LÍMITE

DEFINICIÓN

Sea

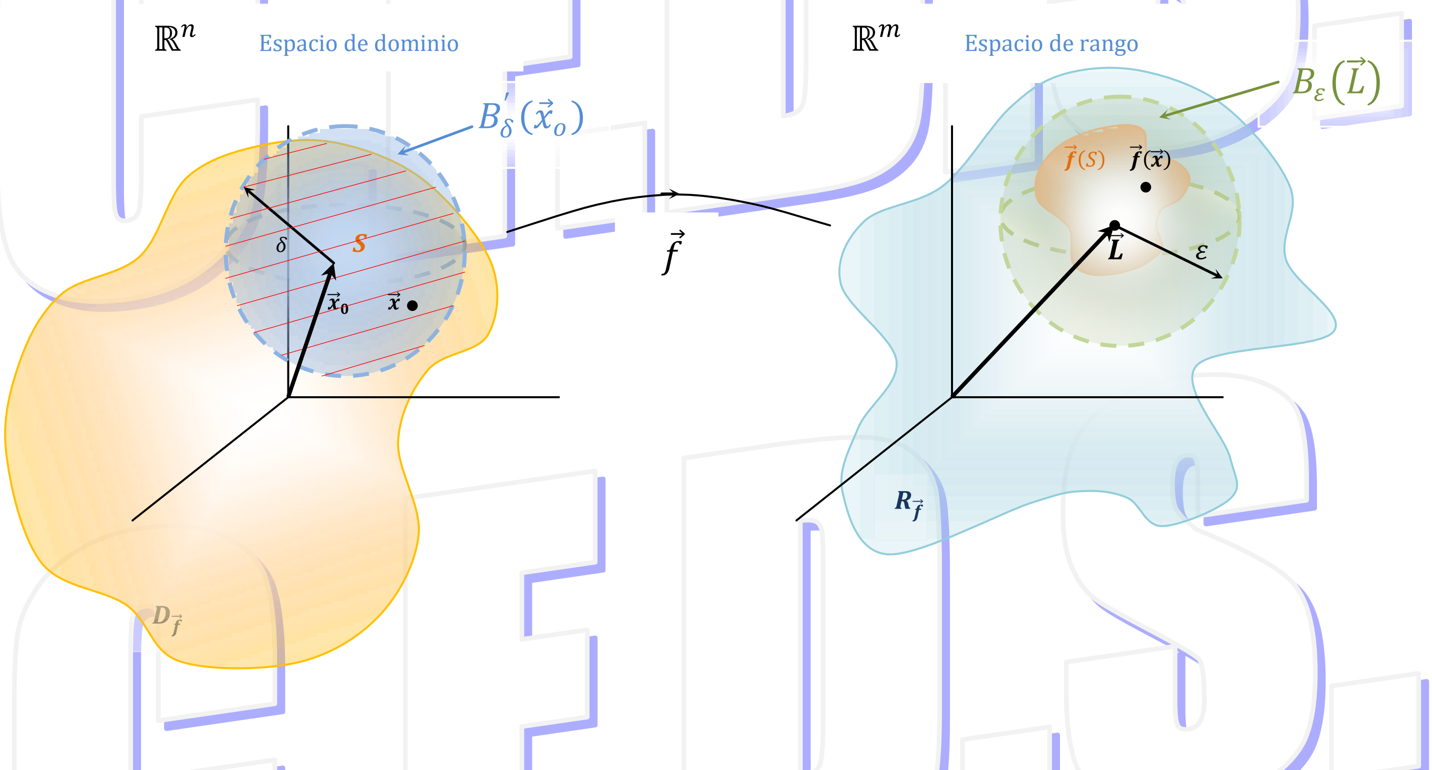
$* \ \vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$* \ \vec{x}_0$ punto de acumulación del $D_{\vec{f}}$

Se dice que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}\,(\vec{x}) = \vec{L} \quad \overset{si\ y\ sólo\ si}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \mid \underbrace{\forall\vec{x} \in B'_{\delta}(\vec{x}_o) \cap D_{\vec{f}}}_{0<\|\vec{x}-\vec{x}_o\|<\delta \,\wedge\, \vec{x}\in D_{\vec{f}}} \Rightarrow \underbrace{\vec{f}(\vec{x}) \in B_{\varepsilon}(\vec{L})}_{\|\vec{f}(\vec{x})-\vec{L}\|<\varepsilon}$$

Interpretación geométrica



Si $S = B'_{\delta}(\vec{x}_o) \cap D_{\vec{f}} \ \Rightarrow \ S \subset D_{\vec{f}}$ entonces el conjunto $\vec{f}(S)$ es la imagen de S por $\vec{f}$ y que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}\,(\vec{x}) = \vec{L}$$

significa que $\forall\, B_\varepsilon(\vec{L})$ que se tome siempre es posible conseguir un $B'_\delta(\vec{x}_o)$ tal que $\vec{f}(S) \subset B_\varepsilon(\vec{L})$.

TEOREMA "FUNDAMENTAL" DE LÍMITE

Sea

$$* \ \vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \big(f_1(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\big)$$

$$\text{donde } f_i: D_{f_i} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, m$$

$$* \ \vec{L} \in \mathbb{R}^m$$

$$\vec{L} = (L_1, \cdots, L_m)$$

Entonces

$$\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L} \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = L_i \ \text{ para cada } i = 1, \cdots, m}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} f_1(\vec{x}) = L_1 \\ \vdots \\ \lim\limits_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} f_m(\vec{x}) = L_m \end{cases}$$

Por el teorema "fundamental" de límite, el análisis de límites de funciones

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

se reduce al análisis de los límites de sus funciones coordenadas que son campos escalares:

$$f_i: D_{f_i} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \cdots, m$$

Por esta razón sólo se van a considerar límites de funciones

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

principalmente de 2 y 3 variables, es decir con $n = 2$ y 3.

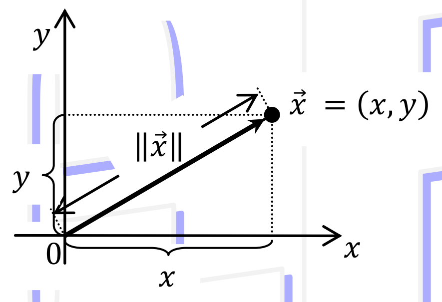
Por ejemplo, para demostrar que:

$$\lim_{\underbrace{(x,y)}_{\vec{x}} \to \underbrace{(x_0,y_0)}_{\vec{x}_0}} f(x,y) = L$$

se utiliza la definición ε-δ de límite.

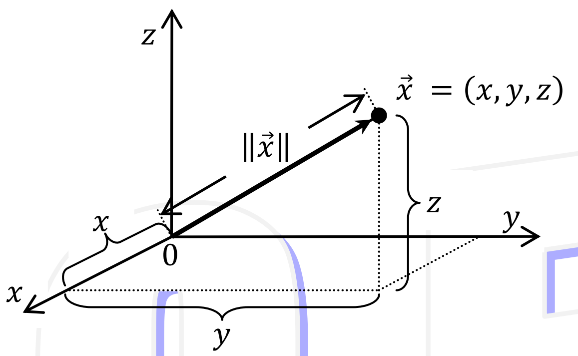
Y para realizar las demostraciones se emplean algunas relaciones tales como las siguientes:

$\mathbb{R}^2$ *n=2*



$$\vec{x} = (x,y)$$
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2} \ ; \ \|\vec{x}\|^2 = x^2 + y^2$$
$$|x| = \sqrt{x^2} \le \|\vec{x}\| \ ; \ |x|^2 = x^2 \le \|\vec{x}\|^2$$
$$|y| = \sqrt{y^2} \le \|\vec{x}\| \ ; \ |y|^2 = y^2 \le \|\vec{x}\|^2$$

$\mathbb{R}^3$ *n=3*



$$\vec{x} = (x,y,z)$$
$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ ; \ \|\vec{x}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$|x| = \sqrt{x^2} \le \|\vec{x}\| \ ; \ |x|^2 = x^2 \le \|\vec{x}\|^2$$
$$|y| = \sqrt{y^2} \le \|\vec{x}\| \ ; \ |y|^2 = y^2 \le \|\vec{x}\|^2$$
$$|z| = \sqrt{z^2} \le \|\vec{x}\| \ ; \ |z|^2 = z^2 \le \|\vec{x}\|^2$$

Otra relación útil es la desigualdad triangular:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \ ; \ \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

EJERCICIOS

1. Para las siguientes funciones demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

$a)\ \boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}}$

Solución:

$f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$
$\vec{x} = (x,y)$
$\vec{x}_0 = (0,0) = \vec{0}$ punto de acumulación del D_f
$L = 0$

Aplicando la definición de límite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ |0 < \|\vec{x} - \vec{x}_o\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ |0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left|\frac{x^2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ |0 < \|\vec{x}\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{x^2|y^3|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2|y|^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|^3}{\|\vec{x}\|} = \|\vec{x}\|^4 < \delta^4 < \varepsilon$$

Se utilizaron
$\sqrt{x^2+y^2} = \|\vec{x}\|$
$x^2 \leq \|\vec{x}\|^2$
$|y|^3 \leq \|\vec{x}\|^3$

$\Rightarrow$

Basta con tomar $\delta < \sqrt[4]{\varepsilon}$ para que se cumpla la definición de límite, por lo tanto queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$b)\ \boldsymbol{f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}}$

Solución:

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$

$\vec{x} = (x,y)$

$\vec{x}_0 = (0,0) = \vec{0}$ punto de acumulación del D_f

$L = 0$

Aplicando la definición de límite

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > \ 0 \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > \ 0 \mid 0 < \|\vec{x}\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \le \frac{3\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|^2} = 3\|\vec{x}\| < 3\delta < \varepsilon$$

Basta con tomar $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ para que se cumpla la definición de límite, por lo tanto queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

$\boldsymbol{c)\ f(x,y) = \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$

Solución:

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$

$\vec{x} = (x,y)$

$\vec{x}_0 = (0,0) = \vec{0}$ punto de acumulación del D_f

$L = 0$

Aplicando la definición de límite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > \ 0 \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left|\frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > \ 0 \mid 0 < \|\vec{x}\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \|\vec{x}\| < \delta < \varepsilon$$

Basta con tomar $\delta < \varepsilon$ para que se cumpla la definición de límite, por lo tanto queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

---

d) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$

e) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{y^4}{x^2+y^2}}$

TEOREMA UNICIDAD DEL LÍMITE

Sea

$$* \ \vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$* \ \vec{x}_0 \ \text{ punto de acumulación del } D_{\vec{f}}$$

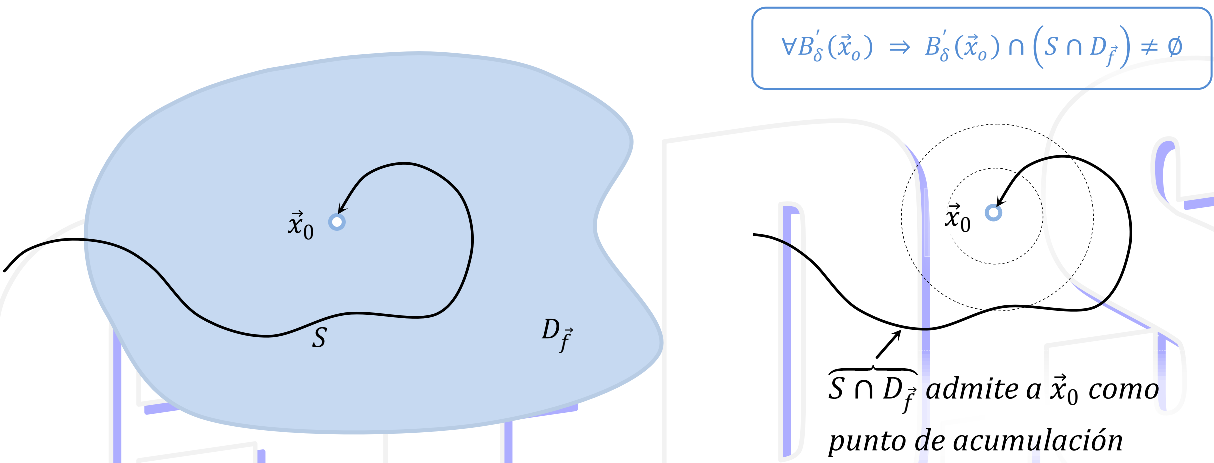
Si $\lim\limits_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}_1 \quad \wedge \quad \lim\limits_{\vec{x}\longrightarrow\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}_2$ entonces $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$

Por el teorema de unicidad del límite, dada una función $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, se tiene que si existe el $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}$ entonces éste es único.

Esto significa que si

$$\underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})}_{\substack{\text{límite irrestricto} \\ \text{o simultáneo}}} = \vec{L}$$

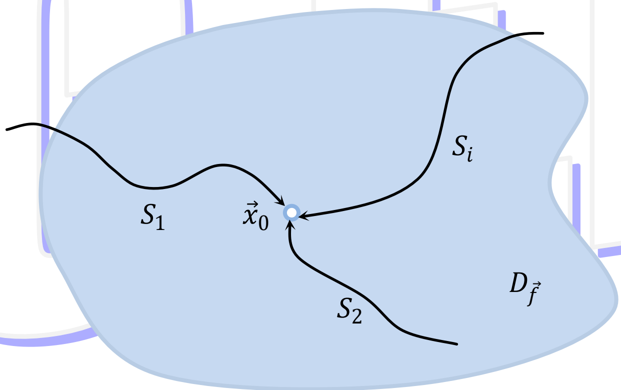
entonces independientemente de la manera en que nos acerquemos a $\vec{x}_0$ sobre un conjunto $S \mid S \cap D_{\vec{f}}$ admita a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación, el límite llamado



restringido: $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in S}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}$.

Es decir:

$$Si \quad \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})}_{simult\acute{a}neo} = \vec{L} \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in S_i}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{L}}^{todos\ \ los\ restringidos\ \ deben\ \ dar\ \vec{L}}$$

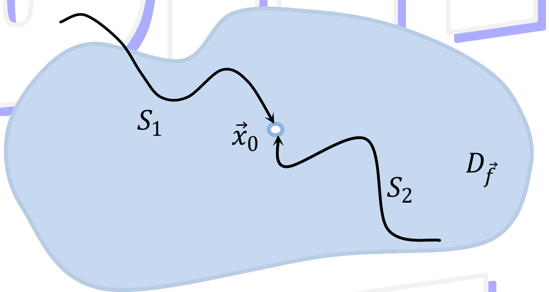


$S_i \mid S_i \cap D_{\vec{f}}$ *admita a* $\vec{x}_0$ *como punto de acumulación*

Este hecho permite utilizar un mecanismo simple que sirve en algunos casos para demostrar la no existencia de un límite dado.

Este mecanismo es el siguiente:

$*$ Con sólo conseguir 2 trayectorias diferentes de acercamiento a $\vec{x}_0$ (sobre 2 conjuntos S_1 y S_2 tales que tanto $S_1 \cap D_{\vec{f}} \wedge S_2 \cap D_{\vec{f}}$ admitan a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación) para las cuales:

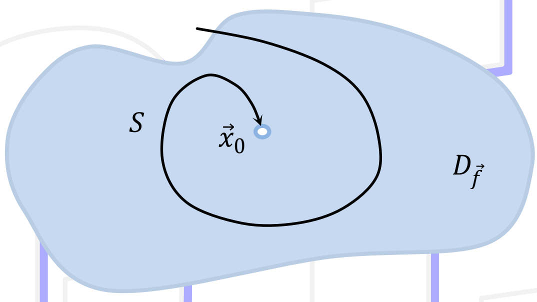


$$\underbrace{\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in S_1}} \vec{f}(\vec{x})}_{restringido} = \vec{L}_1 \quad \text{y} \quad \underbrace{\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in S_2}} \vec{f}(\vec{x})}_{restringido} = \vec{L}_2$$

Entonces, si $\underbrace{\vec{L}_1 \neq \vec{L}_2}_{\substack{los\ \ límites\ \ restringidos\\ tienen\ \ diferentes\ \ \ valores}} \quad \Rightarrow \quad \nexists \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})}_{simult\acute{a}neo}.$

Pero si $\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \; \not\Rightarrow \exists \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})}_{simult\acute{a}neo}$. No es suficiente para asegurar que el límite irrestricto o simultáneo exista.

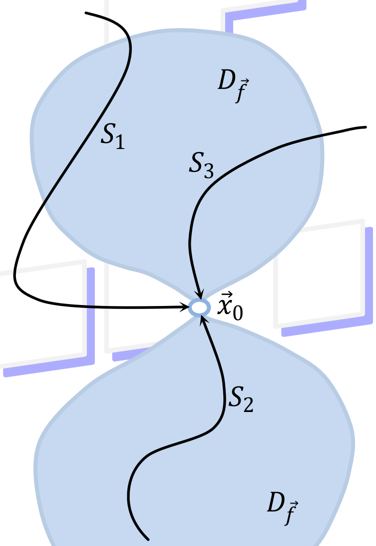
* O bien, consiguiendo una trayectoria de acercamiento a $\vec{x}_0$ sobre un conjunto $S \mid S \cap D_{\vec{f}}$ admita a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación para el cual:

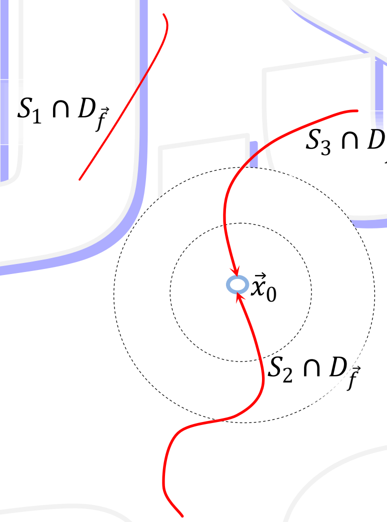


$$\nexists \underbrace{\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in S}} \vec{f}(\vec{x})}_{restringido} \quad \Rightarrow \quad \nexists \underbrace{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})}_{simultáneo}$$

<u>Observación</u>

Por ejemplo, considerando una función con el siguiente dominio y los 3 conjuntos S_1, S_2 y S_3, se tiene que:





- $S_1 \cap D_{\vec{f}}$ no admite a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación.
- $S_2 \cap D_{\vec{f}}$ y $S_3 \cap D_{\vec{f}}$ admiten a $\vec{x}_0$ como punto de acumulación.

---

2. Para las siguientes funciones, demuestre usando límites iterados que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

b) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \frac{y^4}{x^4+y^4}$

---

3. Para las siguientes funciones demuestre que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

a) $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{x}{x+y}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}(1) = 1 = L_1$$

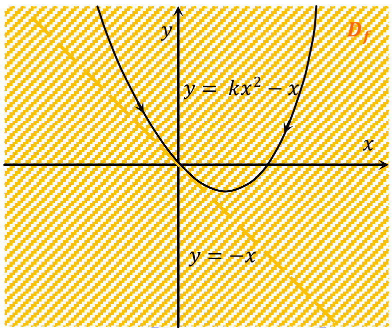
$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+y}\right)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{y}\right] = 0 = L_2$$

Como $L_1 \neq L_2 \;\Rightarrow\; \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

---

b) $f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}$

Solución:



$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\}$

$S_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = kx^2 - x, k \neq 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \left(\frac{x^2}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x+kx^2-x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{kx^2}\right) = \frac{1}{k}$$

Como depende del parámetro k, su valor no es único $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, es decir por ejemplo si tomamos primero

$$k = 1 \;\Rightarrow\; L_1 = \frac{1}{k}\bigg|_{k=1} = 1\ , \qquad \text{y luego} \qquad k = 2 \;\Rightarrow\; L_2 = \frac{1}{k}\bigg|_{k=2} = \frac{1}{2}$$

Como $L_1 \neq L_2 \;\Rightarrow\; \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

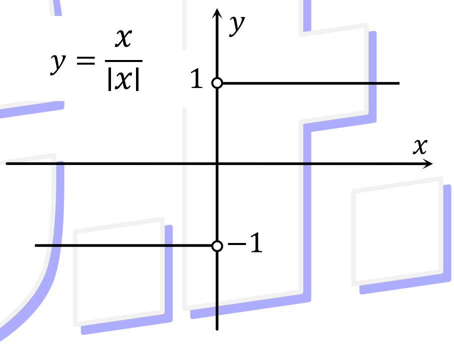
---

c) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x}{|x|+|y|}}$

Solución:

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Dado que $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{x}{|x|+|y|}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x}{|x|}\right]$ y como $\nexists \underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{x}{|x|}\right]}_{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{x}{|x|}\right]=1,\ \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{x}{|x|}\right]=-1} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x}{|x|}\right] = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{x}{|x|}\right] = -1$$

d) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}}$

Solución:

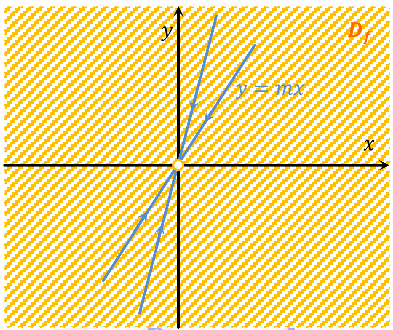
$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2}{x^2}\right] = 1 = L_1$$

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}\right)\right] = \lim_{y\to 0}\left[\frac{0}{y^2}\right] = 0 = L_2$$

Como $L_1 \neq L_2 \;\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

e) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}}$



Solución:

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}\left(\frac{xmx}{x^2+m^2x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{mx^2}{x^2(1+m^2)}\right) = \frac{m}{1+m^2}$$

Como depende del parámetro m, su valor no es único $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

f) $\boldsymbol{f(x,y)=\frac{y^2}{y^2+x^4}}$

Solución:

$D_f=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

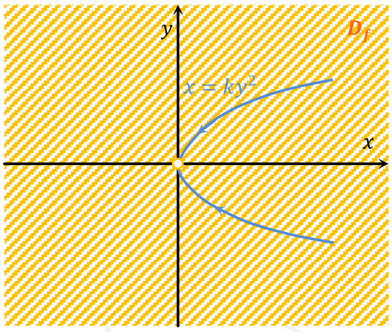
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\left(\frac{y^2}{y^2+x^4}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{0}{x^4}\right]=0=L_1$

$\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{y^2}{y^2+x^4}\right)\right]=\lim\limits_{y\to 0}\left[\frac{y^2}{y^2}\right]=1=L_2$

Como $L_1\neq L_2 \quad\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

---

g) $\boldsymbol{f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}}$



Solución:

$D_f=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x=k\,y^2\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}}\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{k\,y^2y^2}{k^2\,y^4+y^4}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{k\,y^4}{y^4(k^2+1)}\right)=\frac{k}{k^2+1}$$

Como depende del parámetro k, su valor no es único $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

CONTINUIDAD

DEFINICIÓN

Sea $\vec{f}: D_{\vec{f}}\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$, decimos que $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0\in D_{\vec{f}}$ si y sólo si $\vec{x}_0$ es punto (frontera) aislado del $D_{\vec{f}}$ ó $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\vec{f}(\vec{x})=\vec{f}(\vec{x}_0)$.

EJERCICIOS

1. Determine el conjunto de puntos en que f es continua cuando:

a) $\boldsymbol{f(x,y,z) = \frac{2xyz}{x-y}}$

Solución:

Por ser un cociente de polinomios, se cumple que $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ para cualquier $\vec{x}_0 \in D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq x\}$, es decir, es continua en todo su dominio.

---

b) $\boldsymbol{f(x,y) = \tan(xy)}$

Solución:

Es continua en todo su dominio, ya que se cumple que $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ para cualquier $\vec{x}_0 \in D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, xy \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

---

c) $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{1}{x^2+2x+y^2}}$

Solución:

Por ser un cociente de polinomios, se cumple que $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ para cualquier $\vec{x}_0 \in D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2x + y^2 \neq 0\}$, es decir, es continua en todo su dominio.

---

d) $\boldsymbol{f(x,y) = e^{x+y}}$

Solución:

Se cumple que $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ para cualquier $\vec{x}_0 \in D_f = \mathbb{R}^2$. Es continua en $\mathbb{R}^2$.

---

2. ¿Es continua en $(0,0)$ la función f definida por

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & ;\ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}} \quad ?$$

Solución:

$D_f = \mathbb{R}^2$

Aplicando la definición de límite con $\vec{x}_0 = (0,0) = \vec{0}$ y $L = f(0,0) = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < \|\vec{x}\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{\|\vec{x}\|^3}{\|\vec{x}\|^2} = \|\vec{x}\| < \delta < \varepsilon$$

Basta con tomar $\delta < \varepsilon$ para que se cumpla la definición de límite, por lo tanto queda demostrado que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } (0,0)$$

---

3. ¿Es continua en $(0,0)$ la función f definida por

$$\boldsymbol{f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & ; \; si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \; si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}} \qquad ?$$

<u>Solución:</u>

$D_f = \mathbb{R}^2$

Haciendo $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\right] = \lim\limits_{y\to 0}\left[\frac{y^2}{y^2}\right] = 1 \neq f(0,0) = 0 \Rightarrow f$ no es continua en $(0,0)$.