FACULTAD DE INGENIERÍA

Curso Agosto - Diciembre 2021

Física Computacional

Actividad de Aprendizaje 4

Br. Alejandro Santoscoy Rivero

Dr. Francisco Ramón Peñuñuri Anguiano

---

9 de Diciembre de 2021

1. Problema

1. Grafique $y(x)$ para las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y''(x) + \sin(xy'y) + 2x = 5; y(0) = 1, y'(0) = 2$ para $x \in [0, 3]$

b) $y^{(4)} + \sin xy^{(3)} + \exp(-x)y'' + y' - xy = 0$ con el vector de condiciones iniciales $Y_0 = [1, 2, 3, 4]$, para $x \in [1, 2]$ (Observe que $X_0 = 1$)

Estos ejerciciso se resuelven con el método de Runge Kuta de 4to orden.
Lo primero que se hace es definir la función en general en Octave.

```
function local = RK4(fun_rhs,a,b,init_cond,n_ints)

nrow = n_ints+1;
ncol = size(init_cond)(2);

local = zeros(nrow,ncol);

h = (b - a)/n_ints;

x = zeros(nrow,1);
y = zeros(nrow,ncol);
x(1) = a;
y(1,:) = init_cond;

for ii=1:n_ints
    K1 = h*fun_rhs(x(ii),y(ii,:));
    K2 = h*fun_rhs(x(ii)+0.5*h, y(ii,:)+0.5*K1);
    K3 = h*fun_rhs(x(ii)+0.5*h, y(ii,:)+0.5*K2);
    K4 = h*fun_rhs(x(ii)+h, y(ii,:)+K3);

    x(ii+1) = x(ii) + h;
    y(ii+1,:) = y(ii,:) + (1/6)*(K1 + 2*K2 + 2*K3 + K4);
end

local = cat(2, x, y);
end
```

Una vez definida la función ahora es resolver cada ecuación diferencial para obtener las funciones derivadas de ellas.

a) Se está tratando de una ecuación diferencial de 2do orden, así que tenemos 2 condiciones de frontera.

Primero se realiza un cambio de variable dependiente:

$$u_1 = y$$
$$u_2 = y'$$

Entonces la ecuación difetencial de puede reescribir como

$$u_2' + \sin(xu_1u_2) + 2x = 5$$

Despejando u_2'

$$u_2' = 5 - 2x - \sin(xu_1u_2)$$

Y por reglas de igualdad, podemos decir que $u_1' = u_2$

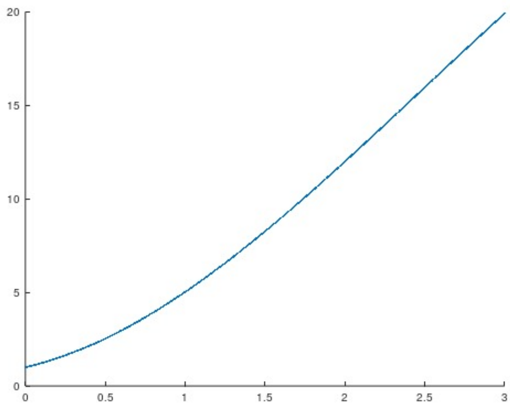
Teniendo estas dos funciones derivadas y las condiciones de frontera, entonces ya se puede codificar el comportamiento como

```
fr = @(x,y) [y(2), 5-2*x-sin(x*y(1)*y(2))]

a=0;
b=2;
y0=[1,2];
npts = 500;
sol = RK4(fr,a,b,y0,npts);


hold on;
scatter(sol(:,1),sol(:,2),3,'filled');
```

El resultado de los puntos obtenidos es la siguiente:



b) Para la siguiente ecuación, la cual es de 4to orden, se realiza un procedimiento similar

$$\begin{aligned} u_1 &= y \\ u_2 &= y' \\ u_3 &= y'' \\ u_4 &= y''' \end{aligned}$$

Entonces la ecuación se puede reescribir como

$$u_4' = xu_1 - u_2 - \exp(-x)u_3 - \sin(xu_4)$$

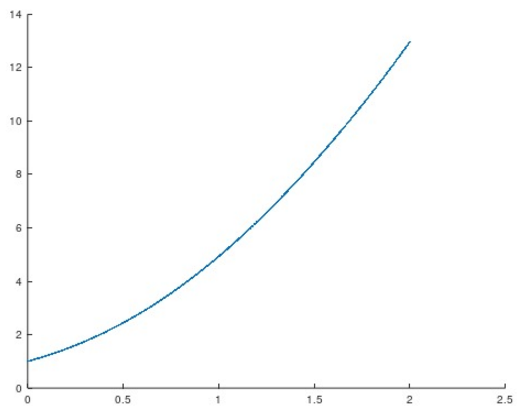
Al escribir las funciones derivadas y las condiciones iniciales:

```
fr = @(x,y) [y(2),y(3),y(4),x*y(1)-y(2)-exp(-x)*y(3)
-sin(x*y(4))]

a=0;
b=2;
y0=[1,2,3,4];
npts = 500;
sol = RK4(fr,a,b,y0,npts);

hold on;
scatter(sol(:,1),sol(:,2),3,'filled');
```

Y la gráfica queda de la siguiente manera



2. La ecuación de movimiento para un péndulo amoritugado es:

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Tomando $m = 1kg$, $l = 1m$, $g = 9.8m/s^2$ y $c = 0.5Ns/m$ 7 las condiciones iniciales son $\theta(0) = \pi/2y\dot{\theta}(0) = 0$. Haga una gráfica de la tensión en la cuerda como función del tiempo.
Se realiza una sustitución de variables

$$\omega = \dot{(\theta)}$$

Reesbribiendo la función derivada

$$\dot{\omega} = -\frac{c}{m}\omega - \frac{g}{l}\sin\theta$$

Pasando a código:

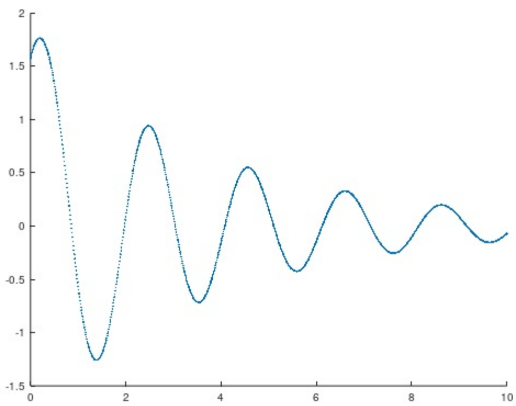
```
c = 0.5;
g = 9.8;
l = 1;
m = 1;

fr = @(x,y) [y(2), -(c/m)*y(2)- (g/l)*sin(y(1))];

a=0;
b=10;
y0=[pi/2,2];
npts = 1000;
sol = RK4(fr,a,b,y0,npts);


hold on;
scatter(sol(:,1),sol(:,2),3,'filled');
```

Y la gráfica que se obtiene es la siguiente



Se puede observar el claro comportamiento oscilatorio.
Entonces
3. Reproduzca la figura 5.b ($u_1(t) = u_2(t) = 0$) de la referencia [1]
4. Implemente los número duales y sobrecargue las siguientes funciones y operadores.
`(\^), (*), (+), (-), (/), (==), (!=), acos, acosh, asin, asinh, atan, atan2, atanh, sin, cos, cosh, erf, sinh, tan, tanh, exp, log, sqrt, abs`.
5. Usando las funciones del ejercicio anterior, implemente $\nabla f(x0)$ y $Jf(x0)$; una función que permita calcular el gradiente y otra que calcule el Jacobiano de una función evaluada en el punto x_0.