Notas (1): Repaso de conjuntos

En estas notas haremos un breve repaso sobre las nociones básicas de la *Teoría de Conjuntos*, con el objetivo de introducir la notación elemental y suficiente para el estudio de *funciones.*

Conjuntos.
En el contexto de esta materia, un *conjunto* es una colección o listado de objetos abstractos distinguibles entre sí. Nos referiremos como *elementos* a los objetos de un conjunto dado.

En general, indicaremos los conjuntos con letras mayúsculas A, B, $C\ldots$ y los elementos de los conjutnos con letras minúsculas a, b, $c\ldots$ Para indicar que un objeto a es un elemento de un conjunto A, usamos la notación $x \in A$ y leemos x pertenece al conjunto A. Si un objeto x no es un elemento de A, escribimos $x \notin A$ y leemos x *no* pertenece al conjunto A.

Cuando trabajamos con conjutnos, se debe indicar de manera precisa cuáles son sus elementos. Esto lo haremos de dos maneras: por *extensión* y/o por *comprensión*.

- *Extensión*: dar un listado explícito de los elementos de un conjunto.
- *Comprensión*: describir los elementos de un conjunto a través de una o más propiedades.

1. Ejemplos de conjuntos definidos por extensión.

(a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
(b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
(c) $C = \{2, 4, 6, 8, 10\ldots\}$.
(d) $D = \{10, 20, 30, 40, 50\ldots\}$.
(e) $E = \{2, 4, 2, 1, 0, 3, 1, 0\}$.
(f) $F = \{3, 5, 7, 11, 13\}$.

2. Ejemplos de conjuntos definidos por comprensión.

(a) $X = \{$número naturales pares$\}$.
(b) $Y = \{$enteros impares$\}$.
(c) $U = \{$múltiplos enteros del número 5$\}$
(d) $W = \{$múltiplos naturales del número 10$\}$.
(e) $Z = \{$todos los números racionales entre 0 y 1$\}$.

Ahora, haremos algunas observaciones sobre los ejemplos dados.

- Los conjuntos A y E son los mismos. Es decir, en la descripción de conjutnos el orden de los elementos o la repetición de los elementos no tienen ninguna relevancia.
- En los conjutnos C y D usamos puntos suspensivos y entendemos que los elementos de tales conjuntos siguen infinitamenete mientras sean del mismo tipo.
- Los conjuntos C y X son los mismos. Es decir, un conjunto puede estar difinido por extensión y por comprensión.
- Podemos afirmar que:
  - 18, 224, 2020 $\in C$, pues son número pares, y luego, también pertenecen a X.
  - $\frac{1}{3}$, 0,43, $\frac{2}{11} \in Z$, pues son números racionales entre 0 y 1.
  - -7, -19, 25, 337 $\in Y$, pues son enteros impares.
  - $11 \notin A$, pues no aparece en el listado del conjunto.
  - 3, 11, $\frac{1}{2} \notin C$, pues 3 y 11 no son pares y $\frac{1}{2}$ no es natural.
  - $25 \notin W$, pues 25 no es múltiplo de 10.

Subconjuntos.

Diremos que un conjunto A es un *subconjunto* de un conjunto B, si cada elemento de A es a su vez un elemento de B. En tal caso, escribiremos $A \subset B$, o también $A \subseteq B$. Cuando un conjunto A no es un subconjunto de B, escribimos $A \not\subset B$.

Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$. En tal caso, escribimos $A = B$. Si dos conjutnos A y B son distintos, escribimos $A \neq B$.

Siguiendo con los ejemplos antes dados.

- $C = X$ y $E = A$ como ya habíamos observado. También $D = W$.
- $W \subset U$ pero $U \not\subset W$.
- $D \subset C$ pero $C \not\subset D$.
- Podemos afirmar que: $A \neq C$, $Z \neq W$, etc.

Conjuntos especiales.

Existen dos tipos de conjuntos especiales que trataremos en la materia.

- El *conjunto vacío*: es el conjunto que no contiene ningún elemento y es denotado por el símbolo $\emptyset$.
- *Singulete*: son los conjuntos conteniendo exactamente un elemento.

A lo largo de la materia nos encontraremos en numerosas ocasiones con estas dos clases de conjuntos. Por ejemplo, cuando encontremos soluciones de ecuaciones o inecuaciones, muchas veces el conjunto solución será un solo número,“singulete”; o ningún número, “vacío”.

También, usaremos una notación común para los conjuntos de números más usuales en la materia.

- *Números naturales*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
- *Números enteros*: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- *Números racionales*: $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}$ tales que $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}\}$.
- *Números reales*: $\mathbb{R}$.

Operaciones entre conjuntos.

En esta parte repasaremos las operaciones básicas entre conjuntos: *unión*, *intersección* y *diferencia*.

Unión.

La *unión* entre dos o más conjuntos es un nuevo conjunto formado por todos los elementos de todos los conjuntos involucrados en la unión. Usamos el símbolo“$\cup$” para referirnos a la unión entre conjuntos.

Siguiendo con los ejemplos antes dados.

- $B \cup E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Si también consideramos $I = \{\text{naturales impares}\}$, entonces $I \cup X = \mathbb{N}$.
- $D \cup C = C$, también $C \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

Intersección.

La *intersección* entre dos o más conjuntos es un nuevo conjunto formado por todos los elementos en común de los conjuntos involucrados en la intersección. Usamos el símbolo“$\cap$” para referirnos a la intersección entre conjuntos.

Siguiendo con los ejemplos antes dados.

- $B \cap E = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $B \cap X = \{2, 4, 6, 8\}$.
- $D \cap C = D$, también $C \cap \mathbb{N} = C$.
- $I \cap C = \emptyset$.

Diremos que dos conjutnos son *disjuntos* entre sí, si no tienen elementos en común, es decir, si su interseccón es vacía.

Por ejemplo, para los conjutnos dados

- $C = \{\text{naturales pares}\}$,
- $I = \{\text{naturales impares}\}$,

tenemos que $I \cap C = \emptyset$, su intersección es vacía.

Diferencia.

La *diferencia* $A - B$ entre dos conjuntos A y B, es un nuevo conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B.

Por ejemplo, para los conjutnos dados anteriormente

- $A - B = \{0\}$.
- $B - A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.
- $\mathbb{N} - I = C$ y $\mathbb{N} - C = I$.
- $A - E = \emptyset$.

Conjunto Universal.

A lo largo de esta materia trabajaremos en dos contextos o dos *espacios* diferentes del análisis matemático. En cada uno de ellos consideraremos un *conjunto universal* $\mathcal{U}$ para el cual, todos los conjuntos con los que trabajemos serán un subconjunto de este conjunto $\mathcal{U}$.

En una primera parte, el conjunto universal será $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, los números reales o la *recta real*. Es decir, en este contexto, todos los conjuntos con los que trabajemos estarán contenidos en $\mathbb{R}$.

En una segunda etapa, cuando comencemos el estudio de *funciones*, también se considerará como conjunto universal $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, es decir, el *plano Euclídeo* o *producto cartesiano* de $\mathbb{R}$.

Ejercicios.

Dejamos a continuación unos pocos ejercicios para afianzar los conceptos introducidos. Usar los conjutnos definidos en la primera página.

a. Considerar los siguientes números: $7, -7$, 70, $0,7$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{1}{7}$, $\frac{8}{7}$. Indicar a cuáles conjuntos pertenecen y a cuáles no.
b. Realizar las siguientes operaciones: $A \cup F$, $B \cup F$, $A \cup B \cup F$.
c. Realizar las siguientes operaciones: $A \cap F$, $B \cap F$, $A \cap B \cap F$.
d. Realizar las siguientes operaciones: $A - F$, $F - A$, $B - F$, $F - B$.
e. Realizar las siguientes operaciones: $\mathbb{N} \cap U$, $\mathbb{Z} \cap U$.