Análisis de Algoritmos
Ejercicio 3-2 Pagina 61.
Introduction to Algorithms

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

3-2 Relative asymptotic growths

	A	B	O	o	Ω	ω	Θ
a.	$\lg^k(n)$	n^ϵ	✓	✓	×	×	×
b.	n^k	c^n	✓	✓	×	×	×
c.	$\sqrt{n}$	$n^{\sin(n)}$	×	×	×	×	×
d.	2^n	$2^{n/2}$	×	×	✓	✓	×
e.	$n^{\lg(c)}$	$c^{\lg(n)}$	✓	×	✓	×	✓
f.	$\lg(n!)$	$\lg(n^n)$	✓	×	✓	×	✓

a. Sea $f(n) = \lg^k(n)$ y $g(n) = n^\epsilon$

Para Θ tenemos que $\lg^k(n) = \Theta(n^\epsilon)$

Por def tenemos $0 \leq c_1 n^\epsilon \leq \lg^k(n) \leq c_2 n^\epsilon$

Dividiendo sobre n^ϵ tenemos $0 \leq c_1 \leq \frac{\lg^k(n)}{n^\epsilon} \leq c_2$

La expresión $\frac{\lg^k(n)}{n^\epsilon}$ tiende a 0 para valores muy grandes de n independiente de K y ϵ

por lo que tendriamos la expresión $0 \leq c_1 \leq 0$

y dado que c_1 tiene que cumplir que $c_1 > 0$

concluimos que $\lg^k(n) \neq \Theta(n^\epsilon)$ //

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Para O tenemos que $lg^k(n) = O(n^\epsilon)$

Por def tenemos $0 \leq lg^k(n) \leq cn^\epsilon$ y dividiendo sobre n^ϵ tenemos $0 \leq \frac{lg^k(n)}{n^\epsilon} \leq c$ y si $c \geq \frac{lg^k(n)}{n^\epsilon}$, $n_0 > 0$ se cumple que $lg^k(n) = O(n^\epsilon)$ //

Para Ω tenemos que $lg^k(n) = \Omega(n^\epsilon)$

Por def tenemos $0 \leq cn^\epsilon \leq lg^k(n)$ dividiendo sobre n^ϵ tenemos $0 \leq c \leq \frac{lg^k(n)}{n^\epsilon}$ para valores muy grandes de n sabemos que $\frac{lg^k(n)}{n^\epsilon} = 0$ entonces $0 \geq c$ y como c cumple que $c > 0$ concluimos que $lg^k(n) \neq \Omega(n^\epsilon)$

Para o tenemos que $lg^k(n) = o(n^\epsilon)$

Por def tenemos $0 \leq lg^k(n) < cn^\epsilon$

Si $c \geq \frac{lg^k(n)}{n^\epsilon}$, $n_0 > 0$ se cumple la definición y existe una n_0 para cada $c > 0$

$\therefore$ $lg^k(n) = o(n^\epsilon)$

Para ω tenemos que $lg^k(n) = \omega(n^\epsilon)$

Por def tenemos $0 \leq c n^\epsilon < lg^k(n)$ y dividiendo sobre n^ϵ tenemos $0 \leq c < \frac{lg^k(n)}{n^\epsilon}$ y como c tiene que cumplir que $c > 0$ y no se cumple concluimos que $lg^k(n) \neq \omega(n^\epsilon)$ //

b. Sea $f(n) = n^k$ y $g(n) = c^n$

Para Θ tenemos que $n^k = \Theta(c^n)$

Por def tenemos $0 \leq c_1 c^n \leq n^k \leq c_2 c^n$ dividiendo sobre c^n tenemos que $0 \leq c_1 \leq \frac{n^k}{c^n} \leq c_2$

$\Rightarrow 0 \leq c_1 \leq n^k \cdot c^{-n} \leq c_2$ y podemos ver que para valores muy grandes $n^k \cdot c^{-n}$ tiende a 0 y como c_1 tiene que cumplir que $c_1 > 0$ y vemos que $c_1 \leq 0$ concluimos que $n^k \neq \Theta(c^n)$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Para O tenemos $n^k = O(c^n)$

Por def tenemos $0 \leq n^k \leq cc^n$ y dividiendo sobre c^n tenemos $0 \leq \frac{n^k}{c^n} \leq c \Rightarrow 0 \leq n^k c^{-n} \leq c$

Para cualquier $c \geq n^k c^{-n}$ y $n_0 > 0$ se cumple que $\underline{n^k = O(c^n)}$ //

Para Ω tenemos $n^k = \Omega(c^n)$

Por def tenemos $0 \leq cc^n \leq n^k$ dividiendo sobre c^n tenemos $0 \leq c \leq n^k c^{-n}$ y dado que $n^k c^{-n}$ tiende a cero tenemos $c \leq 0$ pero c tiene que ser $c > 0$ por lo tanto $\underline{n^k \neq \Omega(c^n)}$ //

Para o tenemos $n^k = o(c^n)$

Por def tenemos $0 \leq n^k < cc^n$ y dividiendo sobre c^n tenemos $0 \leq \frac{n^k}{c^k} < c$ para $c \geq \frac{n^k}{c^k}$ existe $n_0 > 0$ tal que $0 \leq n^k < cc^n$ para cada $c > 0$ existe $n_0 > 0$ por lo tanto $\underline{n^k = o(c^n)}$ //

Para ω tenemos $n^k = \omega(c^n)$

Por def tenemos $0 \le c\,c^n < n^k$ si dividimos sobre c^n tenemos $0 \le c < n^k/c^n = 0 \le c \le n^k c^{-n}$ y como tenemos que $n^k c^{-n}$ tiende a $0 \Rightarrow 0 \le c < n^k c^{-n}$ y $c < n^k c^{-n}$ y como c tiene que ser $c > 0$ no se cumple que $n^k = \omega(c^n)$ por lo tanto $\underline{n^k \neq \omega(c^n)}$ //

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\sqrt{n}$	$n^{sen(n)}$	X	X	X	X	X

Lo que queremos verificar es que se cumpla

$$\sqrt{n} = O(n^{sen(n)}) \qquad \sqrt{n} = \omega(n^{sen(n)})$$
$$\sqrt{n} = o(n^{sen(n)})$$
$$\sqrt{n} = \Omega(n^{sen(n)}) \qquad \sqrt{n} = \Theta(n^{sen(n)})$$

Sin embargo al observar las graficas de las funciones podemos decir que

$$\sqrt{n} \neq O(n^{sen(n)}) \qquad \sqrt{n} \neq \omega(n^{sen(n)})$$
$$\sqrt{n} \neq o(n^{sen(n)}) \qquad \sqrt{n} \neq \Theta(n^{sen(n)})$$
$$\sqrt{n} \neq \Omega(n^{sen(n)})$$

Para Θ supongamos que $\sqrt{n} = \Theta(n^{sen(n)})$

y sea $f(n) = \sqrt{n}$ y $g(n) = n^{sen(n)}$

La definición: $\Theta(g(n)) = \{f(n)$: existen 3 constantes positivas tal que $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ para todo $n \ge n_0\}$

Por definición tenemos $0 \le c_1 n^{sen(n)} \le \sqrt{n} \le c_2 n^{sen(n)}$

Elevando al cuadrado $0 \le c_1 n^{2sen(n)} \le n \le c_2 n^{2sen(n)}$

y dividimos entre n $\quad 0 \le c_1 \dfrac{n^{2sen(n)}}{n} \le 1 \le c_2 \dfrac{n^{2sen(n)}}{n}$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

$c_2 \frac{n^{2sen(n)}}{n} \geq 1$ La expresión $\frac{n^{2sen(n)}}{n}$ tiende a 0 para valores de n muy grandes $\therefore$ no existe c_2

y por lo tanto encontramos una contradicción a nuestra suposición por lo que podemos afirmar que $\sqrt{n} \neq \Theta(n^{sen(n)})$

Para O supongamos que $\sqrt{n} = O(n^{sen(n)})$

y sea $f(n) = \sqrt{n}$ y $g(n) = n^{sen(n)}$

La definición $O(g(n)) = \{f(n)$: existen las constantes positivas c y n_0 tal que $0 \leq f(n) \leq c\,g(n)$ para todo $n \geq n_0\}$

Por definición tenemos $0 \leq \sqrt{n} \leq c\,n^{sen(n)}$

Si dividimos entre $\sqrt{n}$ $\quad 0 \leq 1 \leq c \frac{n^{sen(n)}}{\sqrt{n}}$

Y al igual que con Θ, $\frac{n^{sen(n)}}{\sqrt{n}}$ tiende a 0 en valores muy grandes muy grandes de n por lo que no existe c que cumpla para todo $n \geq n_0$ $\therefore$

$$\sqrt{n} \neq O(n^{sen(n)})$$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Para Ω supongamos que $\sqrt{n} = \Omega(n^{sen(n)})$

y sea $f(n) = \sqrt{n}$ y $g(n) = n^{sen(n)}$

La def $\Omega(g(n)) = \{f(n)$: existen constantes positivas c y n_0 tal que $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ para toda $n \geq n_0\}$

Por definicion tenemos: $0 \leq cn^{sen(n)} \leq \sqrt{n}$

Llevando al cuadrado $0 \leq c^2 n^{2sen(n)} \leq n$

y dividiendo sobre n $0 \leq c^2 n^{2sen(n)} \leq 1$

tenemos que $1 \geq c^2 n^{2sen(n)}$ pero con $n=7$

$1 \geq c^2 12.89$ lo cual es una contradicción

$\therefore \sqrt{n} \neq \Omega(n^{sen(n)})$

Para o supongamos que $\sqrt{n} = o(n^{sen(n)})$

y sea $f(n) = \sqrt{n}$ y $g(n) = n^{sen(n)}$

La definición: $o(g(n)) = \{f(n)$: para cada constante positiva $c > 0$ existe una constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq f(n) < cg(n)$ para todo $n \geq n_0\}$

Por definición tenemos $0 \leq \sqrt{n} \leq cn^{sen(n)}$

y observando la grafica notemos que si $c = 1$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

$0 \leq \sqrt{n} \leq n^{sen(n)}$ pero no existe $n_0 > 0$

que cumpla para todo $n \geq n_0$ debido a que en los valores de $n = k\pi$ donde $k = 1, 2, 3, \ldots$ $n^{sen(n)}$ es 1 y aunque fijemos una n_0 muy grande, de la misma forma podemos fijar una k que no cumpla que $0 \leq \sqrt{n} \leq n^{sen(n)}$ por lo tanto

$$\sqrt{n} \neq o(n^{sen(n)})$$

Para ω supongamos que $\sqrt{n} = \omega(n^{sen(n)})$

y sea $f(n) = \sqrt{n}$ y $g(n) = n^{sen(n)}$

La def $\omega(g(n)) = \{f(n)$: para cada constante positiva $c > 0$ existe una constante $n_0 > 0$ tal que $0 \leq cg(n) < f(n)$ para todo $n \geq n_0\}$

Por def tenemos $0 \leq cn^{sen(n)} < \sqrt{n}$

Si decimos que $c = 1$ debe de existir $n_0 > 0$ tal que $0 \leq n^{sen(n)} < \sqrt{n}$ sin embargo bajo ciertos valores de n $sen(n) = 1$ en esos casos tendremos la expresión $0 \leq n < \sqrt{n}$ la cual es una contradicción y se va a cumplir aunque n_0 sea muy grande debido a que $sen(n)$ es una función periodica, por lo tanto

$$\sqrt{n} \neq \omega(n^{sen(n)})$$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
2^n	$2^{n/2}$					

Para Θ tenemos que $2^n = \Theta(2^{n/2})$

y sea $f(n) = 2^n$ y $g(n) = 2^{n/2}$

y aplicando la definición tenemos que

$0 \leq c_1 2^{n/2} \leq 2^n \leq c_2 2^{n/2}$ para todo $n \geq n_0$

Si dividimos todo sobre $2^{n/2}$ tenemos

$0 \leq c_1 \leq 2^{n-n/2} \leq c_2 \Rightarrow 0 \leq c_1 \leq 2^{n/2} \leq c_2$

Si tenemos la expresión $c_2 \geq 2^{n/2}$ no importa que tan grande sea c_2 siempre va a existir una n que haga que $2^{n/2} \geq c_2$ $\therefore$

$2^n \neq \Theta(2^{n/2})$

Para O tenemos que $2^n = O(2^{n/2})$

y sea $f(n) = 2^n$ y $g(n) = 2^{n/2}$

Por definición tenemos $0 \leq 2^n \leq c\,2^{n/2}$

Dividiendo todo sobre $2^{n/2}$ tenemos $0 \leq 2^{n/2} \leq c$

y no importa que tan grande sea el valor de c podemos encontrar un valor de n tal que $2^{n/2} > c$ por lo tanto $2^n \neq O(2^{n/2})$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Para Ω tenemos que $2^n = \Omega(2^{n/2})$

y sea $f(n) = 2^n$ y $g(n) = 2^{n/2}$

Por def tenemos $0 \leq c\,2^{n/2} \leq 2^n$

Dividiendo sobre $2^{n/2}$ tenemos $0 \leq c \leq 2^{n/2}$

De la expresión $2^{n/2} \geq c$ y si $c = 1$

$2^{2/2} \geq 1 \Rightarrow 2 \geq 1$ y dado que $c = 1$ y $n_0 = 2$

concluimos que $\underline{2^n = \Omega(2^{n/2})}$

Para o tenemos que $2^n = o(2^{n/2})$

y sea $f(n) = 2^n$ y $g(n) = 2^{n/2}$

Por def tenemos $0 \leq 2^n < c\,2^{n/2}$

Si dividimos todo entre $2^{n/2}$ tenemos $0 \leq 2^{n/2} < c$

$c > 2^{n/2}$ y dado que para cada valor de c

propuesto existe un n tal que $2^{n/2} \geq c$ concluimos

que $\underline{2^n \neq o(2^{n/2})}$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio

Para ω tenemos que $2^n = \omega(2^{n/2})$

y sea $f(n) = 2^n$ y $g(n) = 2^{n/2}$

Por def tenemos $0 \leq c\,2^{n/2} < 2^n$

Si dividimos entre $2^{n/2}$ tenemos $0 \leq c < 2^{n/2}$

Ahora para la expresión $2^{n/2} > c$ tenemos que para cada constante $c > 0$ existe un $n_0 > 4$ tal que $0 \leq c\,2^{n/2} < 2^n$ por lo tanto

$2^n = \omega(2^{n/2})$

e. Sea $f(n) = n^{lg(c)}$ y $g(n) = c^{lg(n)}$

Para Θ tenemos que $n^{lg(c)} = \Theta(c^{lg(n)})$

Por def tenemos $0 \leq c_1 c^{lg(n)} \leq n^{lg(c)} \leq c_2 c^{lg(n)}$

y sabemos que $n^{lg(c)} = c^{lg(n)}$, como,

aplicamos lg y tenemos $lg(n^{lg(c)}) = lg(c^{lg(n)})$

$\Rightarrow lg(n)lg(c) = lg(n)lg(c)$ entonces

podemos plantear $0 \leq c_1 n^{lg(c)} \leq n^{lg(c)} \leq c_2 n^{lg(c)}$

y dividiendo sobre $n^{lg(c)}$ tenemos $0 \leq c_1 \leq 1 \leq c_2$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Para $c_1 = 1$ y $c_2 \geq 1$, $n_0 \geq 1$ tenemos que $0 \leq c_1 c^{lg(n)} \leq n^{lg(c)} \leq c_2 c^{lg(n)}$ se cumple y por lo tanto $n^{lg(c)} = \Theta(c^{lg(n)})$ //

Para O tenemos que $n^{lg(c)} = O(c^{lg(n)})$

Por def $0 \leq n^{lg(c)} \leq c\, c^{lg(n)}$ y como $c^{lg(n)} = n^{lg(c)}$
$\Rightarrow 0 \leq n^{lg(c)} \leq n^{lg(c)} c$ y dividiendo sobre $n^{lg(c)}$ tenemos $0 \leq 1 \leq c$ entonces tenemos $c \geq 1$ y $n_0 \geq 1$ se cumple $0 \leq n^{lg(c)} \leq c\, c^{lg(n)}$ por lo tanto $n^{lg(c)} = O(c^{lg(n)})$ //

Para Ω tenemos que $n^{lg(c)} = \Omega(c^{lg(n)})$

Por def $0 \leq c\, c^{lg(n)} \leq n^{lg(c)}$ y sabemos que $n^{lg(c)} = c^{lg(n)}$ por lo tanto $0 \leq c n^{lg(c)} \leq n^{lg(c)}$ dividiendo sobre $n^{lg(c)}$ tenemos $0 \leq c \leq 1$ por lo que si $c = 0.5$ y $n_0 \geq 1$ se cumple que $0 \leq c\, c^{lg(n)} \leq n^{lg(c)}$ por lo que $n^{lg(c)} = \Omega(c^{lg(n)})$ //

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Para o tenemos que $n^{lg(c)} = o(c^{lg(n)})$

Por def $0 \leq n^{lg(c)} < c\,c^{lg(n)}$ y sabemos que $n^{lg(c)} = c^{lg(n)}$ por lo que $0 \leq n^{lg(c)} < c\,n^{lg(c)}$ y dividiendo sobre $n^{lg(c)}$ tenemos $0 \leq 1 < c$ y como c tiene que ser $c > 1$ y por ejemplo para $c = 0.1$ no existe n_0 tal que $0 \leq n^{lg(c)} < c\,c^{lg(n)}$ por lo tanto $n^{lg(c)} \neq o(c^{lg(n)})$ //

Para ω tenemos que $n^{lg(c)} = \omega(c^{lg(n)})$

Por def $0 \leq c\,c^{lg(n)} < n^{lg(c)}$ y sabemos que $n^{lg(c)} = c^{lg(n)}$ por lo que $0 \leq c\,n^{lg(c)} < n^{lg(c)}$ y dividiendo sobre $n^{lg(c)}$ tenemos $0 \leq c < 1$ y para $c \geq 1$ no existe n_0 tal que cumpla que $0 \leq c\,c^{lg(n)} < n^{lg(c)}$ y por lo tanto $n^{lg(c)} \neq \omega(c^{lg(n)})$ //

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$lg(n!)$	$lg(n^n)$					

Sea $f(n) = lg(n!)$ y $g(n) = lg(n^n)$

Para Θ tenemos que $lg(n!) = \Theta(lg(n^n))$

Por def tenemos $0 \leq c_1 lg(n^n) \leq lg(n!) \leq c_2 lg(n^n)$

$0 \leq c_1(log(n) + log(n) + \ldots + lg(n)) \leq lg(1) + lg(2) + \ldots + lg(n) \leq c_2(lg(n) + \ldots + lg(n))$

Sabemos que $lg(n!) = n lg(n) - n + 1$

$0 \leq c_1 n lg(n) \leq n lg(n) - n + 1 \leq c_2 n lg(n)$

Dividiendo entre $n lg(n)$ tenemos

$$0 \leq c_1 \leq 1 - \frac{n}{n lg(n)} + \frac{1}{n lg(n)} \leq c_2$$

Si n es muy grande las dos expresiones tienden a cero

Por lo tanto $0 \leq c_1 \leq 1$ y $c_2 \geq 1$

Si $c_1 = 0.5$, $c_2 = 1$ y $n_0 = 2$ se cumple la defición, por tanto

$lg(n!) = \Theta(lg(n^n))$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Para O tenemos $lg(n!) = O(\log(n^n))$

Por def tenemos $0 \leq lg(n!) \leq c\,lg(n^n)$

y sabemos que $lg(n!) = n\,lg(n) - n + 1$ por lo tanto

$0 \leq n\,lg(n) - n + 1 \leq c\,n\,lg(n)$ y dividimos entre $n\,lg(n)$

$0 \leq 1 - \frac{n}{n\,lg(n)} + \frac{1}{n\,lg(n)} \leq c \Rightarrow$ si n tiende a infinito

$0 \leq 1 \leq c$ si $c \geq 1$ y $n_0 \geq 1$ por lo tanto

$\underline{lg(n!) = O(lg(n^n))}$ //

Para Ω tenemos $lg(n!) = \Omega(lg(n^n))$

Por def tenemos $0 \leq c\,lg(n^n) \leq lg(n!)$

$\Rightarrow 0 \leq c\,\frac{n\,lg(n)}{n\,lg(n)} \leq \frac{n\,lg(n)}{n\,lg(n)} - \frac{n}{n\,lg(n)} + \frac{1}{n\,lg(n)}$

$\Rightarrow 0 \leq c \leq 1 \therefore$ si $c \leq 1$ y $n_0 \geq 1$

Por ejemplo $c = 0.1$ y $n_0 = 1$

$\therefore lg(n!) = \Omega(lg(n^n))$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Para o tenemos que $\lg(n!) = o(\lg(n^n))$

Por def tenemos lo sig $0 \leq \lg(n!) < c\lg(n^n)$
y aplicando $\lg(n!) = n\lg(n) - n + 1$ tenemos
$0 \leq n\lg(n) - n + 1 < cn\lg(n)$ y dividimos entre
$n\lg(n)$ tenemos $0 \leq \frac{n\lg(n)}{n\lg(n)} - \frac{n}{n\lg(n)} + \frac{1}{n\lg(n)}$
$< \frac{cn\lg(n)}{n\lg(n)}$ tenemos $0 \leq 1 < c$

$c > 1$, sin embargo para $c \leq 1$ no existe
$n_0 > 0$ tal que $0 \leq \lg(n!) < c\lg(n^n)$ se
cumpla $\therefore$ $\lg(n!) \neq o(\lg(n^n))$

Para ω tenemos que $\lg(n!) = \omega(\lg(n^n))$
Por def tenemos $0 \leq c\lg(n^n) < \lg(n!)$
y aplicando $\lg(n!) = n\lg(n) - n + 1$
tenemos $0 \leq cn\lg(n) < n\lg(n) - n + 1$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

y dividiendo entre $n\lg(n)$ tenemos

$$0 \leq c\frac{n\lg(n)}{n\lg(n)} < \frac{n\lg(n)}{n\lg(n)} - \frac{n}{n\lg(n)} + \frac{1}{n\lg(n)}$$

Si n es muy grande tenemos

$0 \leq c < 1$ sin embargo para $c < 1$ no existe $n_0 > 0$ tal que $0 \leq c\lg(n^n) < \lg(n!)$

Por lo tanto $\lg(n!) \neq \omega(\lg(n^n))$