TEOREMA

Si $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec{x}_0$, entonces $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$.

Ahora, que $\vec{f}$ sea continua en $\vec{x}_0$ no garantiza que $\vec{f}$ sea diferenciable en $\vec{x}_0$. Esto es: la continuidad es una condición necesaria pero no suficiente para la diferenciabilidad.

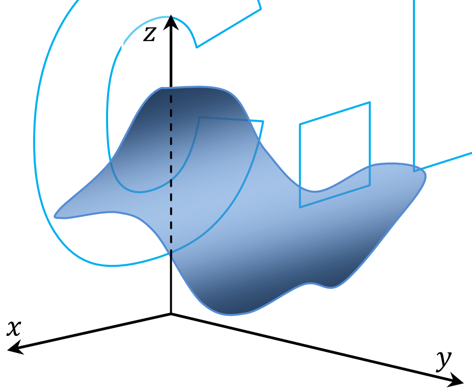
Es decir, si $\vec{f}$ no es continua en $\vec{x}_0$ entonces $\vec{f}$ no es diferenciable en $\vec{x}_0$; pero si $\vec{f}$ es continua en $\vec{x}_0$, $\vec{f}$ puede ser o no diferenciable en $\vec{x}_0$.

Podemos afirmar que:

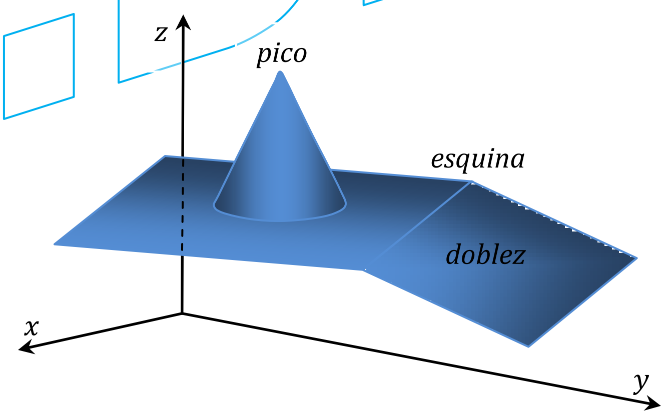
$$\text{Diferenciabilidad} \;\substack{\Rightarrow \\ \nLeftarrow}\; \text{Continuidad}$$

Una función $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **diferenciable** no solamente es continua (no tiene "saltos" en su gráfica) sino que también tiene recta tangente definida en cada punto.

Una función $f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **diferenciable** no sólo es continua (no tiene "fracturas" en su gráfica) sino que también tiene **plano tangente** definido en cada punto. Es decir, su gráfica es una superficie **"suave"** en $\mathbb{R}^3$, o sea que carece de bruscos dobleces, esquinas o picos.



Gráfica suave



Gráfica no suave

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA DIFERENCIABILIDAD

TEOREMA

Enunciado

Sea $\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Si todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ son continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, entonces $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}_0$.

Demostración

El teorema habrá sido probado si se demuestra que $L = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$ satisface:

$$\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}$$

$\Updownarrow$ **Por TFL**

$$\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} \frac{f_i(\vec{x}_0) - f_i(\vec{x}_0) - L_i(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0, \qquad 1 \leq i \leq m$$

Por lo tanto es suficiente probar el teorema para las funciones coordenadas f_i de $\vec{f}$, lo que equivale, y es notacionalmente más simple, a probar el teorema considerando f función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ (campo escalar).

Luego, es suficiente demostrar que L satisface:

$$\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

donde

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

$$\vec{x}_0 = (a_1, \cdots, a_n)$$

$$L(\vec{x} - \vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0)\,(x_k - a_k)$$

Si hacemos

$$\vec{y}_k = (x_1, \cdots, x_k, a_{k+1}, \cdots, a_n) \quad \text{con} \;\; k = 0,1, \cdots, n$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\vec{y}_0 &= (a_1, \cdots, a_n) = \vec{x}_0, && k = 0 \\
\vec{y}_1 &= (x_1, a_2, \cdots, a_n), && k = 1 \\
\vec{y}_2 &= (x_1, x_2, a_3, \cdots, a_n), && k = 2 \\
&\vdots \\
\vec{y}_n &= (x_1, \cdots, x_n) = \vec{x}, && k = n
\end{aligned}$$

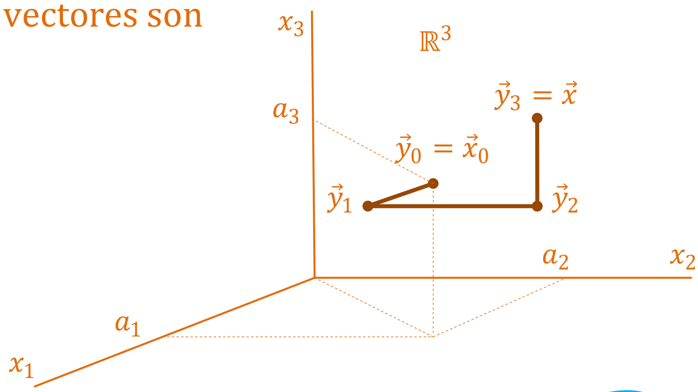
Por ej., en tres dimensiones ($n = 3$) estos vectores son

$$\vec{y}_0 = (a_1, a_2, a_3) = \vec{x}_0$$

$$\vec{y}_1 = (x_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{y}_2 = (x_1, x_2, a_3)$$

$$\vec{y}_3 = (x_1, x_2, x_3) = \vec{x}$$



Luego podemos expresar a $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ mediante la siguiente **suma telescópica** (se llama así porque los términos sucesivos se cancelan, excepto el primero y el último)

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) &= \sum_{k=1}^{n} [f(\vec{y}_k) - f(\vec{y}_{k-1})] \\
&= f(\vec{y}_1) - f(\vec{y}_0) + f(\vec{y}_2) - f(\vec{y}_1) + \cdots + f(\vec{y}_n) - f(\vec{y}_{n-1}) \\
&= f\left(\underbrace{\vec{y}_n}_{\vec{x}}\right) - f\left(\underbrace{\vec{y}_0}_{\vec{x}_0}\right)
\end{aligned}$$

Ahora como

$$\vec{y}_k = (x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \cdots, a_n) \qquad \text{y} \qquad \vec{y}_{k-1} = (x_1, \cdots, x_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n)$$

sólo difieren en sus k-ésimas coordenadas, podemos aplicar el **teorema del valor medio** para funciones reales de una variable real

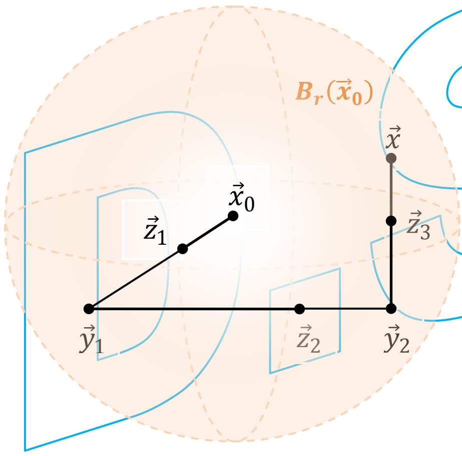
Teorema del valor medio (AMI)

Sea $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (D_f abierto) diferenciable en $[a,b] \subset D_f$, entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \sum_{k=1}^{n} \Big[\underbrace{f(\vec{y}_k) - f(\vec{y}_{k-1})}\Big]$$

Por el teorema del valor medio

$$= \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{z}_k)(x_k - a_k)}$$



donde $\vec{z}_k$ es un punto perteneciente al segmento de recta que une a $\vec{y}_k$ con $\vec{y}_{k-1}$.

Tomando el valor absoluto del numerador del límite

$$0 \le |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)| = \left| \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{z}_k)(x_k - a_k)}^{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)} - \overbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0)\,(x_k - a_k)}^{L(\vec{x} - \vec{x}_0)} \right|$$

$$= \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{z}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \right)(x_k - a_k) \right| \le \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{z}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \right| |x_k - a_k|}_{\text{desiguladad triangular}}$$

(Como $|x_k - a_k| \le \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ para $k = 1, \cdots, n$) $$\le \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{z}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \right| \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

Tenemos que:

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)| \le \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{z}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \right| \|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

Y si dividimos por $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$

$$\frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} \le \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{z}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \right| \qquad (\text{con } \vec{x} \ne \vec{x}_0)$$

Como por hipótesis las derivadas parciales de f son continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, cuando $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0 \Rightarrow \vec{z}_k \longrightarrow \vec{x}_0 \Rightarrow$ el lado derecho tiende a cero, por lo tanto el lado izquierdo también tiende a cero, con lo cual queda probado que

$$\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} \frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Ahora, como este límite es cero, puede eliminarse el valor absoluto en el numerador

$$\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Con lo cual queda demostrada la diferenciabilidad de f en $\vec{x}_0$.

(Fin de la demostración)

Las condiciones que fija este teorema son suficientes pero no necesarias, es decir que si las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ no son continuas en un entorno de $\vec{x}_0$ entonces $\vec{f}$ puede ser o no diferenciable en $\vec{x}_0$. Por ejemplo, si existen las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$ pero no son todas continuas en un entorno de $\vec{x}_0$, $\vec{f}$ puede ser aún diferenciable en $\vec{x}_0$ si es que existe una aplicación lineal $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfaga

$$\lim_{\vec{h} \longrightarrow \vec{0}} \frac{\vec{f}(\vec{x}_0 + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - L(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \vec{0}$$

En caso de existir esa lineal, ésta vendrá representada (en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$) por la matriz jacobiana de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$, cuyos elementos son las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ en $\vec{x}_0$.

Podemos afirmar que:

$$\text{Derivadas parciales continuas} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \text{Diferenciable}$$

FUNCIONES CONTINUAMENTE DIFERENCIABLES

$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es **continuamente diferenciable** en $\vec{x}_0$ si y sólo si todos los elementos de la matriz jacobiana de $\vec{f}$ son funciones continuas en un entorno de $\vec{x}_0$.

C.F.D.S

FUNCIONES CLASE C^N

Sea

$$\vec{f}: D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m; \quad D_{\vec{f}} \text{ abierto}$$

$$D \subset D_{\vec{f}}$$

Si todas las derivadas parciales de N-ésimo orden de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ son continuas en D, entonces se dice que $\vec{f}$ es una función clase C^N en D y se denota $\vec{f} \in C^N(D)$.

Si $\vec{f}$ es continua en D se dice que $\vec{f} \in C^0(D)$.

Si $\vec{f} \in C^N(D)$ con $N \geq 1 \Rightarrow \vec{f} \in C^{N-1}(D)$.

RESUMEN

Para un **campo escalar** $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{Continua} & & & & \\
 & & \Uparrow \not\Downarrow & & & & \\
\begin{array}{c}\text{Derivadas}\\\text{parciales}\\\text{continuas}\end{array} & \begin{array}{c}\Rightarrow\\\not\Leftarrow\end{array} & \text{Diferenciable} & \begin{array}{c}\Rightarrow\\\not\Leftarrow\end{array} & \begin{array}{c}\text{Existen todas}\\\text{las derivadas}\\\text{direccionales}\end{array} & \begin{array}{c}\Rightarrow\\\not\Leftarrow\end{array} & \begin{array}{c}\text{Existen todas}\\\text{las derivadas}\\\text{parciales}\end{array} \\
 & & \Updownarrow & & & &
\end{array}$$

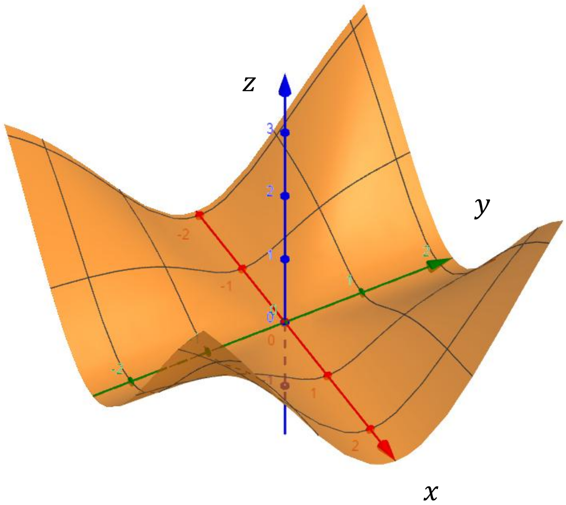
$$\exists\, L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \;|$$

$$\lim_{\vec{x} \longrightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - L(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Ejemplo 1

Para la siguiente función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ;\ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Demuestre si es o no continua en $(x,y) = (0,0)$.
b) Obtenga, si existen, las derivadas parciales en $(x,y) = (0,0)$.
c) Demuestre si es o no diferenciable en $(x,y) = (0,0)$.



Solución

a) Se puede demostrar que f es continua en (0,0) del siguiente modo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \mid \ 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \ 0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \underbrace{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2}}_{\substack{\text{Se utilizan} \\ x^2+y^2 = \|\vec{x}\|^2 \\ x^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \\ y^2 \leq \|\vec{x}\|^2}} = \|\vec{x}\|^2 < \delta^2 < \varepsilon$$

$$\delta < \sqrt{\varepsilon} \quad , \quad f \text{ es continua en } (0,0)$$

b) Recordando que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+(t,0)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right)\right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\left(\frac{t^2 0^2}{t^2+0^2} - 0\right)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{0}{t^3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right)\right]$$

$$= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}\left(\frac{0^2 t^2}{0^2+t^2} - 0\right)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{0}{t^3}\right) = 0$$

c) Recordando que si f es diferenciable en $\vec{x}_0$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \vec{\nabla} f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)}{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|} = 0$$

Como $\vec{x} = (x,y)$ y $\vec{x}_0 = (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \vec{\nabla} f(0,0)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}}{\|(x,y)\|} = 0$$

En este caso para que f sea diferenciable en (0,0) se tiene que cumplir que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 - \overbrace{(0 \quad 0)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}}^{=0}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Lo cual se puede demostrar que si se cumple del siguiente modo: (aplicando la definición de límite)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < \|\vec{x}\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2\|\vec{x}\|} = \|\vec{x}\| < \delta < \varepsilon$$

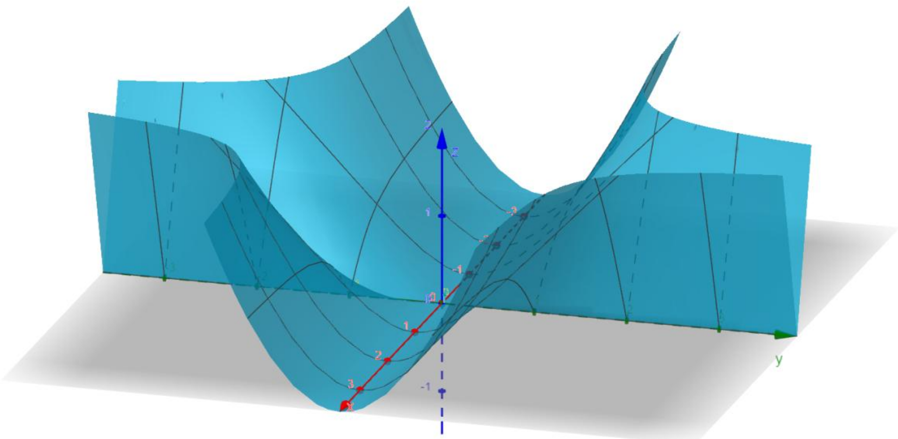
f es diferenciable en (0,0)

Ejemplo 2

La siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y^2}{\sqrt{|x|^2+y^2}} & ; \quad si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad si \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

cuya gráfica es:



es diferenciable en (0,0).

Demostración

Primero se calculan las derivadas parciales en (0,0):

$$f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \left(f(t,0) - f(0,0) \right) \right] = \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \left(\frac{|t|0^2}{\sqrt{|t|^2+0^2}} \right) \right] = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \left(f(0,t) - f(0,0) \right) \right] = \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \left(\frac{|0|t^2}{\sqrt{|0|^2+t^2}} \right) \right] = 0$$

Luego se hace:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\begin{pmatrix} f_x(0,0) & f_y(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0\end{pmatrix}}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\dfrac{|x|y^2}{\sqrt{|x|^2+y^2}}-0-0x-0y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{\sqrt{|x|^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{x^2+y^2}$$

Y se demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} = 0$ del siguiente modo:

$$0 < \|\vec{x}-\vec{0}\| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{|x|y^2}{x^2+y^2}-0\right| = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} < \varepsilon$$

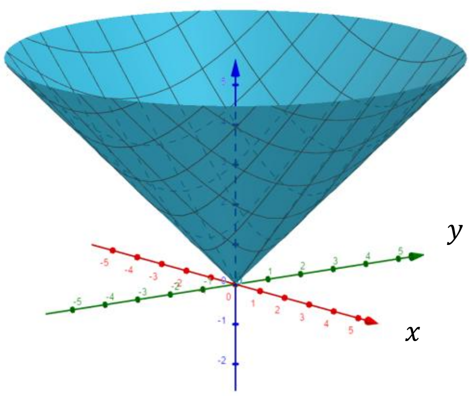
$$0 < \|\vec{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|^2}{\|\vec{x}\|^2} = \|\vec{x}\| < \delta \; < \varepsilon$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Demuestre que la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ es continua en el origen pero no es diferenciable allí.

Solución

La gráfica de $z=\sqrt{x^2+y^2}$ es:



CONO CIRCULAR

Se puede demostrar que esta función es continua en (0,0) del siguiente modo:

Como $f(0,0) = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$, lo que hay que demostrar es que:

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{0}_{f(0,0)}$$

O sea

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ \mid \ 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left|\sqrt{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \ \mid \ 0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \|\vec{x}\| < \delta < \varepsilon$$

$\delta < \varepsilon$, f es continua en (0,0)

Se puede comprobar que f no es diferenciable en (0,0) (punto interior del dominio de f) si hacemos

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{|t|}{t} \nexists \Rightarrow \nexists\ f_x\,(0,0)$$

$$\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{|t|}{t} \nexists \Rightarrow \nexists\ f_y\,(0,0)$$

O sea que $\nexists\ \vec{\nabla}f(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en (0,0).

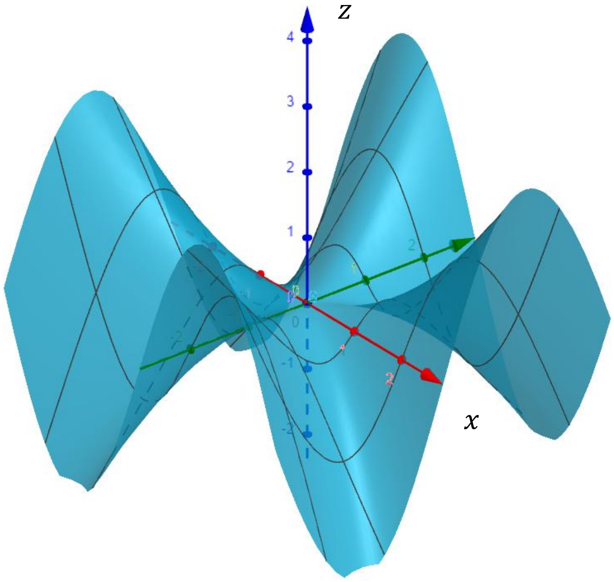
---

2. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & ; \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Analizar la continuidad en el punto (0,0).
b) ¿Existen las derivadas parciales en (0,0)?
c) ¿Es diferenciable en (0,0)?

Solución



a) Se puede demostrar que la función es continua en (0,0):

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \mid \ 0 < \|\vec{x} - \vec{0}\| < \delta \wedge \vec{x} \in D_f \Rightarrow \left| \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \frac{|x^3 y - x y^3|}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{|x^3 y + (-x y^3)|}{x^2 + y^2} \le \frac{x^2|xy| + y^2|xy|}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)|x||y|}{x^2 + y^2}}_{} < \varepsilon$$

Desigualdad triangular

$|a + b| \le |a| + |b|; \quad a, b \ \in \mathbb{R}$

$$\left|\overbrace{x^3 y}^{a} + \overbrace{(-x y^3)}^{b}\right| \le \left|\overbrace{x^3 y}^{a}\right| + \left|\overbrace{-x y^3}^{b}\right| = x^2|x||y| + y^2|x||y| = (x^2 + y^2)|x||y|$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \mid \ 0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \frac{|x^3 y - x y^3|}{x^2 + y^2} \le |x||y| \le \|\vec{x}\|\|\vec{x}\| = \|\vec{x}\|^2 < \delta^2 < \varepsilon$$

$\delta < \sqrt{\varepsilon}$, f es continua en (0,0)

b) $f_x(0,0) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t}\left(f(t,0) - f(0,0)\right)\right]$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t}\left(\frac{t^3 0 - t0^3}{t^2 + 0^2}\right)\right]$$

$$= 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right)\right]$$

$$= \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t}\left(\frac{0^3 t - 0t^3}{0^2 + t^2}\right)\right]$$

$$= 0$$

Sí, existen las derivadas parciales en (0,0) y valen 0.

c) Es diferenciable en (0,0) ya que se puede demostrar que:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} - 0 - 0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Aplicando la definición de límite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{|x^3y - xy^3|}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2|xy| + y^2|xy|}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{(x^2 + y^2)|x||y|}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < \|\vec{x}\| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{|x^3y - xy^3|}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \|\vec{x}\| < \delta < \varepsilon$$

f es diferenciable en (0,0)

3. Para la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{4x^2+4y^2}} & ;\ si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(a) Demuestre si es o no continua en $(x,y)=(0,0)$.
(b) Obtenga, si existen, las derivadas parciales en $(x,y)=(0,0)$.
(c) Demuestre si es o no diferenciable en $(x,y)=(0,0)$.

Solución

(a) A continuación se demuestra que f es continua en $(0,0)$.

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ |0<\|\vec{x}-\vec{x}_o\|<\delta\wedge\vec{x}\in D_f\Rightarrow|f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ |0<\|\vec{x}-\vec{0}\|<\delta\wedge\vec{x}\in D_f\Rightarrow\left|\frac{2xy}{\sqrt{4x^2+4y^2}}-0\right|<\varepsilon$$

$$0<\|\vec{x}\|<\delta\ \Rightarrow\left|\frac{2xy}{\sqrt{4(x^2+y^2)}}\right|=\frac{2|x||y|}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{\|\vec{x}\|\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}=\|\vec{x}\|<\delta<\varepsilon$$

(b) $$f_x(0,0)=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}\big(f(t,0)-f(0,0)\big)\right]=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}\left(\frac{2t(0)}{\sqrt{4t^2+4(0^2)}}-0\right)\right]$$
$$=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}\big(f(0,t)-f(0,0)\big)\right]=\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}\left(\frac{2(0)t}{\sqrt{4(0^2)+4t^2}}-0\right)\right]$$
$$=0$$

(c) Se demuestra que f no es diferenciable en $(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\big(f_x(0,0)\ \ f_y(0,0)\big)\begin{pmatrix}x-0\\y-0\end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}}\overset{?}{=}0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{2xy}{\sqrt{4x^2+4y^2}}-0-(0\quad0)\begin{pmatrix}x-0\\y-0\end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}}\overset{?}{=}0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{4x^2+4y^2}\sqrt{x^2+y^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

Si elijo $S = \{(x,y)|y = x\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow f \text{ no es diferenciable en } (0,0)$$

---

4. Para la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\dfrac{1}{y} & ; \ si \quad y \neq 0 \\ 0 & ; \ si \quad y = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre si es o no continua en $(x,y) = (0,0)$.

(b) Obtenga, si existen, las derivadas parciales en $(x,y) = (0,0)$.

(c) Diga si es o no diferenciable en $(x,y) = (0,0)$. Justifique su respuesta.

__Solución__

(a) Como $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\frac{1}{y}\right] = \lim_{y\to 0}\left[-\frac{1}{y}\right] \nexists \Rightarrow f$ no es continua en $(0,0)$

(b) $$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left(\underbrace{f(t,0)}_{=0} - f(0,0)\right)\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}(0-0)\right] = 0$$

$$\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left(f(0,t) - f(0,0)\right)\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left(\left(\frac{0^2-t^2}{0^2+t^2}\right)\frac{1}{t} - 0\right)\right]$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[-\frac{1}{t^2}\right] \nexists \Rightarrow \nexists\, f_y(0,0)$$

(c) Como f no es continua en $(0,0) \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

C.F.D.S

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Para cada una de las siguientes funciones

a) Demuestre si es o no continua en $(x,y) = (0,0)$.
b) Obtenga, si existen, las derivadas parciales en $(x,y) = (0,0)$.
c) Demuestre si es o no diferenciable en $(x,y) = (0,0)$.

i- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \sqrt{\varepsilon} \quad b)\ f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad c)\ \delta < \varepsilon$

ii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3}{x^2+y^2}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \frac{\varepsilon}{3} \quad b)\ f_x(0,0) = 3,\ f_y(0,0) = 0$

iii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy^2}{\sqrt{x^2+2y^4}}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \quad b)\ f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad c)\ \delta < \frac{\varepsilon}{3}$

iv- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2}; & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad ; & si\ x = 0 \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \varepsilon \quad b)\ f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

v- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|y^3}{x^2+4y^2}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \sqrt{\varepsilon} \quad b)\ f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad c)\ \delta < \varepsilon$

vi- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^4}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \sqrt{\varepsilon} \quad b)\ f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \quad c)\ \delta < \varepsilon$

vii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{3x^2+3y^2}}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \sqrt{3}\varepsilon \quad b)\ f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

viii- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2+y^4}; & si\ y \neq 0 \\ 0 \quad ; & si\ y = 0 \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \frac{\varepsilon}{2} \quad b)\ f_x(0,0) = 0,\ f_y(0,0) = -1$

ix- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3-y^3}{x^2+|x|^3+y^2}; & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad ; & si\ x = 0 \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \frac{\varepsilon}{3} \quad b)\ f_x(0,0) = 2,\ f_y(0,0) = 0$

x- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y-4x^3}{x^2+y^2}; & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad ; & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad a)\ \delta < \frac{\varepsilon}{5} \quad b)\ f_x(0,0) = -4,\ f_y(0,0) = 0$

2. Para cada una de las siguientes funciones

a) Demuestre si es o no continua en $(x,y)=(0,0)$.
b) Obtenga, si existen, las derivadas parciales en $(x,y)=(0,0)$.
c) Diga si es o no diferenciable en $(x,y)=(0,0)$. Justifique su respuesta.

i- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ $\qquad f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

ii- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2-y^2}; & si\ y\neq\pm x\\ 0\ ; & si\ y=\pm x\end{cases}$ $\qquad f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

iii- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4}{x^3+y^3}; & si\ y\neq -x\\ 0\ ; & si\ y=-x\end{cases}$ $\qquad f_x(0,0)=1,\ f_y(0,0)=0$

iv- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3x^2}{x+y}; & si\ y\neq -x\\ 0\ ; & si\ y=-x\end{cases}$ $\qquad f_x(0,0)=3,\ f_y(0,0)=0$

v- $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^3}{x^2+y^2}; & si\ x\neq 0\\ 0\ ; & si\ x=0\end{cases}$ $\qquad \nexists\ f_x(0,0),\ f_y(0,0)=0$

3. Demuestre que en $(0,0)$ la función: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ es continua, tiene derivadas en todas las direcciones pero no es diferenciable.

4. Demuestre que en $(0,0)$ la función: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}; & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ tiene derivadas parciales continuas.

5. Demuestre que en $(0,0)$ la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ sen\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right); & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ ; & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es continua, no tiene derivadas parciales continuas pero es diferenciable.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

TEOREMA: REGLA DE LA CADENA

Enunciado

Si

$$\vec g: D_{\vec g} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \text{ es diferenciable en } \vec x_0$$

$$\vec f: D_{\vec f} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^m \text{ es diferenciable en } \vec g(\vec x_0)$$

Entonces $\vec f \circ \vec g: D_{\vec f\circ\vec g} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\vec x_0$ y

$$(\vec f\circ\vec g)'(\vec x_0) = \vec f\,'\big(\vec g(\vec x_0)\big)\ \vec g\,'(\vec x_0)$$

O sea que, como

$$\vec g(\vec x) = \big(g_1(\vec x), \cdots, g_p(\vec x)\big); \qquad \vec x = (x_1, \cdots, x_n) \quad \text{variable vectorial última}$$

$$\vec f(\vec u) = \big(f_1(\vec u), \cdots, f_m(\vec u)\big); \qquad \vec u = (u_1, \cdots, u_p) \quad \text{variable vectorial intermedia}$$

y si se llama $\vec h = \vec f\circ\vec g$ de modo que:

$$\vec h(\vec x) = \big(h_1(\vec x), \cdots, h_m(\vec x)\big); \qquad \vec x = (x_1, \cdots, x_n)$$

Entonces

$$\overbrace{\underbrace{\vec h\,'(\vec x_0)}_{\substack{\text{Matriz Jacobiana de} \\ \vec h = \vec f\circ\vec g \text{ en } \vec x_0}}}^{(\vec f\circ\vec g)'(\vec x_0)} = \underbrace{\vec f\,'\big(\vec g(\vec x_0)\big)}_{\text{Matriz Jacobiana de } \vec f \text{ en } \vec g(\vec x_0)} \ \underbrace{\vec g\,'(\vec x_0)}_{\substack{\text{Matriz Jacobiana} \\ \text{de } \vec g \text{ en } \vec x_0}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec x_0}}_{\text{matriz } m\times n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial u_p} \end{pmatrix}_{\vec g(\vec x_0)}}_{\text{matriz } m\times p} \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec x_0}}_{\text{matriz } p\times n}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{\nabla} h_1 \\ \vdots \\ \vec{\nabla} h_m \end{pmatrix}_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} f_1 \\ \vdots \\ \vec{\nabla} f_m \end{pmatrix}_{\vec{g}(\vec{x}_0)} \begin{pmatrix} \vec{\nabla} g_1 \\ \vdots \\ \vec{\nabla} g_p \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$$

<u>**Ejemplos**</u>

Obtenga la matriz jacobiana de $\vec{f} \circ \vec{g}$ en el punto indicado para:

a) $\vec{g}(x, y, z) = (x + y^2, xy^2 z)$
$\vec{f}(u, v) = (u^2 + v, uv, e^v)$
$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,1,1)$

b) $\vec{g}(t) = (t + 1, e^t)$
$\vec{f}(u, v) = (u^2 + v^3, e^{uv})$
$t_0 = 0$

---

a) <u>**Solución**</u>

Como las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ y de $\vec{g}$ son continuas $\Rightarrow \vec{f}$ y $\vec{g}$ son funciones diferenciables.

Como

$$\vec{g}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$y \quad \vec{f}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

se tiene que $\vec{h}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g}$

Con $\vec{g}$ se pasa de $\vec{x} = (x, y, z)$ a $\vec{u} = (u, v)$, es decir:

$$\vec{u} = \vec{g}(\vec{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} u = g_1(x, y, z) = x + y^2 \\ v = g_2(x, y, z) = xy^2 z \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\vec{x} = (x, y, z)} \xrightarrow{\boldsymbol{\vec{g}}} \boldsymbol{\vec{u} = (u, v)}$$

O sea que

$$u_0 = g_1(x_0, y_0, z_0) = x_0 + {y_0}^2 = 0 + 1^2 = 1$$

$$v_0 = g_2(x_0, y_0, z_0) = x_0 {y_0}^2 z_0 = (0)(1^2)(1) = 0$$

C.F.D.S

Por lo tanto

$$\vec{u}_0 = (u_0, v_0) = (1{,}0)$$

Luego por regla de la cadena:

$$\overbrace{\vec{h}'(\vec{x}_0)}^{(\vec{f}\circ\vec{g})'(\vec{x}_0)} = \vec{f}'(\vec{g}(\vec{x}_0))\ \vec{g}'(\vec{x}_0)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial z} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{pmatrix}_{\vec{u}_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix}_{\vec{x}_0}$$

Recordando que

$$\vec{f}(u,v) = \big(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)\big) = (u^2 + v, uv, e^v)$$

$$\vec{g}(x,y,z) = \big(g_1(x,y,z), g_2(x,y,z)\big) = (x + y^2, xy^2 z)$$

se tiene

$$(\vec{f}\circ\vec{g})'(0{,}1{,}1) = \begin{pmatrix} 2u & 1 \\ v & u \\ 0 & e^v \end{pmatrix}_{(1,0)} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ y^2 z & 2xyz & xy^2 \end{pmatrix}_{(0,1,1)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

		1	2	0
		1	0	0
2	1	3	4	0
0	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$$\boxed{(\vec{f}\circ\vec{g})'(0{,}1{,}1) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

---

b) **Solución**

Como las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{f}$ y de $\vec{g}$ son continuas $\Rightarrow \vec{f}$ y $\vec{g}$ son funciones diferenciables.

Como

$$\vec{g}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$y \quad \vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

se tiene que $\vec{h}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g}$

Con $\vec{g}$ se pasa de t a $\vec{u} = (u, v)$, es decir:

$$\vec{u} = \vec{g}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u = g_1(t) = t + 1 \\ v = g_2(t) = e^t \end{cases}$$

$$\boldsymbol{t} \xrightarrow{\vec{\boldsymbol{g}}} \vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

O sea que

$$u_0 = g_1(t_0) = g_1(0) = 0 + 1 = 1$$

$$v_0 = g_2(t_0) = g_2(0) = e^0 = 1$$

Por lo tanto

$$\vec{u}_0 = (u_0, v_0) = (1{,}1)$$

Luego por regla de la cadena

$$\vec{h}'(t_0) = \vec{f}'\left(\vec{g}(t_0)\right)\ \vec{g}'(t_0)$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{\vec{u}_0} \begin{pmatrix} \dfrac{dg_1}{dt} \\ \dfrac{dg_2}{dt} \end{pmatrix}_{t_0}$$

Recordando que

$$\vec{f}(u, v) = \left(f_1(u, v), f_2(u, v)\right) = (u^2 + v^3, e^{uv})$$

$$\vec{g}(t) = \left(g_1(t), g_2(t)\right) = (t + 1, e^t)$$

se tiene

$$\vec{h}'(0) = \begin{pmatrix} 2u & 3v^2 \\ ve^{uv} & ue^{uv} \end{pmatrix}_{(1,1)} \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \end{pmatrix}_0$$

		1
		1
2	3	5
e	e	$2e$

$$\boxed{\vec{h}'(0) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ e & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2e \end{pmatrix}}$$

Ejercicio

Sea

$$(x,y) = \vec{g}(u,v,w)$$

y

$$z = f(x,y) = f\left(\vec{g}(u,v,w)\right)$$

Por medio de la regla de la cadena desarrolle las fórmulas para $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ y $\frac{\partial z}{\partial w}$.

Aplique esas fórmulas para:

$$\vec{g}(u,v,w) = (uv^2, v + 3w^2) \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = x^2 - y^2$$

Solución

Si

$$\vec{g}: D_{\vec{g}} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ es diferenciable en } \vec{u}$$

$$\vec{g}(\vec{u}) = \left(g_1(\vec{u}), g_2(\vec{u})\right); \qquad \vec{u} = (u,v,w) \text{ variables últimas}$$

y

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es diferenciable en } \vec{g}(\vec{u})$$

$$f(\vec{x}); \qquad \vec{x} = (x,y) \text{ variables intermedias}$$

Entonces

$$f \circ \vec{g}: D_{f \circ \vec{g}} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es diferenciable en } \vec{u}$$

$$z = (f \circ \vec{g})(\vec{u}) = f\left(\vec{g}(\vec{u})\right); \ \vec{u} = (u,v,w) \text{ variables últimas}$$

y

$$\left(\overbrace{f\circ\vec{g}}^{z=}\right)'(\vec{u}) = f'\left(\vec{g}(\vec{u})\right)\ \vec{g}'(\vec{u})$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\vec{g}(\vec{u})} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} & \dfrac{\partial g_1}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v} & \dfrac{\partial g_2}{\partial w} \end{pmatrix}_{\vec{u}}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} & & \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} & \dfrac{\partial g_1}{\partial w} \\[2ex] & & \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v} & \dfrac{\partial g_2}{\partial w} \\[2ex] \hline \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{array}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial v}; \qquad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial w}}$$

Para las funciones dadas

$$\vec{g}(u,v,w) = (uv^2, v + 3w^2) \qquad \text{y} \qquad f(x,y) = x^2 - y^2$$

tenemos que las derivadas parciales f y las derivadas parciales de las funciones coordenadas de $\vec{g}$ son continuas $\Rightarrow f$ y $\vec{g}$ son funciones diferenciables, por lo tanto podemos aplicar las fórmulas obtenidas.

Para hacer $f\circ\vec{g}$, primero se aplica $\vec{g}$, y con $\vec{g}$ se pasa de $\vec{u}$ a $\vec{x}$:

$$\overbrace{(x,y)}^{\vec{x}} = \vec{g}\,\overbrace{(u,v,w)}^{\vec{u}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g_1(u,v,w) = uv^2 \\ y = g_2(u,v,w) = v + 3w^2 \end{cases}$$

O sea que:

$$x = uv^2$$
$$y = v + 3w^2$$

Y luego se aplica f para obtener:

$$z = f\left(\overbrace{\vec{g}(u,v,w)}^{\vec{x}}\right) = (\underbrace{uv^2}_{x})^2 - (\underbrace{v+3w^2}_{y})^2$$

$$\begin{tikzcd}
\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \arrow[r, bend left, "\vec{\boldsymbol{g}}"] \arrow[rr, bend left=60, "\boldsymbol{f}\circ\vec{\boldsymbol{g}}"] & \vec{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \arrow[r, bend left, "\boldsymbol{f}"] & \boldsymbol{z}
\end{tikzcd}$$

Aplicando las fórmulas desarrolladas se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial \overbrace{f}^{z}}{\partial x}\frac{\partial \overbrace{g_1}^{x}}{\partial u} + \frac{\partial \overbrace{f}^{z}}{\partial y}\frac{\partial \overbrace{g_2}^{y}}{\partial u} = \overbrace{2\underbrace{x}_{=uv^2}}^{\frac{\partial f}{\partial x}}\ \overbrace{v^2}^{\frac{\partial g_1}{\partial u}} + \left(\overbrace{-2\underbrace{y}_{=v+3w^2}}^{\frac{\partial f}{\partial y}}\ \overbrace{0}^{\frac{\partial g_2}{\partial u}}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial \overbrace{f}^{z}}{\partial x}\frac{\partial \overbrace{g_1}^{x}}{\partial v} + \frac{\partial \overbrace{f}^{z}}{\partial y}\frac{\partial \overbrace{g_2}^{y}}{\partial v} = 2uv^2\ \overbrace{(2uv)}^{\frac{\partial g_1}{\partial v}} - 2(v+3w^2)\ \overbrace{1}^{\frac{\partial g_2}{\partial v}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = 4u^2v^3 - 2v - 6w^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial \overbrace{f}^{z}}{\partial x}\frac{\partial \overbrace{g_1}^{x}}{\partial w} + \frac{\partial \overbrace{f}^{z}}{\partial y}\frac{\partial \overbrace{g_2}^{y}}{\partial w} = 2uv^2\ \overbrace{(0)}^{\frac{\partial g_1}{\partial w}} - 2(v+3w^2)\ \overbrace{6w}^{\frac{\partial g_2}{\partial w}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial w} = -12vw - 36w^3}$$

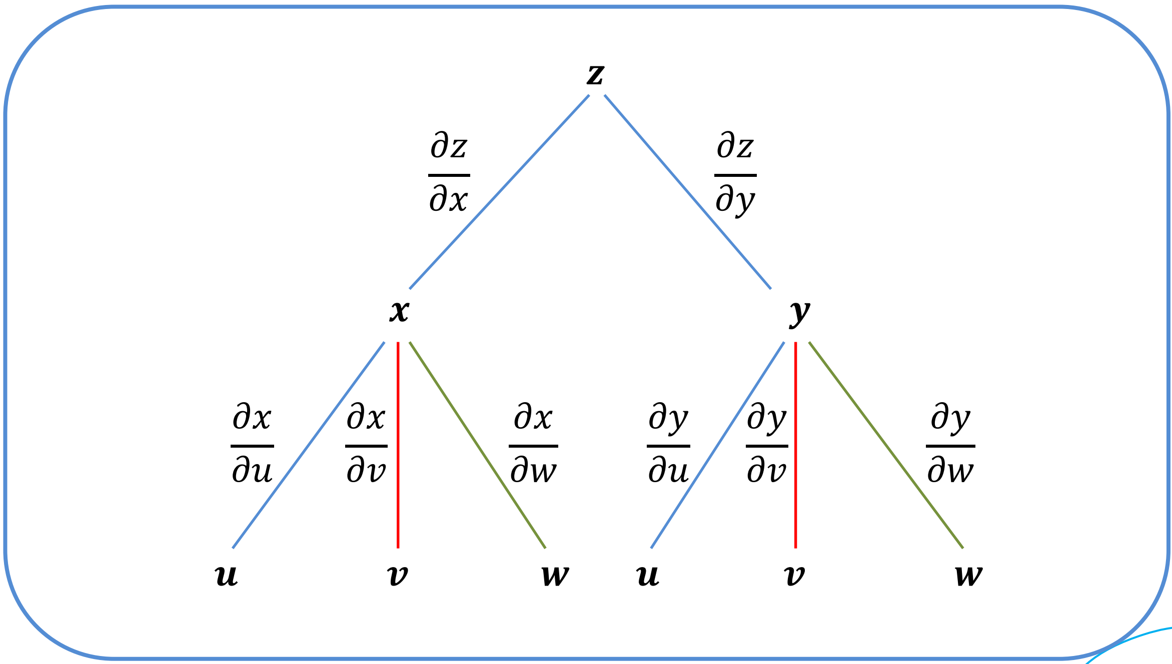
Una manera de recordar la regla de la cadena es dibujando un **diagrama de árbol**.

Para este caso la variable dependiente es z, las variables intermedias son x e y, las variables últimas son u, v y w.

Para realizar el diagrama de árbol se dibujan ramas desde la variable dependiente z a las variables intermedias x e y.

A continuación se dibujan ramas desde x e y a las variables últimas u, v y w.

En cada rama se escribe la derivada parcial correspondiente.



Para determinar la derivada de z respecto de una de las variables últimas se realiza el producto de las derivadas parciales en cada trayectoria desde z hasta la variable última y luego se suman los productos:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v};\qquad \frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w}}$$

En estas fórmulas, por ejemplo $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial x}{\partial u}$ representan a $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial g_1}{\partial u}$ respectivamente de las fórmulas deducidas anteriormente.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Obtenga la matriz jacobiana de $\vec{f}\circ\vec{g}$ ó de $f\circ\vec{g}$ -según corresponda- en el punto indicado para:

a) $\vec{g}(x,y)=(x^2+xy+1, y^2+2)$
$\vec{f}(u,v)=(u+v, 2u, v^2)$
$\vec{x}_0=(x_0,y_0)=(1,1)$

Resp: $\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 2\\ 0 & 12\end{pmatrix}$

b) $\vec{g}(t)=(t, t+1, t^2)$
$\vec{f}(x,y,z)=(x+2y+z^2, x^2-y)$
$t_0=a$

Resp: $\begin{pmatrix}3+4a^3\\ 2a-1\end{pmatrix}$

c) $\vec{g}(x,y,z) = (yz^2 + xy, 2y + z, sen(2xy) + 1)$

$\vec{f}(u,v,w) = \left(3u^2 + e^{u^2-v+1}, sen(uw) + v\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (1,0,1)$

Resp: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{g}(x,y) = (xy + cos(xy), x^2y + 2y)$

$\vec{f}(u,v) = \left(v + e^{v^2-u+1}, u^2 + 2v, u + sen(3uv)\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (1,0)$

Resp: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

e) $\vec{g}(x,y) = (x^2 + 2x, xy, x + y)$

$\vec{f}(u,v,w) = (u^2 + w, u + 2v)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (1,1)$

Resp: $\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

f) $\vec{g}(x,y) = \left(ye^{x^2-y}, sen(xy)\right)$

$f(u,v) = e^{2v^2+4v} + u^2$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (0,1)$

Resp: $\begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\vec{g}(x,y,z) = (2xy + ze^{xy}, cos(xy) + z)$

$\vec{f}(u,v) = \left(uv + e^{v-2}, ue^{uv-2}, sen(uv - 2)\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,1)$

Resp: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

h) $\vec{g}(x,y,z) = \left(xze^{x+y^2}, sen(x^2 + y), e^x cos(xz)\right)$

$f(u,v,w) = e^{uvw} + (v-1)^2 + w$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = (0,0,1)$

Resp: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\vec{g}(x,y) = \left(y^2 - \dfrac{1}{2} + cos^2\left(xy + \dfrac{\pi}{4}\right), e^{x^2-y+1} - x, xy + sen(3xy^2)\right)$

$\vec{f}(u,v,w) = \left(v^2 + w + e^{v^2-u}, ucos(uw) + vw + v^2\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (0,1)$

Resp: $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

j) $\vec{g}(x,y) = \left(x^2 - 3xy, y + e^{x^2-2x}, x + y\right)$

$\vec{f}(u,v,w) = \left(u^2 + w, u^3 + e^{2v^2-4v}\right)$

$\vec{x}_0 = (x_0, y_0) = (2,1)$

Resp: $\begin{pmatrix} -3 & 25 \\ 20 & -68 \end{pmatrix}$

2. Suponiendo que las siguientes funciones son diferenciables

C.F.D.S

$$w = f(x,y,z); \qquad \begin{aligned} x &= g_1(u,v) \\ y &= g_2(u,v) \\ z &= g_3(u,v) \end{aligned}$$

Desarrolle, por medio de la regla de la cadena, las fórmulas para $\frac{\partial w}{\partial u}$ y $\frac{\partial w}{\partial v}$.

$$Resp: \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g_3}{\partial u}; \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g_3}{\partial v}$$

3. Suponiendo que las siguientes funciones son diferenciables

$$w = f(x,y,z); \qquad z = g(x,y)$$

Desarrolle, por medio de la regla de la cadena, las fórmulas para $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$.

$$Resp: \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}$$

4. Suponiendo que las siguientes funciones son diferenciables

$$w = f(x,y,z); \qquad y = g(x,z)$$

Desarrolle, por medio de la regla de la cadena, las fórmulas para $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$.

$$Resp: \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

5. Sean

$$w = f(x,y); \qquad \begin{aligned} x &= g_1(r,\theta) = rcos(\theta) \\ y &= g_2(r,\theta) = rsen(\theta) \end{aligned}$$

Suponiendo que f es diferenciable, obtenga por medio de la regla de la cadena las expresiones para $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial \theta}$.

$$Resp: \frac{\partial w}{\partial r} = cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + sen(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}; \qquad \frac{\partial w}{\partial \theta} = -rsen(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + rcos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

CAMPOS ESCALARES

Vamos a considerar ahora el caso de funciones $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, las cuales constituyen un caso especial de las funciones $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, de allí que todo lo antes dicho para éstas es válido para aquellas.

Las estudiaremos en particular, ya que importantes consecuencias pueden extraerse del hecho que $m = 1$.

GRADIENTE

Dado el **campo escalar**

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \ \left(D_f \text{ abierto}\right) \ \textbf{diferenciable}$$

es posible asociarle a éste un **campo vectorial**

$$\vec{\nabla} f: D_{\vec{\nabla} f} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \nabla: nabla$$

definido por:

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \cdots \quad, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

llamado **"gradiente de *f*"**, donde $\vec{\nabla}$ es el **operador diferencial**:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \cdots \quad, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

de modo que

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \cdots \quad, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \cdots \quad, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

PROPIEDADES

Si

- $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- $g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

  son campos escalares **diferenciables**

- $c \in \mathbb{R}$

Entonces

I) $\vec{\nabla}(cf) = c\vec{\nabla}f$

II) $\vec{\nabla}(f \pm g) = \vec{\nabla}f \pm \vec{\nabla}g$

III) $\vec{\nabla}(fg) = g\,\vec{\nabla}f + f\,\vec{\nabla}g$

IV) $\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\vec{\nabla}f - f\,\vec{\nabla}g}{g^2}, \;\; g(\vec{x}) \neq 0$

Ejemplo

Encuentre el gradiente de f en $\vec{x}_0$ para la siguiente función:

$$f(x,y) = ln(x^2 + y^2 + 1) + e^{2xy}; \qquad \vec{x}_0 = (0,-2)$$

Solución

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} + 2ye^{2xy} \quad ; \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} + 2xe^{2xy}$$

Las derivadas parciales de f son continuas (en $\mathbb{R}^2$) $\Rightarrow$ f es diferenciable.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-2) = \frac{0}{4+1} + (-4) = -4 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,-2) = \frac{-4}{4+1} + 0 = -\frac{4}{5}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}f(0,-2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,-2), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,-2)\right) = \left(-4, -\frac{4}{5}\right)}$$

C.F.D.S

TEOREMA

Enunciado

Si

$$f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es } \textbf{diferenciable} \text{ en } \vec{x}_0$$

$$\hat{u} \in \mathbb{R}^n$$

Entonces

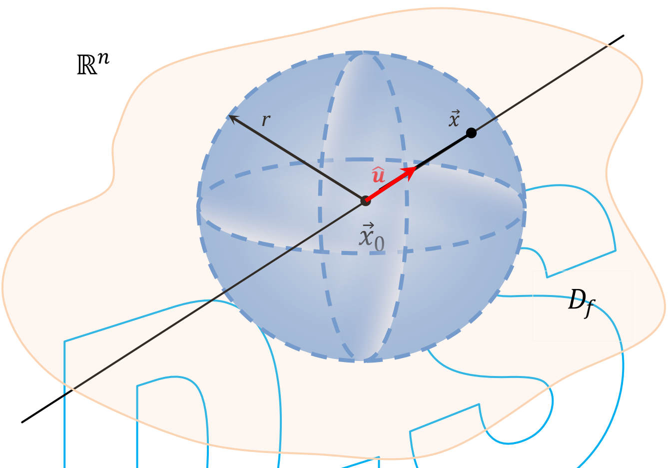
$$D_{\hat{u}} f(\vec{x}_0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \bullet \hat{u}$$

Demostración

Por ser f diferenciable en $\vec{x}_0$, existe una lineal $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

$$\lim_{\vec{h} \longrightarrow \vec{0}} \frac{f\left(\vec{x}_0 + \vec{h}\right) - f(\vec{x}_0) - L\left(\vec{h}\right)}{\|\vec{h}\|} = 0$$

Como $\vec{x}_0$ es punto interior del $D_{\vec{f}}$, $\exists\, B_r(\vec{x}_0) \big|\, B_r(\vec{x}_0) \subset D_f$; entonces si hacemos $\vec{x} = \vec{x}_0 + t\hat{u}$ con $\hat{u}$: cualquier dirección de $\mathbb{R}^n$ tenemos que $\vec{x}$ es también punto interior del D_f $\forall t \in (-r, r)$ y



$$\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0 = t\hat{u}$$

con lo cual $\vec{h} \longrightarrow \vec{0}$ si $t \longrightarrow 0$ y

el límite anterior se puede expresar:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\hat{u}) - f(\vec{x}_0) - L(t\hat{u})}{\|t\hat{u}\|} = 0$$

Dado que

$$\|t\hat{u}\| = |t| \overbrace{\|\hat{u}\|}^{=1} = |t|$$

$$L(t\hat{u}) = t\, L(\hat{u})$$ -Propiedad de la lineal-

Nos queda

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(\vec{x}_0+t\hat{u})-f(\vec{x}_0)-tL(\hat{u})}{|t|}=0$$

Por ser f diferenciable en $\vec{x}_0$, la **lineal** es

$$\overbrace{L(\hat{u})}^{df\,(\vec{x}_0,\hat{u})} = \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \quad \cdots \quad ,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)}^{f'(\vec{x}_0)}\overbrace{\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}}^{\hat{u}}}_{\substack{\text{Esta multiplicación matricial puede}\\ \text{expresarse como un producto escalar}}}$$

$$= \underbrace{\overbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \quad \cdots \quad ,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)}}\bullet\underbrace{(u_1,\cdots,u_n)}$$

$$L(\hat{u}) = \overbrace{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)} \bullet \overbrace{\hat{u}}$$

Sustituyendo $L(\hat{u})$ por $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\bullet\hat{u}$ en el límite:

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(\vec{x}_0+t\hat{u})-f(\vec{x}_0)-t\left[\overbrace{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\bullet\hat{u}}^{L(\hat{u})}\right]}{|t|}=0$$

Como es límite es cero, puede eliminarse el valor absoluto en el denominador

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(\vec{x}_0+t\hat{u})-f(\vec{x}_0)-t\left[\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\bullet\hat{u}\right]}{t}=0$$

Como $t\neq 0$

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\left[\frac{f(\vec{x}_0+t\hat{u})-f(\vec{x}_0)}{t}-\underbrace{\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\bullet\hat{u}}_{\text{No depende de } t}\right]=0$$

$$\underbrace{\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(\vec{x}_0+t\hat{u})-f(\vec{x}_0)}{t}}_{\text{Por definición}}=\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\bullet\hat{u}$$

$$\overbrace{D_{\hat{u}}f(\vec{x}_0)}=\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)\bullet\hat{u}$$

TEOREMA

Enunciado

Si $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\left(\text{con } D_f \text{ abierto}\right)$ es **diferenciable**, entonces $\forall \vec{x} \in D_f \mid \vec{\nabla} f(\vec{x}) \neq \vec{0}$:

$D_{\hat{u}} f_{máx}(\vec{x}) = \left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|$ "máxima razón de cambio de f".

$\vec{\nabla} f(\vec{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.

Demostración

Dada una dirección $\hat{u}$ de $\mathbb{R}^n$, sabemos que:

$$\left|\overbrace{D_{\hat{u}} f(\vec{x})}\right| \overset{\text{Por ser } f \text{ diferenciable}}{=} \underbrace{\left|\overbrace{\vec{\nabla} f(\vec{x}) \bullet \hat{u}}\right| \le \left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\| \overbrace{\|\hat{u}\|}^{=1}}_{\text{Por desigualdad de Schwarz}}$$

$$|D_{\hat{u}} f(\vec{x})| \le \left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{-\left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|}_{\substack{\text{Valor mímino} \\ \text{de } D_{\hat{u}} f}} \le D_{\hat{u}} f(\vec{x}) \le \underbrace{\left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|}_{\substack{\text{Valor máximo} \\ \text{de } D_{\hat{u}} f}}$$

Queda demostrado que $D_{\hat{u}} f_{máx}(\vec{x}) = \left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|$, valor que se obtiene cuando la dirección de $\hat{u}$ y de $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ coinciden. Esto es, si hacemos $\hat{u} = \frac{\vec{\nabla} f(\vec{x})}{\left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|}$ de modo que $\hat{u}$ apunte en la misma dirección de $\vec{\nabla} f(\vec{x})$, obtenemos:

$$D_{\hat{u}} f(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x}) \bullet \overbrace{\frac{\vec{\nabla} f(\vec{x})}{\left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|}}^{\hat{u}} = \underbrace{\frac{\left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|^2}{\left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|} = \left\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\right\|}_{\text{Ya que } \vec{\nabla} f(\vec{x}) \neq \vec{0}}$$

Con lo cual queda demostrado que el vector gradiente $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de la función f. En otras palabras, si queremos movernos en una dirección en la cual f va a crecer con mayor rapidez, debemos proceder en la dirección a la que apunta el vector $\vec{\nabla} f(\vec{x})$. Análogamente, si deseamos movernos en una dirección en la cual f decrece más rápido, debemos proceder en la dirección apuntada por $-\vec{\nabla} f(\vec{x})$.

Ejemplo

Sean la función

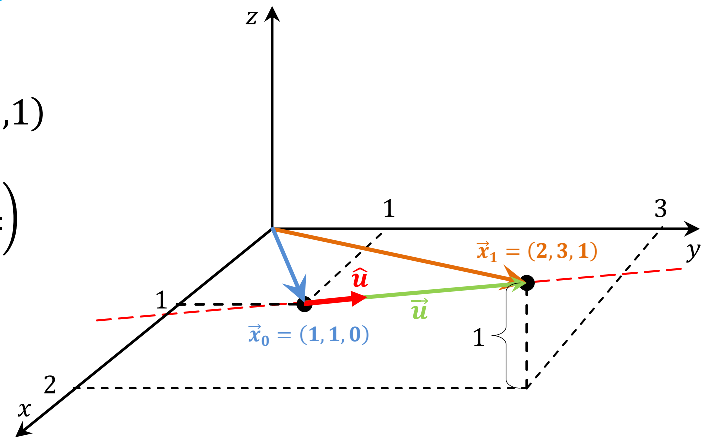
$$f(x,y,z) = xye^{yz} + xsen(z)$$

y los puntos: $\vec{x}_0 = (1,1,0)$ y $\vec{x}_1 = (2,3,1)$.

a) Halle el valor de la derivada direccional de f en el punto $\vec{x}_0$ según la dirección que va de $\vec{x}_0$ a $\vec{x}_1$.

b) Obtenga la máxima y la mínima razón de cambio de f en $\vec{x}_0$.

Solución



a) $\vec{u} = \vec{x}_1 - \vec{x}_0 = (2,3,1) - (1,1,0) = (1,2,1)$

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$f_x = ye^{yz} + sen(z)$; $f_y = xe^{yz} + xyze^{yz}$

$f_z = xy^2e^{yz} + xcos(z)$

Las derivadas parciales de f son continuas $\Rightarrow f$ es diferenciable.

$f_x(1,1,0) = 1e^0 + sen(0) = 1$; $f_y(1,1,0) = 1e^0 + 0e^0 = 1$; $f_z(1,1,0) = 1e^0 + 1cos(0) = 2$

$\vec{\nabla} f(1,1,0) = (1,1,2)$

Por ser f diferenciable en $\vec{x}_0$: $D_{\hat{u}} f(\vec{x}_0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \bullet \hat{u}$.

$$D_{\hat{u}} f(1,1,0) = \vec{\nabla} f(1,1,0) \bullet \hat{u} = (1,1,2) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$\boxed{D_{\hat{u}} f(1,1,0) = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5}{6}\sqrt{6}; \qquad \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)}$$

C.F.D.S

b) $$\boxed{D_{\hat{u}} f_{máx}(1,1,0) = \|\vec{\nabla} f(1,1,0)\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}; \quad \hat{u} = \frac{\vec{\nabla} f(1,1,0)}{\|\vec{\nabla} f(1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)}$$

$$\boxed{D_{\hat{u}} f_{mín}(1,1,0) = -\|\vec{\nabla} f(1,1,0)\| = -\sqrt{6}; \quad \hat{u} = -\frac{\vec{\nabla} f(1,1,0)}{\|\vec{\nabla} f(1,1,0)\|} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)}$$