b_1r_3)|q_2\rangle + (b_1r_2-b_2r_1)|q_3\rangle$$

$|d\rangle=(b^0r^0-(\vec{b}\cdot\vec{r}),\ b^0\vec{r}+r^0\vec{b}+\vec{b}\times\vec{r})$ ✓

c) $|b\rangle\odot|r\rangle=b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle\odot r^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle=b^0r^0-b^ir^i+r^0b^i|q_i\rangle$
$+b^0r^i|q_i\rangle+\varepsilon^{ijk}b_jr_k$

Parte escalar:

$b^0r^0-b^ir^i=a|q_0\rangle=a$

Parte vectorial simetrica

$r^0b^j|q_j\rangle+b^0r^j|q_j\rangle=b^0r^j|q_j\rangle+r^0b^j|q_j\rangle$

Tomando $r^{\alpha}b^j+b^{\alpha}r^j=S^{(\alpha j)}\delta^0_{\alpha}$, aqui $\alpha=0$, portanto
se obtiene

día | mes | año

$S^{(0j)}\delta_0^0 = r^0 b_j + b^0 r_j$

Multiplicando $|q_j\rangle$

$S^{(0j)}\delta_0^0|q_j\rangle = (r^0 b_j + b^0 r_j)|q_j\rangle = r^0 b_j|q_j\rangle + b^0 r_j|q_j\rangle$

Parte vectorial antisimétrica

El término $\vec{b}\times\vec{r} = \epsilon_{ijk} b_j r^k$ es antisimétrico respecto a los índices i,j ya que $\epsilon_{jik} b_k$, por tanto, esta expresión se puede ver como $A^{[jk]} b_j r_k$ ya que esta representación del objeto antisimétrico lo tiene $A^{[jk]}$

Entonces se tiene que:

$|b\rangle\diamond|r\rangle = b^0 r^0 + (-\vec{b}\cdot\vec{r}) + r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r} = a|q_0\rangle + S^{(0j)}\delta_0^0|q_j\rangle + A^{[jk]} b_j r_k$

d) $a \leftrightarrow b^0 r^0 + (-\vec{b}\cdot\vec{r})$: Parte escalar

$S^{(j)} \leftrightarrow r^0 b_j + b^0 r_j$: Parte vectorial simétrica

$A^{[jk]} \leftrightarrow \epsilon_{ijk}$: Parte vectorial antisimétrica

El producto $|d\rangle$ no es ni vector ni pseudovector, ya que está compuesto de la suma de un escalar ($a|q_0\rangle$), un vector ($S^{(ij)}\delta_0^0$), este es vector ya que corresponde a la suma de dos vectores polares $\vec{b}, \vec{r}$ multiplicados por un escalar r^0, b^0 respectivamente, y un pseudovector ($A^{[jk]} b_j r_k$), ya que corresponde al producto $\vec{b}\times\vec{r}$ de dos vectores polares, correspondiente a un vector axial.

e) Tomando $|q_0\rangle = \sigma_0 = I$, $|q_1\rangle = -i\sigma_1$, $|q_2\rangle = -i\sigma_2$

$|q_3\rangle = -i\sigma_3$

$$|q_0\rangle \odot |q_0\rangle = I^2 = I$$

$$|q_1\rangle \odot |q_1\rangle = (-i\sigma_1)(-i\sigma_1) = -1\cdot I = -I = -|q_0\rangle = -1$$

$$|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = (-i\sigma_1)(-i\sigma_2) = -\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i&0\\0&+i\end{pmatrix}$$

$$= -i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = -i\sigma_3 = |q_3\rangle$$

$$|q_1\rangle \odot |q_3\rangle = -\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = -(-i\sigma_2)$$

$$= -|q_2\rangle$$

$$|q_2\rangle \odot |q_1\rangle = -\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix} = i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = -(-i\sigma_3)$$

$$= -|q_3\rangle$$

$$|q_2\rangle \odot |q_3\rangle = -\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = -i\sigma_1$$

$$= |q_1\rangle$$

$$|q_3\rangle \odot |q_1\rangle = -\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\+1&0\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix} = -i\sigma_2 = |q_2\rangle$$

día | mes | año

$$|q_3\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= i(-i\sigma_1) = -|q_1\rangle$$

Para $|q_0\rangle \odot |q_1\rangle = I(-i\sigma_1) = -i\sigma_1 = |q_1\rangle = (-i\sigma_1)I$

$= |q_1\rangle \odot |q_0\rangle$

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & a \\ -a & x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y & b \\ b & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ i\left[\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}\right] = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-a)(-i)\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$+(-y)(-i)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (-b)(-i)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= x\sigma_0 + (-a)(-i\sigma_1) + (-y)(-i\sigma_2) + (-b)(-i\sigma_3)$$

$$= x|q_0\rangle + (-a)|q_1\rangle + (-y)|q_2\rangle + (-b)|q_3\rangle$$

f) $$|q_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

$$|q_0\rangle \odot |q_0\rangle = I_4 I_4 = I_4$$

$$|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_3\rangle$$

$$|q_1\rangle \odot |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -|q_2\rangle$$

$$|q_2\rangle \odot |q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -|q_3\rangle$$

$$|q_2\rangle \odot |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = |q_1\rangle$$

$$|q_3\rangle \odot |q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = |q_2\rangle$$

$$|q_3\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -|q_1\rangle$$

$$|q_1\rangle \odot |q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$|q_2\rangle \odot |q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$|q_3\rangle \odot |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$|q_0\rangle \odot |q_i\rangle = I|q_i\rangle = |q_i\rangle I = |q_i\rangle$$

9) $\langle a|b\rangle$ $\vec{a}^* \odot b$ da como resultado un cuaternión, es decir, un vector y como el espacio de los cuaterniones no es conmutativo sobre la multiplicación, ya que $|q_1\rangle \odot |q_2\rangle = |q_3\rangle \neq -|q_3\rangle = |q_2\rangle \odot |q_1\rangle$ no es grupo abeliano, por lo tanto no es cuerpo, por lo que no está bien definido.

día | mes | año

h) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\langle a|b\rangle} - |q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle\right]$

$= \frac{1}{2}\left[|a^*\rangle \odot |b\rangle - |q_1\rangle \odot (|a^*\rangle \odot |b\rangle) \odot |q_1\rangle\right]$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} |q_1\rangle & |q_2\rangle & |q_3\rangle \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (+a_3b_2 - a_2b_3)|q_1\rangle + (a_1b_3 - a_3b_1)|q_2\rangle + (a_2b_1 - a_1b_2)|q_3\rangle$$

$|q_1\rangle = 0|q_0\rangle + 1|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle$

$|a^*\rangle \odot |b\rangle = (a^\alpha b^\alpha |q_0\rangle + a_0 b_i |q_i\rangle + b^0(-a_i)|q_i\rangle + (a_3b_2 - a_2b_3)|q_1\rangle$
$+ (a_1b_3 - a_3b_1)|q_2\rangle + (a_2b_1 - a_1b_2)|q_3\rangle)$
$= (a^\alpha b^\alpha |q_0\rangle + (a_0b_1 - b_0a_1 + a_3b_2 - a_2b_3)|q_1\rangle + (a_0b_2 - b_0a_2$
$+ a_1b_3 - a_3b_1)|q_2\rangle + (a_0b_3 - b_0a_3 + a_2b_1 - a_1b_2)|q_3\rangle)$

$|q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} = (b_0a_1 - a_0b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)|q_0\rangle + (a^\alpha b^\alpha |q_1\rangle)$
$+ \vec{|q_1\rangle} \times \vec{\widetilde{\langle a|b\rangle}}$

$$|q_1\rangle \times \widetilde{\langle a|b\rangle} = \begin{vmatrix} |q_1\rangle & |q_2\rangle & |q_3\rangle \\ 1 & 0 & 0 \\ \widetilde{\langle a|b\rangle}_1 & \widetilde{\langle a|b\rangle}_2 & \widetilde{\langle a|b\rangle}_3 \end{vmatrix} = 0|q_1\rangle + (-\widetilde{\langle a|b\rangle}_3)|q_2\rangle + \widetilde{\langle a|b\rangle}_2|q_3\rangle$$

$|q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} = (b_0a_1 - a_0b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)|q_0\rangle + a^\alpha b^\alpha |q_1\rangle$
$+ (b_0a_3 - a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1)|q_2\rangle + (a_0b_2 - b_0a_2 + a_1b_3 - a_3b_1)|q_3\rangle$

$|q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle} \odot |q_1\rangle = (-a^\alpha b^\alpha |q_0\rangle) + (b_0a_1 - a_0b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)|q_1\rangle$
$+ (\vec{|q_1\rangle \odot \widetilde{\langle a|b\rangle}}) \times \vec{|q_1\rangle}$

$=$

$$\begin{vmatrix} |q_1\rangle & |q_2\rangle & |q_3\rangle \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 0|q_1\rangle \\ v_3|q_2\rangle \\ -v_2|q_3\rangle \end{matrix}$$

$= -a^\alpha b^\alpha |q_0\rangle + (b_0 a_1 - a_0 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2)|q_1\rangle$
$+ (a_0 b_2 - b_0 a_2 + a_1 b_3 - b_1 a_3)|q_2\rangle + (a_0 b_3 - b_0 a_3 + a_2 b_1 - a_1 b_2)|q_3\rangle$

$\langle \tilde{a}|b\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \tilde{a}|b\rangle \odot |q_1\rangle = 2a^\alpha b^\alpha |q_0\rangle + 2(a_0 b_1 - b_0 a_1 + a_3 b_2$
$- a_2 b_3)|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle$

$\frac{1}{2}[\langle \tilde{a}|b\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \tilde{a}|b \odot |q_1\rangle] = \langle a|b\rangle = a^\alpha b^\alpha |q_0\rangle +$
$(a_0 b_1 - b_0 a_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3)|q_1\rangle$

Si $c = a_0 b_1 - b_0 a_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3$, entonces
$\langle a|b\rangle = a^\alpha b^\alpha |q_0\rangle + c|q_1\rangle \in \mathbb{C}$

1) $\langle a|a\rangle = (a^\alpha)^2 |q_0\rangle + 0|q_1\rangle = (a^\alpha)^2 \geq 0$
$\langle a|a\rangle = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \| |a\rangle \|^2$
Si $\langle a|a\rangle = 0$ quiere decir que $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$,
debido a que la cantidad a_i^2 es siempre positiva debido
a que $a_i \in \mathbb{R}$, entonces la única forma de que $\langle a|a\rangle = 0$
es que $a_i = 0$, es decir, $|a\rangle = |0\rangle$

2) $\langle a|b\rangle = a^\alpha b^\alpha |q_0\rangle + (a_0 b_1 - b_0 a_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3)|q_1\rangle$
$\langle b|a\rangle = b^\alpha a^\alpha |q_0\rangle + (b_0 a_1 - a_0 b_1 + b_3 a_2 - b_2 a_3)|q_1\rangle$
$\langle b|a\rangle^* = b^\alpha a^\alpha |q_0\rangle - (b_0 a_1 - a_0 b_1 + a_2 b_3 - b_2 a_3)|q_1\rangle$
$= b^\alpha a^\alpha |q_0\rangle + (a_0 b_1 - b_0 a_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3)|q_1\rangle = \langle a|b\rangle$ ✓

dia | mes | ano

3) $\alpha b + \beta c$; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $b, c \in \mathbb{H}$. Tomando $\alpha = a + bi$, $\beta = x + yi$

$\alpha b + \beta c = (a|q_0\rangle + b|q_1\rangle)(b_0|q_0\rangle + b_1|q_1\rangle + b_2|q_2\rangle + b_3|q_3\rangle) +$
$(x|q_0\rangle + y|q_1\rangle)(c_0|q_0\rangle + c_1|q_1\rangle + c_2|q_2\rangle + c_3|q_3\rangle)$
$= ab_0|q_0\rangle + ab_1|q_1\rangle + ab_2|q_2\rangle + ab_3|q_3\rangle$
$+ bb_0|q_1\rangle - bb_1 + bb_2|q_3\rangle + (-bb_3|q_2\rangle) + xc_0|q_0\rangle$
$+ xc_1|q_1\rangle + xc_2|q_2\rangle + xc_3|q_3\rangle + yc_0|q_1\rangle - yc_1|q_0\rangle$
$+ yc_2|q_3\rangle - yc_3|q_2\rangle$
$= (ab_0 - bb_1 + xc_0 - yc_1)|q_0\rangle + (ab_1 + bb_0 + xc_1 + yc_0)|q_1\rangle$
$+ (ab_2 - bb_3 + xc_2 - yc_3)|q_2\rangle + (ab_3 + bb_2 + xc_3$
$+ yc_2)|q_3\rangle$

$\langle a|\alpha b + \beta c\rangle = (a^0 ab_0 - a^0 bb_1 + a^0 xc_0 - a_0 yc_1 + a_1 ab_1 + a_1 bb_0$
$+ a_1 xc_1 + a_1 yc_0 + a_2 b_2 a - a_2 bb_3 + a_2 xc_2 - a_2 yc_3 + a_3 ab_3$
$+ a_3 bb_2 + a_3 xc_3 + a_3 yc_2)|q_0\rangle$
$+ (a_0 ab_1 + a_0 bb_0 + a_0 xc_1 + a_0 yc_0 - a_1 ab_0 + a_1 bb_1 - a_1 xc_0 + a_1 yc_1$
$+ a_3 ab_2 - a_3 bb_3 + a_3 xc_2 - a_3 yc_3 - a_2 ab_3 - a_2 bb_2 - a_2 xc_3$
$- a_2 yc_2)|q_1\rangle$
$= (a^0 ab_0 - a_0 bb_1 + a_1 ab_1 + a_1 bb_0 + a_2 b_2 a - a_2 bb_3 + a_3 ab_3$
$+ a_3 bb_2)|q_0\rangle + (a_0 ab_1 + a_0 bb_0 - a_1 ab_0 + a_1 bb_1 + a_3 ab_2$
$- a_3 bb_3 - a_2 ab_3 - a_2 bb_2)|q_1\rangle + (a_0 xc_0 - a_0 yc_1 + a_1 xc_1$
$+ a_1 yc_0 + a_2 xc_2 - a_2 yc_3 + a_3 xc_3 + a_3 yc_2)|q_0\rangle$
$+ (a_0 xc_1 + a_0 yc_0 - a_1 xc_0 + a_1 yc_1 + a_3 xc_2 - a_3 yc_3 - a_2 xc_3 - a_2 yc_2)$
$|q_1\rangle$
$= a[a^\dagger b^\alpha]|q_0\rangle + x[a^\dagger c^\alpha]|q_0\rangle + a[a_0 b_1 - b_0 a_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3]|q_1\rangle$

día mes año

$+b[-a_0b_1+a_1b_0-a_2b_3+a_3b_2]|q_0\rangle$

$+y[-a_0c_1+a_1c_0-a_2c_3+c_2a_3]|q_0\rangle$

$+x[a_0c_1-c_0a_1+a_3c_2-c_3a_2]|q_1\rangle$

$+b[a_0b_0+a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3]|q_1\rangle$

$+y[a_0c_0+a_0c_1-a_1c_2+a_2c]|q_1\rangle$

$=[a|q_0\rangle+b|q_1\rangle][a^*b^*|q_0\rangle+(a_0b_1-b_0a_1+a_3b_2-a_2b_3)|q_1\rangle]$

$+[x|q_0\rangle+y|q_1\rangle][a^*c^*|q_0\rangle+(a_0c_1-c_0a_1+a_3c_2-b_2a_3)|q_1\rangle]$

$=\alpha\langle a|b\rangle+\beta\langle a|c\rangle$

4) $\langle\alpha a+\beta b|c\rangle=\langle c|\alpha a+\beta b\rangle^*$ Por Propiedad 1 del P.I.

$=(\alpha\langle c|a\rangle+\beta\langle c|b\rangle)^*$ Por Propiedad 3 del P.I.

$=(\alpha\langle c|a\rangle)^*+(\beta\langle c|b\rangle)^*$ Por propiedad los complejos

$=\alpha^*\langle c|a\rangle^*+\beta^*\langle c|b\rangle^*$ " " " "

$=\alpha^*\langle a|c\rangle+\beta^*\langle b|c\rangle$ □

5) $\langle a|0\rangle=(a^*0|q_0\rangle)+(a_0(0)-(0)a_1+a_3(0)-(0)a_2)|q_1\rangle$

$=0|q_0\rangle+0|q_1\rangle=0$

$\langle 0|a\rangle=\langle a|0\rangle^*=0|q_0\rangle-0|q_1\rangle=0$ □

Sí es buen producto interno

día mes año

i) $n(|a\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^* \odot |a\rangle}$

$|a\rangle^* \odot |a\rangle = (a_0^2 + \vec{a}\cdot\vec{a})$, ya que

$a_0 a_i + a_0 a_i^* = a_0a_1 + a_0a_2 + a_0a_3 + a_0(-a_1) + a_0(-a_2)$
$+ a_0(-a_3) = 0$

$\vec{a}^* \times \vec{a} = \begin{vmatrix} |q_1\rangle & |q_2\rangle & |q_3\rangle \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0|q_1\rangle + 0|q_2\rangle$
$+ 0|q_3\rangle$

$\| |a\rangle \| = \sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

1) $\||a\rangle\| = \sqrt{a_\alpha^2}$ al $a_\alpha \in \mathbb{R}$, se sabe que $a_\alpha^2 \geq 0$ siempre, por tanto, la operación $\sqrt{a_\alpha^2}$ está definida y es positiva al trabajar en $\mathbb{R}$.

Para que $\||a\rangle\|=0$, entonces $a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$, y ya que cada $a_\alpha\in\mathbb{R}$, las cantidades $a_\alpha^2\geq 0$ siempre, por tanto, para que $a_\alpha^2=0$, necesariamente cada $a_\alpha=0$, entonces, si $\||a\rangle\|=0 \to |a\rangle = 0$

2) $\|\alpha|a\rangle\| = \sqrt{(\alpha a_0)^2+(\alpha a_1)^2+(\alpha a_2)^2+(\alpha a_3)^2}$, $\alpha\in\mathbb{R}$
$= \sqrt{(\alpha)^2(a_\alpha)^2} = |\alpha|\sqrt{(a_\alpha)^2} = |\alpha| \, \||a\rangle\|$

3) $\||a\rangle+|b\rangle\| = \sqrt{\langle a+b|a+b\rangle} \to \||a\rangle+|b\rangle\|^2 = \langle a+b|a+b\rangle$
$= \||a\rangle\|^2 + \||b\rangle\|^2 + \langle a|b\rangle + \langle b|a\rangle = \||a\rangle\|^2+\||b\rangle\|^2 + \langle a+b\rangle$
$+ \langle a|b\rangle^* = \||a\rangle\|^2 + \||b\rangle\| + 2Re(\langle a+b\rangle)$, Por propiedad de complejos
$2Re|\langle a|b\rangle| \leq 2|\langle a|b\rangle| \leq 2\||a\rangle\| \, \||b\rangle\|$
Por desigualdad de Cauchy-Schwarz

entonces: $\| |a\rangle + |b\rangle \|^2 \leq \| |a\rangle \|^2 + \| |b\rangle \|^2 + 2 \| |a\rangle \| \| |b\rangle \|$

$= (\| |a\rangle \| + \| |b\rangle \|)^2$. Aplicando raíz cuadrada en ambos lados.

$\| |a\rangle + |b\rangle \| \leq \| |a\rangle \| + \| |b\rangle \|$ - Desigualdad triangular

Si es buena definición de norma

j) $|\bar{a}\rangle = \dfrac{|a\rangle^*}{\| |a\rangle \|^2} = \dfrac{a_0 - a_i|q_i\rangle}{(a_2)^2} = \dfrac{a_0}{(a_2)^2} - \dfrac{a_i|q_i\rangle}{(a_2)^2}$

$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = \left(\dfrac{a_0^2}{(a_2)^2} + \dfrac{a_i^2}{(a_2)^2}\right)|q_0\rangle - \cancel{\dfrac{a_0\, a_i|q_i\rangle}{(a_2)^2}} + \cancel{\dfrac{a_0\, a_i|q_i\rangle}{(a_2)^2}}$

$+ 0|q_i\rangle = \dfrac{(a_2)^2}{(a_2)^2}|q_0\rangle = \underline{1|q_0\rangle}$

$$\vec{a} \times \vec{\bar{a}} = \begin{vmatrix} |q_1\rangle & |q_2\rangle & |q_3\rangle \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1/a_2^2 & -\dfrac{a_2}{a_2^2} & -\dfrac{a_3}{a_2^2} \end{vmatrix} = 0|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle$$

Si es el inverso de $|a\rangle$

k) Sea $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in V$

1) $|a\rangle \odot |b\rangle = (a_0 b_0 - a_i b_i)|q_0\rangle + (a_0 b_1 + b_0 a_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2)|q_1\rangle$
$+ (a_0 b_2 + b_0 a_2 + a_3 b_1 - a_1 b_3)|q_2\rangle + (a_0 b_3 + b_0 a_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1)|q_3\rangle$

Esto gracias al ejercicio b), entonces $|a\rangle \odot |b\rangle \in V$

2) $|a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle) = (a_0|q_0\rangle + a_1|q_1\rangle + a_2|q_2\rangle + a_3|q_3\rangle) \odot$
$[(b_0 c_0 - b_i c_i)|q_0\rangle + (b_0 c_1 + c_0 b_1 + b_2 c_3 - b_3 c_2)|q_1\rangle +$
$(b_0 c_2 + c_0 b_2 + b_3 c_1 - b_1 c_3)|q_2\rangle + (b_0 c_3 + c_0 b_3 + b_1 c_2 - b_2 c_1)|q_3\rangle$

2) Recordando que $|q_0\rangle = I$, $|q_i\rangle = -i\sigma_i$
donde σ_i son las matrices de Pauli
Definiendo una función $\varphi: \mathbb{V} \to M_2(\mathbb{C})$ como:
$\varphi(a^0, a^i) = a_0 I - i a_i \sigma_i$
Entonces, tomando $a_\alpha |q_\alpha\rangle$, $b_\alpha |q_\alpha\rangle \in \mathbb{V}$.
$\varphi(a_0, a_i) \cdot \varphi(b_0, b_j) = (a_0 I - i a_i \sigma_i)(b_0 I - i b_j \sigma_j)$
$= (a_0 b_0 I - i a_0 b_j \sigma_j - i b_0 a_i \sigma_i - (a_i \sigma_i)(b_j \sigma_j))$

$(a_i \sigma_i)(b_j \sigma_j) \to$ Definiendo el producto entre dos matrices de Pauli como $\sigma_i \sigma_j = \delta_i^j I + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k$
Luego $(a_i \sigma_i)(b_j \sigma_j) = a_i b_j \sigma_i \sigma_j = a_i b_j (\delta_i^j I + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k)$
$= a_i b_j \delta_i^j I + i a_i b_j \varepsilon_{ijk} \sigma_k = (a_i b_i) I + i (\varepsilon_{ijk} a_i b_j) \sigma_k$
Por lo tanto, $\varphi(a_0, a_i) \cdot \varphi(b_0, b_j) = (a_0 b_0 - a_i b_i) I - i (a_0 b_k + b_0 a_k + \varepsilon_{ijk} a_i b_j) \sigma_k$
Lo cual coincide con tener $\varphi(a_0, a_i) \odot \varphi(b_0, b_j)$ con
$|a\rangle \odot |b\rangle = (a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}, a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$
entonces $\varphi(|a\rangle \odot |b\rangle) = \varphi(|a\rangle) \varphi(|b\rangle)$
Sean $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle \in \mathbb{V}$
$\varphi((|a\rangle \odot |b\rangle) \odot |c\rangle) = \varphi(|a\rangle \odot |b\rangle) \cdot \varphi(|c\rangle) = (\varphi(|a\rangle) \varphi(|b\rangle))$
$\varphi(|c\rangle) = \varphi(|a\rangle)(\varphi(|b\rangle) \varphi(|c\rangle)) = \varphi(|a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle))$
Por tanto: $(|a\rangle \odot |b\rangle) \odot |c\rangle = |a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle)$
Esto ya que φ es inyectiva y asociativa debido a que tiene como base matrices 2×2, las cuales cumplen con esta asociatividad, heredando esta propiedad a φ

3) $\exists\ |\bar{a}\rangle \in \mathbb{V} : |\bar{a}\rangle = \dfrac{a^*}{\||a\rangle\|^2}$

$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = \dfrac{a_\alpha^2}{a_\alpha^2}|q_0\rangle + 0|q_i\rangle$ → Gracias al punto i)

$= 1|q_0\rangle$

$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = \dfrac{a_\alpha^2}{a_\alpha^2}|q_0\rangle \oplus |q_i\rangle = 1|q_0\rangle$

$|\bar{a}\rangle \odot |a\rangle = |a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = 1|q_0\rangle$

4) $\exists\ 1|q_0\rangle \in \mathbb{V} : 1|q_0\rangle = 1|q_0\rangle + 0|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle$

$|a\rangle \odot 1|q_0\rangle = 1a_0|q_0\rangle - \vec{a}\cdot\vec{1}\,|q_0\rangle + a_0\vec{1} + 1\vec{a} + \vec{a}\times\vec{1}$

Definiendo $\vec{a} = a_i|q_i\rangle$ y $\vec{1} = 1_i|q_i\rangle = 0|q_i\rangle$

Entonces

$|a\rangle \odot 1|q_0\rangle = a_0|q_0\rangle + a_i|q_i\rangle = a_\alpha|q_\alpha\rangle = |a\rangle$

$1|q_0\rangle \odot |a\rangle = 1a_0|q_0\rangle - \vec{1}\cdot\vec{a}\,|q_0\rangle + \vec{1}a_0 + 1\vec{a} + \vec{1}\times\vec{a}$

$= a_0|q_0\rangle + a_i|q_i\rangle = |a\rangle = |a\rangle \odot 1|q_0\rangle$

Sí es un cuerpo.

Tabla:

$\odot$	$\lvert q_0\rangle$	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
$\lvert q_0\rangle$	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_1\rangle$	-1	$\lvert q_3\rangle$	$-\lvert q_2\rangle$
$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_3\rangle$	-1	$\lvert q_1\rangle$
$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_1\rangle$	-1

1) Vamos a ver: $|||v'\rangle||^2 = |||v\rangle||$

$|||v'\rangle||^2 = |v'\rangle \odot |v'\rangle^* = (|a\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle) \odot (|a\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle)^*$

$= \left(\frac{|a\rangle^*}{||(a_\alpha)^2} \odot |v\rangle \odot |a\rangle\right) \odot \left(|a\rangle^* \odot |v\rangle^* \odot \frac{|a\rangle}{||(a_\alpha)^2}\right)$

Reorganizando gracias a la asociatividad

$= \frac{|a\rangle^*}{||(a_\alpha)^2} \odot |v\rangle \odot (|a\rangle \odot |a\rangle^*) \odot |v\rangle^* \odot \frac{|a\rangle}{(a_\alpha)^2}$

$= \left[\frac{|a\rangle^*}{(a_\alpha)^2} \odot |v\rangle \odot |v\rangle^* \odot \frac{|a\rangle}{(a_\alpha)^2}\right] (a_\alpha)^2$

$= \left(\frac{|a\rangle^*}{(a_\alpha)^2} \odot \frac{|a\rangle}{(a_\alpha)^2}\right) (a_\alpha)^2 \, |||v\rangle||^2$

$= \frac{(a_\alpha)^2 (a_\alpha)^2}{(a_\alpha)^2 (a_\alpha)^2} |||v\rangle||^2 = |||v\rangle||$

Por tanto, se conserva la norma.