7. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

7.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA:

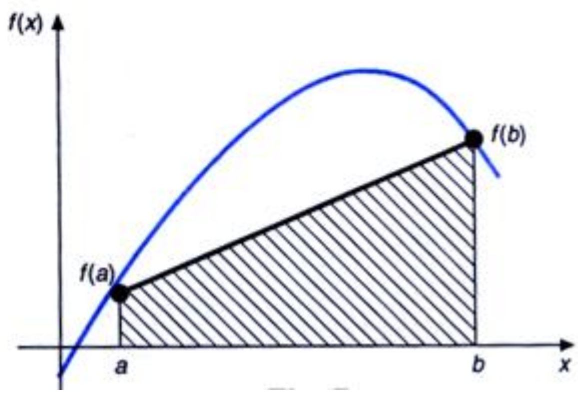
La operación de integrar, es muy común en el uso de la ingeniería, cuando queremos realizar balances energéticos, debemos integrar; cuando queremos calcular potencias, debemos realizar esta operación; y así para muchos casos prácticos.

Veremos a continuación dos de los métodos más usados en la práctica, sin que estos agoten el tema. En la bibliografía encontrarán variantes de estos y otros métodos.

7.1 MÉTODO DE LOS TRAPECIOS:

Si tenemos una serie de puntos, podemos interpolar un polinomio y ver el área que hay entre él y el eje de las X. Ese polinomio podrá ser una línea recta o de un grado que nosotros precisemos.

Supongamos el caso más elemental que es pasar un polinomio lineal entre dos puntos:



Debemos resolver la siguiente integral:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx$$

Donde $f_1(x)$ es una aproximación lineal a la función $f(x)$. Si partimos de Taylor, tendremos:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Llamándole I_T a la aproximación de la integral, tendremos:

$$\boldsymbol{I_T = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]dx}$$

Aplicando propiedades de la integral:

$$\boldsymbol{I_T = \int_a^b f(a)dx + \int_a^b \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)dx}$$

$$\boldsymbol{I_T = f(a)\int_a^b dx + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx}$$

$$\boldsymbol{I_T = f(a)x|_a^b + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\int_a^b xdx - a\int_a^b dx\right]}$$

$$\boldsymbol{I_T = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}|_a^b - ax|_a^b\right]}$$

$$\boldsymbol{I_T = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - a(b-a)\right]}$$

$$\boldsymbol{I_T = f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{1}{2}(b-a)(b+a) - a(b-a)\right]}$$

$$\boldsymbol{I_T = f(a)(b-a) + (f(b)-f(a))\left[\frac{b+a}{2} - a\right]}$$

$$\boldsymbol{I_T = f(a)(b-a) + (f(b)-f(a))\left[\frac{b+a-2a}{2}\right]}$$

$$\boldsymbol{I_T = f(a)(b-a) + (f(b)-f(a))\left[\frac{b-a}{2}\right]}$$

$$\boldsymbol{I_T = f(a)(b-a) + f(b)\left[\frac{b-a}{2}\right] - f(a)\left[\frac{b-a}{2}\right]}$$

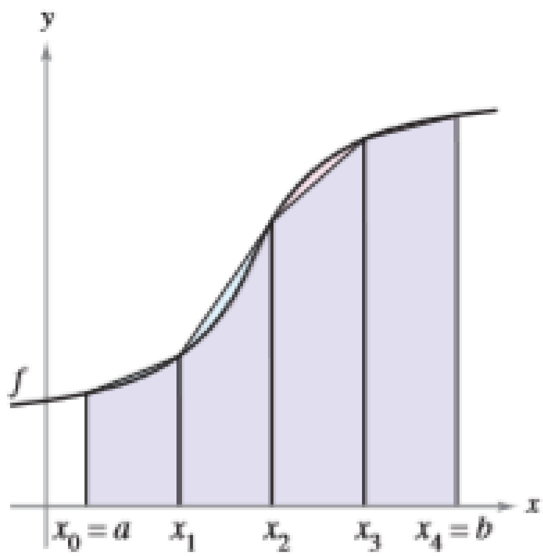
$$\boldsymbol{I_T = f(a)\frac{b-a}{2} + f(b)\frac{b-a}{2}}$$

$$\boldsymbol{I_T = \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{I_T = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}}$$

Conocida como la fórmula de los trapecios. Observe que (b-a) es el tamaño del intervalo y $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ es la altura promedio de la figura trapezoidal.

El área del trapecio es una aproximación de la integral, podemos mejorar la aproximación si particionamos el intervalo en sub intervalos:



En este caso la integral será la suma del área de cada trapecio, entonces tendremos:

$$\boldsymbol{I_T = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n}$$

Si llamamos h al tamaño de cada sub intervalo, tendremos:

$$\boldsymbol{h = \frac{b-a}{n}}$$

siendo n, la cantidad de divisiones, entonces quedaría:

$$\boldsymbol{I_T = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\,h + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\,h + \frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\,h + \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\,h}$$

$$I_T = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

$$I_T = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})) + f(x_n)]$$

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Y reemplazando h:

$$I_T = \frac{(b-a)}{2n}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Conocida como fórmula de los trapecios generalizada.

Si desarrollamos el término subsiguiente del desarrollo de Taylor de manera análoga llegaremos a una cota del error de truncamiento del método:

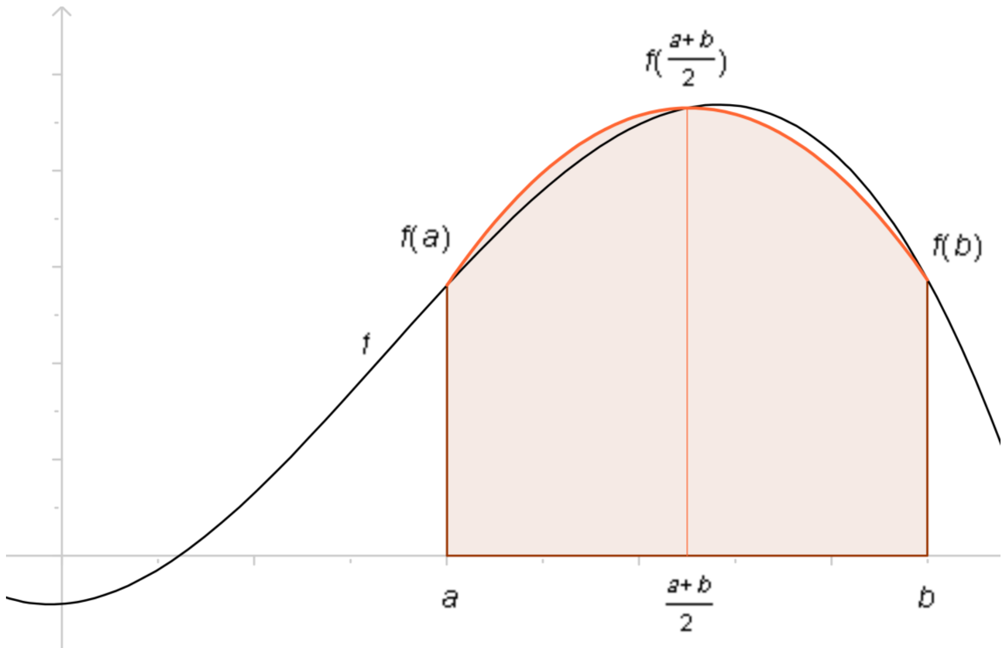
$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

Donde:

$$\bar{f}'' = \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\varepsilon)}{n}$$

7.2 MÉTODO DE SIMPSON:

Una aproximación mejor se logra pasando cada tres puntos un polinomio de segundo grado, como se muestra en la figura:



Si tomamos:

$$x_0 = a$$

$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$x_2 = b$$

Y pasamos un polinomio de Lagrange de grado dos nos va a quedar:

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx$$

$$I_S = \int_a^b \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)\right] dx$$

Después de integrar y reordenar términos nos queda:

$$I_S = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

Esta ecuación se la conoce como regla de Simpson de $\frac{1}{3}$

Si reemplazamos h por su valor

$$h = \frac{b-a}{2}$$

Tendremos:

$$I_S = \frac{(b-a)}{6}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$\boxed{I_S = (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}}$$

De igual manera que en el método de los trapecios, en este método se puede mejorar la aproximación dividiendo el intervalo [a;b] en n sub intervalos:

$$I_S = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{6} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

Sustituyendo cada integral por la regla de Simpson:

$$I_S = 2h\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} + \cdots + 2h\frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6}$$

Operando queda:

$$\boxed{I_S = (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n}}$$

Fórmula conocida como regla de Simpson de segmentos múltiples. De igual manera que en el método anterior, el error de truncamiento está acotado por:

$$\boxed{E_S = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}}$$

Observemos que al pasar un polinomio de segundo grado cada tres puntos, necesariamente el número de fajas en este método deberá ser par.

Veamos una aplicación práctica utilizando los dos métodos. Resolvamos el primer ejercicio de la gía de trabajos práctico:

$$\int_0^{\pi}(8+5\cos x)dx = \qquad n=10$$

a) **Método de los trapecios:** Calcularemos como primera medida el valor del paso h:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi-0}{10}=0{,}31416$$

Calcularemos los valores de X_i en función de h y sus correspondientes $f(X_i)$:

i	X_i	$f(X_i)$
0	0,00000	13,00000
1	0,31416	12,75528
2	0,62832	12,04508
3	0,94248	10,93891
4	1,25664	9,54597
5	1,57080	7,99998
6	1,88496	6,45489
7	2,19912	5,06105
8	2,51328	3,95490
9	2,82744	3,24471
10	3,14160	3,00000

72,00077

Ya estamos en condiciones de ensamblar la expresión:

$$\boldsymbol{I_T=\frac{(b-a)}{2n}\left[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)\right]}$$

$$I_T=\frac{3{,}14160-0{,}00000}{2x10}[13{,}00000+2x72{,}00077+3{,}00000]=25{,}13304\ u.a.$$

Veamos como es el valor real:

$$\int_{0}^{\pi} (8 + 5\cos x) dx =$$

$$8\int_{0}^{\pi} dx + 5\int_{0}^{\pi} \cos(x)\, dx =$$

$$8x|_{0}^{\pi} + 5\sin x|_{0}^{\pi} =$$

$$8\pi - 8x0 + 5(\sin\pi - \sin 0) = 8\pi = 25,13274\ u.a.$$

El error cometido, está dado por:

$$|E| = |X_v - X_a| = |25{,}13274 - 25{,}13304| = 0{,}0003 = 3x10^{-4}$$

En este caso, al conocer la función podemos saber el valor del error, pero esto no siempre se puede, por eso es que usamos la cota del error para saber aproximadamente el margen de error que tendremos:

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

Con:

$$\bar{f}'' = \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\varepsilon)}{n}$$

Calculemos la derivada primera:

$$f(x) = 8 + 5\cos x$$

$$f'(x) = 0 + 5(-\sin x) = -5\sin x$$

Y con esta calculamos la derivada segunda:

$$f''(x) = -5\cos x$$

Como es una función creciente en el intervalo $[0;\pi]$, los valores de εson los finales de los intervalos:

h_i	ε_i	$f''(\varepsilon_i)$
1	0,31416	-4,75528
2	0,62832	-4,04508
3	0,94248	-2,93892
4	1,25664	-1,54507
5	1,57080	0,00002
6	1,88496	1,54511
7	2,19912	2,93895
8	2,51328	4,04510
9	2,82744	4,75529
10	3,14160	4,99999
		5,00011

$$\bar{f}'' = \frac{5{,}00011}{10} = 0{,}500011$$

$$E_T = -\frac{(\pi - 0)^3}{12(10)^2} 0{,}500011 = -0{,}0129 = -1{,}2\ 10^{-2}$$

El error real calculado es menor a este valor de referencia.

b) Método de Simpson: Ya tenemos el valor de h=0,31416 y verificamos que el número de fajas sea par.

i	X_i	$f(X_i)$
0	0,00000	13,00000
1	0,31416	12,75528
2	0,62832	12,04508
3	0,94248	10,93891
4	1,25664	9,54597
5	1,57080	7,99998
6	1,88496	6,45489
7	2,19912	5,06105
8	2,51328	3,95490
9	2,82744	3,24471
10	3,14160	3,00000

32,00084

39,99993

$$\boldsymbol{I_S = (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n}}$$

$$I_S = (3{,}14159 - 0)\frac{13{,}00000 + 4x39{,}99993 + 2x32{,}00084 + 3{,}0000}{3x10}$$

$$I_S = 25{,}13286\ u.a.$$

El error real cometido es:

$$|E| = |X_v - X_a| = |25{,}13274 - 25{,}13286| = 0{,}00012 = 1{,}2x10^{-4}$$