

## 8 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

### 8.1 PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA:

Muchos problemas de ingeniería se resuelven al solucionar una ecuación diferencial, podemos citar, la deformación de una viga, la interacción ente suelo y pilotes, o simplemente lo que ya han visto: la segunda ley de Newton:

$$F = ma$$

$$F = m \frac{\partial v}{\partial t}$$

Como ven se puede expresar como una ecuación diferencial.

Resolver estas ecuaciones consiste en integrar adecuadamente cada caso. Estudiaremos cuatro métodos de los varios que existen.

### 8.2. MÉTODO DE EULER:

Estos métodos intentan resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Una forma de obtener una solución, es expandiendo un polinomio de Taylor, en torno al punto  $X_i$ :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i) \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_i) \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!}$$

Si tomamos el elemento de primer orden, truncando la serie, quedaría:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + f''(x_i) \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}$$

Tomando:

$$h = x_{i+1} - x_i$$

y

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

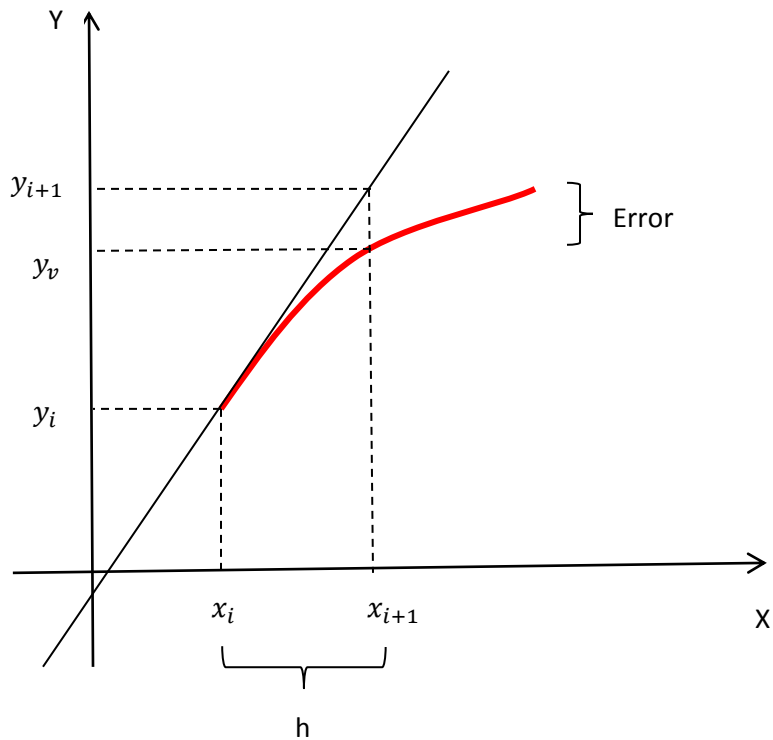
Y reemplazando queda:

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + E$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + E$$

$$y_{i+1} = y_i + \phi h + E$$

Donde  $\phi$  es la pendiente de la derivada de la función en el punto  $X_i$ .



El error está dado por el término de la derivada segunda:

$$E = f''(x_i) \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!}$$

$$E = \frac{f'(x_i, y_i)}{2} h^2 = (0)h^2$$

Veamos un ejemplo numérico, tomemos el primer ejercicio de la guía de trabajos prácticos:

$$\frac{dy}{dx} = e^{0,8x} - 0,50y \quad y(0) = 2 \quad h=0,1 \quad [0;4]$$

La fórmula de Euler es:

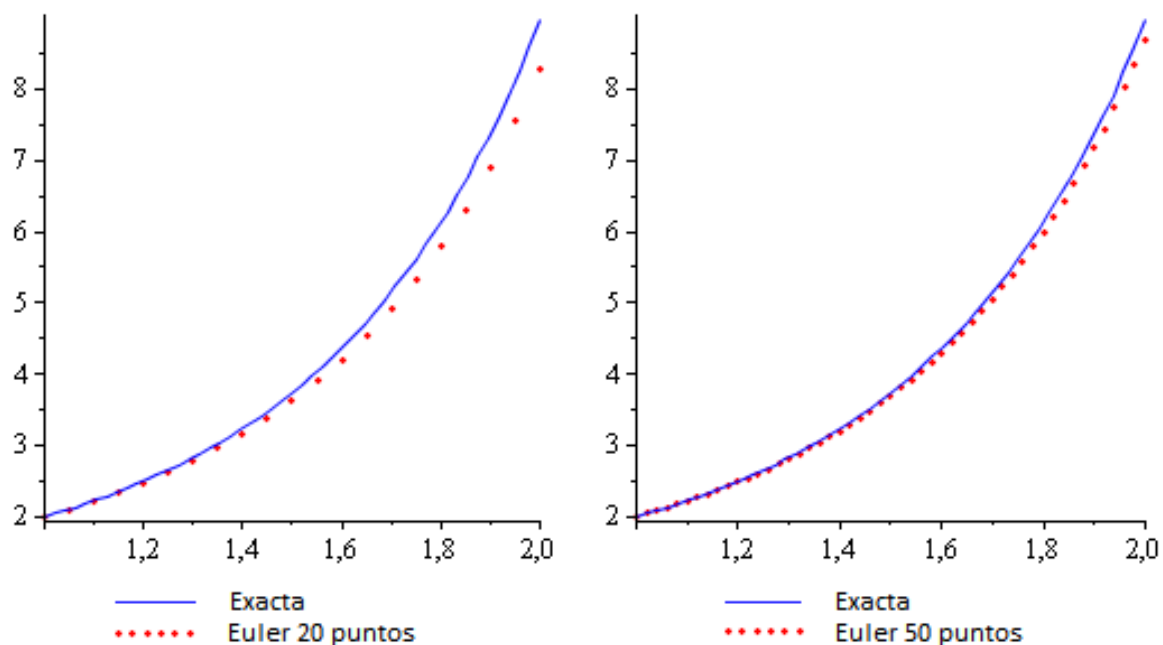
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$y_{i+1} = y_i + (e^{0,80x_i} - 0,50y_i)h$$

i	X <sub>i</sub>	Y <sub>i+1</sub>
0	0,00000	2,00000
1	0,10000	2,00000
2	0,20000	2,00833
3	0,30000	2,02526
4	0,40000	2,05113
5	0,50000	2,08628
6	0,60000	2,13115
7	0,70000	2,18620
8	0,80000	2,25196
9	0,90000	2,32901
10	1,00000	2,41800
11	1,10000	2,51965
12	1,20000	2,63476
13	1,30000	2,76419
14	1,40000	2,90891
15	1,50000	3,06995
16	1,60000	3,24846
17	1,70000	3,44570
18	1,80000	3,66304
19	1,90000	3,90195
20	2,00000	4,16408
21	2,10000	4,45118

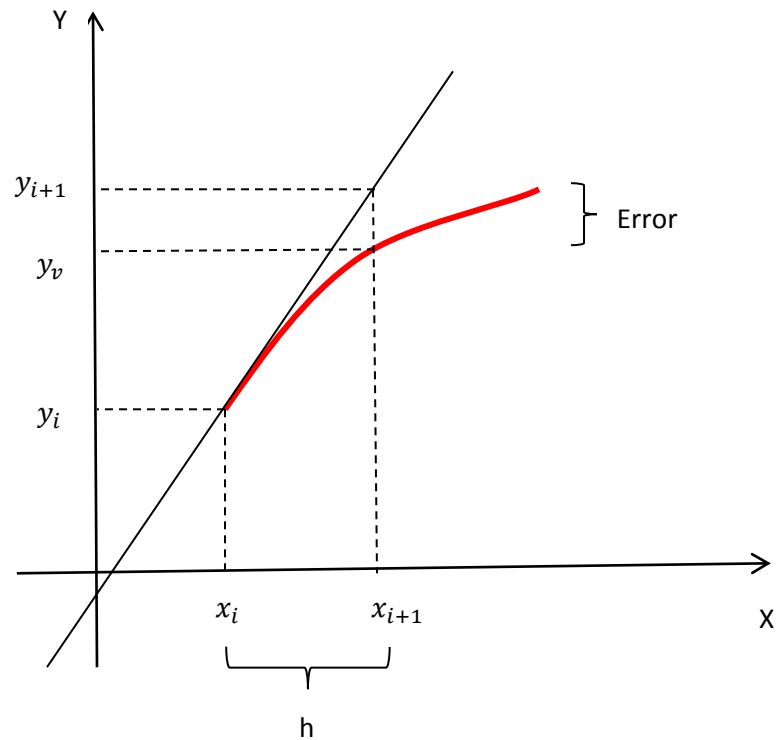
22	2,20000	4,76517
23	2,30000	5,10816
24	2,40000	5,48240
25	2,50000	5,89038
26	2,60000	6,33477
27	2,70000	6,81848
28	2,80000	7,34467
29	2,90000	7,91677
30	3,00000	8,53849
31	3,10000	9,21389
32	3,20000	9,94732
33	3,30000	10,74354
34	3,40000	11,60768
35	3,50000	12,54533
36	3,60000	13,56253
37	3,70000	14,66583
38	3,80000	15,86233
39	3,90000	17,15974
40	4,00000	18,56639

Observen que el resultado es un conjunto de pares ordenados que deberían pertenecer a la gráfica de la función solución, obviamente con un error. Este error, vimos que es función de  $h^2$ , por lo tanto, si queremos aproximar mejor con este método, deberemos achicar  $h$ . Este hecho se ilustra en el siguiente ejemplo:



### 8.3 METODO DE HEUN

Si analizan gráficamente la solución de Euler, es la derivada en el punto inicial del intervalo  $[x_i; x_{i+1}]$ :



Es factible, calcular la derivada al final de dicho intervalo y promediarla con la anterior, logrando una mejor aproximación a la solución real.

La pendiente al inicio del intervalo está dada por:

$$y' = f(x_i; y_i)$$

Que la usamos para extrapolar linealmente a través del método de Euler:

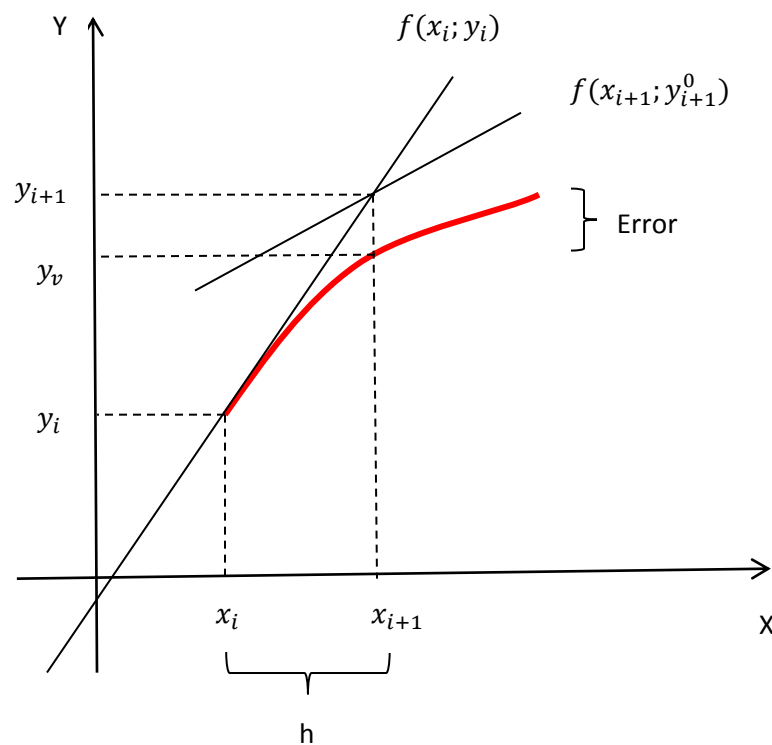
$$y_{i+1} = y_i + f(x_i; y_i)h$$

En el método de Euler esta sería el valor a adoptar, en este caso este sería un valor “predictorio” intermedio que me permitiría calcular el valor promedio final. Esta ecuación se la conoce como la “ecuación predictora” y la denotaremos con un superíndice “0”

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i; y_i)h$$

Esta ecuación nos permite calcular la pendiente al final del intervalo:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}; y_{i+1}^0)$$



Si combinamos estas dos pendientes, tendremos:

$$\bar{y} = \frac{f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; y_{i+1}^0)}{2}$$

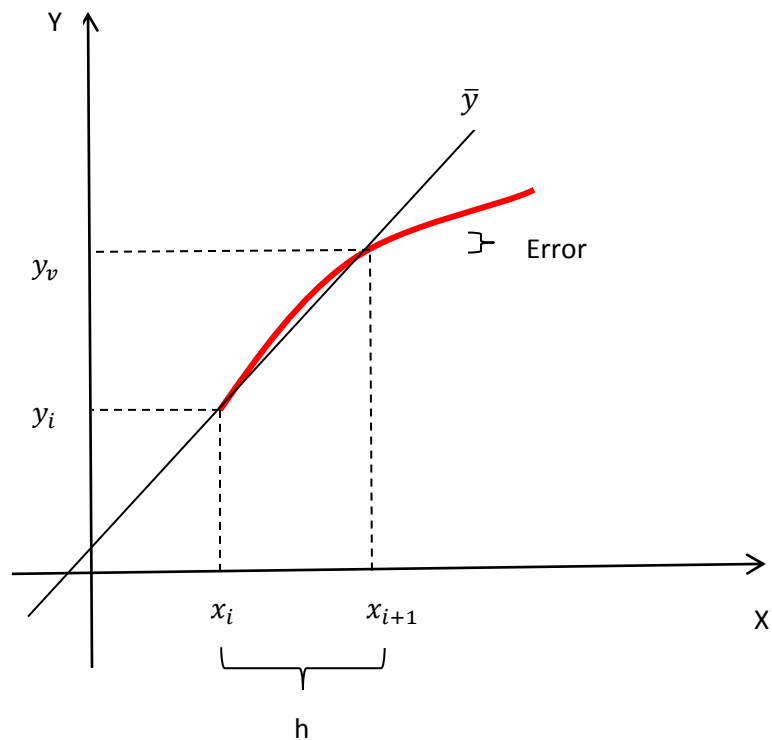
Reemplazando:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; y_{i+1}^0)}{2} h$$

Que se llama “ecuación correctora”.

El método de Heun es un método “predictor – corrector” de un paso. Posterior mente estudiaremos los métodos “predictores – correctores” de pasos múltiples.

Gráficamente esta pendiente promedio sería:



En resumen, tendríamos:

Predictor:

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i; y_i)h$$

Corrector:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i; y_i) + f(x_{i+1}; y_{i+1}^0)}{2} h$$

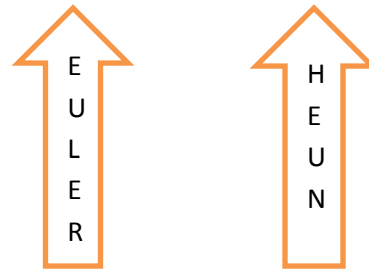
Realicemos como ejemplo el primer ejercicio de la guía de trabajos prácticos.

$$\frac{dy}{dx} = e^{0,8x} - 0,50y \quad y(0) = 2 \quad h=0,1 \quad [0;4]$$

i	$x_i$	$y_{i+1}^0$	$y_{i+1}$
0	0,0000	2,0000	2,00000
1	0,1000	2,0000	2,00416
2	0,2000	2,0083	2,01680
3	0,3000	2,0253	2,03819
4	0,4000	2,0511	2,06870
5	0,5000	2,0863	2,10872
6	0,6000	2,1312	2,15867
7	0,7000	2,1862	2,21908
8	0,8000	2,2520	2,29048
9	0,9000	2,3290	2,37350
10	1,0000	2,4180	2,46883
11	1,1000	2,5197	2,57721
12	1,2000	2,6348	2,69948
13	1,3000	2,7642	2,83655
14	1,4000	2,9089	2,98943
15	1,5000	3,0699	3,15920
16	1,6000	3,2485	3,34708
17	1,7000	3,4457	3,55437
18	1,8000	3,6630	3,78249
19	1,9000	3,9020	4,03302
20	2,0000	4,1641	4,30763
21	2,1000	4,4512	4,60818
22	2,2000	4,7652	4,93667
23	2,3000	5,1082	5,29528
24	2,4000	5,4824	5,68639
25	2,5000	5,8904	6,11257



26	2,6000	6,3348	6,57662
27	2,7000	6,8185	7,08157
28	2,8000	7,3447	7,63072
29	2,9000	7,9168	8,22763
30	3,0000	8,5385	8,87619
31	3,1000	9,2139	9,58060
32	3,2000	9,9473	10,34543
33	3,3000	10,7435	11,17561
34	3,4000	11,6077	12,07650
35	3,5000	12,5453	13,05393
36	3,6000	13,5625	14,11418
37	3,7000	14,6658	15,26408
38	3,8000	15,8623	16,51104
39	3,9000	17,1597	17,86307
40	4,0000	18,5664	19,32886



## 8.4 MÉTODOS DE RUNGE – KUTTA

Los métodos de Runge Kutta tienen un espíritu semejante al método de Heun. Usa promedio de pendientes para no realizar cálculos engorrosos de orden superior en el polinomio de Taylor. La expresión es semejante al de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

Donde a  $\phi(x_i, y_i, h)$  se le llama función incremento y es el promedio de las pendientes dentro del intervalo. Esta función fue escrita por los autores de la siguiente manera:

$$\phi = a_1K_1 + a_2K_2 + \dots + a_nK_n$$

Donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son constantes a determinar y los  $K_i$  son:

$$K_1 = f(x_i; y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + p_1 h; y_i + q_{11} K_1 h)$$

$$K_3 = f(x_i + p_2 h; y_i + q_{21} K_1 h + q_{22} K_2 h)$$

.

.

.

$$K_n = f(x_i + p_{n-1} h; y_i + q_{n-1,1} K_1 h + q_{n-1,2} K_2 h + \dots + q_{n-1,n-1} K_{n-1} h)$$

Las relaciones  $K$  son recurrentes, es decir que:

$$K_2 = f(K_1)$$

$$K_3 = f(K_1, K_2)$$

.

.

.

$$K_n = f(K_1, K_2, \dots, K_{n-1})$$

Esto hace que estos métodos sean de fácil programación. Solo debe determinarse el "orden" " $n$ " y en función de dicho orden se determinan los coeficientes  $p$  y  $q$ . Esta determinación es bastante engorrosa y escapa a los fines de este curso. Una demostración de dicha deducción puede encontrarse en los libros de la bibliografía.

#### 8.4.1 METODO DE RUNGE KUTTA DE SEGUNDO ORDEN:

Si tomamos  $n=2$ , nos quedaría:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 K_1 + a_2 K_2) h$$

Donde:

$$K_1 = f(x_i; y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + p_1 h; y_i + q_{11} K_1 h)$$

Los valores de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $p_1$  y  $q_{11}$ ; se determinan formando un sistema de ecuaciones. El problema es que se pueden plantear tres ecuaciones mediante Taylor, lo que es irresoluble, salvo que fijemos el valor de  $a_2$ . Como puedo dar infinitos valores a  $a_2$ , es que tendremos infinitos métodos de Runge Kutta de segundo orden. El más usado es el siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + \left( \frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \right) h$$

Con:

$$K_1 = f(x_i; y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + h; y_i + h K_1)$$

En este caso  $K_1$  es la pendiente en el inicio del intervalo y  $K_2$  es la del final del intervalo; es decir que este método de Runge Kutta es equivalente al método de Heun con una sola iteración de corrector.

Veamos cómo se resuelve el primer ejercicio de la guía con este método:

$$\frac{dy}{dx} = e^{0,8x} - 0,50y \quad y(0) = 2 \quad h=0,1 \quad [0;4]$$

$x_i$	$y_i$	$K_1$	$K_2$
0	2	0	0,08328707
0,1	2,00416435	0,08120489	0,16736845

0,2	2,01659302	0,16521436	0,25469192
0,3	2,03758833	0,25245498	0,34571085
0,4	2,06749663	0,34337945	0,44090741
0,5	2,10671097	0,43846921	0,54079546
0,6	2,1556742	0,5382373	0,64592353
0,7	2,21488224	0,64323138	0,75687819
0,8	2,28488772	0,75403702	0,8742875
0,9	2,36630395	0,87128124	0,99882489
1	2,45980926	0,9956363	1,13121326
1,1	2,56615173	1,12782384	1,27222941
1,2	2,6861544	1,26861928	1,42270885
1,3	2,8207208	1,41885661	1,58355097
1,4	2,97084118	1,57943361	1,75572465
1,5	3,13759909	1,75131738	1,94027431
1,6	3,32217868	1,93555039	2,13832644
1,7	3,52587252	2,13325704	2,3510967
1,8	3,75009021	2,34565071	2,57989756
1,9	3,99636762	2,57404138	2,82614654
2	4,26637702	2,81984392	3,09137527
2,1	4,56193798	3,08458698	3,37723906
2,2	4,88502928	3,36992276	3,68552748
2,3	5,23780179	3,67763737	4,01817571
2,4	5,62259244	4,00966225	4,37727676
2,5	6,04193939	4,3680864	4,7650949
2,6	6,49859846	4,75516968	5,18407994

2,7	6,99556094	5,17335719	5,63688296
2,8	7,53607295	5,62529481	6,12637309
2,9	8,12365634	6,11384613	6,6556559
3	8,76213145	6,64211066	7,22809316
3,1	9,45564164	7,2134436	7,84732432
3,2	10,20868	7,8314773	8,51728973
3,3	11,0261184	8,50014442	9,24225583
3,4	11,9132384	9,22370305	10,0268424
3,5	12,8757657	10,0067639	10,8760521
3,6	13,9199065	10,8543199	11,7953025
3,7	15,0523876	11,771778	12,7904605
3,8	16,2804995	12,7649935	13,8678802
3,9	17,6121432	13,840308	15,0344432
4	19,0558808	15,0045898	16,2976028

La solución analítica de esta ecuación diferencial está dada por:

$$y = \frac{10}{13} e^{0,80x} + \frac{16}{13}$$

La que podemos adoptar como solución verdadera. En el siguiente cuadro se comparan las distintas soluciones encontradas:

i	$x_i$	<i>ANALÍTICA</i>	EULER	HEUN	RK II
0	0,0000	1,999970	2,0000	2,00000	2,00000000
1	0,1000	2,064034	2,0000	2,00416	2,00416435
2	0,2000	2,133435	2,0083	2,01680	2,01659302
3	0,3000	2,208615	2,0253	2,03819	2,03758833
4	0,4000	2,290057	2,0511	2,06870	2,06749663
5	0,5000	2,378282	2,0863	2,10872	2,10671097
6	0,6000	2,473854	2,1312	2,15867	2,1556742
7	0,7000	2,577387	2,1862	2,21908	2,21488224

8	0,8000	2,689543	2,2520	2,29048	2,28488772
9	0,9000	2,811040	2,3290	2,37350	2,36630395
10	1,0000	2,942656	2,4180	2,46883	2,45980926
11	1,1000	3,085234	2,5197	2,57721	2,56615173
12	1,2000	3,239687	2,6348	2,69948	2,6861544
13	1,3000	3,407004	2,7642	2,83655	2,8207208
14	1,4000	3,588256	2,9089	2,98943	2,97084118
15	1,5000	3,784604	3,0699	3,15920	3,13759909
16	1,6000	3,997305	3,2485	3,34708	3,32217868
17	1,7000	4,227722	3,4457	3,55437	3,52587252
18	1,8000	4,477329	3,6630	3,78249	3,75009021
19	1,9000	4,747726	3,9020	4,03302	3,99636762
20	2,0000	5,040643	4,1641	4,30763	4,26637702
21	2,1000	5,357956	4,4512	4,60818	4,56193798
22	2,2000	5,701697	4,7652	4,93667	4,88502928
23	2,3000	6,074067	5,1082	5,29528	5,23780179
24	2,4000	6,477451	5,4824	5,68639	5,62259244
25	2,5000	6,914432	5,8904	6,11257	6,04193939
26	2,6000	7,387807	6,3348	6,57662	6,49859846
27	2,7000	7,900609	6,8185	7,08157	6,99556094
28	2,8000	8,456120	7,3447	7,63072	7,53607295
29	2,9000	9,057899	7,9168	8,22763	8,12365634
30	3,0000	9,709797	8,5385	8,87619	8,76213145
31	3,1000	10,415991	9,2139	9,58060	9,45564164
32	3,2000	11,181001	9,9473	10,34543	10,20868
33	3,3000	12,009726	10,7435	11,17561	11,0261184
34	3,4000	12,907474	11,6077	12,07650	11,9132384
35	3,5000	13,879992	12,5453	13,05393	12,8757657
36	3,6000	14,933509	13,5625	14,11418	13,9199065
37	3,7000	16,074770	14,6658	15,26408	15,0523876
38	3,8000	17,311083	15,8623	16,51104	16,2804995
39	3,9000	18,650365	17,1597	17,86307	17,6121432
40	4,0000	20,101192	18,5664	19,32886	19,0558808

#### 8.4.2. MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE TERCER ORDEN:

De manera análoga a la anterior y tomando  $n=3$ , se deduce el método de Runge Kutta de tercer orden:

$$y_{i+1} = y_i + \left[ \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \right] h$$

Donde:

$$K_1 = f(x_i; y_i)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{2}hK_1\right)$$

$$K_3 = f(x_i + h; y_i - hK_1 + 2hK_2)$$

#### 8.4.3. MÉTODO DE RUNGE KUTTA DE CUARTO ORDEN:

De manera análoga a la anterior y tomando  $n=4$ , se deduce el método de Runge Kutta de tercer orden:

$$y_{i+1} = y_i + \left[ \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \right] h$$

Donde:

$$K_1 = f(x_i; y_i)$$

$$K_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{2}hK_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h; y_i + \frac{1}{2}hK_2\right)$$

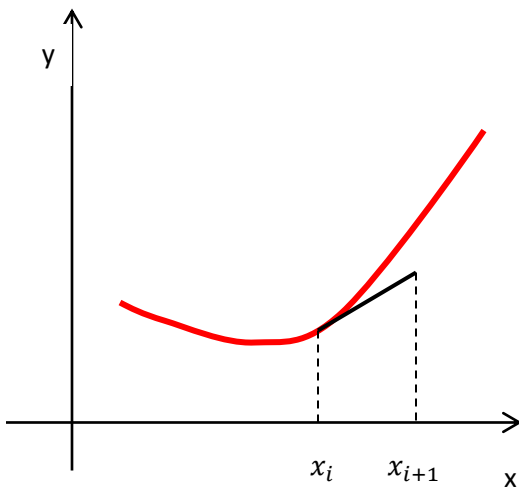
$$K_4 = f(x_i + h; y_i + hK_3)$$

De esta manera podemos obtener métodos del orden que necesitemos y obtendremos infinitas expresiones de cada uno de ellos. En todos los casos el error está en el orden  $(O)h^n$ .

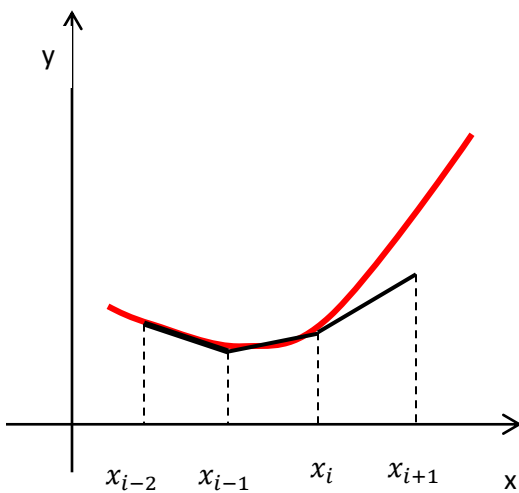
#### 8.5 METODOS PREDICTORES CORRECTORES MULTIPASOS.

Vimos un método predictor corrector de un paso como el método de Heun, ahora nos abocaremos al estudio de los predictores correctores múltiple pasos.

En los métodos de un paso, usamos la información de un punto  $x_i$  para predecir un valor de la variable dependiente  $y_{i+1}$ , en un punto posterior  $x_{i+1}$ . En los métodos múltiple pasos o de pasos múltiples, usamos la información de más puntos para analizar la tendencia que va tomando la solución:



Métodos de un paso



Métodos de pasos múltiples



### 8.5.1 MÉTODO DE ADAMS – BASHFORTH

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k f_{i-k} + O(h^{n+1})$$

Donde los  $\beta$  y los errores de truncamiento están en función del orden :

orden	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	Error
1	1						$\frac{1}{2}h^2 f'(\varepsilon)$
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$					$\frac{5}{12}h^3 f''(\varepsilon)$
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$				$\frac{9}{24}h^4 f'''(\varepsilon)$
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$			$\frac{251}{720}h^5 f^{IV}(\varepsilon)$
5	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{251}{720}$		$\frac{475}{1440}h^6 f^V(\varepsilon)$
6	$\frac{4227}{720}$	$-\frac{7923}{720}$	$\frac{9982}{720}$	$-\frac{7298}{720}$	$\frac{2877}{720}$	$-\frac{475}{720}$	$\frac{19087}{60480}h^7 f^{VI}(\varepsilon)$

### 8.5.2. MÉTODO DE ADAMS - MOULTON

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k f_{i+1-k} + O(h^{n+1})$$

Donde los  $\beta$  y los errores de truncamiento están en función del orden

orden	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	Error
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					$-\frac{1}{12}h^3f''(\varepsilon)$
3	$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$				$-\frac{1}{24}h^4f'''(\varepsilon)$
4	$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$			$-\frac{19}{720}h^5f^{IV}(\varepsilon)$
5	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$		$-\frac{27}{1440}h^6f^V(\varepsilon)$
6	$\frac{475}{1440}$	$\frac{1427}{1440}$	$-\frac{798}{1440}$	$\frac{482}{1440}$	$-\frac{173}{1440}$	$\frac{27}{1440}$	$-\frac{863}{60480}h^7f^{VI}(\varepsilon)$