INTREGRALES DOBLES Y TRIPLES. CAMBIO DE VARIABLES

1. Evalúe las siguientes integrales dobles sobre el rectángulo R indicado:

I) $\iint_R (8-2x^2-y^2)dA,\ \ R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$ $\quad Resp\!:\ 12$

II) $\iint_R (1-2xy^2)dA,\ \ R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 2, -1\le y\le 1\}$ $\quad Resp\!:\ \frac{4}{3}$

III) $\iint_R (x-3y^2)dA,\ \ R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$ $\quad Resp\!:\ -12$

2. Evalúe las siguientes integrales dobles sobre la región D indicada:

I) $\iint_D 1dA,\ \ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\le 1, 1\le y\le e^x\}$ $\quad Resp\!:\ e-2$

II) $\iint_D xdA,\ \ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0, x^3\le y\le 8\}$ $\quad Resp\!:\ \frac{48}{5}$

III) $\iint_D ydA,\ \ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ x^2\le y\le 3x\}$ $\quad Resp\!:\ \frac{81}{5}$

IV) $\iint_D (2+4x)dA,\ \ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid\ x^2\le y\le 2x\}$

$$Resp\!:\ \int_0^2\left(\int_{x^2}^{2x}(2+4x)dy\right)dx=\int_0^4\left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(2+4x)dx\right)dy=8$$

3. Mediante **integración doble** obtenga el volumen de la región sólida de $\mathbb{R}^3$ determinada por:

I) $\begin{cases} 0\le z\le 3-x-y \\ 0\le y\le x \\ \quad x\le 1 \end{cases}$

$$Resp\!: V=\int_0^1\left(\int_0^x(3-x-y)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_y^1(3-x-y)dx\right)dy = 1$$

II) $\begin{cases} 0\le z\le x^2+y^2 \\ x^2\le y\le 2x \end{cases}$

$$Resp\!: V=\int_0^2\left(\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)dy\right)dx = \int_0^4\left(\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)dx\right)dy=\frac{216}{35}$$

III) $\begin{cases} -1\le z\le x^2+y^2 \\ |x|\le y\le 1 \end{cases}$

$$Resp\!: V=\int_0^1\left(\int_{-y}^{y}(x^2+y^2+1)\,dx\right)dy=\frac{5}{3}$$

4. Mediante **integración triple** obtenga el volumen de la región sólida de $\mathbb{R}^3$ determinada por:

I) $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le 1 - x - y \end{cases}$

$$Resp: V = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dx \right) dy = \frac{1}{6}$$

II) $\begin{cases} x \ge 0 \\ \frac{1}{2}x \le y \le 1 - \frac{1}{2}x \\ 0 \le z \le 2 - x - 2y \end{cases}$

$$Resp: V = \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{1-\frac{1}{2}x} \left(\int_0^{2-x-2y} dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{3}$$

III) $\begin{cases} x \ge 0 \\ 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le 1 - x^2 \end{cases}$

$$Resp: V = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x^2} dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_0^{1-x^2} dz \right) dx \right) dy = \frac{5}{12}$$

5. Mediante **integración doble** y empleando **coordenadas polares** obtenga el volumen de la región sólida de $\mathbb{R}^3$ determinada por:

I) $\begin{cases} -3 \le z \le 6 - x^2 - y^2 \\ y \ge 0 \end{cases}$ $\quad Resp:\ V = \int_0^{\pi} \left(\int_0^3 (9 - r^2) r dr \right) d\theta = \frac{81}{4}\pi$

II) $\begin{cases} -2 \le z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \ge 0 \end{cases}$ $\quad Resp:\ V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^5 (5 - r) r dr \right) d\theta = \frac{125}{6}\pi$

III) $x^2 + y^2 \le z \le 4 - 3\sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad Resp: V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (4 - 3r - r^2) r dr \right) d\theta = \frac{3}{2}\pi$

IV) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ $\quad Resp:\ V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 (2 - 2r) r dr \right) d\theta = \frac{\pi}{6}$

V) $\begin{cases} 3(x^2 + y^2) \le z \le 4 - x^2 - y^2 \\ x \ge |y| \end{cases}$ $\quad Resp: V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^1 (4 - 4r^2) r dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2}$

6. Mediante **integración triple** y empleando **coordenadas cilíndricas** obtenga el volumen de la región sólida de $\mathbb{R}^3$ determinada por:

I) $\begin{cases} 2 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2+y^2} \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\quad Resp: V = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{2}\left(\int_2^{4-r} rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{4}{3}\pi$

II) $\begin{cases} 3\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4 - x^2 - y^2 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$ $\quad Resp: V = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{1}\left(\int_{3r}^{4-r^2} rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{3}{16}\pi$

III) $\begin{cases} x^2+y^2-2 \leq z \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\quad Resp: V = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2}\left(\int_{r^2-2}^{2} rdz\right)dr\right)d\theta = 2\pi$

IV) $\begin{cases} 0 \leq z \leq 8 - \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 \leq 16 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\quad Resp: V = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{4}\left(\int_0^{8-r} rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{128}{3}\pi$

V) $\begin{cases} 3 \leq z \leq 6 - \sqrt{x^2+y^2} \\ y \geq |x| \end{cases}$ $\quad Resp: V = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(\int_0^{3}\left(\int_3^{6-r} rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{9}{4}\pi$

TEOREMA DE GREEN

Verifique el teorema de Green para cada uno de los siguientes campos vectoriales $\vec{F}$ en la región D de $\mathbb{R}^2$ indicada.

I) $\vec{F}(x,y) = (3xy, 2x^2);$ $\quad D: \begin{cases} -1 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Resp: $\iint_D = \oint_{C=\partial D} = \frac{5}{6}$

II) $\vec{F}(x,y) = (xy, x^2);$ $\quad D: \begin{cases} x \leq y \leq 2 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Resp: $\iint_D = \oint_{C=\partial D} = \frac{5}{12}$

III) $\vec{F}(x,y) = (x, x^2);$ $\quad D: \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Resp: $\iint_D = \oint_{C=\partial D} = \frac{1}{3}$

IV) $\vec{F}(x,y) = (xy, x^2);$ $\quad D: \begin{cases} 0 \leq y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Resp: $\iint_D = \oint_{C=\partial D} = 4$

V) $\vec{F}(x,y) = (3y+1, 4x);$ $\quad D: \begin{cases} x^2 - 2x \leq y \leq 2x \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Resp: $\iint_D = \oint_{C=\partial D} = 9$

VI) $\vec{F}(x,y) = (y, 2x);$ $D: \begin{cases} -1 - x \le y \le x^2 + 2x + 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$

Resp: $\iint_D \; = \oint_{C=\partial D} = \frac{14}{3}$

VII) $\vec{F}(x,y) = (3x^2y - y, x^3);$ $D: \begin{cases} x \le y \le x^3 + 2 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$

Resp: $\iint_D \; = \oint_{C=\partial D} = 4$

VIII) $\vec{F}(x,y) = (2y, -x);$ $D: \begin{cases} 0 \le y \le x^2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$

Resp: $\iint_D \; = \oint_{C=\partial D} = -8$

IX) $\vec{F}(x,y) = (x, 2xy);$ $D: y^2 \le x \le \sqrt{2 - y^2}$

Resp: $\iint_D \; = \oint_{C=\partial D} = 0$

X) $\vec{F}(x,y) = (xy, x^2);$ $D: \begin{cases} -x - 1 \le y \le x + 1 \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$

Resp: $\iint_D \; = \oint_{C=\partial D} = \frac{4}{3}$

TEOREMA DE GAUSS

1. Verifique el teorema de Gauss para cada uno de los siguientes campos vectoriales $\vec{F}$ en la región E de $\mathbb{R}^3$ indicada.

I) $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z);$ $E: x^2 + y^2 - 4 \le z \le 0$

Resp: $\iiint_E \; = \oiint_{S=\partial E} = 24\pi$

II) $\vec{F}(x,y,z) = (y, -x, z);$ $E: \sqrt{x^2 + y^2} - 4 \le z \le 2$

Resp: $\iiint_E \; = \oiint_{S=\partial E} = 72\pi$

III) $\vec{F}(x,y,z) = (y, z, xz);$ $E: x^2 + y^2 \le z \le 1$

Resp: $\iiint_E \; = \oiint_{S=\partial E} = 0$

IV) $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z);$ $E: \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 6 - x^2 - y^2$

Resp: $\iiint_E \; = \oiint_{S=\partial E} = 32\pi$

2. Aplique el teorema de Gauss para obtener el flujo de cada uno de los siguientes campos vectoriales $\vec{F}$ a través de la superficie S correspondiente a la frontera de la región E de $\mathbb{R}^3$ indicada.

I) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,-z);$ $E:\begin{cases} 0 \le z \le 8-\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2 \le 16 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Resp: $\oiint_{S=\partial E} = \int_0^{\pi}\left(\int_0^4\left(\int_0^{8-r} rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{128}{3}\pi$

II) $\vec{F}(x,y,z) = \left(x, z+e^{x^2}, x^2y+1\right);$ $E:\begin{cases} x^2+y^2 \le z \le 2-x^2-y^2 \\ x \ge 0 \end{cases}$

Resp: $\oiint_{S=\partial E} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1\left(\int_{r^2}^{2-r^2} rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{\pi}{2}$

III) $\vec{F}(x,y,z) = (-x,-y,3z);$ $E:\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 \\ x \ge 0 \end{cases}$

Resp: $\oiint_{S=\partial E} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2\left(\int_r^2 rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{4}{3}\pi$

IV) $\vec{F}(x,y,z) = (x,xy,z);$ $E:\begin{cases} 0 \le z \le 1-x^2-y^2 \\ y \ge x \\ x \ge 0 \end{cases}$

Resp: $\oiint_{S=\partial E} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-r^2}(2+rcos(\theta))rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{15\pi-8(\sqrt{2}-2)}{120}$

V) $\vec{F}(x,y,z) = (-xy,y,4z);$ $E:\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 \\ -x \le y \le x \end{cases}$

Resp: $\oiint_{S=\partial E} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^2\left(\int_r^2(5-rsen(\theta))rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{10}{3}\pi$

VI) $\vec{F}(x,y,z) = (4x,5y,3z);$ $E:\begin{cases} 0 \le z \le 1-x^2 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Resp: $\oiint_{S=\partial E} = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-x^2} 12dz\right)dy\right)dx = 5$

VII) $\vec{F}(x,y,z) = \left(y+e^{z^2}, x^2z, z\right);$ $E:\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4-\sqrt{x^2+y^2} \\ y \ge 0 \end{cases}$

Resp: $\oiint_{S=\partial E} = \int_0^{\pi}\left(\int_0^2\left(\int_r^{4-r} rdz\right)dr\right)d\theta = \frac{8}{3}\pi$

TEOREMA DE STOKES

Verifique el teorema de Stokes para:

I) $\vec{F}(x,y,z) = (xyz,y,z)$ y $S:\begin{cases} 6x+6y+z=12 \\ 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{cases}$

II) $\vec{F}(x,y,z) = (z,x,y)$ $\quad y \quad$ $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$

III) $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$ $\quad y \quad$ $S: \begin{cases} z \leq 0 \\ z = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$

IV) $\vec{F}(x,y,z) = (y,x,x+z)$ $\quad y \quad$ $S: \begin{cases} z \geq 2 \\ z = 6 - x^2 - y^2 \end{cases}$

V) $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,z)$ $\quad y \quad$ $S: \begin{cases} z \geq 0 \\ z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

I- Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales a variables separables:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+1}$ $\qquad$ $Resp\text{: } y = C\sqrt{x^2+1}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{ln(x)}{xy+xy^3}$ $\qquad$ $Resp\text{: } y^2 + \frac{1}{2}y^4 = ln^2(x) + C$

c) $y' = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{ye^y}$ $\qquad$ $Resp\text{: } (y-1)e^y = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

d) $y' = e^{x-y}$ $\qquad$ $Resp\text{: } e^y = e^x + C$

e) $(x^2+1)dy - (xy+3x)dx = 0$ $\qquad$ $Resp\text{: } y = C\sqrt{x^2+1} - 3$

f) $ydx - (x^2-16)dy = 0$ $\qquad$ $Resp\text{: } y = C\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^{\frac{1}{8}}$

g) $sen(x)cos(y)dx - cos(x)sen(y)dy = 0$ $\qquad$ $Resp\text{: } -ln\big(cos(y)\big) = C - ln\big(cos(x)\big)$

h) $(y+xy)dx + (x-xy)dy = 0$ $\qquad$ $Resp\text{: } y - ln(y) = C - ln(x) - x$

II- Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

a) $\left(x + \frac{2}{y}\right)dy + ydx = 0$ $\qquad$ $Resp\text{: } xy + ln(y^2) = C$

b) $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0$ $\quad$ *Resp:* $xy - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 = C$

c) $\left(2xy^3 + y\cos(x)\right)dx + \left(3x^2y^2 + sen(x)\right)dy = 0$ $\quad$ *Resp:* $x^2y^3 + ysen(x) = C$

d) $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$ $\quad$ *Resp:* $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = C$

III- Obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a) $y' - 3y = e^x$ $\quad$ *Resp:* $y = Ce^{3x} - \frac{1}{2}e^x$

b) $xy' + 2y = e^{x^2}$ $\quad$ *Resp:* $y = \frac{e^{x^2}}{2x^2} + \frac{C}{x^2}$

c) $y' + 2xy = x$ $\quad$ *Resp:* $y = Ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$

d) $y' - \left(\frac{x}{x^2-1}\right)y = -x$ $\quad$ *Resp:* $y = C\sqrt{x^2 - 1} - x^2 + 1$

e) $(x+1)y' + 3y = (1-x)^3$ $\quad$ *Resp:* $y = \frac{-(5x^6-6x^5-15x^4+20x^3+15x^2-30x-30C)}{30(x+1)^3}$

f) $(x^2+1)y' - 2xy - 2x - 2x^3 = 0$ $\quad$ *Resp:* $y = (x^2+1)[ln(x^2+1) + C]$

g) $y' + y = x + e^x$ $\quad$ *Resp:* $y = x - 1 + \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$

h) $x^2y' + 2xy = \cos(x)$ $\quad$ *Resp:* $y = \frac{sen(x)}{x^2} + \frac{C}{x^2}$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN A COEFICIENTES CONSTANTES

I- Empleando el método de los **coeficientes indeterminados** obtenga la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales, con las condiciones iniciales fijadas:

a) $y'' - y = 2x^2 + 3x + 5$ $\quad$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Resp: $y = 6e^x + 3e^{-x} - 2x^2 - 3x - 9$

b) $y'' - 2y' + y = -2e^x$ $\quad$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$

Resp: $y = e^x(1 + 2x - x^2)$

c) $y'' - 9y = 4xe^{3x}$; $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$Resp{:}\ y = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{54}\right)e^{3x} - \frac{1}{54}e^{-3x}$

d) $y'' + 2y = 3x^2 + 2x + 1$; $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$Resp{:}\ y = cos(\sqrt{2}x) - \frac{\sqrt{2}}{2}sen(\sqrt{2}x) + \frac{3}{2}x^2 + x - 1$

e) $y'' - 4y = (x+1)e^{2x}$; $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$Resp{:}\ y = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{16}x - \frac{3}{64}\right)e^{2x} + \frac{3}{64}e^{-2x}$

f) $y'' - 4y' + 4y = x^2$; $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

$Resp{:}\ y = \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{8}\right)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$

g) $y'' + y = 4cos(x)$; $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

$Resp{:}\ y = cos(x) + (2x+1)sen(x)$

h) $y'' + y = 3sen(5x)$; $y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$

$Resp{:}\ y = \frac{13}{8}sen(x) - cos(x) - \frac{1}{8}sen(5x)$

i) $y'' + 10y' + 25y = 10e^{-5x}$; $y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$

$Resp{:}\ y = e^{-5x}(5x^2 + 10x + 1)$

j) $y'' + 4y = x(x+1) + 1$; $y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

$Resp{:}\ y = \frac{15}{8}cos(2x) - \frac{1}{8}sen(2x) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$

k) $y'' + y = 2cos(x)$; $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

$Resp{:}\ y = cos(x) + xsen(x)$

l) $y'' - y' = 5e^{-x}\big(sen(x) + cos(x)\big)$; $y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$

$Resp{:}\ y = 8e^{x} - 14 + e^{-x}\big(2cos(x) - sen(x)\big)$

m) $y'' - y = 2e^{3x} - e^{-x}$; $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$Resp{:}\ y = \frac{1}{4}e^{3x} - \frac{3}{4}e^{x} + \frac{(x+1)}{2}e^{-x}$

n) $y'' + 4y = 4x^2 + 5e^{4x}$; $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$Resp{:}\ y = \frac{1}{4}cos(2x) - \frac{1}{2}sen(2x) + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{4x}$

o) $y'' + y = sen(x) + (x+1)e^x$; $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$Resp\!: \ y = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}xcos(x)$

II- Empleando el método de **variación de parámetros** obtenga la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' + y = sec(x)$ $\quad Ayuda\!: \ \int tg(u)\,du = -ln|cos(u)| + C$

$Resp\!: \ y = C_1cos(x) + C_2sen(x) + xsen(x) + cos(x)ln|cos(x)|$

b) $y'' + y = cotg(x)$ $\quad Ayuda\!: \ \int cosec(u)\,du = -ln|cosec(u) + cotg(u)| + C$

$Resp\!: \ y = C_1cos(x) + C_2sen(x) - sen(x)ln|cosec(x) + cotg(x)|$

c) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

$Resp\!: \ y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})ln(1+e^x) - e^{-x}$

d) $y'' + 3y' + 2y = sen(e^x)$

$Resp\!: \ y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} - e^{-2x}sen(e^x)$

e) $y'' + y = cos^2(x)$

$Resp\!: \ y = C_1cos(x) + C_2sen(x) + \frac{1}{3}sen^2(x) + \frac{1}{3}$