LÍMITE

INTRODUCCIÓN

Nos interesa analizar lo que sucede con los valores que toma una función $\vec{f}$ cerca de un punto $\vec{x}_0$ pero prescindiendo del punto mismo, esto es, analizar a la función exclusivamente en un entorno reducido de $\vec{x}_0$.

Como el objetivo es analizar lo que sucede con la función en un entorno reducido del punto $\vec{x}_0$, es necesario que cualquiera sea el entorno de $\vec{x}_0$ tomado, haya en él puntos del dominio de la función, al margen de lo que sucede en el propio $\vec{x}_0$ donde la función $\vec{f}$ puede o no estar definida. Expresamos este hecho diciendo que $\vec{x}_0$ debe ser punto de acumulación del dominio de la función. Esto es, si $\vec{x}_0$ es punto de acumulación del dominio de la función entonces todo entorno reducido de $\vec{x}_0$ contiene puntos del dominio de la función.

DEFINICIÓN

Sea

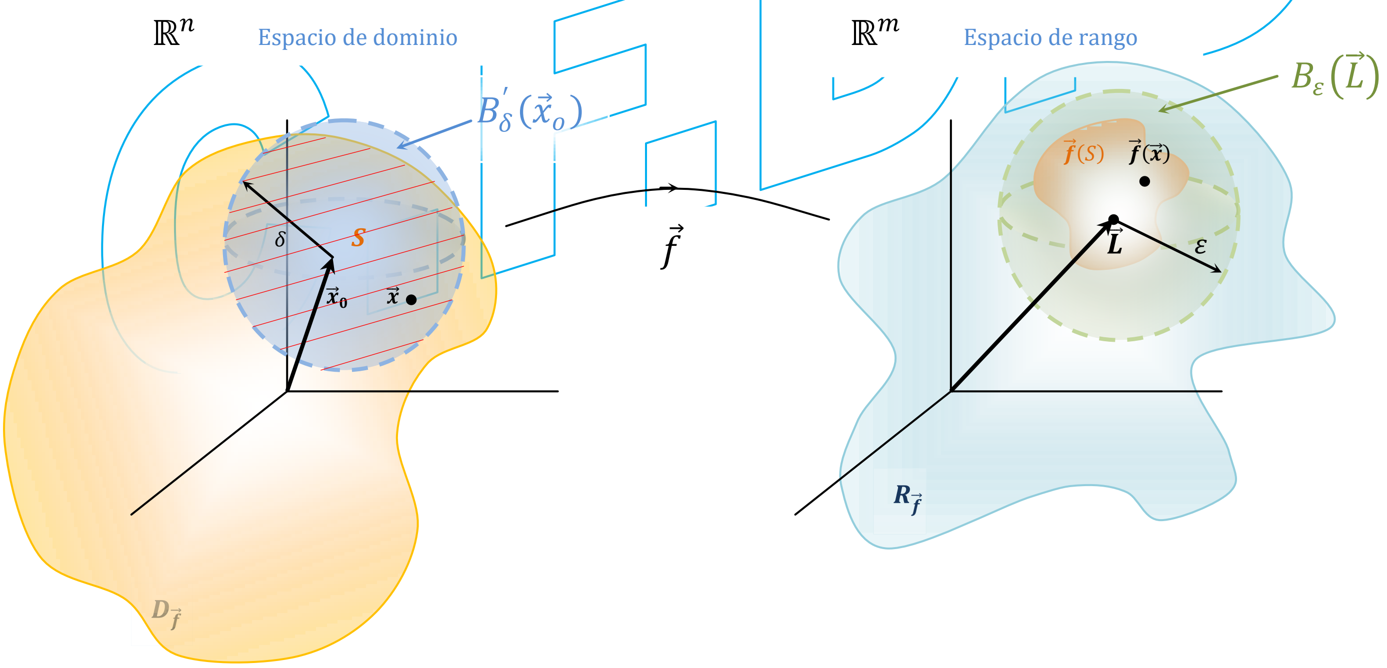
$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x}_0 \text{ punto de acumulación del } D_{\vec{f}}$$

Se dice que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}\,(\vec{x}) = \vec{L} \overset{\text{si y sólo si}}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid \underbrace{\forall\vec{x} \in B'_\delta(\vec{x}_0) \cap D_{\vec{f}}}_{0<\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta \,\wedge\, \vec{x}\in D_{\vec{f}}} \Rightarrow \underbrace{\vec{f}(\vec{x}) \in B_\varepsilon(\vec{L})}_{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{L}\|<\varepsilon}$$

Interpretación geométrica



Si $S = B'_\delta(\vec{x}_0) \cap D_{\vec{f}} \;\Rightarrow\; S \subset D_{\vec{f}}$ entonces el conjunto $\vec{f}(S)$ es la imagen de S por $\vec{f}$ y que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}\,(\vec{x}) = \vec{L}$$

significa que $\forall\, B_\varepsilon(\vec{L})$ que se tome siempre es posible conseguir un $B'_\delta(\vec{x}_0)$ tal que $\vec{f}(S) \subset B_\varepsilon(\vec{L})$.

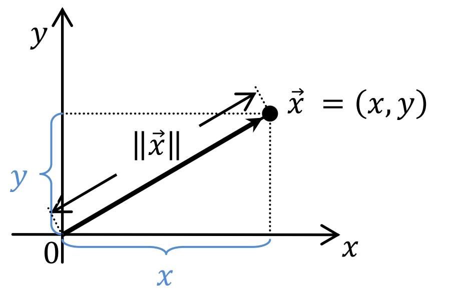
Empezamos analizando límites de campos escalares $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ -principalmente de 2 y 3 variables ($n = 2$ y 3)- ya que como quedará justificado más adelante, el cálculo de límites de campos vectoriales $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se reduce al cálculo de los límites de sus funciones coordenadas que son campos escalares.

Para demostrar que:

$$\lim_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L$$

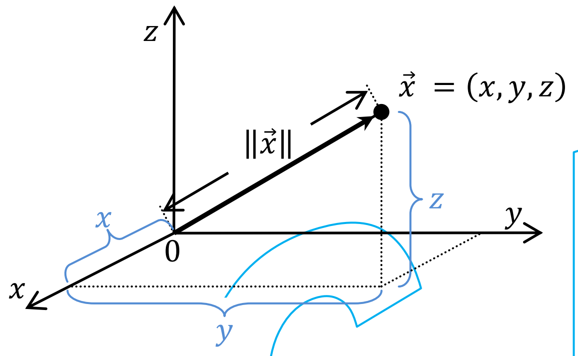
se utiliza la definición ε-δ de límite. Y para realizar las demostraciones se emplean algunas relaciones tales como las siguientes:

$\mathbb{R}^2$ *n=2*



$$\begin{aligned}
&\vec{x} = (x, y)\\
&\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \;;\; \|\vec{x}\|^2 = x^2 + y^2\\
&|x| = \sqrt{x^2} \le \|\vec{x}\| \;;\; |x|^2 = x^2 \le \|\vec{x}\|^2\\
&|y| = \sqrt{y^2} \le \|\vec{x}\| \;;\; |y|^2 = y^2 \le \|\vec{x}\|^2
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}^3$ *n=3*



$$\begin{aligned}
&\vec{x} = (x, y, z)\\
&\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \;;\; \|\vec{x}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2\\
&|x| = \sqrt{x^2} \le \|\vec{x}\| \;;\; |x|^2 = x^2 \le \|\vec{x}\|^2\\
&|y| = \sqrt{y^2} \le \|\vec{x}\| \;;\; |y|^2 = y^2 \le \|\vec{x}\|^2\\
&|z| = \sqrt{z^2} \le \|\vec{x}\| \;;\; |z|^2 = z^2 \le \|\vec{x}\|^2
\end{aligned}$$

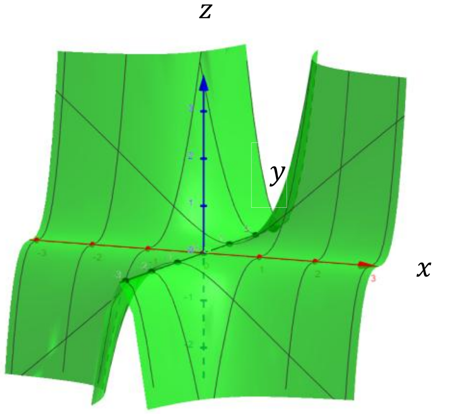
Otra relación útil es la desigualdad triangular:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \;\;;\; \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

EJEMPLOS

Para las siguientes funciones demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

a) $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$



Solución:

$f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$
$\vec{x} = (x,y)$
$\vec{x}_0 = (0,0) = \vec{0}$ punto de acumulación del D_f
$L = 0$

Aplicando la definición de límite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,|\, 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$$

$$0 < \left\| \vec{x} - \overbrace{\vec{0}}^{\vec{x}_o} \right\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left| \overbrace{\frac{x^2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{f(\vec{x})} - \overbrace{0}^{L} \right| < \varepsilon$$

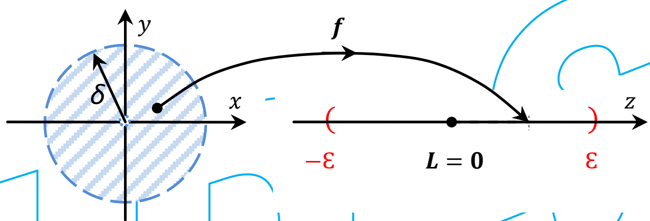
$$\underbrace{0 < \|\vec{x}\| < \delta}\ \Rightarrow \left| \frac{x^2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{x^2|y^3|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2|y|^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|^3}{\|\vec{x}\|} = \underbrace{\|\vec{x}\|^4 < \delta^4 < \varepsilon}$$

Se utilizan
$\sqrt{x^2+y^2} = \|\vec{x}\|$
$x^2 \leq \|\vec{x}\|^2$
$|y|^3 \leq \|\vec{x}\|^3$

$\Rightarrow$

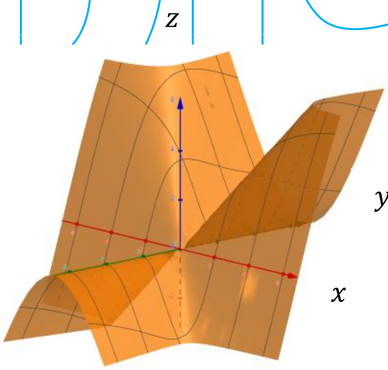
Basta con tomar $\delta < \sqrt[4]{\varepsilon}$ para que se cumpla la definición de límite, por lo tanto queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$



---

b) $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$



Solución:

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$

$\vec{x} = (x,y)$

$\vec{x}_0 = (0,0) = \vec{0}$ punto de acumulación del D_f

$L = 0$

Aplicando la definición de límite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > \ 0\ |0 < \left\| \vec{x} - \overbrace{\vec{0}}^{\vec{x}_o} \right\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left| \overbrace{\frac{3x^2y}{x^2+y^2}}^{f(\vec{x})} - 0 \right| < \varepsilon$$

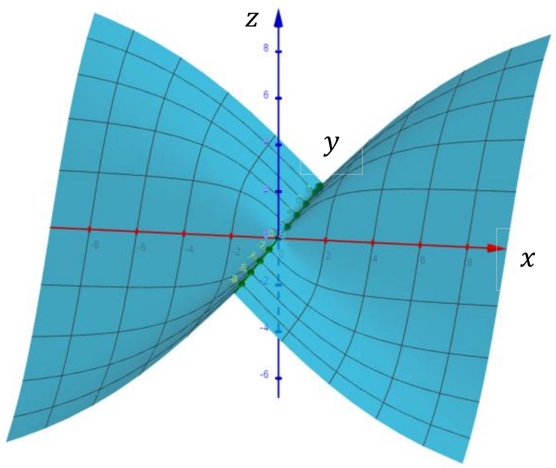
$$0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} \right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{3\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|^2} = 3\|\vec{x}\| < 3\delta < \varepsilon$$

Basta con tomar $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ para que se cumpla la definición de límite, por lo tanto queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

---

c) $f(x,y) = \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}$



<u>Solución:</u>

$D_f \ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$

$\vec{x} \ = (x,y)$

$\vec{x}_0 \ = (0,0) = \vec{0}$ punto de acumulación del D_f

$L \ = 0$

Aplicando la definición de límite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > \ 0\ |0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left| \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \left| \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \|\vec{x}\| < \delta < \varepsilon$$

Basta con tomar $\delta < \ \varepsilon$ para que se cumpla la definición de límite, por lo tanto queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

TEOREMA "FUNDAMENTAL" DE LÍMITE (TFL)

Enunciado

Sea

- $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

  $\vec{f}(\vec{x}) = \left(f_1(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\right)$

  con $f_i: D_{f_i} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, m$

- $\vec{L} \in \mathbb{R}^m$

  $\vec{L} = (L_1, \cdots, L_m)$

Entonces

$$\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = L_i \ \text{ para cada } i = 1, \cdots, m}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} f_1(\vec{x}) = L_1 \\ \vdots \\ \lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} f_m(\vec{x}) = L_m \end{cases}$$

De este modo el cálculo del límite de una función con valores vectoriales se reduce a calcular los límites de sus funciones coordenadas que son funciones con valores escalares.

Demostración

Parte 1 $\Rightarrow$

$$\text{Sea} \quad \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid \overbrace{0 < \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_{\vec{f}}}^{\forall\vec{x}\in B'_\delta(\vec{x}_0)\cap D_{\vec{f}}} \Rightarrow \overbrace{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}\| < \varepsilon}^{\vec{f}(\vec{x})\in B_\varepsilon(\vec{L})}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{0 < \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_{\vec{f}}} \Rightarrow \sqrt{(f_1(\vec{x}) - L_1)^2 + \cdots + (f_m(\vec{x}) - L_m)^2} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{\textstyle\sum_{j=1}^{m}\left(f_j(\vec{x}) - L_j\right)^2} < \varepsilon$$

elevando al cuadrado

$$\textstyle\sum_{j=1}^{m}\left(f_j(\vec{x}) - L_j\right)^2 < \varepsilon^2$$

$$(f_i(\vec{x}) - L_i)^2 \leq \textstyle\sum_{j=1}^{m}\left(f_j(\vec{x}) - L_j\right)^2 < \varepsilon^2;\ i = 1, \cdots, m$$

$$(f_i(\vec{x}) - L_i)^2 < \varepsilon^2;\ i = 1, \cdots, m$$

sacando raíz cuadrada

$$\underbrace{\sqrt{(f_i(\vec{x}) - L_i)^2} < \varepsilon;\ i = 1, \cdots, m}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\overbrace{0 < \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_{\vec{f}}} \Rightarrow \overbrace{|f_i(\vec{x}) - L_i| < \varepsilon;\ i = 1, \cdots, m}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = L_i;\ \ i = 1, \cdots, m}$$

Parte 2 $\qquad\qquad \Leftarrow$

$$\text{Sea} \qquad \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = L_i; \quad i = 1,\cdots,m}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\forall\varepsilon_i > 0, \exists\delta_i > 0 \mid \overbrace{0 < \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta_i \wedge \vec{x}\in D_{\vec{f}}}^{\forall\vec{x}\in B'_{\delta_i}(\vec{x}_0)\cap D_{\vec{f}}} \Rightarrow \overbrace{|f_i(\vec{x}) - L_i| < \varepsilon_i}^{f_i(\vec{x})\in B_{\varepsilon_i}(L_i)}\; ; \; i = 1,\cdots,m}$$

Tomando a todos los $\boldsymbol{\varepsilon_i}$ iguales entre sí e iguales a $\boxed{\boldsymbol{\varepsilon_i = \varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}}}$ y $\boxed{\boldsymbol{\delta = \text{mín}\{\delta_i\}}}$.

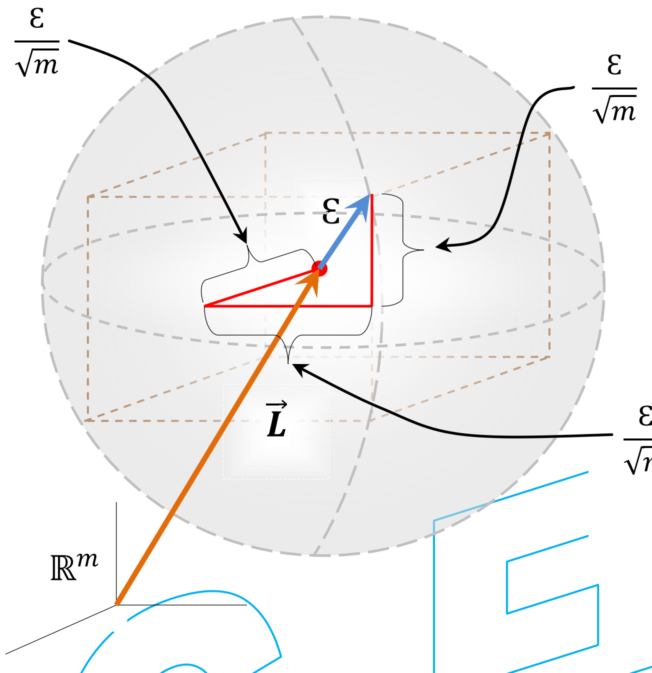
$$0 < \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta \leq \delta_i \wedge \vec{x}\in D_{\vec{f}} \quad \Rightarrow \quad |f_i(\vec{x}) - L_i| < \overbrace{\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}}^{\boldsymbol{\varepsilon_i}}; i = 1,\cdots,m$$

$$0 < \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta \wedge \vec{x}\in D_{\vec{f}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(f_i(\vec{x}) - L_i)^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}; i = 1,\cdots,m$$

elevando al cuadrado

$$(f_i(\vec{x}) - L_i)^2 < \frac{\varepsilon^2}{m}; i = 1,\cdots,m$$

sumando miembro a miembro



$$\sum_{i=1}^{m}(f_i(\vec{x}) - L_i)^2 < \overbrace{\frac{\varepsilon^2}{m} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{m}}^{\boldsymbol{m}} = \varepsilon^2$$

$$\sum_{i=1}^{m}(f_i(\vec{x}) - L_i)^2 < \varepsilon^2$$

sacando raíz cuadrada

$$\underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(f_i(\vec{x}) - L_i)^2}} < \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{0 < \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < \delta \wedge \vec{x}\in D_{\vec{f}} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}\|} < \varepsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}}$$

Ejemplo: Demuestre que $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{0}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ para la función:

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(\frac{x^2y^2z}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x^3-yz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Solución

$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^{\overset{n}{\overbrace{3}}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\overset{m}{\overbrace{2}}}$

$f_1(x,y,z) = \frac{x^2y^2z}{x^2+y^2+z^2}$, $f_2(x,y,z) = \frac{x^3-yz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$D_{\vec{f}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$

$\vec{x} = (x,y,z)$

$\vec{x}_0 = (0,0,0) = \vec{0}$ punto de acumulación del $D_{\vec{f}}$

$\vec{L} = (L_1, L_2) = (0,0)$

Hay que demostrar que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \vec{f}(x,y,z) = \underbrace{\left(\overset{L_1}{\overbrace{0}}, \overset{L_2}{\overbrace{0}}\right)}_{\vec{L}}$$

Lo cual se consigue $\Updownarrow$ Por **TFL**

demostrando que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \overbrace{\frac{x^2y^2z}{x^2+y^2+z^2}}^{f_1(x,y,z)} = \overset{L_1}{\overbrace{0}} \\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \underbrace{\frac{x^3-yz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{f_2(x,y,z)} = \underbrace{0}_{L_2} \end{cases}$$

De acuerdo con la demostración del **TFL** tomamos: $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

1) Demostración de $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \overbrace{\frac{x^2y^2z}{x^2+y^2+z^2}}^{f_1(x,y,z)} = \overbrace{0}^{L_1}$. Aplicando la definición de límite:

$$0 < \left\| \vec{x} - \overbrace{\vec{0}}^{(0,0,0)} \right\| < \delta_1 \Rightarrow \left| \overbrace{\frac{x^2y^2z}{x^2+y^2+z^2}}^{f_1(x,y,z)} - \overbrace{0}^{L_1} \right| < \varepsilon^*$$

$$0 < \|\vec{x}\| < \delta_1 \Rightarrow \frac{x^2y^2|z|}{x^2+y^2+z^2} \le \frac{\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|^2} = \|\vec{x}\|^3 < {\delta_1}^3 < \varepsilon^*$$

$$\delta_1 < \sqrt[3]{\varepsilon^*} = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}$$

2) Demostración de $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \overbrace{\frac{x^3-yz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}^{f_2(x,y,z)} = \overbrace{0}^{L_2}$. Aplicando la definición de límite:

$$0 < \left\| \vec{x} - \overbrace{\vec{0}}^{(0,0,0)} \right\| < \delta_2 \Rightarrow \left| \overbrace{\frac{x^3-yz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}^{f_2(x,y,z)} - \overbrace{0}^{L_2} \right| < \varepsilon^*$$

$$0 < \|\vec{x}\| < \delta_2 \Rightarrow \underbrace{\frac{|x^3-yz^2|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \frac{|x|^3+|y|z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}_{\text{se utiliza la desigualdad triangular}} \le \frac{\|\vec{x}\|^3+\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|} = \frac{2\|\vec{x}\|^3}{\|\vec{x}\|} = 2\|\vec{x}\|^2 < 2{\delta_2}^2 < \varepsilon^*$$

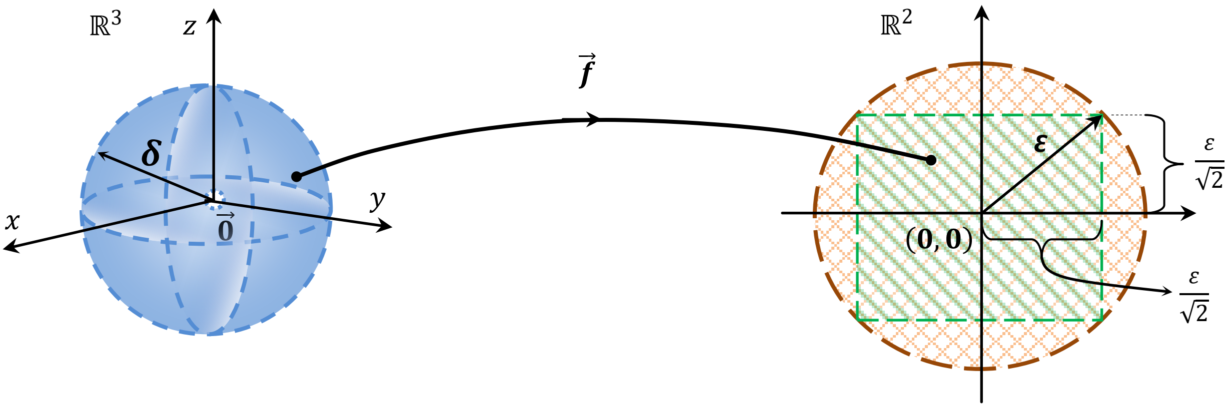
$$\boxed{\overbrace{|a+b| \le |a|+|b|;}^{\text{Desigualdad triangular}} \quad a,b\in\mathbb{R} \;\longrightarrow\; \left|\overbrace{x^3}^{a} + \overbrace{(-yz^2)}^{b}\right| \le \left|\overbrace{x^3}^{a}\right| + \left|\overbrace{-yz^2}^{b}\right| = |x|^3+|y|z^2} \quad \delta_2 < \sqrt{\frac{\varepsilon^*}{2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}}$$

Eligiendo

$$\delta < mín\left\{\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}}\right\}$$

se cumple la definición de límite de modo que queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \vec{f}(x,y,z) = (0,0)$$



TEOREMA UNICIDAD DEL LÍMITE

Enunciado

Sea

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x}_0 \text{ punto de acumulación del } D_{\vec{f}}$$

Si $\lim\limits_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}_1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}_2$ entonces $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$.

(Es decir: si el límite existe entonces su valor es único)

Demostración

Por definición de límite

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0 \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_1 \wedge \vec{x} \in D_{\vec{f}} \Rightarrow \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_1\right\| < \varepsilon$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2 > 0 \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2 \wedge \vec{x} \in D_{\vec{f}} \Rightarrow \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_2\right\| < \varepsilon$$

Tomando $\delta = mín\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_{\vec{f}} \Rightarrow \begin{cases} \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_1\right\| < \varepsilon \\ \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_2\right\| < \varepsilon \end{cases}$$

s.m.a.m(sumando miembro a miembro): $\left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_1\right\| + \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_2\right\| < 2\varepsilon$

$$\left\|-\left(-\vec{f}(\vec{x}) + \vec{L}_1\right)\right\| + \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_2\right\| < 2\varepsilon$$

$$\left\|-\vec{f}(\vec{x}) + \vec{L}_1\right\| + \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_2\right\| < 2\varepsilon$$

$$2\varepsilon > \left\|-\vec{f}(\vec{x}) + \vec{L}_1\right\| + \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_2\right\|$$

$$2\varepsilon > \underbrace{\left\|-\vec{f}(\vec{x}) + \vec{L}_1\right\| + \left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_2\right\| \geq \left\|-\vec{f}(\vec{x}) + \vec{L}_1 + \vec{f}(\vec{x}) - \vec{L}_2\right\|}_{\textbf{desigualdad triangular}} = \left\|\vec{L}_1 - \vec{L}_2\right\|$$

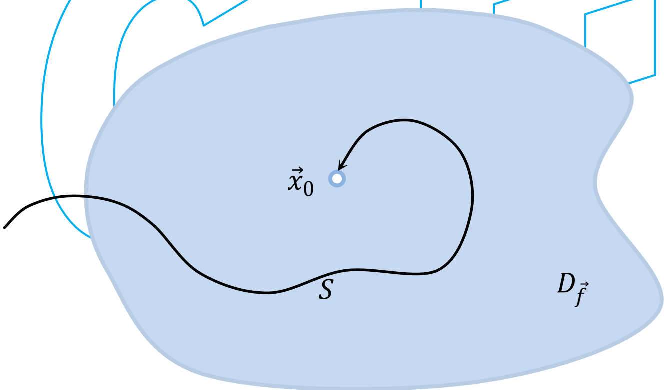
$$\frac{1}{2}\left\|\vec{L}_1 - \vec{L}_2\right\| < \varepsilon$$

Como $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ son vectores constantes la norma de su diferencia no varía, por lo tanto $\frac{1}{2}\left\|\vec{L}_1 - \vec{L}_2\right\|$ tampoco varía y es menor que cualquier $\varepsilon > 0$ que se elija. Por ser $\varepsilon > 0$ arbitrario, éste puede ser tan pequeño como se quiera, por lo tanto para que se cumpla que $\frac{1}{2}\left\|\vec{L}_1 - \vec{L}_2\right\| < \varepsilon$ cualquiera sea ε entonces $\frac{1}{2}\left\|\vec{L}_1 - \vec{L}_2\right\| = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2$.

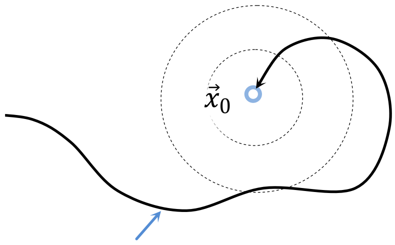
Por el teorema de unicidad del límite, dada una función $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, se tiene que si existe el $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$ entonces éste es único. Esto significa que si

$$\underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})}_{\substack{\text{límite irrestricto} \\ \text{o simultáneo}}} = \vec{L}$$

entonces independientemente de la manera en que nos acerquemos a $\vec{x}_0$ sobre un conjunto $S \mid S \cap D_{\vec{f}}$ admita a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación, el límite llamado



$\forall B'_\delta(\vec{x}_0) \Rightarrow B'_\delta(\vec{x}_0) \cap \left(S \cap D_{\vec{f}}\right) \neq \emptyset$

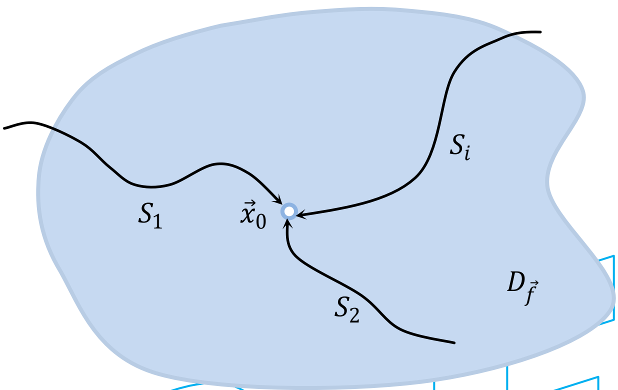


$\overbrace{S \cap D_{\vec{f}}}$ **admite a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación**

restringido: $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in S}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}$.

Es decir:

$$Si \quad \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}}_{\text{simultáneo}} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in S_i}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}}^{\substack{\text{todos los restringidos} \\ \text{deben dar } \vec{L}}}$$

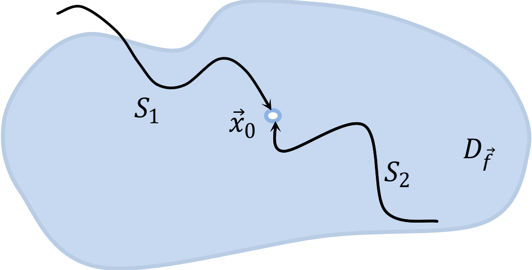


$S_i \mid S_i \cap D_{\vec{f}}$ admita a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación

Este hecho permite utilizar un mecanismo simple que sirve en algunos casos para demostrar la no existencia de un límite dado.

Este mecanismo es el siguiente:

- Con sólo conseguir 2 caminos diferentes de acercamiento a $\vec{x}_0$ (sobre 2 conjuntos S_1 y S_2 tales que tanto $S_1 \cap D_{\vec{f}} \wedge S_2 \cap D_{\vec{f}}$ admitan a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación) para las cuales:

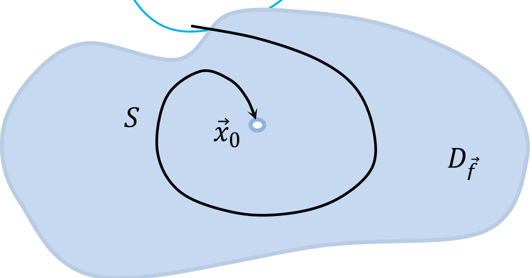


$$\underbrace{\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in S_1}} \vec{f}(\vec{x})}_{\text{restringido}} = \vec{L}_1 \quad \text{y} \quad \underbrace{\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in S_2}} \vec{f}(\vec{x})}_{\text{restringido}} = \vec{L}_2$$

Entonces, si $\underbrace{\vec{L}_1 \neq \vec{L}_2}_{\substack{\text{los límites restringidos} \\ \text{tienen diferentes valores}}} \Rightarrow \nexists \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})}_{\text{simultáneo}}$

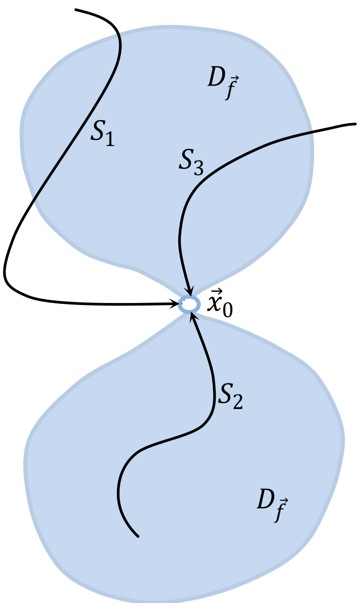
Pero si $\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \nRightarrow \exists \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})}_{\text{simultáneo}}$. No es suficiente para asegurar que el límite irrestricto o simultáneo exista.

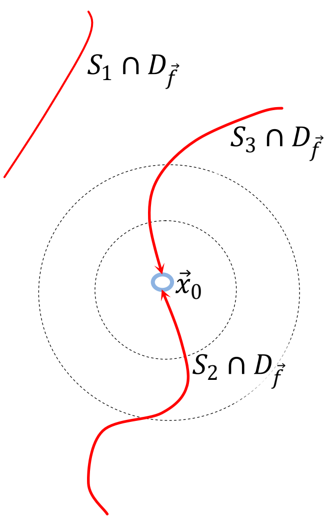
- O bien, consiguiendo un camino de acercamiento a $\vec{x}_0$ sobre un conjunto $S \mid S \cap D_{\vec{f}}$ admita a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación para el cual:



$$\nexists \underbrace{\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in S}} \vec{f}(\vec{x})}_{\text{restringido}} \Rightarrow \nexists \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})}_{\text{simultáneo}}$$

Observación: Por ejemplo, considerando una función con el siguiente dominio y los 3 conjuntos S_1, S_2 y S_3, se tiene que:





- $S_1 \cap D_{\vec{f}}$ no admite a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación.
- $S_2 \cap D_{\vec{f}}$ y $S_3 \cap D_{\vec{f}}$ admiten a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación.

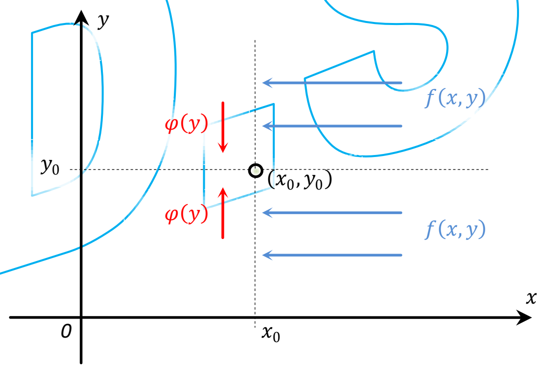
TÉCNICAS PARA DEMOSTRAR QUE:

$$\nexists \underbrace{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}_{\text{simultáneo}}$$

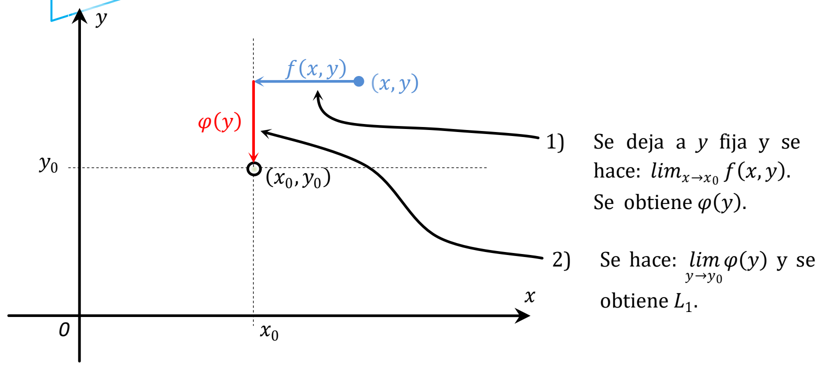
A) LÍMITES ITERADOS (REITERADOS O SUCESIVOS)

Son dos. Uno es:

$$\lim_{y\to y_0} \overbrace{\underbrace{\left[\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right]}_{\text{si existe será alguna función } \varphi(y)}}^{\text{se deja } y \text{ fija}} = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = L_1$$

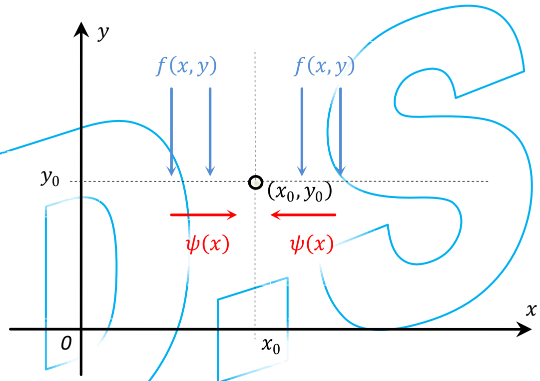


Por ejemplo

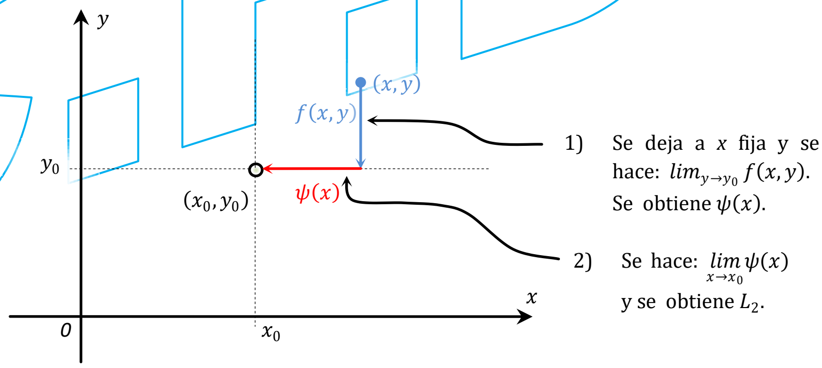


El otro iterado es:

$$\lim_{x\to x_0} \overbrace{\underbrace{\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]}_{\text{si existe será alguna función } \psi(x)}}^{\text{se deja } x \text{ fija}} = \lim_{x\to x_0} \psi(x) = L_2$$



Por ejemplo



Luego si

$$\underbrace{L_1 \neq L_2}_{\substack{\text{los límites iterados} \\ \text{dan valores diferentes}}} \quad \Rightarrow \quad \nexists \underbrace{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}_{\text{simultáneo o doble}}$$

Pero si

$$\underbrace{L_1 = L_2}_{\substack{\text{los límites iterados} \\ \text{son iguales}}} \quad \nRightarrow \quad \underbrace{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}}_{\text{simultáneo o doble}} f(x,y) = L_1$$

Ejemplo 1: Demuestre que el siguiente límite doble no existe.

$$\lim_{(x,y)\to \underbrace{(0,0)}_{(x_0,y_0)}} \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{f(x,y)}$$

Solución

Como $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, el $(0,0)$ es punto de acumulación del D_f. Además como el $(0,0)$ es el único punto de $\mathbb{R}^2$ que no pertenece al D_f, resulta que cualquier conjunto S de acercamiento al $(0,0)$ asegura que el conjunto: $S \cap D_f$ tenga al $(0,0)$ como punto de acumulación. Luego si calculamos los límites iterados:

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\left[\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{x^4+y^2}\right]}_{\text{se deja } x \text{ fija}} = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{0}{x^4}}_{\psi(x)}\right) = 0 = L_1$$

$$\lim_{y\to 0} \underbrace{\left[\lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x^4+y^2}\right]}_{\text{se deja } y \text{ fija}} = \lim_{y\to 0}\left(\underbrace{\frac{y^2}{y^2}}_{\varphi(y)}\right) = \lim_{y\to 0}(1) = 1 = L_2$$

Como

$$\underbrace{\overbrace{L_1}^{=0} \neq \overbrace{L_2}^{=1}}_{\substack{\text{los límites iterados} \\ \text{dan valores diferentes}}} \quad \Rightarrow \quad \nexists \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\text{simultáneo o doble}}$$

Ejemplo 2: Demuestre que el siguiente límite doble no existe.

$$\lim_{(x,y)\to \underbrace{(0,0)}_{(x_0,y_0)}} \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{f(x,y)}$$

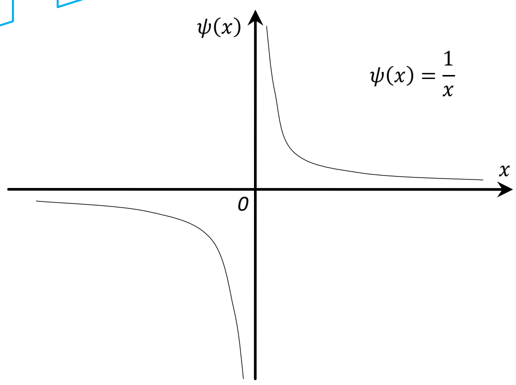
Solución

Como $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, el $(0,0)$ es punto de acumulación del D_f. Además como el $(0,0)$ es el único punto de $\mathbb{R}^2$ que no pertenece al D_f, resulta que cualquier conjunto S de acercamiento al $(0,0)$ asegura que el conjunto: $S \cap D_f$ tenga al $(0,0)$ como punto de acumulación. Considerando el límite iterado:

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\left[\lim_{y\to 0}\frac{x}{x^2+y^2}\right]}_{\text{se deja } x \text{ fija}} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\underbrace{\frac{1}{x}}_{\psi(x)}\right]}$$

Se tiene que $\underbrace{\text{este límite}}$ no existe ya que por AMI, si hacemos los límites laterales

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) &= \infty \ (\nexists)\\ \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) &= -\infty \ (\nexists)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$$



Luego

$$\underbrace{\nexists \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x}{x^2+y^2}\right]}_{\nexists \text{ este límite iterado}} \Rightarrow \underbrace{\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x^2+y^2}}_{\nexists \text{ este límite doble}}$$

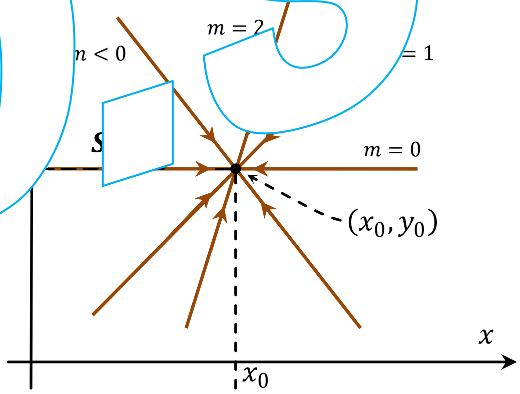
B) <u>USANDO DISTINTOS TIPOS DE CAMINOS DE APROXIMACIÓN A</u> (x_0, y_0)

Como por ejemplo:

-**<u>LÍMITE RADIAL</u>**- Utiliza caminos que son rectas.

$S_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = m(x - x_0) + y_0\}$

tal que $S_m \cap D_f$ admita a (x_0, y_0) como punto de acumulación.



Ejemplo: Demuestre que no existe el siguiente límite:

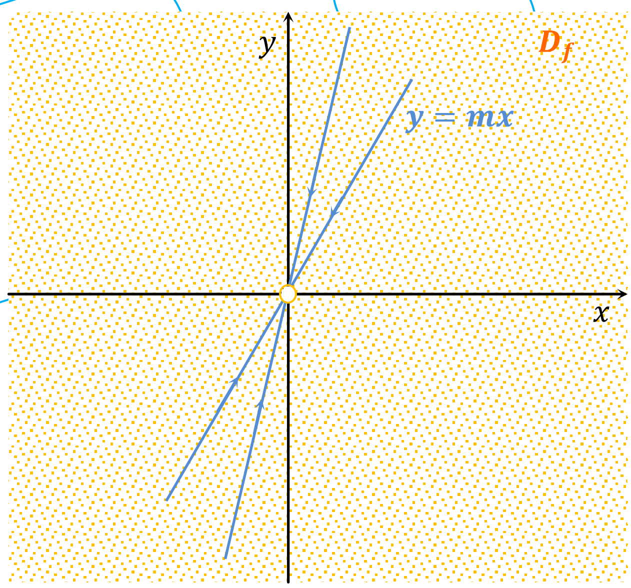
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{f(x,y)}$$

<u>Solución:</u>

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$S_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx\}$

$(0,0)$ es punto de acumulación de $S_m \cap D_f$



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_m}} \overbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}^{f(x,y)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\overbrace{mx}^{y}}{x^2+\big(\underbrace{mx}_{y}\big)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \overbrace{\frac{m}{1+m^2}}^{L_m}$$

Como depende del parámetro m, su valor no es único $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Es decir, para cada recta hay un valor diferente del límite restringido por lo tanto el límite simultáneo no existe. Por ejemplo, si primero se toma $m = 1$ es decir que con $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ se obtiene $L_1 = \left.\frac{m}{1+m^2}\right|_{m=1} = \frac{1}{2}$ como valor del límite restringido; y luego se hace $m = 2$ o sea que con $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ se obtiene $L_2 = \left.\frac{m}{1+m^2}\right|_{m=1} = \frac{2}{5}$, entonces como:

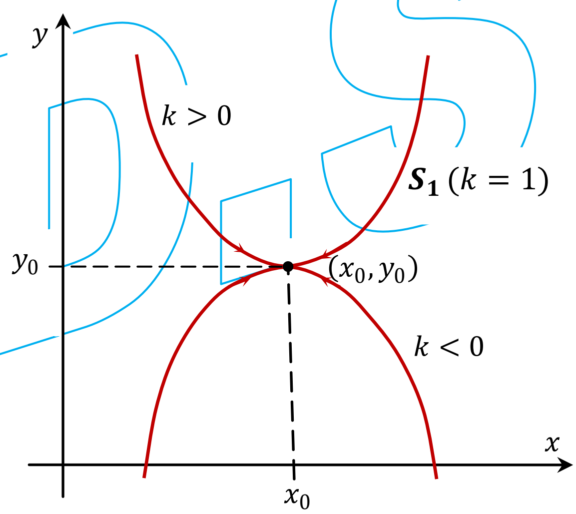
$$\underbrace{L_1 \neq L_2}_{\text{los 2 límites radiales dan valores diferentes}} \quad \Rightarrow \quad \nexists \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}}_{\text{simultáneo o doble}}$$

-CAMINOS PARABÓLICOS-

<u>Parábolas de eje vertical:</u>

$S_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = k(x-x_0)^2 + y_0, k \neq 0\}$

tal que $S_k \cap D_f$ admita a (x_0, y_0) como punto de acumulación.



Parábolas de eje horizontal:

$S_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = k(y-y_0)^2 + x_0, k \neq 0\}$ tal que $S_k \cap D_f$ admita a (x_0, y_0) como punto de acumulación.

-ETC-

Ejemplo: Demuestre que no existe el siguiente límite:

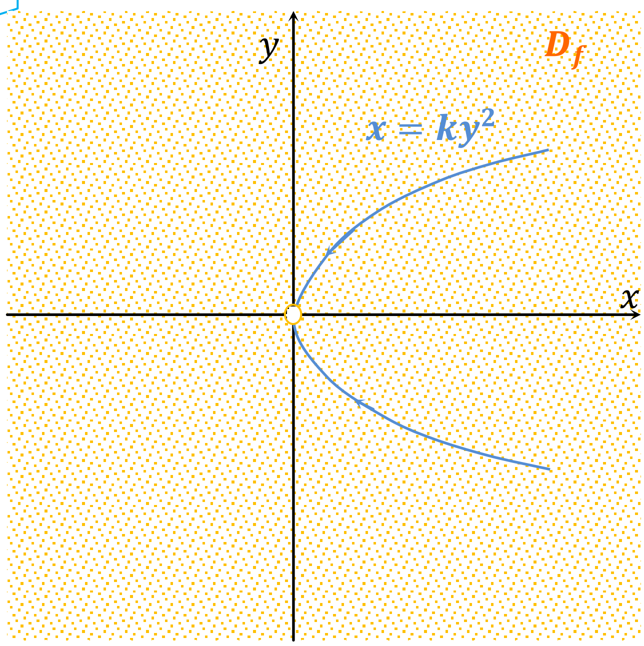
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{xy^2}{x^2+y^4}}_{f(x,y)}$$

Solución:

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$S_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = k\, y^2, k \neq 0\}$

"Usando parábolas de eje horizontal"



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_k}} \left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{k\, y^2 y^2}{k^2\, y^4 + y^4}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0}\left(\frac{k\, y^4}{y^4(k^2+1)}\right)$$

$$= \frac{k}{k^2+1}$$

Como depende del parámetro k, su valor no es único $\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Si en la función del límite anterior se intercambian las variables de modo que ahora el límite sea:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2 y}{x^4+y^2}}_{f(x,y)}$$

se puede comprobar que si se elige $S_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = k\, x^2, k \neq 0\}$ (parábolas de eje vertical) se demuestra que este límite doble no existe.

ALGEBRA DE LÍMITES

Si

- $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

- $\vec{g}: D_{\vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

  son, en general, **campos vectoriales**.

- $h: D_h \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

  es, en general, un **campo escalar**.

- $\exists\, lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}\,, \exists\, lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g}\,, \exists\, lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h$

  siendo $\vec{x}_0$ punto de acumulación de $D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}}$ (para **I**, **IV** y **V**) ó de $D_{\vec{f}} \cap D_h$ (para **II** y **III**) según corresponda.

Entonces:

I) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\vec{f} \pm \vec{g}) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f} \pm \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g}$

II) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (h\vec{f}) = \left(\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h\right)\left(\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}\right)$

III) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left(\frac{\vec{f}}{h}\right) = \frac{\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}}{\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h}\ ; \ \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h \neq 0$

IV) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\vec{f} \bullet \vec{g}) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f} \bullet \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g}$

V) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\vec{f} \times \vec{g}) = \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f} \times \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g}$, sólo para $m = 3$

El teorema del álgebra de límites, por ejemplo, para el caso **I**) implica (suponiendo que $\vec{x}_0$ es punto de acumulación de $D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}}$) que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f} \\ \\ \text{Si } \exists \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{g} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \quad \exists \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (\vec{f} \pm \vec{g})$$

<u>Por ejemplo</u>

a) Sean

$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2} \qquad y \qquad g(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

$$(f-g)(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$$

$$D_f = D_g = D_{f-g} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = D_f \cap D_g$$

$$(0,0) \text{ es punto de acumulación de } D_f \cap D_g$$

¿Es aplicable el teorema **I**) del álgebra de límites en este caso:

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}}^{f-g}}_{¿\exists?} \stackrel{?}{=} \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{x^3}{x^2+y^2}}^{f}}_{¿\exists?} - \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{y^3}{x^2+y^2}}^{g}}_{¿\exists?}$$

?

<u>Sí:</u>

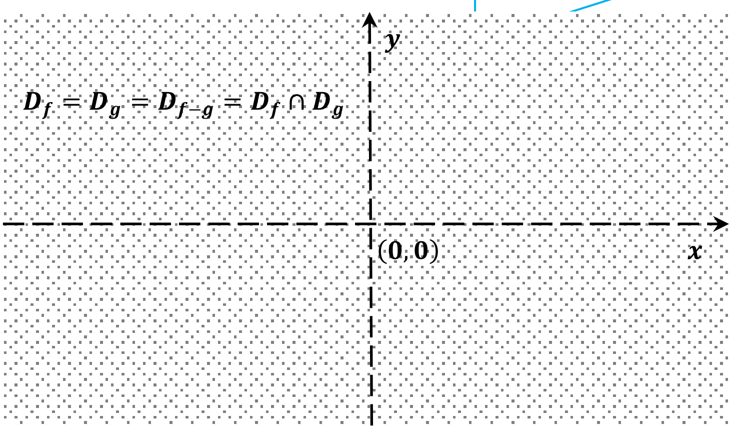
$$\boldsymbol{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}}^{f-g}} = \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{x^3}{x^2+y^2}}^{f}}_{\substack{=0\ (\exists) \\ \text{se demuestra usando} \\ \text{la definición de límite}}} - \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{y^3}{x^2+y^2}}^{g}}_{\substack{=0\ (\exists) \\ \text{se demuestra usando} \\ \text{la definición de límite}}} = 0 - 0 = \mathbf{0}$$

b) Sean

$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{xy} \qquad y \qquad g(x,y) = \frac{(x-y)^2}{xy}$$

$$(f-g)(x,y) = \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$$

$$D_f = D_g = D_{f-g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\} = D_f \cap D_g$$



$(0,0)$ es punto de acumulación de $D_f \cap D_g$

¿Es aplicable el teorema **I**) del álgebra de límites en este caso:

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}}^{f-g}}_{¿\exists?} \stackrel{?}{=} \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{(x+y)^2}{xy}}^{f}}_{¿\exists?} - \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{(x-y)^2}{xy}}^{g}}_{¿\exists?}$$

?

<u>**No**</u>, ya que se puede demostrar (usando límite radial por ej.) que:

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \qquad y \qquad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$$

Sin embargo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f-g)(x,y)$ existe y su valor se puede determinar haciendo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}}^{f-g} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{xy} = \overbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{xy}}^{xy\neq 0} = 4$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Para las siguientes funciones demuestre que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

a) $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{x}{x+y}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}(1) = 1 = L_1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+y}\right)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{y}\right] = 0 = L_2$$

Como $L_1 \neq L_2 \;\Rightarrow\; \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

---

b) $f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}$

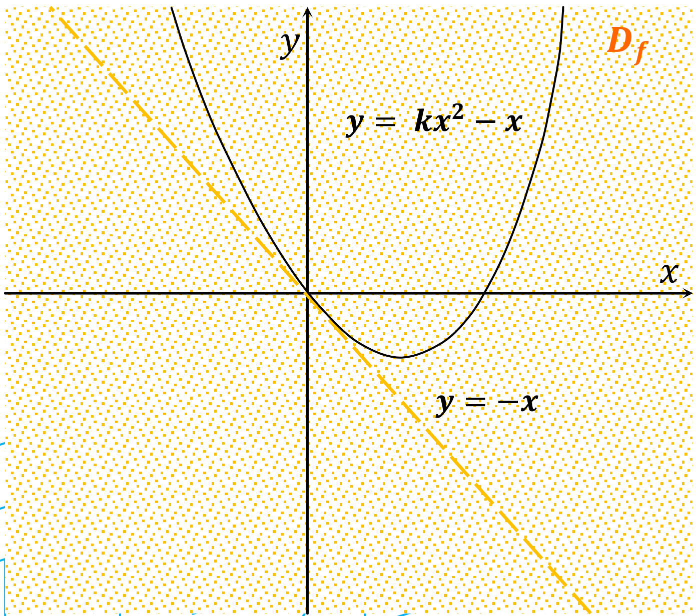
Solución:

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\}$

$S_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = kx^2 - x, k \neq 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}\left(\frac{x^2}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x+kx^2-x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{kx^2}\right) = \frac{1}{k}$$



Como depende del parámetro k, su valor no es único $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, es decir por ejemplo si tomamos primero

$$k = 1 \;\Rightarrow\; L_1 = \left.\frac{1}{k}\right|_{k=1} = 1 \;, \qquad \text{y luego} \qquad k = 2 \;\Rightarrow\; L_2 = \left.\frac{1}{k}\right|_{k=2} = \frac{1}{2}$$

Como $L_1 \neq L_2 \;\Rightarrow\; \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

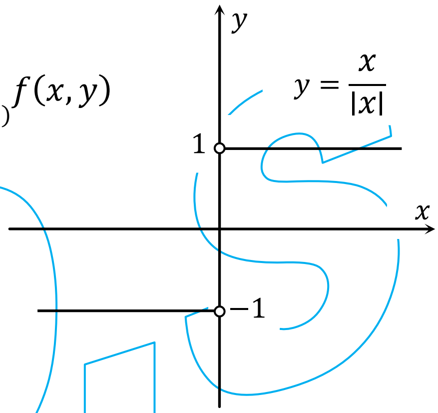
---

c) $f(x,y) = \frac{x}{|x|+|y|}$

<u>Solución:</u>

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{x}{|x|+|y|}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{|x|}\right], \text{ como } \nexists \underbrace{\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{|x|}\right]}_{\begin{array}{c}\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x}{|x|}\right] = 1\\ \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{x}{|x|}\right] = -1\end{array}} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$



---

d) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

<u>Solución:</u>

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{x^2}\right] = 1 = L_1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{y^2}\right] = 0 = L_2$$

Como $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

---

e) $f(x,y) = \frac{y^2}{y^2+x^4}$

<u>Solución:</u>

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{y^2}{y^2+x^4}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^4}\right] = 0 = L_1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{y^2}{y^2+x^4}\right)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{y^2}{y^2}\right] = 1 = L_2$$

Como $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determine el valor de los siguientes límites:

i- $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} xy$ — Resp: 2

ii- $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} sen(xy)$ — Resp: $sen(2)$

iii- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-2,3,1)} \frac{x^2z^3+y}{x^2+y^2}$ — Resp: $\frac{7}{13}$

iv- $\lim\limits_{(x,y)\to(3,5)} (x^2+xy-y)$ — Resp: 19

v- $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} ln(x^2y)$ — Resp: $ln(18)$

vi- $\lim\limits_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{4},4\right)} 2ycos(xy)$ — Resp: -8

vii- $\lim\limits_{(x,y)\to\left(2,\frac{\pi}{2}\right)} sen\left(\frac{2y}{x}\right)$ — Resp: 1

viii- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(3,-1,3)} (x+y+z)$ — Resp: 5

ix- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,-2)} \frac{x^2z+y-z}{x^2+y^2+z^2}$ — Resp: $\frac{3}{5}$

x- $\lim\limits_{(x,y)\to(2,\pi)} e^{\frac{y}{\pi}}\ sen\left(\frac{y}{x}\right)$ — Resp: e

2. Demuestre que los siguientes límites no existen:

i- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

ii- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

iii- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^4+y^4}$

G.F.D.S

iv- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{|x|+|y|}$

v- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$

vi- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

vii- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+3y^2}$

viii- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

ix- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$

x- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x-y}$

3. Para las siguientes funciones demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$

i- $f(x,y) = \frac{x^4y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\delta < \sqrt[5]{\varepsilon}$

ii- $f(x,y) = \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$ $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$

iii- $f(x,y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\delta < \varepsilon$

iv- $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ $\delta < \sqrt{\varepsilon}$

v- $f(x,y) = \frac{y^5}{x^2+y^2}$ $\delta < \sqrt[3]{\varepsilon}$

vi- $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

vii- $f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$ $\delta < \varepsilon$

viii- $f(x,y) = \frac{x^2}{|x|+|y|}$ $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

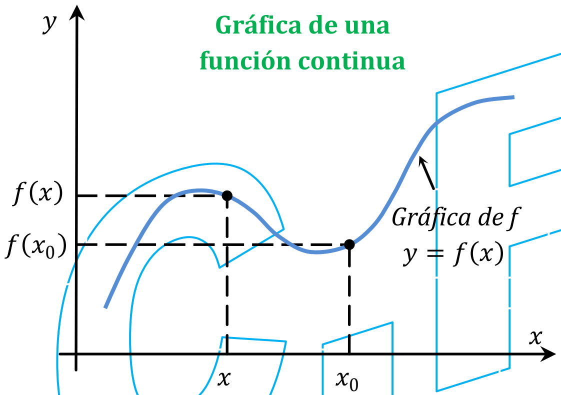
ix- $f(x,y) = y\frac{sen(x)}{x}$ $\delta < \varepsilon$

x- $f(x,y) = sen\left(\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ $\delta < \sqrt{\varepsilon}$

CONTINUIDAD

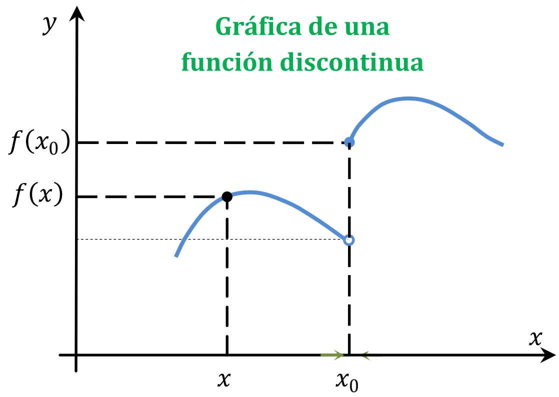
INTRODUCCIÓN

En AMI donde se estudian funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, la idea de función continua se basa en la noción intuitiva de una función cuya gráfica es una curva sin "saltos" como la curva que trazaría la punta de un lápiz deslizándose por el papel sin levantarse, por ejemplo:



$$x_0 \in D_f\,, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

En cambio una función cuya gráfica es:



$$x_0 \in D_f\,, \quad \underbrace{\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)}_{\Downarrow}$$

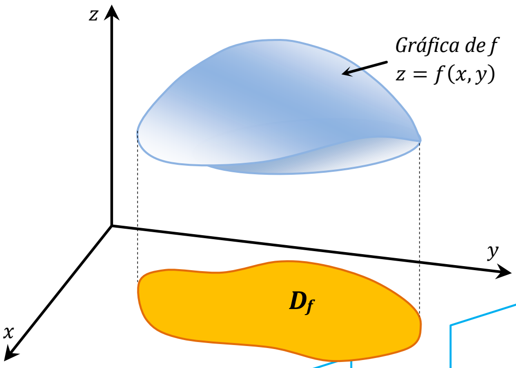
$$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

corresponde a una función discontinua. El valor de la función en x_0 es $f(x_0)$ pero el límite de f en x_0 no existe porque los límites por izquierda y por derecha no coinciden, por lo tanto f es discontinua en x_0.

En el caso de una función

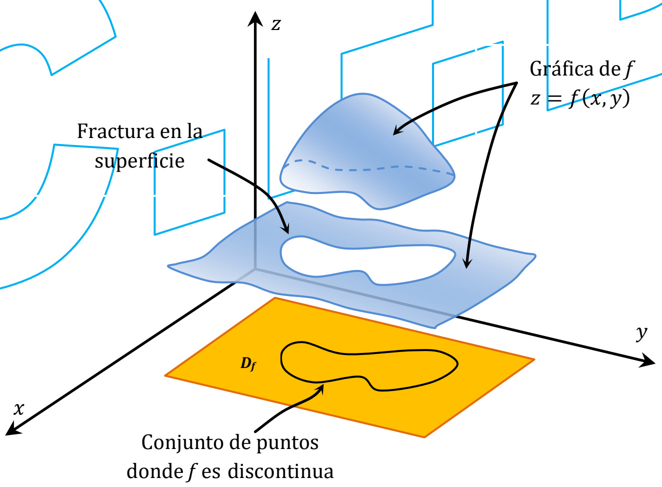
$$f\colon D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

la **continuidad** de f significa que la gráfica no tiene "fracturas" como por ejemplo:



Gráfica de una función continua

En cambio la gráfica de una función **discontinua** tiene "fracturas" como por ejemplo:



Gráfica de una función discontinua

<u>DEFINICIÓN Ɛ-δ</u>

$$\text{Sea } \vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{f} \text{ es } \textbf{continua} \text{ en } \vec{x}_0 \in D_{\vec{f}} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \underbrace{\forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}_0) \cap D_{\vec{f}}}_{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta \,\wedge\, \vec{x}\in D_{\vec{f}}} \Rightarrow \underbrace{\vec{f}(\vec{x}) \in B_\varepsilon\left(\vec{f}(\vec{x}_0)\right)}_{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{x}_0)\|<\varepsilon}$$

Si $\vec{x}_0$ es punto frontera aislado del $D_{\vec{f}}$ la definición de continuidad se cumple trivialmente ya que existirá siempre, cualquiera sea el ε fijado, un δ suficientemente pequeño tal que $B_\delta(\vec{x}_0) \cap D_{\vec{f}} = \{\vec{x}_0\} \Rightarrow \vec{f}(\vec{x}_0) \in B_\varepsilon\left(\vec{f}(\vec{x}_0)\right)$. De aquí que si $\vec{x}_0$ es punto frontera aislado del $D_{\vec{f}}$ no necesitamos probar nada y diremos que $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$.

- Una función que es continua en todos los puntos de un conjunto S se dice continua en S.

- Se usa el término "función continua" para expresar que la función es continua en todos los puntos de su dominio.

DEFINICIÓN (alternativa)

$$\text{Sea } \vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$\vec{f}$ es **continua** en $\vec{x}_0 \in D_{\vec{f}}$ **si y sólo si**

- $\vec{x}_0$ es punto frontera aislado del $D_{\vec{f}}$ $(*)$

ó

- $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0)$

$(*)$ $\vec{f}$ **siempre** es continua en un punto frontera aislado del $D_{\vec{f}}$. La noción de límite no tiene sentido en un punto frontera asilado ya que un punto aislado **nunca** puede ser punto de acumulación del conjunto al que pertenece.

TEOREMA "FUNDAMENTAL" DE CONTINUIDAD

ENUNCIADO

Si

- $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

  $\vec{f}(\vec{x}) = \big(f_1(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\big); \ \ \vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$

  con $f_i: D_{f_i} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\,, i = 1, \cdots, m$

- $\vec{x}_0 \in D_{\vec{f}}$

Entonces

$$\vec{f} \text{ es continua en } \vec{x}_0 \Leftrightarrow f_i \text{ es continua en } \vec{x}_0 \text{ para cada } i = 1, \cdots, m$$

DEMOSTRACIÓN

- Si $\vec{x}_0$ es punto frontera aislado del $D_{\vec{f}}$ también lo es de cada D_{f_i}, lo que prueba (trivialmente) el teorema.

- Si $\vec{x}_0 \in D_{\vec{f}}$ no es punto frontera aislado $D_{\vec{f}}$ (por lo tanto $\vec{x}_0$ es punto de acumulación del $D_{\vec{f}}$), la aplicación del **TFL** (teorema "fundamental" de límite) con:

$$\overbrace{\vec{f}(\vec{x}_0)}^{\vec{L}} = \left(\overbrace{f_1(\vec{x}_0)}^{L_1}, \cdots, \overbrace{f_m(\vec{x}_0)}^{L_m} \right)$$

a la definición alternativa de continuidad prueba para este caso también el teorema.

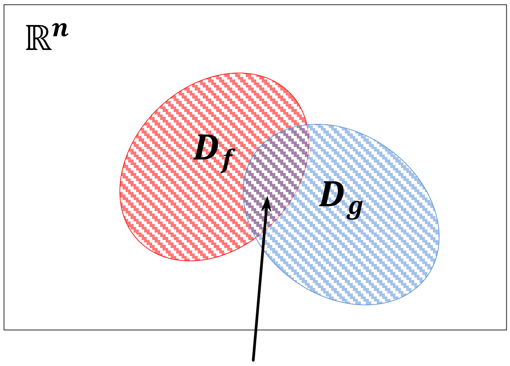
Como consecuencia del teorema "fundamental" de continuidad se tiene que el análisis de la continuidad de funciones con valores vectoriales: $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se reduce al estudio de la continuidad de sus funciones coordenadas que son funciones con valores escalares: $f_i: D_{f_i} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$; razón por la cual sólo veremos el álgebra de la continuidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

<u>ALGEBRA DE LA CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}$</u>

Si

- $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- $g: D_g \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

  son continuas en $\vec{x}_0 \in D_f \cap D_g$
- $c \in \mathbb{R}$



$D_f \cap D_g$

Entonces:

I) cf y cg

II) $f \pm g$

III) fg

IV) $\dfrac{f}{g}$, $g(\vec{x}) \neq 0$ $^{(*)}$

son continuas en $\vec{x}_0$

$(*)$ En esta condición está implícito que g no se anula en punto alguno de su dominio. Notar que la condición no es $g(\vec{x}_0) \neq 0$ sino $g(\vec{x}) \neq 0$ ya que cuando $\vec{x}_0$ no es punto frontera aislado de $D_f \cap D_g$ se requiere que $\vec{x}_0$ sea punto de acumulación del $D_{f/g}$.

TEOREMA DE LA CONTINUIDAD DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

ENUNCIADO

Si

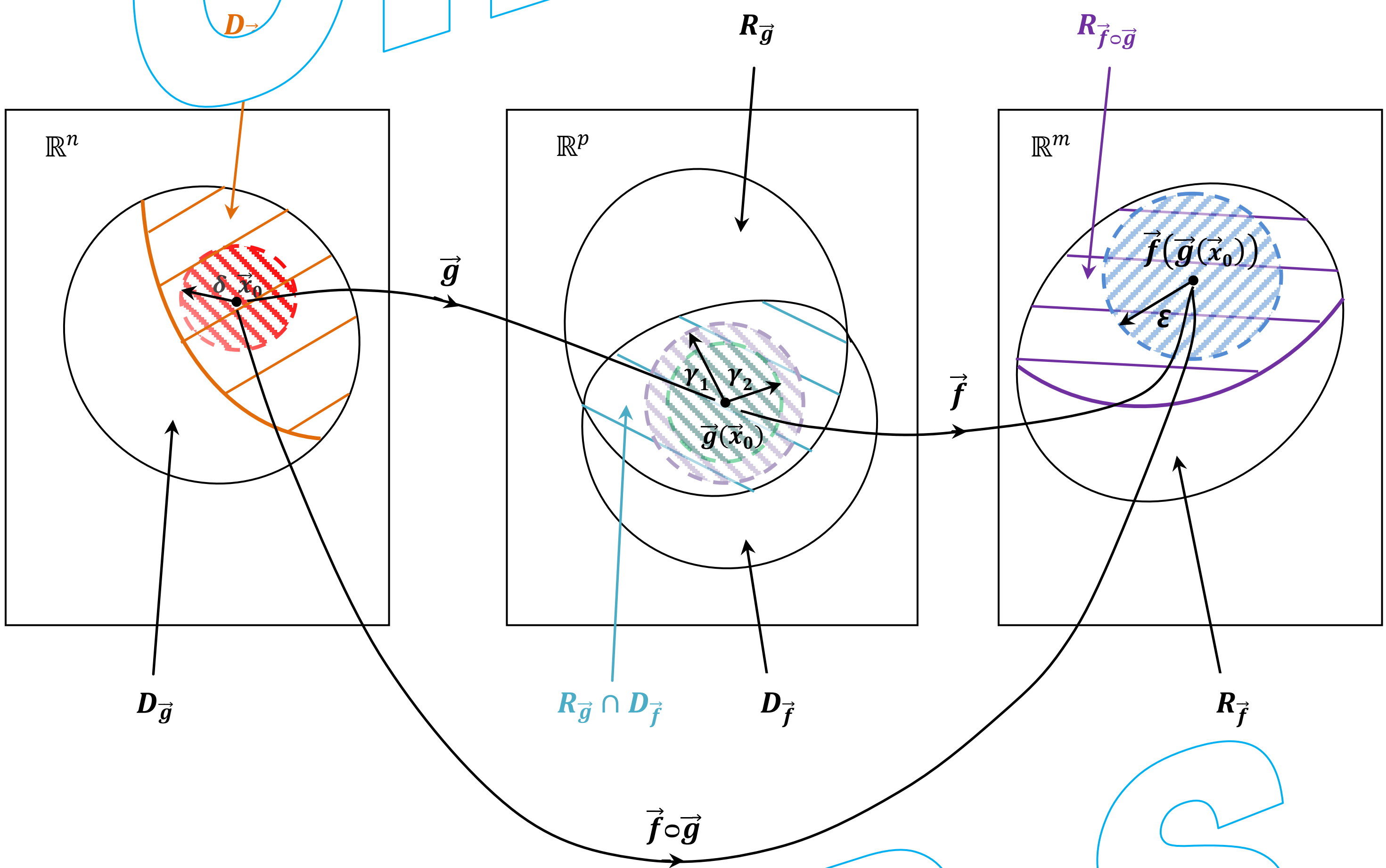
$$\vec{g}: D_{\vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ es continua en } \vec{x}_0$$

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ es continua en } \vec{g}(\vec{x}_0)$$

Entonces

$$\vec{f} \circ \vec{g}: D_{\vec{f}\circ\vec{g}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ es continua en } \vec{x}_0$$

DEMOSTRACIÓN (usando la definición Ɛ-δ de continuidad)



Sea $\vec{x}_0 \in D_{\vec{f}\circ\vec{g}}$. Por ser $\vec{f}$ continua en $\vec{g}(\vec{x}_0)$ se cumple la definición de continuidad:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma_1 > 0 \mid \forall \vec{g}(\vec{x}) \in \overbrace{B_{\gamma_1}(\vec{g}(\vec{x}_0)) \cap \left(R_{\vec{g}} \cap D_{\vec{f}}\right)}^{S^*} \Rightarrow \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) \in B_\varepsilon\left(\vec{f}(\vec{g}(\vec{x}_0))\right)$$

O sea que para cualquier entorno $B_\varepsilon\left(\vec{f}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right)\right)$ que se tome siempre es posible obtener un entorno $B_{\gamma_1}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right)$ tal que $\vec{f}(S^*) \subset B_\varepsilon\left(\vec{f}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right)\right)$.

Además por ser $\vec{g}$ continua en $\vec{x}_0$ se cumple que:

$$\forall \gamma_2 : 0 < \gamma_2 \leq \gamma_1, \exists \delta > 0 \mid \forall \vec{x} \in \overbrace{B_\delta(\vec{x}_0) \cap D_{\vec{f}\circ\vec{g}}}^{S} \Rightarrow \vec{g}(\vec{x}) \in B_{\gamma_2}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right)$$

O sea que para cualquier entorno $B_{\gamma_2}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right)$ -con $0 < \gamma_2 \leq \gamma_1$- que se tome siempre es posible obtener un entorno $B_\delta(\vec{x}_0)$ tal que $\vec{g}(S) \subset B_{\gamma_2}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right)$.

Ordenando convenientemente las implicaciones anteriores resulta:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \gamma_1 > 0, \forall \gamma_2 : 0 < \gamma_2 \leq \gamma_1, \exists \delta > 0 \mid \forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}_0) \cap D_{\vec{f}\circ\vec{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{g}(\vec{x}) \in B_{\gamma_2}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right) \subset B_{\gamma_1}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right) \cap \left(R_{\vec{g}} \cap D_{\vec{f}}\right) \Rightarrow \underbrace{\vec{f}\left(\vec{g}(\vec{x})\right)}_{(\vec{f}\circ\vec{g})(\vec{x})} \in B_\varepsilon\left(\underbrace{\vec{f}\left(\vec{g}(\vec{x}_0)\right)}_{(\vec{f}\circ\vec{g})(\vec{x}_0)}\right)$$

Finalmente, por transitividad de la implicación:

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall \vec{x} \in B_\delta(\vec{x}_0) \cap D_{\vec{f}\circ\vec{g}} \Rightarrow (\vec{f}\circ\vec{g})(\vec{x}) \in B_\varepsilon\left((\vec{f}\circ\vec{g})(\vec{x}_0)\right)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overbrace{\vec{f}\circ\vec{g} \text{ es continua en } \vec{x}_0}$$

<u>Ejemplo 1:</u> Demuestre que la función

$$\vec{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, 2x+1\right) & ; \; si\ (x,y) \neq (0,0) \\ (0,1) & ; \; si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en $(x,y) = (0,0)$.

<u>Solución</u>

Esta es una función $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^{\overset{n}{2}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\overset{m}{2}}$ cuyo dominio es $D_{\vec{f}} = \mathbb{R}^2$.

Sus funciones coordenadas $f_i: D_{f_i} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ i = 1{,}2$ están definidas de la siguiente manera:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & ;\ si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & ;\ si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases} \quad ; \quad f_2(x,y) = \begin{cases} 2x+1\ ; & si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 1 & ;\ si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$$

Como el $(0{,}0)$ es punto interior del $D_{\vec{f}}$ y $\vec{f}(0{,}0) = (0{,}1)$, para demostrar que $\vec{f}$ es continua en $(0{,}0)$ lo que hay que probar (de acuerdo con la definición alternativa de continuidad) es que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \vec{f}(x,y) = \underbrace{\overbrace{\left(\underbrace{\overset{f_1(0,0)}{\overbrace{0}}}_{L_1}, \underbrace{\overset{f_2(0,0)}{\overbrace{1}}}_{L_2}\right)}^{\vec{f}(0,0)}}_{\vec{L}}$$

Lo cual se consigue $\Updownarrow$ Por **TFL**

demostrando que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} = \overbrace{0}^{L_1=f_1(0,0)} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2x+1) = \underbrace{1}_{L_2=f_2(0,0)} \end{cases}$$

De acuerdo con la demostración del **TFL** tomamos $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

3) Demostración de: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = 0$

$$0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{xy^3}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon^*$$

$$0 < \|\vec{x}\| < \delta_1 \Rightarrow \frac{|x||y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|^3}{\|\vec{x}\|^2} = \|\vec{x}\|^2 < {\delta_1}^2 < \varepsilon^*$$

$$\delta_1 < \sqrt{\varepsilon^*} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}$$

C.F.D.S

4) Demostración de: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (2x+1) = 1$

$$0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta_2 \;\Rightarrow |(2x+1) - 1| < \varepsilon^*$$

$$0 < \|\vec{x}\| < \delta_2 \Rightarrow |2x| = 2|x| \le 2\|\vec{x}\| < 2\delta_2 < \varepsilon^*$$

$$\delta_2 < \frac{\varepsilon^*}{2} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}$$

Luego, si se elige

$$\delta < mín\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}}\right\}$$

queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \vec{f}(x,y) = \overbrace{(0,1)}^{\vec{f}(0,0)} \;\Rightarrow\; \vec{f} \text{ es continua en } (0,0)$$

<u>**Ejemplo 2:**</u> Demuestre que la función

$$\vec{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+3y^2}}, 3x^2\right) & ; \; si\ (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & ; \; si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no es continua en $(x,y) = (0,0)$.

<u>Solución</u>

Las funciones coordenadas de $\vec{f}$ están definidas del siguiente modo:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+3y^2}} & ; \; si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \; si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad ; \quad f_2(x,y) = \begin{cases} 3x^2 & ; \; si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \; si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Haciendo, por ej. para $f_1(x,y)$ el siguiente límite iterado

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+3y^2}}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{|x|} = 1 \neq \overbrace{0}^{f_1(0,0)} \;\Rightarrow\; \underbrace{f_1 \text{ no es continua en } (0,0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{\vec{f} \text{ no es continua en } (0,0)}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

4. Para las siguientes funciones demuestre si son o no continuas en $(x, y) = (0,0)$.

i- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\qquad \delta < \frac{\varepsilon}{3}$

iii- $f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{y} & ; \ si\ y \neq 0 \\ 0 & ; \ si\ y = 0 \end{cases}$

iv- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{\sqrt{2x^4+y^2}} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\qquad \delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

v- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\qquad \delta < \sqrt{\varepsilon}$

vi- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x+y} & ; \ si\ x+y \neq 0 \\ 0 & ; \ si\ x+y = 0 \end{cases}$

vii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{3x^2+2y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\qquad \delta < \varepsilon$

viii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y}{x^2+7y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ix- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{5x^3}{2x^2+2y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\qquad \delta < \frac{2}{5}\varepsilon$

x- $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\, sen\left(\frac{1}{3x^2+5y^2}\right) & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\qquad \delta < \sqrt{\varepsilon}$

5. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{i- } f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & ;\ si\ (x,y)\neq(0,0)\wedge(x,y)\neq(1,1)\\ 1 & ;\ si\ (x,y)=(0,0)\\ \frac{1}{4} & ;\ si\ (x,y)=(1,1)\end{cases}$$

f es continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,0),(1,1)\}$

$$\text{ii- } f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & ;\ si\ |x|\geq 1\\ \frac{2}{5} & ;\ si\ (x,y)=\left(\frac{1}{2},0\right)\end{cases}$$

f es continua en $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x|\geq 1\}\cup\left\{\left(\frac{1}{2},0\right)\right\}=D_f$

$$\text{iii- } f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x-y} & ;\ si\ \ x\neq y\\ x-y & ;\ si\ \ x=y\end{cases}$$

f es continua en $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\neq x\}\cup\{(0,0)\}$
