día | mes | año

Ejercicio 3 sección 1.4.5

$$A_k^{i'} \tilde{A}_{i'}^{j} = \delta_k^{j} = \begin{bmatrix} \delta_1^1 & \delta_1^2 & \delta_1^3 \\ \delta_2^1 & \delta_2^2 & \delta_2^3 \\ \delta_3^1 & \delta_3^2 & \delta_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{1'}\tilde{A}_{1'}^{1} + A_1^{2'}\tilde{A}_{2'}^{1} + A_1^{3'}\tilde{A}_{3'}^{1} = \delta_1^1$$

$$A_2^{1'}\tilde{A}_{1'}^{1} + A_2^{2'}\tilde{A}_{2'}^{1} + A_2^{3'}\tilde{A}_{3'}^{1} = \delta_2^1$$

$$A_3^{1'}\tilde{A}_{1'}^{1} + A_3^{2'}\tilde{A}_{2'}^{1} + A_3^{3'}\tilde{A}_{3'}^{1} = \delta_3^1$$

$$A_1^{1'}\tilde{A}_{1'}^{2} + A_1^{2'}\tilde{A}_{2'}^{2} + A_1^{3'}\tilde{A}_{3'}^{2} = \delta_1^2$$

$$A_2^{1'}\tilde{A}_{1'}^{2} + A_2^{2'}\tilde{A}_{2'}^{2} + A_2^{3'}\tilde{A}_{3'}^{2} = \delta_2^2$$

$$A_3^{1'}\tilde{A}_{1'}^{2} + A_3^{2'}\tilde{A}_{2'}^{2} + A_3^{3'}\tilde{A}_{3'}^{2} = \delta_3^2$$

$$A_1^{1'}\tilde{A}_{1'}^{3} + A_1^{2'}\tilde{A}_{2'}^{3} + A_1^{3'}\tilde{A}_{3'}^{3} = \delta_1^3$$

$$A_2^{1'}\tilde{A}_{1'}^{3} + A_2^{2'}\tilde{A}_{2'}^{3} + A_2^{3'}\tilde{A}_{3'}^{3} = \delta_2^3$$

$$A_3^{1'}\tilde{A}_{1'}^{3} + A_3^{2'}\tilde{A}_{2'}^{3} + A_3^{3'}\tilde{A}_{3'}^{3} = \delta_3^3$$

pero $A_k^{i'} \tilde{A}_{i'}^{j} = 1$ si $i' = k = j$, de lo contrario su valor es 0, por tanto

$$A_1^{1'}\tilde{A}_{1'}^{1} = A_2^{2'}\tilde{A}_{2'}^{2} = A_3^{3'}\tilde{A}_{3'}^{3} = \delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = 1,$$

entonces: $A_k^{i'} \tilde{A}_{i'}^{j} = \delta_k^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En el caso especificado

$$A_k^{i'} \tilde{A}_{i'}^{j} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \quad = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi & -\operatorname{sen}\phi\cos\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\phi & 0 \\ -\cos\phi\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\phi & \operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_k^j$$

• Sean dos sistemas de coordenadas ortonormales e_i y e_i', $\cos\theta_{ij} = e_i' \cdot e_j$ es la proyección de cada vector de la base nueva sobre la original, pudiendo escribir cada nuevo vector e_i' como combinación lineal de la base anterior de la forma $e_i' = A_j^i e_j$, donde cada componente a_{ij} de A_j^i es $a_{ij} = \cos\theta_{ij}$, y, conociendo que $A_k^i \tilde{A}_i^k = \delta_k^i = I$ se tiene que:

$e_1' = A_1^1 e_1 + A_2^1 e_2 + A_3^1 e_3$, donde $A_1^i = e_i' \cdot e_1 = \cos\theta_{i1}$

$e_1' \cdot e_1' = (A_1^1 e_1 + A_2^1 e_2 + A_3^1 e_3) \cdot (A_1^1 e_1 + A_2^1 e_2 + A_3^1 e_3)$

$= A_i^1 A_j^1 (e_i \cdot e_j)$, como e_i es ortonormal entonces $e_i \cdot e_j = \delta_i^j$

Entonces $e_1' \cdot e_1' = (A_i^1)^2 = (A_1^1)^2 + (A_2^1)^2 + (A_3^1)^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$

y como e_1' pertenece a una base ortonormal entonces $e_1' \cdot e_1' = 1 \rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ $\square$

Ejercicio 4 sección 1.4.5

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

• $(x,y) \rightarrow (-y, x)$ $\quad A_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 1 \rightarrow$ transformación de rotación

$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Es ortogonal y se transforman como verdaderas componentes

• $(x,y) \rightarrow (x, -y)$ $\quad A_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = -1 \rightarrow$ transformación de reflexión

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Es ortogonal y se transforman como verdaderas componentes.

día | mes | año

$(x,y) \to (x-y,\ x+y)$

$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = 2$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

No es ortogonal no transforma como verdaderas componentes de vectores

$(x,y) \to (x+y,\ x-y)$

$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det(A) = -2$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

No transforma como verdadera componente

día | mes | año

Ejercicio 2 sección 1.§7

2a $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

$(\nabla(\phi\psi))^i = \partial^i(\phi\psi) \doteq \phi\partial^i\psi + \psi\partial^i\phi = \phi(\nabla\psi)^i + \psi(\nabla\phi)^i$

Por lo tanto $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

2d. $\nabla\cdot(\nabla\times a) = \partial_i(\varepsilon^{ijk}\partial_j a_k) = \varepsilon^{ijk}\partial_i\partial_j a_k$

ε^{ijk} es antisimétrico, mientras que $\partial_i\partial_j a_k$ es simétrico respecto a i y j, por tanto se anulan.

$\nabla\cdot(\nabla\times a) = 0$

$\nabla\times(\nabla\cdot a) \Rightarrow$ No está definido ya que $\nabla\cdot a$ es un escalar y la operación del rotacional $\nabla\times(\cdot)$ se debe efectuar entre vectores.

2.f. $\nabla\times(\nabla\times a) = \nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a$

$(\nabla\times(\nabla\times a))_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\nabla\times a)_k = \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon^{klm}\partial^l a_m)$

$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{klm}\partial_j\partial^l a_m = \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmk}\partial_j\partial_l a^m$

$= (\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l)(\partial_j\partial_l a^m)$

$= \delta_i^l\delta_j^m\partial_j\partial_l a^m - \delta_i^m\delta_j^l\partial_j\partial_l a^m$

$= \delta_i^l\partial_l\delta_j^m\partial_j a_m - \delta_i^m a^m\delta_j^l\partial_j\partial_l$

$= \partial_i\partial_j a_j - a_i\partial_j\partial_j$

$= \partial_i(\partial_j a_j) - \partial_j\partial_j a_i = \nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a \quad \square$

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{lmk}$

día | mes | año

Ejercicio 2 sección 1.6.5

Elevando al cubo $\cos(3\theta) + i\,\text{sen}(3\theta) = (\cos\theta + i\,\text{sen}(\theta))^3$

$\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta - i\,\text{sen}^3\theta$

Igualando parte real e imaginaria

a. $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta$

b. $\text{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta$ $\square$

Ejercicio 5 sección 1.6.5

a) $z = \sqrt{2i} = \sqrt{2}\sqrt{i} = \sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right)}$

n raíces $\to z^{1/n} = 2^{1/2n} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{}\right)} = 2^{1/2n} e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\pi k}{n}\right)}$

b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$ sea $z = 1-\sqrt{3}i = 1-\sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{1+3} = 2$

$\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3 = \frac{5\pi}{3}$

$z = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)}$

$z = \sqrt{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)}} = 2^{1/2} e^{i\left(\frac{5\pi}{6}+k\pi\right)}$

n raíces $\to 2^{1/2n} e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{6}+k\pi}{n}\right)}$

c) $(-1)^{1/3}$ sea $z=-1 \to z = e^{i(\pi+2k\pi)}$

$(-1)^{1/3} = \left(e^{i(\pi+2k\pi)}\right)^{1/3} = e^{i\left(\pi/3+\frac{2}{3}k\pi\right)}$

n raíces $\to e^{i\left(\frac{\pi/3+2/3\,k\pi}{n}\right)}$

d) $8^{1/6}$ sea $z = 8 \to z = 8e^{i(2k\pi)}$

$8^{1/6} = 8^{1/6} e^{i(k\pi/3)}$

n raíces $\to 8^{1/6n} e^{\frac{ik\pi}{3n}}$

e) $\sqrt{-8-8\sqrt{3}i}$ sea $z = -8-8\sqrt{3}i$

día mes año

$|z| = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16$

$\theta = \arctan\left(+\frac{8\sqrt{3}}{8}\right) = \arctan(+\sqrt{3}) = \pi/3$

Pero está en el tercer cuadrante $\rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

$z = 16e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi k\right)}$

$\sqrt{-8 - 8\sqrt{3}i} = 4e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}\right)}$

n raíces $\rightarrow z^{1/n} = 2^{4/n} e^{i\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi k}{2n}\right)}$

Ejercicio 6 Sección 1.6.5

a) $\log(-ie) = \log\left(ee^{i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}\right) = 1 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

Valor principal $\rightarrow 1 - \frac{\pi i}{2}$

b) $\log(1-i) = \log\left(\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)}\right) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ Valor Principal $= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi i}{4}$

c) $\log(e) = \log\left(ee^{i(2\pi k)}\right) = 1 + i2k\pi$

d) $\log(i) = \log\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}\right) = \cancel{\ln(1)}^{0} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)$