TOPOLOGÍA

Determine el interior, el exterior, la frontera y la clausura de cada uno de los siguientes conjuntos. Diga si son abiertos, cerrados o ni abiertos ni cerrados.

i- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - a| < r, |y - b| < r\}$

ii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 \leq 36\}$

iii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 9y^2 \leq 36\}$

iv- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z < x + y\}$

v- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$

vi- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - a| \leq r, |y - b| < r, |z - c| < r\}$

vii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$

viii- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

ix- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 < x + 2y < 4\}$

x- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y - 1| < 2\}$

FUNCIONES. CONJUNTOS DE NIVEL

1. Determine el dominio de las siguientes funciones y haga un gráfico aproximado del mismo.

i- $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$

ii- $f(x, y) = ln(xy)$

iii- $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$

iv- $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

v- $f(x, y) = ln(1 + xy)$

vi- $f(x, y) = arccos(x^2 + y^2)$

2. Grafique (aproximadamente) los conjuntos de nivel de las siguientes funciones para los valores indicados.

i- $f(x, y) = x + y$, $k \in \{-1, 0, 1\}$

ii- $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $k \in \{-4, 0, 12\}$

iii- $f(x,y) = e^{xy}$, $k \in \{0,1,4\}$

iv- $f(x,y) = y^2 - x$, $k \in \{-2,0,2\}$

v- $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$, $k \in \{0,1\}$

vi- $f(x,y,z) = x + y + z$, $k \in \{-1,0,1\}$

vii- $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $k \in \{0,1\}$

viii- $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, $k \in \{4,9\}$

ix- $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$, para $\vec{F}(x,y,z) = (0,0)$ y $\vec{F}(x,y,z) = (4,2)$

LÍMITE

1. Determine el valor de los siguientes límites:

i- $\lim_{(x,y)\to(2,1)} xy$ Resp: 2

ii- $\lim_{(x,y)\to(2,1)} sen(xy)$ Resp: $sen(2)$

iii- $\lim_{(x,y,z)\to(-2,3,1)} \frac{x^2z^3+y}{x^2+y^2}$ Resp: $\frac{7}{13}$

iv- $\lim_{(x,y)\to(3,5)} (x^2 + xy - y)$ Resp: 19

v- $\lim_{(x,y)\to(3,2)} ln(x^2y)$ Resp: $ln(18)$

vi- $\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\pi}{4},4\right)} 2ycos(xy)$ Resp: -8

vii- $\lim_{(x,y)\to\left(2,\frac{\pi}{2}\right)} sen\left(\frac{2y}{x}\right)$ Resp: 1

viii- $\lim_{(x,y,z)\to(3,-1,3)} (x + y + z)$ Resp: 5

ix- $\lim_{(x,y,z)\to(0,1,-2)} \frac{x^2z+y-z}{x^2+y^2+z^2}$ Resp: $\frac{3}{5}$

x- $\lim_{(x,y)\to(2,\pi)} e^{\frac{y}{\pi}}\ sen\left(\frac{y}{x}\right)$ Resp: e

2. Demuestre que los siguientes límites no existen:

i- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

ii- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

iii- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^4+y^4}$

iv- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{|x|+|y|}$

v- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$

vi- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

vii- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+3y^2}$

viii- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

ix- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$

x- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x-y}$

3. Para las siguientes funciones demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

i- $f(x,y) = \frac{x^4y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\delta < \sqrt[5]{\varepsilon}$

ii- $f(x,y) = \frac{4xy^2}{x^2+y^2}$ $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$

iii- $f(x,y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\delta < \varepsilon$

iv- $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ $\delta < \sqrt{\varepsilon}$

v- $f(x,y) = \frac{y^5}{x^2+y^2}$ $\delta < \sqrt[3]{\varepsilon}$

vi- $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

vii- $f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$ $\delta < \varepsilon$

viii- $f(x,y) = \frac{x^2}{|x|+|y|}$ $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

ix- $f(x,y) = y\frac{sen\,(x)}{x}$ $\delta < \varepsilon$

x- $f(x,y) = sen\left(\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ $\delta < \sqrt{\varepsilon}$

CONTINUIDAD

1. Para las siguientes funciones demuestre si son o no continuas en $(x,y) = (0{,}0)$.

i- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \ si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$

ii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$ $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$

iii- $f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{y} & ; \ si\ y \neq 0 \\ 0 & ; \ si\ y = 0 \end{cases}$

iv- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{\sqrt{2x^4+y^2}} & ; \ si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$ $\delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}$

v- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; \ si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$ $\delta < \sqrt{\varepsilon}$

vi- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x+y} & ; \ si\ x+y \neq 0 \\ 0 & ; \ si\ x+y = 0 \end{cases}$

vii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{3x^2+2y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases}$ $\delta < \varepsilon$

viii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y}{x^2+7y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ix- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{5x^3}{2x^2+2y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\delta < \frac{2}{5}\varepsilon$

x- $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\, sen\left(\frac{1}{3x^2+5y^2}\right) & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\delta < \sqrt{\varepsilon}$

2. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

i- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \wedge (x,y) \neq (1,1) \\ 1 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \\ \frac{1}{4} & ; \ si\ (x,y) = (1,1) \end{cases}$

f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0),(1,1)\}$

ii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; \ si\ |x| \geq 1 \\ \frac{2}{5} & ; \ si\ (x,y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$

f es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq 1\} \cup \left\{\left(\frac{1}{2},0\right)\right\} = D_f$

iii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x-y} & ; \ si\ x \neq y \\ x-y & ; \ si\ x = y \end{cases}$

f es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq x\} \cup \{(0,0)\}$

DERIVADA DIRECCIONAL. DERIVADAS PARCIALES

1. Usando la definición, determine la derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ según la dirección $\hat{u}$.

a) $f(x,y) = xy$; $\vec{x}_0 = (2,1)$, $\hat{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + z^2$; $\vec{x}_0 = (0,1,1)$, $\hat{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

c) $f(x,y) = xsen(y)$; $\vec{x}_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\hat{u} = (0,1)$

d) $f(x,y) = ycos(x)$; $\vec{x}_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\hat{u} = (1,0)$

e) $f(x,y) = xe^y$; $\vec{x}_0 = (1,0)$, $\hat{u} = (0,1)$

2. Obtenga las derivadas parciales para las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2y + y^3$

b) $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$

c) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$

d) $f(x,y,z) = sen(xy + z)$

e) $f(x,y,z) = z\,ln(x + y)$

f) $f(x,y) = xye^{xy}$

g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

h) $f(x,y,z) = x^2e^{x+y+z}\,cos(y)$

i) $f(x,y,z) = x^{(y^z)}$

j) $f(x,y) = x\,arctg\left(\frac{y}{x}\right)$

k) $f(x,y,z,w) = \frac{x^2-y^2}{z^2+w^2}$

l) $f(x,y) = xy - ln(x + y)$

m) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$

n) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2} + ye^z$

o) $f(x,y,z) = xyz + e^{xyz}$

3. Determine todas las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = x^2y + e^{xy}$

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c) $f(x,y) = xy^2$

d) $f(x,y) = tg\left(\frac{x}{y}\right)$

e) $f(x,y) = e^{xy^2}$

DIFERENCIABILIDAD

1. Para cada una de las siguientes funciones

a) Demuestre si es o no continua en $(x,y)=(0,0)$.
b) Obtenga, si existen, las derivadas parciales en $(x,y)=(0,0)$.
c) Demuestre si es o no diferenciable en $(x,y)=(0,0)$.

i- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^4}{x^2+y^2}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\sqrt{\varepsilon}\quad b)\ f_x(0,0)=f_y(0,0)=0\quad c)\ \delta<\varepsilon$

ii- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^3}{x^2+y^2}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\frac{\varepsilon}{3}\quad b)\ f_x(0,0)=3,\ f_y(0,0)=0$

iii- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3xy^2}{\sqrt{x^2+2y^4}}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\quad b)\ f_x(0,0)=f_y(0,0)=0\quad c)\ \delta<\frac{\varepsilon}{3}$

iv- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^2+y^2}; & si\ x\neq 0\\ 0\ ; & si\ x=0\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\varepsilon\quad b)\ f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

v- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|y^3}{x^2+4y^2}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\sqrt{\varepsilon}\quad b)\ f_x(0,0)=f_y(0,0)=0\quad c)\ \delta<\varepsilon$

vi- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^2+y^4}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\sqrt{\varepsilon}\quad b)\ f_x(0,0)=f_y(0,0)=0\quad c)\ \delta<\varepsilon$

vii- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{3x^2+3y^2}}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\sqrt{3}\varepsilon\quad b)\ f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

viii- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2+y^4}; & si\ y\neq 0\\ 0\ ; & si\ y=0\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\frac{\varepsilon}{2}\quad b)\ f_x(0,0)=0,\ f_y(0,0)=-1$

ix- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3-y^3}{x^2+|x|^3+y^2}; & si\ x\neq 0\\ 0\ ; & si\ x=0\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\frac{\varepsilon}{3}\quad b)\ f_x(0,0)=2,\ f_y(0,0)=0$

x- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y-4x^3}{x^2+y^2}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\quad a)\ \delta<\frac{\varepsilon}{5}\quad b)\ f_x(0,0)=-4,\ f_y(0,0)=0$

2. Para cada una de las siguientes funciones

a) Demuestre si es o no continua en $(x,y) = (0,0)$.

b) Obtenga, si existen, las derivadas parciales en $(x,y) = (0,0)$.

c) Diga si es o no diferenciable en $(x,y) = (0,0)$. Justifique su respuesta.

i- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

ii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2-y^2}; & si\ y \neq \pm x \\ 0 \quad ; & si\ y = \pm x \end{cases}$ $\quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

iii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^3+y^3}; & si\ y \neq -x \\ 0 \quad ; & si\ \ y = -x \end{cases}$ $\quad f_x(0,0) = 1,\ \ f_y(0,0) = 0$

iv- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2}{x+y}; & si\ y \neq -x \\ 0\ ; & si\ y = -x \end{cases}$ $\quad f_x(0,0) = 3,\ \ f_y(0,0) = 0$

v- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^3}{x^2+y^2}; & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad ; & si\ x = 0 \end{cases}$ $\quad \nexists\ f_x(0,0),\ \ f_y(0,0) = 0$

3. Demuestre que en $(0,0)$ la función: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua, tiene derivadas en todas las direcciones pero no es diferenciable.

4. Demuestre que en $(0,0)$ la función: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ tiene derivadas parciales continuas.

5. Demuestre que en $(0,0)$ la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ sen\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right); & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua, no tiene derivadas parciales continuas pero es diferenciable.

CAMPOS ESCALARES. GRADIENTE. DERIVADA DIRECCIONAL. MÁXIMA RAZÓN DE CAMBIO

1. Encuentre el gradiente de f en $\vec{x}_0$ para las siguientes funciones

a) $f(x,y,z) = xyz$; $\vec{x}_0 = (1,2,1)$

b) $f(x,y) = ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{2xy}$; $\vec{x}_0 = (0,-2)$

c) $f(x,y,z) = sen(xy) - cos(xz) + sen(yz)$; $\vec{x}_0 = (1,2,-1)$

d) $f(x,y) = e^{x^2 y}$; $\vec{x}_0 = (1,-2)$

e) $f(x,y) = e^x cos(x+y)$; $\vec{x}_0 = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2. Para cada una de las siguientes funciones f obtenga:

a) El valor de la derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ según la dirección que va de $\vec{x}_0$ a $\vec{x}_1$.

b) La máxima y la mínima razón de cambio de f en $\vec{x}_0$.

i- $f(x,y,z) = xye^{yz} + xsen(z)$; $\vec{x}_0 = (1,1,0)$, $\vec{x}_1 = (2,3,1)$

ii- $f(x,y,z) = yze^{xz}$; $\vec{x}_0 = (1,2,1)$, $\vec{x}_1 = (2,-1,3)$

iii- $f(x,y,z) = xye^{yz}$; $\vec{x}_0 = (1,2,1)$, $\vec{x}_1 = (2,-1,3)$

iv- $f(x,y,z) = xzsen(xy) - e^{xy} + xcos(2xy)$; $\vec{x}_0 = (1,0,1)$, $\vec{x}_1 = (3,2,2)$

v- $f(x,y,z) = x^2 ln(y) + xz^2$; $\vec{x}_0 = (1,1,1)$, $\vec{x}_1 = (2,3,3)$

vi- $f(x,y,z) = sen(xy) - z + xcos(2xy)$; $\vec{x}_0 = (0,1,1)$, $\vec{x}_1 = (2,3,2)$

vii- $f(x,y,z) = zsen(xy) - xz + xcos(2xy)$; $\vec{x}_0 = (0,1,1)$, $\vec{x}_1 = (2,3,2)$

viii- $f(x,y,z) = ycos(2xy) + z^2 + e^{2x}$; $\vec{x}_0 = (0,1,1)$, $\vec{x}_1 = (2,3,2)$

REGLA DE LA CADENA

1. Obtenga la matriz jacobiana de $\vec{f} \circ \vec{g}$ ó de $f \circ \vec{g}$ -según corresponda- en el punto indicado para:

a) $\vec{g}(x,y) = (x^2 + xy + 1, y^2 + 2)$
$\vec{f}(u,v) = (u+v, 2u, v^2)$
$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (1,1)$

$Resp$: $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 2 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

b) $\vec{g}(t) = (t, t+1, t^2)$

$\vec{f}(x,y,z) = (x + 2y + z^2, x^2 - y)$

$t_0 = a$

$Resp\text{: } \begin{pmatrix} 3+4a^3 \\ 2a-1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{g}(x,y,z) = (yz^2 + xy, 2y + z, sen(2xy) + 1)$

$\vec{f}(u,v,w) = \left(3u^2 + e^{u^2-v+1}, sen(uw) + v\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$

$Resp\text{: } \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{g}(x,y) = (xy + cos(xy), x^2y + 2y)$

$\vec{f}(u,v) = \left(v + e^{v^2-u+1}, u^2 + 2v, u + sen(3uv)\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (1,0)$

$Resp\text{: } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

e) $\vec{g}(x,y) = (x^2 + 2x, xy, x + y)$

$\vec{f}(u,v,w) = (u^2 + w, u + 2v)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (1,1)$

$Resp\text{: } \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\vec{g}(x,y) = \left(ye^{x^2-y}, sen(xy)\right)$

$f(u,v) = e^{2v^2+4v} + u^2$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (0,1)$

$Resp\text{: } (4 \quad 0)$

g) $\vec{g}(x,y,z) = (2xy + ze^{xy}, cos(xy) + z)$

$\vec{f}(u,v) = \left(uv + e^{v-2}, ue^{uv-2}, sen(uv-2)\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,1)$

$Resp\text{: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

h) $\vec{g}(x,y,z) = \left(xze^{x+y^2}, sen(x^2 + y), e^x cos(xz)\right)$

$f(u,v,w) = e^{uvw} + (v-1)^2 + w$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,1)$

$Resp\text{: } (1 \quad -2 \quad 0)$

i) $\vec{g}(x,y) = \left(y^2 - \frac{1}{2} + cos^2\left(xy + \frac{\pi}{4}\right), e^{x^2-y+1} - x, xy + sen(3xy^2)\right)$

$\vec{f}(u,v,w) = \left(v^2 + w + e^{v^2-u}, ucos(uw) + vw + v^2\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (0,1)$

$Resp\text{: } \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

j) $\vec{g}(x,y) = \left(x^2 - 3xy, y + e^{x^2-2x}, x + y\right)$

$\vec{f}(u,v,w) = \left(u^2 + w, u^3 + e^{2v^2-4v}\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (2,1)$

$Resp\text{:}\ \begin{pmatrix} -3 & 25 \\ 20 & -68 \end{pmatrix}$

2. Suponiendo que las siguientes funciones son diferenciables

$$w = f(x,y,z); \qquad \begin{array}{l} x = g_1(u,v) \\ y = g_2(u,v) \\ z = g_3(u,v) \end{array}$$

Desarrolle, por medio de la regla de la cadena, las fórmulas para $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$.

$$Resp\text{:}\ \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g_3}{\partial u}; \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g_3}{\partial v}$$

3. Suponiendo que las siguientes funciones son diferenciables

$$w = f(x,y,z); \qquad z = g(x,y)$$

Desarrolle, por medio de la regla de la cadena, las fórmulas para $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$.

$$Resp\text{:}\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}$$

4. Suponiendo que las siguientes funciones son diferenciables

$$w = f(x,y,z); \qquad y = g(x,z)$$

Desarrolle, por medio de la regla de la cadena, las fórmulas para $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$.

$$Resp\text{:}\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

5. Sean

$$w = f(x,y); \qquad \begin{array}{l} x = g_1(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y = g_2(r,\theta) = r\,sen(\theta) \end{array}$$

Suponiendo que f es diferenciable, obtenga por medio de la regla de la cadena las expresiones para $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial \theta}$.

$$Resp: \frac{\partial w}{\partial r} = cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + sen(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}; \qquad \frac{\partial w}{\partial \theta} = -rsen(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + rcos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

TEOREMA DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

1. Si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xe^y + uz - cos(v) - 2 = 0 \\ ucos(y) + x^2v - yz^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a (u,v) como función de (x,y,z) en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0,y_0,z_0) = (2,0,1)$, $\vec{y}_0 = (u_0,v_0) = (1,0)$, obtenga $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$ y la afín que aproxima a esta función en un entorno de $\vec{x}_0$.

$$Resp: \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}_{(2,0,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad A(x,y,z) = \left(-x - 2y - z + 4, \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}\right)$$

2. Si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xu + yvu^2 = 2 \\ xu^3 + y^2v^4 = 2 \end{cases}$$

define a (u,v) como función de (x,y) en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0,y_0) = (1,1)$, $\vec{y}_0 = (u_0,v_0) = (1,1)$; obtenga $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$ y la afín que aproxima a esta función en un entorno de $\vec{x}_0$.

$$Resp: \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad A(x,y) = \left(-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}y + \frac{14}{9}, \frac{4}{3} - \frac{1}{3}y\right)$$

3. Si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xe^x - ue^u + 2yv - 2 = 0 \\ 2xu - yv - v + 2 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a (u,v) como función de (x,y) en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0,y_0) = (0,1)$, $\vec{y}_0 = (u_0,v_0) = (0,1)$, obtenga $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$ y la afín que aproxima a esta función en un entorno de $\vec{x}_0$.

$$Resp: \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad A(x,y) = \left(1 - x - y, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y\right)$$

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2y + yz = 0 \\ xyz + 1 = 0 \end{cases}$$

Obtenga $\frac{dx}{dz}$ y $\frac{dy}{dz}$ en $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,-1)$.

$$Resp: \quad \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{3}{2}$$

5. Si el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + yu + xv + w = 0 \\ x + y + uvw + 1 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a x e y como funciones de u, v y w en un entorno de $(x_0,y_0,u_0,v_0,w_0) = (1,-1,1,1,-1)$, obtenga $\frac{\partial x}{\partial u}$ y $\frac{\partial y}{\partial u}$ en ese punto.

$$Resp: \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

6. Sea

$$\begin{cases} uy + uv - x - v = 0 \\ ve^v - xe^x - ye^y - \frac{1}{e} = 0 \end{cases}$$

Obtenga $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$ en $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 0)$. *Resp:* $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. Si el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0 \\ x^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

define implícitamente a (u, v) como función de (x, y, z) en un entorno de $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$, $\vec{y}_0 = (u_0, v_0) = (1,1)$, obtenga $\frac{\partial v}{\partial y}$ en $\vec{x}_0$.

$$Resp: \ -\frac{7}{4}$$

8. Suponga que $F: D_F \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple con las condiciones que establece el teorema de la derivada de la función implícita, de modo que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como función de x e y en un entorno del punto (x_0, y_0, z_0). Obtenga las fórmulas para $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$Resp: \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad con \ \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

9. Halle $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si:

a) $xy + yz + zx = 9xyz$

b) $x^2 + y^2 - 2xy + e^z - z^3 + 4 = 0$

$$Resp: \ \text{a)} \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{9yz - y - z}{x + y - 9xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{9xz - x - z}{x + y - 9xy}$$

$$\text{b)} \ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x - y)}{3z^2 - e^z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2(x - y)}{e^z - 3z^2}$$

10. Suponga que $F: D_F \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple con las condiciones que establece el teorema de la derivada de la función implícita, de modo que la ecuación $F(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función de x en un entorno del punto (x_0, y_0).

a) Obtenga la fórmula para $\frac{dy}{dx}$.

b) Aplique esa fórmula para: $e^x sen(y) + e^y cos(x) = 1$.

$$Resp: \quad \text{a)}\ \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad con\ \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

$$\text{b)}\ \frac{dy}{dx} = \frac{e^y sen(x) - e^x sen(y)}{e^x cos(y) + e^y cos(x)}$$

EXTREMOS LIBRES

1. Encuentre y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$

Resp: f tiene en $(2, -1)$ un mínimo local.

b) $f(x, y) = 6x - 3x^2 - y^2 + 2y$

Resp: f tiene en $(1,1)$ un máximo local.

c) $f(x, y) = x^2 + 5y^2 + x^2y + 2y^3$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un mínimo local, en $\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ un máximo local, y en $(2, -1)$ y $(-2, -1)$ puntos de ensilladura.

d) $f(x, y) = xye^{x+2y}$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un punto de ensilladura, y en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ un máximo local.

e) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 6y^2 - 36x$

Resp: f tiene en $(6,4)$ un mínimo local, y en $(6,0)$, $(-2,0)$ y $(-2,4)$ puntos de ensilladura.

f) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un punto de ensilladura, y en $(1,1)$ y $(-1, -1)$ mínimos locales.

g) $f(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y - 7$

Resp: f tiene en $\left(\frac{27}{2}, 5\right)$ un mínimo local, y en $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ un punto de ensilladura.

h) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Resp: f tiene en $(2,1)$ un mínimo local, en $(-2, -1)$ un máximo local, y en $(1,2)$ y $(-1, -2)$ puntos de ensilladura.

i) $f(x,y) = (x+y)e^{-xy}$

Resp: f tiene en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ puntos de ensilladura.

j) $f(x,y) = 3y^2 + 6xy - 2y^3 - 3x^2$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un punto de ensilladura, y en $(2,2)$ máximo local.

k) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy + 7x - 8y$

Resp: f tiene en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$ un punto de ensilladura, y en $(1,5)$ mínimo local.

l) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + x^2y$

Resp: f tiene en $(0,0)$ un mínimo local, y en $(2,1)$ y $(-2,-1)$ puntos de ensilladura.

m) $f(x,y) = e^{2x^2 - \frac{1}{2}y^2 + y}$

Resp: f tiene en $(0,1)$ un punto de ensilladura.

n) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 15y - 12x$

Resp: f tiene en $(1,2)$ un mínimo local, en $(-1,-2)$ un máximo local, y en $(2,1)$ y $(-2,-1)$ puntos de ensilladura.

o) $f(x,y) = e^{3x^2 - 6x + 2y^2}$

Resp: f tiene en $(1,0)$ un mínimo local.

2. Obtenga la distancia más corta desde el punto $(0,1,-2)$ al plano de ecuación $2x + y + z = 4$. *Resp:* $d = \frac{5}{6}\sqrt{6}$

3. Obtenga los puntos sobre el cono de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ más cercanos al punto $(2,4,0)$. *Resp:* $\left(1,2,\sqrt{5}\right)$, $\left(1,2,-\sqrt{5}\right)$

4. Obtenga el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano de ecuación $2x + 3y + z = 6$. *Resp:* $\frac{4}{3}$

5. Sean dos rectas definidas en forma paramétrica como:

$$\vec{\alpha}(t) = (t, 2t, -1) \qquad y \qquad \vec{\beta}(s) = (3s, 2s, 0)$$

Obtenga la mínima distancia entre ellas y los dos puntos (uno de cada recta) más cercanos entre sí. *Resp:* $d = 1;\ (0,0,-1), (0,0,0)$

EXTREMOS LIGADOS

1. Para cada función f definida en el conjunto D indicado, obtenga:

a) Los puntos críticos de f en D.

b) Los valores extremos globales de f en D.

I) $f(x,y) = y^2 - x^2,\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-3)^2 \le 4\}$

Resp: a) $(0,1), (0,5), \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ b) $f\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$ *Mínimo global,* $f(0,5) = 25$ *Máximo global*

II) $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 1,\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3(x-2)^2 + y^2 = 3\}$

Resp: a) $(1,0), (3,0)$ b) $f(1,0) = 4$ *Mínimo global,* $f(3,0) = 28$ *Máximo global*

III) $f(x,y) = x^2 y,\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 6\}$

Resp: a) $(0,\sqrt{3}), (0,-\sqrt{3}), (2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)$

b) $f(\pm 2,-1) = -4$ *Mínimo global,* $f(\pm 2,1) = 4$ *Máximo global*

IV) $f(x,y) = x^2 + y^2,\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0\}$

Resp: a) $(0,0), (2,4)$ b) $f(0,0) = 0$ *Mínimo global,* $f(2,4) = 20$ *Máximo global*

V) $f(x,y) = e^{-xy},\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 2y^2 \le 1\}$

Resp: a) $(0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $f\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ *Mínimo global,* $f\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \sqrt[4]{e}$ *Máximo global*

VI) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + x + y,\qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\right\}$

Resp: a) $\left(0, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

b) $f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$ *Mínimo global,* $f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$ *Máximo global*

VII) $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + 2x^2 y + 1,\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$

Resp: a) $(0,0), (0,1), (1,1), (-1,1), \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 1, y = -1\}, \left(1, -\frac{1}{3}\right), \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$

b) $f(0,0) = 1$ *Mínimo global,* $f(\pm 1,1) = 8$ *Máximo global*

VIII) $f(x,y) = 5x - 4y + 1,$ $\qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le -\frac{2}{3}x + 2, x \ge 0\right\}$

Resp: a) $(0,0), (0,2), (3,0)$

b) $f(0,2) = -7$ *Mínimo global,* $f(3,0) = 16$ *Máximo global*

IX) $f(x,y) = x + y^2,$ $\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + y^2 = 1\}$

Resp: a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{7}{8}}\right), \left(\frac{1}{4}, -\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$

b) $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *Mínimo global,* $f\left(\frac{1}{4}, \pm\sqrt{\frac{7}{8}}\right) = \frac{9}{8}$ *Máximo global*

X) $f(x,y,z) = x + y + z,$ $\qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

Resp: a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\sqrt{3}$ *Mínimo global,* $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3}$ *Máximo global*

2. Encuentre los valores extremos de las siguientes funciones sujetas a las restricciones que se indican:

I) $f(x,y,z) = ze^{-xy},$ $\qquad G(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$

Resp: $f(0,0,0) = 0$ *Mínimo local*

II) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1,$ $\qquad G(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$

Resp: $f\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ *Mínimo local*

III) $f(x,y,z) = x - y + 2z,$ $\qquad G(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 2 = 0$

Resp: $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$ *Mínimo global,* $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$ *Máximo global*

IV) $f(x,y,z) = x + y + z,$ $\qquad G_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ y

$G_2(x,y,z) = x + z - 1 = 0$

Resp: $f(0,-2,1) = -1$ *Mínimo global*

$f(0,2,1) = 3$ *Máximo global*

3. Encuentre la mínima distancia del punto $(1,1,1)$ a la recta: $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}.$

Resp: $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. El área de una caja rectangular sin tapa es de $48\ m^2$. Obtenga las dimensiones x (el largo), y (el ancho) y z (la altura) de la misma de modo que su volumen sea máximo.

Resp: $x = y = 4\,m, z = 2m$

5. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange obtenga las dimensiones del rectángulo de mayor área, con lados paralelos a los ejes coordenados, que se puede inscribir en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Resp: $Largo = 3\sqrt{2}\,,\; Ancho = 2\sqrt{2}$