FUNCIONES DEFINIDAS IMPLÍCITAMENTE

Sea la función

$$\vec{F}: D_{\vec{F}} \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^{m}$$

$$\vec{F}(\vec{x},\vec{y}) = \left(F_1(\vec{x},\vec{y}),\cdots,F_m(\vec{x},\vec{y})\right)$$

que depende de la variable vectorial:

$$\underbrace{(\vec{x},\vec{y})}_{\substack{\text{par ordenado}\\ \text{vectorial}}} = (x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

o bien de las dos variables vectoriales:

$$\vec{x} = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^{n} \quad \text{e} \quad \vec{y} = (y_1,\cdots,y_m) \in \mathbb{R}^{m}$$

Se dice que la función

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m} \quad ; \quad D_{\vec{f}} \subset D_{\vec{F}}$$

$$\underbrace{\vec{y}} = \underbrace{\vec{f}(\vec{x})}$$

$$\begin{tikzcd} \vec{y} \arrow[d] & \vec{f}(\vec{x}) \arrow[d] \\ \overbrace{(y_1,\cdots,y_m)} = & \overbrace{\left(f_1(\vec{x}),\cdots,f_m(\vec{x})\right)} \end{tikzcd} \quad ; \quad \vec{x} = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^{n}$$

está definida **implícitamente** por la ecuación:

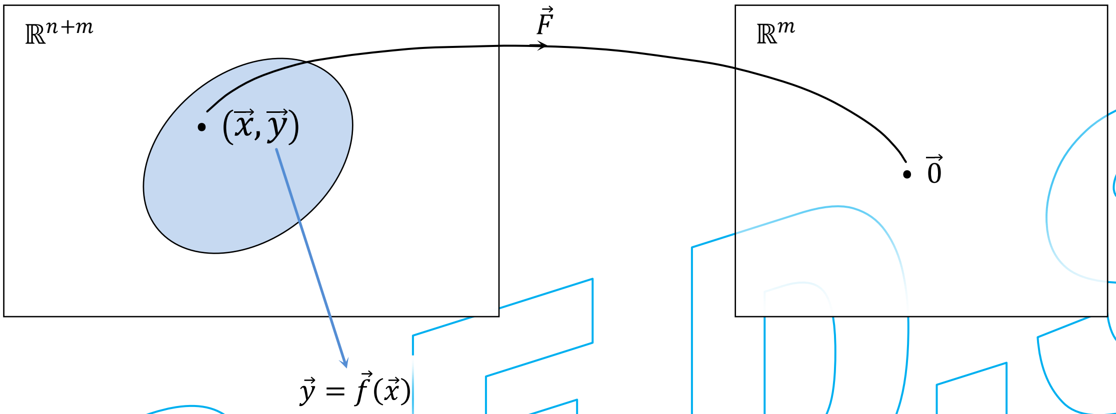
$$\vec{F}(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) = 0 \end{cases}}_{\substack{\text{Sistema de } m \text{ ecuaciones} \\ \text{con } n+m \text{ variables}}}$$

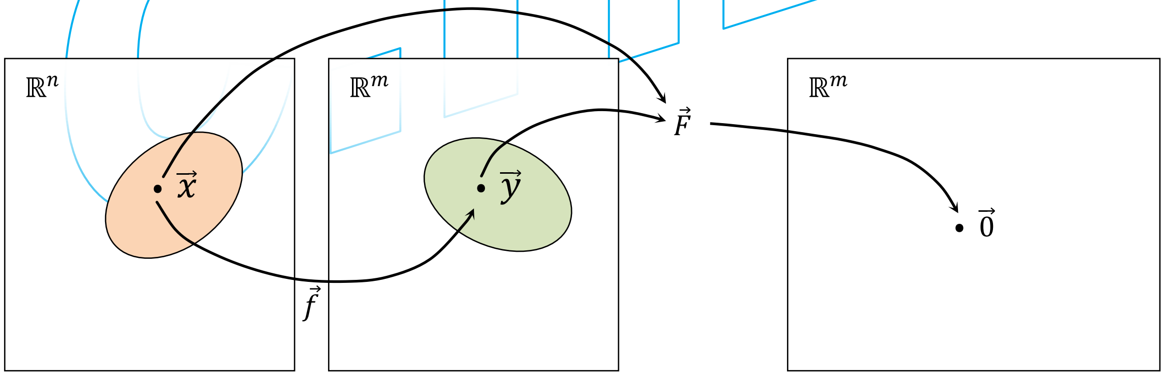
si y sólo si

$$\vec{F}\left(\vec{x},\vec{f}(\vec{x})\right) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in D_{\vec{f}}$$

donde $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son las variables vectoriales independiente y dependiente respectivamente de $\vec{F}$.

Esto puede visualizarse de las siguientes maneras:





DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Suponiendo que se quiere obtener

$$\vec{y}_{\vec{x}}(\vec{x}_0)=\vec{f}'(\vec{x}_0) \quad \text{(derivada de } \vec{y} \text{ respecto de } \vec{x} \text{ en } \vec{x}_0\text{)}$$

por lo general al tratar de despejar $\vec{y}$ de $\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=\vec{0}$ para luego derivar respecto de $\vec{x}$ la expresión resultante se hace complicado o bien es imposible despejar $\vec{y}$.

Entonces para encontrar la derivada $\vec{f}'(\vec{x}_0)$ resulta más útil aplicar la regla de la cadena en forma implícita, y es el teorema de la derivada de la función implícita el que da las condiciones suficientes para la existencia de una función $\vec{f}$ diferenciable definida implícitamente por la ecuación $\vec{F}(\vec{x},\vec{y})=\vec{0}$, y provee la expresión que permite obtener $\vec{f}'(\vec{x}_0)$.

TEOREMA DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Enunciado

Si

- $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$
- $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$
- $\vec{F}: D_{\vec{F}} \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$; $\quad D_{\vec{F}}$ abierto

  es un campo vectorial con:

  $\vec{F} \in C^1\left(D_{\vec{F}}\right)$, $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ y si

  $\vec{F}_{\vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ tiene matriz inversa.

Entonces existe una función (campo vectorial)

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m\ , D_{\vec{f}} \subset D_{\vec{F}}\ ;\ \text{con } \vec{f} \in C^1\left(B_r(\vec{x}_0)\right),\ B_r(\vec{x}_0) \subset D_{\vec{f}}$$

tal que:

$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0; \qquad \vec{F}\left(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})\right) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in\ B_r(\vec{x}_0)$$

y

$$\underbrace{\vec{f}'(\vec{x}_0)} = -\underbrace{\vec{F}_{\vec{y}}^{-1}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}\ \underbrace{\vec{F}_{\vec{x}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}$$

Matriz Jacobiana de $\vec{y}$ respecto de $\vec{x}$ definida en forma implícita, evaluada en $\vec{x}_0$

Inversa de la matriz $\vec{F}_{\vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$

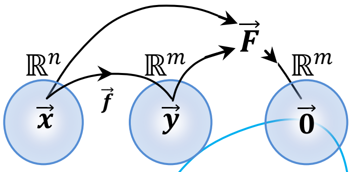
Matriz Jacobiana de $\vec{F}$ respecto de $\vec{x}$ en $\vec{x}_0$

$$\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}}^{\vec{y}_{\vec{x}}(\vec{x}_0)}}_{\text{matriz } m\times n} = -\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}}}_{\text{matriz } m\times m} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)}}}_{\text{matriz } m\times n}$$

Demostración parcial

Supuesta la existencia de $\vec y=\vec f(\vec x)$ definida en forma implícita por la ecuación

$$(*)\ \vec F(\vec x,\vec y)=\vec 0$$



tenemos que

$$\vec F\left(\vec x,\overbrace{\vec f(\vec x)}^{\vec y}\right)=\vec F\left(\vec G(\vec x)\right)=\left(\vec F\circ\vec G\right)(\vec x)$$

donde

$$\vec G(\vec x)=\left(\overbrace{G_1(\vec x),\cdots,G_n(\vec x)}^{\vec x},\overbrace{G_{n+1}(\vec x),\cdots,G_{n+m}(\vec x)}^{\vec f(\vec x)}\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{r}G_1(\vec x)=x_1\\ \vdots\\ G_n(\vec x)=x_n\\ G_{n+1}(\vec x)=f_1(\vec x)\\ \vdots\\ G_{n+m}(\vec x)=f_m(\vec x)\end{array}\right.$$

es decir $\vec G:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{n+m}$, y como $\vec F:\mathbb{R}^{n+m}\longrightarrow\mathbb{R}^m$ luego $\vec F\circ\vec G:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$.

Como por hipótesis $\vec F$ es diferenciable y $\vec f$ es diferenciable en $B_r(\vec x_0)$, $\vec G$ también será diferenciable en $B_r(\vec x_0)$. Luego, si derivamos $(*)$ respecto de $\vec x$, por regla de la cadena obtenemos:

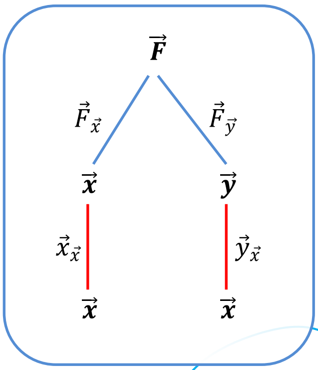
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial x_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}=\mathbb{I}^{n\times n}$$

$$\left[\vec F\left(\vec x,\vec f(\vec x)\right)\right]'=\overbrace{\underbrace{\overbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{matrix}}_{\vec F_{\vec x}}\ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}&\cdots&\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{matrix}}_{\vec F_{\vec y}}\right)}^{\vec F'}}_{\text{matriz }\ m\times(n+m)}\underbrace{\overbrace{\left(\begin{array}{c}\overbrace{\begin{matrix}\frac{\partial x_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial x_n}{\partial x_n}\end{matrix}}^{\mathbb{I}^{n\times n}}\\ \hdashline \underbrace{\begin{matrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{matrix}}_{\vec f'}\end{array}\right)}^{\vec G'}}_{\text{matriz }\ (n+m)\times n}}^{m\times n}=0^{m\times n}$$

$$\overbrace{\left(\underbrace{\vec F_{\vec x}}_{m\times n}\ \middle|\ \underbrace{\vec F_{\vec y}}_{m\times m}\right)\left(\begin{array}{c}\mathbb{I}^{n\times n}\\ \hdashline \underbrace{\vec f'}_{m\times n}\end{array}\right)}=0^{m\times n}$$

$$\underbrace{\vec{F}_{\vec{x}}}_{m\times n}\;\mathbb{I}^{n\times n}+\underbrace{\vec{F}_{\vec{y}}}_{m\times m}\;\underbrace{\vec{f}'}_{m\times n}=0^{m\times n}$$

$$\underbrace{\vec{F}_{\vec{x}}}_{m\times n}+\underbrace{\vec{F}_{\vec{y}}\,\vec{f}'}_{m\times n}=0^{m\times n}$$



Evaluando en $\vec{x}_0$

$$\vec{F}_{\vec{x}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)+\vec{F}_{\vec{y}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\vec{f}'(\vec{x}_0)=0^{m\times n}$$

Restando en ambos miembros $\vec{F}_{\vec{x}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$

$$\vec{F}_{\vec{y}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\vec{f}'(\vec{x}_0)=-\vec{F}_{\vec{x}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$$

Para poder despejar $\vec{f}'(\vec{x}_0)$ multiplicamos (ambos miembros) por izquierda por la matriz inversa de $\vec{F}_{\vec{y}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$:

$$\underbrace{\vec{F}_{\vec{y}}^{-1}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\vec{F}_{\vec{y}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}_{\mathbb{I}^{m\times m}}\,\underbrace{\vec{f}'(\vec{x}_0)}_{m\times n}=-\underbrace{\vec{F}_{\vec{y}}^{-1}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}_{m\times m}\,\underbrace{\vec{F}_{\vec{x}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}_{m\times n}$$

$$\vec{f}'(\vec{x}_0)=-\vec{F}_{\vec{y}}^{-1}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)\vec{F}_{\vec{x}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$$

Observación:

Para obtener $\vec{f}'(\vec{x}_0)$, $\vec{F}_{\vec{y}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ debe ser invertible. Esto significa que $\vec{F}_{\vec{y}}$ tiene que ser una matriz cuadrada, lo que implica que el número de variables determinadas implícitamente $\vec{y}=(y_1,\cdots,y_m)$ debe coincidir con el número de ecuaciones dadas originalmente:

$$\begin{cases} F_1(\vec{x},\vec{y})=0\\ \quad\vdots\\ F_m(\vec{x},\vec{y})=0\end{cases}$$

o equivalentemente, que los espacios de rango de $\vec{F}$ y $\vec{f}$ deben tener la misma dimensión

$$\vec{F}:D_{\vec{F}}\subset\mathbb{R}^{n+m}\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

$$\vec{f}:D_{\vec{f}}\subset\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

Ejemplo

Investigue si el siguiente sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 - yu = 0 \\ xy + uv = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a $\vec{y} = (u, v)$ como función de $\vec{x} = (x, y)$, es decir $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$, en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (1,1)$, $\vec{y}_0 = (u_0, v_0) = (1,-1)$. En caso que así sea obtenga:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ en } \vec{x}_0$$

y la afín que aproxima a $\vec{f}$ en un entorno de $\vec{x}_0$.

Solución

$$\begin{cases} \overbrace{x^2 - yu}^{F_1(x,y,u,v)} = 0 \\ \underbrace{xy + uv}_{F_2(x,y,u,v)} = 0 \end{cases}; \qquad (x_0, y_0, u_0, v_0) = (1,1,1,-1)$$

$$\vec{F}(x, y, u, v) = \left(\overbrace{x^2 - yu}^{F_1(x,y,u,v)} , \overbrace{xy + uv}^{F_2(x,y,u,v)} \right)$$

$$\vec{x} = (x, y), \qquad \vec{y} = (u, v), \qquad (\vec{x}, \vec{y}) = (x, y, u, v)$$

$$\vec{F}: D_{\vec{F}} \subset \mathbb{R}^{\overbrace{2}^{n}+\overbrace{2}^{m}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\overbrace{2}^{m}}$$

Veamos si se cumplen las condiciones que impone el T.D.F.I. (Teorema de la derivada de la función implícita).

Primero vemos si $\vec{F} \in C^1$,

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{matrix}}^{\vec{F}_{\vec{x}}} & \overbrace{\begin{matrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{matrix}}^{\vec{F}_{\vec{y}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 2x & -u \\ y & x \end{matrix}}^{\vec{F}_{\vec{x}}} & \overbrace{\begin{matrix} -y & 0 \\ v & u \end{matrix}}^{\vec{F}_{\vec{y}}} \end{pmatrix}$$

Como todas las derivadas son funciones continuas $\Rightarrow \vec{F} \in C^1$.

$$\vec{F}'(1,1,1,-1) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}}^{\vec{F}_{\vec{x}}(1,1,1,-1)} & \overbrace{\begin{matrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}}^{\vec{F}_{\vec{y}}(1,1,1,-1)} \end{pmatrix}$$

Segundo verificamos que $\vec{F}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$, lo cual se satisface:

$$\begin{cases} \overbrace{1^2 - 1(1)}^{\vec{F}_1(1,1,1,-1)} = 0 \\ \underbrace{1(1) + 1(-1)}_{\vec{F}_2(1,1,1,-1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{F}(1,1,1,-1) = \vec{0}$$

Tercero verificamos si $\vec{F}_{\vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ es invertible.

Como $\vec{F}_{\vec{y}}(1,1,1,-1) = \begin{pmatrix} \overbrace{-1}^{a} & \overbrace{0}^{b} \\ \underbrace{-1}_{c} & \underbrace{1}_{d} \end{pmatrix}$,

con $ad - bc = -1(1) - 0(1) = -1 \neq 0$,

entonces $\vec{F}_{\vec{y}}(1,1,1,-1)$ es invertible y:

Para una matriz A de 2×2, donde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

La matriz inversa viene dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{\vec{y}}^{-1}(1,1,1,-1) = \underbrace{(-1)}_{\frac{1}{ad-bc}} \begin{pmatrix} \overbrace{1}^{d} & \overbrace{0}^{-b} \\ \underbrace{1}_{-c} & \underbrace{-1}_{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego de acuerdo con el T.D.F.I., existe $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$\begin{tikzcd} \underbrace{\vec{y}} \arrow[d] & = & \underbrace{\vec{f}(\vec{x})} \arrow[d] \\ \overbrace{(u,v)} & = & \overbrace{\vec{f}(x,y)} \end{tikzcd}$$

tal que $\vec{F}\left(\vec{x},\vec{f}(\vec{x})\right)=\vec{0} \quad \forall \vec{x}\in\ B_r(\vec{x}_0)$ y

$$\begin{tikzcd} \underbrace{\vec{f}'(\vec{x}_0)} \arrow[d] & = & -\underbrace{\vec{F}_{\vec{y}}^{-1}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)} \arrow[d] & \underbrace{\vec{F}_{\vec{x}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)} \arrow[d] \\ \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}} & = & -\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}} & \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0,\vec{y}_0)}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(1,1)} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & -1 \\ & & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

La afín que aproxima a $\vec{f}$ en un entorno de $\vec{x}_0=(1,1)$ es:

$$A(\vec{x})=\vec{f}'(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)+\underbrace{\underbrace{\vec{f}(\vec{x}_0)}}_{\vec{y}_0=(u_0,v_0)=(1,-1)}$$

$$A(x,y)=\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}^{\vec{f}'(\vec{x}_0)}\overbrace{\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}}^{\vec{x}-\vec{x}_0}+\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}^{\vec{f}(\vec{x}_0)}=\begin{pmatrix} 2x-y-1 \\ x-2y+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2x-y \\ x-2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} & & \overbrace{x-1}^{\vec{x}-\vec{x}_0} \\ & & y-1 \\ \hline 2 & -1 & 2x-y-1 \\ \underbrace{1 \quad -2}_{\vec{f}'(\vec{x}_0)} & & x-2y+1 \end{array}$$

$$\boxed{(u,v)=A(x,y)=(2x-y,x-2y)}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xe^{y} + uz - cos(v) - 2 = 0 \\ ucos(y) + x^2 v - yz^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a (u, v) como función de (x, y, z) en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (2,0,1)$, $\vec{y}_0 = (u_0, v_0) = (1,0)$, obtenga $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$ y la afín que aproxima a esta función en un entorno de $\vec{x}_0$.

$$Resp\colon \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}_{(2,0,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad A(x, y, z) = \left(-x - 2y - z + 4, \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}\right)$$

2. Si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xu + yvu^2 = 2 \\ xu^3 + y^2 v^4 = 2 \end{cases}$$

define a (u, v) como función de (x, y) en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (1,1)$, $\vec{y}_0 = (u_0, v_0) = (1,1)$; obtenga $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$ y la afín que aproxima a esta función en un entorno de $\vec{x}_0$.

$$Resp\colon \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad A(x, y) = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}y + \frac{14}{9}, \frac{4}{3} - \frac{1}{3}y\right)$$

3. Si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xe^{x} - ue^{u} + 2yv - 2 = 0 \\ 2xu - yv - v + 2 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a (u,v) como función de (x,y) en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0,y_0) = (0,1)$, $\vec{y}_0 = (u_0,v_0) = (0,1)$, obtenga $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$ y la afín que aproxima a esta función en un entorno de $\vec{x}_0$.

$Resp$: $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\qquad A(x,y) = \left(x + y - 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y\right)$

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2y + yz = 0 \\ xyz + 1 = 0 \end{cases}$$

Obtenga $\frac{dx}{dz}$ y $\frac{dy}{dz}$ en $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-1)$.

$Resp$: $\frac{dx}{dz} = -\frac{1}{2}$, $\qquad \frac{dy}{dz} = \frac{3}{2}$

5. Si el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + yu + xv + w = 0 \\ x + y + uvw + 1 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a x e y como funciones de u, v y w en un entorno de $(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0) = (1,-1,1,1,-1)$, obtenga $\frac{\partial x}{\partial u}$ y $\frac{\partial y}{\partial u}$ en ese punto.

$Resp$: $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$, $\qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 1$

6. Sea

$$\begin{cases} uy + uv - x - v = 0 \\ ve^v - xe^x - ye^y - \frac{1}{e} = 0 \end{cases}$$

Obtenga $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ en $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (0,-1,0,0)$. $\qquad Resp$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. Si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a (u,v) como función de (x,y,z) en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$, $\vec{y}_0 = (u_0,v_0) = (1,1)$, obtenga $\frac{\partial v}{\partial y}$ en $\vec{x}_0$.

$$Resp\text{:} \ -\frac{7}{4}$$

8. Suponga que $F\colon D_F \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple con las condiciones que establece el teorema de la derivada de la función implícita, de modo que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define implícitamente a z como función de x e y en un entorno del punto (x_0,y_0,z_0). Obtenga las fórmulas para $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$Resp\text{:} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad con \ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$

9. Halle $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si:

a) $xy + yz + zx = 9xyz$

b) $x^2 + y^2 - 2xy + e^z - z^3 + 4 = 0$

$$Resp\text{:} \quad a) \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{9yz - y - z}{x + y - 9xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{9xz - x - z}{x + y - 9xy}$$

$$b) \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x - y)}{3z^2 - e^z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(x - y)}{e^z - 3z^2}$$

10. Suponga que $F\colon D_F \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple con las condiciones que establece el teorema de la derivada de la función implícita, de modo que la ecuación $F(x,y) = 0$ define implícitamente a y como función de x en un entorno del punto (x_0,y_0).

a) Obtenga la fórmula para $\frac{dy}{dx}$.

b) Aplique esa fórmula para: $e^x sen(y) + e^y cos(x) = 1$.

$$Resp\text{:} \quad a) \ \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad con \ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$$

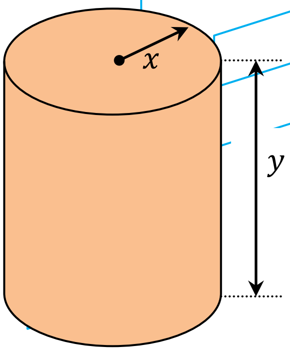
$$b) \ \frac{dy}{dx} = \frac{e^y sen(x) - e^x sen(y)}{e^x cos(y) + e^y cos(x)}$$

EXTREMOS LIGADOS

El siguiente ejercicio sirve como motivación para introducir el tema.

Ejercicio

Obtenga las dimensiones x e y del siguiente cilindro circular recto de volumen fijo V de modo que su área total A sea mínima.



$x > 0$ radio

$y > 0$ altura

Área

$$A(x,y) = f(x,y) = \underbrace{2\pi xy}_{\substack{\text{área de la}\\ \text{superficie}\\ \text{lateral cilíndrica}}} + \underbrace{2\pi x^2}_{\substack{\text{área de}\\ \text{las tapas}}} \quad (1)$$

función a extremar

Volumen

$$V = \pi x^2 y \quad \text{ó} \quad G(x,y) = \pi x^2 y - V = 0 \quad (2)$$

restricción o condición de ligadura

Mediante un procedimiento simple se puede llevar el problema de encontrar el extremo de (1) con la restricción (2) a un problema de AM I.

Esto es, despejando y de (2)

$$y = g(x) = \frac{V}{\pi x^2}; \quad x > 0$$

y sustituyendo en (1)

$$f(x,y) = f\big(x, g(x)\big) = f^*(x) = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$$

se obtiene una función de sola variable para la cual hay que determinar sus extremos libres. Entonces derivando e igualando a cero:

$$f^{*'}(x) = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x = 0 \Rightarrow \frac{-2V + 4\pi x^3}{x^2} = 0 \Rightarrow 2\pi x^3 = V$$

se determina el punto crítico $x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; y reemplazando en $y = g(x)$ se obtiene $y_0 = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Luego el problema original tiene a

$$(x_{0,}\, y_0) = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,(1,2)$$

como punto crítico, que se puede comprobar que es un punto de mínimo ya que haciendo la derivada segunda de f^* y valuandola en x_0 se obtiene $f^{*''}(x_0) > 0$.

Por lo general resolver problemas de extremos ligados no será tan simple como en este caso donde fue posible despejar una variable de la ecuación de restricción y reemplazar en la función original. Por suerte existe un método general (el de los multiplicadores de Lagrange) que mediante la aplicación de un procedimiento que se realiza de manera mecánica permite resolver muchos problemas de extremos ligados.

TEOREMA: MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Enunciado

Si

$f(\vec{u})$ sujeta a la restricción $\vec{G}(\vec{u}) = \vec{0}$ tiene un extremo en $\vec{u}_0$, con:

- $\vec{u} \in \mathbb{R}^{n+m}$
- $f: D_f \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R};\quad D_f$ abierto, $f \in C^1(D_f)$
- $\vec{G}: D_{\vec{G}} \subset \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m;\ D_{\vec{G}}$ abierto, $D_{\vec{G}} \subset D_f, \vec{G} \in C^1(D_{\vec{G}})$
  donde $\vec{G}(\vec{u}) = \vec{0} \mid \vec{G}(\vec{u}_0) = \vec{0}$
- $\underbrace{r(\vec{G}_{\vec{u}})}_{\substack{\text{rango} \\ \text{de } \vec{G}_{\vec{u}}}} = m$ en $\vec{u}_0$

Entonces la función auxiliar o **Lagrangiana**:

$$L(\vec{u}) = f(\vec{u}) + \vec{\lambda}\vec{G}(\vec{u})$$

cumple en $(\vec{u}_0, \vec{\lambda}_0)$ con la **condición necesaria de extremo "libre"**:

$$\vec{\nabla}L = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ L_{\vec{u}} = f_{\vec{u}} + \vec{\lambda}\,\vec{G}_{\vec{u}} = \vec{0}$$

donde $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ es un vector constante para cada uno de los puntos de extremo que se denomina **multiplicador vectorial de Lagrange**.

<u>**Demostración**</u>

Sea $\vec{u} = (\vec{x}, \vec{y})$, con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, o sea:

$$\vec{u}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0), \qquad f(\vec{u}) = f(\vec{x}, \vec{y}), \qquad \vec{G}(\vec{u}) = \vec{G}(\vec{x}, \vec{y})$$

y

$$\vec{G}_{\vec{u}} = \underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial G_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial u_n} \end{matrix}}_{\vec{G}_{\vec{x}}\ (m\times n)} \ \middle| \ \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} \frac{\partial G_1}{\partial u_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial u_{n+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial u_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial u_{n+m}} \end{matrix}}_{\vec{G}_{\vec{y}}\ (m\times m)}}^{m \text{ últimas columnas LI}} \right)}_{\text{matriz } m\times(n+m)}$$

es la **matriz Jacobiana** de $\vec{G}$ ordenada de modo tal que las últimas m columnas son LI (linealmente independientes).

Dado que $r\left(\vec{G}_{\vec{u}}\right) = m$ en $\vec{u}_0$, tenemos que por el teorema de la función implícita:

$\vec{G}(\vec{u}) = \vec{G}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ define implícitamente a $\vec{y} = \vec{g}(\vec{x})$ en un entorno B de $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$; $\vec{y}_0 = \vec{g}(\vec{x}_0)$, $B \subset D_{\vec{G}}$. Entonces se puede sustituir en

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f\left(\vec{x}, \overbrace{\vec{g}(\vec{x})}^{\vec{y}}\right) = f^*(\vec{x}) \quad \text{en } B$$

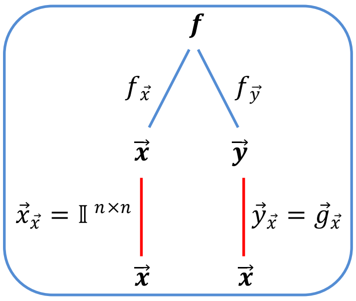
con lo cual queda ahora para extremar la función sin ligaduras:

$$f^*(\vec{x}) \ \mid \ f^*: B \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

la cual por ser $\vec{x}_0$ punto de extremo debe cumplir la **condición neceseria de extremo "libre"**:

$$\vec{\nabla} f^*(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

Por la regla de la cadena el gradiente en $\vec{x}_0$ es:



$$(1) \quad \vec{\nabla} f^*(\vec{x}_0) = \underbrace{f_{\vec{x}}}_{1\times n} + \underbrace{\overbrace{f_{\vec{y}}}^{1\times m} \ \overbrace{\vec{g}_{\vec{x}}}^{m\times n}}_{1\times n} = \vec{0}$$

Como generalmente no se dispone de $\vec{g}$ pero si de $\vec{G}$, $\vec{g}_{\vec{x}}$ puede obtenerse utilizando el teorema de la derivada de la función implícita:

$$(2)\quad \vec{g}_{\vec{x}} = -\underbrace{\vec{G}_{\vec{y}}^{-1}}_{m\times m}\ \underbrace{\vec{G}_{\vec{x}}}_{m\times n}$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene

$$(3)\quad f_{\vec{x}} - f_{\vec{y}}\,\vec{G}_{\vec{y}}^{-1}\vec{G}_{\vec{x}} = \vec{0} \qquad \text{en } (\vec{x}_0, \vec{y}_0)$$

Como la (3) exige determinar la matriz inversa de $\vec{G}_{\vec{y}}$, la cual si bien por el teorema de la función inversa existe en $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$, dado que $r(\vec{G}_{\vec{u}}) = m$ en dicho punto; su expresión analítica suele ser dificultosa de obtener, a Lagrange se le ocurrió la genial idea de sustituir el producto $-f_{\vec{y}}\,\vec{G}_{\vec{y}}^{-1}$ por un **vector incógnita** $\vec{\lambda}$:

$$(4)\quad \vec{\lambda} = -f_{\vec{y}}\,\vec{G}_{\vec{y}}^{-1}$$

evitando así la necesidad de obtener $\vec{G}_{\vec{y}}^{-1}$ pero agregando m incógnitas al problema (las m componentes de $\vec{\lambda}$). Al hacer la sustitución de (4) en (3) ésta última se convierte en $(5.a)$, mientras que (4) equivale a $(5.a)$ (esto es multiplicando ambos miembros de (4) por derecha por $\vec{G}_{\vec{y}}$)

$$(5)\quad \begin{cases} f_{\vec{x}} + \vec{\lambda}\,\vec{G}_{\vec{x}} = \vec{0}^{\,n} & (5.a)\quad n \text{ ecuaciones} \\ f_{\vec{y}} + \vec{\lambda}\,\vec{G}_{\vec{y}} = \vec{0}^{\,m} & (5.b)\quad m \text{ ecuaciones} \end{cases} \quad \text{en } (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{\lambda}_0)$$

Las ecuaciones (5) pueden expresarse

$$(f_{\vec{x}}, f_{\vec{y}}) + \vec{\lambda}\,(\vec{G}_{\vec{x}}, \vec{G}_{\vec{y}}) = \vec{0}^{\,n+m} \quad \text{en } (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{\lambda}_0); \qquad \text{y siendo } \vec{u} = (\vec{x}, \vec{y})$$

$$\underbrace{\overbrace{f_{\vec{u}}}^{(f_{\vec{x}},f_{\vec{y}})} + \vec{\lambda}\ \overbrace{\vec{G}_{\vec{u}}}^{(\vec{G}_{\vec{x}},\vec{G}_{\vec{y}})}}_{} = \vec{0}^{\,n+m} \qquad \text{en } (\vec{u}_0, \vec{\lambda}_0)$$

$\vec{\lambda}$ es un vector cte
(no depende de $\vec{u}$)

se interpreta como:

$$\overbrace{(f + \vec{\lambda}\,\vec{G})_{\vec{u}}} = \vec{0} \qquad \text{en } (\vec{u}_0, \vec{\lambda}_0)$$

Y siendo $f(\vec{u}) + \vec{\lambda}\vec{G}(\vec{u}) = L(\vec{u})$ la función auxiliar de Lagrange, el teorema queda demostrado.

Observaciones

- Cuando se aplica el método de los multiplicadores de Lagrange, se resuelve el siguiente sistema

$$\begin{cases} \vec{\nabla} L = \vec{0} \\ \vec{G} = \vec{0} \end{cases}$$

que permite obtener los **"puntos críticos"** y $\vec{\lambda}$ para cada uno.

Ahora, no todo punto crítico obtenido es punto de extremo porque el teorema no es de la forma si y sólo si ya que utiliza la condición de extremo (que no es de la forma si y sólo si).

- Si $r\left(\vec{G}_{\vec{u}}\right) < m$ en $\vec{u}_0$ punto de extremo, el método de los multiplicadores de Lagrange no es aplicable.

Interpretación geométrica

Si a las condiciones obtenidas en el teorema de los multiplicadores de Lagrange: $f_{\vec{u}} + \vec{\lambda}\,\vec{G}_{\vec{u}} = \vec{0}$ en $(\vec{u}_0, \vec{\lambda}_0)$, las expresamos de la siguiente manera

$$-\underbrace{f_{\vec{u}}(\vec{u}_0)}_{1\times(n+m)} = \underbrace{\underbrace{\vec{\lambda}_0}_{1\times m}\ \ \underbrace{\vec{G}_{\vec{u}}(\vec{u}_0)}_{m\times(n+m)}}_{1\times(n+m)}$$

$$-\overbrace{\vec{\nabla} f(\vec{u}_0)}^{f_{\vec{u}}(\vec{u}_0)} = \overbrace{(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)}^{\vec{\lambda}_0} \overbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial G_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_m}{\partial u_n} \end{matrix}}_{\vec{G}_{\vec{x}}} \ \middle|\ \underbrace{\begin{matrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial u_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial u_{n+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial G_m}{\partial u_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial G_m}{\partial u_{n+m}} \end{matrix}}_{\vec{G}_{\vec{y}}}\right)_{\vec{u}_0}}^{\vec{G}_{\vec{u}}(\vec{u}_0)}$$

$$-\vec{\nabla} f(\vec{u}_0) = (\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\begin{pmatrix} \vec{\nabla} G_1(\vec{u}_0) \\ \vdots \\ \vec{\nabla} G_m(\vec{u}_0) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{-\vec{\nabla} f(\vec{u}_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{\nabla} G_i(\vec{u}_0)}$$

tenemos que éstas equivalen al **paralelismo** en el punto de extremo entre el vector gradiente del campo escalar a extremar y la combinación lineal de los gradientes de cada una de las superficies definidas implícitamente (vectores ortogonales a dichas superficies) correspondientes a las restricciones.

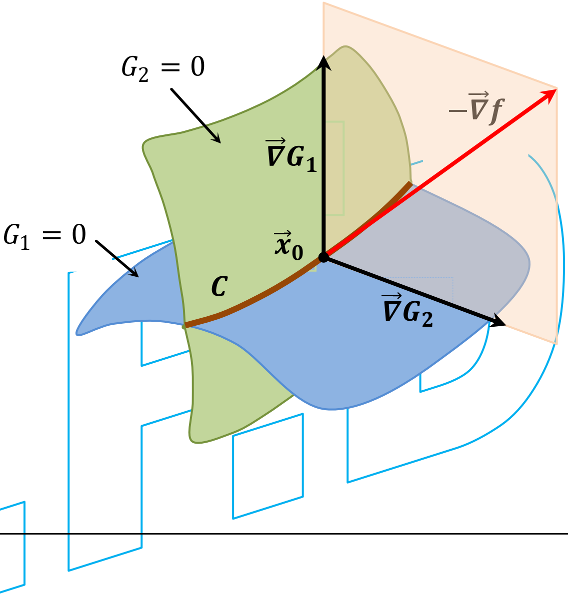
Esto es, por ejemplo supongamos que tenemos una función $f\left(\overbrace{x,y,z}^{\vec{x}=\vec{u}}\right)$ sujeta a dos resticciones definidas implícitamente por $\vec{G}(x,y,z)=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} G_1(x,y,z)=0 \\ G_2(x,y,z)=0 \end{cases}$, que tiene un extremo en $\vec{x}_0$. Entonces (suponiendo que se cumplen las condiciones que establece el teorema) existe $\vec{\lambda}_0=(\lambda_1,\lambda_2)$ tal que

$$-\underbrace{\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)}_{1\times 3}=\overbrace{\lambda_1\underbrace{\vec{\nabla}G_1(\vec{x}_0)}_{1\times 3}+\lambda_2\underbrace{\vec{\nabla}G_2(\vec{x}_0)}_{1\times 3}}^{\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\vec{\nabla}G_i(\vec{x}_0)}$$

Resolver el problema de encontrar los extremos de f sujeta a $\vec{G}=\vec{0}$ significa buscar los extremos de f cuando (x,y,z) está restringida a estar en la curva C de intersección de las superficies $G_1(x,y,z)=0$ y $G_2(x,y,z)=0$.

Se sabe que $\vec{\nabla}G_1$ es ortogonal a la superficie definida por $G_1(x,y,z)=0$ en $\vec{x}_0$ y que $\vec{\nabla}G_2$ es ortogonal a la superficie definida por $G_2(x,y,z)=0$ en $\vec{x}_0$.

Por lo tanto $\vec{\nabla}G_1$ y $\vec{\nabla}G_2$ son ambos ortogonales a C en $\vec{x}_0$, y $-\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)$ está en el plano determinado por $\vec{\nabla}G_1(\vec{x}_0)$ y $\vec{\nabla}G_2(\vec{x}_0)$.



Ejemplo

Encuentre los puntos más altos y más bajos de la curva de intersección de las superficies:

$$G_1(x,y,z) = 1 - x^2 - z = 0$$

$$G_2(x,y,z) = z - y^2 = 0$$

Interpretación geométrica del problema

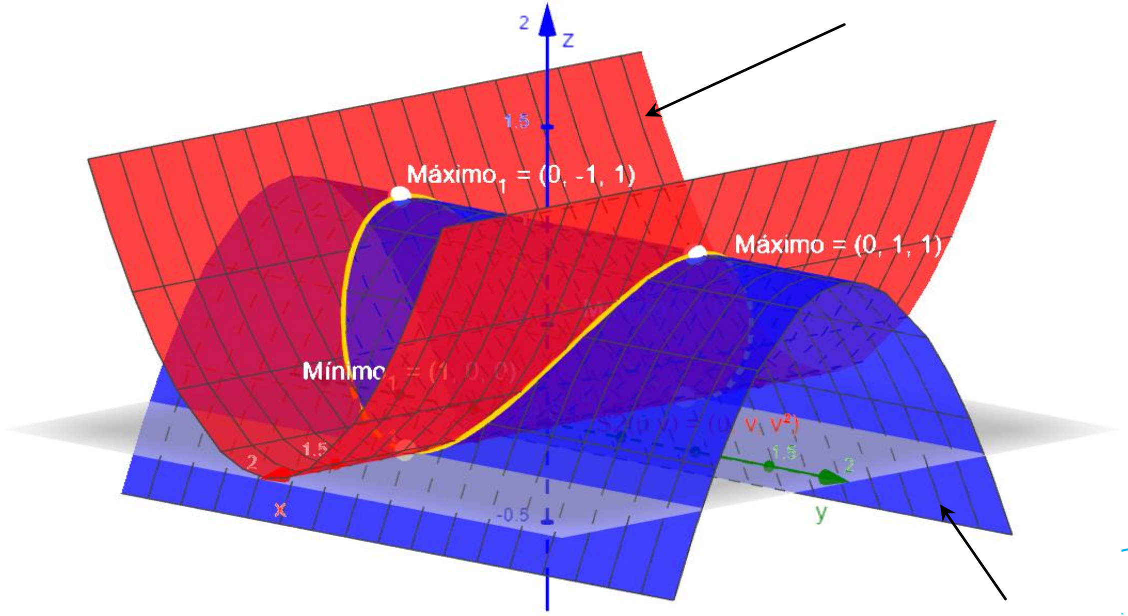
Despejando z de $G_1(x,y,z) = 1 - x^2 - z = 0$ se obtiene:

$$z = g_1(x,y) = 1 - x^2$$

Despejando z de $G_2(x,y,z) = z - y^2 = 0$ se obtiene:

$$z = g_2(x,y) = y^2$$

Las gráficas de las funciones g_1 y g_2 son los siguientes cilindros parabólicos:



$z = g_2(x,y) = y^2$

$z = g_1(x,y) = 1 - x^2$

La curva de intersección de las superficies está marcada en color amarillo en el gráfico.

Solución

Para encontrar los puntos más altos y más bajos de dicha curva se debe extremar la función

$$f(x, y, z) = z$$

(que da la distancia vertical de cualquier punto (*x,y,z*) respecto del plano *xy*)

sujeta a la restricción o ligadura:

$$\vec{G}(x, y, z) = \begin{pmatrix} G_1(x, y, z) \\ G_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x^2 - z \\ z - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

(es decir con la condición de que (*x,y,z*) pertenezca a la curva de intersección de las superficies dadas).

Se forma entoces la función auxiliar de Lagrange:

$$L(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda}\vec{G}(\vec{x})$$

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \ (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} G_1(x, y, z) \\ G_2(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_1 G_1(x, y, z) + \lambda_2 G_2(x, y, z)$$

$$L(x, y, z) = z + \lambda_1(1 - x^2 - z) + \lambda_2(z - y^2)$$

Y se imponen las condiciones de punto crítico:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} L = \vec{0} \\ \vec{\mathrm{G}} = \ \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ G_1 = 0 \\ G_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x\lambda_1 = 0 & (1) \\ -2y\lambda_2 = 0 & (2) \\ 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (3) \\ 1 - x^2 - z = 0 & (4) \\ z - y^2 = 0 & (5) \end{cases}$$

De (1):

$$-2x\lambda_1 = 0 \begin{array}{l} \nearrow \ x = 0 \\ \searrow \ \lambda_1 = 0 \end{array}$$

<u>Con $x = 0$</u> en (4) se obtiene z = 1, con $z = 1$ en (5) se obtiene

$y = \pm 1$, con $y = \pm 1$ en (2) se obtiene $\lambda_2 = 0$ y con $\lambda_2 = 0$ en (3) se obtiene $\lambda_1 = 1$.

Por lo tanto se tienen los siguientes puntos crítcos:

$$P_1 = (0{,}1{,}1)\ ;(\lambda_1,\lambda_2) = (1{,}0)$$

$$P_2 = (0,-1{,}1)\ ;(\lambda_1,\lambda_2) = (1{,}0)$$

Con $\lambda_1 = 0$ en (3) se obtiene $\lambda_2 = -1$, con $\lambda_2 = -1$ en (2) se obtiene $y = 0$, con $y = 0$ en (5) se obtiene $z = 0$ y con $z = 0$ en (4) se obtiene $x = \pm 1$.

O sea que se tienen también los siguientes puntos críticos:

$$P_3 = (1{,}0{,}0)\ ;(\lambda_1,\lambda_2) = (0,-1)$$

$$P_4 = (-1{,}0{,}0)\ ;(\lambda_1,\lambda_2) = (0,-1)$$

Los puntos más altos de la curva son: $P_1 = (0{,}1{,}1)$ y $P_2 = (0,-1{,}1)$ ya que $f(0,\pm 1{,}1) = 1$.

Y los más bajos son: $P_3 = (1{,}0{,}0)$ y $P_4 = (-1{,}0{,}0)$ ya que $f(\pm 1{,}0{,}0) = 0$.

TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es **continua** en un **conjunto compacto** (cerrado y acotado): $D \subset D_f$, entonces f alcanza sus valores máximo y mínimo global en D.

Para obtener los extremos globales de f en este caso se debe seguir el siguiente procedimiento:

(I) Localizar los puntos críticos de f en el interior de D.

(II) Hallar los puntos crítcos de f considerada como una función definida sólo en ∂D: frontera de D.
El método de los multiplicadores de Lagrange (en caso de poder aplicarse) es una opción para obtener estos puntos críticos.

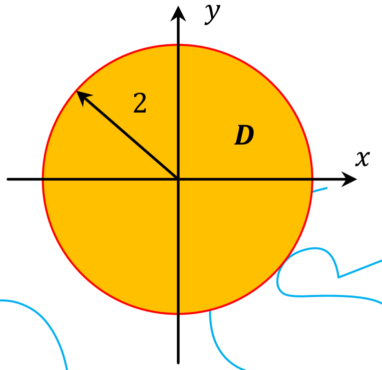
(III) Calcular el valor de f en todos los puntos críticos obtenidos en (I) y (II).
El mayor es el máximo global y el menor es el mínimo global.

Ejemplo

Obtenga los valores extremos globales de la función $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 5$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 \leq 4$.

Solución

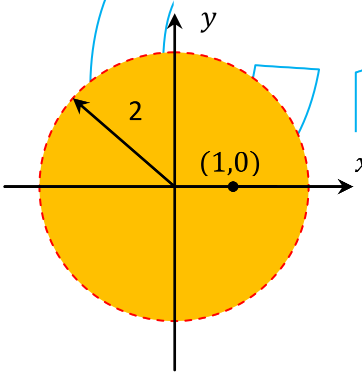
Dado que f es continua en el conjunto compacto:



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

se cumple el teorema del valor extremo, por lo tanto f alcanza máximo y mínimo global en D.

(I) Se buscan los puntos criticos de f en el interior de D:



$$\vec{\nabla} f = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 0 & (1) \\ 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

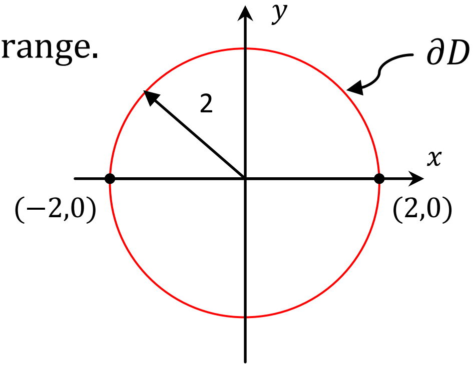
De (1) se obtiene $x = 1$ y de (2) $y = 0$.

Luego <u>(1,0)</u> es el único <u>punto crítico de f en el interior de D.</u>

(II) Para hallar los ptos críticos de f en la forntera de D:

$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange.



Se forma la función Lagrangiana:

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda G(x,y)$$

con $G(x,y) = x^2 + y^2 - 4$ ya que ahora la restricción es:

$$G(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

Es decir, $L(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

y se buscan los puntos críticos de f en ∂D haciendo:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} L = \vec{0} \\ G = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ G = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 + 2x\lambda = 0 & (1) \\ 2y + 2y\lambda = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 & (3) \end{cases}$$

De (2): $$2y(1+\lambda) = 0 \begin{array}{l} \nearrow \; y = 0 \\ \searrow \; \lambda = -1 \end{array}$$

Si $y = 0$ en (3): $x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$. Se obtienen los puntos críticos: $(2{,}0)$ y $(-2{,}0)$.

Si $\lambda = -1$ en (1): $4x - 4 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Y con $x = 2$ en (3): $2^2 + y^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow y = 0$. O sea que se vuelve a obtener

el punto crítico (2,0).

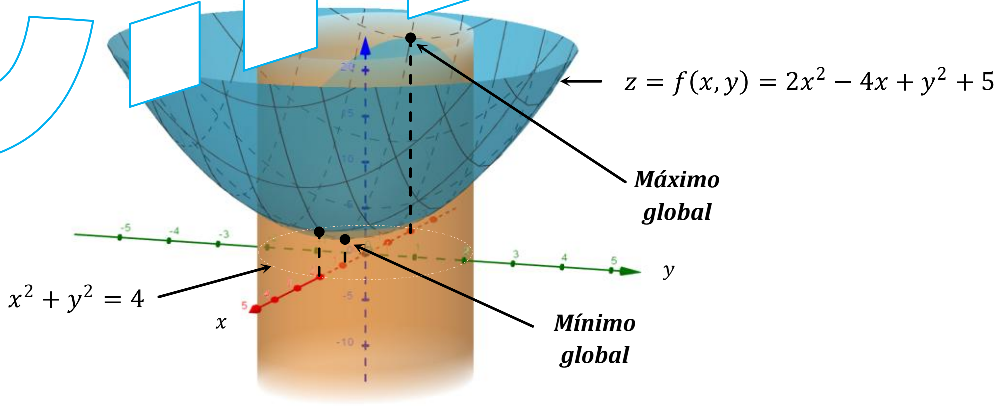
Luego <u>los puntos críticos f en ∂D son: $(2{,}0)$ y $(-2{,}0)$.</u>

(III) Evaluando a $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 + 5$ en los puntos críticos se obtiene:

$f(1{,}0) = 2 - 4 + 0 + 5 = 3$ **Mínimo global**

$f(2{,}0) = 8 - 8 + 0 + 5 = 5$

$f(-2{,}0) = 8 + 8 + 0 + 5 = 21$ **Máximo global**



EJERCICIOS RESUELTOS

Ejercicio 1

Encuentre los valores extremos globales de la función $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}xy$ en la región $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+2y^2\leq 1\}$.

Solución

Como f es continua en el conjunto compacto D, por el teorema del valor extremo, f alcanza máximo y mínimo global en D. Para obtener estos valores extremos globales se procede de la siguiente manera:

(I) Se buscan los puntos críticos de f en el interior de D:

$$\vec{\nabla} f=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}y=0 & (1) \\ 2y+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x=0 & (2) \end{cases}$$

De (1) $x=-\frac{\sqrt{2}}{3}y$ (3). Sustituyendo en (2)

$$2y+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}y\right)=0 \Rightarrow y-\frac{2}{9}y=0 \Rightarrow \frac{7}{9}y=0 \Rightarrow y=0$$

Con $y=0$ en (3) se obtiene $x=0$.

Por lo tanto, (0,0) es punto crítico de f en el interior de D.

(II) Se buscan los puntos críticos de f en la frontera de D.

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda G(x,y)$$

$$L(x,y)=x^2+y^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}xy+\lambda(x^2+2y^2-1)$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} L=\vec{0} \\ G=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ G=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}y+2x\lambda=0 & (1) \\ 2y+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x+4y\lambda=0 & (2) \\ x^2+2y^2-1=0 & (3) \end{cases}$$

De (1) $x + \frac{\sqrt{2}}{3}y + x\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\sqrt{2}}{3}y = -x(\lambda+1) \;\Rightarrow\; y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x(\lambda+1)$ (4)

Sustituyendo en (2)

$$-\frac{6}{\sqrt{2}}x(\lambda+1) + \frac{2\sqrt{2}}{3}x - \frac{12}{\sqrt{2}}x(\lambda+1)\lambda = 0$$

Multiplicando por $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$3\sqrt{2}x(\lambda+1) - \frac{2\sqrt{2}}{3}x + 6\sqrt{2}x(\lambda+1)\lambda = 0$$

$$\sqrt{2}x\left(3(\lambda+1) - \frac{2}{3} + 6(\lambda+1)\lambda\right) = 0$$

$$\sqrt{2}x\left(3\lambda + 3 - \frac{2}{3} + 6\lambda^2 + 6\lambda\right) = 0$$

$$\begin{tikzcd} & x = 0 \\ \sqrt{2}x\left(6\lambda^2 + 9\lambda + \frac{7}{3}\right) = 0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \lambda_1 = -\frac{7}{6} \\ & \lambda_2 = -\frac{1}{3} \end{tikzcd}$$

Se descarta $x = 0$ porque si $x = 0$ en (1) $\Rightarrow y = 0$, y (0,0) no satisface (3).

Recordando que (4) $y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x(\lambda+1)$

Si $\lambda = -\frac{7}{6}$ en (4)

$$y = -\frac{3}{\sqrt{2}}x\left(-\frac{7}{6} + 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}x \quad (5)$$

Sustituyendo en (3)

$$x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right)^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Con $x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ en (5) se obtienen los siguientes puntos críticos:

$$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right) \; y \; \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

Si $\lambda=-\frac{1}{3}$ en (4)

$$y=-\frac{3}{\sqrt{2}}x\left(-\frac{1}{3}+1\right)=-\sqrt{2}x \quad (6)$$

Sustituyendo en (3)

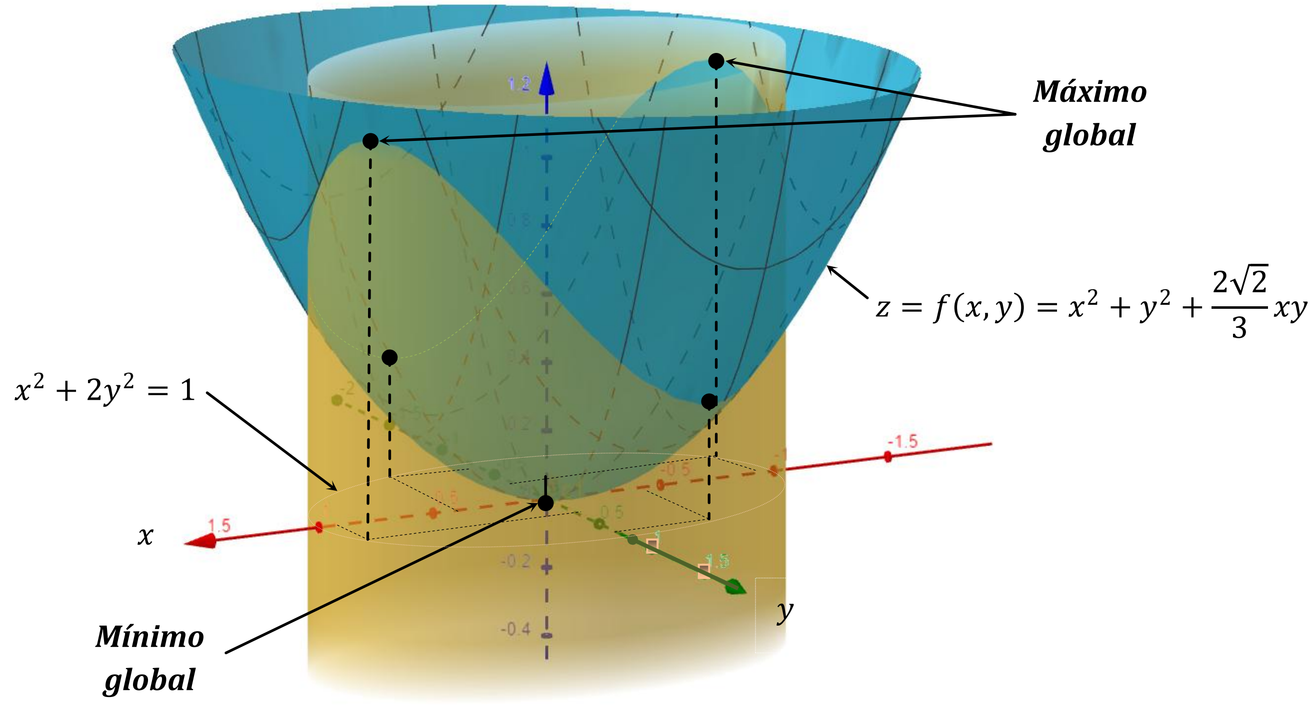
$$x^2+2\left(-\sqrt{2}x\right)^2-1=0 \ \Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Con $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ en (6) se obtienen los siguientes puntos críticos:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{10}}{5}\right) \ y \ \left(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

(III) Evaluando f en los puntos críticos obtenidos en los pasos (I) y (II)

$f(0,0)=0$	**Mínimo global**
$f\left(\pm\frac{2\sqrt{5}}{5},\pm\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{7}{6}$	**Máximo global**
$f\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5},\mp\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=\frac{1}{3}$	



Ejercicio 2

Obtenga los valores extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ sujeta a la restricción: $G(x,y,z) = 2x - 3y + z - 6 = 0$.

"El conjunto definido por la ecuación de restricción no es acotado"

Solución

Si se despeja z de la ecuación de la restricción se tiene:

$$z = 6 - 2x + 3y$$

Sustituyendo en la función se obtiene:

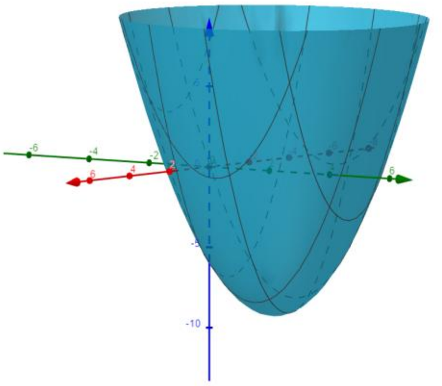
$$f^*(x,y) = x^2 + y^2 - 6 + 2x - 3y$$

Y se buscan los puntos críticos de f^*

$$\vec{\nabla} f^* = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x^* = 0 \\ f_y^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Punto crítico: $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

$f_{xx}^* = 2$, $f_{yy}^* = 2$, $f_{xy}^* = f_{yx}^* = 0$



$$\left| Hf^*\left(-1, \frac{3}{2}\right) \right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

f^* tiene un **mínimo local** en $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Como $z = 6 - 2x + 3y \;\Rightarrow\; z = 6 - 2\overbrace{(-1)}^{x} + 3\overbrace{\left(\frac{3}{2}\right)}^{y} = \frac{25}{2}$ entonces:

$$\boxed{f\left(-1, \frac{3}{2}, \frac{25}{2}\right) = \left(\underbrace{-1}_{x}\right)^2 + \left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{y}\right)^2 - \underbrace{\frac{25}{2}}_{z} = 1 + \frac{9}{4} - \frac{25}{2} = -\frac{37}{4} \quad \textbf{Mínimo}}$$

Ejercicio 3

Encuentre los valores extremos globales de la función $f(x,y)=x^2-y^2+4$ sujeta a la restricción $x^2+y^2=4$.

Solución

Como f es continua en el conjunto compacto $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \overbrace{x^2+y^2=4}^{\text{ecuación de la restricción}}\right\}$, por el teorema del valor extremo, f alcanza máximo y mínimo global en D.

Para obtener estos valores extremos globales aplicamos el procedimiento conocido pero en este caso no hay paso (I) por realizar debido a que el conjunto D no tiene interior porque la restricción es una curva (una circunferencia).

(II) Todos los puntos que pertenecen a D son puntos frontera de D, es decir:

$$\underbrace{\partial D}_{\text{frontera de } D}=D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$$

Formamos la función Lagrangiana para buscar los puntos críticos de f sobre la circunferencia.

$$L(x,y)=\overbrace{x^2-y^2+4}^{f(x,y)}+\lambda\left(\overbrace{x^2+y^2-4}^{G(x,y)}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{\nabla}L=\vec{0}\\ G=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}L_x=0\\ L_y=0\\ G=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2x\lambda=0 & (1)\\ -2y+2y\lambda=0 & (2)\\ x^2+y^2-4=0 & (3)\end{cases}$$

De (1):

$$\begin{tikzcd}
 & x=0 \\
2x(1+\lambda)=0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \lambda=-1
\end{tikzcd}$$

Si $x=0$ en (3): $y^2-4=0 \Rightarrow y=\pm 2$. Se obtienen los puntos críticos: $(0,2)$ y $(0,-2)$.

Si $\lambda = -1$ en (2): $-2y - 2y = 0 \Rightarrow -4y = 0 \Rightarrow y = 0$.

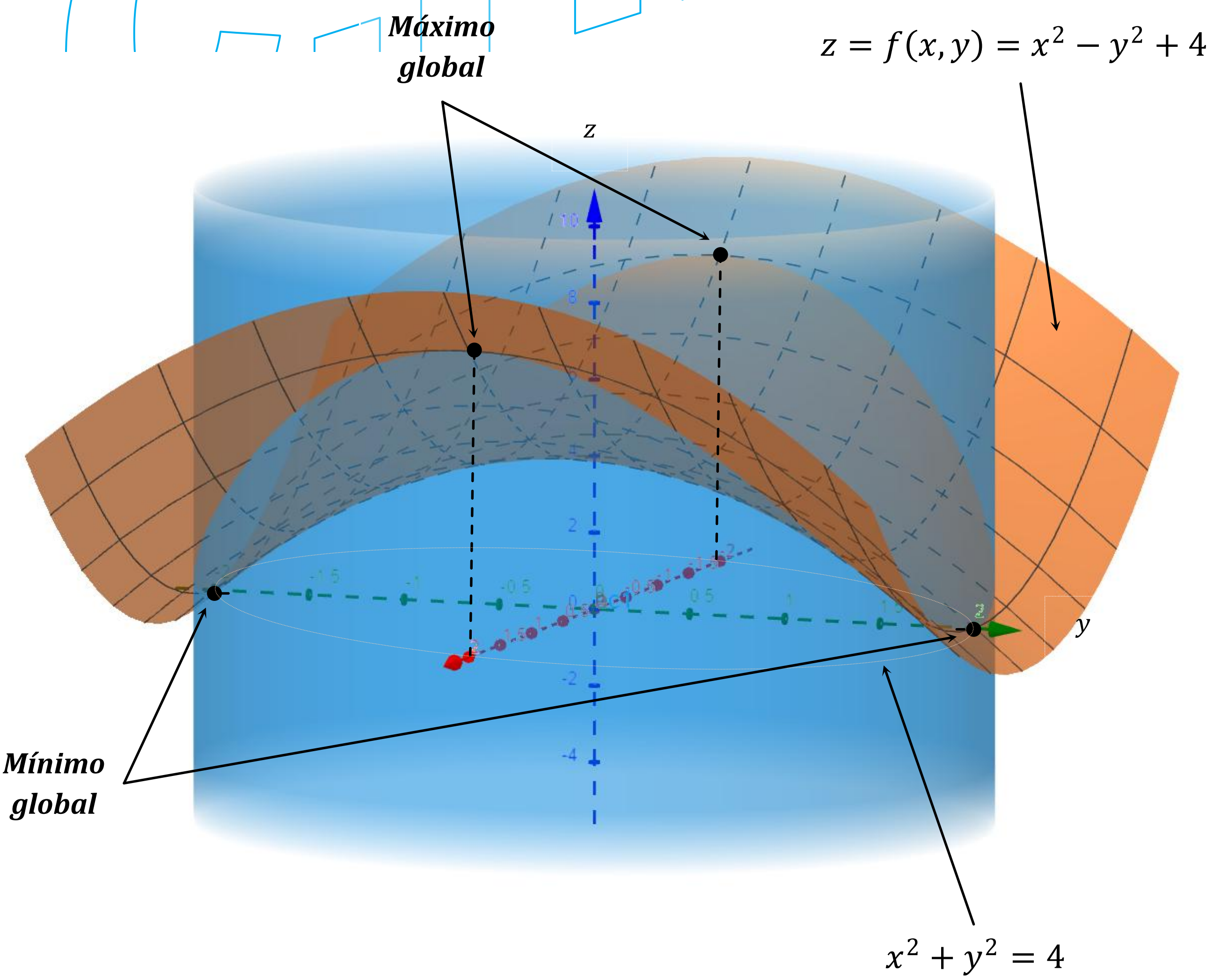
Y con $y = 0$ en (3): $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. Se obtienen los puntos críticos: $(2,0)$ y $(-2,0)$.

Luego los puntos críticos f sujeta a la restricción son: $(0,2)$, $(0,-2)$ $(2,0)$ y $(-2,0)$.

(III) Evaluando a $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4$ en los puntos críticos se obtiene:

$f(0,\pm 2) = 0 - 4 + 4 = 0$ **Mínimo global**

$f(\pm 2,0) = 4 + 0 + 4 = 8$ **Máximo global**



Máximo global

$z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 4$

Mínimo global

$x^2 + y^2 = 4$

Ejercicio 4

Obtenga los valores extremos globales de la función $f(x,y) = 2x + 2y - x^2 - y^2 + 2$ en la región de $\mathbb{R}^2$ determinada por el siguiente sistema de desigualdades:

$$D: \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 9 - x \end{cases}$$

Solución

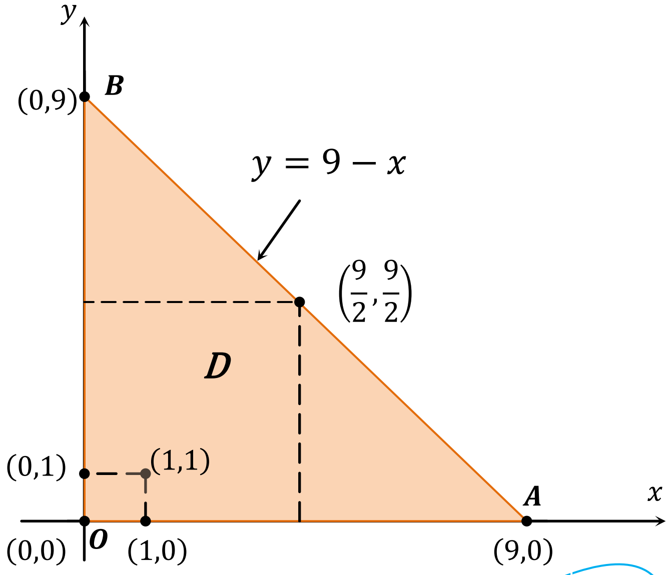
Como f es continua en el conjunto compacto D, por el teorema del valor extremo, f alcanza máximo y mínimo global en D.

(I) Se buscan los puntos críticos de f en el interior de D:

$$\vec{\nabla} f = \vec{0} \iff \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \overbrace{2 - 2x}^{f_x} = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \underbrace{2 - 2y}_{f_y} = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$



Por lo tanto (1,1) es el único punto crítico de f en el interior de D.

(II) Se buscan los puntos críticos de f en la frontera de D. Para ello tomamos un lado del triángulo a la vez:

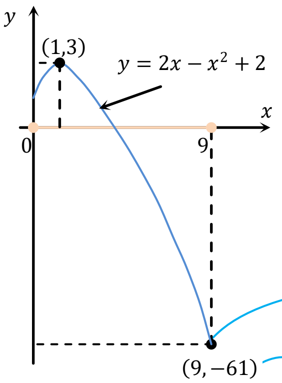
a) <u>Sobre el segmento OA:</u> $y = 0$.

La función

$$f(x,0) = f^*(x) = 2x - x^2 + 2$$

puede considerarse como una función que depende sólo de x definida en el intervalo cerrado $0 \leq x \leq 9$.

Sus valores extremos pueden presentarse tanto en el interior como en los puntos extremos del intervalo. Para encontrar los puntos críticos en el interior se hace:



$$f^{*'}(x) = 2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Luego los puntos críticos de f sobre el segmento OA

son: $(0,0), (1,0)$ y $(9,0)$.

b) <u>Sobre el segmento OB:</u> $x = 0$.

$$f(0, y) = f^*(y) = 2y - y^2 + 2$$

Por la simetría de f con respecto a x e y tenemos los siguientes puntos críticos: $(0,0), (0,1)$ y $(0,9)$.

c) <u>Sobre el segmento AB:</u> $y = 9 - x$.

$$f(x, 9 - x) = f^*(x) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2$$
$$= 2 + 2x + 18 - 2x - x^2 - 81 + 18x - x^2$$
$$f^*(x) = -2x^2 + 18x - 61$$

Hacemos

$$f^{*'}(x) = -4x + 18 = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 9 - \overbrace{\frac{9}{2}}^{x} = \frac{9}{2}$$

Luego los puntos críticos de f sobre el segmento AB son: $(9,0), \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$ y $(0,9)$.

(III) Evaluando f en los puntos críticos se obtiene:

$f(0,0) = 2$
$f(1,0) = 3$
$f(0,1) = 3$
$f(1,1) = 4$ **Máximo global**
$f(9,0) = f(0,9) = -61$ **Mínimo global**
$f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para cada función f definida en el conjunto D indicado, obtenga:

a) Los puntos críticos de f en D.

b) Los valores extremos globales de f en D.

I) $f(x,y) = y^2 - x^2,$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$

Resp: a) $(0,1), (0,5), \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\quad$ *b)* $f\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$ *Mínimo global,* $f(0,5) = 25$ *Máximo global*

II) $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 1,$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3(x-2)^2 + y^2 = 3\}$

Resp: a) $(1,0), (3,0)$ $\quad$ *b)* $f(1,0) = 4$ *Mínimo global,* $f(3,0) = 28$ *Máximo global*

III) $f(x,y) = x^2 y,$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 6\}$

Resp: a) $(0,\sqrt{3}), (0,-\sqrt{3}), (2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)$

b) $f(\pm 2,-1) = -4$ *Mínimo global,* $\quad f(\pm 2,1) = 4$ *Máximo global*

IV) $f(x,y) = x^2 + y^2,$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\}$

Resp: a) $(0,0), (2,4)$ $\quad$ *b)* $f(0,0) = 0$ *Mínimo global,* $f(2,4) = 20$ *Máximo global*

V) $f(x,y) = e^{-xy},$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

Resp: a) $(0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $f\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ *Mínimo global,* $f\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \sqrt[4]{e}$ *Máximo global*

VI) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + x + y,$ $\quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\right\}$

Resp: a) $\left(0, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

b) $f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$ *Mínimo global,* $f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ *Máximo global*

VII) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2x^2 y + 1,$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

Resp: a) $(0,0), (0,1), (1,1), (-1,1), \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, y = -1\}, \left(1, -\frac{1}{3}\right), \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$

b) $f(0,0) = 1$ *Mínimo global,* $f(\pm 1,1) = 8$ *Máximo global*

VIII) $f(x,y) = 5x - 4y + 1,$ $\quad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq y \leq -\frac{2}{3}x + 2, x \geq 0\right\}$

Resp: a) $(0,0), (0,2), (3,0)$

b) $f(0,2) = -7$ *Mínimo global,* $f(3,0) = 16$ *Máximo global*

IX) $f(x,y) = x + y^2,$ $\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}$

Resp: a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(\frac{1}{4},\sqrt{\frac{7}{8}}\right),\left(\frac{1}{4},-\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$

b) $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *Mínimo global,* $f\left(\frac{1}{4},\pm\sqrt{\frac{7}{8}}\right) = \frac{9}{8}$ *Máximo global*

X) $f(x,y,z) = x + y + z,$ $\qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Resp: a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\sqrt{3}$ *Mínimo global,* $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}$ *Máximo global*

2. Encuentre los valores extremos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se indican:

I) $f(x,y,z) = ze^{-xy},$ $\qquad G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$

Resp: $f(0,0,0) = 0$ *Mínimo local*

II) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1,$ $\qquad G(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$

Resp: $f\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ *Mínimo local*

III) $f(x,y,z) = x - y + 2z,$ $\qquad G(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0$

Resp: $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$ *Mínimo global,* $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$ *Máximo global*

IV) $f(x,y,z) = x + y + z,$ $\qquad G_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ y

$G_2(x,y,z) = x + z - 1 = 0$

Resp: $f(0,-2,1) = -1$ *Mínimo global*

$f(0,2,1) = 3$ *Máximo global*

3. Encuentre la mínima distancia del punto $(1,1,1)$ a la recta: $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}.$

Resp: $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. El área de una caja rectangular sin tapa es de $48\ m^2$. Obtenga las dimensiones x (el largo), y (el ancho) y z (la altura) de la misma de modo que su volumen sea máximo.

Resp: $x = y = 4\ m, z = 2m$

5. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange obtenga las dimensiones del rectángulo de mayor área, con lados paralelos a los ejes coordenados, que se puede inscribir en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Resp: Largo $= 3\sqrt{2}$, *Ancho* $= 2\sqrt{2}$