DERIVADAS

Muchas técnicas del cálculo están basadas en la idea de aproximar una función vectorial $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ por una función lineal o por una función llamada afín. Veremos que las funciones afines constituyen la base del cálculo diferencial para funciones vectoriales.

Una función

$$A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

es **afín** si existe una función (aplicación) lineal $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y un vector (o punto fijo) $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\underbrace{A(\vec{x})}_{\text{función afín}} = \underbrace{L(\vec{x})}_{\text{función lineal}} + \underbrace{\vec{b}}_{\text{función cte}} \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

donde la función lineal tiene la siguiente propiedad:

$$L(k\vec{x} + \vec{y}) = kL(\vec{x}) + L(\vec{y}) \qquad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n; \ k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Sea la lineal $L: \mathbb{R}^{\overset{n}{\overbrace{2}}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\overset{m}{\overbrace{3}}}$ representada por la siguiente matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{matriz } 3\times2}$, y el vector: $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{cc|c} & & x \\ & & y \\ \hline 1 & 2 & x+2y \\ 3 & 4 & 3x+4y \\ 5 & 6 & 5x+6y \end{array}$$

Luego

$$A(\vec{x}) = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{L(\vec{x})} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$A(\vec{x}) = \overbrace{\begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \\ 5x + 6y \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 1 \\ 3x + 4y + 2 \\ 5x + 6y + 3 \end{pmatrix}$$

Como vector columna

$$A(\vec{x}) = (x + 2y + 1, 3x + 4y + 2, 5x + 6y + 3)$$

Como vector fila

Nos planteamos ahora el problema de aproximar suficientemente una función $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en un entorno del punto $\vec{x}_0 \in D_{\vec{f}}$ mediante una función afín.

La idea general es ver la posibilidad de reemplazar, en un entorno de $\vec{x}_0$ lo que puede ser una función complicada por otra más simple.

Empecemos primero considerando una función de AMI y recordemos la definición de **derivada**.

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

x_0 punto interior del D_f

$$h = x - x_0$$

La derivada de f en x_0 es:

$$f'(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

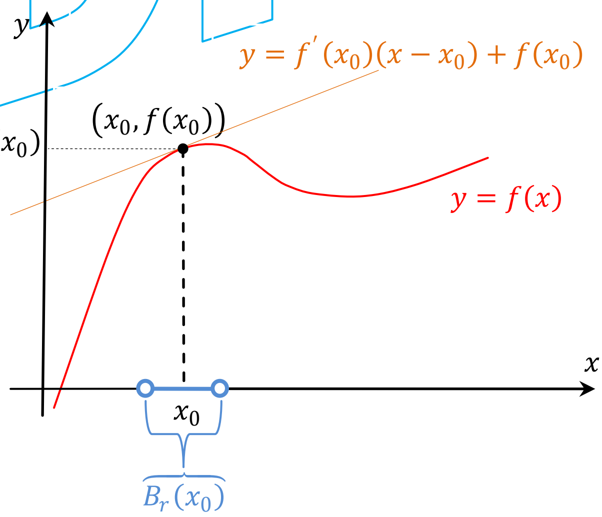
si este límite existe.

$f'(x_0)$ tiene interpretación geométrica como la **pendiente** de la recta tangente al grafo de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Esta recta tangente aproxima a f en un $B_r(x_0)$. Su ecuación es:

$$y = \overbrace{f'(x_0)}^{\text{pendiente}} \; (x - x_0) + \overbrace{f(x_0)}^{\text{punto fijo}}$$

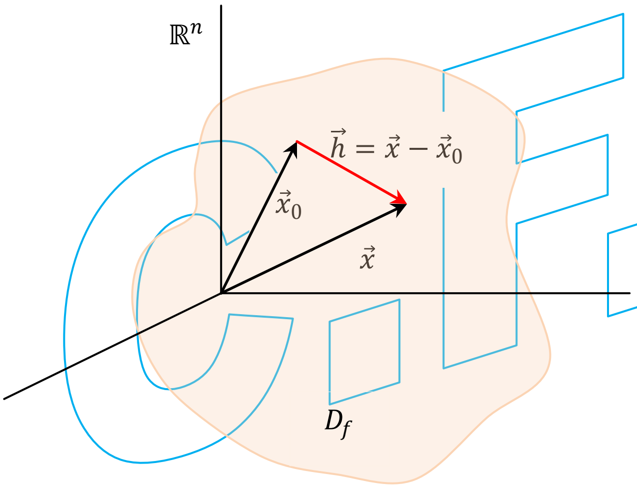
Se puede tomar como una matriz 1×1 que representa a una aplicación lineal $L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



Esta ecuación representa a una función afín:

$$A(x) = \underbrace{f'(x_0)\,(x - x_0)}_{L(x - x_0)} + \underbrace{f(x_0)}_{b}$$

Supongamos que queremos extender el concepto de derivada de AMI para funciones $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ intentando repetir el mismo procedimiento. Nos encontramos con que $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$ ahora es un vector, por lo tanto una expresión similar a la derivada de una función $f\colon D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sería:



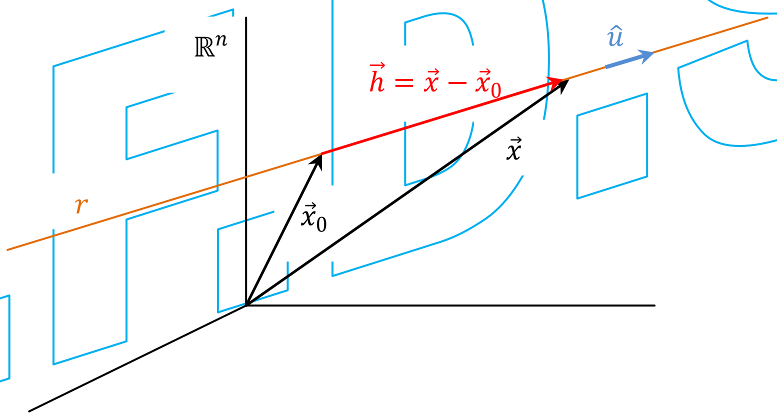
$$\cancel{f'(\vec{x}_0) = \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\overbrace{f(\vec{x}_0+\vec{h}) - f(\vec{x}_0)}^{\text{escalar}}}{\underbrace{\vec{h}}_{\text{vector}}}}$$

MAL

lo cual carece de sentido ya que no está definida la división de un escalar por un vector. Entonces debemos encontrar un sustituto adecuado para ella.

A cualquier **vector unitario (versor)** $\hat{\boldsymbol{u}}$ en $\mathbb{R}^n$ lo llamaremos **dirección** en $\mathbb{R}^n$.

Dado un punto $\vec{x}_0$ y una dirección $\hat{\boldsymbol{u}}$ de $\mathbb{R}^n$ queda determinada una única recta pasante por $\vec{x}_0$ con dirección $\hat{\boldsymbol{u}}$:



$$r\colon\ \ \vec{x} = \vec{x}_0 + t\hat{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

O sea que al vector $\vec{h}$ se lo puede expresar como $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0 = t\hat{u}$ de modo que su dirección se mantenga constante e igual a $\hat{u}$.

Ahora si ya estamos en condiciones de introducir el concepto de derivada para funciones $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

DERIVADA DIRECCIONAL

Definición

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{(campo escalar)}$$

$\vec{x}_0$ punto interior del D_f

La derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ según la dirección $\hat{u}$ (versor de $\mathbb{R}^n$) es

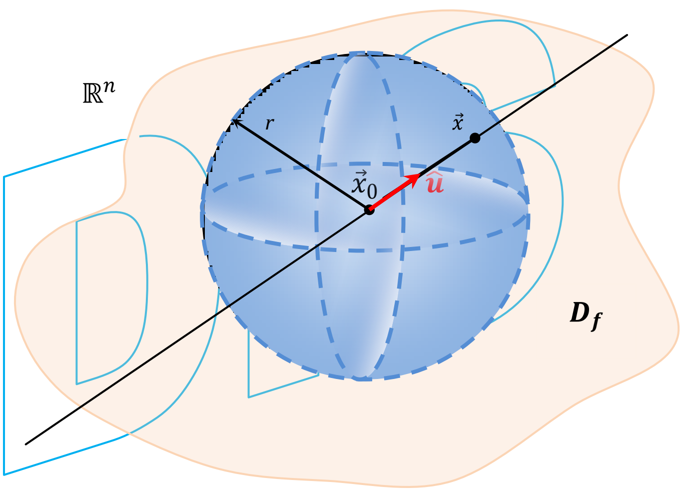
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(\vec{x}_0) = D_{\hat{u}} f(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{u}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

Notaciones

siempre que este límite exista.

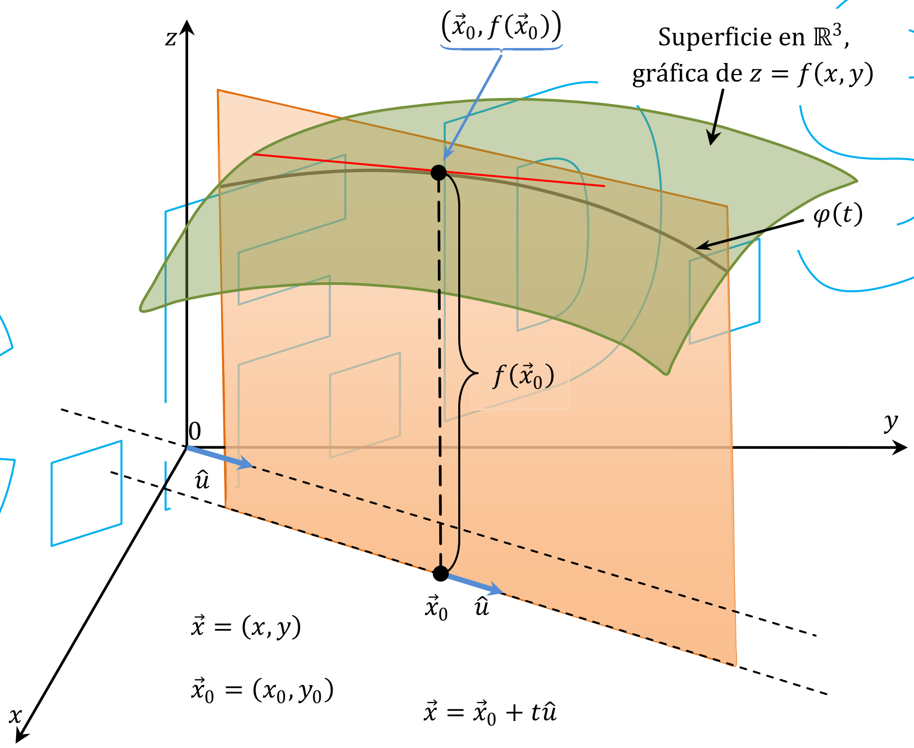
Como $\vec{x}_0$ es punto interior del D_f, $\exists\, B_r(\vec{x}_0) \mid B_r(\vec{x}_0) \subset D_f$ y $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\hat{u} \in D_f$ y es también punto interior del D_f $\forall t \in (-r, r)$.

Para $t = 0$, $\vec{x} = \vec{x}_0$.



Interpretación geométrica

Llamando $\varphi(t) = f(\vec{x}_0 + t\hat{u})$ tenemos que $\varphi(0) = f(\vec{x}_0)$. Suponiendo que $n = 2$ o sea que $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.



Como $\varphi(t)$ es la curva de intersección de la gráfica de f con el plano vertical pasante por $\vec{x}_0$ en la dirección de $\hat{u}$, el límite de la definición:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{u}) - f(\vec{x}_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

da la pendiente de la recta tangente en $(0, \varphi(0)) = \left(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0)\right)$ a la curva $\varphi(t)$.

La derivada direccional también puede interpretarse como la razón de cambio de f en la dirección de $\hat{u}$ en $\vec{x}_0$.

Si en la definición cambiamos $\vec{x}_0$ por $\vec{x}$ obtenemos

$$D_{\hat{u}} f(\vec{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x} + t\hat{u}) - f(\vec{x})}{t}$$

Si cambiamos $\hat{u}$ por $-\hat{u}$, la derivada direccional cambia de signo:

$$\frac{\partial f}{\partial(-\hat{u})}(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\vec{x}_0 + t(-\hat{u})\right) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + (-t)\hat{u}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

haciendo $\lambda = -t \;\Rightarrow \lambda \longrightarrow 0 \; si \;\; t \longrightarrow 0$

$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \lambda\hat{u}) - f(\vec{x}_0)}{-\lambda}$$

$$= -\underbrace{\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \lambda\hat{u}) - f(\vec{x}_0)}{\lambda}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(-\hat{u})}(\vec{x}_0) = -\overbrace{\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(\vec{x}_0)}$$

Ejemplo

Obtenga la derivada direccional de la función $f(x,y) = x\cos(y)$ en el punto $\vec{x}_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ según la dirección $\hat{u} = (1,0)$.

Solución

Aplicando la definición

$$D_{\hat{u}} f \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}_{\vec{x}_0} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}^{\vec{x}_0} + t\,\overbrace{(1,0)}^{\hat{u}}\right) - f\left(\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}^{\vec{x}_0}\right)}{t}$$

$$D_{\hat{u}} f \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) + (t,0)\right) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}{t}$$

$$D_{\hat{u}} f \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t, \frac{\pi}{4} + 0\right) - f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}{t}$$

$$D_{\hat{u}} f \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+t, \frac{\pi}{4}\right)} - \overbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}}{t}$$

$$D_{\hat{u}}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+t\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{t}$$

$$D_{\hat{u}}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}t}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Usando la definición, determine $D_{\hat{u}}f$ en el punto $\vec{x} = (x,y,z)$ cuando $f(x,y,z) = xz + y;\ \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{42}}(-5,4,1)$.

Solución

Aplicando la definición

$$D_{\hat{u}}f(x,y,z) = \lim_{t\to 0}\frac{f\big((x,y,z)+t\hat{u}\big)-f(x,y,z)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f\left((x,y,z)+t\frac{1}{\sqrt{42}}(-5,4,1)\right)-f(x,y,z)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(x-t\frac{5}{\sqrt{42}},y+t\frac{4}{\sqrt{42}},z+t\frac{1}{\sqrt{42}}\right)-f(x,y,z)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\left(x-t\frac{5}{\sqrt{42}}\right)\left(z+t\frac{1}{\sqrt{42}}\right)+y+t\frac{4}{\sqrt{42}}-(xz+y)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{xz+t\frac{x}{\sqrt{42}}-t\frac{5z}{\sqrt{42}}-t^2\frac{5}{42}+y+t\frac{4}{\sqrt{42}}-xz-y}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t\frac{x}{\sqrt{42}}-t\frac{5z}{\sqrt{42}}-t^2\frac{5}{42}+t\frac{4}{\sqrt{42}}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t\left(\frac{x}{\sqrt{42}}-\frac{5z}{\sqrt{42}}-t\frac{5}{42}+\frac{4}{\sqrt{42}}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{x}{\sqrt{42}} - \frac{5z}{\sqrt{42}} - t\frac{5}{42} + \frac{4}{\sqrt{42}} \right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{42}} - \frac{5z}{\sqrt{42}} + \frac{4}{\sqrt{42}}$$

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{42}}(x - 5z + 4)}$$

---

2. Halle $D_{\hat{u}} f$ mediante el cálculo de $\varphi'(0)$, donde $\varphi(t) = f(\vec{x} + t\hat{u})$, cuando $f(x,y,z) = e^{xy} + lnz$; $\vec{u} = (2,0,3)$.

<u>Solución</u>

Primero buscamos un versor con la dirección del vector $\vec{u}$. Esto es:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(2,0,3)}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,0,3)$$

y recordando que:

$$D_{\hat{u}} f(\vec{x}) = \lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + t\hat{u}) - f(\vec{x})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0)$$

tenemos que

$$\varphi(t) = f(\vec{x} + t\hat{u}) = f\left((x,y,z) + t\frac{1}{\sqrt{13}}(2,0,3) \right)$$

$$\varphi(t) = f\left(x + \frac{2t}{\sqrt{13}}, y, z + \frac{3t}{\sqrt{13}} \right)$$

$$\varphi(t) = e^{\left(x + \frac{2t}{\sqrt{13}}\right)y} + ln\left(z + \frac{3t}{\sqrt{13}} \right)$$

$$\varphi'(t) = \frac{2y}{\sqrt{13}} e^{\left(x + \frac{2t}{\sqrt{13}}\right)y} + \frac{3}{\sqrt{13}} \left(\frac{1}{z + \frac{3t}{\sqrt{13}}} \right)$$

$$\varphi'(0) = \frac{2y}{\sqrt{13}} e^{xy} + \frac{3}{\sqrt{13}} \frac{1}{z}$$

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(x,y,z) = \varphi'(0) = \frac{1}{\sqrt{13}}\left(2ye^{xy} + \frac{3}{z} \right);\ z > 0}$$

DERIVADAS PARCIALES

Definición

Sea

$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (campo escalar)

$\vec{x}_0$ punto interior del D_f

La derivada parcial de f respecto de la variable x_i en $\vec{x}_0$ es la derivada direccional de f en $\vec{x}_0$ según la dirección $\hat{e}_i$ (i-ésimo versor de la base canónica de $\mathbb{R}^n$):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Cambiando $\vec{x}_0$ por $\vec{x}$ tenemos la **función derivada parcial** de f respecto de x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\hat{e}_i) - f(\vec{x})}{t}$$

con $Dominio_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\hat{e}_i) - f(\vec{x})}{t} \right\} \subset D_f$.

Podemos decir que:

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ es la derivada de f respecto de la variable x_i manteniendo fijas al resto de las variables.

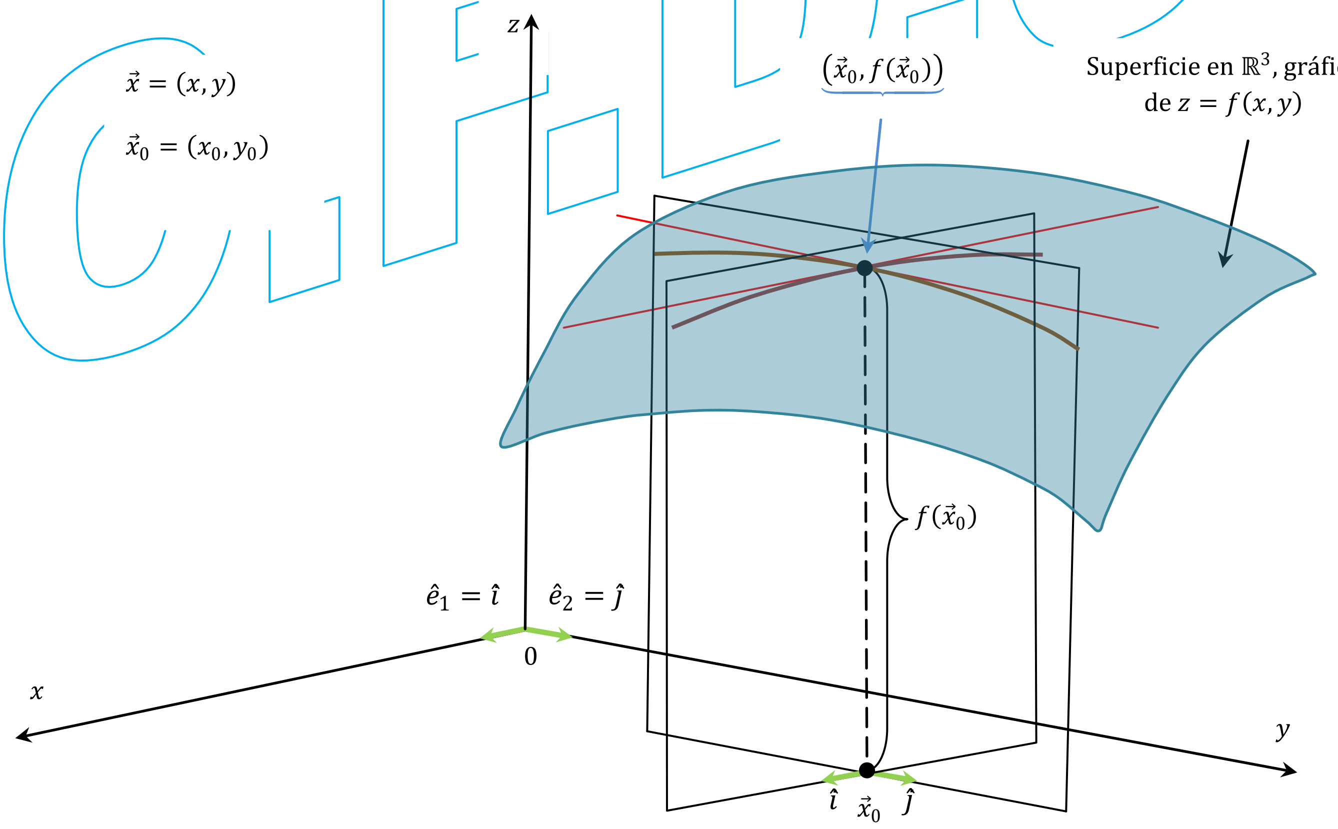
Por lo tanto las reglas de derivación de AMI se mantienen.

Notaciones equivalentes

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad , \quad f_{x_i}$$

Interpretación geométrica

Suponiendo que $n = 2$ o sea que $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tenemos x_i con $i = 1,2$; es decir $x_1 = x$ y $x_2 = y$.



Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$ dan las pendientes de las rectas tangentes en el punto $\big(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0)\big)$ de las curvas de intersección entre la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ y los planos verticales pasantes por el punto $\vec{x}_0$ en las direcciones $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ respectivamente.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ se interpreta también como la razón (o rapidez) de cambio de f en la dirección de $\hat{\imath}$, o sea del eje x.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ se interpreta también como la razón (o rapidez) de cambio de f en la dirección de $\hat{\jmath}$, o sea del eje y.

EJERCICIOS RESUELTOS

Determine las derivadas parciales de f cuando

a) $f(x,y) = x^2y^2 + y$

Las derivadas parciales son:

Derivo respecto de la variable x (mantengo fija a la variable y)

Derivo respecto de la variable y (mantengo fija a la variable x)

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2xy^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2x^2y + 1}$$

---

b) $f(x,y,z) = \frac{x^2z+y+2}{1+x^2}$

Recordando la regla de derivada de un cociente de AMI

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$u = x^2z + y + 2$

$v = 1 + x^2$

Manteniendo fijas las variables y y z, derivo respecto de x utilizando la regla de la derivada de un cociente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\overbrace{2xz}^{u'}\,\overbrace{(1+x^2)}^{v} - \overbrace{(x^2z+y+2)}^{u}\,\overbrace{2x}^{v'}}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{v^2}}$$

$$f_x = \frac{2xz + 2x^3z - 2x^3z - 2xy - 4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f_x = \frac{2xz - 2xy - 4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{2x(z-y-2)}{(1+x^2)^2}}$$

Como f puede expresarse

$$f(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2}(x^2z + y + 2)$$

tenemos que al derivar respecto de las variables y y z, $\frac{1}{1+x^2}$ es una constante por lo tanto obtenemos

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = \frac{x^2}{1+x^2}}$$

---

c) $f(x,y) = x^{(y^2)}$

Para derivar respecto de x aplicamos la regla de derivación de AMI:

$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ con $u = x, n = y^2$.

$$\boxed{f_x = y^2x^{y^2-1}(1) = y^2x^{y^2-1}}$$

Para derivar respecto de y aplicamos la regla de derivación de AMI:

$(a^u)' = a^u \ln(a)\, u'$ con $a = x, u = y^2$

$$\boxed{f_y = 2yx^{y^2} ln(x)}$$

<u>DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR</u>

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

El proceso de tomar derivada parcial puede ser repetido.

La derivada parcial de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ respecto de la j ésima variable se denota

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}=\left(f_{x_i}\right)_{x_j}=f_{x_i x_j}$$

y la derivada parcial de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ respecto de x_i se denota

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}=\left(f_{x_i}\right)_{x_i}=f_{x_i x_i}$$

Este proceso puede repetirse indefinidamente mientras las derivadas parciales existan. Son las llamadas derivadas parciales de orden superior.

Si

n: número de variables de f

N: orden de la derivada de f

Entonces

Cantidad de derivadas de orden N de $f = n^N$

Las derivadas parciales de segundo orden para una función de 2 variables $f(x,y)$ son:

$$f_{xx},\, f_{xy}$$

$$f_{yy},\, f_{yx}$$

Hay $2^2 = 4$ combinaciones

Las derivadas parciales de segundo orden para una función de 3 variables $f(x,y,z)$ son:

$$f_{xx},\, f_{xy},\, f_{xz}$$

$$f_{yy},\, f_{yx},\, f_{yz}$$

$$f_{zz},\, f_{zx},\, f_{zy}$$

Hay $3^2 = 9$ combinaciones

Las derivadas parciales de tercer orden para una función de 2 variables $f(x,y)$ son:

$$f_{xxx},\, f_{xxy},\, f_{xyx},\, f_{yxx}$$

$$f_{yyy},\, f_{yyx},\, f_{yxy},\, f_{xyy}$$

Hay $2^3 = 8$ combinaciones

Las derivadas parciales de tercer orden para una función de 3 variables $f(x,y,z)$ son:

$$f_{xxx},\, f_{xxy},\, f_{xyx},\, f_{yxx},\, f_{xxz},\, f_{xzx},\, f_{zxx},\, f_{xyz},\, f_{xzy}$$

$$f_{yyy},\, f_{yyx},\, f_{yxy},\, f_{xyy},\, f_{yyz},\, f_{yzy},\, f_{zyy},\, f_{yxz},\, f_{yzx}$$

$$f_{zzz},\, f_{zzx},\, f_{zxz},\, f_{xzz},\, f_{zzy},\, f_{zyz},\, f_{yzz},\, f_{zxy},\, f_{zyx}$$

Hay $3^3 = 27$ combinaciones

TEOREMA

Sea

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

Si $f_{x_i x_j}$ y $f_{x_j x_i}$ (llamadas derivadas parciales mixtas) son continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, entonces:

$$f_{x_i x_j}(\vec{x}_0) = f_{x_j x_i}(\vec{x}_0)$$

EJERCICIOS RESUELTOS

Determine todas las derivadas parciales de segundo orden de f cuando

a) $f(x,y) = xy^2 + e^{xy}$

$$f_x = y^2 + ye^{xy} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx} = y^2 e^{xy} \\ f_{xy} = 2y + e^{xy} + xye^{xy} \end{cases}$$

$$f_y = 2xy + xe^{xy} \Rightarrow \begin{cases} f_{yy} = 2x + x^2 e^{xy} \\ f_{yx} = 2y + e^{xy} + xye^{xy} \end{cases}$$

Derivadas parciales mixtas iguales

---

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \longrightarrow f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$f_x = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$f_x = x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Derivo respecto de y

Derivo respecto de z

Derivo respecto de x

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = x$$

$$v = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f_{xy} = -\tfrac{1}{2}x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(2y)$$

$$\boxed{f_{xy} = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\forall(x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

$$\boxed{f_{xz} = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\forall(x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

$$f_{xx} = \frac{1\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{f_{xx} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};\forall(x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2y) = \underbrace{y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}} = \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

Derivo respecto de x

$$\boxed{f_{yx} = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \forall(x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

Derivo respecto de y

Derivo respecto de z

$$\boxed{f_{yz} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \forall(x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$u = y$$

$$v = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f_{yy} = \frac{1\sqrt{x^2+y^2+z^2}-y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\frac{x^2+y^2+z^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{f_{yy} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \forall(x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$f_z = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}(2z) = \underbrace{z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}} = \underbrace{\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$$

Derivo respecto de x

$$\boxed{f_{zx} = -\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \forall(x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

Derivo respecto de z

Derivo respecto de y

$$\boxed{f_{zy} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \forall(x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$u = z$$

$$v = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f_{zz} = \frac{1\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\frac{x^2+y^2+z^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{f_{zz} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \forall(x,y,z) \neq (0,0,0)}$$

Para una función de AMI $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\boldsymbol{f} \textbf{ derivable } \underset{\nLeftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} \boldsymbol{f} \textbf{ continua}$$

Ahora, para una función de varias variables $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $n = 2,3,\cdots$) se tiene que:

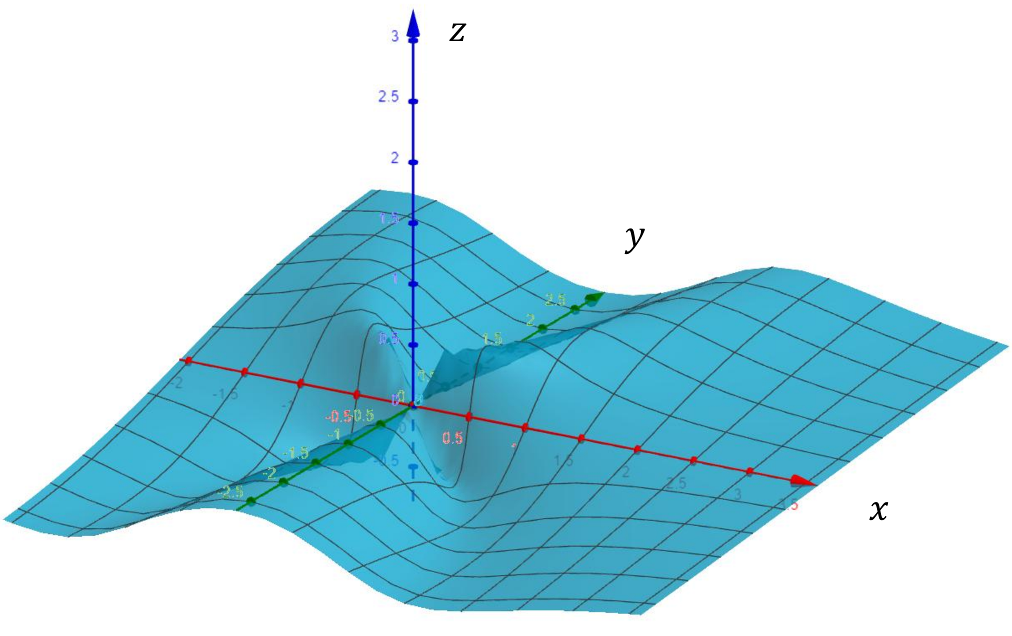
$$\textbf{Existen todas las derivadas direccionales de } \boldsymbol{f} \quad \nRightarrow \quad \boldsymbol{f} \textbf{ continua}$$

Ejemplo

Para la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad , & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

cuya gráfica es:



Demuestre que en el origen existe la derivada direccional en cualquier dirección pero f no es continua allí.

Solución

Sea $\hat{u} = (u_1, u_2)$ un versor

Este es un ejemplo en donde se puede ver que la mera existencia de todas las derivadas direccionales no implica si quiera que la función sea continua.

$$D_{\hat{u}}f\,\overbrace{(0,0)}^{\vec{x}_0} \stackrel{?}{=} \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\overbrace{(0,0)}^{\vec{x}_0}+t\,\overbrace{(u_1,u_2)}^{\hat{u}}\right)-f\,\overbrace{(0,0)}^{\vec{x}_0}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{(tu_1)^2tu_2}{(tu_1)^4+(tu_2)^2}-0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{t^3u_1^2u_2}{t^2(t^2u_1^4+u_2^2)}}{t}$$

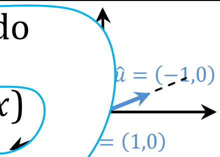
$$= \lim_{t\to 0}\frac{u_1^2u_2}{t^2u_1^4+u_2^2}$$

$$\boxed{D_{\hat{u}}f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{u_1^2}{u_2}, si\ u_2 \neq 0 \\ 0\,, si\ u_2 = 0\ (\Rightarrow u_1 = \pm 1) \end{cases}}$$

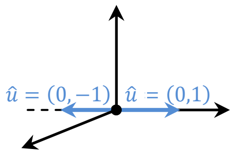
Esto demuestra que el límite existe en $(0,0)$ cualquiera sea $\hat{u}$, es decir, existe la derivada direccional de f en $(0,0)$ en cualquier dirección.

En particular, el valor de la derivada direccional de f en $(0,0)$ es 0 cuando

$u_2 = 0\ \Rightarrow u_1 = \pm 1$ (es decir, en ambos sentidos de la dirección del eje x)



Cuando $u_2 \neq 0$ el valor de la derivada direccional de f en $(0,0)$ es $\frac{u_1^2}{u_2}$, en particular si $u_1 = 0\ \Rightarrow u_2 = \pm 1$, la derivada direccional de f en $(0,0)$ en ambos sentidos de la dirección del eje y es también cero.



Para el resto de las direcciones, con $u_1 \neq 0 \wedge u_2 \neq 0 / u_1^2 + u_2^2 = 1$, el valor de la derivada direccional de f en $(0,0)$ es $\frac{u_1^2}{u_2} \neq 0$.

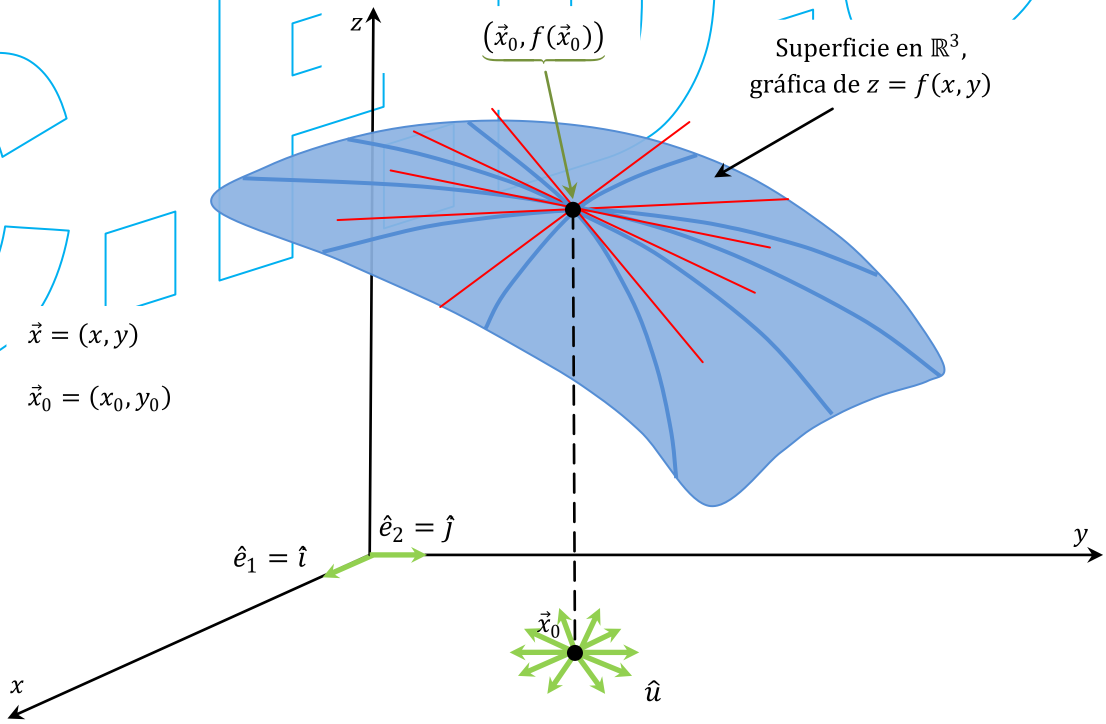
Para demostrar que f no es continua en el origen, consideremos el siguiente conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$ y hagamos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \vec{x}\in S}}\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq \overbrace{0}^{f(0,0)} \Rightarrow f\ NO\ es\ continua\ en\ (0,0)$$

Para una función de varias variables $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (con $n = 2,3,\cdots$) se tiene que:

Existen todas las derivadas direccionales de f $\Rightarrow$ Existen las derivadas parciales de f

Por ejemplo, para una función de ecuación $z = f(x, y)$ cuya gráfica sea:



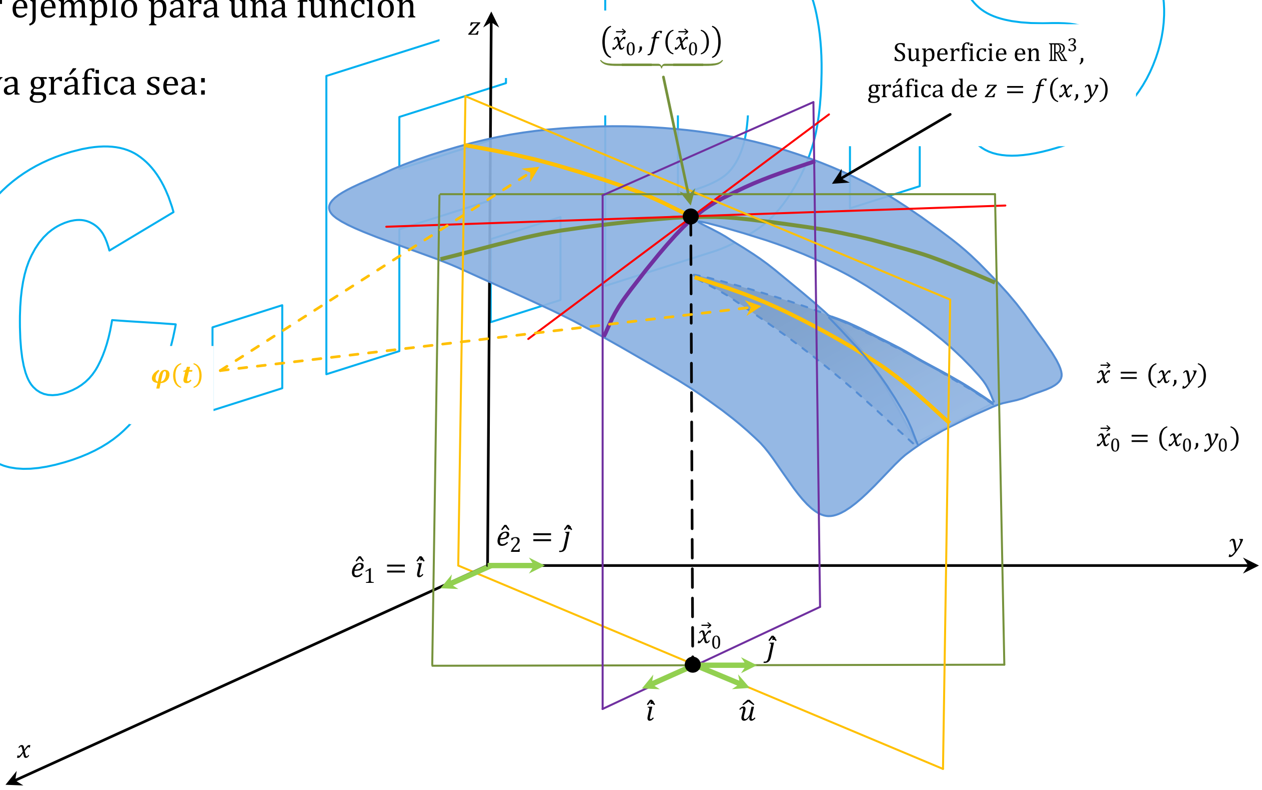
Puede verse que en el punto $\vec{x}_0$, f tiene derivada en cualquier dirección.

Ahora:

Existen las derivadas parciales de f $\not\Rightarrow$ Existen todas las derivadas direccionales de f

Por ejemplo para una función

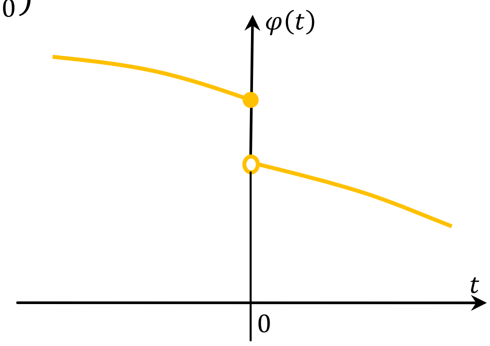
cuya gráfica sea:



Se tiene que existen $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$, pero no existe $\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(\vec{x}_0)$

ya que $\nexists \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\overbrace{\varphi(t)}^{f(\vec{x}_0+t\hat{u})} \; \overbrace{-\varphi(0)}^{f(\vec{x}_0)}}{t}$.

O sea que no existe la recta tangente a la curva $\varphi(t)$ en el punto $(0,\varphi(0)) = (\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$.

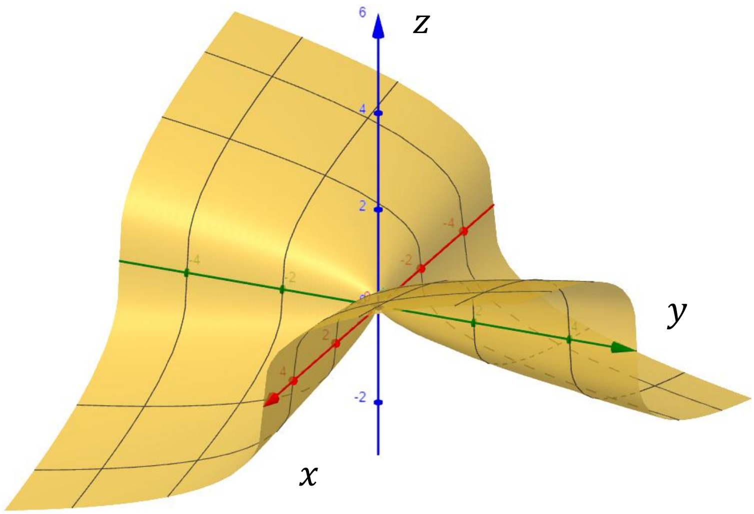


Luego, podemos afirmar que:

Existen todas las derivadas direccionales de f $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ Existen las derivadas parciales de f

Ejemplo

Para la siguiente función $f(x,y) = (x\,y)^{\frac{1}{3}}$ cuya gráfica es:



a) Demuestre que las únicas direcciones en las cuales existen las derivadas en el origen son $\pm\hat{e}_1$ y $\pm\hat{e}_2$.
b) Demuestre si es o no continua en (0,0).

Solución

Sea $\hat{u} = (u_1, u_2)$

$$= u_1\hat{e}_1 + u_2\hat{e}_2$$
$$= u_1\hat{\imath} + u_2\hat{\jmath}$$

Este es un ejemplo en donde se puede ver que la existencia de las derivadas parciales no implica la existencia de la derivada en otras direcciones.

a)

$$D_{\hat{u}} f\,\overbrace{(0,0)}^{\vec{x}_0} \overset{?}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\overbrace{(0,0)}^{\vec{x}_0} + t\,\overbrace{(u_1,u_2)}^{\hat{u}}\right) - f\,\overbrace{(0,0)}^{\vec{x}_0}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1,tu_2) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(tu_1tu_2)^{\frac{1}{3}} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2u_1u_2)^{\frac{1}{3}}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(t^{\frac{2}{3}}t^{-1}(u_1u_2)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(t^{-\frac{1}{3}}(u_1u_2)^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{u_1u_2}{t}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \begin{cases} \nexists \; si \;\; u_1u_2 \neq 0 \\ \exists \; si \; u_1u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{u_1u_2}{t}\right)^{\frac{1}{3}}; \;\; si \; u_1u_2 = 0}$$

La condición $u_1u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$ y/ó $u_2 = 0$, pero como $u_1 = u_2 = 0$ no puede darse ya que $\|\hat{u}\| = 1$, entonces:

$$\hat{u} = \begin{cases} \overbrace{(\pm 1)}^{u_1}\,\hat{e}_1 + \overbrace{(0)}^{u_2}\,\hat{e}_2 = \pm\hat{e}_1 = (\pm 1,0) \\ \text{ó} \\ \overbrace{(0)}^{u_1}\,\hat{e}_1 + \overbrace{(\pm 1)}^{u_2}\,\hat{e}_2 = \pm\hat{e}_2 = (0,\pm 1) \end{cases}$$

Conclusión:

Para la función dada no existen derivadas direccionales en el origen en otras direcciones que no sean $\pm\hat{e}_1$ y $\pm\hat{e}_2$.

Además: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Se puede demostrar que f es continua en $(0,0)$, para ello hay que probar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x\,y)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \;\Rightarrow\; \left|(x\,y)^{\frac{1}{3}} - 0\right| = (|x||y|)^{\frac{1}{3}} \leq (\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|)^{\frac{1}{3}} = \|\vec{x}\|^{\frac{2}{3}} < \delta^{\frac{2}{3}} < \varepsilon$$

Basta con tomar $\delta < \varepsilon^{\frac{3}{2}}$ para que se cumpla la definición de límite, por lo tanto queda demostrado que:

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \overbrace{(x\,y)^{\frac{1}{3}}}^{f(x,y)} = \overbrace{0}^{f(0,0)}}_{\Downarrow}$$

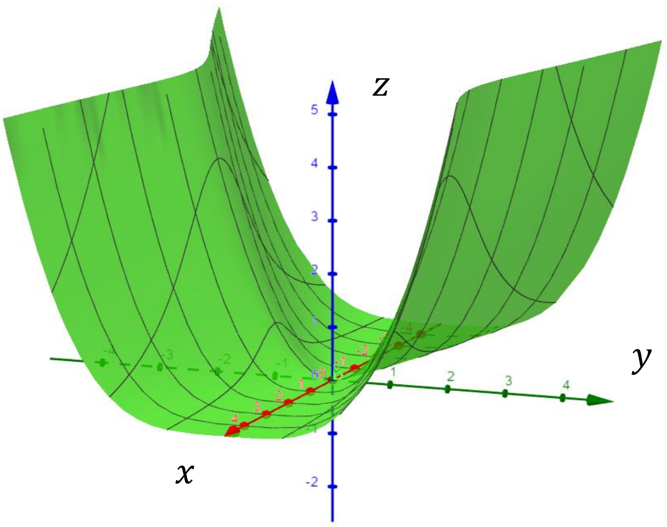
f es continua en $(0,0)$

Ejemplo

Para la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2 + y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad , & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

cuya gráfica es:



Obtenga

a) $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
b) $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$.
c) $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$.

Este es un ejemplo en donde se puede ver cuándo es posible aplicar una regla de derivación y cuándo sólo se debe aplicar la definición de derivada parcial.

Solución

a) Aquí se debe aplicar la definición de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t} \quad \text{(suponiendo que } \exists\text{)}$$

Con $i = 1{,}2$; $x_1 = x,\ x_2 = y$; $\hat{e}_1 = \hat{\imath} = (1{,}0),\ \ \hat{e}_2 = \hat{\jmath} = (0{,}1)$

$\vec{x}_0 = (0{,}0)$

$$f_x(0{,}0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\overbrace{(0{,}0)}^{\vec{x}_0} + t\,\overbrace{(1{,}0)}^{\hat{\imath}}\right) - f(0{,}0)}{t}$$

$$\boxed{f_x(0{,}0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0{,}0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0^4}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^3} = 0}$$

$$f_y(0{,}0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\overbrace{(0{,}0)}^{\vec{x}_0} + t\,\overbrace{(0{,}1)}^{\hat{\jmath}}\right) - f(0{,}0)}{t}$$

$$\boxed{f_y(0{,}0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t) - f(0{,}0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^4}{0^2+t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} t = 0}$$

b) Como

$$f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2} = y^4(x^2+y^2)^{-1}, \qquad si\ (x,y) \neq (0{,}0)$$

$$f_x(x,y) = y^4(-1)(x^2+y^2)^{-2}(2x);\ si\ (x,y) \neq (0{,}0)$$

$$f_x(x,y) = -\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\ ;\ si\ (x,y) \neq (0{,}0)$$

Luego usando este resultado y el obtenido en a) se tiene que:

$$\boxed{f_x(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & ,si\ (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0 & ,si\ (x,y) = (0{,}0) \end{cases}}$$

Como

$$f(x,y)=\frac{\overbrace{y^4}^{u}}{\underbrace{x^2+y^2}_{v}},\qquad si\ (x,y)\neq(0,0)$$

De AMI: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, $v\neq 0$ (regla de la derivada de un cociente)

$$f_y(x,y)=\frac{\overbrace{4y^3}^{u'}\overbrace{(x^2+y^2)}^{v}-\overbrace{y^4}^{u}\overbrace{(2y)}^{v'}}{\underbrace{(x^2+y^2)^2}_{v^2}}=\frac{4x^2y^3+2y^5}{(x^2+y^2)^2}\ ;\ si\ (x,y)\neq(0,0)$$

Luego usando este resultado y el obtenido en a) se tiene que:

$$\boxed{f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^3+2y^5}{(x^2+y^2)^2} & ,si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}}$$

c) Aquí se debe aplicar la definición

$$f_{xy}(\vec{x}_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\vec{x}_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_x(\vec{x}_0+t\hat{\jmath})-f_x(\vec{x}_0)}{t}$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_x\big((0,0)+t(0,1)\big)-f_x(0,0)}{t}$$

$$\boxed{f_{xy}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_x(0,t)-f_x(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2(0)t^4}{(0^2+t^2)^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0}{t^5}=0}$$

$$f_{yx}(\vec{x}_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{x}_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y(\vec{x}_0+t\hat{\imath})-f_y(\vec{x}_0)}{t}$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y\big((0,0)+t(1,0)\big)-f_y(0,0)}{t}$$

$$\boxed{f_{yx}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_y(t,0)-f_y(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{4t^2(0^3)+2(0^5)}{(t^2+0^2)^2}-0}{t}\lim_{t\to 0}\frac{0}{t^5}=0}$$

DIFERENCIABILIDAD

Continuando con la idea de aproximar a una función $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ en un entorno de $\vec{x}_0$ *-punto interior del* $D_{\vec{f}}$ - mediante una función afín, es que resulta necesario introducir el concepto de diferencial.

Para el caso de una función de AMI decimos que:

Sean

$$f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

x_0 punto interior del D_f

$$h = x - x_0$$

Si f es **diferenciable** (derivable) en x_0 entonces

$$\underbrace{f'(x_0)} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\downarrow$$

El límite de una constante es la constante

$$\overbrace{\lim_{h \longrightarrow 0} f'(x_0)} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\underbrace{\underbrace{\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\exists} - \underbrace{\lim_{h \longrightarrow 0} f'(x_0)}_{\exists}} = 0$$

Por álgebra de límites

Resta de límites

$$\underbrace{\lim_{h \longrightarrow 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right]} = 0$$

Límite de la resta

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\,h}{h} = 0$$

Llegamos entonces a la siguiente equivalencia:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\,h}{h} = 0}$$

donde a

$$f'(x_0)\, h = df(x_0, h)$$

lo llamamos **diferencial de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$ y $\boldsymbol{h}$**.

Es decir

$$df(x_0, h) = f'(x_0)\left(\overbrace{x - x_0}^{h}\right) = L(h)$$

Por lo tanto la **diferencial** es la **lineal** de la **afín**

$$A(x) = \underbrace{\overbrace{f'(x_0)}^{\text{matriz } 1\times 1}\ (x - x_0)}_{L(x-x_0)=\boldsymbol{df(x_0,h)}} + \underbrace{f(x_0)}_{b\ (\text{cte})}$$

que aproxima a f en un entorno de x_0.

Podemos entonces dar la siguiente definición de **diferenciabilidad**.

Sean

$$f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_0 \text{ punto interior del } D_f$$

$$h = x - x_0 \ \in \mathbb{R}$$

Decimos que f es **diferenciable** en x_0 si y sólo si existe una aplicación lineal $L: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} = 0$$

Y ahora extendemos este concepto para funciones $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

DIFERENCIABILIDAD PARA FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$

DEFINICIÓN

Sean

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x}_0 \text{ punto interior del } D_{\vec{f}}$$

$$\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0 \ \in \mathbb{R}^n$$

Decimos que $\vec{f}$ es **diferenciable** en $\vec{x}_0$ si y sólo si existe una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

TEORMA: UNICIDAD DE LA LINEAL

Enunciado

Sean

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0 \ \in \mathbb{R}^n$$

Si $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ entonces L es única.

Demostración

Suponiendo que existe otra lineal M, entonces ésta debe satisfacer:

$$(1) \quad \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - M(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

Como L satisface:

$$(2)\ \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0)-L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$$

Luego restando miembro a miembro $(1)-(2)$:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0)-M(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}-\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0)-L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}-\vec{0}$$

Por álgebra de límites

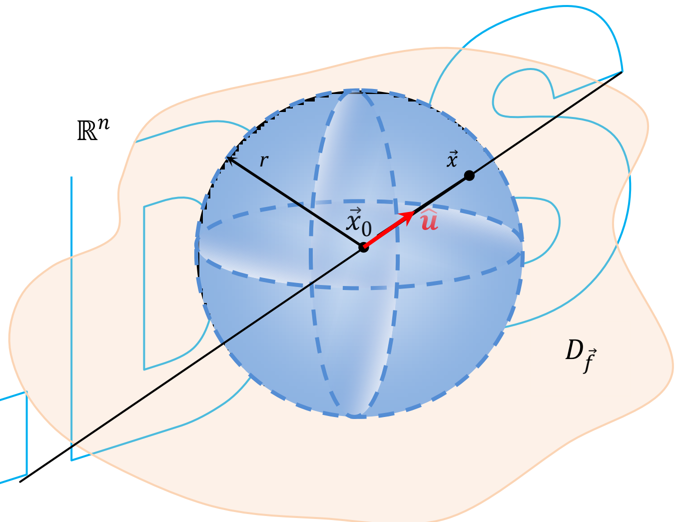
$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0)-M(\vec{h})-\vec{f}(\vec{x}_0+\vec{h})+\vec{f}(\vec{x}_0)+L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$$

obtenemos

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{L(\vec{h})-M(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\vec{0}$$

Como $\vec{x}_0$ es punto interior del $D_{\vec{f}}$, $\exists\, B_r(\vec{x}_0)\,\big|\, B_r(\vec{x}_0)\subset D_{\vec{f}}$; entonces si hacemos $\vec{x}=\vec{x}_0+t\hat{u}$ con $\hat{u}$: cualquier dirección de $\mathbb{R}^n$ tenemos que $\vec{x}$ es también punto interior del $D_{\vec{f}}$ $\forall t\in(-r,r)$ y

$$\vec{h}=\vec{x}-\vec{x}_0=t\hat{u}$$



con lo cual $\vec{h}\longrightarrow\vec{0}$ si $t\longrightarrow 0$ y

el límite anterior se puede expresar:

$$\lim_{t\to 0} \frac{L(t\hat{u})-M(t\hat{u})}{\|t\hat{u}\|}=\vec{0}$$

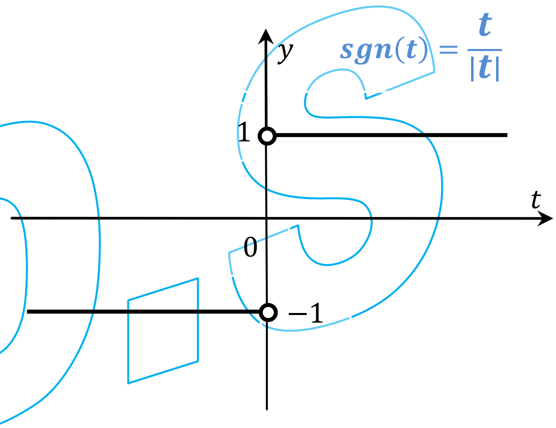
donde

$$\|t\hat{u}\| = |t|\,\overbrace{\|\hat{u}\|}^{=1} = |t|$$

$$\left.\begin{array}{l} L(t\hat{u}) = t\,L(\hat{u}) \\ M(t\hat{u}) = t\,M(\hat{u}) \end{array}\right\} \text{propiedad de las lineales}$$

Entonces

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{|t|}\big(L(\hat{u}) - M(\hat{u})\big)\right] = \vec{0}$$



Como $\frac{t}{|t|}$ está acotada pero no tiende a cero cuando $t \longrightarrow 0$, entonces para que el límite sea $\vec{0}$ debe ocurrir que $L(\hat{u}) = M(\hat{u});\ \forall \hat{u} \in \mathbb{R}^n$, o sea que:

$$M = L \quad \Rightarrow \quad L \text{ es única}$$

<u>LA DIFERENCIAL</u>

Si $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, entonces a la (única) lineal $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

la llamamos **la diferencial de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ y $\vec{h}$** y la denotamos

$$d\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{h}) = L(\vec{h})$$

Como L es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ viene representada por una matriz $m \times n$. La expresión de esa matriz las bases canónicas de $\mathbb{R}^n\ y\ \mathbb{R}^m$ se obtiene a partir del siguiente teorema.

TEOREMA

Enunciado

Si $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ entonces la matriz de L en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es la **matriz Jacobiana de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$**:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} = J\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{f}'(\vec{x}_0)$$

Y representa a la **derivada** del **campo vectorial $\vec{f}$** en $\vec{x}_0$.

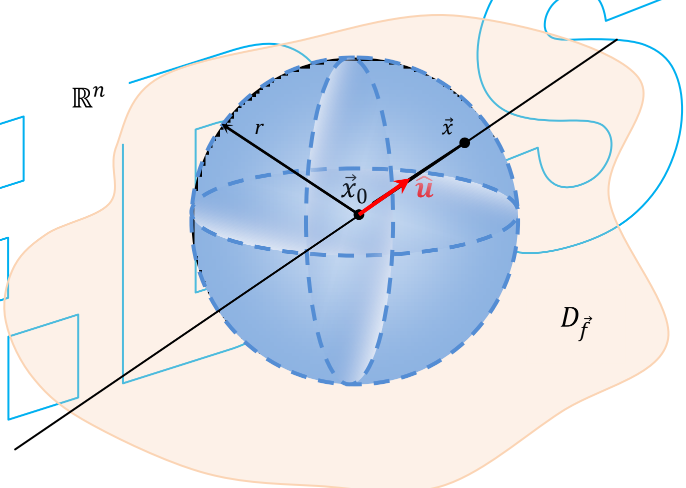
Demostración

Por ser $\vec{f}$ diferenciable en $\vec{x}_0$ existe una única lineal $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que satisface:

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

Como $\vec{x}_0$ es punto interior del $D_{\vec{f}}$, $\exists\, B_r(\vec{x}_0) \,\big|\, B_r(\vec{x}_0) \subset D_{\vec{f}}$; entonces si hacemos $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\hat{u}$ con $\hat{u}$: cualquier dirección de $\mathbb{R}^n$ tenemos que $\vec{x}$ es también punto interior del $D_{\vec{f}}$ $\forall t \in (-r, r)$ y

$$\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0 = t\hat{u}$$



con lo cual $\vec{h} \longrightarrow \vec{0}$ si $t \longrightarrow 0$ y

el límite anterior se puede expresar:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + t\hat{u}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(t\hat{u})}{\|t\hat{u}\|} = \vec{0}$$

donde: $\|t\hat{u}\| = |t|\,\overbrace{\|\hat{u}\|}^{=1} = |t|$ y $L(t\hat{u}) = t\,L(\hat{u})$ (por propiedad de la lineal)

Entonces

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\vec{f}(\vec{x}_0+t\hat{u})-\vec{f}(\vec{x}_0)-tL(\hat{u})}{|t|}=\vec{0}$$

$\Updownarrow$ **por TFL** (teorema fundamental de límite)

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f_i(\vec{x}_0+t\hat{u})-f_i(\vec{x}_0)-tL_i(\hat{u})}{|t|}=0\,,\qquad 1\leq i\leq m$$

donde f_i denota la i-ésima función coordenada de $\vec{f}$ y L_i la i-ésima componente del vector columna $L(\hat{u})$.

Como es límite es cero, puede eliminarse el valor absoluto en el denominador

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f_i(\vec{x}_0+t\hat{u})-f_i(\vec{x}_0)-tL_i(\hat{u})}{t}=0\,,\qquad 1\leq i\leq m$$

Como $t\neq 0$

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\left[\frac{f_i(\vec{x}_0+t\hat{u})-f_i(\vec{x}_0)}{t}-\underbrace{L_i(\hat{u})}_{\text{no depende de } t}\right]=0\,,\qquad 1\leq i\leq m$$

$$\underbrace{\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f_i(\vec{x}_0+t\hat{u})-f_i(\vec{x}_0)}{t}}_{\textbf{Por definición}}=L_i(\hat{u}),\qquad 1\leq i\leq m$$

$$\underbrace{\overbrace{\frac{\partial f_i}{\partial \hat{u}}(\vec{x}_0)}}_{\substack{\text{Derivada direccional}\\ \text{de la función coordenada } f_i \text{ de } \vec{f}\\ \text{en } \vec{x}_0 \text{ según la dirección } \hat{u}}}=L_i(\hat{u}),\qquad 1\leq i\leq m$$

Como queremos obtener la matriz de L en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ hay que hacer $\hat{u}=\underbrace{\hat{e}_j}_{\substack{j-\text{ésimo versor}\\ \text{de la base canónica de } \mathbb{R}^n}}=\left(0,\cdots,\underbrace{1}_{\substack{j-\text{ésima}\\ \text{componente escalar}}},\cdots,0\right)$ para cada $j=1,\cdots,n;$ con lo cual resulta

$$\underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial \hat{e}_j}(\vec{x}_0)}_{\substack{\text{Derivada direccional}\\ \text{de la función coordenada } f_i \text{ de } \vec{f}\\ \text{en } \vec{x}_0 \text{ según la dirección } \hat{e}_j}} = \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)}_{\substack{\text{Derivada parcial en } \vec{x}_0\\ \text{de la función coordenada } f_i \text{ de } \vec{f}\\ \text{respecto de la variable } x_j}} = L_i(\hat{e}_j)$$

Este es el elemento que corresponde a la columna j, fila i de la matriz $m \times n$ de la lineal L.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \boldsymbol{L_i(\hat{e}_j)} \qquad \textbf{columna } \boldsymbol{j} \\ \downarrow \end{array} \\ \textbf{fila } \boldsymbol{i} \longrightarrow & \begin{pmatrix} & & \\ & \boldsymbol{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0)} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Si para cada $j = 1, \cdots, n$ hacemos que i tome cada uno de sus valores de 1 a m se obtiene la matriz de L en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

(Fin de la demostración)

<u>Observaciones</u>

Como

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n), \qquad \vec{x}_0 = (a_1, \cdots, a_n) \quad \text{y} \quad \vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$$

Para $\vec{f}$ **diferenciable** en $\vec{x}_0$, tenemos que la **diferencial** de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ y $\vec{h}$ es:

$$d\vec{f}(\vec{x}_0, \vec{h}) = L(\vec{h}) = \underbrace{\underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}}^{\vec{f}'(\vec{x}_0)}}_{\textbf{matriz } \boldsymbol{m\times n}} \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}}^{\vec{h}=\vec{x}-\vec{x}_0}}_{\textbf{matriz } \boldsymbol{n\times 1} \textbf{ (vector)}}}_{\boldsymbol{m\times 1} \textbf{ (vector)}}$$

Y al límite

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\vec{f}\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right)-\vec{f}(\vec{x}_0)-\overbrace{L\left(\vec{h}\right)}^{\vec{f}'(\vec{x}_0)\,\vec{h}}}{\left\|\vec{h}\right\|}=\vec{0}$$

podemos expresarlo de otra forma equivalente si tenemos en cuenta que $\vec{h}=\vec{x}-\vec{x}_0$ $\left(\Rightarrow \vec{x}=\vec{x}_0+\vec{h}\right)$ y que $\vec{h}\longrightarrow\vec{0}$ si $\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0$. Esta forma es:

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x})-\vec{f}(\vec{x}_0)-\overbrace{L}^{\vec{f}'(\vec{x}_0)}(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}=\vec{0}}$$

Ahora si $m=1$, es decir $f\colon D_f\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ es campo escalar (con $n\geq 2$) **diferenciable** en $\vec{x}_0$, entonces:

$$df\left(\vec{x}_0,\vec{h}\right)=L\left(\vec{h}\right)=\overbrace{\overbrace{\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0),\quad\cdots\quad,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)}_{f'(\vec{x}_0)=\underbrace{\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)}_{\substack{\text{lo llamamos}\\ \text{vector gradiente de } f \text{ en } \vec{x}_0.\\ (\vec{\nabla}\text{: nabla})}}}}^{1\times n}\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} x_1-a_1\\ \vdots\\ x_n-a_n\end{pmatrix}}_{\vec{h}=\vec{x}-\vec{x}_0}}^{n\times 1}}^{1\times 1\ (\text{escalar})}$$

y a

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{f\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right)-f(\vec{x}_0)-\overbrace{L\left(\vec{h}\right)}^{\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)\,\vec{h}}}{\left\|\vec{h}\right\|}=0$$

podemos también expresarlo como

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)-\overbrace{L}^{\vec{\nabla}f(\vec{x}_0)}(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}=0}$$

PLANO TANGENTE

Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable en $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ entonces

$$\lim_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \overbrace{f'(\vec{x}_0)}^{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)}\left(\overbrace{\vec{x}-\vec{x}_0}^{\vec{h}}\right)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = 0$$

$$\lim_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - \left[\overbrace{f'(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)}^{L(\vec{x}-\vec{x}_0)\text{: lineal}} + \overbrace{f(\vec{x}_0)}^{\text{cte}}\right]}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = 0$$

Como este límite es 0, quiere decir que el numerador del límite: $f(\vec{x}) - \left[\overbrace{f'(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + f(\vec{x}_0)}^{A(\vec{x})\text{: afín}}\right]$ tiende a cero más rápido de lo que hace el denominador: $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|$ cuando $\vec{x}$ tiende a $\vec{x}_0$. Por lo tanto

$$f(\vec{x}) \approx A(\vec{x}) = f'(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0) + f(\vec{x}_0)$$

Es decir, $A(\vec{x})$ es **"una buena aproximación"** de la función f en un entono de $\vec{x}_0$.

$$\overbrace{A(x,y)}^{A(\vec{x})} = \overbrace{f'(x_0,y_0)}^{f'(\vec{x}_0)} \overbrace{\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}}^{\vec{h}=\vec{x}-\vec{x}_0} + \overbrace{f(x_0,y_0)}^{f(\vec{x}_0)}$$

$$A(x,y) = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}}^{f'(x_0,y_0)=\vec{\nabla} f(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + f(x_0,y_0)$$

Realizando el producto de matrices y escribiendo $z = A(x,y)$ obtenemos

$$\boxed{z = \underbrace{\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}^{L(\vec{h})=df(\vec{x}_0,\vec{h})\text{: lineal}} + \overbrace{f(x_0,y_0)}^{z_0\text{: cte}}}_{A(\vec{x})\text{: afín}}}$$

que es la ecuación del **plano tangente** a la gráfica de f en (x_0, y_0).

C.F.D.S