Análisis de Algoritmos
Ejercicio 3-3 Pagina 61.
Introduction to Algorithms

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

3 - 3 Ordering by asymptotic growth rates

$\lg(\lg^*(n))$	$2^{\lg^*(n)}$	$(\sqrt{2})^{\lg(n)}$	n^2
$(3/2)^n$	n^3	$\lg^2(n)$	$\lg(n!)$
$\lg(\lg(n))$	$\lg^* n$	$n \cdot 2^n$	$n^{\lg\lg(n)}$
$2^{\lg(n)}$	$(\lg(n))^{\lg(n)}$	e^n	$4^{\lg(n)}$
$\lg^*(\lg(n))$	$2^{\sqrt{2\lg(n)}}$	n	2^n
$n!$	$\lg(n)$	$n\lg(n)$	$n^{1/\lg(n)}$
2^{2^n}	$(n+1)!$	$\lg(n)!$	1
$\sqrt{\lg(n)}$	$2^{2^{n+1}}$		

Observando la grafica de todas las funciones proponemos el siguiente orden (de mayor a menor)

1.- $2^{2^{n+1}}$
2.- 2^{2^n}
3.- $(n+1)!$
4.- $n!$
5.- e^n
6.- $n \cdot 2^n$
7.- 2^n
8.- $(3/2)^n$
9.- $\lg(n)^{\lg(n)}$
$= n^{\lg(\lg(n))}$
10.- $\lg(n)!$
11.- n^3
12.- n^2
$= 4^{\lg(n)}$
13.- $n\lg(n)$
y $\lg(n!)$
14.- $n = 2^{\lg(n)}$
15.- $(\sqrt{2})^{\lg(n)}$
$(= \sqrt{n})$
16.- $2^{\sqrt{2\lg(n)}}$
17.- $\lg^2(n)$
18.- $\ln(n)$
19.- $\sqrt{\ln(n)}$
20.- $\ln(\ln(n))$
21.- $2^{\lg^*(n)}$

22- $\lg^*(n)$ y $\lg^*(\lg(n))$

23- $\lg(\lg^*(n))$

24- $n^{1/\lg(n)}$ $(=2)$ y 1

Demostrar que $2^{2^{n+1}} = \Omega(2^{2^n})$

Por definición tenemos $0 \leq c2^{2^n} \leq 2^{2^{n+1}}$

Dividiendo entre 2^{2^n} tenemos

$0 \leq c \leq \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^n}} \Rightarrow 0 \leq c \leq 2^{2^{n+1}-2^n}$

$\Rightarrow 0 \leq c \leq 2^{2^n}$ si $c=1$ y $n_0 \geq 1$ se cumple que $0 \leq c2^{2^n} \leq 2^{2^{n+1}}$

$\therefore 2^{2^{n+1}} = \Omega(2^{2^n})$

Sea $2^{2^n} = \Omega((n+1)!)$ y $f(n) = 2^{2^n}$, $g(n) = (n+1)!$

Por def. tenemos $0 \leq c(n+1)! \leq 2^{2^n}$, aplicando $\ln$ a $c(n+1)! \leq 2^{2^n}$ tenemos $\ln(c(n+1)!) \leq \ln(2^{2^n})$

$\Rightarrow$ Sabemos que $\ln((n+1)!) \approx (n+1)\ln(n+1) - n$

y tenemos que $c + (n+1)\ln(n+1) - n \leq \ln|2^{2^n}|$

Para $c=1$ y $n_0 \geq 1$ se cumple que

$0 \leq c(n+1)! \leq 2^{2^n}$ por lo tanto $2^{2^n} = \Omega((n+1)!)$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Sea $(n+1)! = \Omega(n!)$ y $f(n) = (n+1)!$, $g(n) = n!$

Por def $0 \leq cn! \leq (n+1)!$

$0 \leq c(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n) \leq (1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \times n+1)$

$0 \leq c\, n! \leq (n!)(n+1) \Rightarrow c \leq n+1$

Si $c = 1$ $n_0 = 1$ se cumple que

$0 \leq cn! \leq (n+1)!$ por lo tanto $\underline{(n+1)! = \Omega(n!)}$

Sea $n! = \Omega(e^n)$ y $f(n) = n!$, $g(n) = e^n$

Por def $0 \leq ce^n \leq n!$ y aplicando

ln en $ce^n \leq n!$ tenemos $\ln|ce^n| \leq \ln|n!|$

$\ln|c| + \ln|e^n| \leq \ln|n!|$

y sabemos que $\ln|n!| = n\ln|n| - n + 1$

$\ln|c| + n\ln|e| \leq n\ln|n| - n + 1$

$c + n\ln|e| \leq n\ln|n| - n + 1$

Si $c = 1$ y $n_0 \geq 10$ se cumple que

$0 \leq ce^n \leq n! \therefore n! = \Omega(e^n)$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Sea $e^n = \Omega(n \cdot 2^n)$ y $f(n) = e^n$, $g(n) = n \cdot 2^n$

Por def. $0 \leq cn \cdot 2^n \leq e^n$ si tenemos la expresión $cn \cdot 2^n \leq e^n$ y aplicando ln tenemos $\ln|cn2^n| \leq \ln|e^n|$, lo cual nos da $\ln|c| + \ln|n| + \ln|2^n| \leq n\ln|e|$

$c + \ln|n| + n\ln|2| \leq n\ln|e|$ y

Para $c = 1$ $n_0 \geq 1$ se cumple que

$0 \leq cn \cdot 2^n \leq e^n$ por lo tanto $\underline{e^n = \Omega(n \cdot 2^n)}$ //

Sea $n \cdot 2^n = \Omega(2^n)$ y $f(n) = n \cdot 2^n$, $g(n) = 2^n$

Por def $0 \leq c2^n \leq n \cdot 2^n$ si dividimos todo entre 2^n tenemos $0 \leq c \leq n$ por lo tanto si tomamos $c = 1$ y $n_0 = 1$ se cumple que $0 \leq c2^n \leq n \cdot 2^n$ por lo tanto $\underline{n \cdot 2^n = \Omega(2^n)}$ //

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Sea $2^n = \Omega((\frac{3}{2})^n)$ y $f(n) = 2^n$, $g(n) = (\frac{3}{2})^n$

Por def $0 \leq c(\frac{3}{2})^n \leq 2^n$ y si aplicamos

$lg(n)$ a la expresión $c(\frac{3}{2})^n \leq 2^n$ tenemos

$lg(c(\frac{3}{2})^n) \leq lg(2^n) \Rightarrow lg(c) + n\,lg(3/2)$

$\leq n\,lg(2) \Rightarrow c + n\,lg(3/2) \leq n\,lg(2)$

Con $c=1$ y $n_0=5$ se cumple que $0 \leq c(\frac{3}{2})^n \leq 2^n$

Por lo tanto $2^n = \Omega((\frac{3}{2})^n)$ //

Sea $(\frac{3}{2})^n = \Omega(lg(n)^{lg(n)})$ y $f(n) = (3/2)^n$, $g(n) = lg(n)^{lg(n)}$

Para este problema veamos que $lg(n)^{lg(n)} = n^{lg(lg(n))}$

Si aplicamos $lg(n)$ tenemos $lg(lg(n)^{lg(n)}) = lg(n^{lg(lg(n))})$

Por propiedades del lg tenemos

$lg(n)\,lg(lg(n)) = lg(lg(n))\,lg(n)$ y tenemos

lo mismo de ambos lados de la igualdad

Ahora tenemos por def $0 \leq c\,lg(n)^{lg(n)} \leq (\frac{3}{2})^n$

y si aplicamos lg a la expresión $c\,lg(n)^{lg(n)} \leq (\frac{3}{2})^n$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

tenemos lo siguiente $lg(c\,lg(n)^{lg(n)}) \leq lg((\frac{3}{2})^n)$

y queda $lg(c) + lg(lg(n)^{lg(n)}) \leq n\,lg(3/2)$

$\Rightarrow c + lg(n)\,lg(lg(n)) \leq n\,lg(3/2)$

Para $c = 1$ y $n_0 = 10$ se cumple la expresión

$$(\frac{3}{2})^n = \Omega(lg(n)^{lg(n)})$$

Sea $lg(n)^{log(n)} = \Omega(lg(n)!)$ $\quad f(n) = lg(n)^{lg(n)},\ g(n) = lg(n!)$

Por def $0 \leq c\,lg(n)! \leq lg(n)^{lg(n)}$

Aplicando $ln|n!| \approx n\,ln|n| - n + 1$

tenemos $ln|c\,lg(n)!| \leq ln|lg(n)^{lg(n)}|$

$\Rightarrow ln|c| + lg(n)\,ln|lg(n)| - lg(n) + 1 \leq lg(n)\,ln|lg(n)|$

$\Rightarrow c - lg(n) + 1 \leq 0 \Rightarrow c \leq lg(n) - 1$

y si $c = 1$ y $n_0 \geq 11$ se cumple que

$0 \leq c\,lg(n)! \leq lg(n)^{lg(n)}$ $\therefore$ $lg(n)^{lg(n)} = \Omega(lg(n)!)$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Sea $\lg(n)! = \Omega(n^3)$ y $f(n) = \lg(n)!$, $g(n) = n^3$

Por def $0 \leq cn^3 \leq \lg(n)!$ Aplicando ln

tenemos $\ln|cn^3| \leq \ln|\lg(n)!|$ y sabemos

que $\lg(n)\ln|\lg(n)| - \lg(n) + 1$ por lo tanto

$\ln|c| + \ln|n^3| \leq \lg(n)\ln|\lg(n)| - n + 1$

$c \leq \lg(n)\ln|\lg(n)| - n + 1 - \ln|n^3|$

y para $c = 0.00001$ y $n_0 \geq 1$ y

se cumple que $\lg(n)! = \Omega(n^3)$ //

Sea $n^3 = \Omega(n^2)$ y $f(n) = n^3$, $g(n) = n^2$

y se cumple que $n^2 = 4^{\log(n)}$ se puede ver

aplicando $\lg_2$ tenemos $\lg_2(n^2) = \lg_2(4^{\lg(n)})$

$\Rightarrow 2\lg_2(n) = \lg(n)\lg_2(4) \Rightarrow 2\lg_2(n) = 2\lg_2(n)$ //

y aplicando la definición tenemos

$0 \leq cn^2 \leq n^3$ y dividiendo entre n^2 tenemos

$0 \leq c \leq n$ y si $c = 1$ y $n_0 \geq 1$ se

cumple que $0 \leq cn^2 \leq n^3$ $\therefore$ $n^3 = \Omega(n^2)$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Sea $n^2 = \Omega(n\lg(n))$ $f(n) = n^2$ $g(n) = n\lg(n)$

$n\lg(n) = \lg(n!)$ $\Rightarrow$ Por formula de Stirling

Por def $0 \leq cn\lg(n) \leq n^2$ aplicando $\lg$

tenemos $\lg(cn\lg(n)) \leq \lg(n^2) \Rightarrow \lg(c) + \lg(n) + \lg(\lg(n))$

$\leq 2\lg(n) \Rightarrow C + \lg(n) + \lg(\lg(n)) \leq 2\lg(n)$

$C \leq \lg(\lg(n)) + \lg(n)$ si $c = 1$, $n_0 \geq 1$

Se cumple que $0 \leq cn\lg(n) \leq n^2$ por lo

tanto $n^2 = \Omega(n\lg(n))$ //

Sea $n\lg(n) = \Omega(n)$ $f(n) = n\lg(n)$ $g(n) = n$

y $n = 2^{\lg(n)}$ aplicando $\lg$ tenemos

$\lg(n) = \lg(2^{\lg(n)}) = \lg(n) = \lg(n)\underbrace{\lg(2)}_{1}$

Por def tenemos $0 \leq cn \leq n\lg(n)$ dividiendo

entre n tenemos $0 \leq c \leq \lg(n)$ y si fijamos

que $c = 1$ y $n_0 \geq 3$ se cumple que $0 \leq cn \leq n\lg(n)$

Por lo tanto $n\lg(n) = \Omega(n)$ //

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Sea $n = \Omega(\sqrt{2}^{\lg(n)})$ $f(n) = n$, $g(n) = \sqrt{2}^{\lg(n)}$

$\sqrt{2}^{\lg(n)} = \sqrt{n}$ aplicando lg tenemos

$\lg(\sqrt{2}^{\lg(n)}) = \lg(\sqrt{n}) \Rightarrow \lg(n)\lg(\sqrt{2}) = \lg(n^{1/2})$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\lg(n) = 1/2 \lg(n)$

Por def $0 \leq c\sqrt{n} \leq n$ dividiendo sobre $\sqrt{n}$

tenemos $0 \leq c \leq \frac{n}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0 \leq c \leq \sqrt{n}$ para

$c = 1$ y $n_0 \geq 1$ tenemos que $0 \leq c\sqrt{n} \leq n$ por lo

que $\underline{n = \Omega(\sqrt{n})}$ //

Sea $\sqrt{n} = \Omega(2^{\sqrt{2\lg(n)}})$ $f(n) = \sqrt{n}$, $g(n) = 2^{\sqrt{2\lg(n)}}$

Por def $0 \leq c2^{\sqrt{2\lg(n)}} \leq \sqrt{n}$ aplicando lg

tenemos $\lg(c2^{\sqrt{2\lg(n)}}) \leq \lg(\sqrt{n}) \Rightarrow \lg(c) + \lg(2^{\sqrt{2\lg(n)}})$

$\leq \frac{1}{2}\lg(n) \Rightarrow c + \sqrt{2\lg(n)}\lg(2) \leq \frac{1}{2}\lg(n)$

$c + \sqrt{2\lg(n)} \leq \frac{1}{2}\lg(n) \Rightarrow c \leq \frac{1}{2}\lg(n) - \sqrt{2\lg(n)}$

Para $c = 0.4$ y $n_0 \geq 1$ tenemos $0 \leq c2^{\sqrt{2\lg(n)}} \leq \sqrt{n}$

por lo que $\underline{\sqrt{n} = \Omega(2^{\sqrt{2\lg(n)}})}$ //

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Sea $2^{\sqrt{2\lg(n)}} = \Omega(\lg^2(n))$ $f(n) = 2^{\sqrt{2\lg(n)}}$, $g(n) = \lg^2(n)$

Por def $0 \leq c\lg^2(n) \leq 2^{\sqrt{2\lg(n)}}$ aplicando lg

tenemos $\lg(c\lg^2(n)) \leq \lg(2^{\sqrt{2\lg(n)}})$

$\Rightarrow \lg(c) + \lg(\lg(n)^2) \leq \sqrt{2\lg(n)}\lg(2)$

$\Rightarrow c + 2\lg(\lg(n)) \leq \sqrt{2\lg(n)} \Rightarrow c \leq \sqrt{2\lg(n)} - 2\lg(\lg(n))$

y para $c = 0.1$ y $n_0 \geq 1$ tenemos que

$0 \leq c\lg^2(n) \leq 2^{\sqrt{2\lg(n)}}$ $\therefore$ $2^{\sqrt{2\lg(n)}} = \Omega(\lg^2(n))$ //

Sea $\lg^2(n) = \Omega(\ln(n))$ $f(n) = \lg^2(n)$ $g(n) = \ln(n)$

Por def $0 \leq c\ln(n) \leq \lg^2(n)$ Aplicando propiedades

de los logaritmos $\lg_2(n) = \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$ tenemos

$0 \leq c\ln(n) \leq \frac{\ln^2(n)}{\ln^2(2)} \Rightarrow 0 \leq c \leq \frac{\ln(n)}{\ln^2(2)}$

Para $c = 1$ y $n_0 \geq 2$ se cumple $0 \leq c\ln(n) \leq \lg^2(n)$

Por lo que $\lg^2(n) = \Omega(\ln(n))$ //

Sea $\ln(n) = \Omega(\sqrt{lg(n)})$ $f(n) = \ln(n)$, $g(n) = \sqrt{lg(n)}$

Por def sea $0 \leq c\sqrt{lg(n)} \leq \ln(n)$ dividiendo

sobre $\sqrt{\log(n)}$ tenemos $0 \leq c \leq \sqrt{\ln(n)}$ si

$c = 1$ y $n_0 \geq 3$ se cumple que $0 \leq c\sqrt{lg(n)} \leq \ln(n)$

Por lo tanto $\ln(n) = \Omega(\sqrt{lg(n)})$

Sea $\sqrt{lg(n)} = \Omega(\ln(\ln(n)))$ $f(n) = \sqrt{lg(n)}$

$g(n) = \ln(\ln(n))$

Por def $0 \leq c\ln(\ln(n)) \leq \sqrt{lg(n)}$

Por propiedades de lg tenemos $0 \leq c\ln(\ln(n)) \leq \sqrt{\frac{\ln(n)}{\ln(2)}}$

Aplicando ln tenemos

$\ln(c\ln(\ln(n))) \leq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)$

$\Rightarrow \ln(c) + \ln(\ln(\ln(n))) \leq \frac{1}{2}(\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)))$

$\Rightarrow c \leq \frac{1}{2}(\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))) - \ln(\ln(\ln(n)))$

Si $c = 1$ y $n_0 \geq 2$ se cumple $0 \leq c\ln(\ln(n)) \leq \sqrt{lg(n)}$

y por lo tanto $\sqrt{lg(n)} = \Omega(\ln(\ln(n)))$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Sea $\ln(\ln(n)) = \Omega(2^{\lg^*(n)})$ $f(n)=\ln(\ln(n))$ $g(n)=2^{\lg^*(n)}$

Por def $0 \leq c2^{\lg^*(n)} \leq \ln(\ln(n))$

aplicando lg tenemos $\lg(c2^{\lg^*(n)}) \leq \lg(\ln(\ln(n)))$

$\Rightarrow \lg^*(n)\lg(2) + \lg(c) \leq \lg(\ln(\ln(n)))$

$\Rightarrow c \leq \lg(\ln(\ln(n))) - \lg^*(n)$ y si $c = 0.01$

y $n_0 \geq 5$ se cumple que $0 \leq c2^{\lg^*(n)} \leq \ln(\ln(n))$

por lo tanto $\underline{\ln(\ln(n)) = \Omega(2^{\lg^*(n)})}$ //

Sea $2^{\lg^*(n)} = \Omega(\lg^*(n))$ $f(n)=2^{\lg^*(n)}$ $g(n)=\lg^*(n)$

Por def $0 \leq c\lg^*(n) \leq 2^{\lg^*(n)}$ aplicando lg

$\lg(c\lg^*(n)) \leq \lg(2^{\lg^*(n)}) \Rightarrow \lg(c) + \lg(\lg^*(n))$

$\leq \lg^*(n)\lg(2) \Rightarrow c \leq \lg^*(n) - \lg(\lg^*(n))$

Si $c=1$ y $n_0 \geq 2$ se cumple que $0 \leq c\lg^*(n) \leq 2^{\lg^*(n)}$

Por lo tanto $\underline{2^{\lg^*(n)} = \Omega(\lg^*(n))}$ //

De igual forma tenemos $2^{\lg^*(n)} = \Omega(\lg^*(\ln(n)))$

Por def $0 \leq c\lg^*(\ln(n)) \leq 2^{\lg^*(n)}$ y usando la

demostración anterior tenemos

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

$c \leq lg^*(n) - lg(lg^*(lg(n)))$ y si $c=1$ y $n_0 \geq 3$

se cumple que $0 \leq c\, lg^*(ln(n)) \leq 2^{lg^*(n)}$ y

por lo tanto $2^{lg^*(n)} = \Omega(lg^*(ln(n)))$

Sea $lg^*(n) = \Omega(lg(lg^*(n)))$

Por def $0 \leq c\, lg(lg^*(n)) \leq lg^*(n)$ aplicando lg

tenemos $lg(c) + lg(lg(lg^*(n))) \leq lg(lg^*(n))$

$\Rightarrow c \leq lg(lg^*(n)) - lg(lg(lg^*(n)))$ si $c=1$ y

$n_0 \geq 2$ se cumple que $0 \leq c\, lg(lg^*(n)) \leq lg^*(n)$

Por lo tanto $lg^*(n) = \Omega(lg(lg^*(n)))$

De la misma forma $lg^*(lg(n)) = \Omega(lg(lg^*(n)))$

y siguiendo la misma idea de la demostración

anterior tenemos $c \leq lg(lg^*(lg(n))) - lg(lg(lg^*(n)))$

Si $c=1$ y $n_0 \geq 4$ se cumple que $lg^*(n) = \Omega(lg(lg^*(n)))$

Santillan Zaragoza Erick Ignacio
Grupo 3CV3

Sea $lg(lg^*(n)) = \Omega(n^{1/lg(n)})$

y tenemos que $n^{1/lg(n)} = 2$ y esto se demuestra aplicando lg, $lg(n^{1/lg(n)}) = lg(2)$

$\Rightarrow \frac{1}{lg(n)} \cancel{lg(n)} = \cancel{lg(2)} \Rightarrow 1 = 1 \therefore n^{1/log(n)} = 2$

Y aplicando la def $0 \leq cn^{1/lg(n)} \leq lg(lg^*(n))$

y sabemos que $n^{1/lg(n)} = 2$ por lo tanto

$0 \leq 2c \leq lg(lg^*(n))$ Si $c = 1$ y $n_0 \geq 17$

Se cumple que $0 \leq cn^{\frac{1}{lg(n)}} \leq lg(lg^*(n)) \therefore$

$lg(lg^*(n)) = \Omega(n^{\frac{1}{lg(n)}})$

De igual forma $lg(lg^*(n)) = \Omega(1)$

Por def $0 \leq c(1) \leq lg(lg^*(n))$, si $c = 1$

y $n_0 \geq 3$ se cumple que $0 \leq c \leq lg(lg^*(n))$

$\therefore lg(lg^*(n)) = \Omega(1)$

Como hemos demostrado la pertenencia de cada función del orden propuesto, concluimos que queda demostrado el orden y por ende nuestro orden es correcto.