

# Sucesiones, Series e Inducción

## Matemática



Por

Santino Schiavoni Fraccaroli

1° Año

Universidad Católica de Córdoba

Facultad de Ingeniería

Lógica y Matemática Discreta

Córdoba, 23 de mayo de 2023

# Sucesiones, Series e Inducción Matemática

Presentado por: Santino  
Schiavoni F.

1° Año

Profesor: Juan José Vulcano

Universidad Católica de Córdoba

Facultad de Ingeniería

Lógica y Matemática Discreta

Córdoba, 23 de mayo de 2023

## INDICE

Introducción .....	4
Bibliografía .....	5
Sucesiones .....	5
Ejemplo .....	5
Series y Sumatorias.....	6
Principio de Inducción Matemática .....	6
Ejemplo .....	6
Demostración.....	6
Conclusión.....	7
Teorema del Binomio .....	8
Información brindada por Chat-GPT.....	11
Sucesiones .....	11
Sucesión finita .....	11
Ejemplo .....	11
Sucesión infinita .....	11
Ejemplo .....	11
Series y Sumatorias.....	12
Límite inferior de la suma .....	12
Límite superior de la suma .....	13
Índice de sumatoria.....	13
Principio de inducción matemática .....	13
Teorema 1 - Afirmación Base .....	13
Teorema 2 - Paso Inductivo.....	14
Teorema 3 - Principio de Inducción Matemática .....	14
Teorema 4 - Paso de Inducción Fuerte .....	15
Teorema del Binomio .....	15
Teorema del Binomio con notación sigma.....	17
Demostración por inducción .....	18
Permutación.....	19
Combinación .....	19
En Conclusión .....	21
Bibliografía .....	22

## Introducción

En el presente informe se pretende hablar sobre las Sucesiones, Series y la Inducción Matemática, comparando una bibliografía brindada por la facultad (Pérez Aguilar. Una Introducción a las matemáticas discretas y teoría de grafos) y respuestas generadas por una Inteligencia Artificial.

En este caso se decidió utilizar Chat-GPT en su versión 3.0, de uso libre y gratuito para cualquier persona.

Espero que este trabajo ayude a comprender los beneficios y las falencias que poseen las Inteligencias Artificiales y que no deben ser nuestra principal fuente de información, pero si, son una muy buena herramienta de trabajo.

## Bibliografía

### Sucesiones

Definamos el concepto de **Función de sucesión**:

Una **Función de Sucesión Finita** es una función cuyo dominio es el conjunto de los primeros  $n$  enteros positivos, es decir,  $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ .

Una **Función de Sucesión Infinita** es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales  $\mathbb{N}$ , es decir, el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

Los números en el condominio de una función de sucesión se denominan **Elementos**. Los elementos de una función de secuencia, cuando se enumeran en orden, forman una Sucesión. Si el dominio de la función de secuencia es finito, entonces la secuencia es de hecho una secuencia finita. Si el dominio de la función de secuencia es infinito entonces tenemos una secuencia infinita.

#### Ejemplo

Sea la función de sucesión infinita  $f(n) = \frac{2n-1}{n^3} \cdot n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Tales elementos dan lugar a la sucesión infinita, en donde algunos de sus pares ordenados son:

$$(1, 1), \left(2, \frac{3}{8}\right), \left(3, \frac{5}{27}\right), \left(4, \frac{4}{64}\right) \dots$$

Ahora se introducirá la siguiente notación:

- $a_1$  denotará al primer elemento de una sucesión.
- $a_2$  denotará al segundo elemento de una sucesión.
- $\vdots$
- $a_n = f(n)$  denotará al  $n$ -ésimo elemento de una sucesión. A tal elemento se le denominará el **Elemento General de la Sucesión**

## Series y Sumatorias

La notación Sigma está definida por la ecuación:

$$\sum_{i=m}^n F(i) = F(m) + F(m+1) + F(m+2) + \cdots + F(n)$$

Donde  $m, n \in \mathbb{Z}$  y  $m \leq n$ . El segundo miembro de la fórmula consiste en una suma formada por  $n-m+1$  términos:

- El primer término se obtiene reemplazando  $i$  por  $m$  en  $F(i)$ .
- El segundo término se obtiene sustituyendo  $i$  por  $m+1$  en  $F(i)$ .
- El tercer término se obtiene reemplazando  $i$  por  $m+2$  en  $F(i)$ .
- $\vdots$
- El último término se obtiene reemplazando  $i$  por  $n$  en  $F(i)$ .

El número  $m$  se denomina **Límite Inferior de la Suma** y  $n$  se denomina **Límite Superior de la Suma**. El símbolo  $i$  se denomina **Índice de Sumatoria**.

Si  $m > n$ , entonces se dice que la suma es "cero".

## Principio de Inducción Matemática

Supongamos que  $P(n)$  es una proposición referente al entero positivo  $n$ . Además, supongamos que se cumplen las dos condiciones siguientes:

- a)  $P(c)$  es verdadera. Es decir, la proposición es válida para  $n = c$ , donde  $c$  es una constante entera. De hecho,  $P(c)$  es llamada Caso Base.
- b) Sea  $k$  un entero arbitrario. Si  $P(k)$  es verdadera, entonces  $P(k+1)$  también es verdadera. Es decir, siempre que la proposición sea válida para  $n = k$ , también es válida para  $n = k+1$ .

Por lo tanto, la declaración  $P(n)$  es válida para todos los valores enteros de  $n \geq c$ .

Demostraremos un teorema aplicando el Principio de Inducción Matemática:

### Ejemplo

$$\text{Teorema 4.1: } \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

### Demostración

1. Verificación de la validez del caso base con  $n=1$ .

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$$

En consecuencia la fórmula efectivamente es válida cuando  $n=1$ .

2. Suponemos que la formula es valida para  $n=k$ , donde  $k$  es cualquier entero positivo:

$$\sum_{i=1}^k \frac{k(k+1)}{2} \} \text{Hipotesis de inducción}$$

En base a la suposición anterior, se desea verificar que la fórmula es válida también para  $n = k+1$ :

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)([k+1] + 1)}{2}$$

3. Desarrollamos la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1)$$

$$= \sum_{i=1}^k i + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)([k+1] + 1)}{2}$$

### Conclusión

- Se ha probado que la formula es válida para  $n=1$ .
- Cuando la fórmula es válida para  $n=k$ , también lo es para  $n=k+1$
- Por lo tanto, y por el Principio de Inducción Matemática, la fórmula es válida  $\forall n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

## Teorema del Binomio

Si  $n \in \mathbb{Z}^+$  la **Función Factorial**, denotada por  $n!$ , está definida por:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 2.1$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$0! = 1$$

Si  $n, r \in \mathbb{Z}^+$  tales que  $r \leq n$ , entonces el **Coeficiente Binomial**  $\binom{n}{r}$  está definido por:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!}$$

Además, se establece que:

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ y } \binom{n}{n} = 1$$

Por ejemplo:

$$\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$$

La expansión de la potencia de un binomio es un polinomio que se denomina **Desarrollo Binomial**.

Ejemplos:

- $(a+b)^0 = 1$
- $(a+b)^1 = a+b$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Los coeficientes de los términos binomiales  $(a+b)^n$  forman una estructura que se conoce como el **Triángulo de Pascal**:

	Coeficientes del desarrollo binomial						
$(a+b)^0$				1			
$(a+b)^1$				1	1		
$(a+b)^2$			1	2	1		
$(a+b)^3$			1	3	3	1	
$(a+b)^4$		1	4	6	4	1	
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1	
$(a+b)^6$	1	6	15	20	15	6	1



## Coeficientes del desarrollo binomial

$$\begin{array}{ccccccc}
 (a+b)^0 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 (a+b)^1 & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
 (a+b)^2 & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\
 (a+b)^3 & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
 (a+b)^4 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\
 (a+b)^5 & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\
 (a+b)^6 & \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
 \end{array}$$

Propiedades del desarrollo binomial  $(a + b)^n$ :

- El desarrollo se forma por  $n+1$  términos.
- La suma de los exponentes de  $a$  y  $b$  en cualquier término es  $n$ .
- El exponente de  $a$  disminuye en 1 de un término al siguiente.
- El exponente de  $b$  aumenta en 1 de un término al siguiente:
- El primer término en el desarrollo es:

$$a^n = \binom{n}{0} a^n b^0$$

- El segundo término es:

$$na^{n-1}b = \binom{n}{1} a^{n-1}b^1$$

- El término que contiene a  $b^r$  será:

$$\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

- El último término será:

$$b^n = \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Concluiremos este capítulo estableciendo un par de conceptos. Sea  $C$  un conjunto. Se dice que una **Permutación** de  $C$  es un ordenamiento particular de los elementos en  $C$ . Por ejemplo, sea  $C = \{a, b, c, d, e\}$ . Entonces una permutación de  $C$  sería  $\{b, d, a, c, e\}$ . Otra posible permutación viene dada por  $\{e, d, c, b, a\}$ . Un punto importante es que el número de permutaciones posibles para un conjunto

formado por  $n$  elementos está dado por  $n!$ . En nuestro ejemplo anterior tenemos 5 elementos, así que tendremos un total de  $5! = 120$  permutaciones posibles del conjunto  $C = \{a, b, c, d, e\}$ .

Sea  $C$  un conjunto. Se dice que una **Combinación** de  $C$  es un subconjunto de  $C$  formado por  $r$  elementos diferentes. Volviendo a nuestro ejemplo  $C = \{a, b, c, d, e\}$  tenemos que los subconjuntos  $\{a, b, c, d\}$ ,  $\{a, c, e\}$ ,  $\{b, d\}$  y  $\{c\}$  son combinaciones de  $C$ . De hecho, tanto  $\emptyset$  y  $C = \{a, b, c, d, e\}$  son combinaciones de  $C$ . De ahí una conexión con nuestros coeficientes binomiales. El número total de combinaciones de  $r$  elementos tomados de un conjunto de  $n$  elementos viene dado por:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Dado que  $n=5$  para  $C = \{a, b, c, d, e\}$  tenemos que, por ejemplo, el número de combinaciones de  $r=3$  elementos tomados de  $C$  está dado por:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{3!2!} = \frac{120}{12} = 10$$

## Información brindada por Chat-GPT

### Sucesiones

En matemáticas, una función sucesión es una correspondencia que asigna a cada número natural (o a una parte de los números naturales) un valor específico. Es decir, una función sucesión es una secuencia de números ordenados según una regla establecida. Por ejemplo, consideremos la función sucesión  $f(n) = 2n$ , donde  $n$  es un número natural. Esta función asigna a cada número natural  $n$  el doble de su valor. Así, la secuencia generada sería: 2, 4, 6, 8, ...

#### Sucesión finita

Una sucesión finita es una secuencia de números que tiene un número limitado de términos. Es decir, tiene un inicio y un final. Por ejemplo, la sucesión finita {1, 3, 5, 7, 9} consta de cinco términos y no hay más números después del 9. Las sucesiones finitas pueden ser representadas por una fórmula explícita, una fórmula recursiva o simplemente listando los términos.

#### Ejemplo

Consideremos la sucesión finita {2, 4, 6, 8, 10}. Esta sucesión tiene un total de 5 términos. Podemos observar que cada término se obtiene sumando 2 al término anterior. La fórmula explícita para este ejemplo sería:  $a(n) = 2n$ , donde  $n$  varía de 1 a 5. Aquí, el elemento general de la sucesión se obtiene sustituyendo el valor de  $n$  en la fórmula:  $a(n) = 2n$ . Por ejemplo, el tercer término de la sucesión se obtendría sustituyendo  $n=3$  en la fórmula:  $a(3) = 2(3) = 6$ .

#### Sucesión infinita

Una sucesión infinita es una secuencia de números que no tiene un número final y continúa indefinidamente. En otras palabras, una sucesión infinita tiene una cantidad infinita de términos. Por ejemplo, la sucesión infinita {2, 4, 6, 8, ...} sigue indefinidamente, multiplicando cada término anterior por 2. Las sucesiones infinitas también pueden tener una fórmula explícita o recursiva, o pueden estar definidas mediante una regla o patrón específico.

#### Ejemplo

Consideremos la sucesión infinita {1, 3, 5, 7, ...}. Esta sucesión sigue indefinidamente y está formada por todos los números impares. Podemos observar que cada término se obtiene sumando 2 al término anterior. La fórmula explícita para este ejemplo sería:  $a(n) = 2n - 1$ , donde  $n$  varía desde 1 hasta infinito. Aquí, el elemento general de la sucesión se obtiene sustituyendo el valor de  $n$  en la fórmula:

$a(n) = 2n - 1$ . Por ejemplo, el quinto término de la sucesión se obtendría sustituyendo  $n=5$  en la fórmula:  $a(5) = 2(5) - 1 = 9$ .

Una sucesión de números primos es una secuencia de números en la que cada término es un número primo. Los números primos son aquellos que solo son divisibles entre sí mismos y 1, sin tener ningún otro divisor. Aquí tienes un ejemplo de una sucesión de números primos:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

En esta sucesión, cada término es un número primo, ya que no tienen divisores además de sí mismos y 1. La sucesión continúa indefinidamente, ya que hay una cantidad infinita de números primos.

Es importante destacar que no existe una fórmula general conocida para generar todos los números primos de manera sistemática. Sin embargo, existen algoritmos y métodos específicos, como el cribado de Eratóstenes o el test de primalidad de Miller-Rabin, que permiten identificar y generar números primos en base a ciertas reglas y propiedades matemáticas.

## Series y Sumatorias

En matemáticas, una serie es una expresión que representa la suma de los términos de una sucesión. Se denota generalmente mediante el símbolo de suma ( $\Sigma$ ). Una serie puede ser finita o infinita, dependiendo de si la suma tiene un número limitado de términos o continúa indefinidamente. Por ejemplo, la serie finita  $1 + 2 + 3 + 4$  representa la suma de los primeros cuatro números naturales.

Una sumatoria es una notación matemática que se utiliza para representar la suma de una secuencia de términos. Se expresa mediante el símbolo de sumatoria ( $\Sigma$ ) seguido de una expresión que indica cómo varían los términos a medida que se suman. Por ejemplo, la sumatoria  $\Sigma(n^2)$  representa la suma de los cuadrados de los números naturales.

### Límite inferior de la suma

El límite inferior de la suma, también conocido como límite inferior de la sumatoria, indica el valor inicial de los índices de la sumatoria. Es el valor más pequeño que toma el índice de la sumatoria en sus términos. Por lo general, se representa mediante una letra subíndice. Por ejemplo, en la sumatoria  $\Sigma(n^2)$  con límite inferior  $n=1$ , el límite inferior es 1.

## Límite superior de la suma

El límite superior de la suma, también conocido como límite superior de la sumatoria, indica el valor final de los índices de la sumatoria. Es el valor más grande que toma el índice de la sumatoria en sus términos. Por lo general, se representa mediante una letra subíndice. Siguiendo con el ejemplo anterior, si el límite superior de la sumatoria  $\sum(n^2)$  es  $n=4$ , entonces el límite superior es 4.

## Índice de sumatoria

El índice de sumatoria es la variable o símbolo utilizado para representar los términos que se suman en la sumatoria. Puede ser cualquier letra o símbolo, y su valor cambia a medida que se suman los términos. Por ejemplo, en la sumatoria  $\sum(n^2)$ , la letra "n" es el índice de sumatoria.

Consideremos la sumatoria  $\sum(2n + 1)$  desde  $n=1$  hasta  $n=5$ . Aquí, el límite inferior es  $n=1$  y el límite superior es  $n=5$ . El índice de sumatoria es "n". Los términos que se sumarían son:

$$(2(1) + 1), (2(2) + 1), (2(3) + 1), (2(4) + 1), (2(5) + 1).$$

Luego, realizaríamos la suma de estos términos para obtener el resultado total de la sumatoria.

## Principio de inducción matemática

El Principio de Inducción Matemática es un método utilizado para probar afirmaciones matemáticas sobre números naturales. Se basa en tres pasos fundamentales: establecer una afirmación base, el paso inductivo y la conclusión. A continuación, desarrollaré los cuatro teoremas asociados con el Principio de Inducción Matemática, cada uno con un ejemplo, su demostración y la conclusión correspondiente.

### Teorema 1 - Afirmación Base

La afirmación base establece que la propiedad que queremos demostrar se cumple para el primer número natural. Es decir, se verifica la afirmación para  $n = 1$ .

Ejemplo:

Afirmación: Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$

Demostración: Para  $n = 1$ , tenemos que:  $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$

Por lo tanto, la afirmación se cumple para  $n = 1$ .

Conclusión: La afirmación base establece que la propiedad es verdadera para el primer número natural.

### Teorema 2 - Paso Inductivo

En el paso inductivo, asumimos que la afirmación es verdadera para un número natural  $k$  y demostramos que también se cumple para  $k + 1$ .

Ejemplo: Asumimos que para  $k = m$ , se cumple:

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = m(m + 1)/2$$

Demostración: Consideremos el caso

$$k = m + 1: 1 + 2 + 3 + \dots + m + (m + 1) = (m + 1)(m + 2)/2$$

A partir de la hipótesis de inducción, sabemos que:

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = m(m + 1)/2$$

Reemplazamos esto en la expresión anterior:

$$m(m + 1)/2 + (m + 1) = (m + 1)(m + 2)/2$$

Simplificamos y factorizamos:

$$(m^2 + m + 2m + 2)/2 = (m + 1)(m + 2)/2$$

$$(m^2 + 3m + 2)/2 = (m + 1)(m + 2)/2$$

$$(m + 1)(m + 2)/2 = (m + 1)(m + 2)/2$$

Por lo tanto, se cumple la afirmación para  $k = m + 1$ .

Conclusión: El paso inductivo establece que, si la afirmación es verdadera para un número natural  $k$ , también lo es para  $k + 1$ .

### Teorema 3 - Principio de Inducción Matemática

El principio de inducción matemática establece que, si la afirmación base es verdadera y el paso inductivo se cumple para cualquier número natural  $k$ , entonces la afirmación es verdadera para todos los números naturales.

Demostración: Hemos demostrado que la afirmación es verdadera para  $n = 1$  (afirmación base) y que si es verdadera para  $k = m$ , también lo es para  $k = m + 1$  (paso inductivo). Por lo tanto, utilizando el principio de inducción matemática, concluimos que la afirmación es verdadera para todos los números naturales.

Conclusión: El principio de inducción matemática establece que sí.

### Teorema 4 - Paso de Inducción Fuerte

Supongamos que la afirmación es verdadera para todos los números naturales desde 1 hasta  $k$ , donde  $k \geq 1$ . Es decir, suponemos que todos esos números pueden expresarse como sumas de potencias de 2.

Ahora, debemos demostrar que la afirmación también se cumple para  $k + 1$ .

Consideremos el caso de  $k + 1$ . Si  $k + 1$  es una potencia de 2, entonces la afirmación es verdadera. Si no es una potencia de 2, podemos escribir  $k + 1$  como la suma de una potencia de 2 y un número entero menor que  $k + 1$ .

Dado que suponemos que la afirmación es verdadera para todos los números desde 1 hasta  $k$ , podemos expresar ese número entero como una suma de potencias de 2. Por lo tanto, podemos expresar  $k + 1$  como una suma de potencias de 2.

Conclusión: El paso de inducción fuerte establece que si la afirmación es verdadera para todos los números naturales desde 1 hasta  $k$  y se demuestra que también se cumple para  $k + 1$ , entonces la afirmación es verdadera para todos los números naturales.

En resumen, el Principio de Inducción Matemática y el Paso de Inducción Fuerte son herramientas poderosas para demostrar afirmaciones sobre números naturales. La elección entre uno u otro dependerá de la naturaleza y complejidad de la afirmación que se desea demostrar.

### Teorema del Binomio

El Teorema del Binomio es un resultado fundamental en álgebra que establece una fórmula para expandir un binomio elevado a una potencia determinada. Se puede enunciar de la siguiente manera:

$$(a + b)^n = C(n, 0) * a^n * b^0 + C(n, 1) * a^{(n-1)} * b^1 + C(n, 2) * a^{(n-2)} * b^2 + \dots + C(n, n) * a^0 * b^n$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales o variables,  $n$  es un número natural y  $C(n, k)$  representa los coeficientes binomiales.

La función factorial es una función matemática que se denota por el símbolo " $!$ " y se utiliza para calcular el producto de todos los números naturales desde 1 hasta un número dado  $n$ . Se define de la siguiente manera:

$$n! = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * 2 * 1$$

$$\text{Por ejemplo: } 5! = 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 120.$$

El coeficiente binomial, denotado como  $C(n, k)$  o "n choose k", se utiliza para contar el número de formas en que se pueden elegir k elementos distintos de un conjunto de n elementos sin importar el orden.

Se calcula utilizando la función factorial de la siguiente manera:

$$C(n, k) = n! / (k! * (n - k)!)$$

Por ejemplo:  $C(5, 2) = 5! / (2! * (5 - 2)!) = 10$ .

Los coeficientes binomiales juegan un papel importante en diversas áreas de las matemáticas, como la combinatoria y la probabilidad.

El Teorema del Binomio se basa en los coeficientes binomiales y la función factorial para expandir un binomio a una potencia determinada. Permite calcular término a término los coeficientes binomiales y los exponentes de los términos a y b en la expansión. Esta fórmula es ampliamente utilizada en álgebra y cálculo, y permite simplificar y resolver diversas expresiones algebraicas.

En resumen, el Teorema del Binomio es una poderosa herramienta para expandir binomios, la función factorial es utilizada para calcular productos de números naturales y los coeficientes binomiales cuentan el número de combinaciones posibles de un conjunto de elementos. Estos conceptos son fundamentales en matemáticas y encuentran aplicaciones en diversas áreas.

El desarrollo binomial es el proceso de expandir un binomio elevado a una potencia determinada utilizando el Teorema del Binomio. Es una técnica algebraica que permite escribir una expresión más simplificada y comprensible a partir de un binomio con exponente.

Por ejemplo, el desarrollo binomial del binomio  $(a + b)^3$  es:

$$(a + b)^3 = C(3,0) * a^3 * b^0 + C(3,1) * a^2 * b^1 + C(3,2) * a^1 * b^2 + C(3,3) * a^0 * b^3$$

Simplificando los términos, obtenemos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

El desarrollo binomial permite expresar la expansión de un binomio de manera ordenada y sistemática, facilitando el cálculo y la comprensión de las expresiones algebraicas.

El triángulo de Pascal es una estructura matemática que muestra los coeficientes binomiales en forma de un triángulo. Cada número en el triángulo es la suma de los dos números directamente encima de él. Los coeficientes binomiales se encuentran en las diagonales del triángulo.



$$\begin{array}{rcl}
 n = 0, & & 1 \\
 n = 1, & & 1 \quad 1 \\
 n = 2, & & 1 \quad 2 \quad 1 \\
 n = 3, & & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 n = 4, & & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 n = 5, & & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
 n = 6, & & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1
 \end{array}$$

Cada número en el triángulo de Pascal corresponde a un coeficiente binomial. Por ejemplo, en la cuarta fila del triángulo, los números 1, 3, 3 y 1 corresponden a los coeficientes binomiales  $C(3,0)$ ,  $C(3,1)$ ,  $C(3,2)$  y  $C(3,3)$  respectivamente.

El triángulo de Pascal es utilizado como una herramienta para encontrar y visualizar los coeficientes binomiales. Además, tiene muchas propiedades interesantes y se relaciona con diversos conceptos matemáticos, como la combinatoria, la teoría de probabilidades y las series numéricas.

El teorema del binomio también puede ser expresado utilizando la notación sigma, que es una forma compacta de representar sumas.

#### Teorema del Binomio con notación sigma

Para cualquier número real  $a$  y  $b$ , y un número natural  $n$ , el teorema del binomio se puede expresar de la siguiente manera utilizando la notación sigma:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) * a^{(n-k)} * b^k$$

donde  $C(n, k)$  representa los coeficientes binomiales.

Ejemplo: Expresamos  $(x + y)^3$

utilizando la notación sigma:

$$(x + y)^3 = \sum_{k=0}^3 C(3, k) * x^{(3-k)} * y^k$$

Demostración: Para demostrar el teorema del binomio utilizando la notación sigma, utilizamos la propiedad de los coeficientes binomiales:

$$C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k)$$

Usando esta propiedad, podemos escribir la expansión del binomio  $(a + b)^n$  como una suma utilizando la notación sigma, y luego demostrarla por inducción.

### Demostración por inducción

Caso base: Para  $n = 0$ , la fórmula es verdadera ya que  $(a + b)^x = 1$ .

Paso inductivo: Supongamos que la fórmula es verdadera para  $n = k$ , es decir:

$$(a + b)^k = \sum_{i=0}^k C(k, i) * a^{(k-i)} * b^i$$

Queremos demostrar que también es verdadera para  $n = k + 1$ .

$$(a + b)^{(k+1)} = (a + b) * (a + b)^k$$

Utilizando la propiedad distributiva, expandimos el producto:

$$(a + b) * (a + b)^k = \sum_{i=0}^k C(k, i) * a^{(k-i)} * b^i$$

Distribuimos el término  $(a + b)$  a cada término dentro de la suma:

$$\sum_{i=0}^k C(k, i) * a^{(k+1-i)} * b^i + \sum_{i=0}^k C(k, i) * a^{(k-i)} * b^{(i+1)}$$

Podemos reescribir las sumas combinando términos:

$$\sum_{i=0}^k [C(k, i) * a^{(k+1-i)} * b^i + C(k, i - 1) * a^{(k-i)} * b^{(i+1)}]$$

Utilizando la propiedad de los coeficientes binomiales, podemos simplificar aún más:

$$\sum_{i=0}^k [C(k + 1, i) * a^{(k+1-i)} * b^i]$$

Finalmente, obtenemos la fórmula completa:

$$(a + b)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^k C(k + 1, i) * a^{(k+1-i)} * b^i$$

Por lo tanto, hemos demostrado que la fórmula es verdadera para  $n = k + 1$ .

Conclusión: El teorema del binomio, expresado utilizando la notación sigma, nos permite expandir un binomio elevado

### Permutación

La permutación es un concepto en combinatoria que se refiere al arreglo ordenado de objetos o elementos seleccionados de un conjunto. Se utiliza para contar el número de formas diferentes en las que se pueden ordenar los elementos de un conjunto.

La fórmula para calcular el número de permutaciones de  $n$  elementos tomados  $r$  a la vez se denota como  $P(n, r)$  y se calcula de la siguiente manera:

$$P(n, r) = n! / (n - r)!$$

Donde  $n!$  representa la factorial de  $n$ .

Ejemplo de permutación: Tomemos un conjunto de 4 letras:  $\{A, B, C, D\}$ . Queremos calcular el número de permutaciones de 3 letras tomadas a la vez.

$$P(4, 3) = 4! / (4 - 3)! = 4! / 1! = 4 * 3 * 2 = 24$$

Por lo tanto, hay 24 formas diferentes de permutar 3 letras tomadas del conjunto  $\{A, B, C, D\}$ .

Conclusión de la permutación: La permutación nos permite contar el número de ordenamientos distintos de elementos de un conjunto. Se utiliza en problemas relacionados con arreglos, ordenamientos y secuencias. El cálculo de las permutaciones se basa en la función factorial, y la fórmula  $P(n, r)$  se utiliza para obtener el número de permutaciones posibles.

### Combinación

La combinación es otro concepto en combinatoria que se refiere a la selección no ordenada de elementos de un conjunto. A diferencia de la permutación, en la combinación el orden de los elementos seleccionados no importa, solo se tiene en cuenta la presencia o ausencia de los elementos.

La fórmula para calcular el número de combinaciones de  $n$  elementos tomados  $r$  a la vez se denota como  $C(n, r)$  o "n choose r" y se calcula de la siguiente manera:

$$C(n, r) = n! / (r! * (n - r)!)$$

Ejemplo de combinación: Tomemos un conjunto de 5 números:  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Queremos calcular el número de combinaciones de 3 números tomados a la vez.

$$C(5, 3) = 5! / (3! * (5 - 3)!) = 5! / (3! * 2!) = \frac{5 * 4 * 3}{3 * 2} = 10$$

Por lo tanto, hay 10 formas diferentes de seleccionar 3 números sin importar su orden del conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Conclusión de la combinación: La combinación nos permite contar el número de selecciones no ordenadas de elementos de un conjunto. Se utiliza en problemas relacionados con agrupaciones, combinaciones y selecciones sin importar el orden. La fórmula  $C(n, r)$  se basa en la función factorial y nos permite calcular el número de combinaciones posibles.

## En Conclusión

Después de analizar la información de la bibliografía (de manera resumida en el informe, si desea ver la información completa, recomiendo visitar la bibliografía) y la información brindada por Chat-GPT, podemos concluir que ambas fuentes tienen en común las definiciones y explicaciones de los conceptos. Sin embargo, es importante destacar que la información proporcionada por Chat-GPT puede contener errores o no ser del todo clara.

En este caso, Chat-GPT ha estado bastante acertado, ya que se le han hecho preguntas específicas en base a lo leído, por lo que se le marcó la pauta y para donde debía encarar su respuesta. Una de las preguntas fue:

*Ahora vamos con otro tema*

*1)Definime Series y Sumatorias*

*2)Que es el límite inferior de la suma*

*3)Que es el límite superior de la suma*

*4)Índice de sumatoria y dame un ejemplo*

Como cierre, se recomienda utilizar esta herramienta como una ayuda complementaria a la bibliografía y no como fuente principal de información, ya que puede ser impreciso y no brindarnos la información que nosotros necesitamos. Ahora si nosotros sabemos bien que es lo que deseamos consultar, el mismo puede ser de gran ayuda.

## Bibliografía

- Chat-GPT versión 3.0
- Pérez Aguilar. Una Introducción a las matemáticas discretas y teoría de grafos