REPASO: ESPACIO EUCLÍDEO n-DIMENSIONAL

Se define a $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de todas las n-uplas ordenadas de números reales $(x_1, \cdots, x_n)$.

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ que se simbolizan como:

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \quad \text{o} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

como n-upla horizontal

como matriz columna

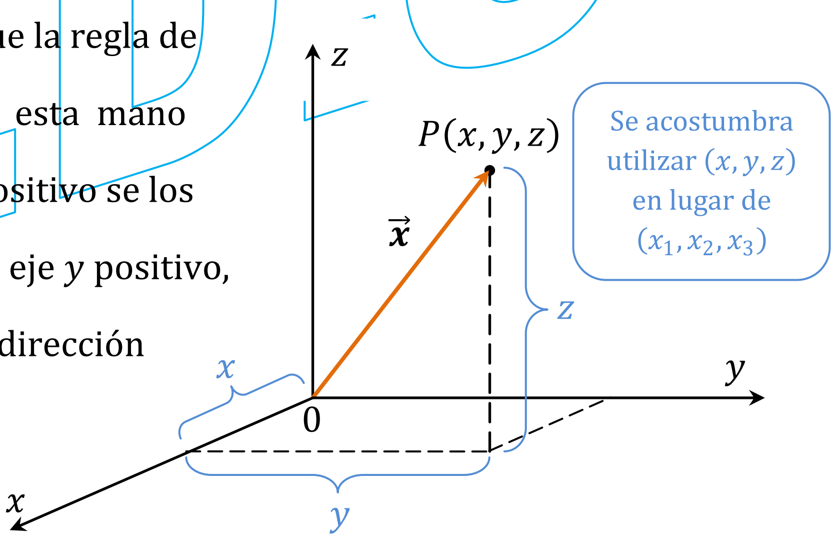
se denominan vectores o n- vectores.

- Si $n = 1$, se obtiene la recta real $\mathbb{R}$.

- Si $n = 2$, se obtiene el plano $\mathbb{R}^2$.

- Si $n = 3$, $\mathbb{R}^3$ es el espacio tridimensional.

En este caso se adopta un sistema de coordenadas xyz denominado **dextrógiro** que sigue la regla de la mano derecha: con los dedos de esta mano apuntando en la dirección del eje x positivo se los curva en sentido anti-horario hacia el eje y positivo, entonces el dedo pulgar apunta en la dirección positiva del eje z.



Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ y sus vectores posición $\vec{x} = (x, y, z)$.

coordenadas de P

componentes escalares de $\vec{x}$ = coordenadas de P

Si se definen de la forma usual la suma de las n-uplas y la multiplicación por un escalar, entonces $\mathbb{R}^n$ adquiere la estructura de **espacio vectorial**. Y una manera de introducir una métrica (que permita medir distancia entre puntos, longitud y ángulos) en un espacio vectorial es definiendo un producto interno.

DEFINICIONES

Sean

$$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(vectores en } \mathbb{R}^n\text{)}$$

es decir:

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n), \qquad \vec{y} = (y_1, \cdots, y_n), \qquad \vec{z} = (z_1, \cdots, z_n)$$

Producto interno (producto escalar)

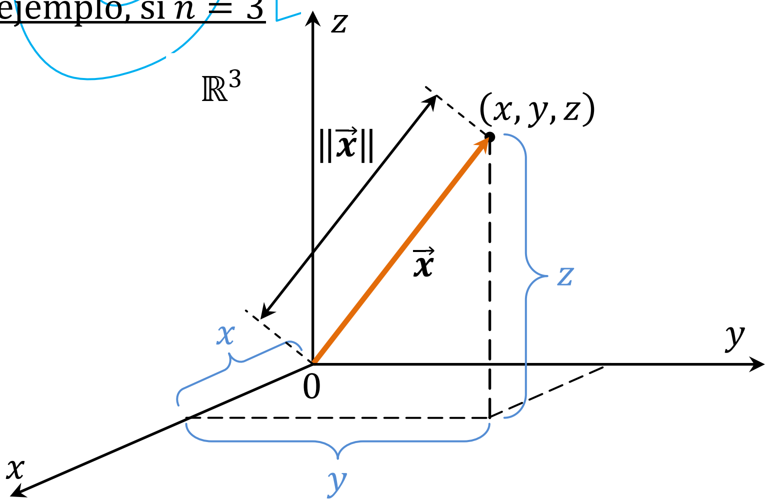
Se define como la suma de los productos de las componentes homólogas de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Norma o longitud de un vector

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Por ejemplo, si $n = 3$



$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

C.F.D.S

Ángulo entre vectores

$$\cos(\measuredangle \vec{x}\vec{y}) = \frac{\vec{x} \bullet \vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$$

El coseno de ángulo entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ está definido ya que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ están en un sub-espacio bidimensional de $\mathbb{R}^n$ que es el plano formado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$ por lo tanto el ángulo entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ está geométricamente definido.

Como consecuencia de esta definición se obtiene la

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\vec{x} \bullet \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|$$

y a partir de esta desigualdad se puede demostrar la

Desigualdad triangular

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

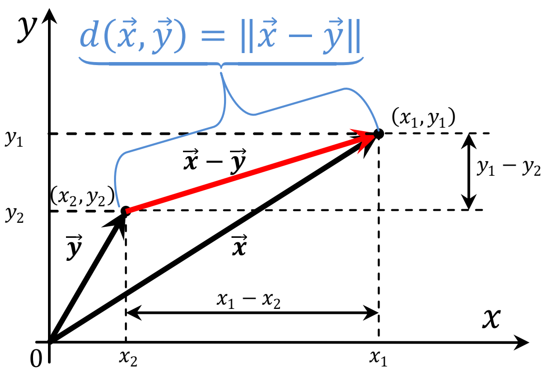
Ortogonalidad

$$\vec{x} \text{ es } \textbf{ortogonal} \text{ a } \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \bullet \vec{y} = 0$$

Distancia entre dos puntos

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$



$$\vec{x} = (x_1, y_1)$$

$$\vec{y} = (x_2, y_2)$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

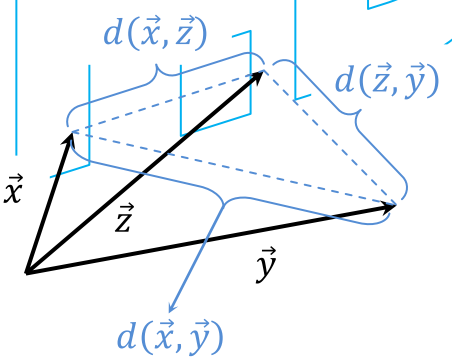
C.F.D.S
C.F.D.S

<u>**Propiedades de la distancia**</u>

1)<u>Positividad:</u> $d(\vec{x},\vec{y}) \geq 0 \quad y \quad d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{x} = \vec{y}$

2)<u>Simetría:</u> $d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x})$

3)<u>Desigualdad triangular:</u> $d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y})$



Con estas definiciones, $\mathbb{R}^n$ adquiere la estructura de **espacio vectorial** y **espacio métrico**.

<u>**Espacio Euclídeo (o Euclideano):**</u> es un espacio vectorial de dimensión finita en el cual se ha definido un producto interno.

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ tiene una **base natural o canónica de vectores unitarios** (versores):

$$B = \{\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_n\}$$

con $\underbrace{\hat{e}_i}_{\substack{i-\text{ésimo versor} \\ \text{de la base canónica}}} = \left(0, \cdots, \underbrace{1}_{\substack{i-\text{ésima} \\ \text{componente escalar}}}, \cdots, 0\right).$

Haciendo uso del producto interno resulta que:

$$\begin{cases} \hat{e}_i \bullet \hat{e}_j = 0, & si \;\; i \neq j \\ \hat{e}_i \bullet \hat{e}_i = 1 \end{cases}$$

Es decir, la base canónica en $\mathbb{R}^n$, es una base **ortonormal**.

C.F.D.S

Y cualquier vector $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ puede expresarse como una combinación lineal de los vectores de la base B:

$$\vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + \cdots + x_n \hat{e}_n$$

<u>Por ejemplo si $n = 3$</u>, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

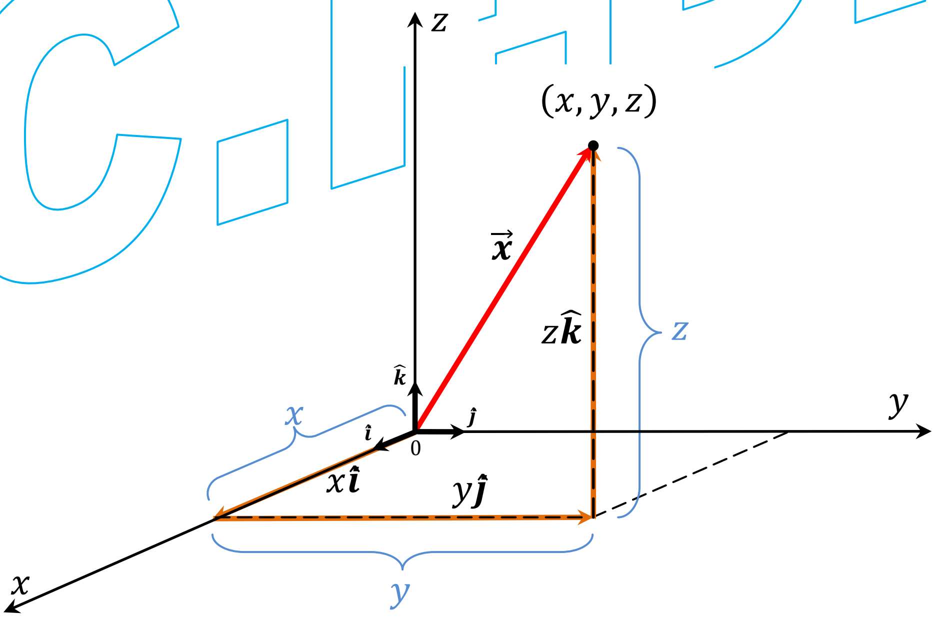
$$B = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$$

donde $\hat{\imath} = (1,0,0)$, $\hat{\jmath} = (0,1,0)$, $\hat{k} = (0,0,1)$.

Entonces el vector $\vec{x} = \underbrace{(x, y, z)}_{\text{componentes escalares de } \vec{x}}$

puede expresarse como:

$$\vec{x} = \underbrace{x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}_{\text{componentes vectoriales de } \vec{x}}$$



C.F.D.S

TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}^n$

DEFINICIONES

Sean

$$\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$r \in \mathbb{R}, \quad r > 0$$

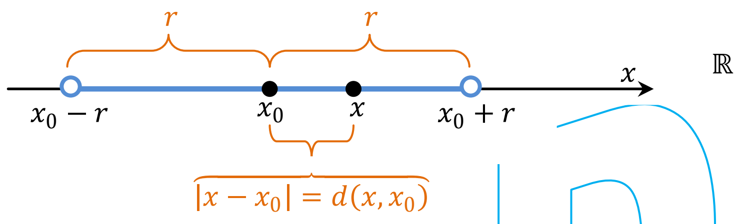
Entorno (o bola abierta) de un punto $\vec{x}_0$:

Es el conjunto de todos los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia a $\vec{x}_0$ es menor que un cierto r, es decir:

$$\underbrace{B_r(\vec{x}_0)}_{\substack{\text{entorno de } \vec{x}_0 \\ \text{de radio } r}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|}_{d(\vec{x},\vec{x}_0)} < r \right\}$$

Interpretación geométrica

- Para $n = 1$, $\quad |x - x_0| < r \iff x_0 - r < x < x_0 + r$

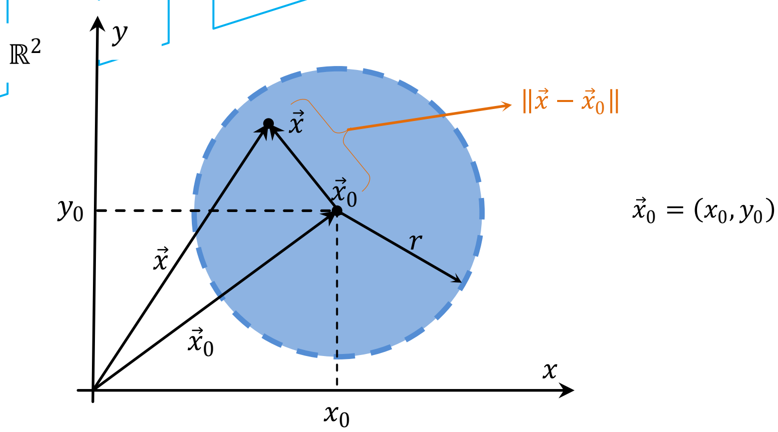


$B_r(x_0)$ es el intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$

- Para $n = 2$

$B_r(\vec{x}_0)$ es el disco abierto

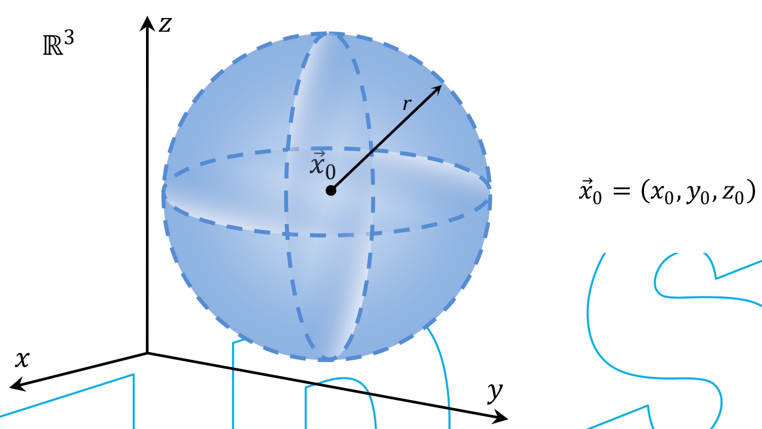
de radio r centrado en $\vec{x}_0$



C.F.D.S

- Para $n = 3$

$B_r(\vec{x}_0)$ es la bola abierta de radio r centrada en $\vec{x}_0$

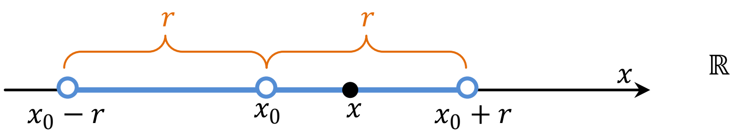


Entorno reducido (o bola reducida) de un punto $\vec{x}_0$:

$$B_r'(\vec{x}_0) = \{\, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r \,\}$$

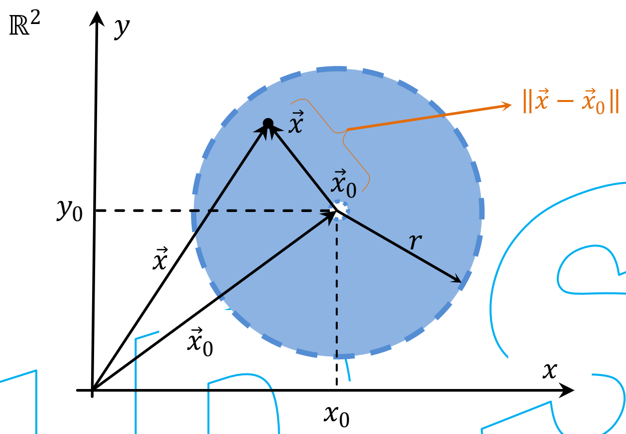
Interpretación geométrica

- Para $n = 1$



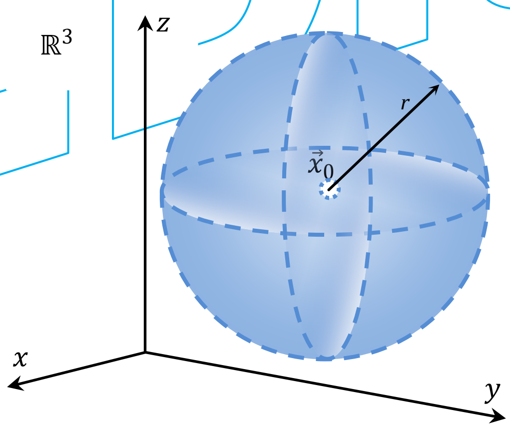
- Para $n = 2$

$B_r'(\vec{x}_0)$ es el disco abierto de radio r perforado en su centro $\vec{x}_0$



- Para $n = 3$

$B_r'(\vec{x}_0)$ es la bola abierta de radio r perforada en su centro $\vec{x}_0$



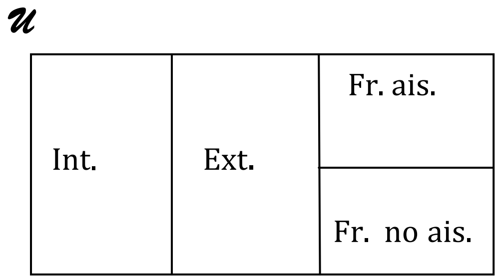
C.F.D.S

PROPIEDADES DE LOS PUNTOS RESPECTO DE UN CONJUNTO

Propiedad

Un punto respecto de un conjunto puede ser:

- INTERIOR → pertenece al conjunto
- ó
- EXTERIOR → no pertenece al conjunto
- ó
- FRONTERA
  - AISLADO → pertenece al conjunto
  - NO AISLADO → puede pertenecer o no al conjunto



DEFINICIONES

Sean

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$$B \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$r \in \mathbb{R}, \quad r > 0$$

C.F.D.S

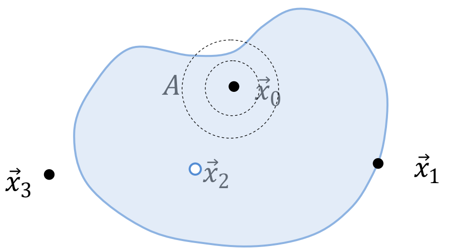
Punto interior:

$\vec{x}_0$ es punto interior de A si y sólo si existe un entorno de $\vec{x}_0$ totalmente incluido en A.

Es decir:

$$\vec{x}_0 \text{ es punto interior de } A \iff \exists\, B_r(\vec{x}_0) \mid B_r(\vec{x}_0) \subset A$$

Interpretación geométrica



$\vec{x}_0, \vec{x}_1 \in A;\ \ \vec{x}_2, \vec{x}_3 \notin A.$

$\vec{x}_0$ es punto interior de A.

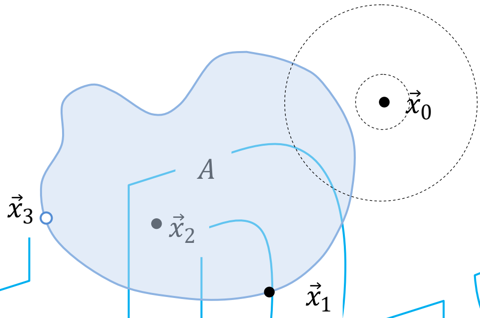
Punto exterior:

$$\vec{x}_0 \text{ es punto exterior de } A \;\Leftrightarrow\; \exists\, B_r(\vec{x}_0) \mid B_r(\vec{x}_0) \cap A = \emptyset$$

Por ejemplo:

$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A$; $\vec{x}_0, \vec{x}_3 \notin A$.

$\vec{x}_0$ es punto exterior de A.



Punto frontera:

$$\vec{x}_0 \text{ es punto frontera de } A \;\Leftrightarrow\; \vec{x}_0 \text{ no es punto interior ni exterior de } A$$

Un punto frontera puede ser **aislado** o **no aislado**.

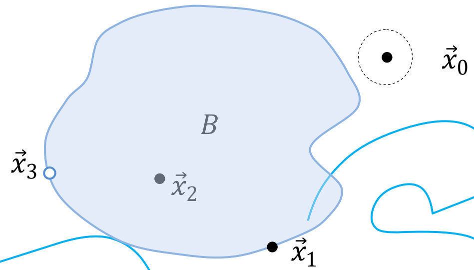
Punto frontera aislado:

$$\vec{x}_0 \text{ es punto frontera } \textbf{aislado} \text{ de } A \;\Leftrightarrow \exists\, B_r(\vec{x}_0) \mid B_r(\vec{x}_0) \cap A = \{\vec{x}_0\}$$

Por ejemplo:

Si $A = B \cup \{\vec{x}_0\}$, entonces $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in A$, $\vec{x}_3 \notin A$

y $\vec{x}_0$ es punto frontera aislado de A.



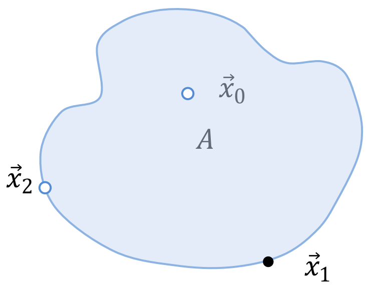
Punto frontera no aislado:

$$\vec{x}_0 \text{ es punto frontera } \textbf{no aislado} \text{ de } A \;\Leftrightarrow\; \vec{x}_0 \text{ es punto frontera de } A \text{ que no es aislado}$$

Por ejemplo:

$\vec{x}_0, \vec{x}_2 \notin A$; $\vec{x}_1 \in A$.

$\vec{x}_0, \vec{x}_1$ y $\vec{x}_2$ son puntos frontera no aislados de A.



Punto de acumulación:

$$\vec{x}_0 \text{ es punto de acumulación de } A \iff \forall\, B_r'(\vec{x}_0) \mid B_r'(\vec{x}_0) \cap A \neq \emptyset$$

Es decir, $\vec{x}_0$ es punto de acumulación de A si todo entorno reducido de $\vec{x}_0$ tiene puntos que pertenecen a A.

- Un punto de acumulación puede pertenecer o no al conjunto.
- La idea intuitiva de punto de acumulación es la siguiente: me acerco al punto tanto como quiero usando (pasando por) puntos del conjunto pero sin llegar al punto mismo.
- Como consecuencia de la definición tenemos que sólo pueden ser puntos de acumulación de un conjunto los puntos interiores y los puntos frontera no aislados del conjunto.

Por ejemplo:

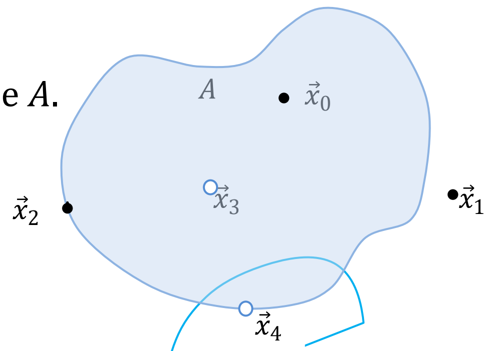
$\vec{x}_0 \in A$ es punto interior y de acumulación de A.

$\vec{x}_1 \notin A$ es punto exterior de A. No es punto de acumulación de A.

$\vec{x}_2 \in A$ es punto frontera no aislado y de acumulación de A.

$\vec{x}_3 \notin A$ es punto frontera no aislado y de acumulación de A.

$\vec{x}_4 \notin A$ es punto frontera no aislado y de acumulación de A.



PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS RESPECTO DE LOS PUNTOS

DEFINICIONES

Sean

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$$M \in \mathbb{R}$$

Interior de A: $\boldsymbol{Int}(\boldsymbol{A})$

Es el conjunto de todos los puntos interiores de A. (pertencen al conjunto A)

C.F.D.S

Exterior de A: $\boldsymbol{Ext(A)}$

Es el conjunto de todos los puntos exteriores de A. (no pertencen al conjunto A)

Frontera de A: $\boldsymbol{Fr(A)}$

Es el conjunto de todos los puntos frontera de A. (pueden pertenecer o no al conjunto A)

Clausura (cerradura) de A: $\boldsymbol{\bar{A}}$

$\bar{A} = Int(A) \cup Fr(A)$

Dado un conjunto de puntos, este puede ser:

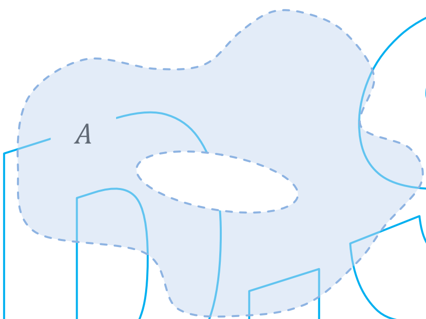
- → ABIERTO
- → CERRADO
- → NI ABIERTO NI CERRADO
- → ABIERTO Y CERRADO A LA VEZ **(Se demuestra que los dos únicos conjuntos con esta propiedad son: $\emptyset$ y $\mathbb{R}^n$)**

Definiciones (continuación)

Conjunto abierto

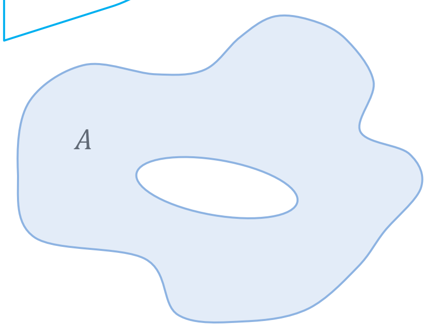
A es un conjunto abierto si y sólo si todo punto que pertenece a A es punto interior de A. Es decir:

$$A \text{ es abierto} \iff A = Int(A)$$

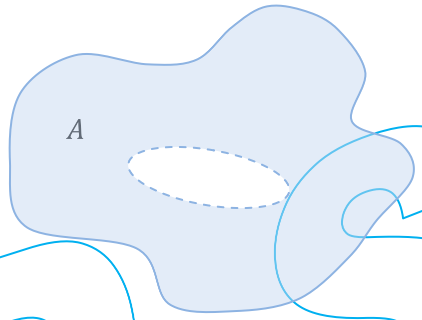


Conjunto cerrado

A es un conjunto cerrado si y sólo si le pertenecen todos sus puntos frontera.



Conjunto ni abierto ni cerrado

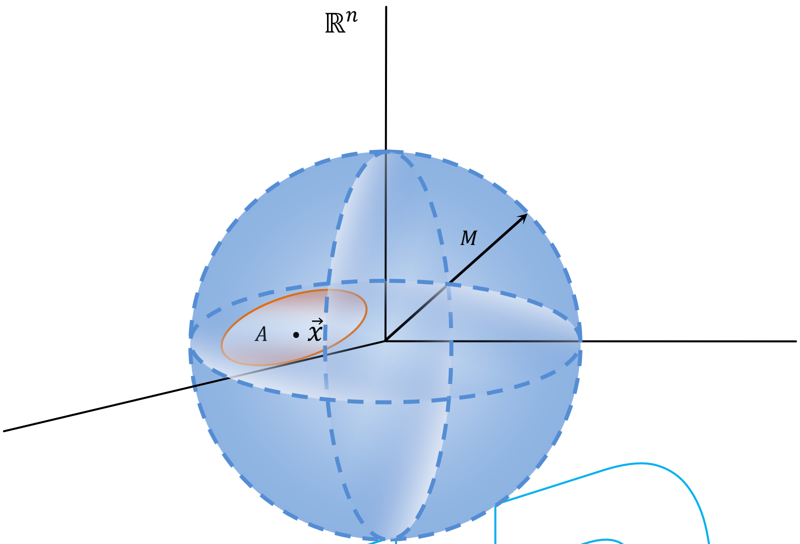


A es un conjunto ni abierto ni cerrado si y sólo si le pertenecen a A algunos pero no todos sus puntos frontera.

Conjunto acotado

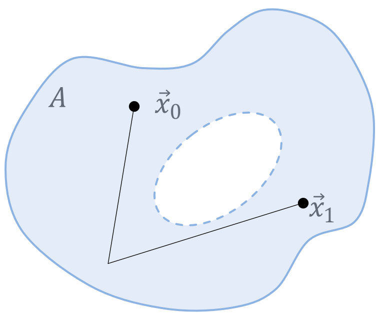
$$A \text{ es un conjunto acotado} \iff \exists\, M > 0 \mid \forall \vec{x} \in A \Rightarrow \|\vec{x}\| < M.$$

Es decir, A es acotado si y sólo si existe una bola abierta de radio (finito) M centrada en el origen de $\mathbb{R}^n$ que lo incluye.



Conjunto conexo

A es un conjunto conexo si y sólo si todo par de puntos pertenecientes a A pueden unirse por una línea poligonal de una cantidad finita de segmentos totalmente incluidos en A.



C.F.D.S

EJERCICIOS

Determine el interior, el exterior, la frontera y la clausura de cada uno de los siguientes conjuntos. Diga si son abiertos, cerrados o ni abiertos ni cerrados.

i- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a| < r, |y-b| < r\}$

ii- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$

iii- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 \leq 36\}$

iv- $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < x + y\}$

v- $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

vi- $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x-a| \leq r, |y-b| < r, |z-c| < r\}$

vii- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$

viii- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

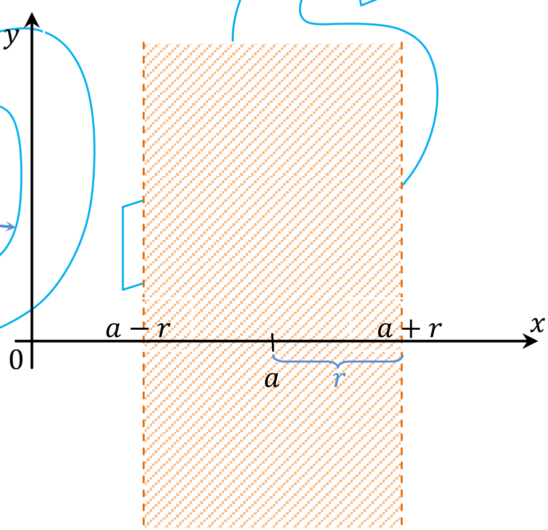
ix- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x + 2y < 4\}$

x- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y-1| < 2\}$

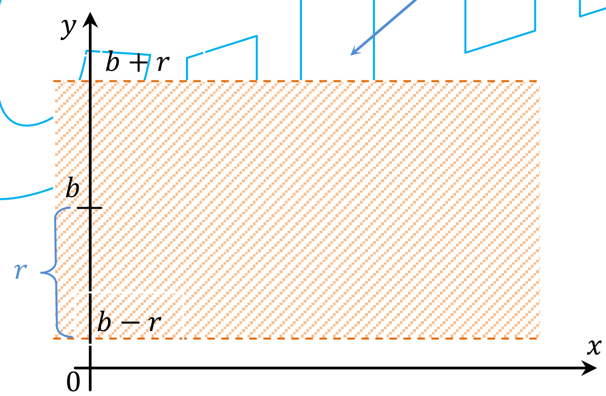
SOLUCIONES DE ALGUNOS EJERCICIOS

i- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a| < r, |y-b| < r\}$

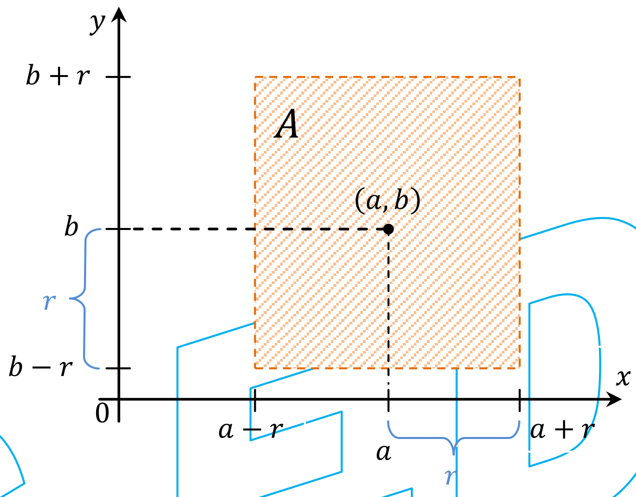
$$|x-a| < r \iff \underbrace{a-r < x < a+r}$$



$$|y-b| < r \iff \underbrace{b-r < y < b+r}$$



La interpretación geométrica de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| < r, |y - b| < r\}$ es:



$Int(A) = A$

$Ext(A) = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| \leq r, |y - b| \leq r\}$

$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| = r, |y - b| \leq r\}$
$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| \leq r, |y - b| = r\}$

$|x - a| = r \Leftrightarrow x = a \pm r$

$|y - b| = r \Leftrightarrow y = b \pm r$

$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$

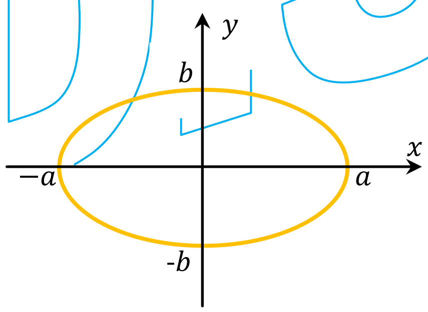
$|y - b| \leq r \Leftrightarrow b - r \leq y \leq b + r$

$$\underbrace{\bar{A}}_{\text{clausura de A}} = Int(A) \cup Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| \leq r, |y - b| \leq r\}$$

A es un conjunto abierto.

Repaso

Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\; a > 0, b > 0$



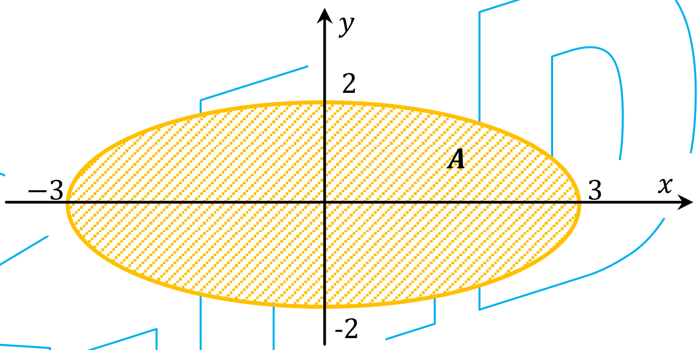
---

ii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1\ ;\ a=3, \qquad b=2$$

La interpretación geométrica de $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+9y^2\leq 36\}$ es:



$Int(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+9y^2<36\}$

$Ext(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+9y^2>36\}$

$Fr(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 4x^2+9y^2=36\}$

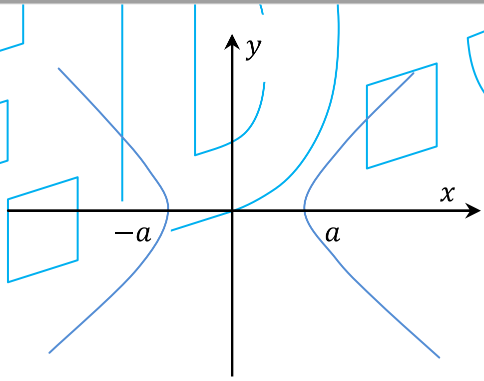
$\bar{A}=Int(A)\cup Fr(A)=A$

A es un conjunto cerrado.

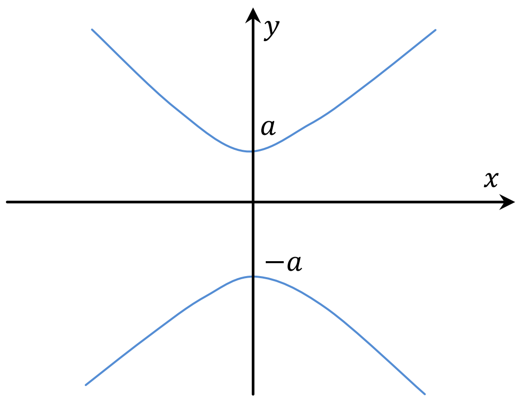
Repaso

Hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$



---

iii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 \leq 36\}$

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \iff \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1; \quad a = 3, b = 2$$

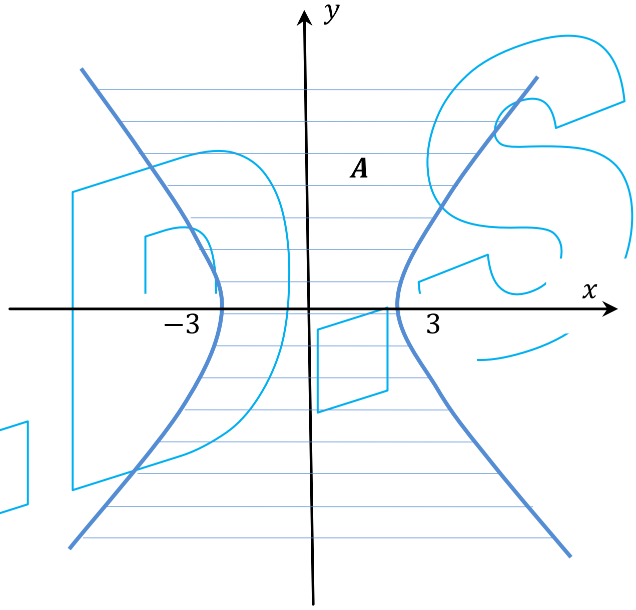
$$Int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 < 36\}$$

$$Ext(A) = \mathbb{R}^2 - A$$

$$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 = 36\}$$

$$\bar{A} = Int(A) \cup Fr(A) = A$$

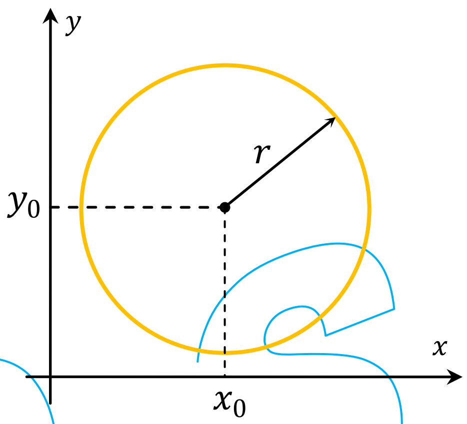
A es un conjunto cerrado.



Repaso

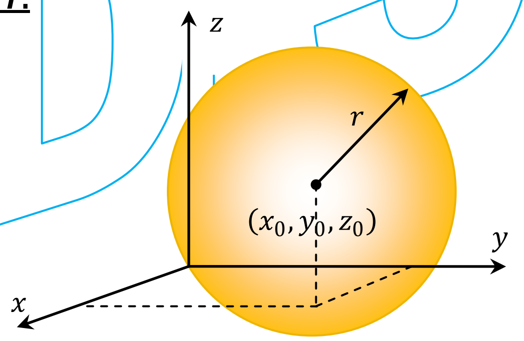
Ecuación de una circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



Ecuación de una esfera con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$



---

v- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

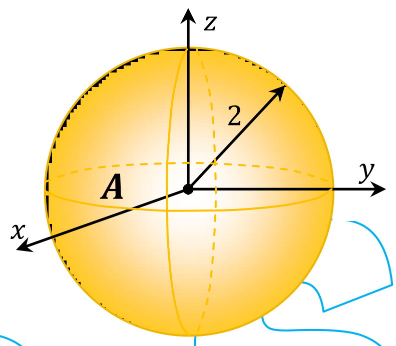
$x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$ Esfera centrada en el origen de radio $r = 2$

$$Int(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$$

$$Ext(A) = \mathbb{R}^3 - A$$

$$Fr(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

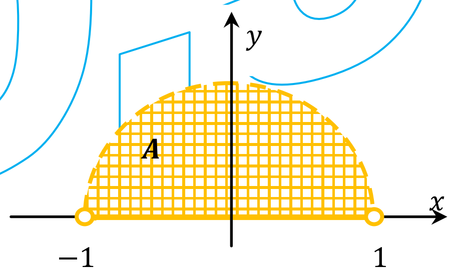
$$\bar{A} = Int(A) \cup Fr(A) = A$$



A es un conjunto cerrado.

---

vii- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$



$$Int(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

$$Ext(A) = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, y = 0\}$$

$$\bar{A} = Int(A) \cup Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

A es un conjunto ni abierto ni cerrado.

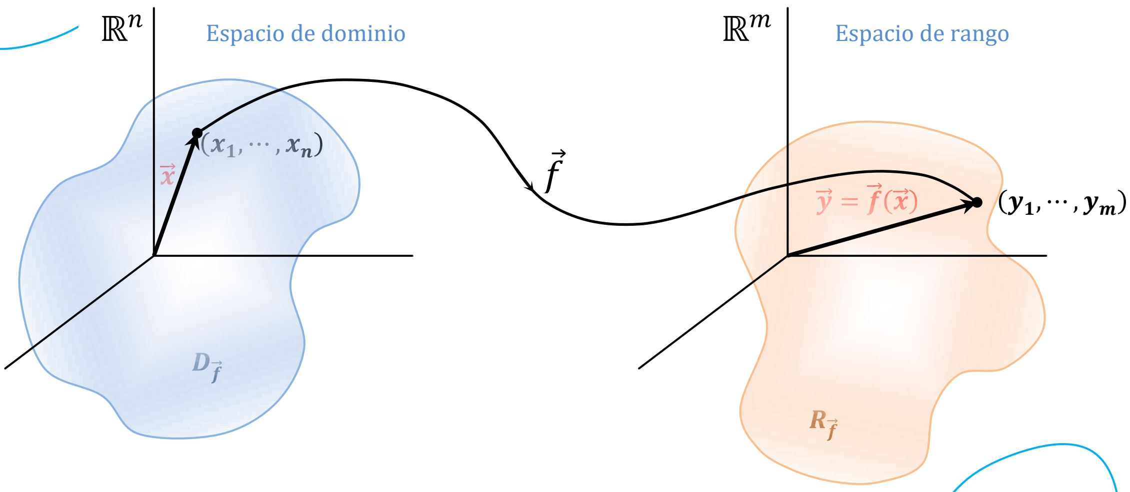
FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$

A continuación se consideran funciones

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m; \qquad n, m \in \mathbb{Z}^+$$

donde el **dominio** de $\vec{f}: D_{\vec{f}}$ es un sub-conjunto de $\mathbb{R}^n$ y el **rango** de $\vec{f}: R_{\vec{f}}$ un sub-conjunto de $\mathbb{R}^m$.

O sea que a cada vector o punto $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n$, la función $\vec{f}$ le hace corresponder un **único** vector o punto $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y} = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$:



A $\mathbb{R}^n$ se lo llama **espacio de dominio o de partida** de $\vec{f}$ y a $\mathbb{R}^m$ se lo llama **espacio de rango, de imagen o de llegada** de $\vec{f}$.

El $D_{\vec{f}}$ es el conjunto de todos los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $\vec{f}$ está definida:

$$D_{\vec{f}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists\, \vec{f}(\vec{x}) \right\}$$

El $R_{\vec{f}}$ es el conjunto de todos los puntos $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ que provienen a través de $\vec{f}$ de al menos un punto $\vec{x} \in D_{\vec{f}}$:

$$R_{\vec{f}} = \left\{ \vec{y} \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \exists\, \vec{x} \in D_{\vec{f}} : \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}) \right\}$$

Toda función $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ define un conjunto de **funciones escalares**: $f_1, \cdots, f_m$ llamadas **funciones coordenadas** de $\vec{f}$.

Esto es, para cada $\vec{x} \in D_{\vec{f}}$, $f_i(\vec{x})$ es la i-ésima coordenada de $\vec{f}(\vec{x})$:

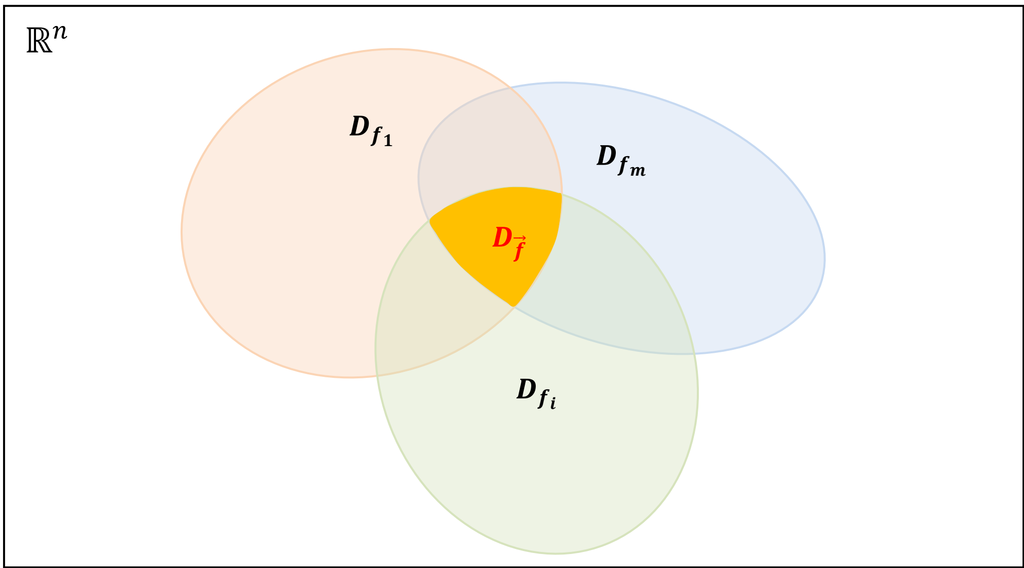
$$\vec{f}(\vec{x}) = \left(f_1(\vec{x}), \cdots, f_i(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\right)$$

funciones coordenadas de $\vec{f}$

Cada función coordenada $f_i: D_{f_i} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$ depende de las n variables: $x_1, \cdots, x_n$ que se simbolizan en forma compacta utilizando la notación vectorial, como $\vec{x}$.

El dominio de $\vec{f}$ es:

$$D_{\vec{f}} = \bigcap_i D_{f_i}$$



Dada una función

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

n^o de variables

n^o de funciones coordenadas

Si
- $m > 1$ a $\vec{f}$ se la llama **función vectorial** (es una función con valores vectoriales).
- $m = 1$ a f se la llama **función escalar** (es una función con valores escalares).

- <u>Cuando $n > 1$ y $m > 1$</u>, a la función vectorial $\vec{f}$ se la denomina **CAMPO VECTORIAL** (es una función vectorial de un vector).

Por ejemplo, para especificar la velocidad de un fluido moviéndose en el espacio en un instante determinado se requiere de una función:

$$\vec{V}: D_{\vec{V}} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

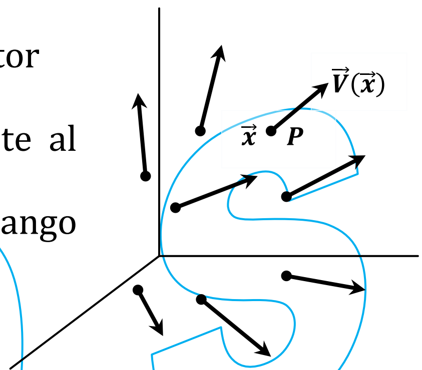
donde

$$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}(x, y, z)\text{: vector velocidad del fluido en el punto } (x, y, z).$$

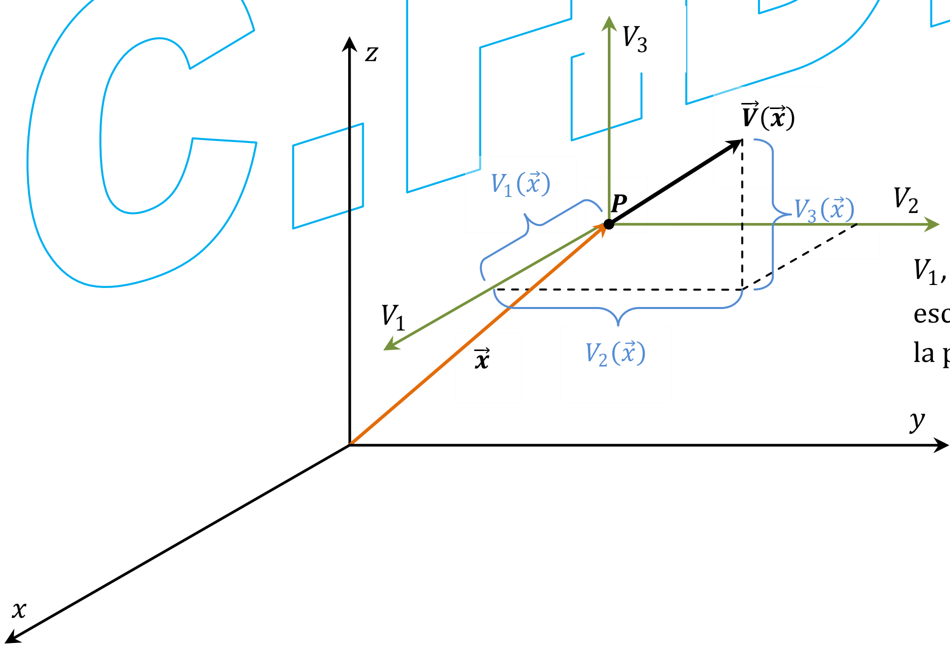
Se tiene entonces que un fluido en movimiento define un campo vectorial $\vec{V}$ que da la velocidad de las partículas del fluido en cada punto del espacio en un determinado instante de tiempo:

$$\vec{V}(\vec{x}) = \big(V_1(\vec{x}), V_2(\vec{x}), V_3(\vec{x})\big); \qquad \vec{x} = (x, y, z)\text{: vector posición de la partícula } P.$$

Resulta conveniente trazar la flecha que representa al vector $\vec{V}(\vec{x})$ de modo que comience en el punto $\vec{x}$ correspondiente al espacio de dominio de $\vec{V}$, y no en el origen del espacio de rango (que es lo que debería hacerse).



Si se "sumerge" al espacio de rango de $\vec{V}$ dentro del espacio de dominio se tiene



V_1, V_2, V_3: componentes escalares del vector $\vec{V}$ de la partícula P.

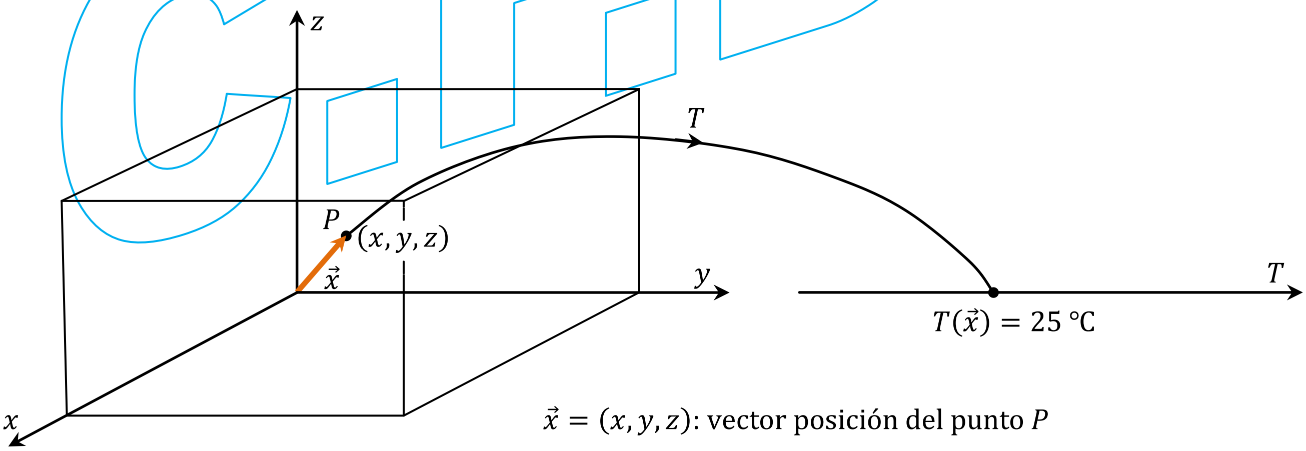
C.F.D.S

- <u>Cuando $n > 1$ y $m = 1$</u>, a la función escalar f se la denomina **CAMPO ESCALAR** (es una función real de un vector).

Por ejemplo, para especificar la temperatura en cada punto (x, y, z) de una habitación en un instante determinado se requiere de una función:

$$T: D_T \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

de modo que $T(\vec{x}) = T(x, y, z)$ es la temperatura del punto (x, y, z) en el instante de tiempo considerado.



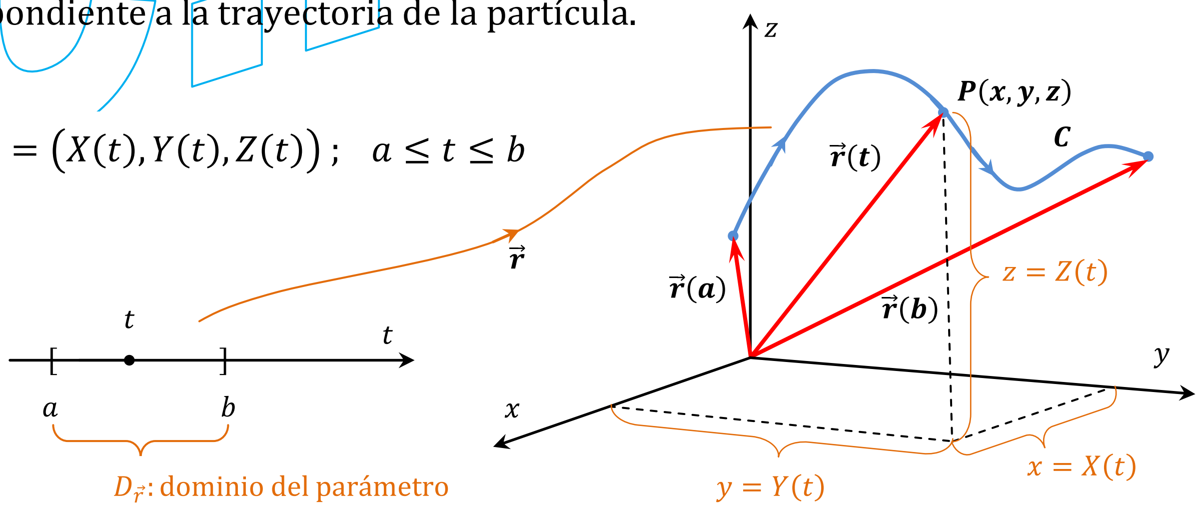
- <u>Cuando $n = 1$ y $m > 1$</u>, a $\vec{f}$ se la denomina **función vectorial de una variable real**.

Por ejemplo, para especificar la posición de una partícula que se desplaza en el espacio se requiere de una función:

$$\vec{r}: D_{\vec{r}} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

de modo que $\vec{r}(t)$ -*el* ***vector posición*** *de la partícula P en el instante t*- describa con la punta de su flecha, a medida que varía el parámetro t: tiempo, la curva C correspondiente a la trayectoria de la partícula.

$$\vec{r}(t) = \big(X(t), Y(t), Z(t)\big)\ ; \quad a \le t \le b$$



- Cuando $n = m = 1$, se tiene que $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representa a una función real de una variable real, es decir, corresponde al tipo de funciones que se estudian en AMI.

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Si

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad y \quad \vec{g}: D_{\vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ son } \textbf{campos vectoriales}.$$

$$h: D_h \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es un } \textbf{campo escalar}.$$

Entonces se definen las operaciones de

Suma/resta:

Es la función con dominio $D_{\vec{f}\pm\vec{g}} = D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}}$, cuyas funciones coordenadas se obtienen sumando/restando las funciones coordenadas homólogas de $\vec{f}$ y $\vec{g}$:

$$\vec{f} \pm \vec{g} = (f_1 \pm g_1, \cdots, f_m \pm g_m)$$

Producto por un campo escalar:

$$h\vec{f} = (hf_1, \cdots, hf_m); \qquad D_{h\vec{f}} = D_h \bigcap D_{\vec{f}}$$

Producto escalar:

$$\vec{f} \bullet \vec{g} = f_1 g_1 + \cdots + f_m g_m = \sum_{i=1}^{m} f_i g_i ; \qquad D_{\vec{f}\bullet\vec{g}} = D_{\vec{f}} \bigcap D_{\vec{g}}$$

Producto vectorial: (sólo definido para $m = 3$)

$$\vec{f} \times \vec{g} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = (f_2 g_3 - f_3 g_2, f_3 g_1 - f_1 g_3, f_1 g_2 - f_2 g_1); \qquad D_{\vec{f}\times\vec{g}} = D_{\vec{f}} \bigcap D_{\vec{g}}$$

C.F.D.S
C.F.D.S

<u>División por un campo escalar:</u>

$$\frac{\vec{f}}{h} = \left(\frac{f_1}{h}, \cdots, \frac{f_m}{h}\right); \qquad D_{\vec{f}/h} = D_{\vec{f}} \bigcap D_h - \{\vec{x} \mid h(\vec{x}) = 0\}$$

<u>COMPOSICIÓN DE FUNCIONES</u>

Sean

$$\vec{g}: D_{\vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\text{y si } R_{\vec{g}} \cap D_{\vec{f}} \neq \emptyset$$

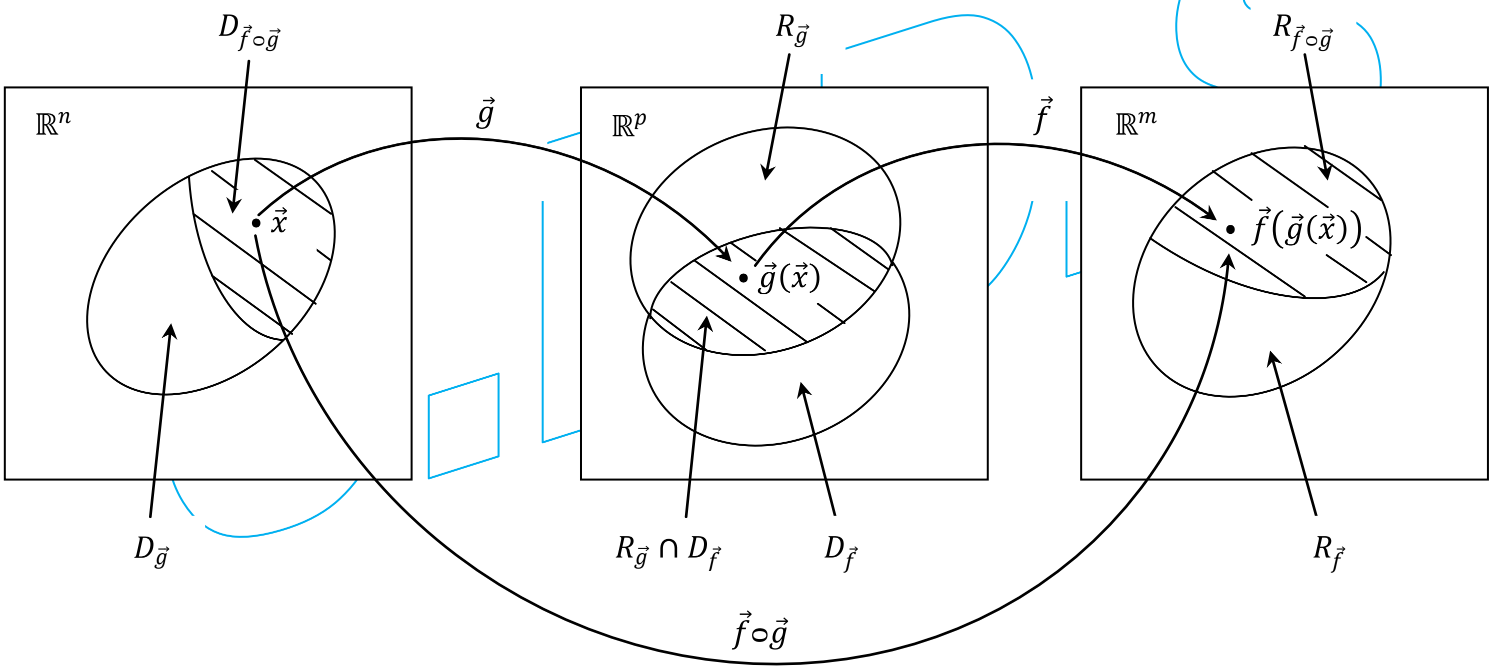
Entonces se define a $\vec{f} \circ \vec{g}$: $\vec{f}$ compuesto con $\vec{g}$ como la función:

$$\vec{f} \circ \vec{g}: D_{\vec{f} \circ \vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

que se obtiene de aplicar la siguiente regla:

$$(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}\big(\vec{g}(\vec{x})\big)$$

Es decir, se aplican sucesivamente 2 funciones: primero se aplica la función $\vec{g}$ y luego la función $\vec{f}$ tal como se muestra en el siguiente diagrama.



C.F.D.S

O sea que como $\vec{g}$ es la función con p funciones coordenadas:

$$\vec{g}(\vec{x}) = \left(g_1(\vec{x}), \cdots, g_p(\vec{x})\right), \qquad \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

que dependen de las n-variables $x_1, \cdots, x_n$ llamadas variables últimas, y $\vec{f}$ es la función con m funciones coordenadas:

$$\vec{f}(\vec{u}) = \left(f_1(\vec{u}), \cdots, f_m(\vec{u})\right), \qquad \vec{u} = (u_1, \cdots, u_p)$$

que dependen de las p-variables $u_1, \cdots, u_p$ llamadas variables intermedias, se tiene que:

<u>**1ero**</u> cuando se aplica $\vec{g}$ se pasa de $\vec{x}$ a $\vec{u}$, es decir:

$$\vec{u} = \vec{g}(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = g_1(\vec{x}) \\ \quad\vdots \\ u_p = g_p(\vec{x}) \end{cases}$$

<u>**Observación:**</u>

Para poder componer $\vec{f}$ con $\vec{g}$ se tiene que cumplir que la dimensión del espacio de rango de $\vec{g}$ sea igual a la dimensión del espacio de dominio de $\vec{f}$.

<u>**2do**</u> se aplica $\vec{f}$:

$$\vec{f}(\vec{u}) = \vec{f}\left(\vec{g}(\vec{x})\right)$$

para obtener

$$\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)(\vec{x}) = \vec{f}\left(\vec{g}(\vec{x})\right) = \left((f_1\circ\vec{g})(\vec{x}), \cdots, (f_m\circ\vec{g})(\vec{x})\right)$$
$$= \left(\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)_1(\vec{x}), \cdots, \left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)_m(\vec{x})\right)$$

donde $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$

Ejemplo

Sean las siguientes funciones:

$g\colon D_g \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es el campo escalar definido por $g(x,y) = [ln(x+y)]^2$ y

$\vec{f}\colon D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la función vectorial definida por $\vec{f}(t) = \left(\underbrace{t}_{f_1(t)}, \underbrace{t^2}_{f_2(t)}, \underbrace{t^3}_{f_3(t)}\right)$ con $-1 \le t \le 1$.

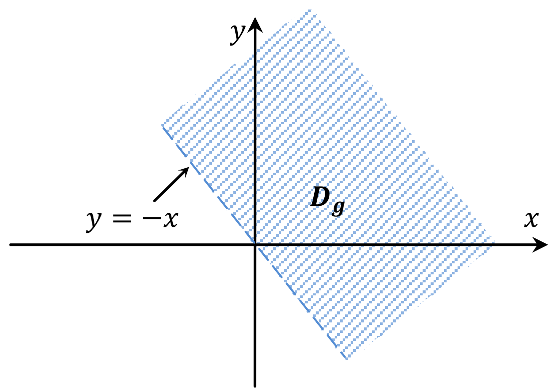
Obtenga $\vec{f} \circ g$.

Solución

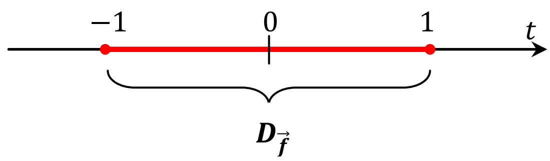
Los dominios de las funciones son:

$$D_g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}$$

$$x+y > 0 \quad \Rightarrow \quad y > -x$$

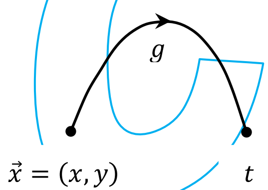


$$D_{\vec{f}} = \{t \in \mathbb{R} \mid -1 \le t \le 1\}$$



Como <u>dimensión del espacio de rango de g</u>= 1= <u>dimensión del espacio de dominio de $\vec{f}$</u> se puede componer siempre que $R_g \cap D_{\vec{f}} \neq \emptyset$, lo cual se va a ver que sí se cumple.

Cuando se compone primero se aplica g, o sea con g se pasa de $\vec{x}$ a t, es decir:



$$t = g(x,y) = [ln(x+y)]^2$$

El rango de g es: $R_g = \{t \in \mathbb{R} \mid t \ge 0\}$. Y siendo $D_{\vec{f}} = \{t \in \mathbb{R} \mid -1 \le t \le 1\}$, la intersección de estos conjuntos es: $R_g \cap D_{\vec{f}} = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \le t \le 1\} \neq \emptyset$.

C.F.D.S

Luego el dominio de la función compuesta $\vec{f} \circ g$ es el conjunto de todos los puntos $\vec{x} = (x, y)$ para los cuales los valores que tome $g(x, y)$ estén en el siguiente intervalo:

$$0 \leq \overbrace{[ln(x + y)]^2}^{t=g(x,y)} \leq 1$$

Es decir, $D_{\vec{f} \circ g}$ es la contra-imagen de $R_g \cap D_{\vec{f}}$, por lo tanto

$$[ln(x + y)]^2 \leq 1$$

$$\sqrt{[ln(x + y)]^2} \leq 1$$

$$|ln(x + y)| \leq 1$$

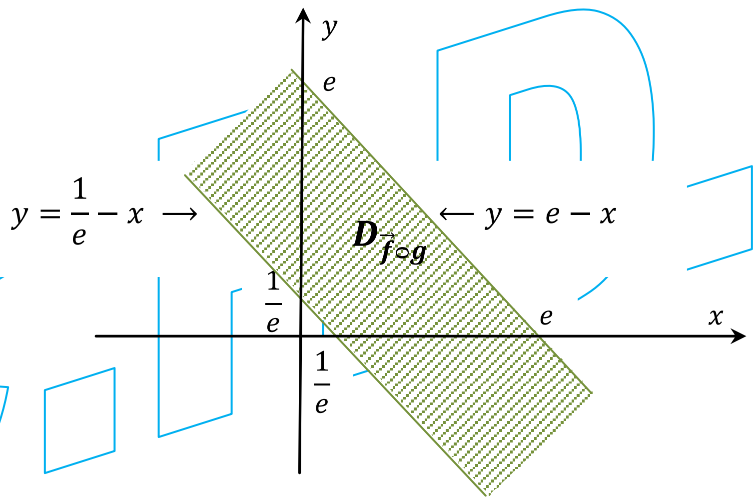
$$-1 \leq ln(x + y) \leq 1$$

$$e^{-1} \leq e^{ln(x+y)} \leq e^1$$

$$\frac{1}{e} \leq x + y \leq e$$

O sea que:

$$D_{\vec{f} \circ g} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{e} - x \leq y \leq e - x\right\}$$



Después de aplicar g, se aplica $\vec{f}$:

$$\vec{f}(t) = \vec{f}\big(g(x, y)\big)$$

C.F.D.S

Por lo tanto la función vectorial compuesta es el campo vectorial

$$\vec{f}\circ g : D_{\vec{f}\circ g} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

con espacio de dominio $\mathbb{R}^2$ y espacio de rango $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$(\vec{f}\circ g)(\vec{x}) = \vec{f}\big(g(x,y)\big) = \left(f_1\Big(\overbrace{g(x,y)}^{t}\Big), f_2\big(g(x,y)\big), f_3\big(g(x,y)\big) \right)$$

$$= \Big(\underbrace{(f\circ g)_1(x,y)}, \underbrace{(f\circ g)_2(x,y)}, \underbrace{(f\circ g)_3(x,y)}\Big)$$

$$= \Big(\overbrace{[ln(x+y)]^2}, \overbrace{[ln(x+y)]^4}, \overbrace{[ln(x+y)]^6}\Big)$$

$$\boxed{(\vec{f}\circ g)(\vec{x}) = ([ln(x+y)]^2, [ln(x+y)]^4, [ln(x+y)]^6); \quad D_{\vec{f}\circ g} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1}{e} - x \leq y \leq e - x\right\}}$$

GRÁFICA (GRAFO) DE FUNCIONES

Definición

Sea $\vec{f} : D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. El grafo de $\vec{f}$ es el conjunto de todos los pares ordenados $\big(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})\big) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tales que $\vec{x} \in D_{\vec{f}}$:

$$\text{grafo de } \vec{f} = \left\{\big(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})\big) \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; \vec{x} \in D_{\vec{f}}\right\}$$

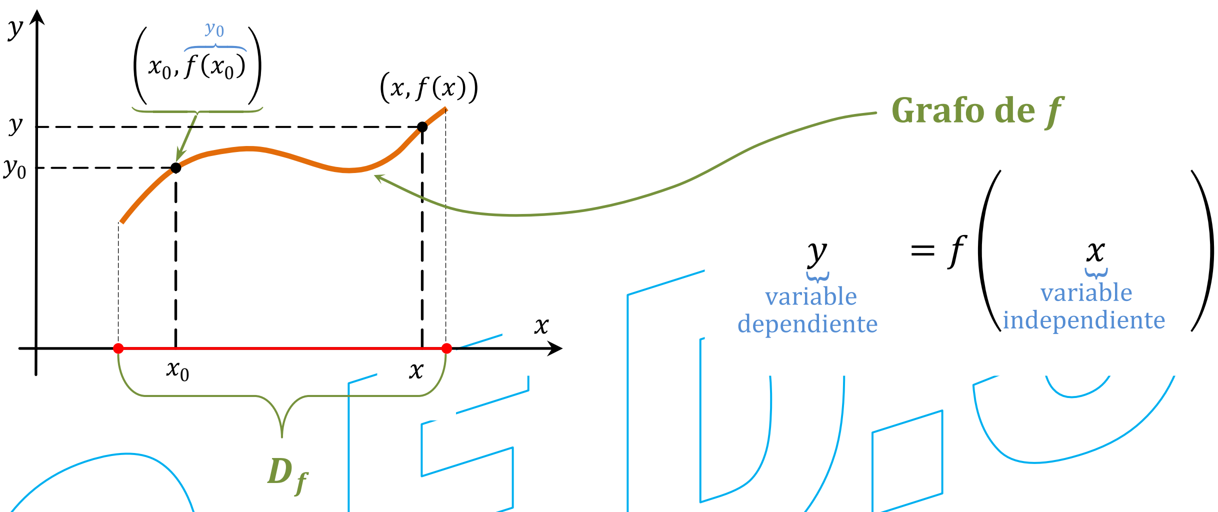
$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\qquad\qquad$ $\vec{f}(\vec{x}) = \big(f_1(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\big) \in \mathbb{R}^m$

<u>Si $n = m = 1$</u>, se tiene $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de una variable real (de las que se estudian en AMI).

Y el grafo de f es una **curva** en $\mathbb{R}^2$.

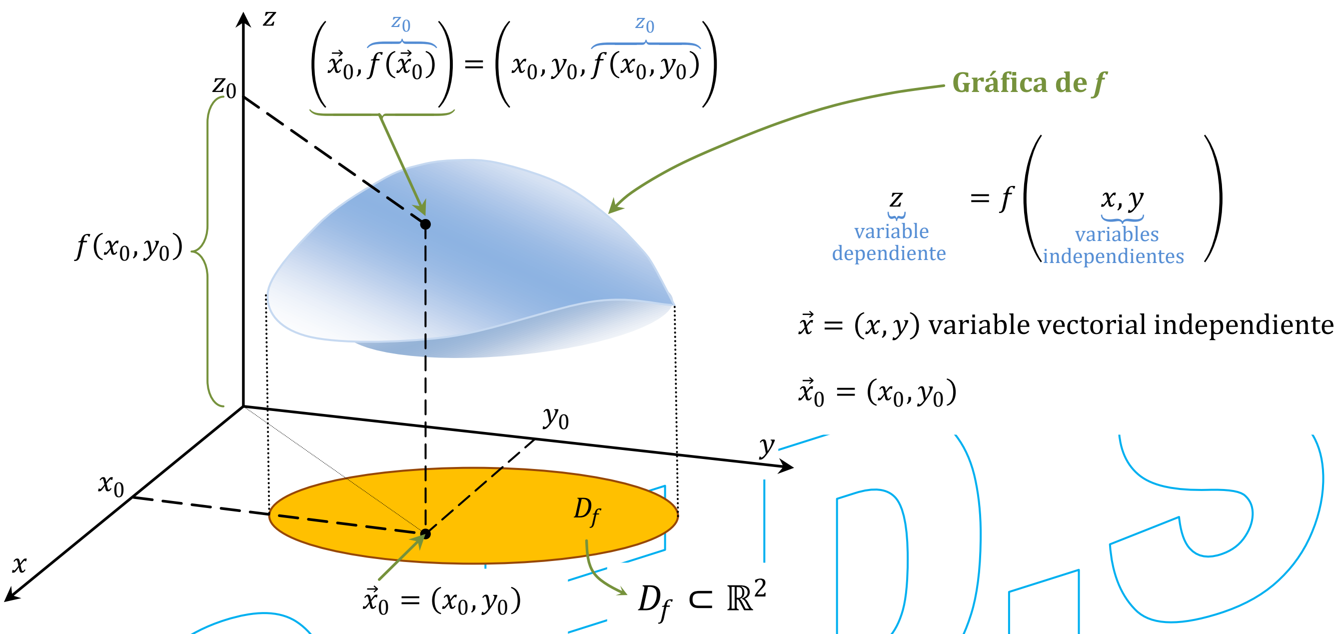
C.F.D.S

$$\text{grafo de } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f\}$$



- <u>Si $n = 2$ y $m = 1$</u>, se tiene $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un **campo escalar**. La gráfica (o grafo) de f es una **superficie** en $\mathbb{R}^3$.

$$\text{grafo de } f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f\}$$



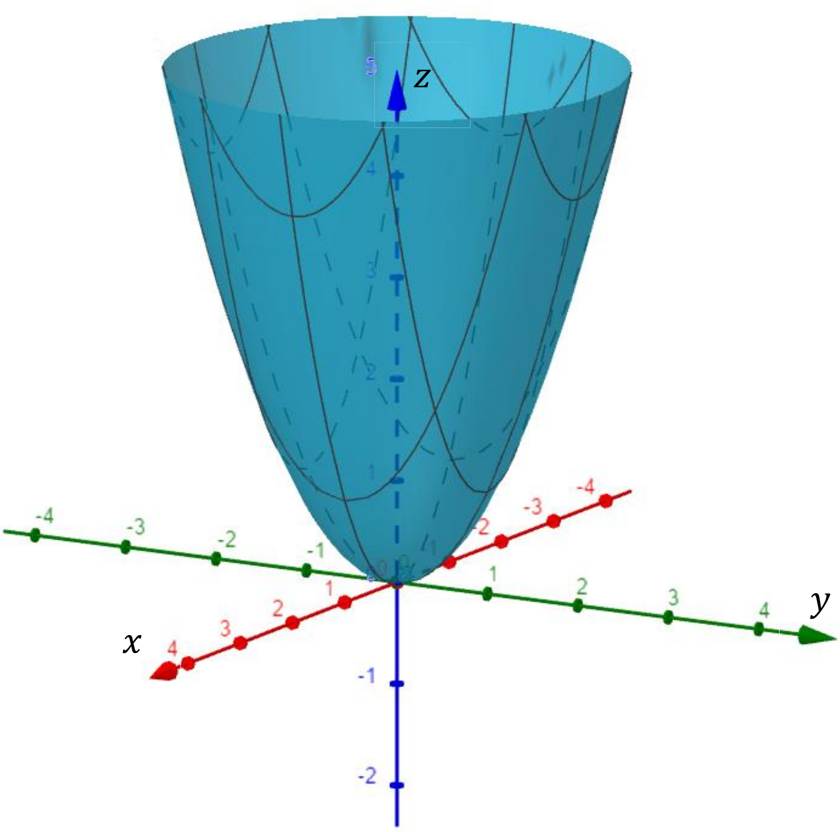
Por ejemplo, sea $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de 2 variables definida por la ecuación:

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

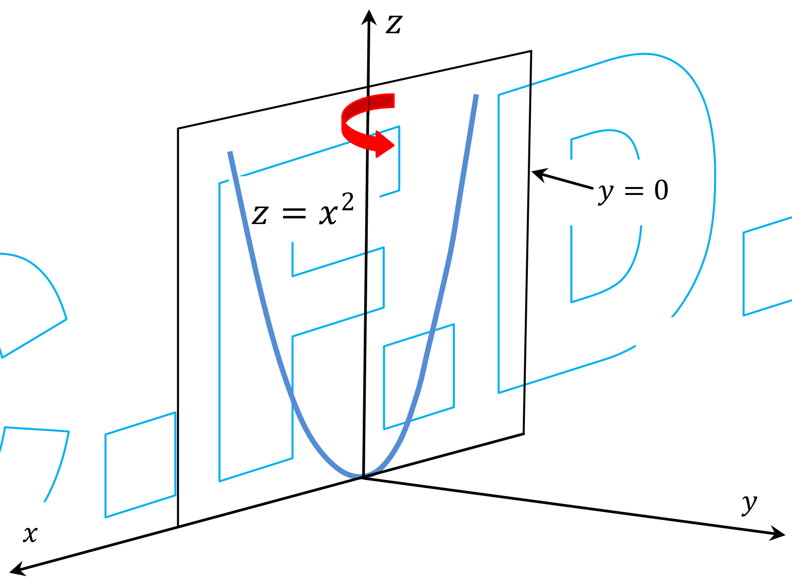
Su dominio y rango respectivamente son:

$$D_f = \mathbb{R}^2 \quad ; \qquad R_f = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$$

La gráfica de f obtenida por computadora es la siguiente superficie en $\mathbb{R}^3$:



Se trata de un **paraboloide de revolución**, es decir que la superficie correspondiente a su gráfica puede obtenerse por ejemplo haciendo girar la parábola (sobre el plano $y = 0$) de ecuación $z = x^2$ alrededor del eje z:

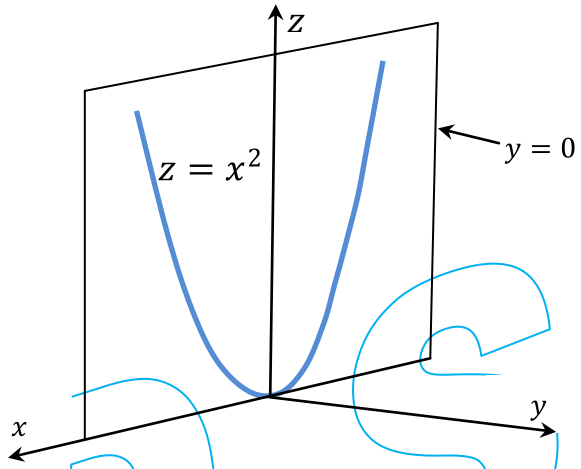


C.F.D.S

Se puede obtener una gráfica aproximada del paraboloide del siguiente modo:

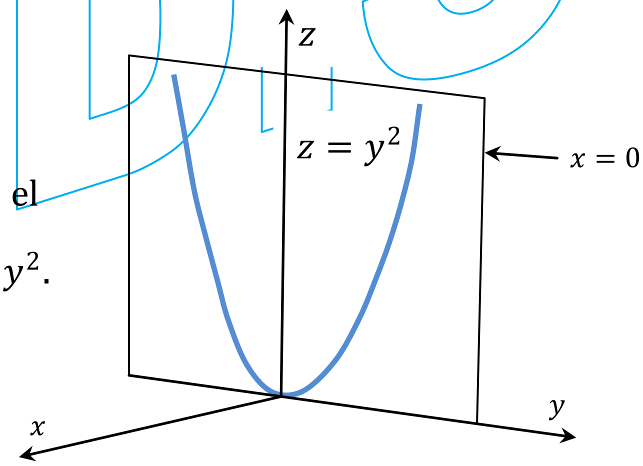
- Haciendo $y = 0 \Rightarrow z = x^2 + \underbrace{0}_{y}{}^2 = x^2$.

O sea que la curva de intersección del grafo de f con el plano $y = 0$ es una parábola de ecuación $z = x^2$.



- Haciendo $x = 0 \Rightarrow z = \underbrace{0}_{x}{}^2 + y^2 = y^2$

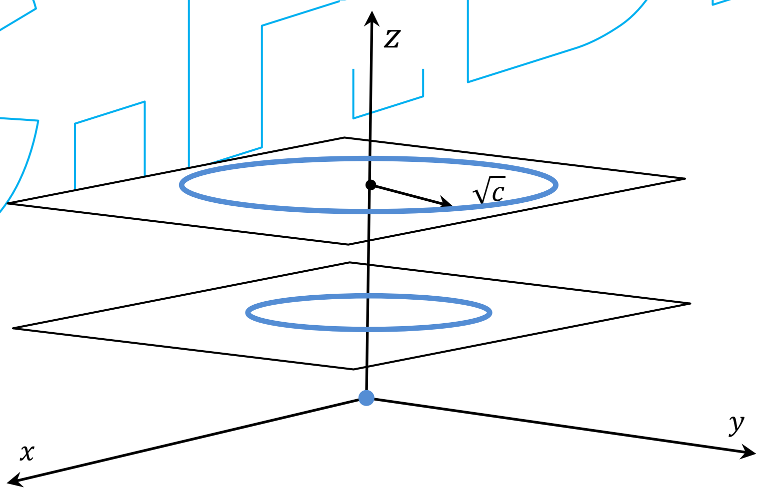
La curva de intersección del grafo de f con el plano $x = 0$ es una parábola de ecuación $z = y^2$.



- Haciendo $z = c$ con $c \geq 0$ se tiene $z = c = x^2 + y^2$ o bien

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2 \; ; \; z = c$$

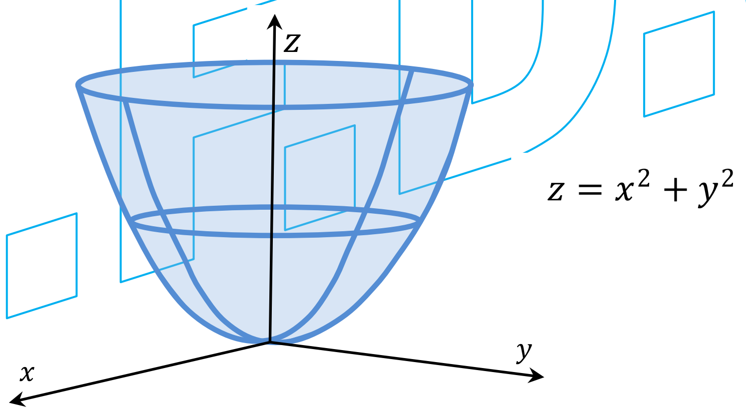
Por lo tanto las curvas de intersección del grafo de f con planos horizontales de ecuaciones $z = c$ son circunferencias de radios $\sqrt{c}$ crecientes a medida que el valor de c aumenta.



Si $z = c = 0$ se tiene la ecuación $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{0}\right)^2 = 0$, cuya única solución es $(x, y) = (0,0)$, es decir que la intersección del grafo de f con el plano $z = 0$ es el punto correspondiente al origen del sistema de coordenadas.

Si $z = c < 0$ la ecuación $x^2 + y^2 = c$ no tiene solución por lo que no existe gráfica de f para $z < 0$.

Luego la gráfica aproximada de f es el siguiente **paraboloide circular**:

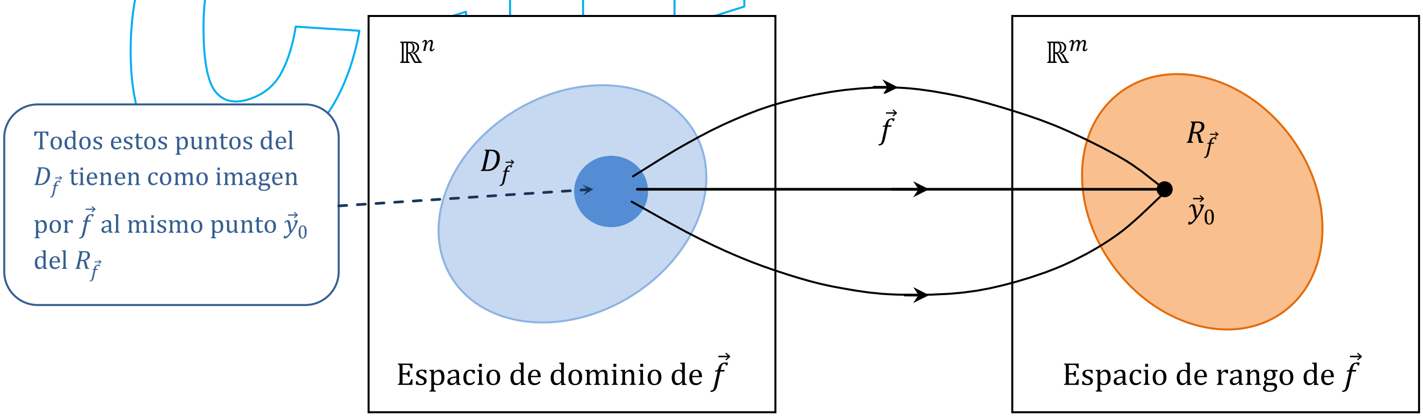


La visualización del grafo de una función $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sólo es posible si $n + m \leq 3$.

Si bien el grafo de la función es el que da la información más completa de la misma, cuando $n + m > 3$ el grafo de $\vec{f}$ no puede visualizarse, entonces con el fin de superar esta dificultad y poder obtener información del comportamiento de una función se introduce la idea de conjuntos de nivel.

CONJUNTOS DE NIVEL

Son subconjuntos del dominio de $\vec{f}$ que resultan de dar la contra-imagen de un punto fijo del rango de $\vec{f}$.



Definición

Sean

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$$

El conjunto de nivel de valor $\vec{y}_0$ de $\vec{f}$ es: $\left\{ \vec{x} \in D_{\vec{f}} \,\middle|\, \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}_0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, sea el campo vectorial $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por:

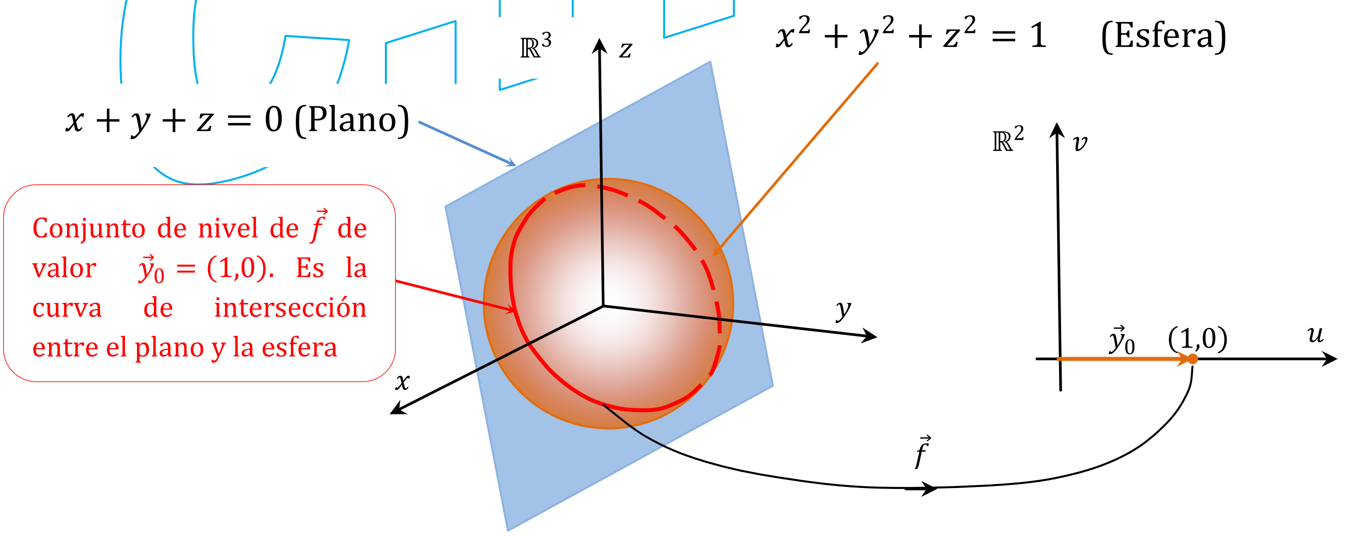
$$\vec{f}(x, y, z) = \left(\overbrace{x^2 + y^2 + z^2}^{f_1}, \overbrace{x + y + z}^{f_2} \right)$$

para el cual se quiere obtener el conjunto de nivel de valor $\vec{y}_0 = (u_0, v_0) = (1,0)$.

Entonces, el conjunto de nivel requerido es el conjunto de todas las ternas ordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \overbrace{1}^{u_0} \\ x + y + z = \underbrace{0}_{v_0} \end{cases}$$

Es decir: $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0 \}$.



C.F.D.S
C.F.D.S

EJERCICIOS

1. Determine el dominio de las siguientes funciones y haga un gráfico aproximado del mismo.

xi- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2-4}}$

xii- $f(x,y) = ln(xy)$

xiii- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$

xiv- $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

xv- $f(x,y) = ln(1+xy)$

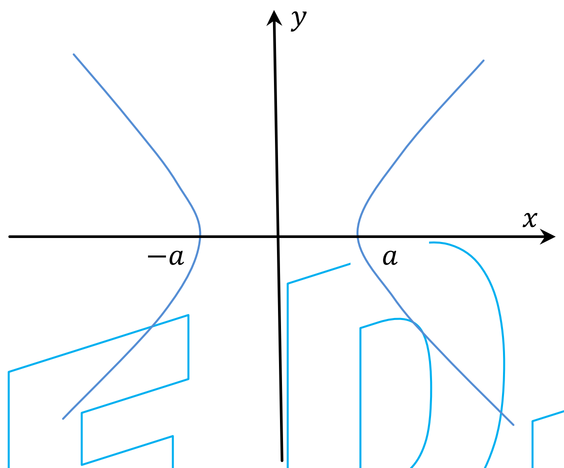
xvi- $f(x,y) = arccos(x^2+y^2)$

SOLUCIONES DE ALGUNOS EJERCICIOS

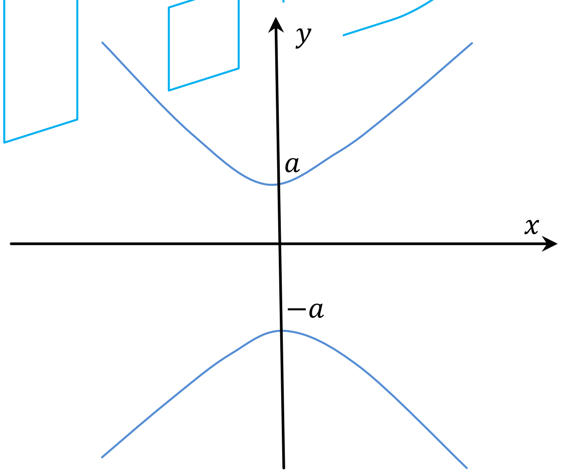
Repaso

Hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



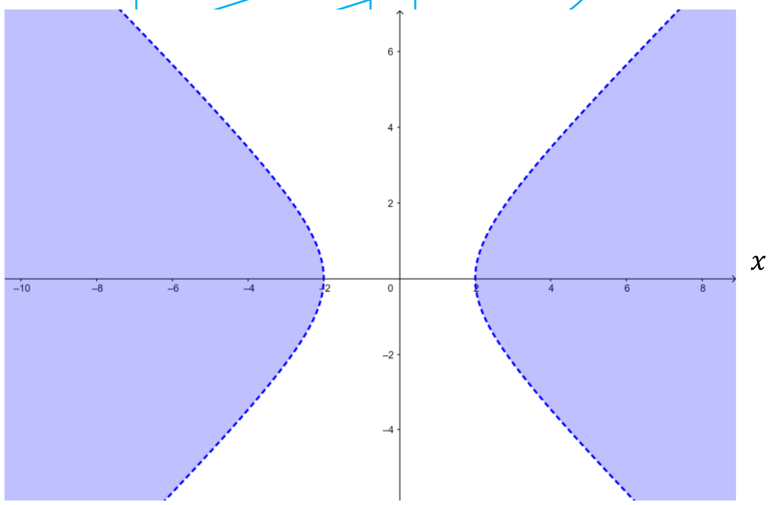
C.F.D.S

i- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2-4}}$

$$\boxed{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 4 > 0\}}$$

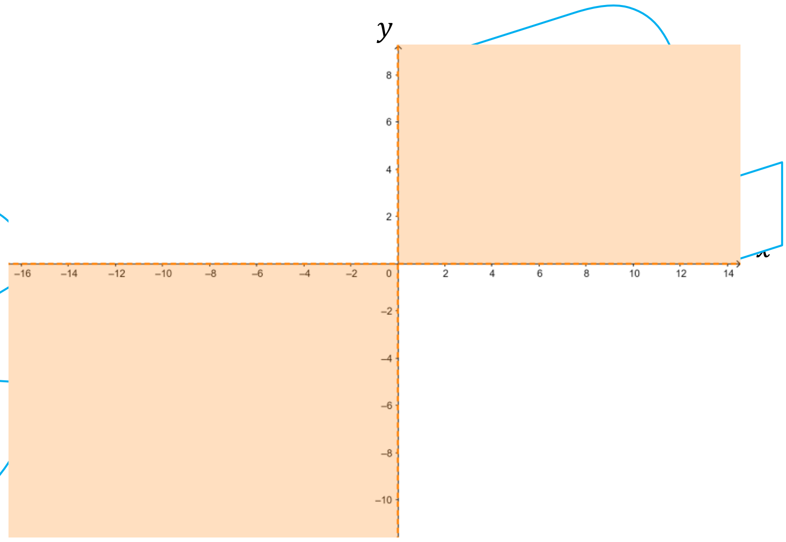
$x^2 - y^2 - 4 > 0\,,\qquad x^2 - y^2 > 4\quad,\quad \boxed{\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} > 1}$

La gráfica del dominio de f es:



ii- $f(x,y) = ln(xy)$

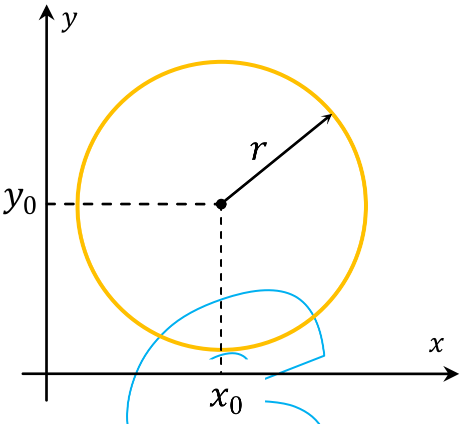
$$\boxed{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}}$$



Repaso

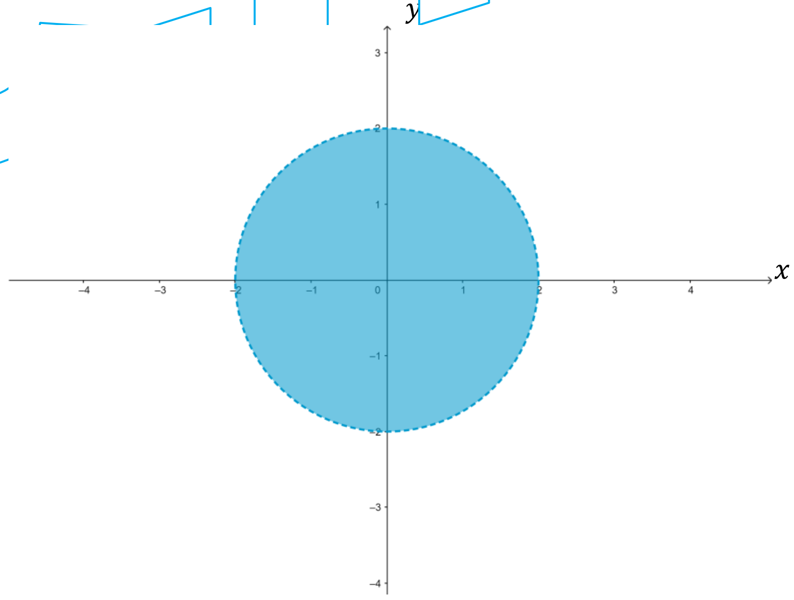
Ecuación de una circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio r:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

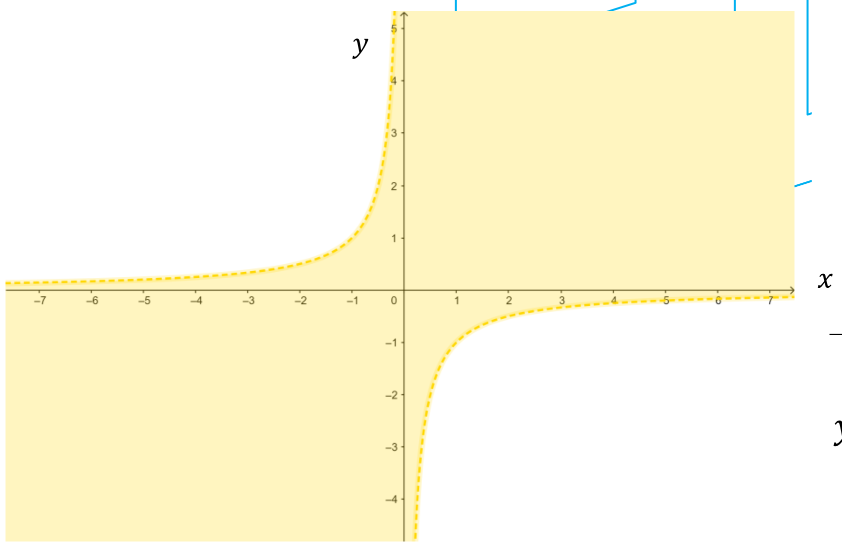


iii- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$

$\boxed{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}}$; $x^2 + y^2 = 2^2$



v- $f(x,y) = ln(1 + xy)$



$\boxed{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + xy > 0\}}$

$$1 + xy > 0$$

$$xy > -1$$

$y = -\frac{1}{x}$ hipérbola equilátera

2. Grafique (aproximadamente) los conjuntos de nivel de las siguientes funciones para los valores indicados.

C.F.D.S

i-	$f(x,y) = x + y$	, $k \in \{-1,0,1\}$
ii-	$f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$	, $k \in \{-4,0,12\}$
iii-	$f(x,y) = e^{xy}$	, $k \in \{0,1,4\}$
iv-	$f(x,y) = y^2 - x$	, $k \in \{-2,0,2\}$
v-	$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$	, $k \in \{0,1\}$
vi-	$f(x,y,z) = x + y + z$	, $k \in \{-1,0,1\}$
vii-	$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$	, $k \in \{0,1\}$
viii-	$f(x,y,z) = x^2 + y^2$	, $k \in \{4,9\}$

SOLUCIONES DE ALGUNOS EJERCICIOS

i- $f(x,y) = x + y$, $k \in \{-1,0,1\}$

$$\underbrace{z} = x + y$$
$$\downarrow$$
$$\overbrace{k} = x + y$$

- Si $k = -1$, $-1 = x + y \Rightarrow y = -1 - x$

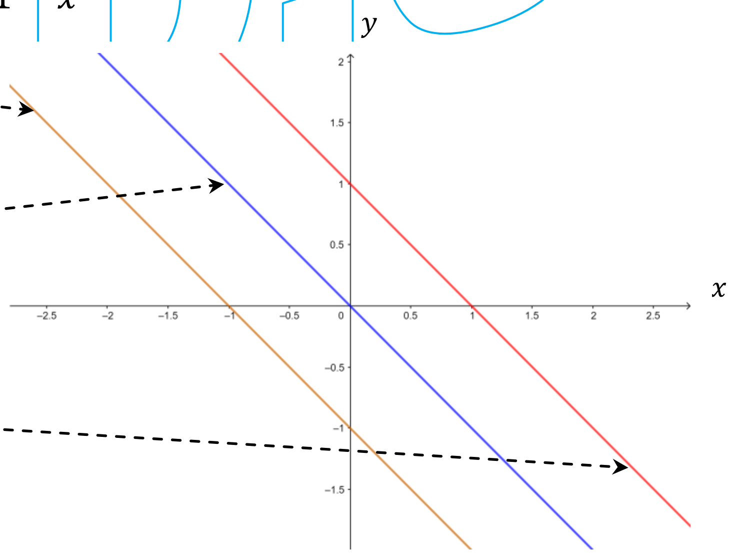
$\boxed{k = -1, \quad y = -1 - x}$

- Si $k = 0$, $0 = x + y \Rightarrow y = -x$

$\boxed{k = 0, \quad y = -x}$

- Si $k = 1$, $1 = x + y \Rightarrow y = 1 - x$

$\boxed{k = 1, \quad y = 1 - x}$



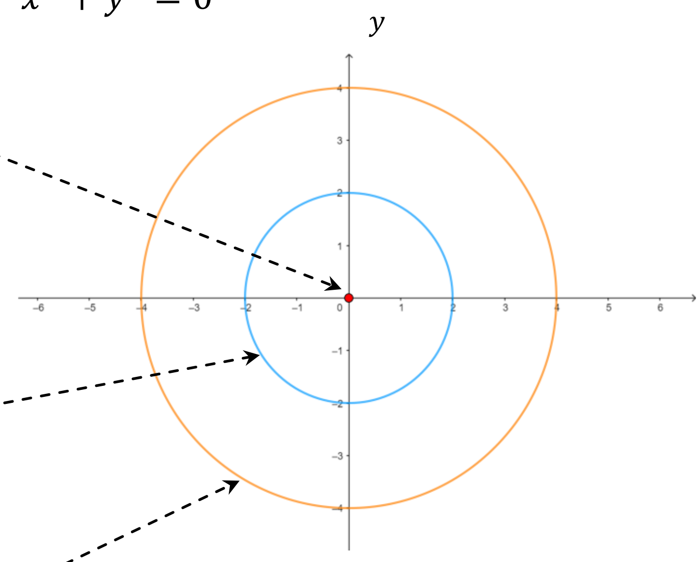
---

ii- $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $k \in \{-4,0,12\}$

$$\underbrace{z} = x^2 + y^2 - 4$$
$$\downarrow$$
$$\overbrace{k} = x^2 + y^2 - 4$$

- Si $k = -4$, $\; -4 = x^2 + y^2 - 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} k = -4,\;\; x^2 + y^2 = 0 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow (0{,}0) \text{ única solución} \end{array}}$$



- Si $k = 0$, $\; 0 = x^2 + y^2 - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

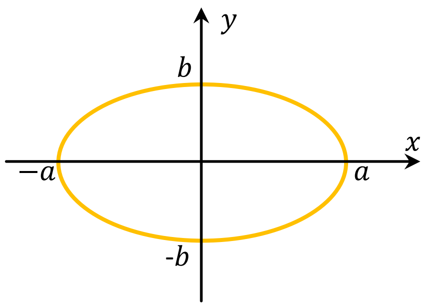
$$\boxed{k = 0,\;\; x^2 + y^2 = 2^2}$$

- Si $k = 12$, $\; 12 = x^2 + y^2 - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

$$\boxed{k = 12,\; x^2 + y^2 = 4^2}$$

Repaso

Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a > 0, b > 0$



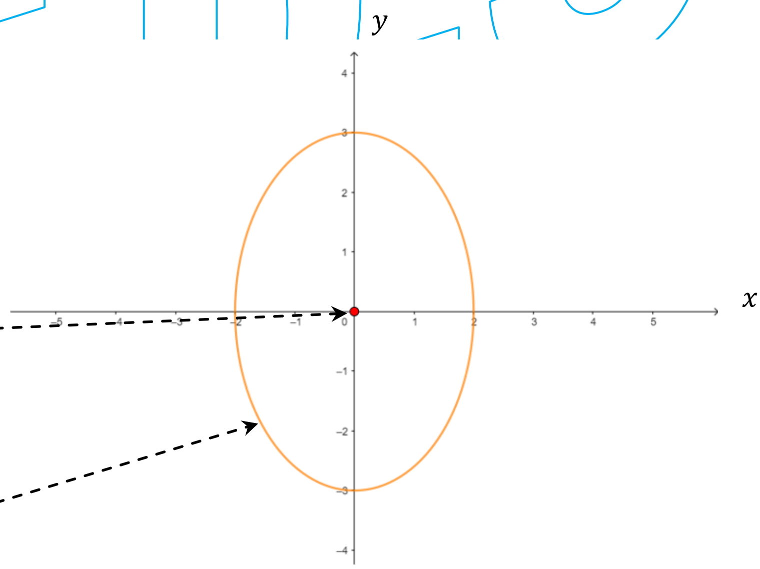
v- $\quad f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ $\qquad$, $\quad k \in \{0{,}1\}$

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

$$k = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

- Si $k = 0$, $\; 0 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

$$\boxed{k = 0,\;\; (0{,}0)}$$



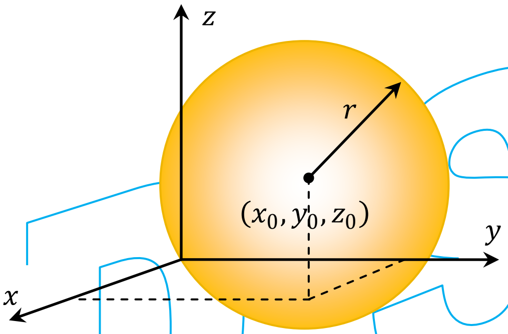
- Si $k = 1$, $\; 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

$$\boxed{k = 1\,,\quad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1}$$

Repaso

Ecuación de una esfera con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$



vii- $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $k\in\{0,1\}$

$$w = f(x,y,z)$$

$$w = x^2+y^2+z^2$$

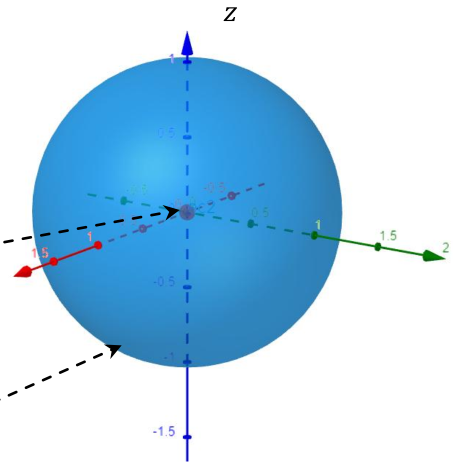
$$k = x^2+y^2+z^2$$

- Si $k=0$, $0=x^2+y^2+z^2$

$$\boxed{k=0,\ (0,0,0)}$$

- Si $k=1$, $1=x^2+y^2+z^2$

$$\boxed{k=1,\quad x^2+y^2+z^2=1^2}$$



viii- $f(x,y,z)=x^2+y^2$, $k\in\{4,9\}$

$$w = x^2+y^2$$

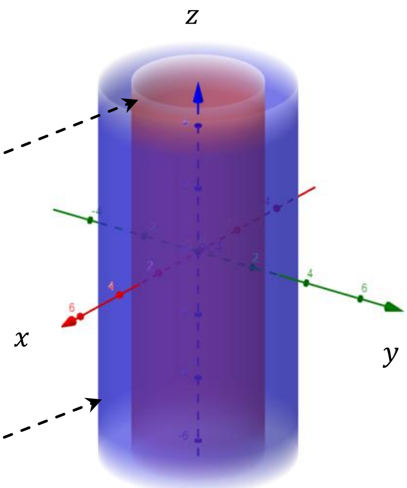
$$k = x^2+y^2$$

- Si $k=4$, $4=x^2+y^2$

$$\boxed{k=4,\quad \underbrace{x^2+y^2=2^2}_{\text{ec. cilindro de eje } z \text{ de radio } 2}}$$

- Si $k=9$, $9=x^2+y^2$

$$\boxed{k=9,\quad \underbrace{x^2+y^2=3^2}_{\text{ec. cilindro de eje } z \text{ de radio } 3}}$$



C.F.D.S