CEROS Y POLOS

CERO

z_0 es un cero de una función f si $f(z_0) = 0$.

CERO DE ORDEN *n*

Una función analítica f tiene un cero de orden n en z_0 si

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \quad f''(z_0) = 0, \qquad \dots \quad , \qquad f^{(n-1)}(z_0) = 0$$

pero

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

CERO DE PRODUCTOS

Si

$$f(z) = h(z)g(z)$$

donde

- h y g son analíticas en z_0.
- h tiene un cero de orden m en z_0.
- g tiene un cero de orden p en z_0.

Entonces f tiene un cero de orden $n = m + p$ en z_0.

CERO DE COCIENTES

Si

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

donde

- h y g son analíticas en z_0.
- h tiene un cero de orden n en z_0.
- $g(z_0) \neq 0$.

Entonces f tiene un cero de orden n en z_0.

Encuentre la posición y el orden de los ceros de las siguientes funciones:

225. $\boldsymbol{f(z) = cos(z)}$

227. $\boldsymbol{f(z) = z^3 sen(z)}$

226. $\boldsymbol{f(z) = \frac{e^z - 1}{z}}$

---

225. $\boldsymbol{f(z) = cos(z)}$ función entera

$$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{iz} + e^{-iz} = 0 \text{ multiplicando por } e^{iz}$$

$$e^{i2z} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i2z} = -1 \quad \Rightarrow \quad e^{i2z} = 1e^{i(\pi + 2k\pi)}$$

$$2z = \pi + 2k\pi$$

$$cos(z) \text{ se anula en } z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Como $f'(z) = -sen(z) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -sen\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$ entonces

$$\boxed{f \text{ tiene ceros de orden 1 en } z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

<u>Los ceros de $cos(z)$ son todos reales (están todos sobre el eje x)</u>

---

227. $\boldsymbol{f(z) = \underbrace{z^3}_{h(z)} \underbrace{sen(z)}_{g(z)}}$

"ceros de productos"

$h(z) = z^3$, $g(z) = sen(z)$

h y g son funciones enteras

$h(z) = z^3 \quad \Rightarrow \quad h(0) = 0$, h tiene un cero en $z = 0$

$h'(z) = 3z^2 \quad \Rightarrow \quad h'(0) = 0$

$h''(z) = 6z \quad \Rightarrow \quad h''(0) = 0$

$h'''(z) = 6 \quad \Rightarrow \quad h'''(0) \neq 0$

<u>h tiene un cero de orden $m = 3$ en $z = 0$</u>

$$g(z) = sen(z)$$

Se buscan los ceros de $sen(z)$ haciendo:

$$sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = 0 \text{ multiplicando por } e^{iz}$$

$$e^{i2z} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{i2z} = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{i2z} = 1e^{i(0+2k\pi)}$$

$$2z = 0 + 2k\pi$$

$$sen(z) \text{ se anula en } z = k\pi \quad , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Como $g^{'}(z) = cos(z) \Rightarrow g^{'}(k\pi) = cos(k\pi) \neq 0$ $,k \in \mathbb{Z}$ entonces:

<u>g tiene ceros de orden p $= 1$ en $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$</u>

<u>Conclusión</u>

<u>f tiene un cero de orden $n = \overbrace{3}^{m} + \overbrace{1}^{p} = 4$ en $z = 0$</u> (ya que tanto h como g tienen un cero en $z = 0$) y <u>tiene ceros de orden $n = 1$ en $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$</u> (ya que sólo g tiene ceros en $z = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$)

---

226. $\boldsymbol{f(z) = \dfrac{\overbrace{e^z - 1}^{h(z)}}{\underbrace{z}_{g(z)}}}$

"ceros de cocientes"
$h(z) = e^z - 1$ entera
$g(z) = z$ entera

Para obtener los ceros de h se hace:

$$h(z) = e^z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^z = 1 \quad \Rightarrow \quad z = log(1)$$

$$z = ln(1) + i2k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$$

<u>h tiene ceros en $z = i2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$</u>

Como $h^{'}(z) = e^z \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$ entonces:

<u>h tiene ceros de orden p $= 1$ en $z = i2k\pi, k \in \mathbb{Z}$</u>

Ya que para $k = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow h(0) = g(0) = 0$, o sea que $\nexists\ f(0)$ (f no está definida en $z = 0$) y como

$$\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{e^z-1}{z}=\lim_{z\longrightarrow 0}\frac{e^z}{1}=1$$

entonces $\underline{z=0 \text{ es punto singular evitable de } f}$.

Conclusión

f tiene ceros de orden $n=1$ en $z=i2k\pi, k=\pm1,\pm2,\ldots$ ya que $g(i2k\pi)\neq 0$ si $k=\pm1,\pm2,\ldots$

POLO

Un polo z_0 de una función f es un punto singular en donde

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

O sea que

$$|f(z)|\longrightarrow\infty \text{ cuando } z\to z_0 \text{ desde cualquier dirección}$$

POLO DE ORDEN *n*

POLO DE COCIENTES

Si

$$f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$$

donde

- h y g son analíticas en z_0.
- h tiene un cero de orden m en z_0.
- g tiene un cero de orden p $(con\ p>m)$ en z_0.

Entonces f tiene un polo de orden $n=p-m$ en z_0.

Encuentre la posición y el orden de los polos de las siguientes funciones:

231. $\boldsymbol{f(z)=\frac{(z-1)^2}{(z-3)(z-2)^2(z-1)}}$

234. $\boldsymbol{f(z)=\frac{z}{z-sen(z)}}$

232. $\boldsymbol{f(z)=\frac{e^{2z}}{z^2-z+1}}$

235. $\boldsymbol{f(z)=\frac{cosh(z)-1}{senh(z)-sen(z)}}$

---

231. $\boldsymbol{f(z)}=\dfrac{\overbrace{\boldsymbol{(z-1)^2}}^{h(z)}}{\underbrace{\boldsymbol{(z-3)(z-2)^2(z-1)}}_{g(z)}}$

"Polo de cocientes"

Como

$$\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{(z-3)(z-2)^2(z-1)}=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{(z-3)(z-2)^2}=0$$

Entonces $\underline{z=1 \text{ es punto singular evitable de } f.}$

$h(z)=(z-1)^2$ entera

$g(z)=(z-3)(z-2)^2(z-1)$ entera

Como g tiene:

- $\underline{\text{un cero de orden } p=1 \text{ en } z=3.}$
- $\underline{\text{un cero de orden } p=2 \text{ en } z=2.}$
- un cero de orden 1 en $z=1$ (punto singular evitable de f).

y dado que h no tiene ceros coincidentes con los ceros g (excepto para $z=1$ punto singular evitable de f) de modo que $\underline{m=0 \text{ tanto para } z=2\,,3}$ entonces:

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ tiene en } z=3 \text{ un polo de orden } n=p-m=1-0=1 \text{ (simple)} \\ y \text{ en } z=2 \text{ un polo de orden } n=p-m=2-0=2. \end{array}}$$

---

234. $\boldsymbol{f(z) = \dfrac{\overbrace{z}^{h(z)}}{\underbrace{z - sen(z)}_{g(z)}}}$

"Polo de cocientes"

$h(z) = z \quad , \quad h(0) = 0$

$h^{'}(z) = 1 \quad , \quad h^{'}(0) = 1 \neq 0$

<u>h tiene un cero de orden $m = 1$ en $z = 0$</u>

$g(z) = z - sen(z) \quad , \quad g(0) = 0$

$g^{'}(z) = 1 - cos(z) \quad , \quad g^{'}(0) = 0$

$g^{''}(z) = sen(z) \quad , \quad g^{''}(0) = 0$

$g^{'''}(z) = cos(z) \quad , \quad g^{'''}(0) = 1 \neq 0$

<u>g tiene un cero de orden $p = 3$ en $z = 0$</u>

$\boxed{f \text{ tiene un polo de orden } n = p - m = 3 - 1 = 2 \text{ en } z = 0}$

---

232. $\boldsymbol{f(z) = \dfrac{\overbrace{e^{2z}}^{h(z)}}{\underbrace{z^2 - z + 1}_{g(z)}}}$

"Polo de cocientes"

$h(z) = e^{2z} \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$

$g(z) = z^2 - z + 1$

Se buscan los ceros de g haciendo:

$z^2 - z + 1 = 0$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$g^{'}(z) = 2z - 1 \quad , \quad g^{'}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \neq 0$$

$\boxed{f \text{ tiene polos de orden 1 (simples) en } z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i}$

---

235. $f(z) = \dfrac{\overbrace{cosh(z)-1}^{h(z)}}{\underbrace{senh(z)-sen(z)}_{g(z)}}$

"Polo de cocientes"

$h(z) = cosh(z) - 1 \quad , \quad h(0) = cosh(0) - 1 = 0$
$h^{'}(z) = senh(z) \quad , \quad h^{'}(0) = 0$
$h^{''}(z) = cosh(z) \quad , \quad h^{''}(0) = 1 \neq 0$

<u>h tiene un cero de orden $m = 2$ en $z = 0$</u>

$g(z) = senh(z) - sen(z) \quad , \quad g(0) = 0 - 0 = 0$
$g^{'}(z) = cosh(z) - cos(z) \quad , \quad g^{'}(0) = 1 - 1 = 0$
$g^{''}(z) = senh(z) + sen(z) \quad , \quad g^{''}(0) = 0 - 0 = 0$
$g^{'''}(z) = cosh(z) + cos(z) \quad , \quad g^{'''}(0) = 1 + 1 = 2 \neq 0$

<u>g tiene un cero de orden $p = 3$ en $z = 0$</u>

$\boxed{f \text{ tiene un polo de orden } n = p - m = 3 - 2 = 1 \ (simple) \text{ en } z = 0}$

<u>CÁLCULO DE RESIDUOS EN LOS POLOS DE $f(z)$</u>

Cuando z_0 es un **polo** de una función f para obtener el residuo en dicho punto singular no es necesario expandir f en una serie de Laurent en z_0.

<u>Residuo en un polo simple</u>

Si f tiene un **polo simple** en $\boldsymbol{z_0}$, entonces

$$\boxed{Res(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]}$$

El cálculo del residuo mediante este límite en algunas ocasiones puede resultar tedioso. Sin embargo, en particular cuando f viene expresada como un cociente

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

con h y g analíticas en z_0, si $h(z_0) \neq 0$ y si g tiene un cero de orden 1 en z_0 de modo que f tiene un **polo simple** en $z = z_0$, se puede utilizar la siguiente **fórmula alternativa** para el cálculo del residuo

$$\boxed{Res(f(z), z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}}$$

Residuo en un polo de orden *n*

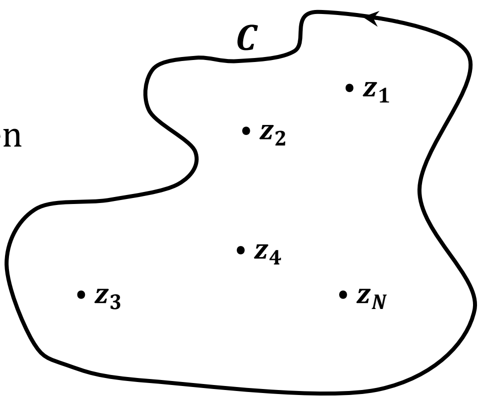
Si f tiene un **polo de orden *n*** en $\boldsymbol{z_0}$, entonces

$$\boxed{Res(f(z), z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \right\}}$$

TEOREMA DE LOS RESIDUOS

Si

- $\boldsymbol{C}$ es un contorno cerrado, simple, rectificable y orientado positivamente.
- $\boldsymbol{f}$ es analítica sobre $\boldsymbol{C}$ y en su interior, excepto en una cantidad finita $\boldsymbol{N}$ de puntos singulares $\boldsymbol{z_k}$ $(\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots, N})$ interiores a $\boldsymbol{C}$.



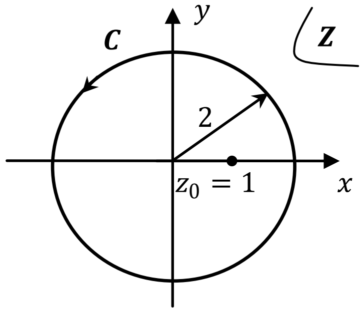
Entonces

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Res(f(z), z_k)$$

CÁLCULO DE INTEGRALES APLICANDO EL MÉTODO DE LOS RESIDUOS

Empleando el teorema de los residuos obtenga el valor de las siguientes integrales:

247. $\oint_C \frac{z}{z-1}\,dz,\ con\ C: |z| = 2$



$f(z) = \frac{z}{z-1}$

f tiene un polo simple (de orden 1) en $z_0 = 1$

interior a C.

Luego por el teorema de los residuos:

$$\oint_C \frac{z}{z-1}\,dz = 2\pi i\ \overbrace{Res\left(f(z), \overbrace{1}^{z_0}\right)}^{\sum residuos}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to \underbrace{1}_{z_0}} \left[\overbrace{(z-1)}^{z - z_0} \overbrace{\left(\frac{z}{z-1}\right)}^{f(z)} \right] = 2\pi i \lim_{z\to 1}[z] = 2\pi i[1]$$

$$\boxed{\oint_C \frac{z}{z-1}\,dz = 2\pi i}$$

El residuo en el polo simple $z_0 = 1$ de f se puede calcular también utilizando

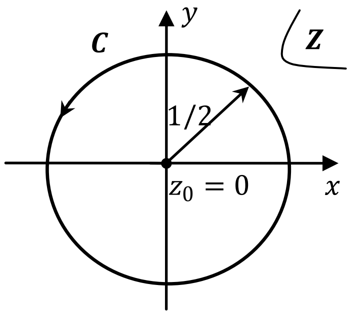
$$Res(f(z), z_0) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

donde $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)} = \frac{z}{z-1}$ (con $h(1) \neq 0$), es decir:

$$Res(f(z), 1) = \left[\frac{h(z)}{g'(z)}\right]_{z=1} = \left[\frac{z}{1}\right]_{z=1} = 1$$

---

251. $\oint_C z^2 e^{1/z}\,dz,\ con\ C: |z| = \frac{1}{2}$



$f(z) = z^2 e^{1/z}$

f tiene un punto singular esencial en $z_0 = 0$ interior a C.

Por lo tanto para obtener el residuo en $z_0 = 0$ hay que

obtener la serie de Laurent de f:

$$f(z) = z^2 e^{1/z} = z^2 \overbrace{\left[1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots\right]}^{Serie\ de\ Laurent\ de\ e^{1/z}\,alrededor\ de\ z_0=0}$$

$$f(z) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \overbrace{\frac{1}{3!}}^{b_1}\frac{1}{z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots \quad , \qquad z \neq 0$$

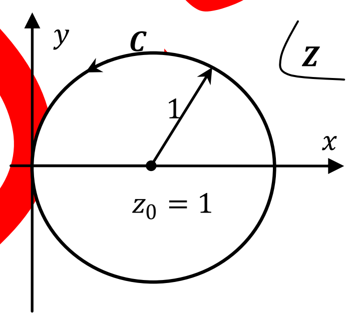
$$\oint_C z^2 e^{1/z}\ dz = 2\pi i\, Res(f(z), 0) = 2\pi i\left(\frac{1}{3!}\right)$$

$$\boxed{\oint_C z^2 e^{1/z}\ dz = \frac{\pi}{3} i}$$

---

252. $\oint_C \frac{1}{e^{z-1}(z-1)^2}\, dz,\ con\ C: |z-1| = 1$

$$f(z) = \frac{1}{e^{z-1}(z-1)^2} = \frac{e^{1-z}}{(z-1)^2}$$



f tiene un polo de orden $n = 2$ en $z_0 = 1$

interior a C.

Luego por el teorema de los residuos:

$$\oint_C \frac{1}{e^{z-1}(z-1)^2}\, dz = 2\pi i\, Res(f(z), 1)$$

$$= 2\pi i \overbrace{\underbrace{\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left\{\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-1)^2\frac{e^{1-z}}{(z-1)^2}\right]\right\}}_{\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]\right\}}}^{Res(f(z),1)}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1}\left\{\frac{d}{dz}[e^{1-z}]\right\}$$

$$= 2\pi i \lim_{z\to 1}\{-e^{1-z}\}$$

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{e^{z-1}(z-1)^2}\, dz = -2\pi i}$$

---

254. $\oint_C \frac{e^z}{cosh(z)}\,dz,\ \ con\ \ C\!: |z| = 5$

$$f(z) = \frac{e^z}{cosh(z)}$$

Para obtener los puntos singulares de f se buscan los ceros $cosh(z)$ que son los polos de f:

$$cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0 \ \ \Rightarrow \ \ e^z + e^{-z} = 0 \ \ multiplicando\ por\ e^z$$

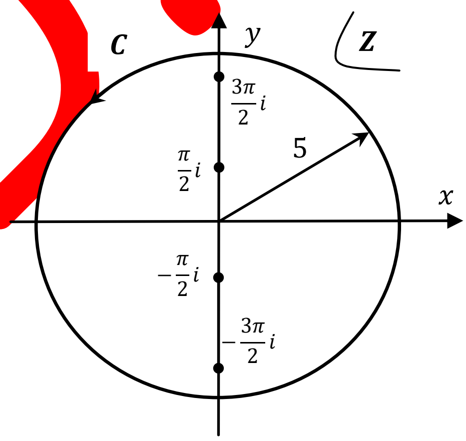
$$e^{2z} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2z} = -1$$

$$2z = log(-1)$$

$$z = \frac{1}{2}log(-1) = \frac{1}{2}[ln(1) + i(\pi + 2k\pi)]$$

$$z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad , \ k \in \mathbb{Z}\ polos\ simples\ de\ f$$

$$\left.\begin{aligned} k &= 0, \quad z = \frac{\pi}{2}i \\ k &= 1, \quad z = \frac{3\pi}{2}i \\ k &= -1, \quad z = -\frac{\pi}{2}i \\ k &= -2, \quad z = -\frac{3\pi}{2}i \end{aligned}\right\} \ \textit{\textbf{Polos (simples) de f interiores a C}}$$



Se puede demostrar que el residuo en cualquier polo de f tiene el mismo valor, esto es:

$$Res(f(z), z_k) = \frac{h(z_k)}{g'(z_k)} = \frac{e^{z_k}}{senh(z_k)} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}}{senh\left(i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right)}$$

$$= \frac{cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}{\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}}{2}}$$

$$=\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{2}}$$

$$=\frac{\overbrace{cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}^{=0}+isen\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{isen\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}=\frac{isen\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{isen\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}=1\ ;\quad k\in\mathbb{Z}$$

Luego por el teorema de los residuos:

$$\oint_C \frac{e^z}{cosh(z)}\,dz=2\pi i\left[\overbrace{\underbrace{Res\left(f(z),\frac{\pi}{2}i\right)}_{=1}+\underbrace{Res\left(f(z),\frac{3\pi}{2}i\right)}_{=1}+\underbrace{Res\left(f(z),-\frac{\pi}{2}i\right)}_{=1}+\underbrace{Res\left(f(z),-\frac{3\pi}{2}i\right)}_{=1}}^{\sum residuos}\right]$$

$$\boxed{\oint_C \frac{e^z}{cosh(z)}\,dz=8\pi i}$$