NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo z se define como un par ordenado de números reales x e y

$$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \qquad \textit{notación de Hamilton}$$

donde:

$$x = Re(z) \qquad \textit{parte real de } z$$
$$y = Im(z) \qquad \textit{parte imaginaria de } z$$

Ya que todo número complejo de la forma

$$z = (x, 0)$$

es **real puro**, y todo complejo de la forma

$$z = (0, y)$$

es **imaginario puro**, vemos que el **conjunto de los números complejos** $\mathbb{C}$ incluye tanto al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ como al de los números imaginarios. Es decir, tanto $\mathbb{R}$ como el conjunto de los números imaginarios son subconjuntos de $\mathbb{C}$.

Igualdad de números complejos

$$\overbrace{(x_1, y_1)}^{z_1} = \overbrace{(x_2, y_2)}^{z_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Suma de números complejos

Se define como:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Opuesto de un número complejo

$\forall\, z = (x, y)\ \exists$ un opuesto: $-z = (-x, -y)\ /\ \ z + (-z) = (0,0)$, donde $(0,0)$ es el elemento neutro de la suma.

Resta de números complejos

Se define como:

$$z_1 - z_2 = z_1 + \underbrace{(-z_2)}_{opuesto\ \ del\ sustraendo} = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Multiplicación de números complejos

Se define como:

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

Inverso de un número complejo

$$\forall\, z = (x, y) \neq (0,0)\ \exists\ \text{un inverso:}\ z^{-1} /\ \ z z^{-1} = (1,0)$$

Para obtener z^{-1} se hace lo siguiente.

Sean $z = (x, y)$ y $z^{-1} = (u, v)$, por definición de inverso se tiene que:

$$\underbrace{z z^{-1}}_{} = (1,0)$$

$$\big\downarrow$$

$$\overbrace{(xu - yv, yu + xv)}^{por\ def.\ de\ multip.} = (1,0)$$

Por igualdad de números complejos:

$$\begin{cases} xu - yv = 1 & ,partes\ reales\ iguales \\ yu + xv = 0 & ,partes\ imag.iguales \end{cases}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$z^{-1} = \left(\frac{\overbrace{x}^{u}}{x^2 + y^2}, \frac{\overbrace{-y}^{v}}{x^2 + y^2} \right) , \qquad z \neq (0,0)$$

División de números complejos

Se define como:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \underbrace{z_2^{-1}}_{inverso\ \ del\ divisor} = (x_1, y_1)\overbrace{\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)}^{z_2^{-1}}$$

$$= \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right), \quad z_2 \neq (0,0)$$

Ejemplos

Sean $z_1 = (5,0)$ y $z_2 = (2,-1)$.

a) $z_1 + z_2 = (5,0) + (2,-1) = (5 + 2, 0 - 1) = (7,-1)$
b) $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (5,0) + (-2,1) = (5 - 2, 0 + 1) = (3,1)$
c) $z_1 z_2 = (5,0)(2,-1) = \big(5.2 - 0.(-1), (0).2 + 5.(-1)\big) = (10,-5)$
d) $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \left(\frac{5.2+0.(-1)}{2^2+(-1)^2}, \frac{0.2-5.(-1)}{2^2+(-1)^2}\right) = \left(\frac{10}{5}, \frac{5}{5}\right) = (2,1)$

Forma binómica de un número complejo

Mediante las operaciones de suma y multiplicación se puede expresar a z como:

$$z = (x, y) = (x, 0) + \underbrace{(0, y)}$$

$$= \underbrace{(x, 0)}_{n^o real\ \ puro\ =x} + \overbrace{\underbrace{(0,1)}\ \underbrace{(y, 0)}_{n^o real\ \ puro\ =y}}$$

n^o imaginario puro que

*denominamos **"unidad imaginaria"***

*y simbolizamos con la letra **i***

Luego

$$\boldsymbol{z = x + iy} \qquad \textit{notación de Euler}$$

es la forma binómica del número complejo z.

Como:

$z^0 = 1$, si $z \neq 0$

$z^1 = z$

$z^2 = zz$

$z^3 = z^2 z$

$z^4 = z^3 z = z^2 z^2 = (z^2)^2$

$z^5 = z^4 z = (z^2)^2 z$

etc.

Vemos que la **unidad imaginaria**

$i = (0,1)$ tiene la **propiedad**:

$$\overbrace{i^2 = i\,i} = (0,1)(0,1) = \underbrace{(-1,0)}_{n^o\ real\ puro}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Con lo cual podemos pensar que i es una raíz cuadrada de -1. Pero como $(-i)^2 = i^2 = -1$, entonces $-i$ es también una raíz cuadrada de -1.

Luego, adoptamos la convención:

$$\boxed{i = \sqrt{-1}} = (0,1)$$

"$\boldsymbol{i}$ es la **raíz cuadrada <u>principal</u>** de $\mathbf{-1}$".

En general, si N es cualquier número real positivo

$$\sqrt{-N} = \sqrt{N}\, i$$

Por ejemplo

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16}\, i = 4i$$

Las sucesivas potencias enteras no negativas de i son:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$ (propiedad de la unidad imaginaria)

$i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i$

$\vdots$

$i^{31} = (i^2)^{15} i = (-1)^{15} i = -i$

$i^{32} = (i^2)^{16} = (-1)^{16} = 1$

$\vdots$

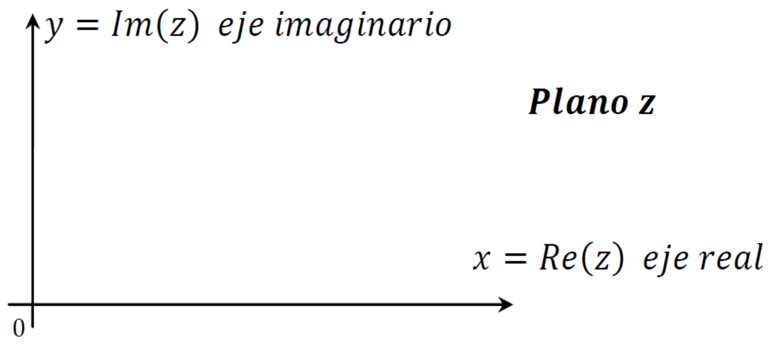
O también, si n es un entero no negativo entonces:

$$i^n = i^r$$

donde $r = resto\ de \frac{n}{4}$, r sólo puede ser 0,1,2 ó 3.

Representación cartesiana de un número complejo. Plano complejo (plano z) o plano de Argand.

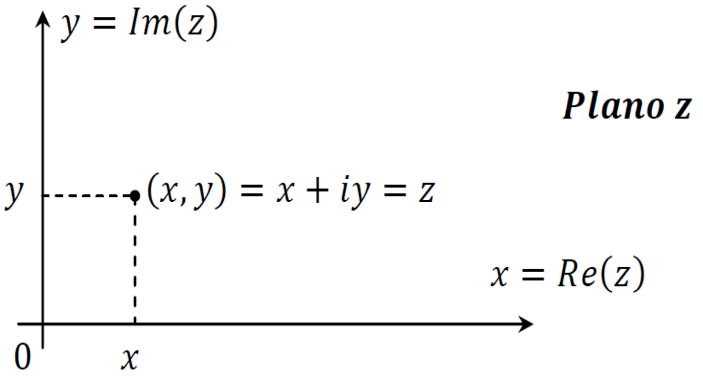
En relación con un sistema cartesiano ortogonal cuyos ejes se llaman eje real y eje imaginario, respectivamente, utilizado para representar números complejos:



tenemos que se pueden hacer 2 interpretaciones geométricas de los números complejos.

Primera interpretación geométrica: un punto en el plano z.

El número complejo $z = (x, y) = x + iy$ por ser un par ordenado de números reales puede representarse por un punto del plano z, donde x e y son las coordenadas de ese punto.

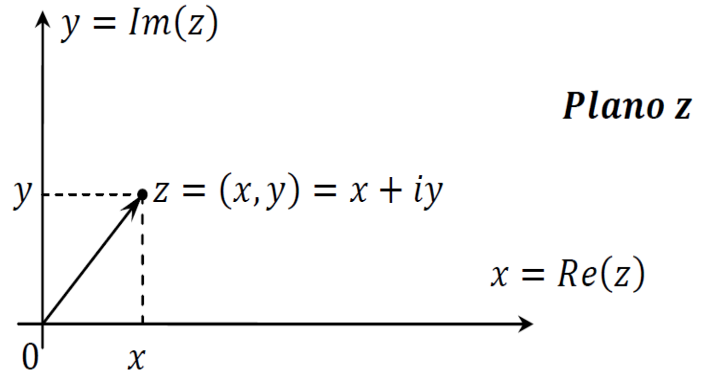


Es decir que el conjunto $\mathbb{C}$ puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de puntos del plano complejo.

$z = 0 = (0,0) = 0 + i0$ "el origen del plano complejo" es el punto de intersección de los ejes real e imaginario.

Segunda interpretación geométrica: un vector en el plano z.

El nº complejo z puede pensarse también como el segmento dirigido **(vector)** de origen O y extremo z, donde x e y son las componentes escalares del vector z.



Distintas formas de expresar un número complejo

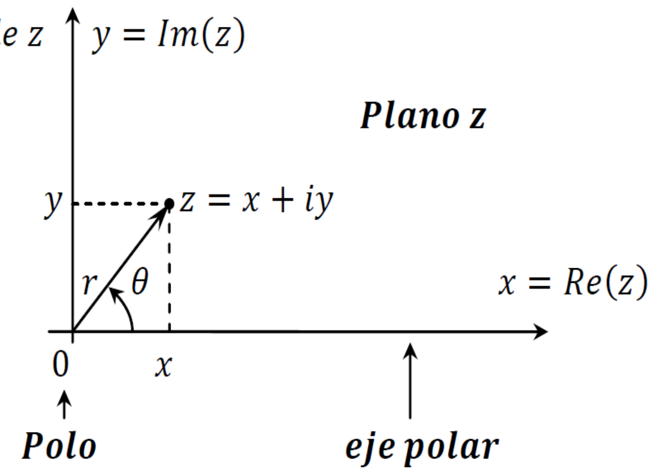
Vimos hasta ahora 2 formas de expresar un nº complejo: la de par ordenado y la binómica. Existen otras formas más que son las siguientes.

Forma polar

El nº complejo $z \neq 0$ puede expresarse como:

$\boldsymbol{z = r\angle\theta}$ $\quad$ *forma polar*

coordenadas polares de z



donde

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$: **módulo o valor absoluto de z**

  $r > 0$: distancia del origen O al punto z, es decir, la longitud del vector correspondiente a z.

- $\theta = arg\, z$: **argumento de z**

  θ : es el ángulo que forma con el eje x positivo el segmento que va del origen a z. Se considera positivo cuando se mide en sentido anti-horario y negativo cuando se mide en sentido horario.

θ es **multiforme** (multivaluado) con infinitos valores posibles.

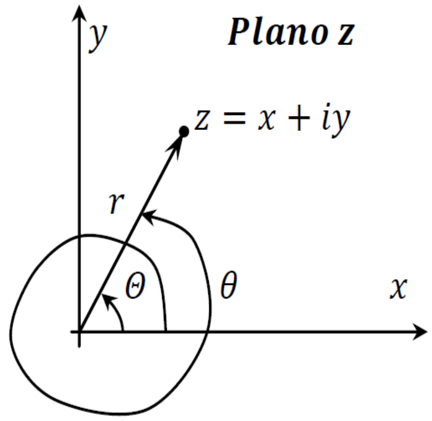
Es decir, si definimos al **<u>argumento principal de z</u>**, denotado $\Theta = Arg\, z$, como el único valor de $arg\, z$ tal que:

$$-\pi < arg\, z \leq \pi$$

Luego

$$\boxed{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta} + \underbrace{\boldsymbol{2k\pi}}_{\substack{\textit{múltiplo entero} \\ \textit{de } 2\pi \textit{ radianes}}} \quad ; \; k \in \mathbb{Z} \;, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)}$$

$arg\, z \quad Arg\, z$



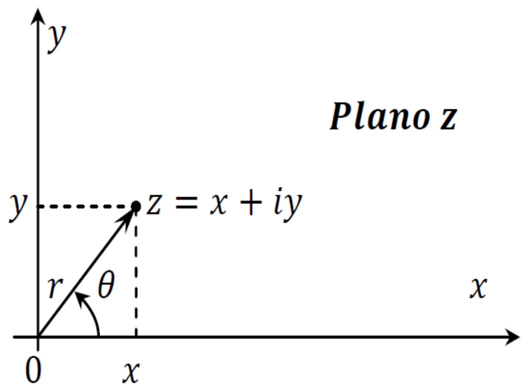
es también un valor válido del argumento para el nº z.

Si $k = 0 \Rightarrow \theta = \Theta$ valor principal de $arg\, z$ (argumento principal de z)

Forma trigonométrica

Si conocemos las coordenadas polares del complejo $z \neq 0$, tenemos que:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r sen\theta \end{cases}$$



entonces podemos escribir:

$$z = x + iy = r\cos\theta + i\, r sen\theta$$

Sacando r factor común

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\, sen\theta)} \qquad \textit{forma trigonométrica}$$

Forma exponencial

Partiendo de la forma trigonométrica de un nº complejo $z \neq 0$:

$$z = r\left(\underbrace{\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta}\right)$$

y utilizando la fórmula o identidad de Euler:

$$\boxed{e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\theta\,,\ \ \theta: real}$$

podemos escribir

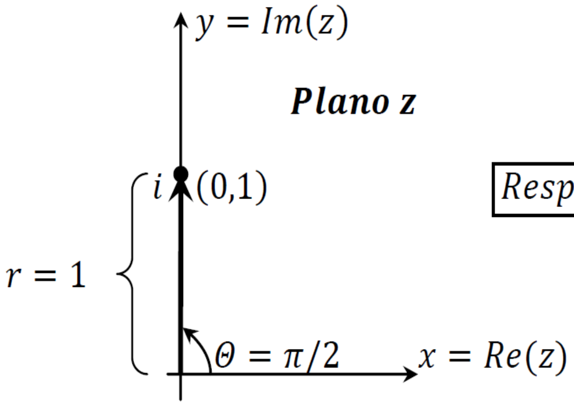
$$\boldsymbol{z = r\,\overbrace{e^{i\theta}}} \qquad \textit{forma exponencial}$$

Ejercicios. (de la guía)

Represente en forma polar:

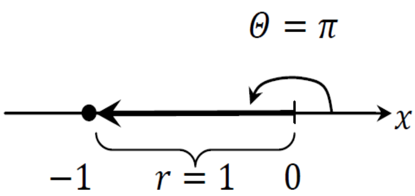
28. $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i^2}, \boldsymbol{i^3}, \boldsymbol{i^4}, \ldots\}$

$\boldsymbol{i}$



$$\boxed{Resp.:\ \ \boldsymbol{i = 1\angle\pi/2}}$$

$\boldsymbol{i^2 = -1}$



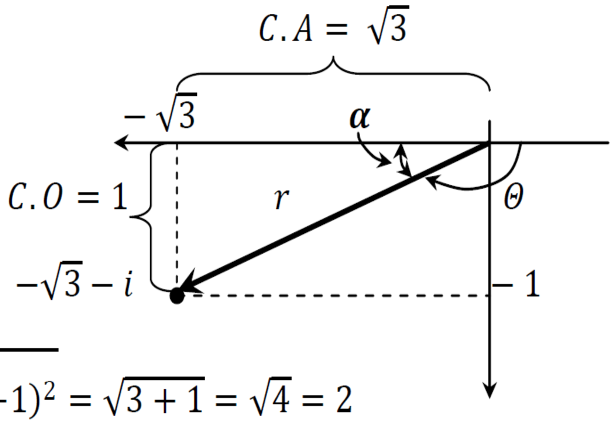
$$\boxed{Resp.:\ \ \boldsymbol{i^2 = 1\angle\pi}}$$

$\boldsymbol{i^3 = i^2 i = -i}$ $$\boxed{Resp.:\ \ \boldsymbol{i^3 = 1\angle -\pi/2}}$$

$\boldsymbol{i^4 = (i^2)^2 = 1}$ $$\boxed{Resp.:\ \ \boldsymbol{i^4 = 1\angle 0}}$$

Ejemplo

$-\sqrt{3} - i$



$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Theta = -(\pi - \alpha) \qquad \text{donde } \alpha = tg^{-1}\left(\frac{C.O}{C.A}\right) = tg^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\Theta = -\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} \qquad \text{argumento principal}$$

$$\boxed{Resp.: \quad -\sqrt{3} - i = 2\angle - 5\pi/6}$$

Respuestas a los ejercicios: (de la guía)

29. $1 + i$	**30.** $\sqrt{3} + i$
$Resp.: \quad \sqrt{2}\angle\frac{\pi}{4}$	$Resp.: \quad 2\angle\frac{\pi}{6}$

Conjugado de número complejo

Dos números complejos que solamente difieren en el signo de sus partes imaginarias, se llaman complejos conjugados.

O sea que, dado el complejo

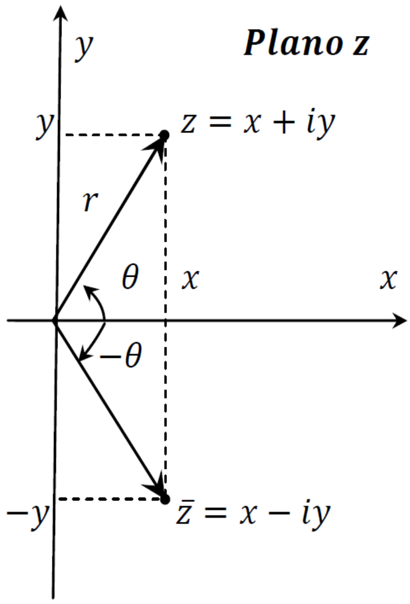
$$z = (x, y) = x + iy$$

entonces

$$\bar{z} = (x, -y) = x + i(-y) = x - iy$$

es el **complejo conjugado** de z.

Geométricamente, $\bar{z}$ es siempre simétrico de z respecto del eje x.



$$|\bar{z}| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \textit{módulo de } \bar{z} \quad (z \text{ y } \bar{z} \textit{ tienen el mismo módulo})$$

Si

$$z = \overbrace{(x, y)}^{f.\ par\ ordenado} = \overbrace{x + iy}^{f.\ binómica} = \overbrace{r(cos\theta + i\ sen\theta)}^{f.\ trigonométrica} = \overbrace{re^{i\theta}}^{f.\ exponencial} = \overbrace{r\angle\theta}^{f.\ polar}$$

entonces

$$\bar{z} = \overbrace{(x, -y)}^{f.\ par\ ordenado} = \overbrace{x + i(-y)}^{f.\ binómica} = \overbrace{r\big(cos\theta + i\ (-sen\theta)\big)}^{f.\ trigonométrica} = \overbrace{re^{-i\theta}}^{f.\ exponencial} = \overbrace{r\angle - \theta}^{f.\ polar}$$

Suma y resta de números complejos en forma binómica

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

Se suman /restan sus partes reales e imaginarias en forma independiente.

Ejercicios. (de la guía)

Calcule la suma y la diferencia de cada par de complejos:

2. $\boldsymbol{(1 + i); i}$

$z_1 = 1 + i1 \;\; ; \;\; z_2 = i = 0 + i1$

$z_1 + z_2 = (1 + 0) + i(1 + 1) = 1 + i2 = 1 + 2i$

$$z_1 - z_2 = (1-0) + i(1-1) = 1 + i0 = 1$$

$$\boxed{Resp.:\ 1+2i\ ,\ \ 1}$$

6. $\boldsymbol{(4+5i); (1-i)}$

$$z_1 = 4 + i5 \ \ ; \ \ z_2 = 1 - i = 1 + i(-1)$$

$$z_1 + z_2 = (4+1) + i(5+(-1)) = 5 + 4i$$

$$z_1 - z_2 = (4-1) + i(5-(-1)) = 3 + 6i$$

$$\boxed{Resp.:\ 5+4i\ ,\ \ 3+6i}$$

Multiplicación de números complejos en forma exponencial y binómica.

Forma exponencial

$$z_1\, z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = \underbrace{r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}}_{f.\ exponencial} = \underbrace{r_1 r_2 \angle \theta_1 + \theta_2}_{f.\ polar}$$

donde $r_1 r_2 = |z_1 z_2|$, $\theta_1 + \theta_2 = arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$

Forma binómica

$$z_1\, z_2 = \left(x_1 + iy_1\right)\left(x_2 + iy_2\right) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$= \underbrace{x_1 x_2 - y_1 y_2}_{Re(z_1 z_2)} + i \left(\underbrace{y_1 x_2 + x_1 y_2}_{Im(z_1 z_2)} \right)$$

Vemos que (obviamente) se llega al resultado correspondiente a la definición de multiplicación que se dio en forma de par ordenado, siguiendo las reglas del álgebra ordinaria con el agregado de que i^2 se sustituye por -1. O sea, se multiplican los números complejos como polinomios (producto de 2 binomios) y se sustituye i^2 por -1.

Ejercicios. (de la guía)

Calcule el producto de cada par de complejos:

1. $\boldsymbol{i}; \mathbf{2}$

$z_1 = i \;\; ; \;\; z_2 = 2$

$z_1\, z_2 = i2 = 2i$ $\boxed{Resp.:\ 2i}$

5. $(\mathbf{3} - \mathbf{2}\boldsymbol{i}); (\mathbf{4} + \boldsymbol{i})$

$z_1 = 3 - 2i \;\; ; \;\; z_2 = 4 + i$

$$z_1\, z_2 = \left(3 \underbrace{-2i}\right)(4 + i) = 12 + 3i - 8i - 2i^2 = 14 - 5i$$

$\boxed{Resp.:\ 14 - 5i}$

Realice las operaciones indicadas y exprese el resultado en forma binómica:

8. $(\mathbf{3} - \mathbf{4}\boldsymbol{i})(\mathbf{3} - \mathbf{4}\boldsymbol{i})(\mathbf{3} + \mathbf{4}\boldsymbol{i})(\mathbf{3} + \mathbf{4}\boldsymbol{i})$

$$(3 - 4i)(3 - 4i)(3 + 4i)(3 + 4i) = (3 - 4i)^2(3 + 4i)^2$$

$$= \Bigg[\underbrace{(3 - 4i)(3 + 4i)}_{diferencia\ \ de\ cuadrados}\Bigg]^2$$

$$= [3^2 - (\ \ 4i)^2]^2$$

$$= [9 + 16]^2 = 25^2 = 625 + i0$$

$\boxed{Resp.:\ 625 + 0i}$

Empleando la forma polar, calcule:

31. $\boldsymbol{i}(\mathbf{1} - \boldsymbol{i}\sqrt{\mathbf{3}})(\sqrt{\mathbf{3}} + \boldsymbol{i})$

$$Resp.: \quad i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = \left(1\angle\frac{\pi}{2}\right)\left(2\angle-\frac{\pi}{3}\right)\left(2\angle\frac{\pi}{6}\right) = 1.2.2\angle\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \boxed{4\angle\frac{\pi}{3}}$$

División de números complejos en forma exponencial y binómica.

Forma exponencial

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i\theta_1}e^{-i\theta_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}=\underbrace{\frac{r_1}{r_2}\angle\theta_1-\theta_2}_{f.\ polar}\quad ;\quad z_2\neq 0$$

Forma binómica

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)}\left[\frac{(x_2-iy_2)}{\underbrace{(x_2-iy_2)}}\right]\quad ;\quad z_2\neq 0$$

Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{\underbrace{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}_{diferencia\ \ de\ cuadrados}}=\frac{x_1x_2-ix_1y_2+iy_1x_2-i^2y_1y_2}{x_2^2-(iy_2)^2}\ ;\ z_2\neq 0$$

$$=\underbrace{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}}_{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}+i\underbrace{\left(\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)}_{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

Ejercicios. (de la guía)

Calcule el cociente de cada par de complejos:

4. $\mathbf{5; 2+i}$

   En forma binómica: $\frac{5}{2+i}=\frac{5}{2+i}\left(\frac{2-i}{2-i}\right)=\frac{10-i5}{2^2-i^2}=\frac{10-i5}{4+1}=\frac{10}{5}-\frac{5}{5}i=\boxed{2-i}$

3. $\mathbf{(1+i); (1-i)}$

   En forma exponencial: $\frac{1+i}{1-i}=\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}=1e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=1e^{i\frac{\pi}{2}}=cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$

   $$=0+i=\boxed{i}$$