TEOREMA

Enunciado

Si

$f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ -D_f abierto- es un campo escalar con $f \in C^1(D_f)$.

$S = \{\vec{x} \in D_f \mid f(\vec{x}) = k,\ k \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de nivel de f de valor k.

$\vec{x}_0 \in S$.

$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$.

Entonces

$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ es ortogonal a S en $\vec{x}_0$, y es posible dar la ecuación del plano tangente a S en $\vec{x}_0$ como el conjunto de puntos $\vec{x}$ que satisfacen:

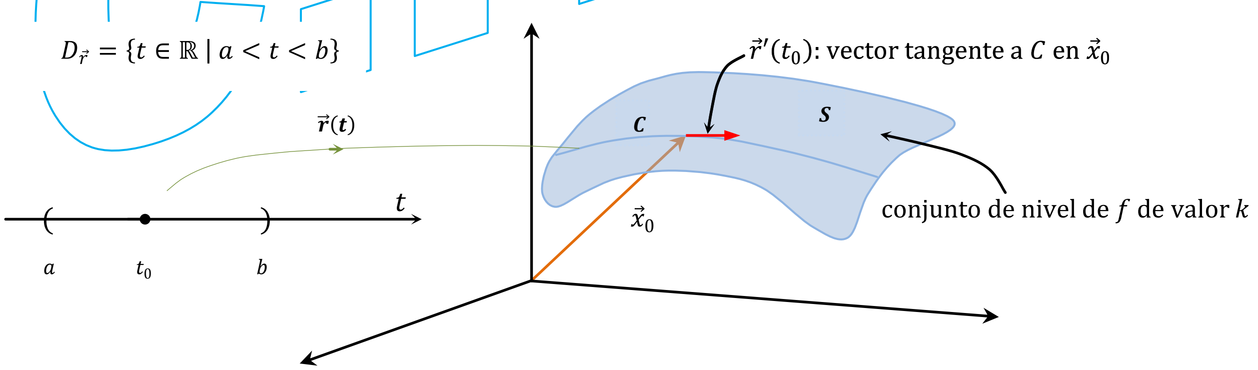
$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \bullet (\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$$

Demostración

Sea C una curva incluida en S pasante por $\vec{x}_0$, parametrizada por la función (trayectoria):

$$\vec{r}\colon D_{\vec{r}} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n; \qquad \vec{r}(t) = \big(X_1(t), \cdots, X_n(t)\big)$$

continuamente diferenciable con $\vec{r}(t_0) = \vec{x}_0$ y $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$.



Como $C \subset S$ cualquier punto que pertenece a C debe cumplir con la ecuación:

$$\underbrace{f\Big(\underbrace{\vec r(t)}_{\vec x}\Big)}_{(f\circ\vec r)(t)} = k, \qquad \forall t\in D_{\vec r}$$

Podemos aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros

$$f'\big(\vec r(t)\big)\,\vec r\,'(t)=0$$

$$\overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\vec r(t)\big),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\vec r(t)\big)\right)}^{f'(\vec r(t))}\overbrace{\begin{pmatrix}X_1'(t)\\ \vdots \\ X_n'(t)\end{pmatrix}}^{\vec r\,'(t)}=0$$

$$\overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\vec r(t)\big),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\vec r(t)\big)\right)}^{f'(\vec r(t))=\vec\nabla f(\vec r(t))}\bullet\big(X_1'(t),\cdots,X_n'(t)\big)=0$$

$$\vec\nabla f\big(\vec r(t)\big)\bullet\vec r\,'(t)=0$$

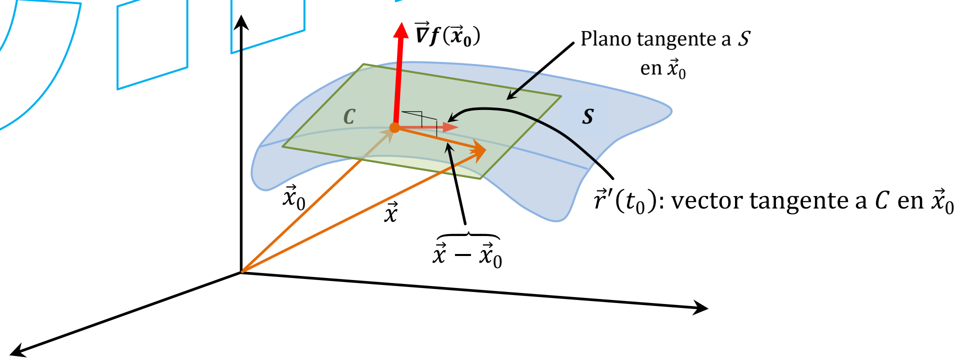
Cuando $t=t_0 \;\;\Rightarrow\;\; \vec r(t_0)=\vec x_0$ tenemos que:

$$\vec\nabla f(\vec x_0)\bullet\vec r\,'(t_0)=0, \qquad \text{con } \vec\nabla f(\vec x_0)\neq\vec 0$$

Esto indica que el vector $\vec\nabla f(\vec x_0)$ es ortogonal a $\vec r\,'(t_0)$, es decir ortogonal a toda curva $C\subset S$ pasante por $\vec x_0$, lo cual equivale a decir que $\vec\nabla f(\vec x_0)$ es ortogonal a S en $\vec x_0$.

De aquí que es posible dar la ecuación del plano tangente a S en $\vec x_0$ como el conjunto de puntos $\vec x$ que satisfacen:

$$\vec\nabla f(\vec x_0)\bullet(\vec x-\vec x_0)=0, \qquad \text{con } \vec\nabla f(\vec x_0)\neq\vec 0$$



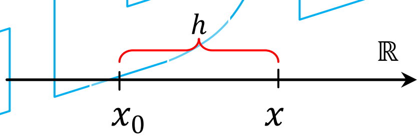
POLINOMIO Y FÓRMULA DE TAYLOR

En AMI se ve como una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ puede aproximarse en un entorno de un punto dado por un polinomio de Taylor de grado N.

De AMI tenemos que:

Sean

- $x, x_0 \in \mathbb{R}$
- $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^{N+1}\big(B_r(x_0)\big),\ B_r(x_0) \subset D_f$
- $h = x - x_0$, con $x \in B_r(x_0)$



Entonces

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{1}{1!}f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{N!}f^{(N)}(x_0)h^N}_{} + R_N$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)h^k}_{T_N:\ \textbf{Polinomio de Taylor de grado } N} + \underbrace{R_N}_{\substack{\textbf{Residuo de orden } N \\ \textbf{(Resto de Lagrange)}}}$$

Es la **fórmula de Taylor** de f alrededor de x_0.

En el caso de **campos escalares** puede realizarse un desarrollo análogo. Esto es:

Sean

- $\vec{x}, \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

  $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n); \quad \vec{x}_0 = (a_1, \cdots, a_n)$
- $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^{N+1}\big(B_r(\vec{x}_0)\big),\ B_r(\vec{x}_0) \subset D_f$
- $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$

  $\vec{h} = (h_1, \cdots, h_n) = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$

Definiendo una función $\varphi: D_\varphi \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

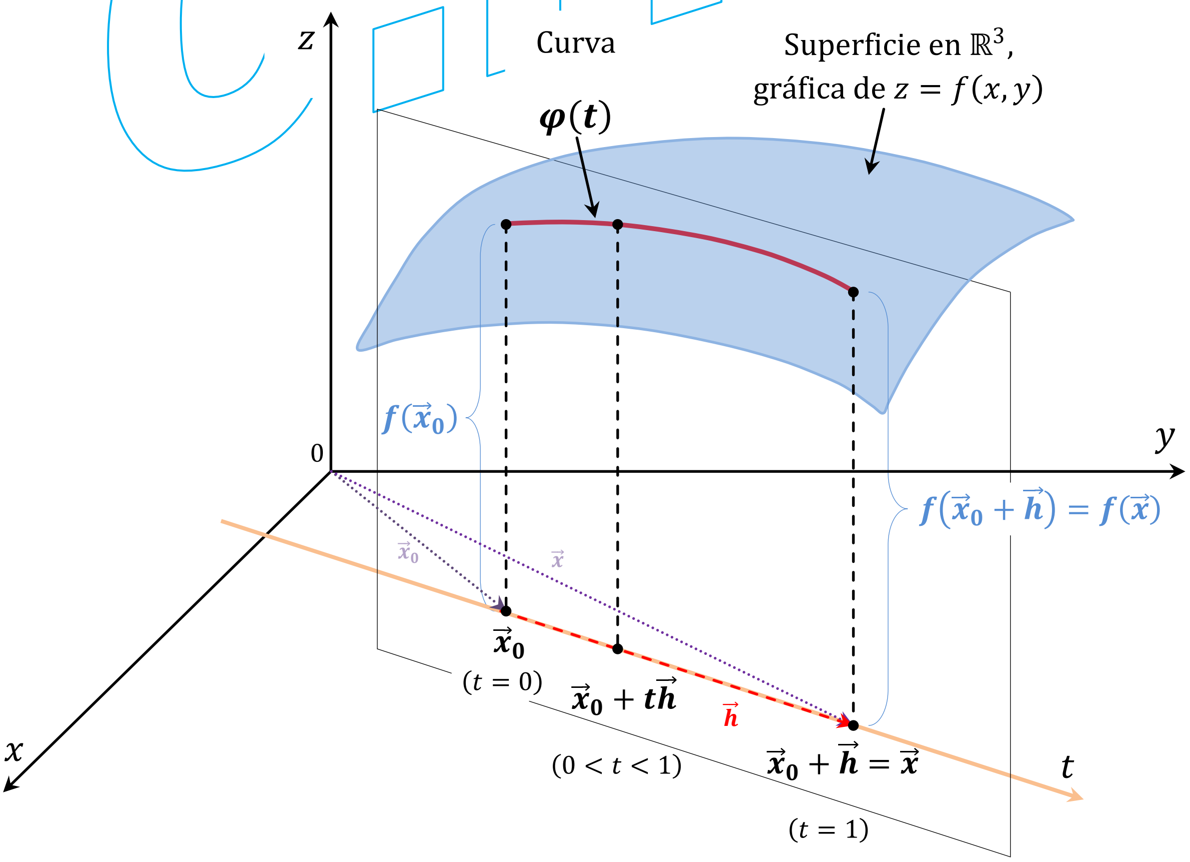
$$\varphi(t) = f\left(\vec{x}_0 + t\,\vec{h}\right), \text{ con } \vec{x}_0 \text{ y } \vec{h} \text{ fijos}$$

y suponiendo que $\vec{x}_0 + t\,\vec{h} \in B_r(\vec{x}_0)$ si $t \in [0,1] \subset D_\varphi$ de modo que cuando:

- $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = f(\vec{x}_0)$
- $t = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(1) = f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) = f(\vec{x})$

podemos deducir la **fórmula de Taylor** para funciones de varias variables.

Por ejemplo si $n = 2$, tenemos $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$



Esto es, $\varphi(t)$ aceptará el siguiente desarrollo de **Taylor** de grado N alrededor de $t = 0$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)\,t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{N!}\varphi^{(N)}(0)t^N + R_N$$

de modo que cuando $t = 1$ se obtiene $f(\vec{x})$.

Si llamamos $\vec{g}(t)=\vec{x}_0+t\vec{h}$ tenemos que

$$\vec{g}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$$
$$f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$f\circ\vec{g}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$\varphi(t)=f\big(\vec{g}(t)\big)=(f\circ\vec{g})(t)$$

Luego por regla de la cadena se obtiene:

$$\varphi'(t)=\underbrace{f'\big(\vec{g}(t)\big)}_{=\vec{\nabla}f(\vec{g}(t))}\ \underbrace{\vec{g}'(t)}_{=\vec{h}}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\vec{g}(t)}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

Cambiando la notación de las derivadas parciales y expresando el producto matricial como un producto escalar

$$=(f_1,\cdots,f_n)_{\vec{g}(t)}\bullet(h_1,\cdots,h_n)$$

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}f_i\Big(\underbrace{\vec{x}_0+t\vec{h}}_{\vec{g}(t)}\Big)h_i$$

con $\varphi'(0)=\sum_{i=1}^{n}f_i(\vec{x}_0)h_i=\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)\bullet\vec{h}=df\big(\vec{x}_0,\vec{h}\big)$ **"La diferencial de f en $\vec{x}_0$ y $\vec{h}$"**

De manera similar se deduce (aplicando la regla de la cadena para derivar $\varphi'(t)$):

$$\varphi''(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}f_{ij}\big(\vec{x}_0+t\vec{h}\big)h_j\right)h_i$$

con $\varphi''(0)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(\vec{x}_0)h_j\right)h_i=\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n}f_{ij}(\vec{x}_0)h_ih_j=d^2f\big(\vec{x}_0,\vec{h}\big)}_{\text{La llamamos "la diferencial segunda de } f \text{ en } \vec{x}_0 \text{ y } \vec{h}\text{"}}$

Y

$$\varphi^{(N)}(t)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{n} f_{i_1\cdots i_N}\left(\vec{x}_0+t\vec{h}\right)h_{i_1}\cdots h_{i_N}$$

$$\text{con } \varphi^{(N)}(0)=\underbrace{\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{n} f_{i_1\cdots i_N}(\vec{x}_0)h_{i_1}\cdots h_{i_N}=d^{(N)}f\left(\vec{x}_0,\vec{h}\right)}_{\text{La llamamos "la diferencial } N\text{-ésima de } f \text{ en } \vec{x}_0 \text{ y } \vec{h}\text{"}}$$

Haciendo $t=1$ en la fórmula de Taylor para $\varphi(t)$ (alrededor de $t=0$)

$$\underbrace{\varphi\left(\overbrace{1}^{t}\right)}_{=f(\vec{x})}=\underbrace{\varphi(0)}_{=f(\vec{x}_0)}+\frac{1}{1!}\varphi'(0)\,\overbrace{1}^{t}+\frac{1}{2!}\varphi''(0)\,\overbrace{1^2}^{t^2}+\cdots+\frac{1}{N!}\varphi^{(N)}(0)\,\overbrace{1^N}^{t^N}+R_N$$

$$\boxed{f(\vec{x})=\underbrace{f(\vec{x}_0)+\frac{1}{1!}\underbrace{\overbrace{\sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{x}_0)h_i}^{\varphi'(0)}}_{df(\vec{x}_0,\vec{h})}+\frac{1}{2!}\underbrace{\overbrace{\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(\vec{x}_0)h_ih_j}^{\varphi''(0)}}_{d^2f(\vec{x}_0,\vec{h})}+\cdots+\frac{1}{N!}\underbrace{\overbrace{\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N=1}^{n} f_{i_1\cdots i_N}(\vec{x}_0)h_{i_1}\cdots h_{i_N}}^{\varphi^{(N)}(0)}}_{d^{(N)}f(\vec{x}_0,\vec{h})}}_{T_N:\ \text{Polinomio de Taylor de grado } N}+R_N}$$

que es la **fórmula de Taylor** de f alrededor de $\vec{x}_0$.

Podemos expresar al **polinomio de Taylor T_N** también como:

$$T_N=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,d^{(k)}f\left(\vec{x}_0,\vec{h}\right);\qquad \text{con } d^{(0)}f\left(\vec{x}_0,\vec{h}\right)=f(\vec{x}_0)$$

O bien en **"<u>forma simbólica</u>"** como:

$$\boxed{T_N=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\overbrace{\left(\vec{\nabla}\bullet\vec{h}\right)^{(k)}f(\vec{x}_0)}^{d^{(k)}f(\vec{x}_0,\vec{h})};\qquad \text{con } \vec{\nabla}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots\ ,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)}$$

El polinomio de Taylor es importante porque permite dar una aproximación de f en torno del punto $\vec{x}_0$, que exhibe de un modo simple muchas de las características de f en ese entorno.

La aproximación es mejor a medida que el polinomio de Taylor es de mayor grado.

Ejemplo

Supongamos que queremos obtener el polinomio de Taylor segundo de grado ($N = 2$) en $\vec{x}_0$ para una función de dos variables: $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Para ello, usamos la fórmula simbólica

$$T_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} \left(\vec{\nabla} \bullet \vec{h}\right)^{(k)} f(\vec{x}_0)$$

Con

- $\vec{x} = (x, y); \quad \vec{x}_0 = (a_1, a_2)$
- $\vec{h} = (h_1, h_2) = \vec{x} - \vec{x}_0 = (x - a_1, y - a_2)$
- $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$

del siguiente modo:

Si $k = 0$, $\frac{1}{0!}\left(\vec{\nabla} \bullet \vec{h}\right)^{(0)} f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0)$

Primer término de la suma correspondiente al polinomio T_2

Si $k = 1$, $\frac{1}{1!}\left(\vec{\nabla} \bullet \vec{h}\right)^{(1)} f(\vec{x}_0) = \left(\vec{\nabla} \bullet \vec{h}\right) f(\vec{x}_0) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \bullet (h_1, h_2)\right] f(\vec{x}_0)$

$$= \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right] f(\vec{x}_0)$$

$$= \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)}_{=\sum_{i=1}^{2} f_i(\vec{x}_0) h_i = df(\vec{x}_0, \vec{h})}$$

Segundo término de la suma correspondiente al polinomio T_2

Si $k = 2$, $\frac{1}{2!}\left(\vec{\nabla} \bullet \vec{h}\right)^{(2)} f(\vec{x}_0) = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \bullet \vec{h}\right)^{(2)} f(\vec{x}_0) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \bullet (h_1, h_2)\right]^{(2)} f(\vec{x}_0)$

$$= \frac{1}{2}\left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(\vec{x}_0)$$

$$= \frac{1}{2}\left[{h_1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + {h_2}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] f(\vec{x}_0)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{{h_1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) + {h_2}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)}_{=\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2} f_{ij}(\vec{x}_0) h_j\right) h_i = \boldsymbol{d^2 f(\vec{x}_0, \vec{h})}}\right]$$

Tercer término de la suma correspondiente al polinomio T_2

Y obtenemos:

$$\boxed{\begin{array}{c} T_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!}(\vec{\nabla}\bullet\vec{h})^{(k)} f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\left[{h_1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) + {h_2}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\right] \\ \vec{x}_0 = (a_1, a_2)\,, \qquad h_1 = x - a_1 \quad , \quad h_2 = y - a_2 \end{array}}$$

Ahora usamos esta expresión para determinar el polinomio de Taylor de segundo grado, por ejemplo, de:

$$f(x,y) = ln(x+y) \text{ en } (1,1)$$

Como $\vec{x}_0 = (a_1, a_2) = (1,1) \;\Rightarrow\; h_1 = x - a_1 = x - 1 \;\; y \;\; h_2 = y - a_2 = y - 1$

$$f(x,y) = ln(x+y) \;\Rightarrow\; f(1,1) = ln(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y} = (x+y)^{-1} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y} = (x+y)^{-1} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -1(x+y)^{-2} = \frac{-1}{(x+y)^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1(x+y)^{-2} = \frac{-1}{(x+y)^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2} \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -\frac{1}{4}$$

$$T_2 = f(\vec{x}_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\left[{h_1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) + 2\,h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) + {h_2}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0)\right]$$

$$T_2 = ln(2) + (x-1)\frac{1}{2} + (y-1)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[(x-1)^2\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\,(x-1)(y-1)\left(-\frac{1}{4}\right) + (y-1)^2\left(-\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$\boxed{T_2 = ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)(y-1) - \frac{1}{8}(y-1)^2}$$

EXTREMOS

Entre las características geométricas básicas de la gráfica de una función se encuentran sus puntos de extremo, en los que la función alcanza su mayor y menor valor.

DEFINICIONES

EXTREMOS GLOBALES O ABSOLUTOS

Sea

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Decimos que f tiene en $\vec{x}_0 \in D_f$ un

$$a)\ \begin{pmatrix} \textit{Máximo} \\ \\ \\ \textit{Mínimo} \end{pmatrix} \begin{matrix} \textit{global o absoluto} \\ \textbf{\textit{en sentido}} \\ \textbf{\textit{amplio}}\ \textit{de valor} \\ f(\vec{x}_0) \end{matrix} \quad \overset{si\ y\ sólo\ si}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \vec{x} \in D_f \ \Rightarrow \ f(\vec{x}_0) \begin{pmatrix} \geq \\ \\ \\ \leq \end{pmatrix} f(\vec{x})$$

$$b)\ \begin{pmatrix} \textit{Máximo} \\ \\ \\ \textit{Mínimo} \end{pmatrix} \begin{matrix} \textit{global o absoluto} \\ \textbf{\textit{en sentido}} \\ \textbf{\textit{estricto}}\ \textit{de valor} \\ f(\vec{x}_0) \end{matrix} \quad \overset{si\ y\ sólo\ si}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \vec{x} \in D_f - \{\vec{x}_0\} \ \Rightarrow \ f(\vec{x}_0) \begin{pmatrix} > \\ \\ \\ < \end{pmatrix} f(\vec{x})$$

EXTREMOS LOCALES O RELATIVOS

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Decimos que f tiene en $\vec{x}_0 \in D_f$ un

$$a)\ \begin{pmatrix} \textit{Máximo} \\ \\ \textit{Mínimo} \end{pmatrix} \begin{matrix} \textit{local o relativo} \\ \textbf{\textit{en sentido}} \\ \textbf{\textit{amplio}}\ \textit{de} \\ \textit{valor}\ f(\vec{x}_0) \end{matrix} \overset{\textit{si y sólo si}}{\Longleftrightarrow} \exists\, B_r(\vec{x}_0) \mid \forall \vec{x} \in B_r(\vec{x}_0) \cap D_f \Rightarrow f(\vec{x}_0) \begin{pmatrix} \geq \\ \\ \leq \end{pmatrix} f(\vec{x})$$

$$b)\ \begin{pmatrix} \textit{Máximo} \\ \\ \textit{Mínimo} \end{pmatrix} \begin{matrix} \textit{local o relativo} \\ \textbf{\textit{en sentido}} \\ \textbf{\textit{estricto}}\ \textit{de} \\ \textit{valor}\ f(\vec{x}_0) \end{matrix} \overset{\textit{si y sólo si}}{\Longleftrightarrow} \exists\, B'_r(\vec{x}_0) \mid \forall \vec{x} \in B'_r(\vec{x}_0) \cap D_f \Rightarrow f(\vec{x}_0) \begin{pmatrix} > \\ \\ < \end{pmatrix} f(\vec{x})$$

<u>Aclaración:</u> Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (campo escalar) tiene un extremo (máximo o mínimo) en $\vec{x}_0 \in D_f$ entonces:

- $f(\vec{x}_0)$ es valor extremo de f
- $\vec{x}_0$ es punto de extremo de f

Es decir, $f(\vec{x}_0)$ es extremo de f y no $\vec{x}_0$.

TEOREMA: CONDICIÓN NECESARIA DE EXTREMO

ENUNCIADO

Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo en $\vec{x}_0 \in D_f$, entonces:

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0} \;\text{ ó }\; f \text{ no es diferenciable en } \vec{x}_0$$

DEMOSTRACIÓN

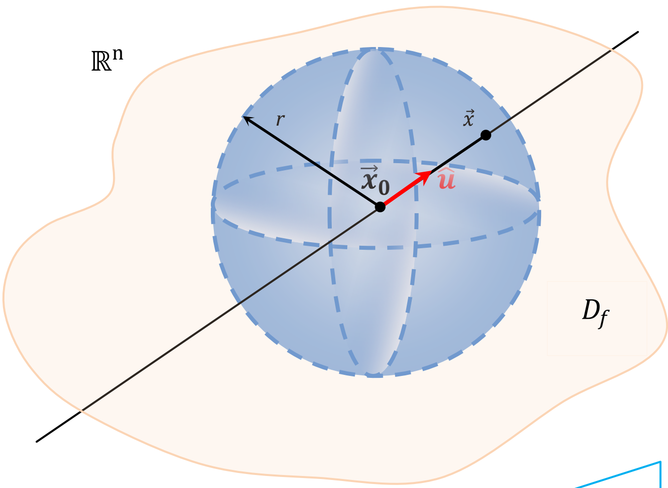
(Sólo para f diferenciable con un extremo local en $\vec{x}_0$ punto interior del D_f)

Suponiendo que f tiene un mínimo local en sentido amplio en $\vec{x}_0$, entonces

$$\forall \hat{u} \in \mathbb{R}^n, \exists\, B_r(\vec{x}_0) \mid si\ |t| < r \;\Rightarrow\; \underbrace{f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}_0 + t\hat{u})}$$

$$\updownarrow$$

$$\overbrace{f(\vec{x}_0 + t\hat{u}) - f(\vec{x}_0) \geq 0}$$



Luego si consideramos los siguientes límites:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\overbrace{f(\vec{x}_0 + t\hat{u}) - f(\vec{x}_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{t}_{>0}} \geq 0$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\overbrace{f(\vec{x}_0 + t\hat{u}) - f(\vec{x}_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{t}_{<0}} \leq 0$$

Tenemos que: como f es diferenciable en $\vec{x}_0$, $\exists\, D_{\hat{u}} f(\vec{x}_0)\ \forall \hat{u} \in \mathbb{R}^n$, entonces por el teorema de unicidad del límite ambos límites deben ser iguales, es decir tienen que ser cero.

$$\Rightarrow \underbrace{D_{\hat{u}} f(\vec{x}_0)} = 0$$

$$\Big\updownarrow \quad \textbf{Por ser } f \textbf{ diferenciable en } \vec{x}_0$$

$$\overbrace{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \bullet \hat{u}} = 0$$

$$\Downarrow \quad \textbf{Por ser } \hat{u} \textbf{ arbitrario}$$

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

Recordando que $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$ es un vector que tiene por componentes las derivadas parciales de la función en el punto $\vec{x}_0$, resulta que la condición impuesta implica que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = 0 \quad \text{para } i = 1,2,\cdots,n$$

Este teorema indica que los puntos de extremos de f deben buscarse en los puntos del dominio de f para los cuales $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{0}$ ó donde f no es diferenciable. A estos puntos se los llama **puntos críticos** de f.

Sin embargo, como esta condición es necesaria pero no suficiente, no todos los puntos críticos son puntos de extremo.

PUNTO CRÍTICO

DEFINICIÓN

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Decimos que $\vec{x}_0 \in D_f$ es punto crítico f

si y sólo si

$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ ó f no es diferenciable en $\vec{x}_0$

En todo punto crítico f tiene

Extremo

Máximo

Mínimo

Máximo y mínimo simultáneamente

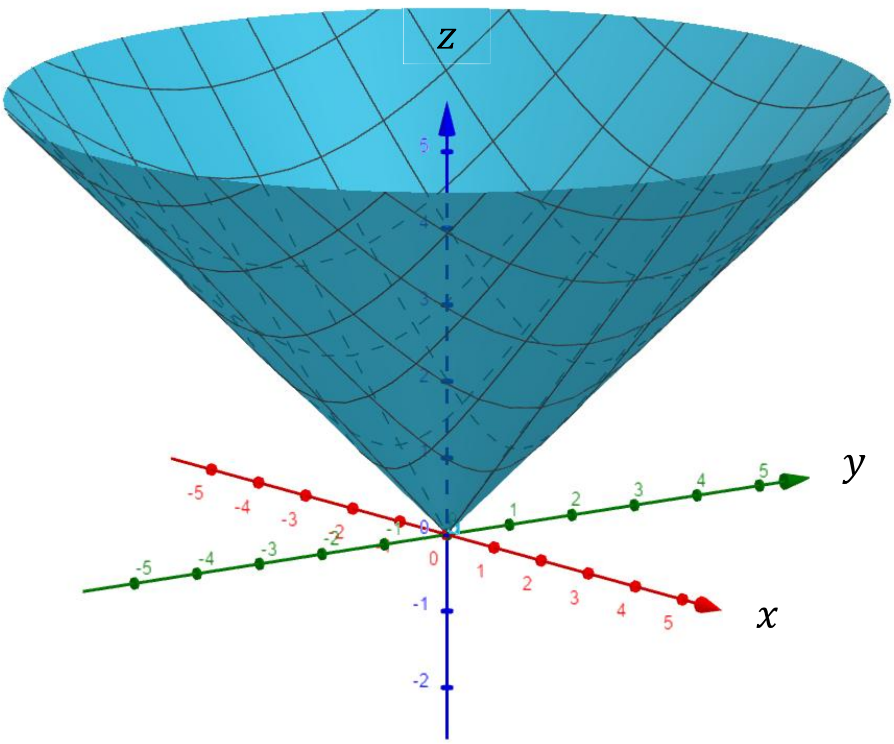
ó

Punto de ensilladura

∗ Un ejemplo de una función f que tiene un extremo en un punto interior de su dominio donde f **no** es diferenciable es:

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Su gráfica es



CONO CIRCULAR

Observando su gráfica y de acuerdo con las definiciones de extremo dadas vemos que f tiene en $(0,0)$ un mínimo local y global en sentido estricto de valor $f(0,0) = 0$.

Se puede comprobar que f no es diferenciable en $(0,0)$ (punto interior del dominio de f) si hacemos

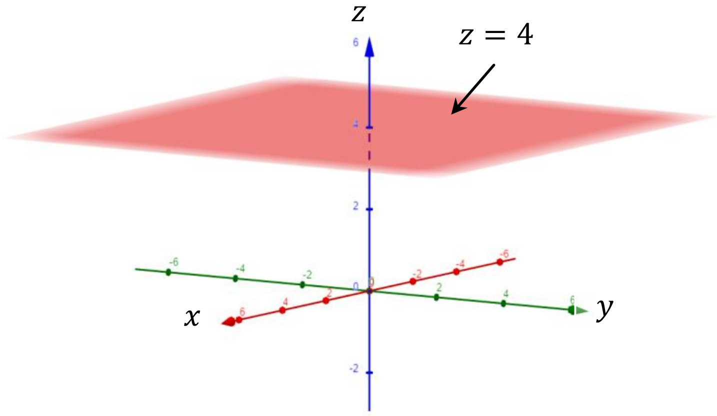
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} \nexists \Rightarrow \nexists\ f_x\,(0,0)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} \nexists \Rightarrow \nexists\ f_y\,(0,0)$$

O sea que $\nexists\ \vec{\nabla} f(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

$*$ Un ejemplo de una función f que tiene máximo y mínimo a la vez es:

$$z = f(x,y) = 4$$



Por ser f diferenciable, los puntos críticos de f son todos los puntos $\vec{x} = (x,y)$ para los cuales $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{0}$:

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y) = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{0}^{f_x} = 0 & (1) \\ \underbrace{0}_{f_y} = 0 & (2) \end{cases}$$

Tanto la ecuación (1) como la (2) se satisfacen $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, es decir todos puntos del dominio de f $\left(D_f = \mathbb{R}^2\right)$ son puntos críticos y son puntos de máximo y mínimo (global y local) simultáneamente en sentido amplio.

PUNTO DE ENSILLADURA

DEFINICIÓN

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Decimos que f tiene un **punto de ensilladura** en $\vec{x}_0$ **punto crítico** de f si y sólo si

$$\forall B_r'(\vec{x}_0), \exists\, \vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2 \in B_r'(\vec{x}_0) \cap D_f \;\middle|\; f(\vec{x}_1) > f(\vec{x}_0) \;\wedge\; f(\vec{x}_2) < f(\vec{x}_0)$$

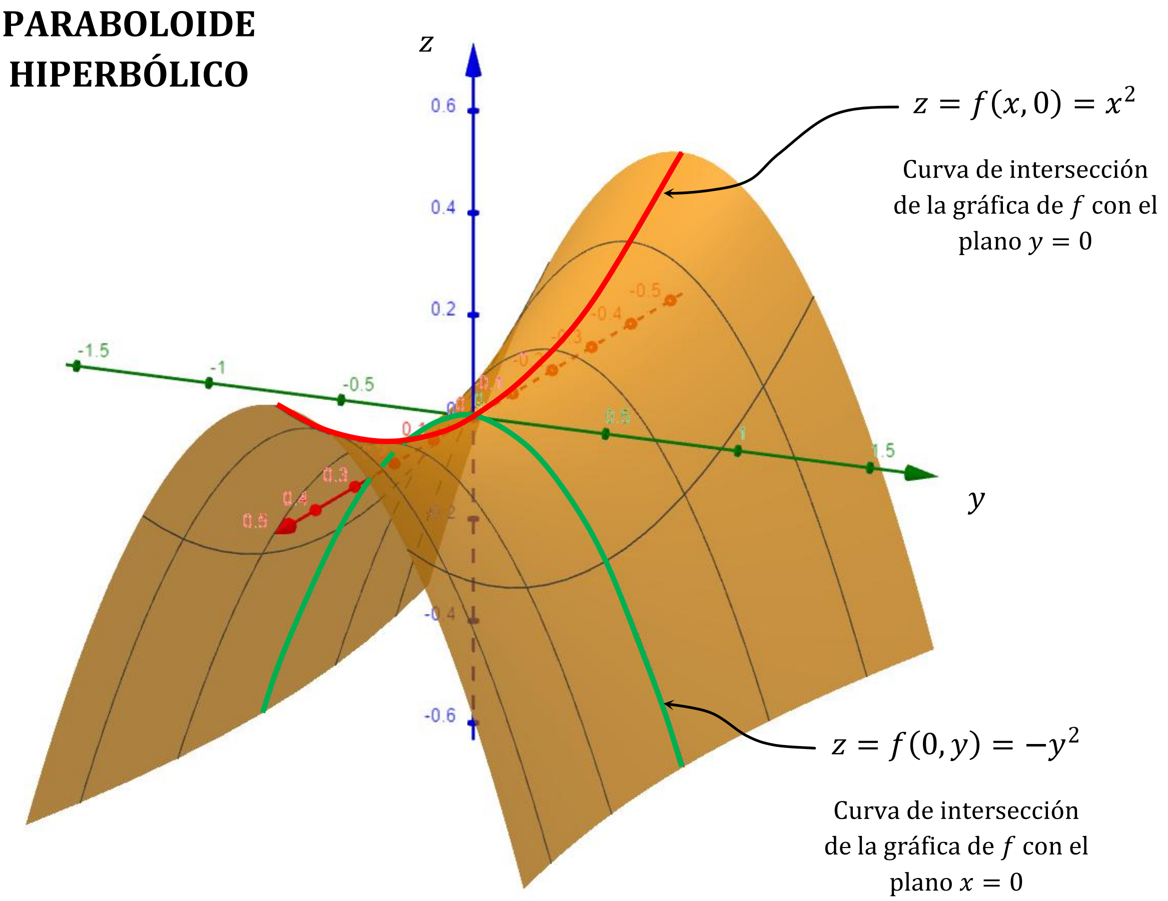
El punto $\left(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0)\right)$ correspondiente a la gráfica de f se llama **punto de ensilladura** de f.

Ejemplo

Sea la función

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2$$

Su gráfica es la siguiente superficie:



Como f es diferenciable, buscamos los puntos críticos haciendo:

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{2x}^{f_x} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \\ \underbrace{-2y}_{f_y} = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \end{cases}$$

El único punto crítico de f es $\vec{x}_0 = (0,0)$ donde $f(0,0) = 0$.

Examinando directamente valores de f para puntos próximos al origen, vemos que:

$$f\Big(\underbrace{x}_{\neq 0},\underbrace{0}_{y}\Big) > \underbrace{f(0{,}0)}_{=0} \qquad \text{y} \qquad f\Big(\underbrace{0}_{x},\underbrace{y}_{\neq 0}\Big) < \underbrace{f(0{,}0)}_{=0}$$

Por lo tanto el punto $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) = (0{,}0{,}0)$ sobre la superficie correspondiente a la gráfica de f es un **punto de ensilladura** de la superficie.

Si hacemos:

- $z = f(x, 0) = x^2$, entonces f que ahora depende sólo de x; tiene un **mínimo local y global estricto** en $(0{,}0)$.

En cambio si hacemos:

- $z = f(0, y) = -y^2$, entonces f que ahora depende sólo de y; tiene un **máximo local y global estricto** en $(0{,}0)$.

Por lo tanto como f tiene en $(0{,}0)$ un **mínimo** en la dirección del eje x y un **máximo** en la dirección del eje y, el punto $(0{,}0{,}0)$ se llama **minimáx** o **punto de ensilladura** ya que cerca del origen la gráfica tiene la forma de una silla de montar, y f **no** tiene extremo en $(0{,}0)$.

Vamos interpretar geométricamente que significa estar en presencia de un máximo, un mínimo o un punto de ensilladura.

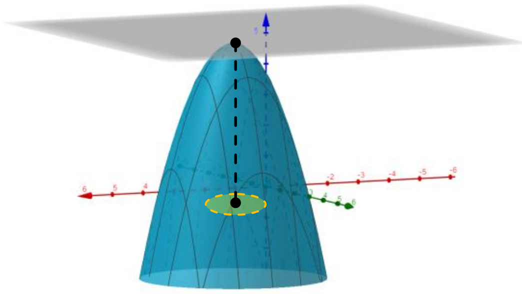
Consideremos una función $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable definida por $z = f(x, y)$.

El hecho que $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ sea punto crítico de f implica que la derivada direccional de f en $\vec{x}_0$ en toda dirección es cero por lo que las derivadas parciales son nulas en $\vec{x}_0$ y la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $\vec{x}_0$:

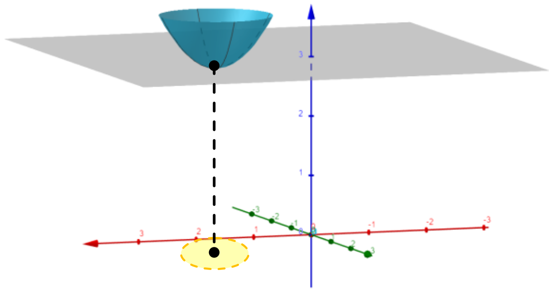
$$z = \overbrace{f_x(x_0, y_0)}^{=0}(x - x_0) + \overbrace{f_y(x_0, y_0)}^{=0}(y - y_0) + \overbrace{f(x_0, y_0)}^{z_0}$$

se reduce a $z = \overbrace{f(x_0, y_0)}^{z_0 = cte}$. O sea tenemos **plano tangente horizontal**.

$*$ Si $\vec{x}_0$ es un **punto de máximo estricto** sucede que en un $B'_r(\vec{x}_0)$, el gráfico de f se encuentra por debajo de dicho plano tangente horizontal.

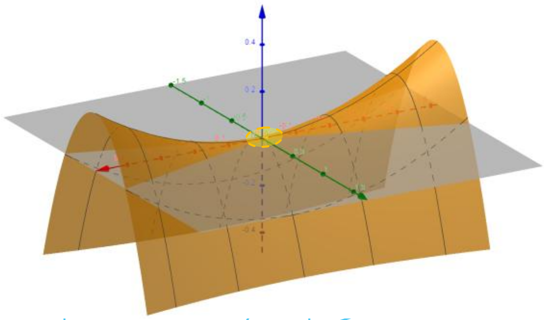


* Si $\vec{x}_0$ es un **punto de mínimo estricto** sucede que en un $B'_r(\vec{x}_0)$, el gráfico de f se encuentra por encima de dicho plano tangente horizontal.



---

* Si $\vec{x}_0$ es un **punto de ensilladura** sucede que en un $B'_r(\vec{x}_0)$, el gráfico de f se encuentra a ambos lados de dicho plano tangente horizontal, atravesándolo.



En AMI para clasificar los puntos críticos de una función $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se utiliza el criterio de la derivada segunda de f.

De manera análoga para campos escalares diferenciables $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ vamos a deducir un criterio basado en la diferencial segunda f que nos permita determinar la naturaleza de los puntos críticos.

Para ello aproximamos a f con un polinomio de Taylor de segundo grado en un entorno de $\vec{x}_0$ punto crítico de f.

Por la fórmula de Taylor tenemos que:

$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \frac{1}{1!}\overbrace{\underbrace{df\left(\vec{x}_0, \vec{h}\right)}_{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\bullet\vec{h}}}^{=0\ ya\ \vec{x}_0\ es\ punto\ crítico\ de\ f} + \frac{1}{2!}d^2 f\left(\vec{x}_0, \vec{h}\right)}_{T_2:\ \text{polinomio de Taylor de segundo grado}} + R_2; \quad \text{con } \vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$$

$$f(\vec{x}) = \underbrace{f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2!}d^2 f\left(\vec{x}_0, \vec{h}\right)}_{T_2} + R_2$$

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \frac{1}{2!}d^2 f\left(\vec{x}_0, \vec{h}\right) + R_2$$

Para valores de $\vec{h} \neq \vec{0}$ suficientemente pequeños, es decir para puntos $\vec{x}$ suficientemente cercanos a $\vec{x}_0$ pero con $\vec{x} \neq \vec{x}_0$, R_2 es despreciable frente al valor de la $d^2f(\vec{x}_0, \vec{h})$ por lo que

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \approx \frac{1}{2!} d^2f(\vec{x}_0, \vec{h})$$

O sea si aproximamos a f usando T_2 en un $B_r(\vec{x}_0)$ tenemos que:

$$\boxed{sgn[f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)] = sgn[d^2f(\vec{x}_0, \vec{h})]}$$

lo que nos permite analizar el signo de la diferencia $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ haciéndolo con el signo de $d^2f(\vec{x}_0, \vec{h})$. Por lo tanto $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ con $\vec{h}$ suficientemente pequeño vemos que:

a) Si $d^2f(\vec{x}_0, \vec{h}) > 0 \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) > 0 \Rightarrow f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$, f tiene un **mínimo local** en $\vec{x}_0$.
b) Si $d^2f(\vec{x}_0, \vec{h}) < 0 \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) < 0 \Rightarrow f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$, f tiene un **máximo local** en $\vec{x}_0$.
c) Si $d^2f(\vec{x}_0, \vec{h}) \gtrless 0 \Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \gtrless 0 \Rightarrow f(\vec{x}) \gtrless f(\vec{x}_0)$, f tiene un **punto de ensilladura** en $\vec{x}_0$.

Recordando la expresión de la diferencial segunda tenemos que ésta también puede expresarse en forma matricial

$$d^2f(\vec{x}_0, \vec{h}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overbrace{f_{ij}}^{\text{Derivada parcial de segundo orden de } f} (\vec{x}_0) h_j \right) h_i}_{\text{Es uma } \textbf{forma cuadrática} \text{ que puede expresarse en forma matricial como el siguiente producto :}}$$

$$= \overbrace{\underbrace{(h_1, \cdots, h_n)}_{\mathbf{1\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}}_{\substack{\boldsymbol{H_f(\vec{x}_0)} \\ \boldsymbol{n\times n}}} \underbrace{\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{n\times 1}}}$$

donde a $Hf(\vec{x}_0)$ se la llama **matriz Hessiana** de f en $\vec{x}_0$. Como estamos usando un polinomio de Taylor de segundo grado T_2 para aproximar a f en un $B_r(\vec{x}_0) \subset D_f$ se requiere que $f \in C^2(B_r(\vec{x}_0))$, con lo cual $f_{ij} = f_{ji}$ y en consecuencia la matriz $H_f(\vec{x}_0)$ es simétrica.

CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Para un campo escalar f **diferenciable** de n variables podemos utilizar el siguiente criterio basado en la matriz de las derivadas segundas de f para la clasificación de sus puntos críticos.

TEOREMA

Sean

- $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

  un campo escalar con $f \in C^2\big(B_r(\vec{x}_0)\big)$, siendo $\vec{x}_0$ punto crítico de f

- $Hf(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$ la matriz **Hessiana** de f en $\vec{x}_0$ y

- $|H_1| = f_{11}\ , \quad |H_2| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad , |H_n| = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$

  los determinantes **menores angulares** de la matriz Hessiana de f en $\vec{x}_0$.

Entonces:

<u>Caso 1:</u> $|H_n| \neq 0$

a) Si $|H_i| > 0, \ \ 1 \leq i \leq n \ \ \Rightarrow \ \boldsymbol{d^2 f\big(\vec{x}_0, \vec{h}\big)} > 0 \ \ \forall \vec{h} \neq \vec{0}$
   f tiene en $\vec{x}_0$ un **<u>mínimo local</u>**

b) Si $|H_i| < 0$ para los i impares
   $|H_i| > 0$ para los i pares $\Big\}\ 1 \leq i \leq n \ \ \Rightarrow \ \boldsymbol{d^2 f\big(\vec{x}_0, \vec{h}\big)} < 0 \ \ \forall \vec{h} \neq \vec{0}$
   f tiene en $\vec{x}_0$ un **<u>máximo local</u>**

c) En otro caso f tiene en $\vec{x}_0$ un **<u>punto de ensilladura</u>** $\left[\ \boldsymbol{d^2 f\big(\vec{x}_0, \vec{h}\big) \gtrless 0 \ \ \forall \vec{h} \neq \vec{0}}\ \right]$

<u>Caso 2:</u> $|H_n| = 0$. $\left[\ \boldsymbol{d^2 f\big(\vec{x}_0, \vec{h}\big) \geq 0}\ \text{ó}\ \boldsymbol{d^2 f\big(\vec{x}_0, \vec{h}\big) \leq 0}\ \text{ó}\ \boldsymbol{d^2 f\big(\vec{x}_0, \vec{h}\big) \gtrless 0}\ \text{ó}\ \boldsymbol{d^2 f\big(\vec{x}_0, \vec{h}\big) = 0\ \forall \vec{h} \neq \vec{0}}\ \right]$

No decide.

Este teorema, si bien da **condiciones suficientes** para la existencia de extremo y punto de ensilladura, no cubre todos los casos que pueden presentarse ya que en el **<u>Caso 2</u>** podría haber en $\vec{x}_0$ un punto de extremo ó de ensilladura, sin embargo el criterio no permite obtener una visión del comportamiento de f en un entorno de dicho punto crítico y por eso decimos (en este caso) que el citerio no decide o no brinda información.

Para una función de 2 variables ($n = 2$) donde

$$|H_2| = |Hf(\vec{x}_0)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{\vec{x}_0}$$

es el determinante Hessiano de f en $\vec{x}_0$, el criterio se reduce a:

(I) Si $|Hf(\vec{x}_0)| > 0$ y $f_{xx}(\vec{x}_0) > 0$ - Caso 1.a)

f tiene en $\vec{x}_0$ un **mínimo local**

(II) Si $|Hf(\vec{x}_0)| > 0$ y $f_{xx}(\vec{x}_0) < 0$ - Caso 1.b)

f tiene en $\vec{x}_0$ un **máximo local**

(III) Si $|Hf(\vec{x}_0)| < 0$ - Caso 1.c)

f tiene en $\vec{x}_0$ un **punto de ensilladura**

(IV) Si $|Hf(\vec{x}_0)| = 0$ - Caso 2

No decide

EJEMPLOS

Ejemplo 1

Encuentre y clasifique los puntos críticos de la siguiente función

$$f(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

Solución

Por ser f diferenciable, los puntos críticos de f son todos los puntos $\vec{x} = (x, y, z)$ para los cuales $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{0}$.

Entonces se hace:

C.F.D.S

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z) = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 0 & \Rightarrow \\ f_y = 0 & \Rightarrow \\ f_z = 0 & \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} yz - 2x = 0 & (1) \\ xz - 2y = 0 & (2) \\ xy - 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

Y se buscan todas las ternas ordenadas (x, y, z) que satisfacen este sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

De (1) se obtiene

$$(4)\ \ x = \frac{1}{2} yz$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{2}yz$ en (2)

$$\frac{1}{2} yz^2 - 2y = 0$$

$$\frac{1}{2} y(z^2 - 4) = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = \pm 2 \end{cases}$$

- <u>Si $y = 0$</u> en (3) se obtiene: $0 - 2z = 0 \ \Rightarrow \ z = 0.$

Luego con <u>$y = 0 \wedge z = 0$</u> en (4) se obtiene $x = 0.$

Por lo tanto <u>$(x, y, z) = (0,0,0)$ es punto crítico de f.</u>

- <u>Si $z = 2$</u> en (3) se obtiene $xy - 2(2) = 0 \ \Rightarrow \ xy = 4 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (5)\ \ y = \frac{4}{x} \quad , \qquad x \neq 0$$

Sustityendo $y = \frac{4}{x}$ y $z = 2$ en (2):

$$x(2) - 2\left(\frac{4}{x}\right) = 0$$

$$\frac{2x^2 - 8}{x} = 0 \ \Rightarrow \ 2x^2 = 8 \ \Rightarrow x = \pm 2$$

<u>Como $z = 2$,</u> si se sustituye $x = \pm 2$ en (5) se obtienen los <u>puntos críticos: (2,2,2) y $(-2, -2, 2)$.</u>

- <u>Si $z = -2$</u> en (3) se obtiene $xy - 2(-2) = 0 \;\Rightarrow\; xy = -4 \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (6)\;\; y = -\frac{4}{x} \;, \qquad x \neq 0$$

Sustituyendo $y = -\frac{4}{x}$ y $z = -2$ en (2)

$$x(-2) + 2\left(\frac{4}{x}\right) = 0$$

$$\frac{-2x^2 + 8}{x} = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 = 8 \;\Rightarrow x = \pm 2$$

<u>Como $z = -2$,</u> si se sustituye $x = \pm 2$ en (6) se obtienen los <u>puntos críticos: $(2,-2,-2)$ y $(-2,2,-2)$.</u>

<u>Entonces los puntos críticos son:</u>

1) $(0,0,0)$
2) $(2,2,2)$
3) $(-2,-2,2)$
4) $(2,-2,-2)$
5) $(-2,2,-2)$

<u>Clasificación:</u>

$f_x = yz - 2x$
$f_y = xz - 2y$
$f_z = xy - 2z$

La matriz Hessiana de f es:

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & z & y \\ z & -2 & x \\ y & x & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Para 1) (0,0,0)</u>

$$Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

y

$$|H_1| = -2 < 0 \,,\; |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \,,$$

$$|H_3| = |H| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 < 0$$

Como $|H_1| < 0, |H_2| > 0\ y\, |H_3| < 0$ - caso 1.b)

<u>f tiene en $(0,0,0)$ un **máximo local**</u>

<u>Para 2) $(2,2,2)$</u>

$$Hf(2,2,2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|H_1| = -2 < 0\,,\ |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ,$

$$|H_3| = |H| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 16 + 16 = 32 > 0$$

- caso 1.c)

<u>f tiene en $(2,2,2)$ un **punto de ensilladura**</u>

<u>Para 3) $(-2,-2,2)$</u>

$$Hf(-2,-2,2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$|H_1| = -2 < 0\,,\ |H_2| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ,$

$$|H_3| = |H| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 16 + 16 = 32 > 0$$

- caso 1.c)

<u>f tiene en $(-2,-2,2)$ un **punto de ensilladura**</u>

Para 4) $(2,-2,-2)$

$$Hf(2,-2,-2)=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & 2\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$|H_1|=-2<0\,,\;|H_2|=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix}=0\;,$

$$|H_3|=|H|=\begin{vmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & 2\\ -2 & 2 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}$$

$$=0+16+16=32>0$$

- caso 1.c)

f tiene en $(2,-2,-2)$ un **punto de ensilladura**

Para 5) $(-2,2,-2)$

$$Hf(-2,2,-2)=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & -2 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

$|H_1|=-2<0\,,\;|H_2|=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix}=0\;,$

$$|H_3|=|H|=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 2\\ -2 & -2 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 2 & -2\end{vmatrix}$$

$$=0+16+16=32>0$$

- caso 1.c)

f tiene en $(2,-2,-2)$ un **punto de ensilladura**

Ejemplo 2

Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función:

$$f(x,y)=x^3+3xy^2-3x^2-3y^2+4$$

Solución

Por ser f diferenciable, se buscan los puntos donde:

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y) = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 & (1) \\ 6xy - 6y = 0 & (2) \end{cases}$$

Se obtiene un sistema de 2 ecuaciones no lineales con 2 incógnitas.

De (2) $\quad 6y(x-1) = 0 \rightarrow y = 0, \quad x = 1$

Si $y = 0$ en (1) se obtiene

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, \quad x = 2$$

Entonces se tienen los puntos críticos: (0,0) y (2,0).

Si $x = 1$ en (1) se obtiene

$$3 + 3y^2 - 6 = 0 \Rightarrow 3(y^2 - 1) = 0 \rightarrow y = 1, \quad y = -1$$

Y los puntos críticos: (1,1) y (1,−1).

Clasificación:

El determinante hessiano de f es:

$$|Hf| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{vmatrix} = (6x-6)^2 - 36y^2$$

Para (0,0) se tiene que

$|Hf(0,0)| = 36 > 0$ y $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ - caso 1.b

Por lo tanto f tiene en (0,0) **un máximo local**

Para $(2{,}0)$ se tiene que

$|Hf(2{,}0)| = 36 > 0$ y $f_{xx}(2{,}0) = 6 > 0$ - caso 1.a

Por lo tanto f tiene en $(2{,}0)$ un **mínimo local**

Para $(1{,}1)$ se tiene que

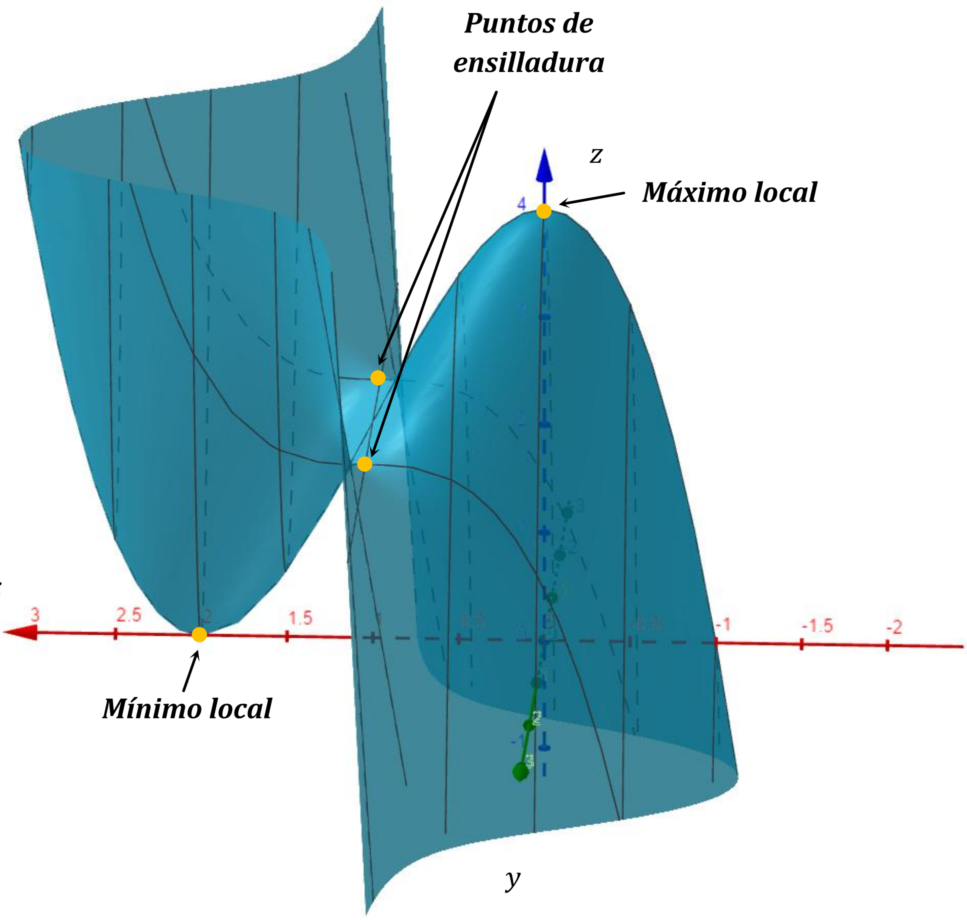
$|Hf(1{,}1)| = -36 < 0$ - caso 1.c

Por lo tanto f tiene en $(1{,}1)$ un **punto de ensilladura**

Para $(1,-1)$ se tiene que

$|Hf(1{,}1)| = -36 < 0$ - caso 1.c

Por lo tanto f tiene en $(1,-1)$ un **punto de ensilladura**



EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1 Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y$$

Solución

$$\begin{cases} f_x = 9x^2 - 9 = 0 & (1) \\ f_y = 2y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) $x = \pm 1$ y de (2) $y = -2$

Luego los puntos críticos de f son: $(1, -2)$ y $(-1, -2)$.

$$f_{xx} = 18x \quad , \quad f_{xy} = f_{yx} = 0 \ , \qquad f_{yy} = 2$$

$$|Hf(x, y)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 36x$$

Para $(1, -2)$

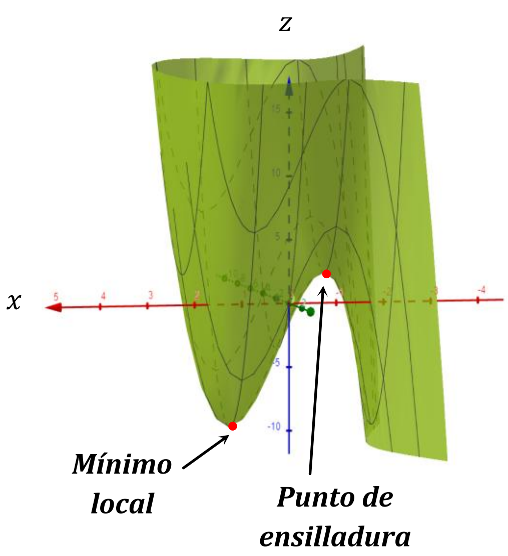
$|Hf(1, -2)| = 36 > 0 \quad , \quad f_{xx}(1, -2) = 18 > 0$

f tiene en $(1, -2)$ un mínimo local

Para $(-1, -2)$

$|Hf(-1, -2)| = -36 < 0$

f tiene en $(-1, -2)$ un punto de ensilladura



Ejercicio 2 Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2 - x^2}$$

Solución

$f_x = 2xe^{y^2 - x^2} + (x^2 + y^2)(-2x)e^{y^2 - x^2}$

$f_y = 2ye^{y^2 - x^2} + (x^2 + y^2)(2y)e^{y^2 - x^2}$

$$\begin{cases} \overbrace{2xe^{y^2-x^2}(1-x^2-y^2)}^{f_x} = 0 \\ \underbrace{2ye^{y^2-x^2}(1+x^2+y^2)}_{f_y} = 0 \end{cases}$$ como las exponenciales nunca se anulan:

$$\begin{cases} 2x(1-x^2-y^2) = 0 & (1) \\ 2y(1+x^2+y^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) $y = 0$ ya que $1 + x^2 + y^2$ nunca se anula.
Si $y = 0$ en (1)

$$2x(1-x^2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Luego los puntos críticos de f son: (0,0), (1,0) y (−1,0).

$$f_{xx} = 2e^{y^2-x^2}(1-x^2-y^2) - 4x^2(1-x^2-y^2)e^{y^2-x^2} - 4x^2e^{y^2-x^2}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{y^2-x^2}(1-x^2-y^2) - 4xye^{y^2-x^2}$$

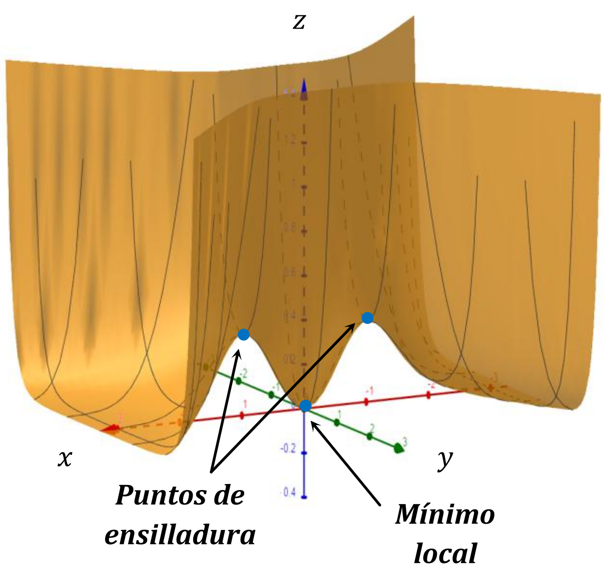
$$f_{yy} = 2e^{y^2-x^2}(1+x^2+y^2) + 4y^2e^{y^2-x^2}(1+x^2+y^2) + 4y^2e^{y^2-x^2}$$

Para (0,0)

$$|Hf(0,0)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(0,0)}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \; f_{xx}(0,0) = 2 > 0$$

f tiene en (0,0) un mínimo local



Para (±1,0)

$$|Hf(\pm1,0)| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(\pm1,0)}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{4}{e} \end{vmatrix} = -\frac{16}{e^2} < 0$$

f tiene puntos de ensilladura en (1,0) y en (−1,0)

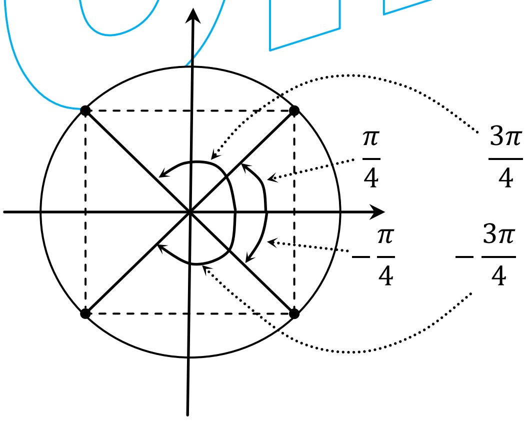
Ejercicio 3 Encuentre los puntos críticos de la función

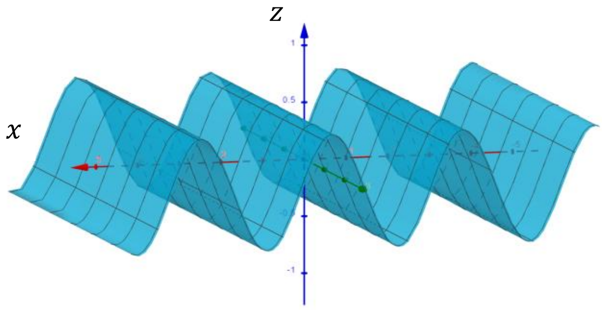
$$f(x,y) = sen(x)cos(x)$$

y en caso de ser posible clasifíquelos.

Solución

$$\vec{\nabla} f = \left(f_x, f_y\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cos^2(x) - sen^2(x) = 0 & (1) \\ 0 = 0 & (2) \end{cases}$$





$$Puntos\ críticos = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$f_{xx} = -2cos(x)sen(x) - 2sen(x)cos(x) = -4cos(x)sen(x),\ f_{yy} = 0,\ f_{xy} = f_{yx} = 0$

$|Hf| = 0$ **No decide**

Ejercicio 4

Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = x\ sen(y)$.

Solución

$$\vec{\nabla} f = \left(f_x, f_y\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sen(y) = 0 & (1) \\ x\ cos(y) = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) $\quad y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

De (2) $\quad x = 0\ \ o\ \ y = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

Pero como $sen\left(\overbrace{\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi}^{y}\right)\neq 0,\ n\in\mathbb{Z}$, se descarta $y=\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}$.

Luego

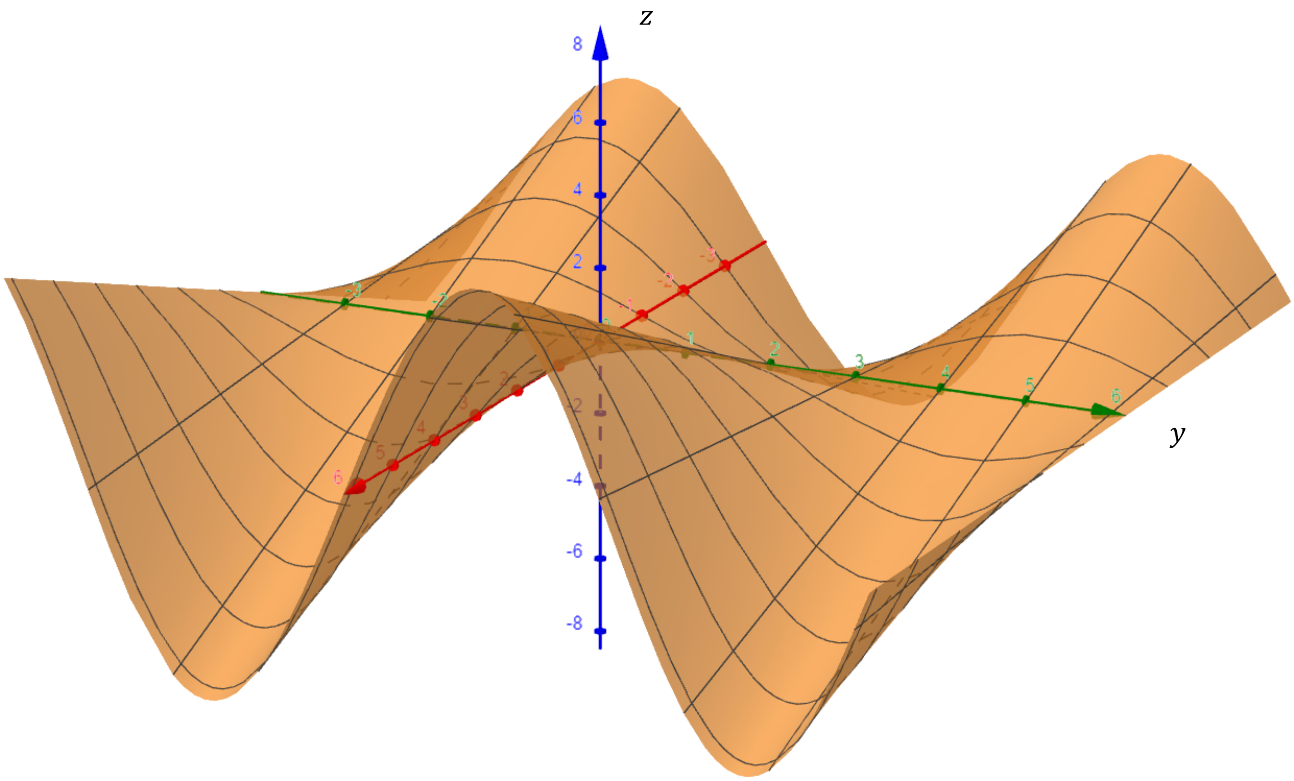
$$Puntos\ críticos = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0, y=k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$$

$f_{xx}=0, \qquad f_{yy}=-x\ sen(y), \quad f_{xy}=f_{yx}=cos(y)$

$$|Hf|=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & cos(y) \\ cos(y) & -x\ sen(y) \end{vmatrix}=-cos^2(y)$$

$|Hf(0,k\pi)|=-cos^2(k\pi)=-1\ , k\in\mathbb{Z}$

f tiene en $(0,k\pi)$ con $k\in\mathbb{Z}$ **puntos de ensilladura**.



EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Encuentre y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

Resp: f tiene en $(2,-1)$ un mínimo local.

b) $f(x,y) = 6x - 3x^2 - y^2 + 2y$

Resp: f tiene en $(1,1)$ un máximo local.

c) $f(x,y) = x^2 + 5y^2 + x^2y + 2y^3$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un mínimo local, en $\left(0,-\frac{5}{3}\right)$ un máximo local, y en $(2,-1)$ y $(-2,-1)$ puntos de ensilladura.

d) $f(x,y) = xye^{x+2y}$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un punto de ensilladura, y en $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ un máximo local.

e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 6y^2 - 36x$

Resp: f tiene en $(6,4)$ un mínimo local, en $(-2,0)$ un máximo local, y en $(6,0)$ y $(-2,4)$ puntos de ensilladura.

f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un punto de ensilladura, y en $(1,1)$ y $(-1,-1)$ mínimos locales.

g) $f(x,y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 7$

Resp: f tiene en $\left(\frac{27}{2},5\right)$ un mínimo local, y en $\left(\frac{3}{2},1\right)$ un punto de ensilladura.

h) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Resp: f tiene en $(2,1)$ un mínimo local, en $(-2,-1)$ un máximo local, y en $(1,2)$ y $(-1,-2)$ puntos de ensilladura.

i) $f(x,y) = (x+y)e^{-xy}$

Resp: f tiene en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ puntos de ensilladura.

j) $f(x,y) = 3y^2 + 6xy - 2y^3 - 3x^2$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un punto de ensilladura, y en $(2,2)$ máximo local.

k) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy + 7x - 8y$

Resp: f tiene en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$ un punto de ensilladura, y en $(1,5)$ mínimo local.

l) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + x^2y$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un mínimo local, y en $(2,-1)$ y $(-2,-1)$ puntos de ensilladura.

m) $f(x,y) = e^{2x^2 - \frac{1}{2}y^2 + y}$

Resp: f tiene en $(0,1)$ un punto de ensilladura.

n) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 15y - 12x$

Resp: f tiene en $(1,2)$ un mínimo local, en $(-1,-2)$ un máximo local, y en $(2,1)$ y $(-2,-1)$ puntos de ensilladura.

o) $f(x,y) = e^{3x^2 - 6x + 2y^2}$

Resp: f tiene en $(1,0)$ un mínimo local.

2. Obtenga la distancia más corta desde el punto $(0,1,-2)$ al plano de ecuación $2x + y + z = 4$. *Resp:* $d = \frac{5}{6}\sqrt{6}$

3. Obtenga los puntos sobre el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(2,4,0)$. *Resp:* $(1,2,\sqrt{5})$, $(1,2,-\sqrt{5})$

4. Obtenga el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano de ecuación $2x + 3y + z = 6$. *Resp:* $\frac{4}{3}$

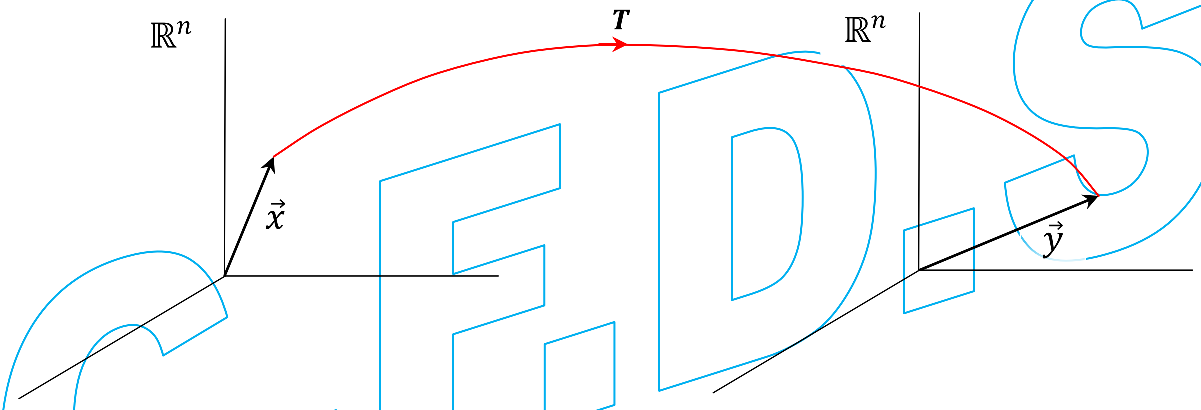
5. Sean dos rectas definidas en forma paramétrica como:

$$\vec{\alpha}(t) = (t, 2t, -1) \qquad y \qquad \vec{\beta}(s) = (3s, 2s, 0)$$

Obtenga la mínima distancia entre ellas y los dos puntos (uno de cada recta) más cercanos entre sí. *Resp:* $d = 1;\ (0,0,-1), (0,0,0)$

TRANSFORMACIÓN

Una transformación es una función $T: D_T \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cuyo dominio y rango son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.



T transforma vectores $\vec{x}$ en vectores $\vec{y}$.

Transformación uno a uno

Una transformación $T: D_T \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es **uno a uno** (o inyectiva) si y sólo si nunca transforma 2 vectores distintos en el mismo vector.

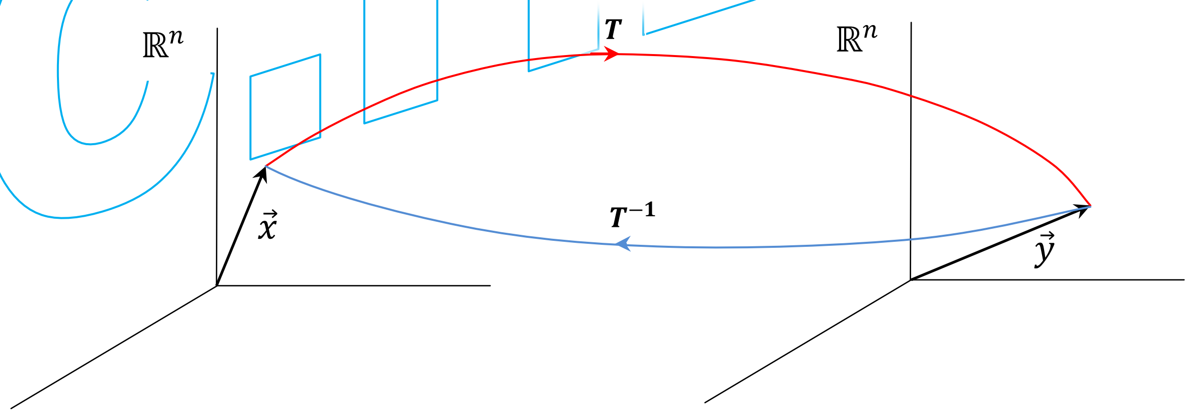
Es decir: $T(\vec{x}_1) \neq T(\vec{x}_2)$ siempre que $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$.

FUNCIÓN INVERSA

Sea $T: D_T \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación **uno a uno.** Si existe una función T^{-1} con la propiedad:

$$T^{-1}(\vec{y}) = \vec{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{y} = T(\vec{x})$$

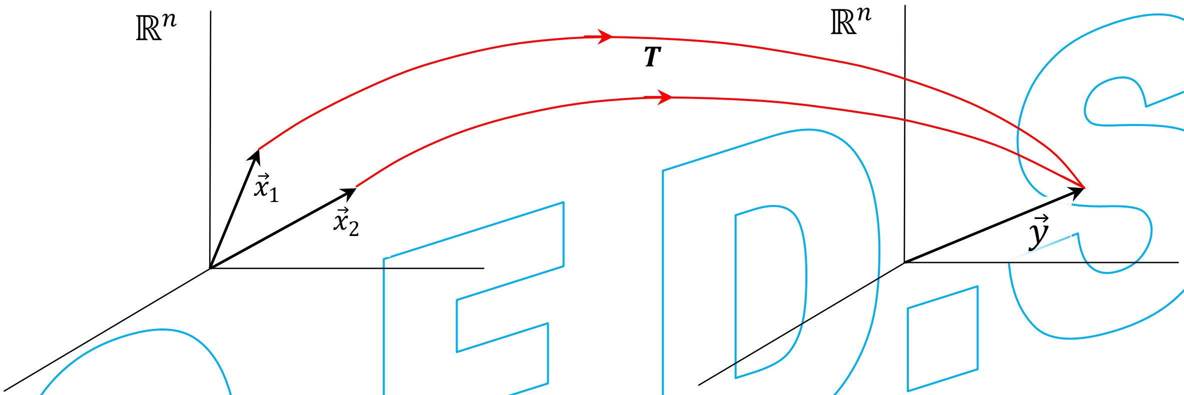
Entonces T^{-1} se llama **función inversa** de T.



T^{-1} invierte la acción de T de modo que $\underbrace{D_{T^{-1}}}_{\substack{\text{dominio} \\ \text{de } T^{-1}}} = \underbrace{R_T}_{\substack{\text{rango} \\ \text{de } T}}$ y $R_{T^{-1}} = D_T$.

Esto es, si T mapea $\vec{x}$ en $\vec{y}$, entonces T^{-1} mapea $\vec{y}$ de regreso a $\vec{x}$.

Si T no fuera uno a uno como por ejemplo:



Entonces la relación inversa de T no sería función.

TEOREMA DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Enunciado

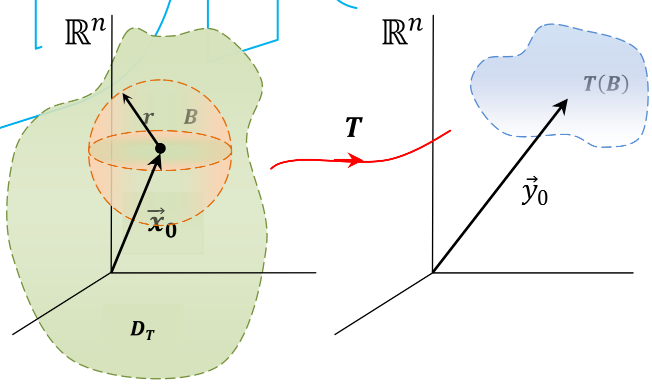
Sea la transformación

$$T: D_T \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \; ; \; D_T \text{ abierto.}$$

Si $T \in C^1(D_T)$ y $T'(\vec{x}_0)$ tiene matriz inversa, entonces existe un entorno B de $\vec{x}_0$: $B_r(\vec{x}_0) \subset D_T$, tal que

1) $T/_B$ (T restringida a B) es uno a uno.

2) El conjunto $\underbrace{T(B)}_{\substack{\text{la imagen} \\ \text{de } B \text{ por } T}}$ es abierto.



3) Existe la función inversa T^{-1} de $T/_B$ con $T^{-1} \in C^1\big(T(B)\big)$.

4) Además:

$$\underbrace{(T^{-1})'(\vec{y}_0)}_{\substack{\text{derivada de la} \\ \text{inversa de } T \\ \text{en } \vec{y}_0}} = \underbrace{\big(T'(\vec{x}_0)\big)^{-1}}_{\substack{\text{inversa de la} \\ \text{derivada de } T \\ \text{en } \vec{x}_0}} , \qquad \text{donde } \vec{y}_0 = T(\vec{x}_0)$$

<u>Demostración parcial</u>

Supuesta la existencia de T^{-1}, entonces

$$T^{-1}(\vec{y}) = \vec{x}, \qquad \text{con } \vec{x} \in B$$

$$T^{-1}\left(\overbrace{T(\vec{x})}^{\vec{y}}\right) = \vec{x}$$

$$(T^{-1} \circ T)(\vec{x}) = \vec{x}$$

Derivando ambos miembros respecto de la variable última $\vec{x}$, por regla de la cadena nos queda:

$$(T^{-1})'\big(T(\vec{x})\big)T'(\vec{x}) = \mathbb{I}^{n\times n}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}^{n\times n}$$

matriz identidad $n \times n$

Evaluando en $\vec{x}_0$

$$(T^{-1})'\big(T(\vec{x}_0)\big)T'(\vec{x}_0) = \mathbb{I}^{n\times n}$$

$$(T^{-1})'\left(\overbrace{\vec{y}_0}^{T(\vec{x}_0)}\right)T'(\vec{x}_0) = \mathbb{I}^{n\times n}$$

Multiplicando por la inversa de $T'(\vec{x}_0)$ obtenemos:

$$(T^{-1})'(\vec{y}_0) = \big(T'(\vec{x}_0)\big)^{-1}$$

Este teorema es un ejemplo de lo que se conoce como **teorema de existencia**.

Afirma que bajo ciertas condiciones "algo" existe (en este caso una familia de inversas locales de una transformación T) pero no detalla el método mediante el cual puede hallarse o construirse.

El interés principal del teorema radica en el hecho que utilizándolo, se puede estar seguro que la transformación posee inversa y usar este hecho para posteriores desarrollos.

Es conveniente resaltar la validez "local" del teorema, el cual afirma la existencia de la inversa en un entorno de un punto $\vec{x}_0$, lo que no implica que ésta necesariamente exista cuando se considera todo el dominio de la función.

TRANSFORMACIÓN REGULAR

Sea $T: D_T \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$; D_T abierto. T es **regular** en $D \subset D_T$ si y sólo si:

1) $T \in C^1(D)$.
2) T es uno a uno en D.
3) $det\, T'(\vec{x}) \neq 0 \quad \forall \vec{x} \in D$. $\qquad$ ($\Rightarrow T'(\vec{x})$ tiene matriz inversa en D)

Toda transformación regular T en D tiene función inversa $T^{-1} \in C^1\big(T(D)\big)$ ya que T cumple con el teorema de la derivada de la función inversa.

COORDENADAS CURVILINEAS

A veces es útil introducir en $\mathbb{R}^n$ coordenadas diferentes de las naturales o rectangulares x_i.

Específicamente, a cada punto $(x_1, \cdots, x_n)$ se le asigna una nueva n-upla $(u_1, \cdots, u_n)$.

Luego, si pretende pasar de un sistema de coordenadas a otro, la asignación descripta debe ser uno a uno, esto es, a cada $(x_1, \cdots, x_n)$ deberá corresponderle sólo una n-upla $(u_1, \cdots, u_n)$ y viceversa.

SISTEMAS DE COORDENADAS

Una transformación $T: D_T \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ -(D_T abierto)- **regular en** $\boldsymbol{D} \subset D_T$ es un sistema de coordenadas para D.

Esto es, dado $T(\vec{x}) = \big(T_1(\vec{x}), \cdots, T_n(\vec{x})\big)$ donde $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, se tiene que los números $T_1(\vec{x}), \cdots, T_n(\vec{x})$ son las coordenadas de $\vec{x}$ en este sistema de coordenadas.

COORDENADAS POLARES

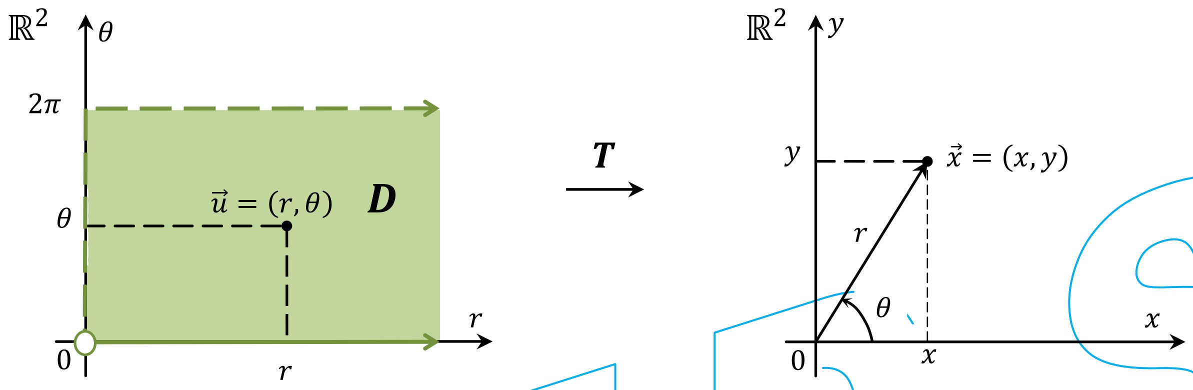
Considerando 2 copias del espacio de 2 dimensiones: el plano xy y el plano $r\theta$, la función $T: D_T \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(x, y) = T(r, \theta) = \left(\overbrace{r\cos\theta}^{T_1(r,\theta)}, \overbrace{r\,sen\theta}^{T_2(r,\theta)} \right)$$

y restringiendo los valores de (r,θ) al siguiente sub-conjunto del dominio de T:

$$D = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 < r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

se tiene que T, como se verá a continuación, es una transformación regular en D.



La imagen por T de un punto $\vec{u} = (r,\theta) \in D$ en el plano $r\theta$, es el punto $\vec{x} = (x,y)$ cuya distancia al origen es r y tal que el ángulo que forma dicho radio vector con el eje positivo de las x en sentido anti-horario es θ.

Dados 2 puntos (r_1,θ_1) y (r_2,θ_2) que pertenecen a D, se puede observar que:

$$T(r_1,\theta_1) = T(r_2,\theta_2) \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = r_2 \ \wedge \ \theta_1 = \theta_2$$

es decir, T es uno a uno en D.

Además, la imagen de D por T está formada por todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ salvo el origen:

$$T(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$$

Entonces $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ excepto para $(0,0)$ existen los números r,θ llamadas coordenadas polares de $\vec{x}$, tales que $T(r,\theta) = \vec{x}$.

No se definen coordenadas polares para el origen del plano xy por la razón de que

$$(0cos\theta, 0sen\theta) = (0,0) \quad \forall\theta$$

y el requisito de que T sea uno a uno fallaría en el origen.

La matriz jacobiana de T es:

$$T'(r,\theta) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T_1}{\partial r} & \dfrac{\partial T_1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial r} & \dfrac{\partial T_2}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & rcos\theta \end{pmatrix}$$

Dado que se cumple:

1) $T \in C^1(D)$.

2) T es uno a uno en D (como ya se vio).

3) $det\, T'(r,\theta) = \begin{vmatrix} cos\theta & -rsen\theta \\ sen\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = r(cos^2\theta + sen^2\theta) = r \neq 0 \ \ \forall (r,\theta) \in D$.

Resulta que T es **regular** en D (como se requiere en un sistema de coordenadas para el conjunto D).

COORDENADAS CILÍNDRICAS

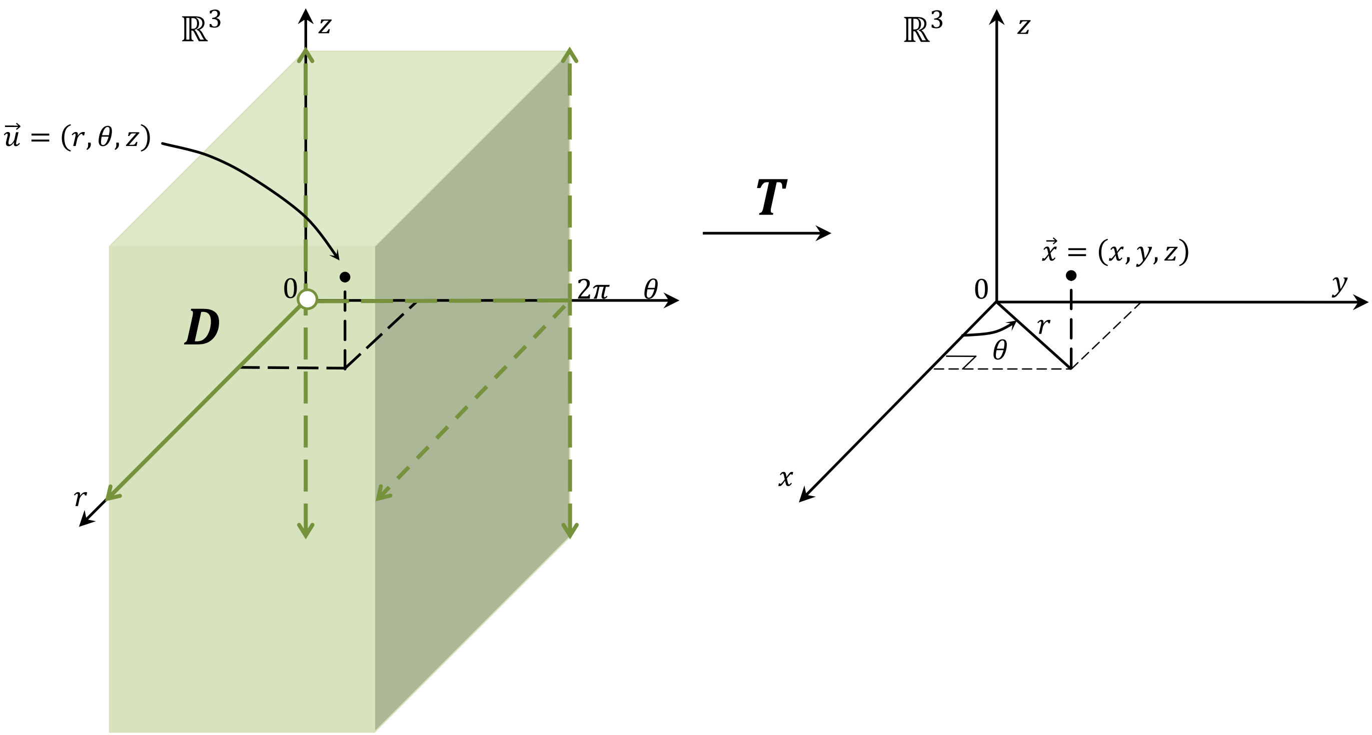
Considerando 2 copias del espacio de 3 dimensiones: xyz y $r\theta z$, la función $T: D_T \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$(x,y,z) = T(r,\theta,z) = \left(\overbrace{rcos\theta}^{T_1(r,\theta,z)} , \overbrace{rsen\theta}^{T_2(r,\theta,z)} , \overbrace{z}^{T_3(r,\theta,z)} \right)$$

y restringiendo los valores de (r,θ,z) al siguiente sub-conjunto del dominio de T:

$$D = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 < r < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty\}$$

se tiene que: $T(D) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$.



Es decir, se asignan coordenadas cilíndricas (r, θ, z) a todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ excepto al eje z. No se asignan coordenadas cilíndricas para los puntos que pertenecen al eje z ya que el requisito que T sea uno a uno fallaría sobre dicho eje.

La matriz jacobiana de T es:

$$T'(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T_1}{\partial r} & \dfrac{\partial T_1}{\partial \theta} & \dfrac{\partial T_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial r} & \dfrac{\partial T_2}{\partial \theta} & \dfrac{\partial T_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial T_3}{\partial r} & \dfrac{\partial T_3}{\partial \theta} & \dfrac{\partial T_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -rsen\theta & 0 \\ sen\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que se cumple:

1) $T \in C^1(D)$.

2) T es uno a uno en D.

3) $det\, T'(r,\theta,z) = r \neq 0 \;\; \forall (r,\theta,z) \in D$.

Resulta que T es **regular** en D.

<u>**COORDENADAS ESFÉRICAS**</u>

Considerando 2 copias del espacio de 3 dimensiones: xyz y $\rho\theta\phi$, la función $T: D_T \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

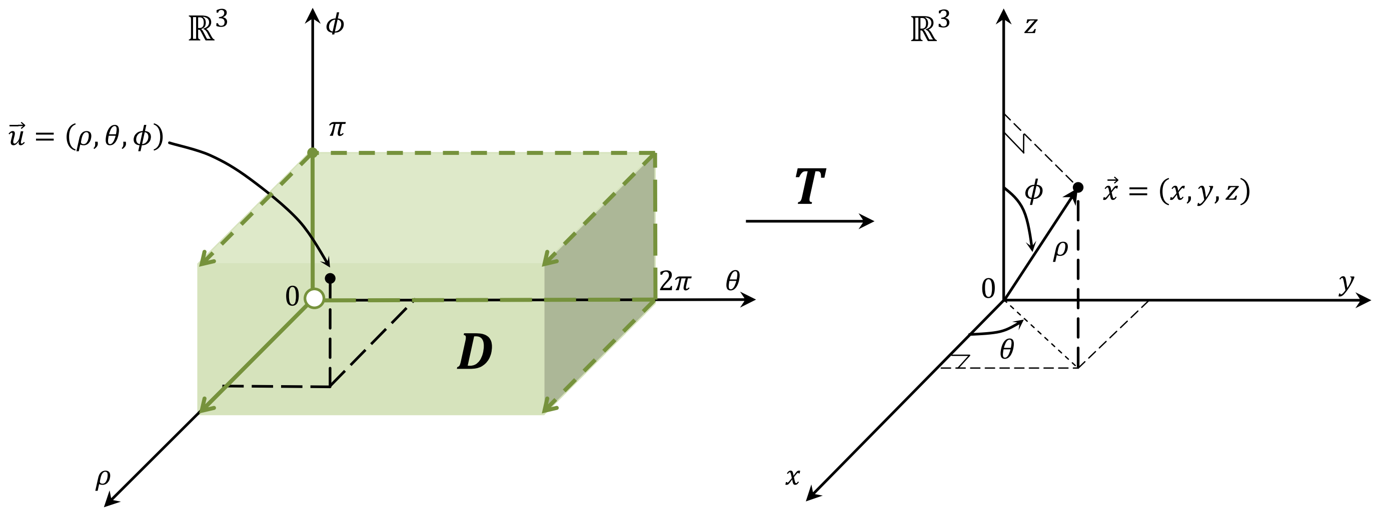
$$(x,y,z) = T(\rho,\theta,\phi) = \left(\overbrace{\rho sen\phi cos\theta}^{T_1(\rho,\theta,\phi)}, \overbrace{\rho sen\phi sen\theta}^{T_2(\rho,\theta,\phi)}, \overbrace{\rho cos\phi}^{T_3(\rho,\theta,\phi)} \right)$$

y restringiendo los valores de (r, θ, z) al siguiente sub-conjunto del dominio de T:

$$D = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 |\; 0 < \rho < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < \phi < \pi\}$$

se tiene que:

$$T(D) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$$



Es decir, se asignan coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) a todos los puntos de $\mathbb{R}^3$ excepto al eje z. No se asignan coordenadas esféricas para los puntos que pertenecen al eje z ya que el requisito que T sea uno a uno fallaría sobre dicho eje.

El número ρ es la distancia de $\vec{x}$ al origen, la coordenada θ es el ángulo en radianes respecto del eje x positivo medido en sentido anti-horario de la proyección de $\vec{x}$ sobre el plano xy, y ϕ es el ángulo en radianes que forma el radio vector ρ con el eje z positivo medido en sentido horario.

La matriz jacobiana de T es:

$$T'(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \rho} & \frac{\partial T_1}{\partial \theta} & \frac{\partial T_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial T_2}{\partial \rho} & \frac{\partial T_2}{\partial \theta} & \frac{\partial T_2}{\partial \phi} \\ \frac{\partial T_3}{\partial \rho} & \frac{\partial T_3}{\partial \theta} & \frac{\partial T_3}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sen\phi cos\theta & -\rho sen\phi sen\theta & \rho cos\phi cos\theta \\ sen\phi sen\theta & \rho sen\phi cos\theta & \rho cos\phi sen\theta \\ cos\phi & 0 & -\rho sen\phi \end{pmatrix}$$

Dado que se cumple:

1) $T \in C^1(D)$.

2) T es uno a uno en D.

3) $det\, T'(\rho, \theta, \phi) = -\underbrace{\rho^2}_{>0}\ \underbrace{sen\phi}_{\substack{>0 \\ \text{ya que} \\ 0<\phi<\pi}} \neq 0\ \forall (\rho, \theta, \phi) \in D$.

Resulta que T es **regular** en D.