6. DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA:

6.1. Presentación del problema: En ingeniería es común en el cálculo, usar la derivada de una función o derivadas sucesivas. Un ejemplo que ya vieron, es el estudio del movimiento de los cuerpos en donde bien sabemos que la velocidad es la derivada de la posición y la aceleración de la velocidad.

Para abordar esta temática repasaremos el concepto de derivada que estudiaremos en el análisis matemático:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Para valores pequeños de h, podemos suponer que:

$$f'(x) \sim \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esta expresión si bien es elemental, es útil cuando las funciones son suaves, pero pierde utilidad cuando tenemos variaciones fuertes en dicha función. Para subsanar este inconveniente es que exploraremos otras expresiones que nos darán una mejor aproximación.

Si partimos del polinomio de Taylor y tomamos hasta el segundo término, tendremos:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\varepsilon)}{2}(x - x_0)^2$$

Si tomamos:

$$x = x_0 + h$$

Tal que:

$$h = x - x_0$$

y reemplazando:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + \frac{f''(\varepsilon)}{2}(h)^2$$

Donde:

$$x_o < \varepsilon < x_0 + h$$

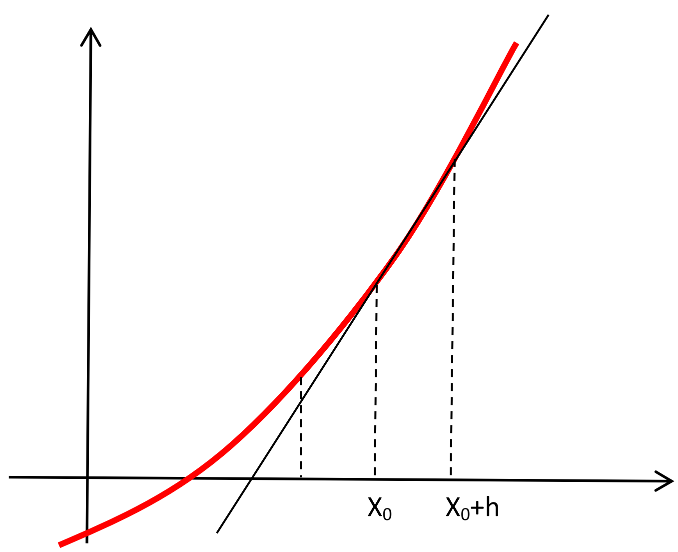
Y despejando $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - Oh$$

Donde :

$$\frac{f''(\varepsilon)}{2} = O$$

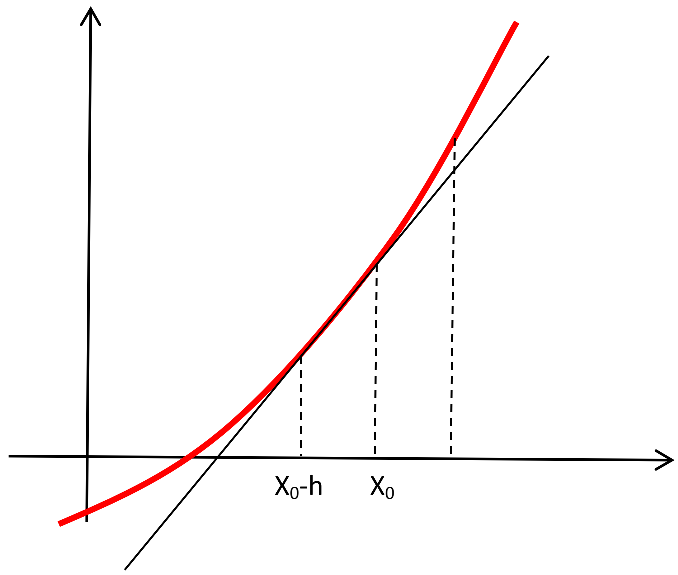
Es el error de truncamiento. Si $h > 0$ la derivada se la conoce con el nombre de “primera diferencia finita hacia adelante”, o “diferencia progresiva”.



Si $h < 0$, la expresión quedará:

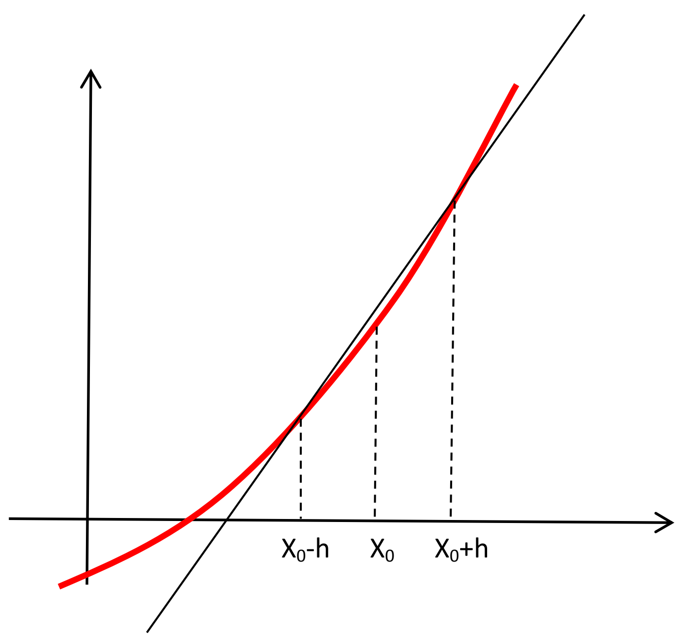
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + Oh$$

Conocida como “primera diferencia finita hacia atrás” o “diferencia regresiva”.



Si sacamos el promedio de estas dos ecuaciones, tendremos la “diferencia finita centrada”:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + Oh}$$



Observen que estas fórmulas, también conocidas como de dos puntos tienen un error de truncamiento del orden de h. Podemos lograr mayor exactitud tomando más términos del polinomio de Taylor, de esta manera deduciremos las fórmulas de tres puntos.

6.1. FÓRMULAS DE TRES PUNTOS:

Si tomamos en el polinomio de Taylor, hasta la tercera derivada y allí truncamos, tendremos:

$$\boldsymbol{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(\varepsilon)}{6}h^3}$$

Despejando $f'(x)$, tendremos:

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(x_0)}{2}h - \frac{f'''(\varepsilon)}{6}h^2}$$

Como queremos desarrollar una expresión de tres puntos, tomaremos:

$$\boldsymbol{x_0}$$

$$\boldsymbol{x_1 = x_0 + h}$$

$$\boldsymbol{x_2 = x_0 + 2h}$$

Y reemplazando en la ecuación anterior:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{f''(x_0)}{2}h - \frac{f'''(\varepsilon)}{6}h^2}$$

Debemos encontrar $f''(x_0)$ en términos de X_0, X_1 y X_2; a tal fin hacemos el siguiente planteo: expandamos un polinomio de Taylor en torno a X_1 y a X_2:

$$\boldsymbol{f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2}$$

$$f(x_0+2h)=f(x_0)+f'(x_0)2h+\frac{f''(x_0)}{2}(2h)^2$$

Si observan para aislar a $f''(x_0)$, a la segunda le debemos restar la primera multiplicada por -2

$$f(x_0+2h)=f(x_0)+f'(x_0)2h+2f''(x_0)(h)^2$$

$$-2f(x_0+h)=-2f(x_0)-2f'(x_0)h-f''(x_0)h^2$$

Sumando miembro a miembro, nos queda:

$$f(x_0+2h)-2f(x_0-2h)=-f(x_0)+f''(x_0)h^2$$

Y de aquí despejamos:

$$f''(x_0)=\frac{f(x_0)-2f(x_0+h)+f(x_0+2h)}{h^2}+Oh^2$$

Y reemplazando en la ecuación de la derivada:

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0)-2f(x_0+h)+f(x_0+2h)}{2h^2}h+Oh^2$$

Sacando denominador común y acomodando, nos queda:

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{2h}+Oh^2}$$

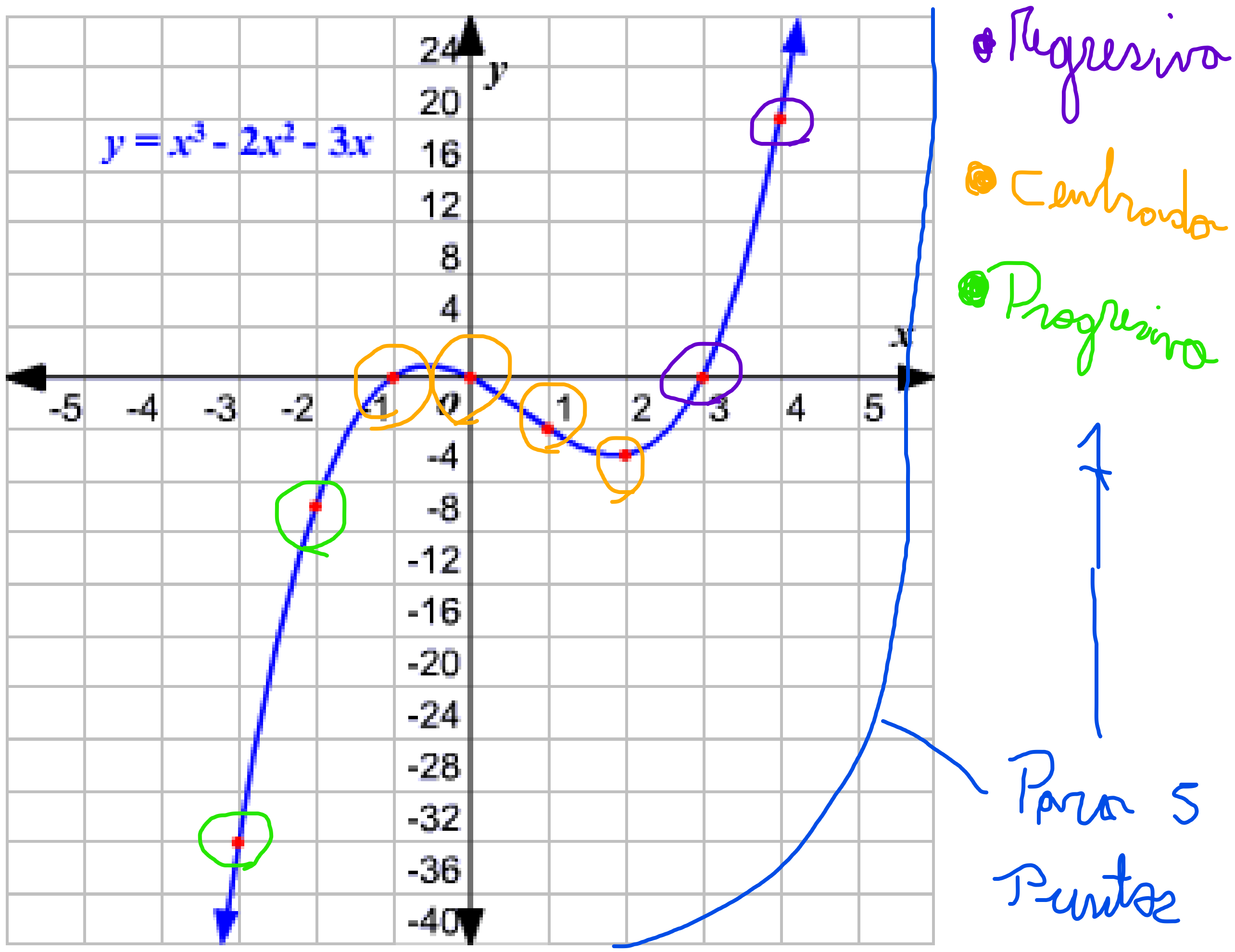
Esta ecuación es conocida como la fórmula de los tres puntos progresiva. De igual manera se pueden desarrollar las fórmulas de tres puntos regresivas y centradas.

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{f(x_0-2h)-4f(x_0-h)+3f(x_0)}{2h}+Oh^2}$$

Y la centrada:

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}+Oh^2}$$

Veamos cómo se aplican estas expresiones, supongamos tener un polinomio como el de la figura, o simplemente puntos que le correspondan:



Conocemos puntos desde -3 a 4. Para calcular la derivada en -3 debemos usar la fórmula progresiva ya que tenemos datos de -3,-2 y -1 (X_0, X_1 y X_2). Para calcularla en 4, debemos usar la fórmula regresiva, ya que tenemos como datos a los puntos 2,3 y 4 (X_5,X_6 y X_7). Para -2, -1, 0, 1, 2 y 3, debemos usar la fórmula centrada.

6.2. FÓRMULAS DE CINCO PUNTOS:

De igual manera, se desarrollan las fórmulas de cinco puntos para lograr mejorar el error en la aproximación a la derivada, quedando estas fórmulas de la siguiente manera:

Fórmula de cinco puntos progresiva:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)}{12h} + Oh^4}$$

Fórmula de cinco puntos centrada:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{12h} + Oh^4}}$$

Fórmula de cinco puntos regresiva:

Se la obtiene haciendo *h<0* en la fórmula progresiva.

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x_0) = \frac{3f(x_0-4h) - 16f(x_0-3h) + 36f(x_0-2h) - 48f(x_0-h) + 25f(x_0)}{12h} + Oh^4}}$$

Veamos un ejemplo: Usando la fórmula de tres puntos, calcular la siguiente derivada:

$$f(x) = e^{x}\cos(x) \quad [0;0,7] \quad h=0,1$$

Como tenemos la función, debemos realizar una tabla para establecer os puntos:

X_i	**$f(X_i)$** h	**$f'(X_i)$**	**OBSERVACIONES**
0,0000	1,00000	1,00770	Ec. progresiva
0,1000	1,09965	0,98530	Ec. centrada
0,2000	1,19706	0,94960	Ec. centrada
0,3000	1,28957	0,88500	Ec. centrada
0,4000	1,37406	0,78660	Ec. centrada
0,5000	1,44689	0,64900	Ec. centrada
0,6000	1,50386	0,46655	Ec. centrada
0,7000	1,54020	0,26025	Ec. regresiva

X=0,0000

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}}$$

$$f'(0,0000) = \frac{-3(1,0000) + 4(1,09965) - 1,19706}{2(0,1)} = 1,00770$$

X=0,10000

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}}$$

$$f'(0{,}10000) = \frac{1{,}19706 - 1{,}0000}{2(0{,}1)} = 0{,}9853$$

X=0,20000

$$f'(0{,}20000) = \frac{1{,}28957 - 1{,}09965}{2(0{,}1)} = 0{,}94960$$

X=0,30000

$$f'(0{,}30000) = \frac{1{,}37406 - 1{,}19706}{2(0{,}1)} = 0{,}88500$$

X=0,4000

$$f'(0{,}4000) = \frac{1{,}44689 - 1{,}28957}{2(0{,}1)} = 0{,}78660$$

X=0,5000

$$f'(0{,}50000) = \frac{1{,}50386 - 1{,}37406}{2(0{,}1)} = 0{,}64900$$

X=0,6000

$$f'(0{,}60000) = \frac{1{,}54020 - 1{,}44689}{2(0{,}1)} = 0{,}46655$$

X=0,70000

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \frac{f(x_0-2h) - 4f(x_0-h) + 3f(x_0)}{2h}}$$

$$f'(0{,}70000) = \frac{1{,}44689 - 4(1{,}50386) + 3(1{,}54020)}{2(0{,}1)} = 0{,}26025$$

Verifiquemos con la solución exacta: derivemos la función:

$$f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$$

$$f'(x) = e^x(\cos x - \sin x)$$

f’(X_i)	**f’(X_i) (calculada)**	**|E|**
1,00770	1,00000	0,00770
0,98530	0,98932	0,00402
0,94960	0,95440	0,00480
0,88500	0,89066	0,00566
0,78660	0,79311	0,00651
0,64900	0,65645	0,00745
0,46655	0,47501	0,00846
0,26025	0,24291	0,01734