<u>CURVAS EN $\mathbb{C}$</u>

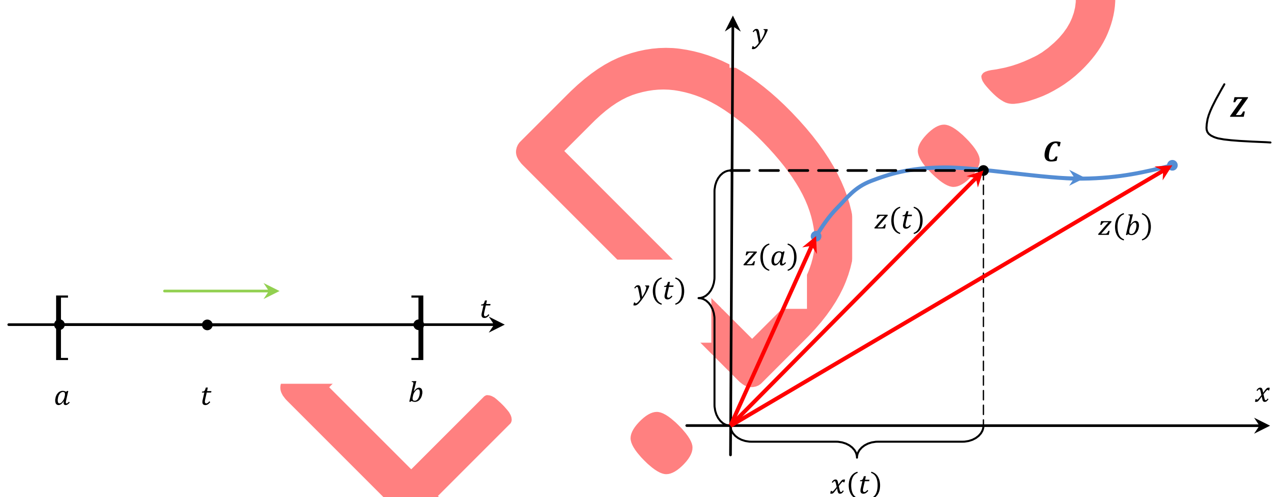
Representación paramétrica

Una curva C en el plano complejo se puede describir mediante una función con valores complejos de una variable real o parámetro t:

$$z = z(t), \quad a \leq t \leq b$$

donde

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$



Representación paramétrica de una circunferencia

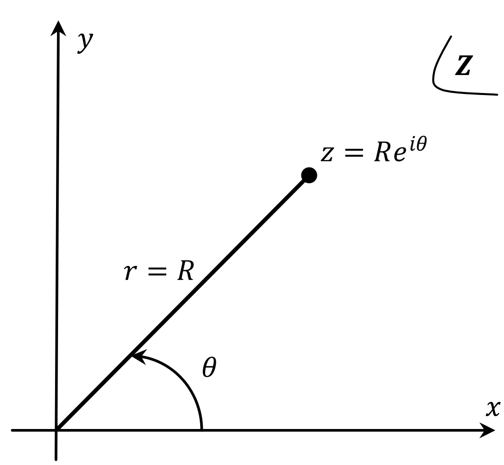
La circunferencia de ecuación $|z| = R$ se puede parametrizar de la siguiente manera.

Si se hace $r = R$ en la forma exponencial de expresión de un número complejo, se tiene que:

$$z = \overset{r=}{\underbrace{R}} \; e^{i\underbrace{\theta}}$$

módulo (se deja fijo)

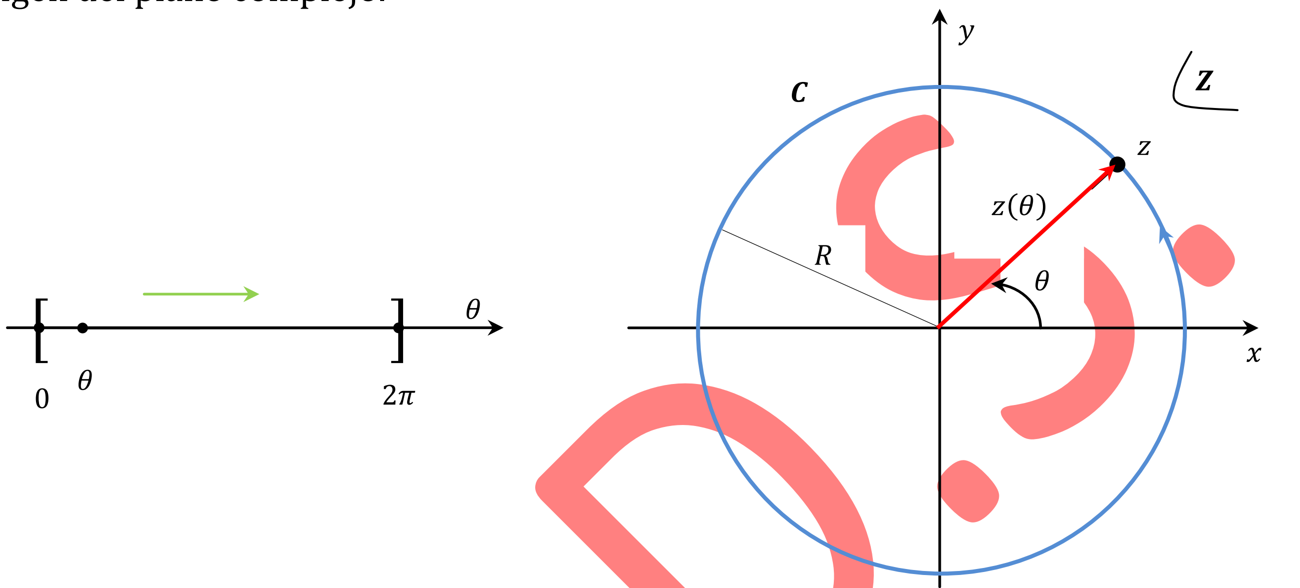
argumento (se hace que varíe)



y se usa el argumento como parámetro, luego:

$$z = z(\theta) = Re^{i\theta}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

es una representación paramétrica de una circunferencia de radio R centrada en el origen del plano complejo.

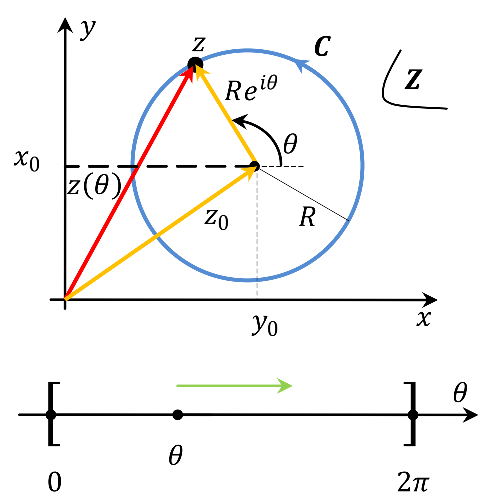


Al hacer crecer el valor del parámetro θ a partir de 0 sobre el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, el punto z empieza a moverse desde el eje real positivo y recorre la circunferencia una vez en el sentido positivo (anti-horario).

A la circunferencia de ecuación $|z - z_0| = R$ se la puede parametrizar por:

$$z = z(\theta) = \underbrace{z_0}_{vector\ \ fijo} + \underbrace{Re^{i\theta}}_{vector\ \ giratorio}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Esto puede visualizarse vectorialmente observando que un punto z que recorre la circunferencia una vez en sentido anti-horario, corresponde a la suma de un vector fijo z_0 y un vector giratorio de módulo R cuyo ángulo de inclinación θ varía desde 0 hasta 2π.



INTEGRALES DE LÍNEA EN EL PLANO COMPLEJO

Cálculo de una integral de contorno

Contorno: *curva suave por tramos*

Si

- f es continua a sobre una curva suave rectificable C parametrizada por:
- $z(t) = x(t) + iy(t), \;\; a \leq t \leq b$

Entonces

$$\underbrace{\int_C f(z)\,dz}_{\substack{Integral\;\; de\; contorno \\ de\; f\; a\; lo\; largo\;\; de\; C}} = \int_a^b f\big(z(t)\big)\, z'(t)dt$$

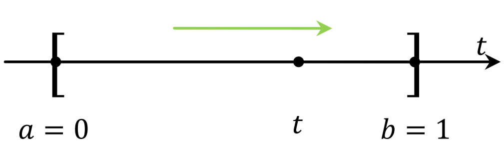
Obtenga el valor de las siguientes integrales de línea complejas:

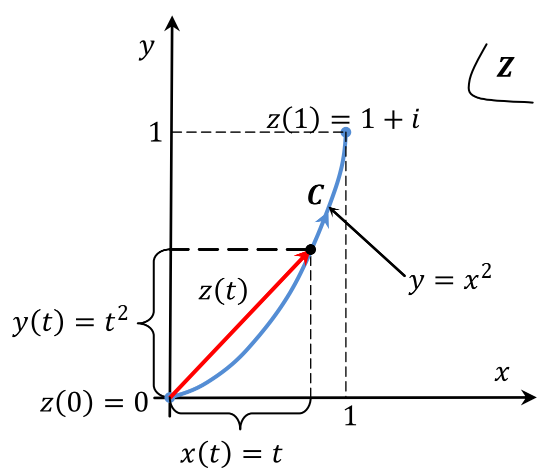
165. $\int_C (z^2 + 1)\,dz$ donde C es el tramo de la parábola $y = x^2$ que va desde $z = 0$ a $z = 1 + i$.

Una parametrización para C se obtiene haciendo: $\begin{cases} x = x(t) = t \\ y = y(t) = t^2 \end{cases}, \;\; 0 \leq t \leq 1$

Luego

$$z(t) = x(t) + iy(t) = t + it^2, \;\; \overbrace{0}^{a} \leq t \leq \overbrace{1}^{b}$$





Dado que $z(t) = x(t) + iy(t) = t + it^2 \Rightarrow z'(t) = x'(t) + iy'(t) = 1 + i2t$ y recordando que

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\big(z(t)\big)\,z'(t)dt$$

donde $f(z) = z^2 + 1$, entonces $f\big(z(t)\big) = (t + it^2)^2 + 1 = t^2 + i2t^3 - t^4 + 1.$

Luego

$$\int_C \overbrace{(z^2+1)}^{f(z)}\,dt = \int_{\underbrace{0}_{a}}^{\overbrace{1}^{b}} \overbrace{(t^2 + i2t^3 - t^4 + 1)}^{f(z(t))}\overbrace{(1 + i2t)}^{z'(t)}\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + i2t^3 + i2t^3 - 4t^4 - t^4 - i2t^5 + 1 + i2t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \big(-5t^4 + t^2 + 1 + i(-2t^5 + 4t^3 + 2t)\big)\,dt$$

$$= \int_0^1 (-5t^4 + t^2 + 1)\,dt + i\int_0^1 (-2t^5 + 4t^3 + 2t)\,dt$$

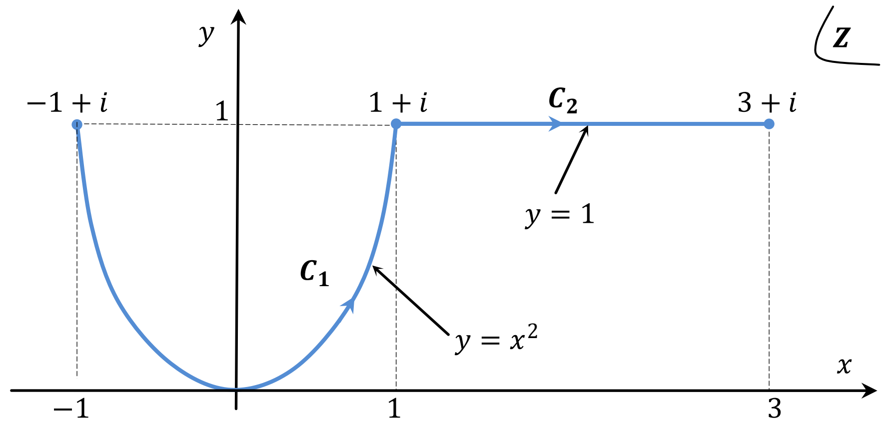
$$= \left(-t^5 + \frac{1}{3}t^3 + t\right)\Big|_0^1 + i\left(-\frac{1}{3}t^6 + t^4 + t^2\right)\Big|_0^1$$

$$= -1 + \frac{1}{3} + 1 + i\left(-\frac{1}{3} + 1 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{3} + i\frac{5}{3}$$

168. $\int_C \big(x^2 - 2y + i(xy - 3)\big)\,dz$ donde C es el contorno constituido por la unión del tramo de parábola $y = x^2$ con $-1 \le x \le 1$ y del segmento de recta que va de $z = 1 + i$ a $z = 3 + i$.

$$\boldsymbol{C = C_1 \cup C_2}$$



Parametrización para C_1

$x = x_1(t) = t, \quad y = y_1(t) = t^2$

$$-1 \le t \le 1$$

$$\boldsymbol{z_1(t) = \underbrace{t}_{x_1(t)} + i\underbrace{t^2}_{y_1(t)}, -1 \le t \le 1}$$

$$\Downarrow$$

$z_1'(t) = 1 + i2t$

Parametrización para C_2

$x = x_2(t) = t, \quad y = y_2(t) = 1$

$$1 \le t \le 3$$

$$\boldsymbol{z_2(t) = \underbrace{t}_{x_2(t)} + i\underbrace{1}_{y_2(t)}, 1 \le t \le 3}$$

$$\Downarrow$$

$z_2'(t) = 1 + i0$

$$\int_C \left(\overbrace{x^2 - 2y + i(xy-3)}^{f(z)}\right) dz = \underbrace{\int_{C_1} \left(x^2 - 2y + i(xy-3)\right) dz} + \underbrace{\int_{C_2} \left(x^2 - 2y + i(xy-3)\right) dz}$$

$$= \overbrace{\int_{-1}^{1} f\big(z_1(t)\big)\ z_1'(t)dt} + \overbrace{\int_{1}^{3} f\big(z_2(t)\big)\ z_2'(t)dt}$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\underbrace{\left(\underbrace{t}_{x}\right)^2 - 2\underbrace{t^2}_{y} + i\left(\underbrace{t}_{x}\underbrace{t^2}_{y} - 3\right)}_{f(z_1(t))}\right)\left(\underbrace{1+i2t}_{z_1'(t)}\right)dt + \int_{1}^{3}\left(\underbrace{\left(\underbrace{t}_{x}\right)^2 - 2\underbrace{(1)}_{y} + i\left(\underbrace{t}_{x}\underbrace{(1)}_{y} - 3\right)}_{f(z_2(t))}\right)\left(\underbrace{1+i0}_{z_2'(t)}\right)dt$$

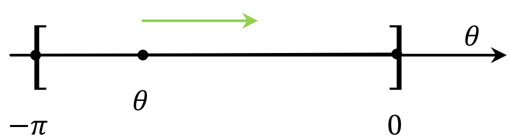
$$= \int_{-1}^{1}\left(-t^2 + i(t^3-3)\right)(1+i2t)dt + \int_{1}^{3}\left(t^2 - 2 + i(t-3)\right)dt$$

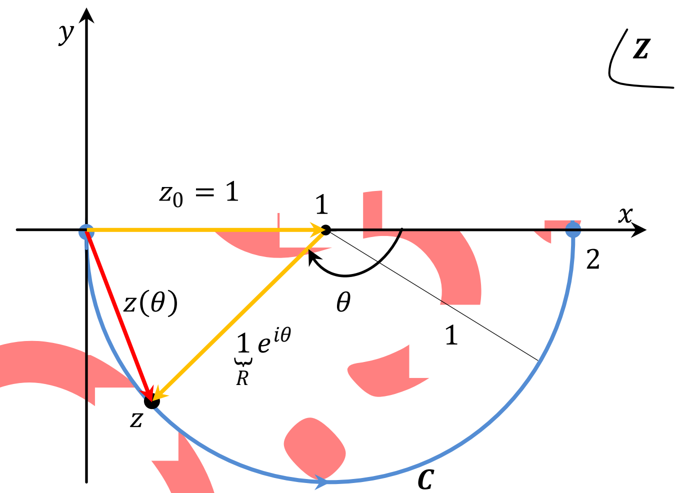
$$= \int_{-1}^{1}\left(-t^2 - i2t^3 + i(t^3-3) - (t^3-3)2t\right)dt + \int_{1}^{3}\left(t^2 - 2 + i(t-3)\right)dt$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(-t^2 - 2t^4 + 6t + i(-t^3-3)\right)dt + \int_{1}^{3}\left(t^2 - 2 + i(t-3)\right)dt = \cdots = \frac{16}{5} - i8$$

172. $\int_C (z-1)\,dz$ siendo C: a) la semicircunferencia $z - 1 = e^{i\theta}$ con $-\pi \leq \theta \leq 0$.

$$z - 1 = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{z = z(\theta) =} \overbrace{\underbrace{\mathbf{1}}_{z_0}}^{\textit{vector fijo}} + \overbrace{\underbrace{\mathbf{1}}_{R}\boldsymbol{e^{i\theta}}}^{\textit{vector giratorio}} \quad , \underbrace{\boldsymbol{-\pi}}_{a} \leq \boldsymbol{\theta} \leq \underbrace{\mathbf{0}}_{b}$$





Como $z(\theta) = 1 + e^{i\theta}$, $\underbrace{-\pi}_{a} \leq \theta \leq \underbrace{0}_{b}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $z'(\theta) = ie^{i\theta}$ y dado que

$f(z) = z - 1 \quad \Rightarrow \quad f\big(z(\theta)\big) = 1 + e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta}$

Luego

$$\int_C \overbrace{(z-1)}^{f(z)}\,dz = \int_{\underbrace{-\pi}_{a}}^{\overbrace{0}^{b}} \overbrace{e^{i\theta}}^{f(z(\theta))}\ \overbrace{ie^{i\theta}}^{z'(\theta)}\,d\theta = \int_{-\pi}^{0} e^{i2\theta}\,id\theta$$

$$= \frac{e^{i2\theta}}{2}\bigg|_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{1 - e^{-i2\pi}}{2}$$

$$= \frac{1-1}{2}$$

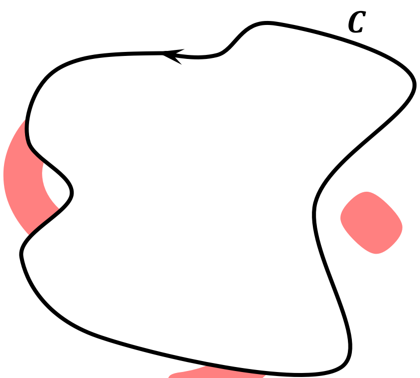
$$= 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = i2\theta \;\Rightarrow\; du = i2d\theta \Rightarrow id\theta = \dfrac{du}{2} \\[2ex] \displaystyle\int e^{\overbrace{i2\theta}^{u}}\,\overbrace{id\theta}^{\frac{du}{2}} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{e^{u}}{2} = \frac{e^{i2\theta}}{2} \end{array}}$$

TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

Si

- C es un contorno cerrado, simple, rectificable y orientado positivamente.
- f es analítica sobre C y en su interior.



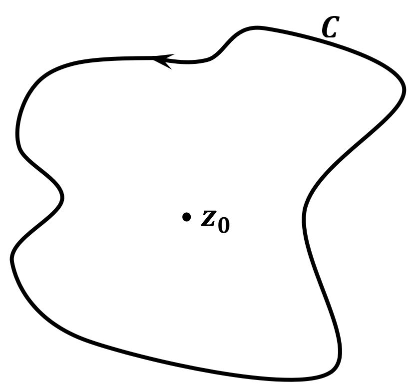
Entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

FÓRMULAS INTEGRALES DE CAUCHY

Si

- C es un contorno cerrado, simple, rectificable y orientado positivamente.
- f es analítica sobre C y en su interior.
- z_0 es cualquier punto interior a C.



Entonces

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

Fórmula integral de Cauchy

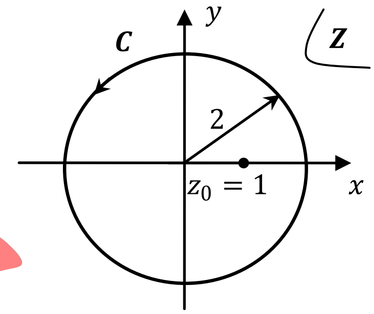
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

$$n = 1,2,3,\ldots$$

Fórmula integral de Cauchy de la n-derivada

Empleando la fórmula integral de Cauchy y/ó la fórmula integral de la n-derivada, obtenga el valor de las siguientes integrales:

173. $\oint_C \frac{z}{z-1}\,dz,\ con\ \ C: |z| = 2$

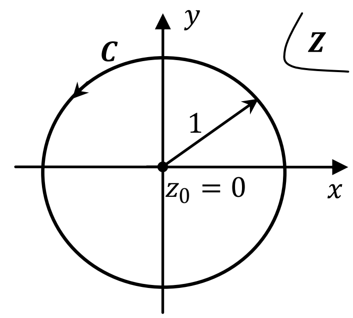


- $f(z) = z$ es analítica sobre C y en su interior.
- $z_0 = 1$ es interior a C.

Por la FIC (fórmula integral de Cauchy):

$$\oint_C \frac{z}{z-1}\,dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i(1) \qquad , \qquad \boxed{\oint_C \frac{z}{z-1}\,dz = 2\pi i}$$

175. $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^4}\,dz,\ con\ \ C: |z| = 1$



- $f(z) = e^{iz}$ es analítica sobre C y en su interior.
- $z_0 = 0$ es interior a C.
- $n + 1 = 4 \ \Rightarrow n = 4 - 1 = 3.$

Por la FIC de la n-derivada:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z^4}\,dz = \oint_C \frac{e^{iz}}{(z-0)^4}\,dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(0) = \frac{2\pi i}{3!}(-i) \quad , \qquad \boxed{\oint_C \frac{e^{iz}}{z^4}\,dz = \frac{\pi}{3}}$$

$f(z) = e^{iz}$

$f'(z) = ie^{iz}$

$f''(z) = i^2 e^{iz} = -e^{iz}$

$f'''(z) = f^{(3)}(z) = -ie^{iz} \Rightarrow \ f^{(3)}(0) = -i$

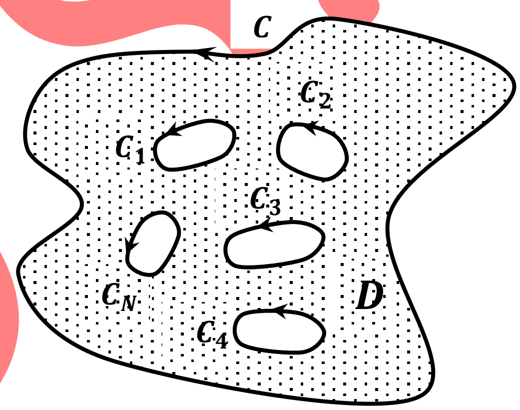
PRINCIPIO DE DEFORMACIÓN DE CONTORNOS

Si

- $C, C_1, C_2, \dots, C_N$ son un contornos cerrados, simples, rectificables y orientados positivamente.
- $C_1, C_2, \dots, C_N$ y sus interiores son disjuntos e interiores a C.
- f es analítica sobre $C, C_1, C_2, \dots, C_N$ y en todos los puntos del dominio múltiplemente conexo D delimitado por $C, C_1, C_2, \dots, C_N$.

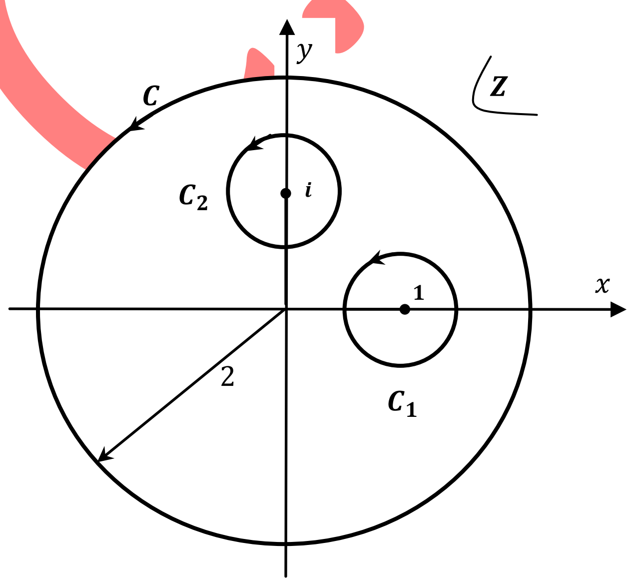
Entonces

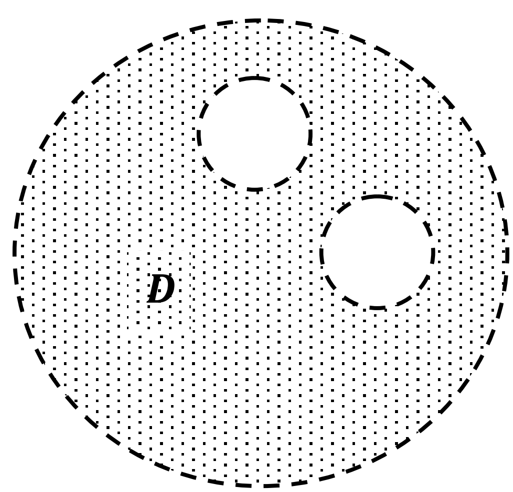
$$\oint_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{N} \oint_{C_k} f(z)\,dz$$



Empleando la fórmula integral de Cauchy y/ó la fórmula integral de la n-derivada, obtenga el valor de las siguientes integrales:

174. $\oint_C \frac{sen(z)}{(z-1)(z-i)}\,dz,\ con\ C: |z| = 2$





Analítica sobre C, C_1, C_2 y en todos los puntos del dominio múltiplemente conexo D delimitado por C, C_1 y C_2.

Por el principio de deformación de contornos

$$\oint_C \frac{sen(z)}{(z-1)(z-i)}dz = \sum_{k=1}^{2}\oint_{C_k}\frac{sen(z)}{(z-1)(z-i)}dz$$

$$= \oint_{C_1}\frac{sen(z)}{(z-1)(z-i)}dz + \oint_{C_2}\frac{sen(z)}{(z-1)(z-i)}dz$$

Analítica sobre C_1 y en su interior

Analítica sobre C_2 y en su interior

$$= \underbrace{\oint_{C_1}\frac{\frac{sen(z)}{z-i}}{z-1}dz}_{FIC} + \underbrace{\oint_{C_2}\frac{\frac{sen(z)}{z-1}}{z-i}dz}_{FIC}$$

$z = 1$ interior a C_1

$z = i$ interior a C_2

$$= 2\pi i\left[\frac{sen(z)}{z-i}\right]_{z=1} + 2\pi i\left[\frac{sen(z)}{z-1}\right]_{z=i}$$

$sen(z) = sen(x)cosh(y) + icos(x)senh(y)$

$sen(0 + i1) = sen(0)cosh(1) + icos(0)senh(1)$

$\boldsymbol{sen(i) = isenh(1)}$

$$= 2\pi i\left[\frac{sen(1)}{1-i} + \frac{sen(i)}{i-1}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{sen(1)}{1-i} - i\frac{senh(1)}{1-i}\right]$$

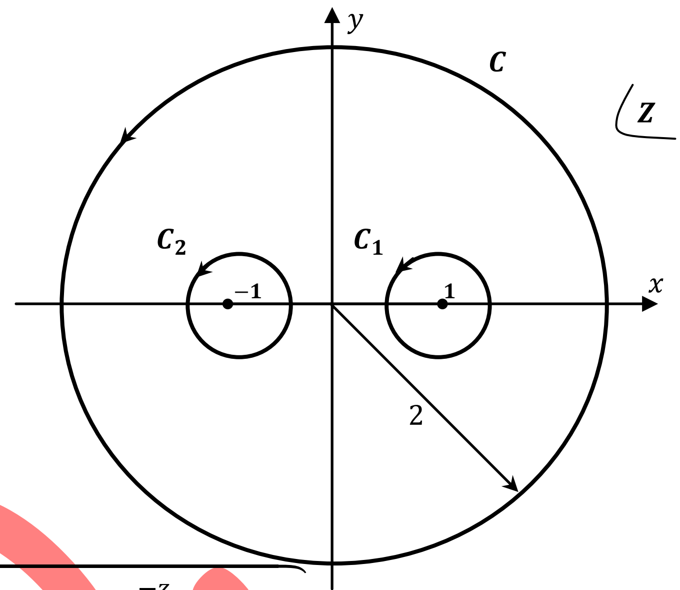
$$= \frac{2\pi i}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)}[sen(1) - isenh(1)]$$

$$= [i\pi - \pi][sen(1) - isenh(1)]$$

$$= i\pi sen(1) - \pi sen(1) + \pi senh(1) + i\pi senh(1)$$

$$\boxed{\oint_C \frac{sen\,(z)}{(z-1)(z-i)}\,dz = \pi[senh(1) - sen(1)] + i\pi[senh(1) + sen(1)]}$$

Ej. $\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}\,dz,\ con\ \ C: |z| = 2$



$$\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}\,dz = \underbrace{\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)(z+1)}\,dz}$$

Por principio de deformación

de contornos:

$$\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}\,dz = \overbrace{\oint_{C_1} \frac{e^{-z}}{(z-1)(z+1)}\,dz + \oint_{C_2} \frac{e^{-z}}{(z-1)(z+1)}\,dz}$$

$$= \underbrace{\oint_{C_1} \frac{\frac{e^{-z}}{z+1}}{z-1}\,dz}_{FIC} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{\frac{e^{-z}}{z-1}}{z+1}\,dz}_{FIC}$$

$$= \overbrace{2\pi i\left[\frac{e^{-z}}{z+1}\right]_{z=1}} + \overbrace{2\pi i\left[\frac{e^{-z}}{z-1}\right]_{z=-1}}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^{-1}}{2} - \frac{e^{1}}{2}\right]$$

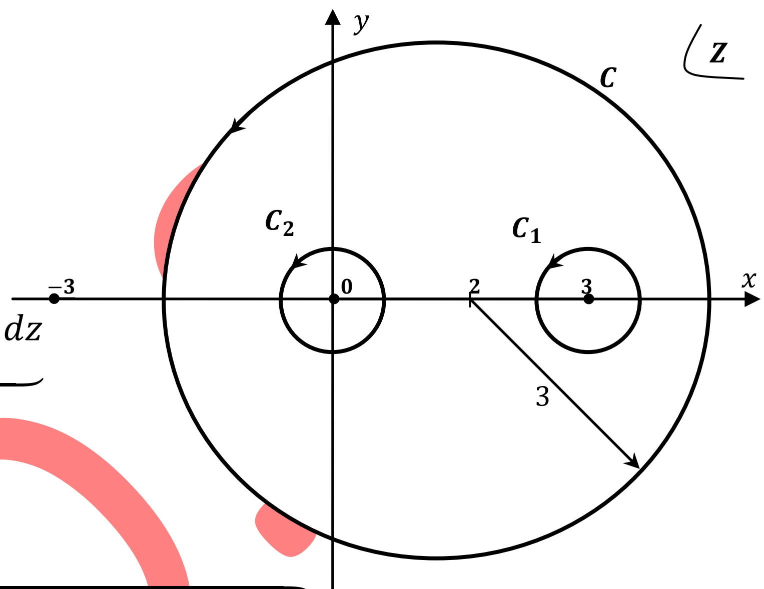
$$= -2\pi i\left[\underbrace{\frac{e^{1} - e^{-1}}{2}}\right]$$

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{e^z(z^2-1)}\,dz = -2\pi i\ \overbrace{senh(1)}}$$

176. $\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2-z-2}\,dz,\ con\ \ C: |z-1| = 4$

Resp.: $\boxed{\oint_C \frac{\cosh(z)}{z^2-z-2}\,dz = \frac{2\pi}{3}[\cosh(2)-\cosh(1)]i}$

180. $\oint_C \frac{z-1}{z(2z^2-18)}\,dz,\ con\ \ C: |z-2| = 3$



$$\oint_C \frac{z-1}{z(2z^2-18)}dz = \oint_C \frac{z-1}{2z(z^2-9)}dz$$

$$= \underbrace{\oint_C \frac{z-1}{2z(z-3)(z+3)}dz}$$

Por principio de deformación de contornos:

$$\oint_C \frac{z-1}{z(2z^2-18)}dz = \overbrace{\underbrace{\oint_{C_1} \frac{\frac{z-1}{2z(z+3)}}{z-3}dz}_{FIC} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{\frac{z-1}{2(z-3)(z+3)}}{z}dz}_{FIC}}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{z-1}{2z(z+3)}\right]_{z=3} + 2\pi i\left[\frac{z-1}{2(z-3)(z+3)}\right]_{z=0}$$

$$= \frac{\pi}{9}i + \frac{\pi}{9}i$$

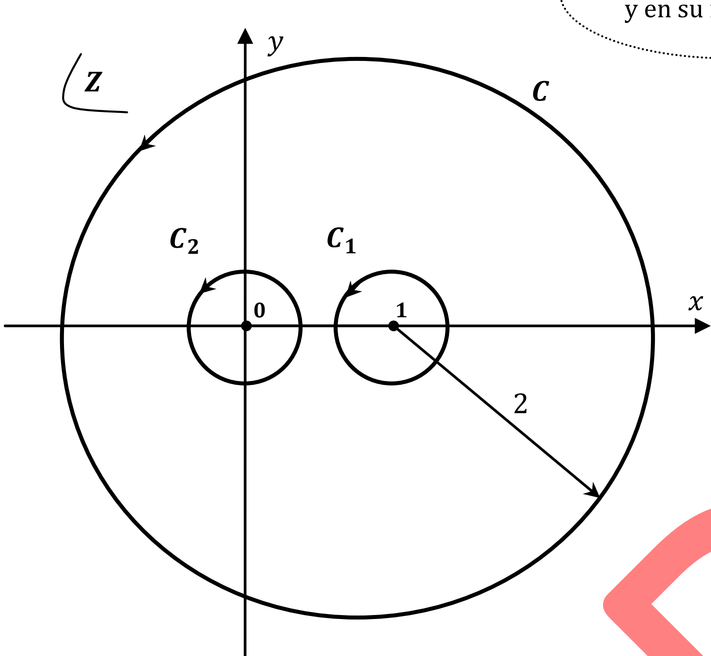
$$\boxed{\oint_C \frac{z-1}{z(2z^2-18)}dz = \frac{2}{9}\pi i}$$

182. $\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz,\ con\ \ C: |z-1| = 2$

$$\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz = \oint_C \frac{e^z}{z[-(z-1)]^3}\,dz = -\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^3}\,dz$$

Por principio de deformación de contornos

$$= -\left[\oint_{C_1} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\,dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z(z-1)^3}\,dz\right]$$



Analítica sobre C_1 y en su interior

Analítica sobre C_2 y en su interior

$$= -\left[\underbrace{\oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}\,dz}_{FIC\ de\ la\ n-derivada} + \underbrace{\oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^3}}{z}\,dz}_{FIC}\right]$$

$z = 1$ interior a C_1

$z = 0$ interior a C_2

$$= -\left[\frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z}\right)_{z=1} + 2\pi i\left(\frac{e^z}{(z-1)^3}\right)_{z=0}\right]$$

$$= -[\pi i e - 2\pi i]$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z}\right) = \frac{d^2}{dz^2}(e^z z^{-1})$$

$$= \frac{d}{dz}(e^z z^{-1} - e^z z^{-2})$$

$$= e^z z^{-1} - e^z z^{-2} - e^z z^{-2} + 2e^z z^{-3}$$

$$= e^z z^{-1} - 2e^z z^{-2} + 2e^z z^{-3}$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{e^z}{z}\right)\right]_{z=1} = e - 2e + 2e = e$$

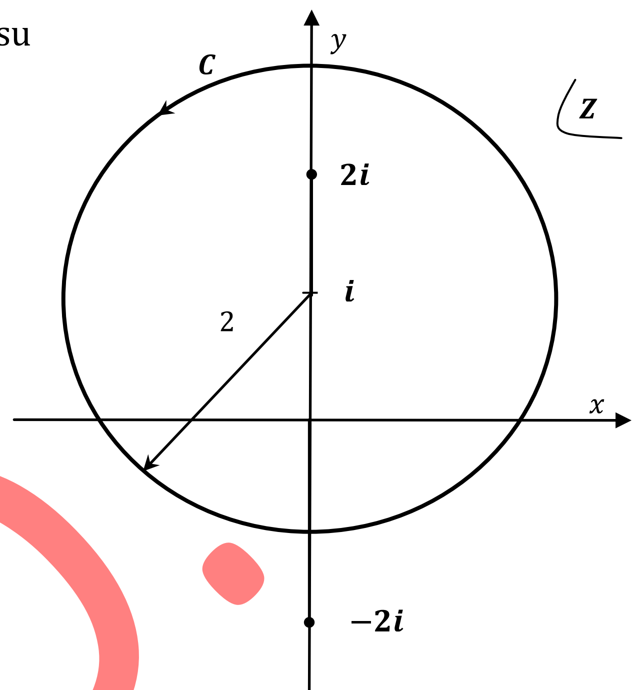
$$\boxed{\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz = -i\pi(e-2)}$$

184. $\oint_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz,\ con\ C: |z-i| = 2$

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = \oint_C \frac{1}{[(z-2i)(z+2i)]^2}\,dz$$

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = \oint_C \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\,dz = \oint_C \frac{\frac{1}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2}\,dz$$

- $f(z) = \frac{1}{(z+2i)^2}$ es analítica sobre C y en su interior.
- $z_0 = 2i$ es interior a C.
- $n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$.



Por la FIC de la n-derivada:

$$\oint_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = \oint_C \frac{\frac{1}{(z+2i)^2}}{(z-2i)^2}\,dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+2i)^2}\right]_{z=2i}$$

$$= 2\pi i\frac{d}{dz}\left[(z+2i)^{-2}\right]_{z=2i}$$

$$= 2\pi i\left[(-2)(z+2i)^{-3}\right]_{z=2i}$$

$$= -4\pi i\left[\frac{1}{(z+2i)^3}\right]_{z=2i}$$

$$= -4\pi i\frac{1}{(4i)^3}$$

$$\boxed{\oint_C \frac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = \frac{\pi}{16}}$$