ESPACIO n-DIMENSIONAL

Se define a $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de todas las n-uplas ordenadas de números reales $(x_1, \cdots, x_n)$.

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ que se simbolizan como:

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \qquad \text{o} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

como n-upla horizontal *como matriz columna*

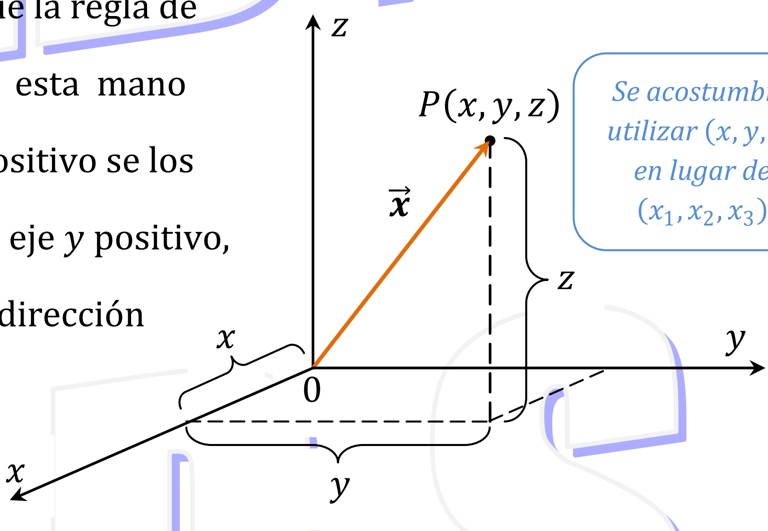
se denominan vectores o n- vectores.

∗ Si $n = 1$, se obtiene la recta real $\mathbb{R}$.

∗ Si $n = 2$, se obtiene el plano $\mathbb{R}^2$.

∗ Si $n = 3$, $\mathbb{R}^3$ es el espacio tridimensional.

En este caso se adopta un sistema de coordenadas xyz denominado **dextrógiro** que sigue la regla de la mano derecha: con los dedos de esta mano apuntando en la dirección del eje x positivo se los curva en sentido anti-horario hacia el eje y positivo, entonces el dedo pulgar apunta en la dirección positiva del eje z.



Se acostumbra utilizar (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3)

Existe una correspondencia uno a uno entre los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ y sus vectores posición $\vec{x} = (x, y, z)$.

coordenadas de P *componentes escalares de $\vec{x}$ = coordenadas de P*

DEFINICIONES

Sean

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \qquad (\text{vectores en } \mathbb{R}^n)$$

es decir:

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \quad , \qquad \vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$$

∗ <u>**Producto interno**</u> (producto escalar)

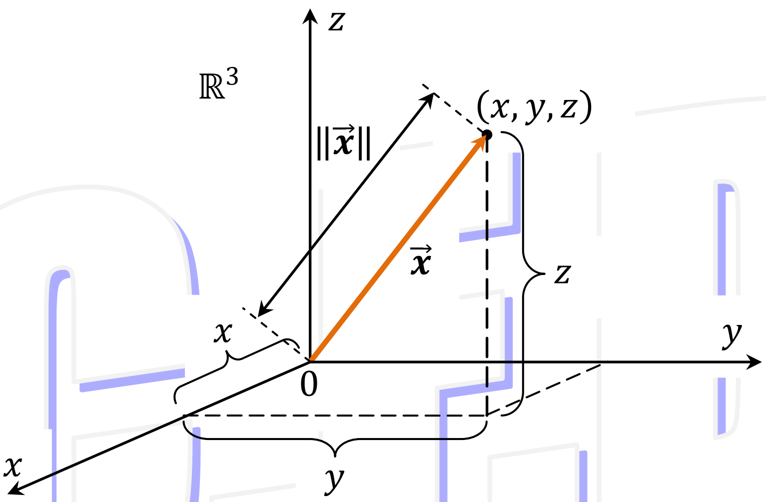
Se define como la suma de los productos de las componentes homólogas de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

∗ <u>**Norma o longitud de un vector**</u>

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

<u>Por ejemplo, si $n = 3$</u>

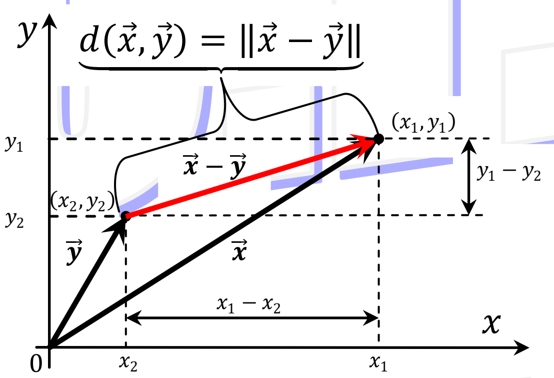


$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

* Distancia entre dos puntos

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$



$\vec{x} = (x_1, y_1)$

$\vec{y} = (x_2, y_2)$

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

TOPLOGÍA DE $\mathbb{R}^n$

DEFINICIONES

Sean

* $A \subset \mathbb{R}^n$
* $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$
* $r \in \mathbb{R},\ \ r > 0$

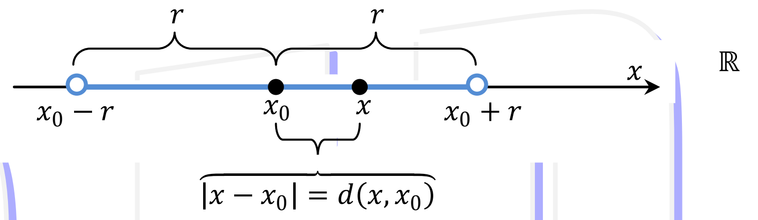
Entorno (o bola abierta) de un punto $\vec{x}_0$:

Es el conjunto de todos los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ cuya distancia a $\vec{x}_0$ es menor que un cierto r, es decir:

$$\underbrace{B_r(\vec{x}_0)}_{\substack{entorno\ \ de\ \vec{x}_0 \\ de\ \ radio\ \ r}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \underbrace{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}_{d(\vec{x},\vec{x}_0)} < r \right\}$$

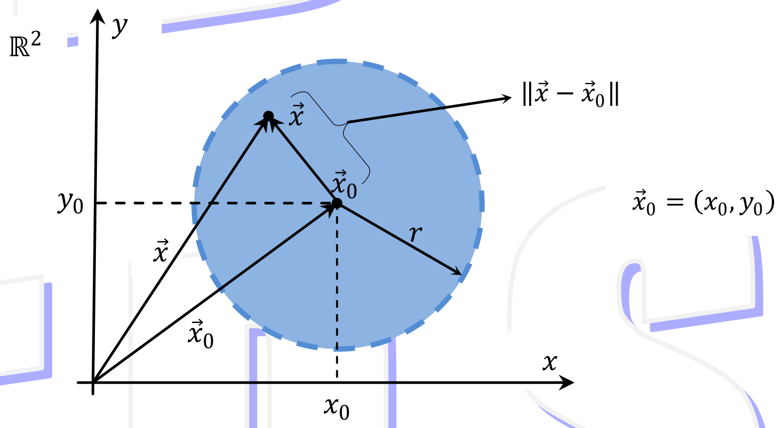
Interpretación geométrica

- Para $n=1$, $\quad |x-x_0|<r \iff x_0-r<x<x_0+r$



$B_r(x_0)$ es el intervalo (x_0-r, x_0+r)

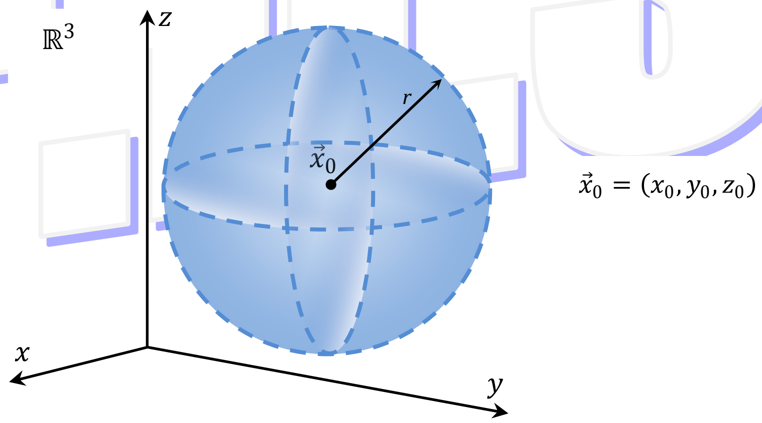
- Para $n=2$



$B_r(\vec{x}_0)$ es el disco abierto

de radio r centrado en $\vec{x}_0$

- Para $n=3$



$B_r(\vec{x}_0)$ es la bola abierta

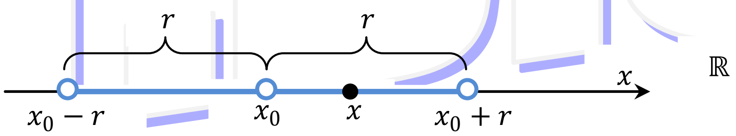
de radio r centrada en $\vec{x}_0$

Entorno reducido (o bola reducida) de un punto $\vec{x}_0$:

$$B_r'(\vec{x}_0)=\{\,\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid 0<\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<r\,\}$$

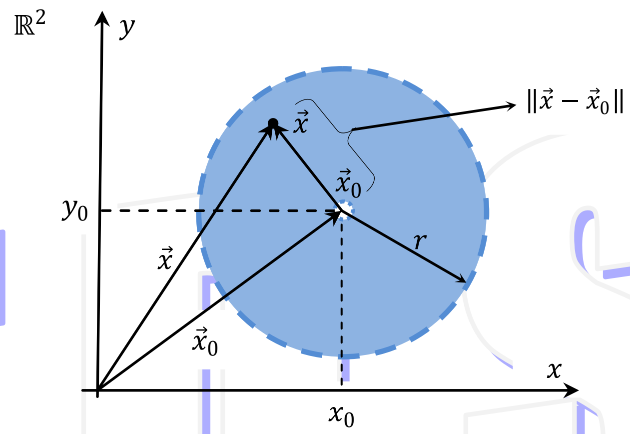
Interpretación geométrica

- Para $n=1$



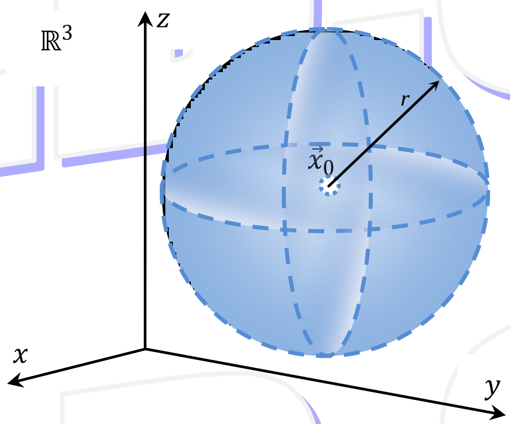
- Para $n = 2$

  $B_r(\vec{x}_0)$ es el disco abierto de radio r perforado en su centro $\vec{x}_0$



- Para $n = 3$

  $B_r(\vec{x}_0)$ es la bola abierta de radio r perforada en su centro $\vec{x}_0$



Punto de acumulación:

$$\vec{x}_0 \text{ es punto de acumulación de } A \iff \forall\, B_r^{'}(\vec{x}_0) \mid B_r^{'}(\vec{x}_0) \cap A \neq \emptyset$$

Es decir, $\vec{x}_0$ es punto de acumulación de A si todo entorno reducido de $\vec{x}_0$ tiene puntos que pertenecen a A.

- Un punto de acumulación puede pertenecer o no al conjunto.
- La idea intuitiva de punto de acumulación es la siguiente: me acerco al punto tanto como quiero usando (pasando por) puntos del conjunto pero sin llegar al punto mismo.

Por ejemplo:

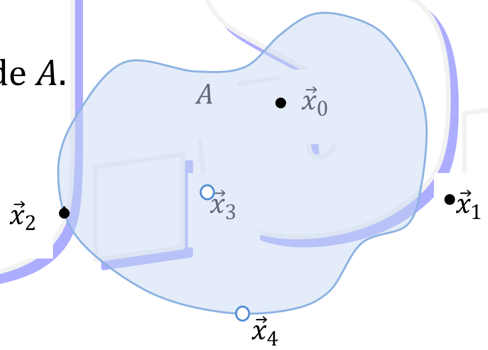
$\vec{x}_0 \in A$ es punto interior y de acumulación de A.

$\vec{x}_1 \notin A$ es punto exterior de A. No es punto de acumulación de A.

$\vec{x}_2 \in A$ es punto frontera y de acumulación de A.

$\vec{x}_3 \notin A$ es punto frontera y de acumulación de A.

$\vec{x}_4 \notin A$ es punto frontera y de acumulación de A.



EJERCICIOS

1. Determine el interior, el exterior, la frontera y la clausura de cada uno de los siguientes conjuntos. Diga si son abiertos, cerrados o ni abiertos ni cerrados.

i- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| < r, |y - b| < r \}$

ii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$

iii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 \leq 36 \}$

iv- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < x + y \}$

v- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

vi- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - a| \leq r, |y - b| < r, |z - c| < r \}$

vii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$

viii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

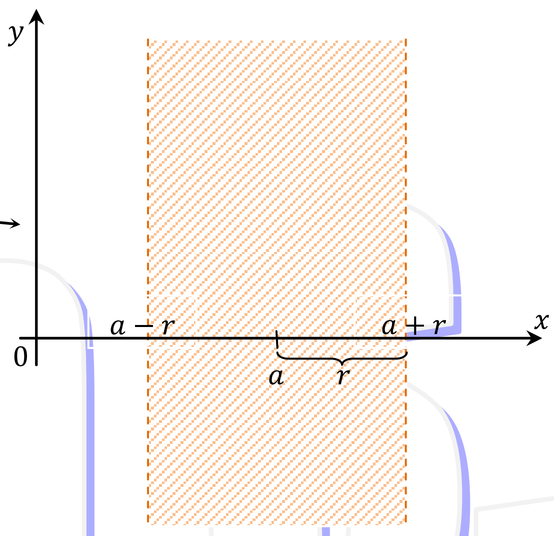
ix- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x + 2y < 4\}$

x- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y - 1| < 2\}$

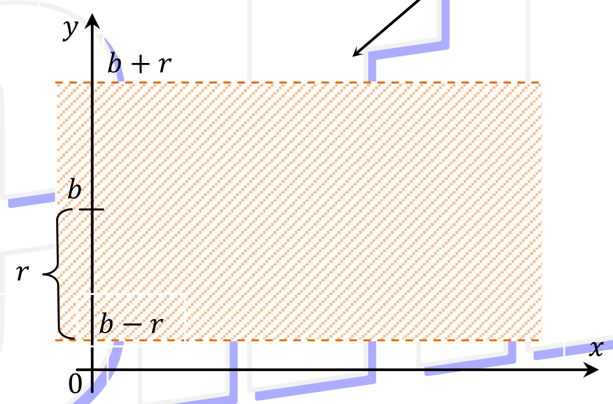
SOLUCIONES DE ALGUNOS EJERCICIOS

i- $\boldsymbol{A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| < r, |y - b| < r \}}$

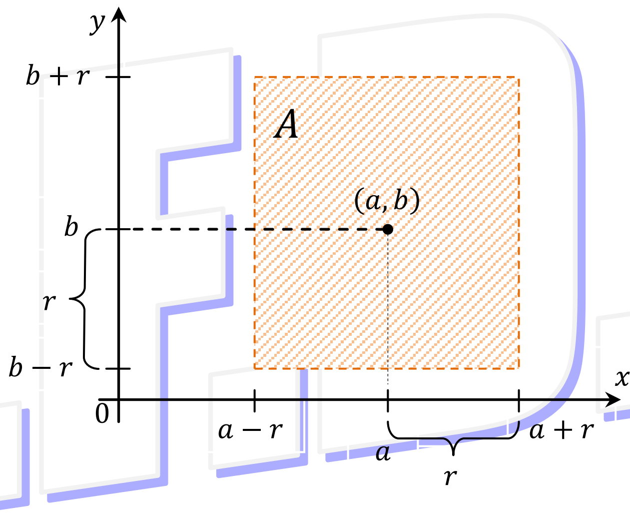
$$|x - a| < r \iff \underbrace{a - r < x < a + r}$$



$$|y - b| < r \iff \underbrace{b - r < y < b + r}$$



La interpretación geométrica de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a| < r, |y-b| < r\}$ es:



$Int(A) = A$

$Ext(A) = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a| \leq r, |y-b| \leq r \ \}$

$|x-a| = r \ \Leftrightarrow x = a \pm r$

$|y-b| = r \ \Leftrightarrow y = b \pm r$

$|x-a| \leq r \ \Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r$

$|y-b| \leq r \ \Leftrightarrow b-r \leq y \leq b+r$

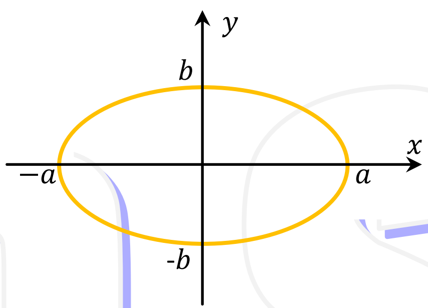
$$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a| = r, |y-b| \leq r \ \} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a| \leq r, |y-b| = r \ \}$$

$$\underbrace{\bar{A}}_{\substack{clausura \\ de\ A}} = Int(A) \cup Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-a| \leq r, |y-b| \leq r\}$$

A es un conjunto abierto.

Repaso

Elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a > 0, b > 0$



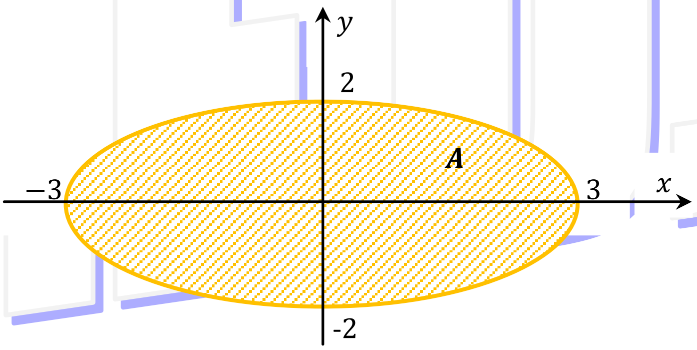
---

ii- $\boldsymbol{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}}$

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \ \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1\ ;\ a = 3,\ \ b = 2$$

La interpretación geométrica de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$ es:



$Int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 < 36\}$

$Ext(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 > 36\}$

$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$

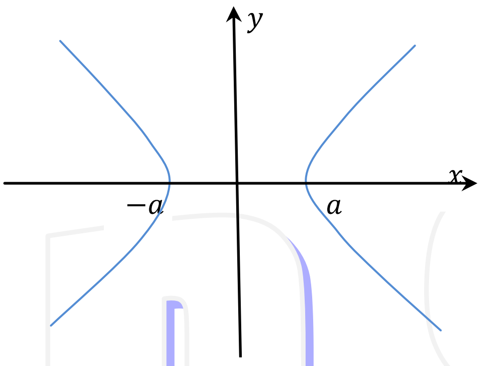
$\bar{A} = Int(A) \cup Fr(A) = A$

A es un conjunto cerrado.

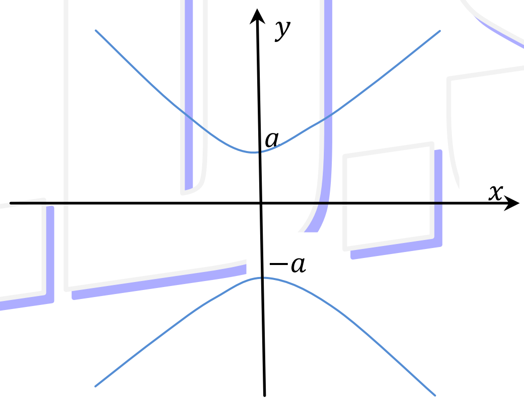
Repaso

Hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



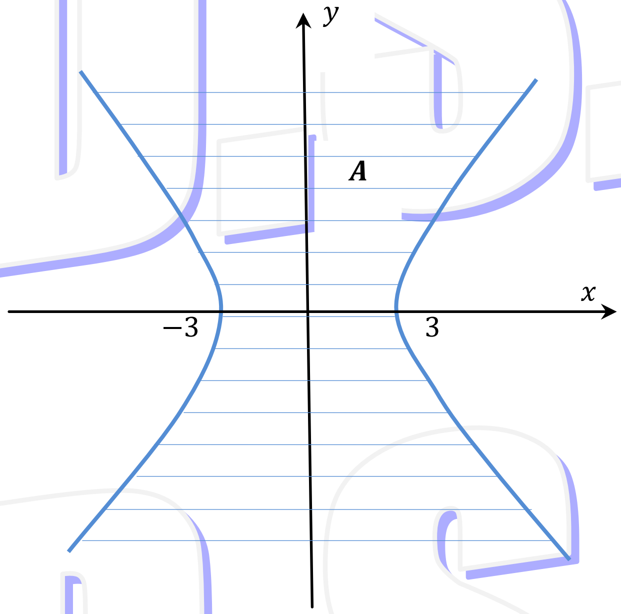
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



---

iii- $\boldsymbol{A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 \leq 36\}}$

$$4x^2 - 9y^2 = 36 \iff \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \; ; \; a = 3, b = 2$$



$Int(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 < 36\}$

$Ext(A) = \mathbb{R}^2 - A$

$Fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 = 36\}$

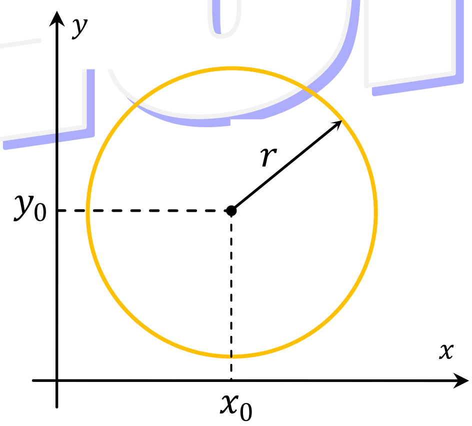
$\bar{A} = Int(A) \cup Fr(A) = A$

A es un conjunto cerrado.

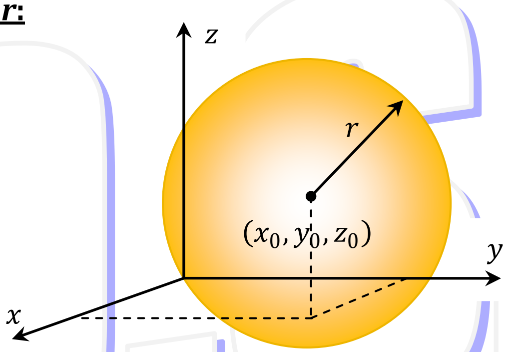
Repaso

Ecuación de una circunferencia con centro en (x_0, y_0) y radio r:

$$\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$



Ecuación de una esfera con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r:



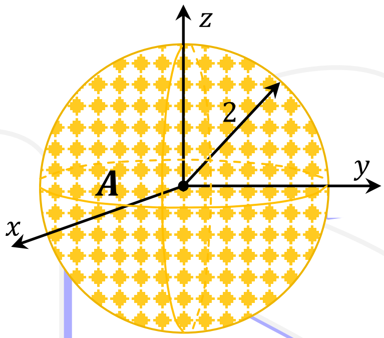
$$\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2}$$

---

v- $\boldsymbol{A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}}$

$x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$ Esfera centrada en el origen de radio $r = 2$

$Int(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$



$Ext(A) = \mathbb{R}^3 - A$

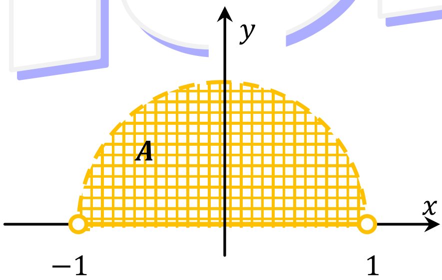
$Fr(A) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$

$\bar{A} = Int(A) \cup Fr(A) = A$

A es un conjunto cerrado.

---

vii- $\boldsymbol{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}}$



$Int(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$

$Ext(A) = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

$Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1, y = 0\}$

$\bar{A} = Int(A) \cup Fr(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$

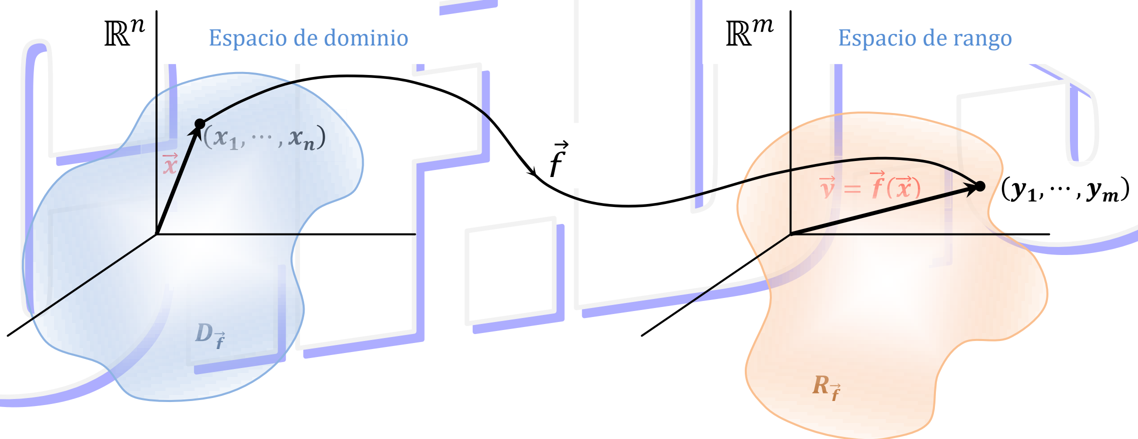
A es un conjunto ni abierto ni cerrado.

FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$

A continuación se consideran funciones

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad ; \quad n,m \in \mathbb{Z}^+$$

donde el **dominio** de $\vec{f}: D_{\vec{f}}$ es un sub-conjunto de $\mathbb{R}^n$ y el **rango** de $\vec{f}: R_{\vec{f}}$ un sub-conjunto de $\mathbb{R}^m$. O sea que a cada vector o punto $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n$, la función $\vec{f}$ le hace corresponder un **único** vector o punto $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y} = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m$:



A $\mathbb{R}^n$ se lo llama **espacio de dominio o de partida** de $\vec{f}$ y a $\mathbb{R}^m$ se lo llama **espacio de rango, de imagen o de llegada** de $\vec{f}$.

El $D_{\vec{f}}$ es el conjunto de todos los puntos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $\vec{f}$ está definida:

$$D_{\vec{f}} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \vec{f}(\vec{x})\}$$

El $R_{\vec{f}}$ es el conjunto de todos los puntos $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ que provienen a través de $\vec{f}$ de al menos un punto $\vec{x} \in D_{\vec{f}}$:

$$R_{\vec{f}} = \left\{\vec{y} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \exists\, \vec{x} \in D_{\vec{f}} : \vec{y} = \vec{f}(\vec{x})\right\}$$

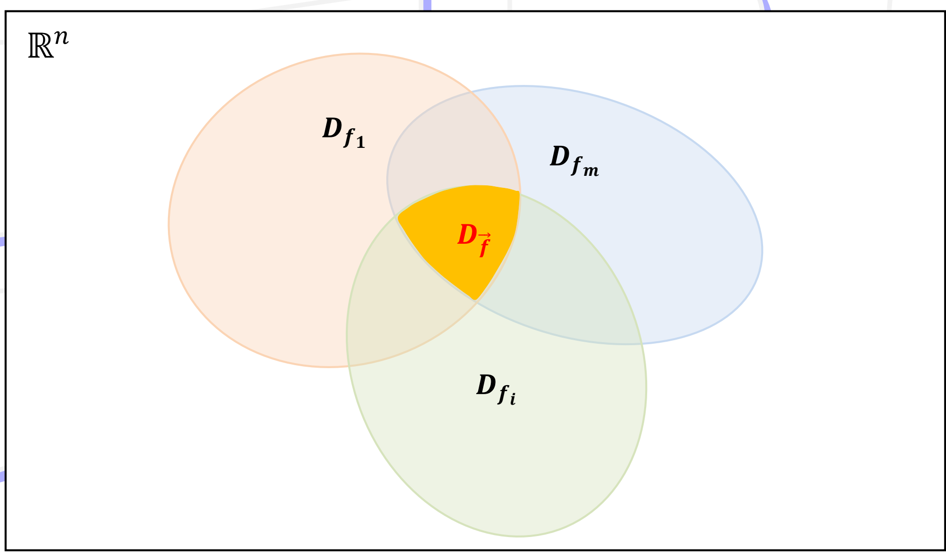
Toda función $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ define un conjunto de **funciones escalares**: $f_1, \cdots, f_m$ llamadas **funciones coordenadas** de $\vec{f}$.

Esto es, para cada $\vec{x} \in D_{\vec{f}}$, $f_i(\vec{x})$ es la i-ésima coordenada de $\vec{f}(\vec{x})$:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \underbrace{\left(f_1(\vec{x}), \cdots, f_i(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\right)}_{\textit{funciones coordenadas de } \vec{f}}$$

Cada función coordenada $f_i: D_{f_i} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$ depende de las n variables: $x_1, \cdots, x_n$ que se simbolizan en forma compacta utilizando la notación vectorial, como $\vec{x}$. El dominio de $\vec{f}$ es:

$$D_{\vec{f}} = \bigcap_i D_{f_i}$$



Dada una función

n^o *de variables*

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

n^o *de funciones coordenadas*

Si

- $m > 1$ a $\vec{f}$ se la llama **función vectorial** (es una función con valores vectoriales).
- $m = 1$ a f se la llama **función escalar** (es una función con valores escalares).

∗ Cuando $n > 1$ y $m > 1$, a la función vectorial $\vec{f}$ se la denomina **CAMPO VECTORIAL** (es una función vectorial de un vector).

∗ Cuando $n > 1$ y $m = 1$, a la función escalar f se la denomina **CAMPO ESCALAR** (es una función real de un vector).

∗ Cuando $n = 1$ y $m > 1$, a $\vec{f}$ se la denomina **función vectorial de una variable real**.

∗ Cuando $n = m = 1$, se tiene que $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ representa a una función real de una variable real, es decir, corresponde al tipo de funciones que se estudian en AMI.

GRÁFICA (GRAFO) DE FUNCIONES

Definición

Sea $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. El grafo de $\vec{f}$ es el conjunto de todos los pares ordenados $\left(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})\right) \in \mathbb{R}^{n+m}$ tales que $\vec{x} \in D_{\vec{f}}$:

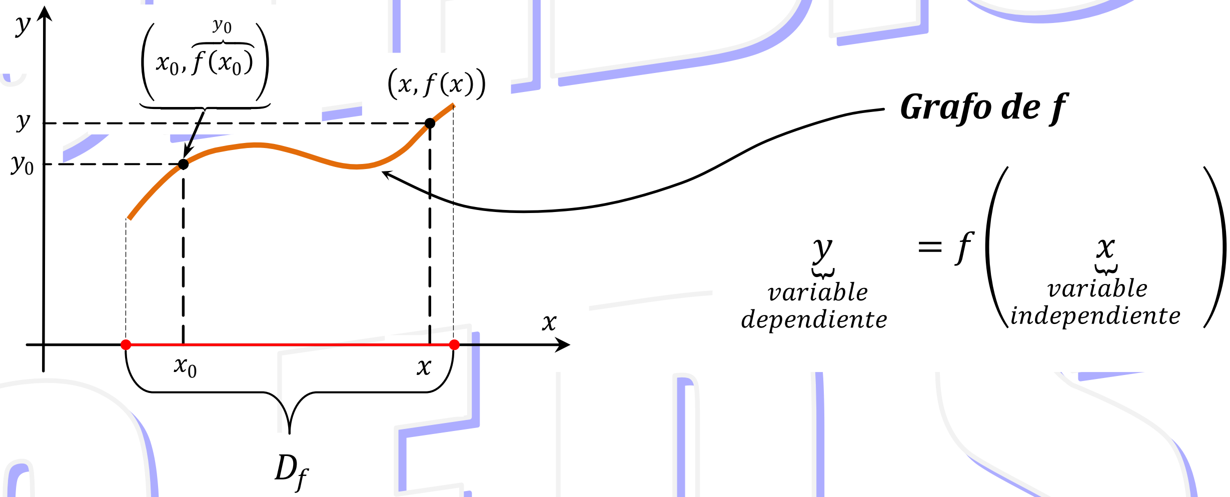
$$grafo\ de\ \vec{f} = \left\{\left(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})\right) \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; \vec{x} \in D_{\vec{f}}\right\}$$

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad\qquad \vec{f}(\vec{x}) = \left(f_1(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\right) \in \mathbb{R}^m$$

∗ <u>Si $n = m = 1$</u>, se tiene $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de una variable real (de las que se estudian en AMI).

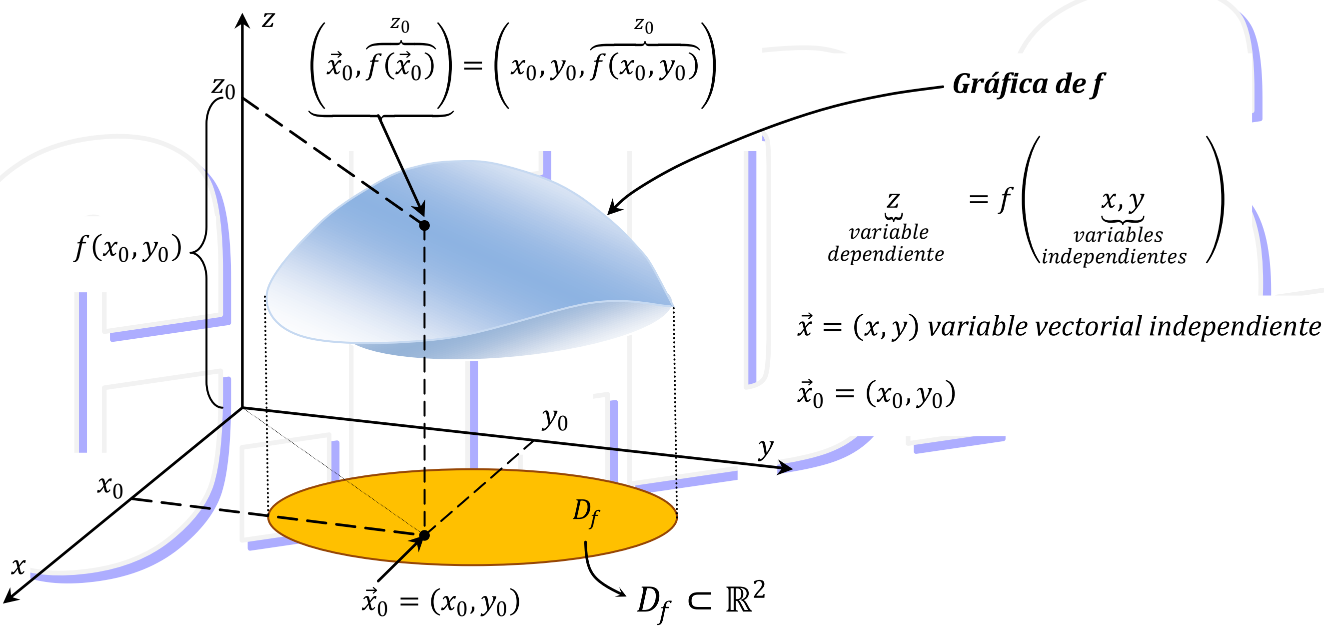
Y el grafo de f es una **curva** en $\mathbb{R}^2$.

$$grafo\ de\ f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f\}$$



∗ <u>Si $n = 2$ y $m = 1$</u>, se tiene $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un **campo escalar**. La gráfica (o grafo) de f es una **superficie** en $\mathbb{R}^3$.

$$grafo\ de\ f = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_f\}$$

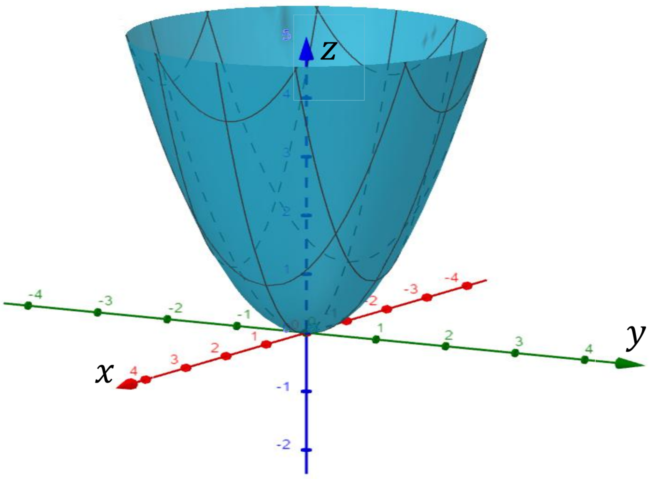


Por ejemplo, sea $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de 2 variables definida por la ecuación:

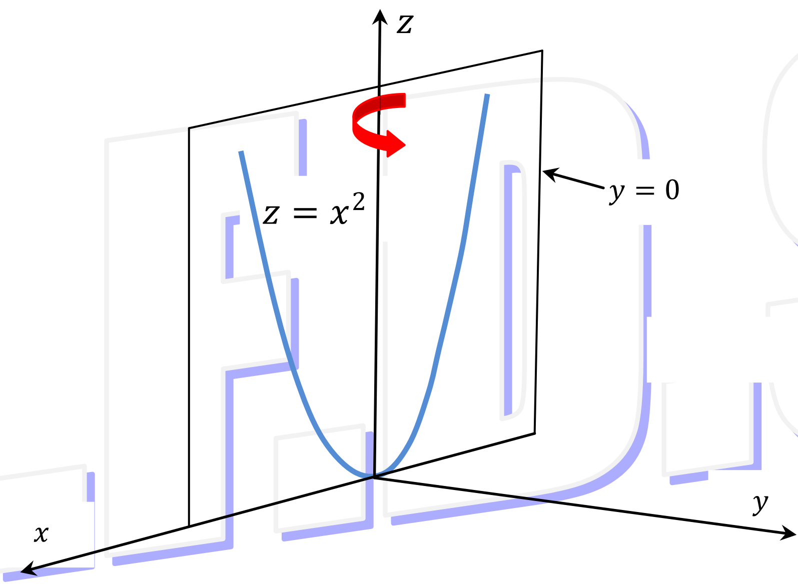
$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

Su dominio y rango respectivamente son: $D_f = \mathbb{R}^2$; $R_f = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$.

La gráfica de f obtenida por computadora es la siguiente superficie en $\mathbb{R}^3$:



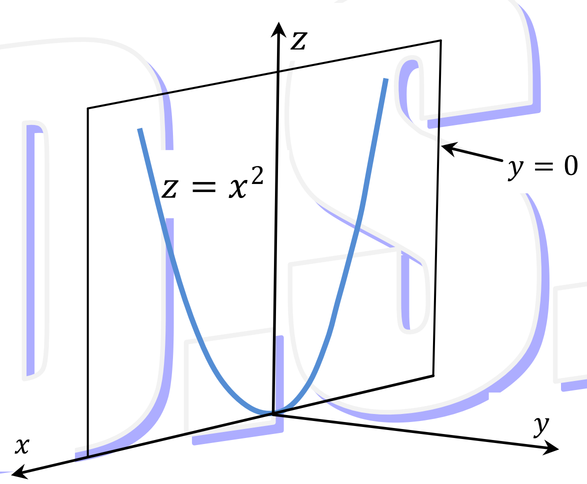
Se trata de un **paraboloide de revolución**, es decir que la superficie correspondiente a su gráfica puede obtenerse por ejemplo haciendo girar la parábola (sobre el plano $y = 0$) de ecuación $z = x^2$ alrededor del eje z:



Se puede obtener una gráfica aproximada del paraboloide del siguiente modo:

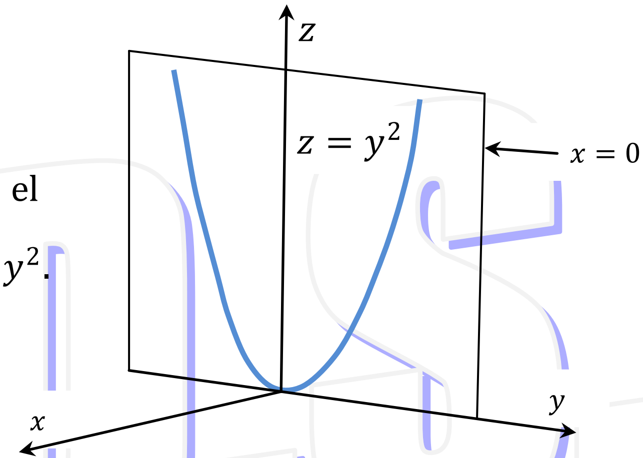
$*$ Haciendo $y = 0 \Rightarrow z = x^2 + \underbrace{0}_{y}{}^2 = x^2$.

O sea que la curva de intersección del grafo de f con el plano $y = 0$ es una parábola de ecuación $z = x^2$.



$*$ Haciendo $x = 0 \Rightarrow z = \underbrace{0}_{x}{}^2 + y^2 = y^2$

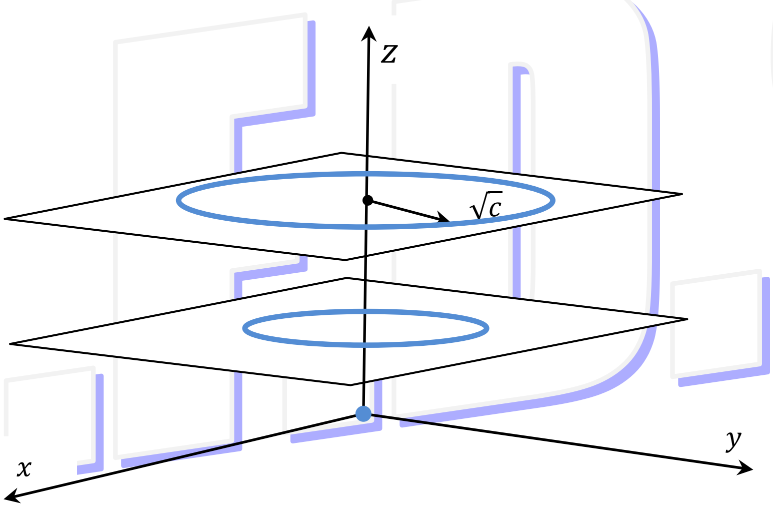
La curva de intersección del grafo de f con el plano $x = 0$ es una parábola de ecuación $z = y^2$.



$*$ Haciendo $z = c$ con $c \geq 0$ se tiene $z = c = x^2 + y^2$ o bien

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2 \ ; \ z = c$$

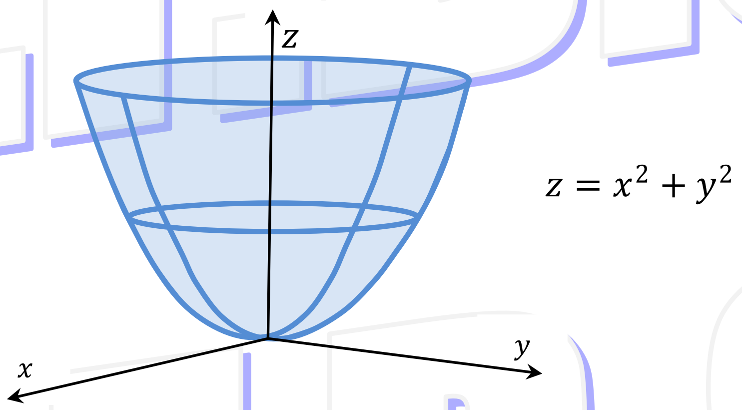
Por lo tanto las curvas de intersección del grafo de f con planos horizontales de ecuaciones $z = c$ son circunferencias de radios $\sqrt{c}$ crecientes a medida que el valor de c aumenta.



Si $z = c = 0$ se tiene la ecuación $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{0}\right)^2 = 0$, cuya única solución es $(x, y) = (0,0)$, es decir que la intersección del grafo de f con el plano $z = 0$ es el punto correspondiente al origen del sistema de coordenadas.

Si $z = c < 0$ la ecuación $x^2 + y^2 = c$ no tiene solución por lo que no existe gráfica de f para $z < 0$.

Luego la gráfica aproximada de f es el siguiente **paraboloide circular**:

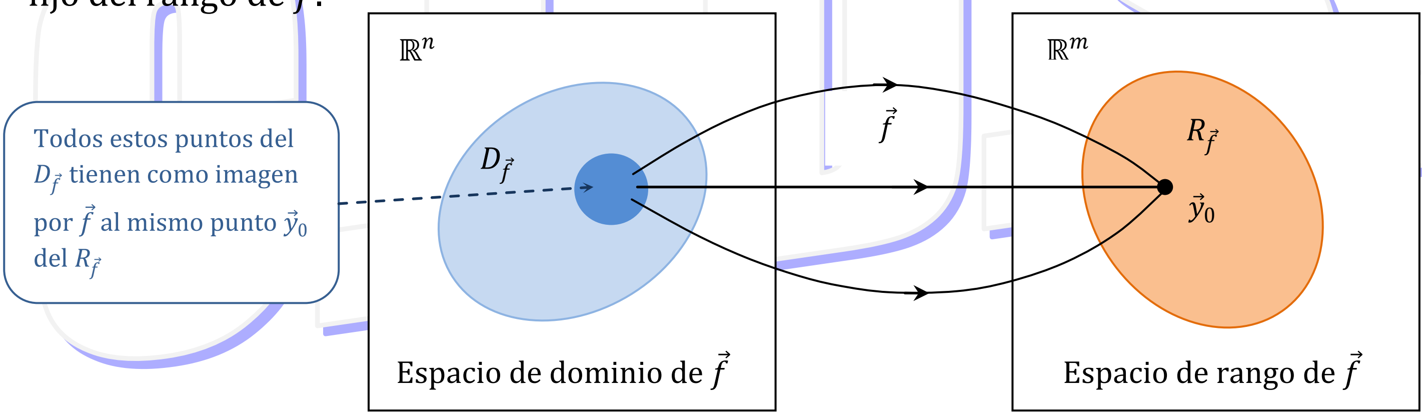


La visualización del grafo de una función $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sólo es posible si $n + m \leq 3$.

Si bien el grafo de la función es el que da la información más completa de la misma, cuando $n + m > 3$ el grafo de $\vec{f}$ no puede visualizarse, entonces con el fin de superar esta dificultad y poder obtener información del comportamiento de una función se introduce la idea de conjuntos de nivel.

CONJUNTOS DE NIVEL

Son subconjuntos del dominio de $\vec{f}$ que resultan de dar la contra-imagen de un punto fijo del rango de $\vec{f}$.



Definición

Sean

$$* \vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$* \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$$

El conjunto de nivel de valor $\vec{y}_0$ de $\vec{f}$ es: $\left\{ \vec{x} \in D_{\vec{f}} \,\middle|\, \vec{f}(\vec{x}) = \vec{y}_0 \right\} \subset \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, sea el campo vectorial $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por:

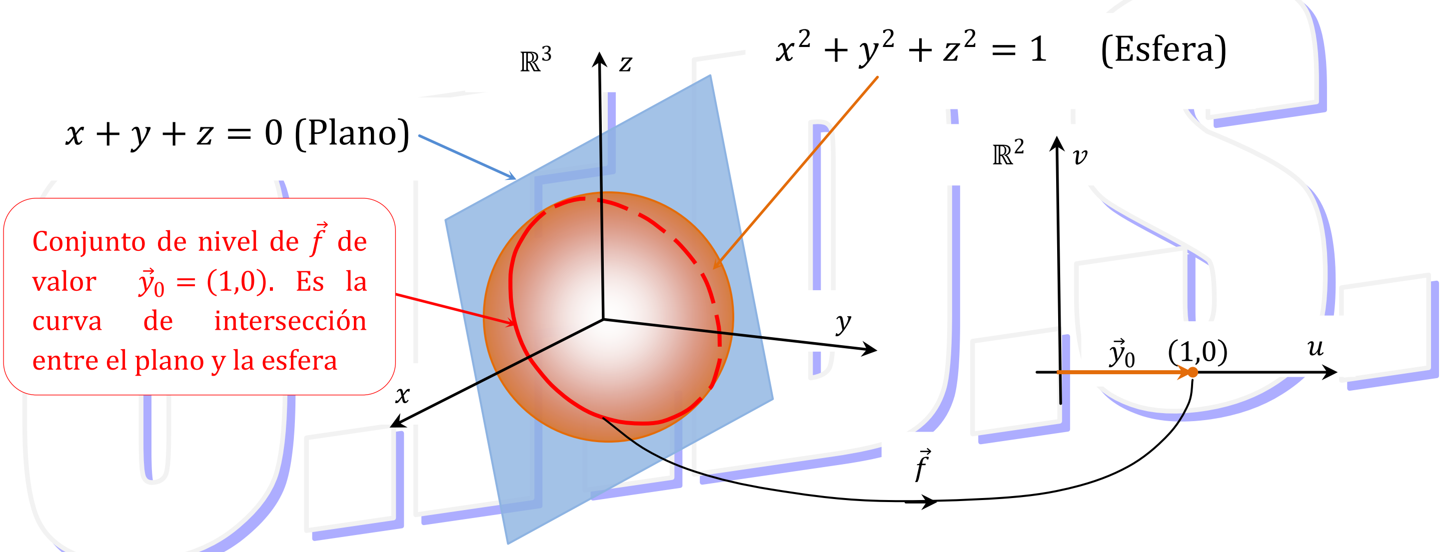
$$\vec{f}(x,y,z) = \left(\overbrace{x^2 + y^2 + z^2}^{f_1}, \overbrace{x + y + z}^{f_2} \right)$$

para el cual se quiere obtener el conjunto de nivel de valor $\vec{y}_0 = (u_0, v_0) = (1,0)$.

Entonces, el conjunto de nivel requerido es el conjunto de todas las ternas ordenadas $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \overbrace{1}^{u_0} \\ x + y + z = \underbrace{0}_{v_0} \end{cases}$$

Es decir: $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0 \}$.



EJERCICIOS

2. Determine el dominio de las siguientes funciones y haga un gráfico aproximado del mismo.

i- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2-4}}$

ii- $f(x,y) = ln(xy)$

iii- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$

iv- $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

v- $f(x,y) = ln(1+xy)$

vi- $f(x,y) = arccos(x^2+y^2)$

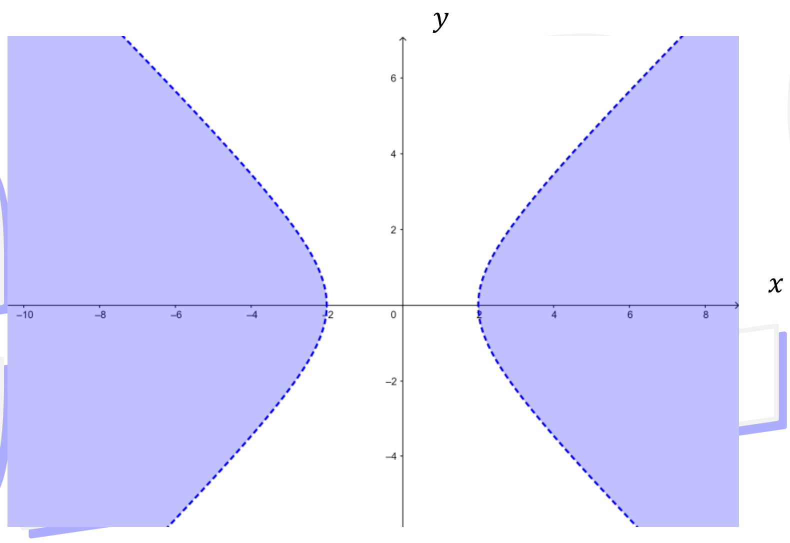
SOLUCIONES DE ALGUNOS EJERCICIOS

i- $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2-4}}}$

$$\boxed{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 - 4 > 0\}}$$

$$x^2 - y^2 - 4 > 0\,, \qquad x^2 - y^2 > 4 \quad , \quad \boxed{\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} > 1}$$

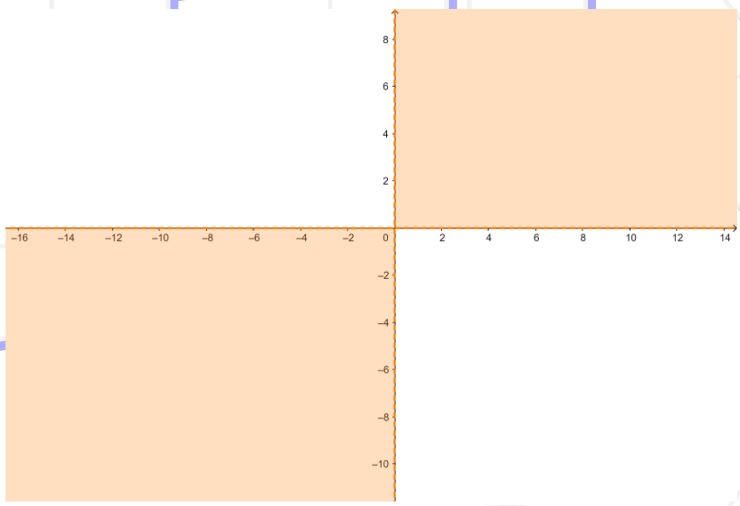
La gráfica del dominio de f es:



---

ii- $\boldsymbol{f(x, y) = ln(xy)}$

$$\boxed{D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}}$$

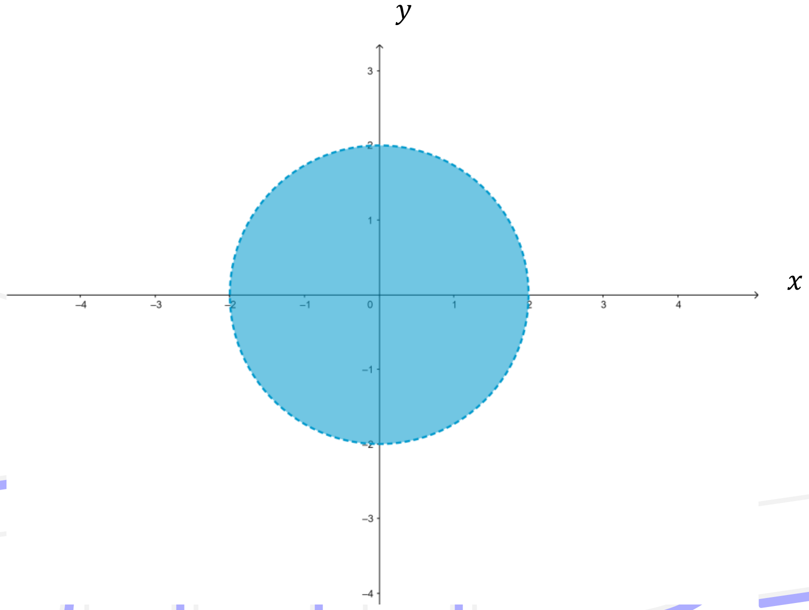


---

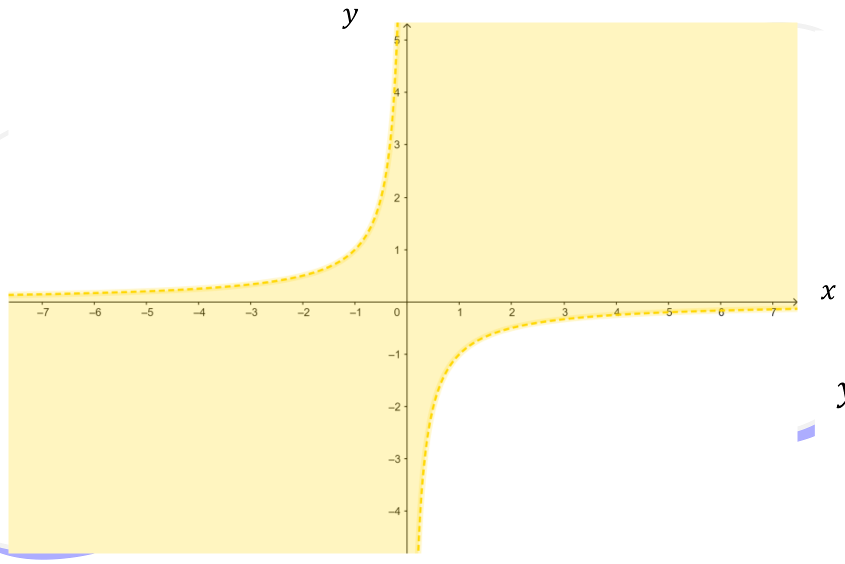
iii- $\boldsymbol{f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}}$

$$\boxed{D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}}$$

$x^2 + y^2 = 2^2$



v- $\boldsymbol{f(x,y) = ln(1 + xy)}$



$$\boxed{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 + xy > 0\}}$$

$$1 + xy > 0$$

$$xy > -1$$

$y = -\frac{1}{x}$ hipérbola equilátera

---

3. Grafique (aproximadamente) los conjuntos de nivel de las siguientes funciones para los valores indicados.

i- $f(x,y) = x + y$, $c \in \{-1,0,1\}$

ii- $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $c \in \{-4,0,12\}$

iii- $f(x,y) = e^{xy}$, $c \in \{0,1,4\}$

iv- $f(x,y) = y^2 - x$, $c \in \{-2,0,2\}$

v- $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, $c \in \{0,1\}$

vi- $f(x,y,z) = x + y + z$, $c \in \{-1,0,1\}$

vii- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $c \in \{0,1\}$

viii- $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $c \in \{4,9\}$

<u>**SOLUCIONES DE ALGUNOS EJERCICIOS**</u>

i- $\boldsymbol{f(x,y) = x + y}$, $\boldsymbol{c \in \{-1, 0, 1\}}$

$z = x + y$

$c = x + y$

- Si $c = -1$, $-1 = x + y \Rightarrow y = -1 - x$

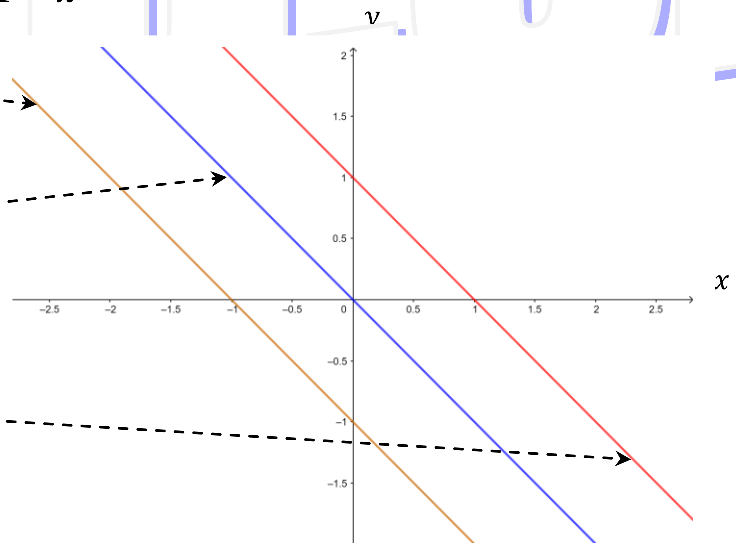
$\boxed{c = -1, \quad y = -1 - x}$

- Si $c = 0$, $0 = x + y \Rightarrow y = -x$

$\boxed{c = 0, \quad y = -x}$

- Si $c = 1$, $1 = x + y \Rightarrow y = 1 - x$

$\boxed{c = 1, \quad y = 1 - x}$



---

ii- $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2 - 4}$, $\boldsymbol{c \in \{-4, 0, 12\}}$

$z = x^2 + y^2 - 4$

$c = x^2 + y^2 - 4$

- Si $c = -4$, $-4 = x^2 + y^2 - 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$

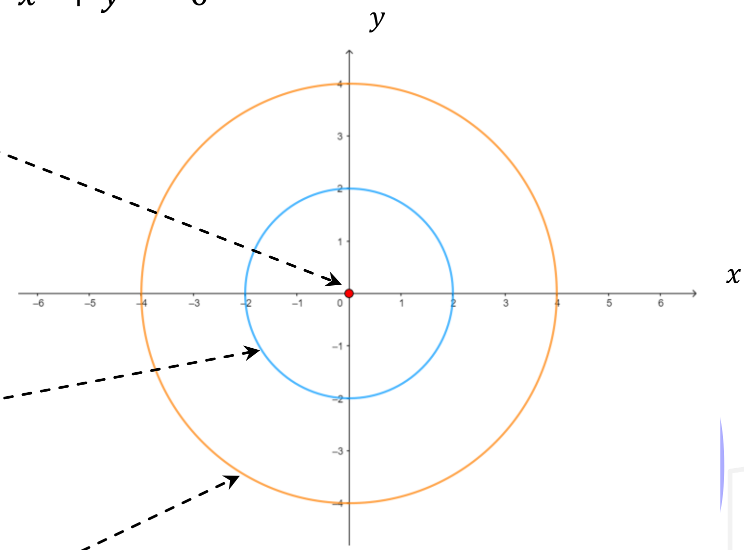
$\boxed{c = -4, \ x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \Rightarrow (0,0) \ \textit{única solución}}$

- Si $c = 0$, $0 = x^2 + y^2 - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

$\boxed{c = 0, \ x^2 + y^2 = 2^2}$

- Si $c = 12$, $12 = x^2 + y^2 - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 16$

$\boxed{c = 12, \ x^2 + y^2 = 4^2}$



v- $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}$, $\boldsymbol{c \in \{0,1\}}$

$$\underbrace{z}_{\downarrow\ \overbrace{c}} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

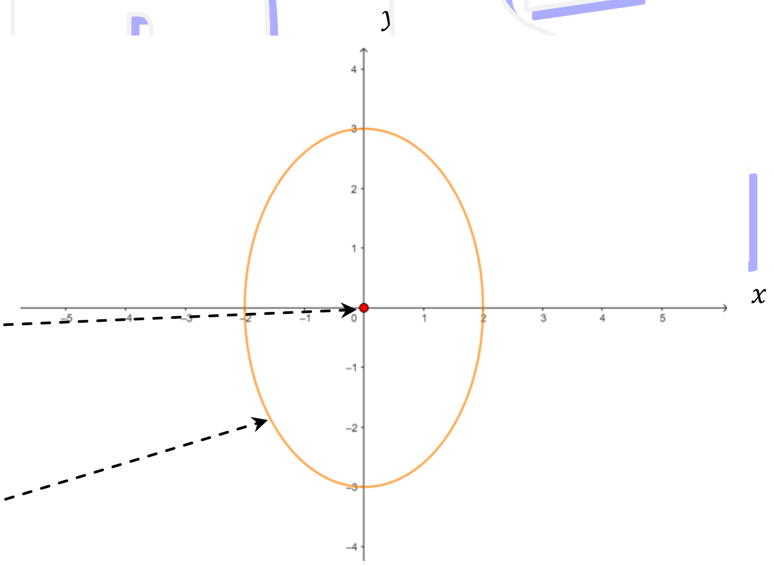
$$c = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

- Si $c = 0\,,\quad 0 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

$\boxed{c = 0,\ (0{,}0)}$

- Si $c = 1\,,\quad 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

$\boxed{c = 1\,,\quad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1}$



vii- $\boldsymbol{f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2}$, $\boldsymbol{c \in \{0,1\}}$

$$w = \underbrace{f(x,y,z)}$$

$$\underbrace{w}_{\downarrow\ \overbrace{c}} = \overbrace{x^2 + y^2 + z^2}$$

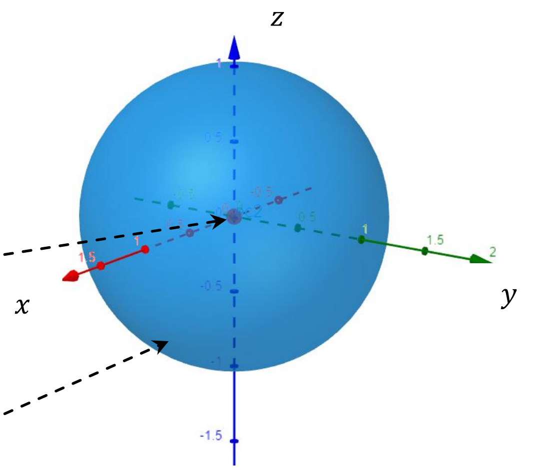
$$c = x^2 + y^2 + z^2$$

- Si $c = 0\,,\quad 0 = x^2 + y^2 + z^2$

$\boxed{c = 0,\ (0{,}0{,}0)}$

- Si $c = 1\,,\quad 1 = x^2 + y^2 + z^2$

$\boxed{c = 1\,,\quad \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 = 1^2}_{\substack{esfera\ \ de\ radio\ \ 1 \\ centrada\ \ en\ el\ origen}}}$



viii- $\boldsymbol{f(x,y,z) = x^2 + y^2} \qquad , \quad \boldsymbol{c \in \{4, 9\}}$

$$w = x^2 + y^2$$
$$\downarrow$$
$$c = x^2 + y^2$$

- Si $c = 4\,,\quad 4 = x^2 + y^2$

$$\boxed{c = 4\,, \quad \underbrace{x^2 + y^2 = 2^2}_{ec.\ cilindro\ \ de\ eje\ \ z\ \ de\ radio\ \ 2}}$$

- Si $c = 9\,,\quad 9 = x^2 + y^2$

$$\boxed{c = 9\,, \quad \underbrace{x^2 + y^2 = 3^2}_{ec.\ cilindro\ \ de\ eje\ \ z\ de\ radio\ \ 3}}$$