



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

**EDVANE SALOMÃO
GUSTAVO GONÇALVES
GERARDO AZEVEDO
LUCAS RODRIGUES
MARCUS MATOS
MARCEL MELO
RAFAEL SABA
RAIQUE JESUS
RAMON PIRES**

**TANQUES ACOPLADOS - ANÁLISES DO MODELO, OBSERVADOR DE
ESTADOS E FILTRO DE KALMAN**

SALVADOR - BAHIA

2024

TANQUES ACOPLADOS - ANÁLISES DO MODELO, OBSERVADOR DE ESTADOS E FILTRO DE KALMAN

Relatório final apresentado como
requisito para nota da disciplina:
ENGF95 - Análise de processos e
sistemas II do
curso de Engenharia de Controle e
Automação de Processos da
Universidade Federal da Bahia -
UFBA.

Docente: Raony Maia

SALVADOR - BAHIA

SUMÁRIO

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	4
1.1. MODELAGEM DO SISTEMA	4
1.2. ESTIMAÇÃO DAS CONSTANTES DOS TANQUES	6
1.3. REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA EM ESPAÇO DE ESTADOS	7
1.4. LINEARIZAÇÃO	8
1.5. MAPA DE FASES	10
1.6. OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE	11
1.7. OBSERVADOR DE ESTADOS	12
1.8. FILTRO DE KALMAN	13
2. MATERIAIS E MÉTODOS	14
2.1. MATERIAIS UTILIZADOS	14
2.2. MONTAGEM DO EXPERIMENTO	19
2.3. REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO	21
3. RESULTADOS E DISCUSSÃO	22
3.1. ESTIMAÇÃO DOS COEFICIENTES CVs	22
3.2. SIMULAÇÃO EDO X DADOS COLETADOS	26
3.3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS	27
3.4. SIMULAÇÃO DO MAPA DE FASES	28
3.5. ANÁLISE DE OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE	30
3.6. PROJETO DE OBSERVADOR DE ESTADOS	30
3.7. PROJETO DO FILTRO DE KALMAN	31
4. CONCLUSÃO	33
5. REFERÊNCIAS	34
6. ANEXOS	35

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este documento visa o estudo de um sistema de dois tanques acoplados, monitorados por um arduíno que fornece dados para serem analisados em python e comparados com o modelo teórico simulado, representado em espaço de estados.

Neste estudo, serão abordadas algumas análises e estratégias para compreender melhor e atuar sobre o comportamento dos estados deste sistema, como o mapa de fases, a análise de observabilidade e controlabilidade, além de projetar um observador de estados, com o objetivo de estimar estados do modelo, que não são mensurados diretamente (ou que possamos comparar com o mensurado).

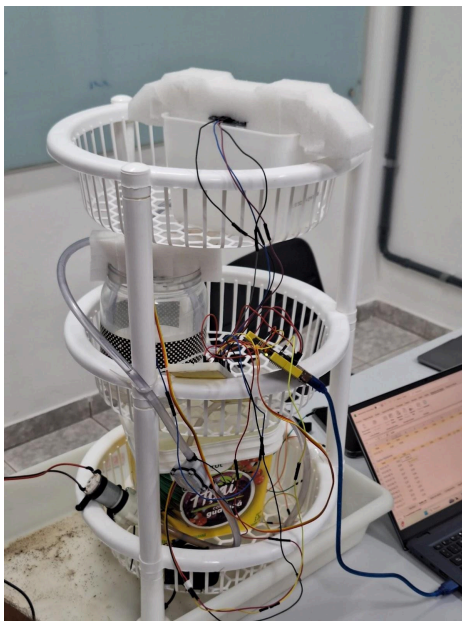


Figura 1: Foto do sistema real montado em sala

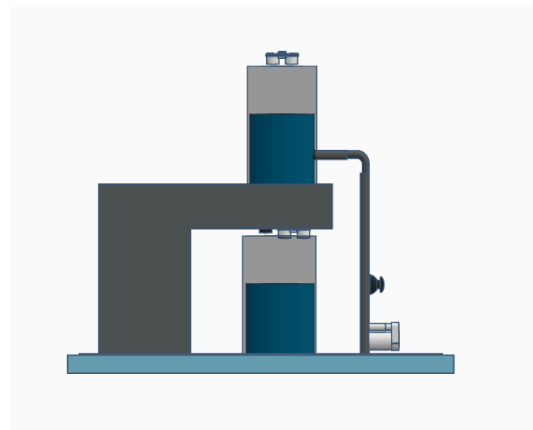


Figura 2: Visão frontal 3D da planta. Desenvolvida no Tinkercad.

O tanque 2 é abastecido com água por meio de uma bomba, enquanto o tanque 1 é alimentado através de um orifício na parte inferior do tanque 2. O objetivo da análise do sistema é verificar o comportamento dos níveis, de acordo com uma perturbação provocada pela vazão da bomba.

1.1. MODELAGEM DO SISTEMA

Para a realização da modelagem do sistema (Figura 1), é necessário observar

que o sistema de tanques acoplados é dinâmico, portanto, possui variação de acordo com o tempo. Logo, é possível utilizar equações diferenciais ordinárias (EDOs) para descrever matematicamente o sistema. Com isso, foi estabelecido que o nível do tanque superior é influenciado por uma vazão F_2 de entrada, a altura h_2 do nível da água e a área a_2 da base do recipiente. Já para o tanque inferior, existe uma vazão de entrada F_1 (correspondente à 1 saída do tanque superior), uma área a_1 , uma altura h_1 e uma vazão de saída F_3 . A partir do princípio de conservação das massas, depreende-se que a relação entre acúmulo, entrada e saída de massas:

$$A = E - S \quad (1)$$

onde:

A é o acúmulo das massas;

E é a entrada;

S é a saída.

Ao aplicar a lei da conservação das massas ao sistema, considerando que F_2 é vazão da bomba que alimenta o tanque 2, obtém-se para o tanque superior:

$$a_2 \frac{dh_2}{dt} = F_2 - F_1 \quad (2)$$

onde F_1 :

$$F_1 = Cv_2 \cdot \sqrt{h_2(t)} \quad (3)$$

Na equação 3, Cv_2 representa uma constante de vazão intrínseca ao tanque 2. Então, seguindo o mesmo princípio da equação 2, o tanque 1 pode ser representado por:

$$a_1 \frac{dh_1}{dt} = F_1 - F_3 \quad (4)$$

onde F_3 :

$$F_3 = Cv_1 \cdot \sqrt{h_1(t)} \quad (5)$$

onde Cv_1 representa uma constante de vazão intrínseca ao tanque 1.

Substituindo as vazões F_1 e F_3 nas equações 2 e 4, é possível isolar as derivadas das alturas de cada tanque dividindo os dois lados das duas equações pelas áreas em questão:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{F_2}{a_2} - \frac{Cv_2 \cdot \sqrt{h_2(t)}}{a_1} \quad (6)$$

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{Cv_2 \cdot \sqrt{h_2(t)}}{a_1} - \frac{Cv_1 \cdot \sqrt{h_1(t)}}{a_1} \quad (7)$$

1.2. ESTIMAÇÃO DAS CONSTANTES DOS TANQUES

Ao analisar as equações que representam os tanques estudados (equações 6 e 7), destacam-se os parâmetros do sistema:

- h_1, h_2 : São os níveis dos dois tanques, variáveis que estamos estudando e analisando o seu comportamento;
- a_1, a_2 : Área da base dos tanques: parâmetros conhecidos;
- Cv_1, Cv_2 : Constantes fundamentais para o sistema, que não podem ser medidas;
- F_2 : Vazão de entrada no tanque 2, que não é conhecida, mas pode ser estimada através dos dados coletados.

Para estimar os coeficientes Cv_1 e Cv_2 , usa-se os dados coletados de forma isolada para o tanque 1 e o tanque 2. Esses dados traduzem o comportamento dos tanques esvaziando conforme o tempo, sem nenhuma outra influência além da coluna d'água inicial dos tanques. Dessa forma, comparando o modelo simulado para o caso de um tanque esvaziando e os dados coletados, são obtidos os parâmetros Cv_1 e Cv_2 mais adequados para explicar o processo.

Com os dados coletados, e conhecendo as equações diferenciais que representam o nosso sistema, define-se as funções objetivo:

$$E_1 = \Sigma(Y_1 - y_1)^2 \quad (8)$$

$$E_2 = \Sigma(Y_2 - y_2)^2 \quad (9)$$

Onde:

Y_1, Y_2 : Valores de h_1 e h_2 no no modelo do sistema de tanques;

y_1, y_2 : Valores coletados no experimento;

E_1, E_2 : Soma dos erros quadráticos que representam a diferença entre o modelo e o experimento.

Sendo Cv_1 e Cv_2 as variáveis de decisão, a partir da função objetivo definida, será possível, com os dados coletados, e através de otimização, definir valores de Cv_1 e Cv_2 que minimizam a função objetivo é adequar o sistema simulado aos dados experimentais. Os valores estimados serão expostos posteriormente na seção de resultados deste relatório.

1.3. REPRESENTAÇÃO DO SISTEMA EM ESPAÇO DE ESTADOS

A representação em espaço de estados é um método moderno para descrever e analisar sistemas dinâmicos usando equações diferenciais ordinárias. Nesse tipo de representação, as variáveis de estado representam as variáveis internas do sistema, enquanto as equações de estado descrevem como essas variáveis mudam ao longo do tempo.

É possível representar o sistema de equações diferenciais na forma matricial da seguinte maneira:

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t)) \quad (10)$$

Sendo X o vetor de estados, em que cada um dos seus componentes representa uma variável específica do sistema, já o F é o vetor de funções que relaciona as variáveis independentes com as variáveis dependentes.

Dada a equação 10, para o sistema estudado, a forma matricial é representada por:

$$X(t) = \begin{bmatrix} h_2(t) \\ h_1(t) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$F(t, X(t)) = \begin{bmatrix} \frac{F_2}{a_2} - \frac{Cv_2 \cdot \sqrt{h_2(t)}}{a_1} \\ \frac{Cv_2 \cdot \sqrt{h_2(t)}}{a_1} - \frac{Cv_1 \cdot \sqrt{h_1(t)}}{a_1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

1.4. LINEARIZAÇÃO

A partir do modelo em espaço de estado não linear é possível obter uma representação linear do modelo aplicando a série de Taylor.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t)) &\approx f_1(t, x_1^*, x_2^*) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1(t)=x_1^* \\ x_2(t)=x_2^*}} (x_1(t) - x_1^*) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1(t)=x_1^* \\ x_2(t)=x_2^*}} (x_2(t) - x_2^*) \\ \dot{x}_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t)) &\approx f_2(t, x_1^*, x_2^*) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1(t)=x_1^* \\ x_2(t)=x_2^*}} (x_1(t) - x_1^*) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1(t)=x_1^* \\ x_2(t)=x_2^*}} (x_2(t) - x_2^*) \end{aligned} \quad (13)$$

sendo \dot{X}_1 e \dot{X}_2 pontos de linearização.

Fazendo a substituição de variável:

$$\bar{x}_1(t) = x_1(t) - x_1^* \rightarrow \dot{\bar{x}}_1(t) = \dot{x}_1(t) \text{ e } \bar{x}_2(t) = x_2(t) - x_2^* \rightarrow \dot{\bar{x}}_2(t) = \dot{x}_2(t) \quad (14)$$

Obtém-se:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1(t) &\approx f_1(t, x_1^*, x_2^*) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1(t)=x_1^* \\ x_2(t)=x_2^*}} \bar{x}_1(t) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1(t)=x_1^* \\ x_2(t)=x_2^*}} \bar{x}_2(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) &\approx f_2(t, x_1^*, x_2^*) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1(t)=x_1^* \\ x_2(t)=x_2^*}} \bar{x}_1(t) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1(t)=x_1^* \\ x_2(t)=x_2^*}} \bar{x}_2(t)\end{aligned}\quad (15)$$

Passando para forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t, x_1^*, x_2^*) \\ f_2(t, x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix}\quad (16)$$

Para obter-se a aproximação linear do sistema, é preciso que:

$$\begin{bmatrix} f_1(t, x_1^*, x_2^*) \\ f_2(t, x_1^*, x_2^*) \end{bmatrix} = 0\quad (17)$$

Como $f_1(t, x_1(t), x_2(t)) = \dot{x}_1(t)$, logo x_1^*, x_2^* devem ser determinados de tal forma que $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0$. A esse ponto, denomina-se estado estacionário. Por fim, o modelo linearizado em torno no ponto estacionário x_1^*, x_2^* , tem-se a seguinte representação:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix}\quad (18)$$

A representação linear do sistema é dada por:

$$\dot{x}(t) = AX(t) + Bu(t)\quad (19)$$

Onde ' A ' representa uma matriz que cada elemento está associado a uma combinação linear das derivadas das variáveis de estado. Essa matriz descreve como as variáveis de estado evoluem ao longo do tempo. Sendo que o ' B ' representa como as entradas externas influenciam diretamente as variáveis de estado do sistema. ' $\dot{X}(t)$ ' é o vetor das derivadas parciais das variáveis de estado em relação ao tempo. Cada componente de ' $\dot{X}(t)$ ' corresponde à taxa de variação de uma variável de estado específica. ' $X(t)$ ' representa o vetor de estados. Cada elemento desse vetor corresponde a uma variável de estado do sistema. ' $u(t)$ ' é o sinal de entrada que influencia diretamente o comportamento do sistema.

1.5. MAPA DE FASES

Ao analisar a estabilidade de um sistema dinâmico no espaço de estados, o mapa de fases, também chamado de retrato de fases, apresenta-se como uma ferramenta muito importante. Ele consiste em uma representação gráfica que permite a visualização das trajetórias que um sistema dinâmico pode seguir no espaço de estados, permitindo a visualização do comportamento do sistema ao longo do tempo. O retrato de fase ajuda a identificar pontos de equilíbrio, ciclos limite e outras características importantes do sistema.

Para encontrar o retrato de fases de um sistema é necessário encontrar os autovalores e autovetores, sendo que, os autovalores fornecem informações sobre a taxa de crescimento ou decaimento das trajetórias no espaço de fases. Se todos os autovalores tiverem partes reais negativas, o sistema é estável, se algum autovalor tiver uma parte real positiva, o sistema é instável. Já os autovetores indicam as direções principais no espaço de estados ao longo das quais as trajetórias se alinham. Os autovalores e autovetores ajudam a visualizar como o sistema evolui ao longo do tempo.

Os autovalores são encontrados a partir do polinômio característico, sendo eles as raízes desse polinômio.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (20)$$

onde:

A é a matriz de estados

λ é o autovalor

I é a matriz identidade

Para cada autovalor obtido é possível obter o autovetor a partir:

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (21)$$

onde:

A é a matriz de estados;

λ é o autovalor;

I é a matriz identidade;

v é o autovetor.

1.6. OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE

A observabilidade é definida como a capacidade de estimação dos estados em um sistema a partir dos valores das suas entradas e saídas. Para identificar se um sistema é observável, é verificado se o número de estados é igual ao posto da matriz de observabilidade. O posto é o número máximo de colunas ou linhas linearmente independentes na matriz e quando ele é igual à quantidade de estados, é chamado de pleno.

$$O = [C^T A^T C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T] \quad (22)$$

onde:

O é a matriz de observabilidade;

C^T é a matriz transposta da saída;

A^T é a matriz transposta de estados.

Já a controlabilidade resume-se à capacidade de alterar os estados de um sistema em um tempo finito mediante a modificação das suas entradas a partir de quaisquer estados iniciais. Para que o sistema seja controlável, é verificado se o posto da matriz de controlabilidade é pleno.

$$C = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (23)$$

onde:

C é a matriz de controlabilidade;

B é a matriz de entrada;

A^T é a matriz de estados.

1.7. OBSERVADOR DE ESTADOS

Seja devido a uma questão de projeto ou a natureza de determinado sistema, um problema comum em cenários reais de processos é a ausência de um ou mais estados mensurados que são inerentes aquela determinada planta. A falta de um sensor em determinado trecho do processo, ou até mesmo a falha destes sensores, podem levar o engenheiro projetista a buscar uma abordagem indireta, estimando essas variáveis (ou estados internos) através do modelo teórico, seu sinal de controle e sua saída. A esta solução, damos o nome de observador de estados.

O primeiro passo para implementar um observador de estados, é garantir que o modelo seja observável. Com esse requisito garantido, o observador de estado estimará as variáveis do estado baseando-se no sinal de controle e no sinal de saída. Considerando um sistema qualquer descrito na forma de espaço de estados por:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Assume-se que o estado $x(t)$ deve ser aproximado pelo estado estimado $\hat{X}(t)$ do seguinte modelo dinâmico:

$$\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + Bu(t) + L(y - C\hat{X}(t)), \quad (25)$$

- Onde $\hat{X}(t)$ é o vetor estimado $C\hat{X}(t)$ é a saída estimada;
- As entradas do observador são a saída y e a entrada de controle $u(t)$;
- A matriz ganho do observador L envolve o termo de correção entre a diferença medida y com a saída estimada;

Subtraindo (1) por (2), encontra-se uma expressão $e(t)$ que avalia o erro do observador:

$$\dot{X}(t) - \hat{\dot{X}}(t) = e(t) = (A - LC)(x(t) - \dot{X}(t)) \text{ ou } (A - LC)e(t); \quad (26)$$

Onde $e(t)$ representa o erro, que é justamente a diferença entre o valor estimado pelo observador e o valor real do estado. Desta forma, quanto mais representativo o observador for, mais próximo do 0 o $e(t)$ se aproximará, ou seja, mais próximo do estado real o estado estimado estará. Um projeto de observador de estados passa pelo desafio de determinar qual é a matriz L para que as dinâmicas do erro definidas por $e(t)$ sejam estáveis com uma velocidade suficiente de resposta. Para o sistema de tanques acoplados, o objetivo desejado é de estimar os estados como as duas alturas do tanque (h_1 e h_2), através de um projeto de observador que será mais aprofundado no tópico 3.7.

1.8. FILTRO DE KALMAN

Um cenário que frequentemente ocorre na aplicação de um projeto de controle ou até mesmo em medições em variáveis de processo, é a presença de ruídos nas medições, tornando por exemplo, um projeto de observador de estados do tópico anterior uma aplicação mais desafiadora. Uma abordagem para esse cenário é utilizar um filtro de Kalman, que nada mais é que uma solução recursiva utilizada para estimar o estado de um sistema a partir das medições que apresentam sinais ruidosos. Um filtro de Kalman opera em dois passos principais a cada instante de tempo: a predição e a atualização e podem ser descritos através das seguintes equações.

- Previsão:

$$\hat{x}_{k|k-1} = A_k \hat{x}_{k-1|k-1} + B_k u_k \quad \text{Previsão do estado}$$

$$P_{k|k-1} = A_k P_{k-1|k-1} A_k^T + Q_k \quad \text{Previsão da covariância do erro}$$

- Atualização:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + R)^{-1} \quad \text{Ganho de Kalman}$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad \text{Atualização do estado}$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad \text{Atualização da covariância do erro}$$

Onde:

$\hat{x}_{k|k-1}$ é o estado previsto

$\hat{x}_{k|k}$ é o estado corrigido

$P_{k|k-1}$ é a covariância do erro de predição

$P_{k|k}$ é a covariância do erro corrigido

K_k é o ganho de Kalman

Q é a covariância do ruído do processo

R é a covariância do ruído da medição

O filtro de Kalman utiliza as equações de previsão em seu algoritmo para calcular a predição do estado, utilizando a matriz A_k e a entrada do controle, além de atualizar a covariância do erro, com base no modelo do processo. Já as equações de atualização tem o objetivo de calcular o ganho de Kalman K , para determinar a confiança entre a previsão e o valor medido, além de atualizar o estado com base na medição e o ganho e atualizar a covariância do erro para refletir a nova estimativa. Este processo é repetido a cada instante k com novas medições, refinando continuamente a estimativa do estado mesmo na presença de ruídos e incertezas, sendo assim uma solução que faz bastante sentido com o sistema estudado, que possui sinais de medição com a presença de ruído bem representativo.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

O estudo do sistema de dois tanques foi conduzido utilizando um controlador Arduino UNO, sensores ultrassônicos, sensor de vazão e uma bomba para transferir a água do fundo para o topo do tanque 2. A bomba de enchimento dos recipientes tinha um sensor de vazão e em cada tanque possuía um sensor ultrassônico para medir seu nível. O sensor ultrassônico mede a distância dos objetos usando ele como referência, dessa forma, para obter valores condizentes, as medições durante a leitura foram tratadas da seguinte forma:

$$Nível = (Altura\ total\ do\ tanque - tamanho\ do\ volume\ morto) - altura\ medida$$

2.1. MATERIAIS UTILIZADOS

Neste tópico, serão apresentados os materiais que foram utilizados para a construção do sistema. O sistema foi construído usando 2 recipientes para simular os tanques e uma fruteira como plataforma para existir a diferença de altura. Para componentes eletrônicos, como já citado anteriormente, foram usados um microcontrolador Arduino UNO, 2 sensores ultrassônicos HCSR-04, um sensor de vazão Yf-s201 e uma bomba. Além disso, para conexão dos componentes, foram usados uma Protoboard e Jumpers Macho-Fêmea e Macho-Macho. A imagem a seguir mostra cada item do sistema real:

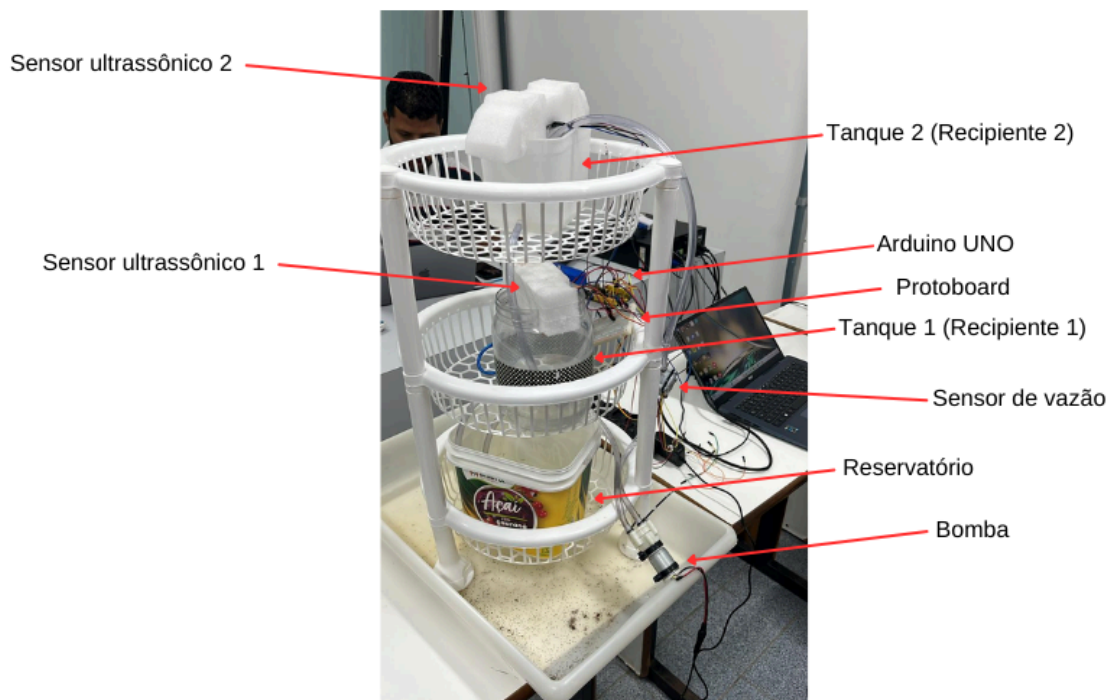


Figura 3: Foto do sistema real com as indicações dos materiais. Os sensores ultrassônicos estão alocados dentro dos suportes de isopor.

- Recipiente 1:



Figura 4: Recipiente representando o tanque 1. Imagem retirada do Google Imagens.

- Recipiente 2:

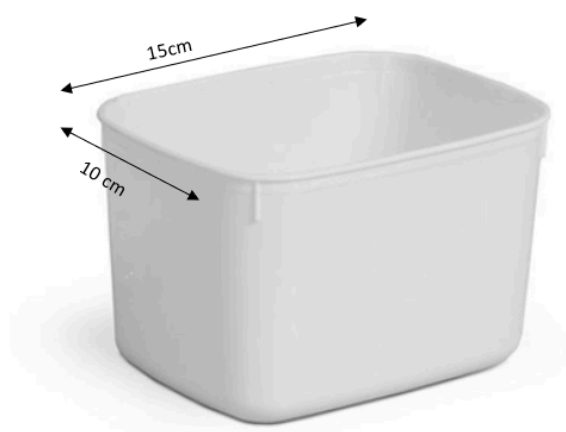


Figura 5: Recipiente representando o tanque 2. Imagem retirada do Google Imagens.

Reservatório:



Figura 6: Recipiente representando o reservatório (dimensões irrelevantes para o experimento). Imagem retirada do Google Imagens.

- Arduino UNO

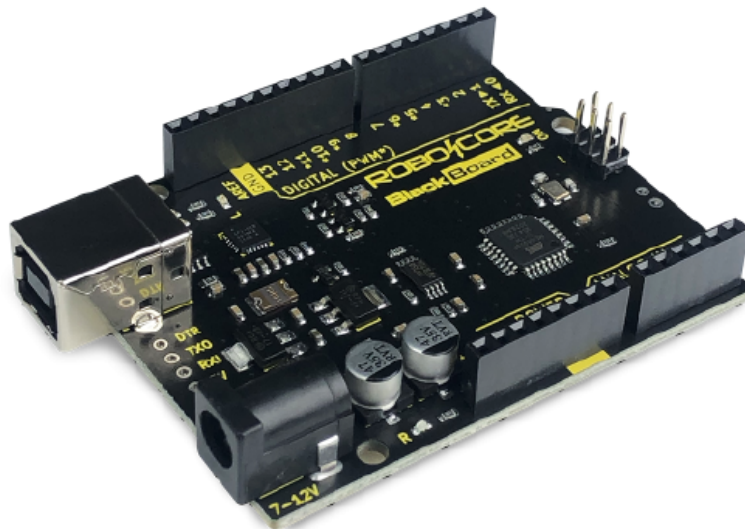


Figura 7: Microcontrolador Arduino BlackBoard RoboCore. Imagem retirada do Google Imagens.

- 2 Sensores HCSR-04



Figura 8: Sensor de distância ultrassônico HC-SR04. Imagem retirada do Google Imagens.

- Sensor Yf-s201



Figura 9: Sensor de fluxo de água Yf-s201. Imagem retirada do Google Imagens.

2.2. MONTAGEM DO EXPERIMENTO

Para realizar as medições usando os sensores citados anteriormente, foi necessário realizar as ligações dos componentes eletrônicos no Arduino e na Protoboard. A forma como essas conexões foram feitas está descrita nos esquemas a seguir.

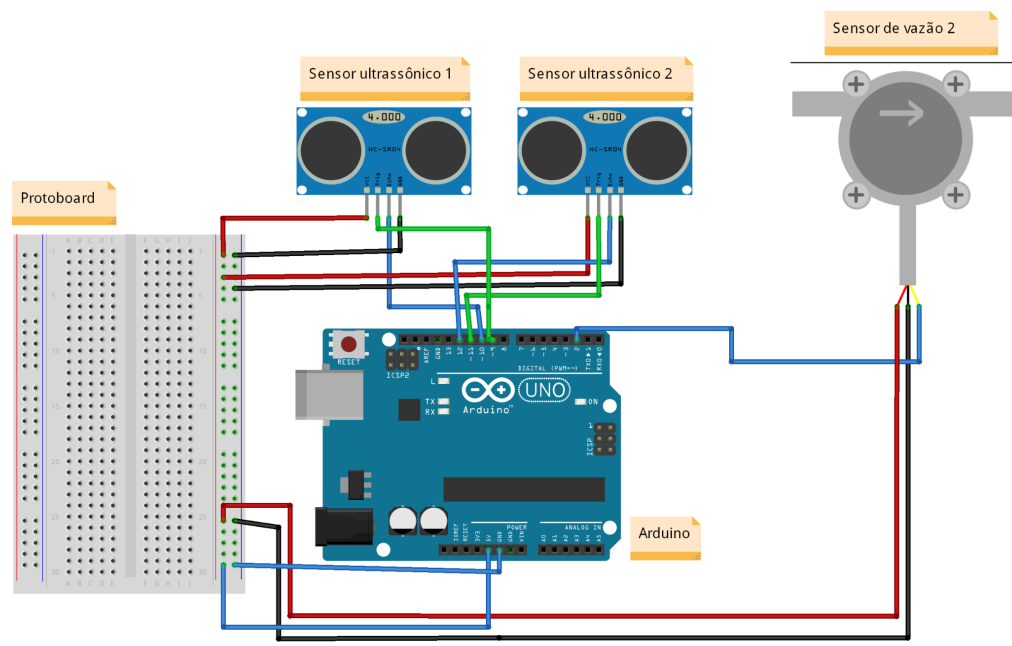


Figura 10: Visão ilustrada das conexões no arduino. Desenvolvido no Fritizing

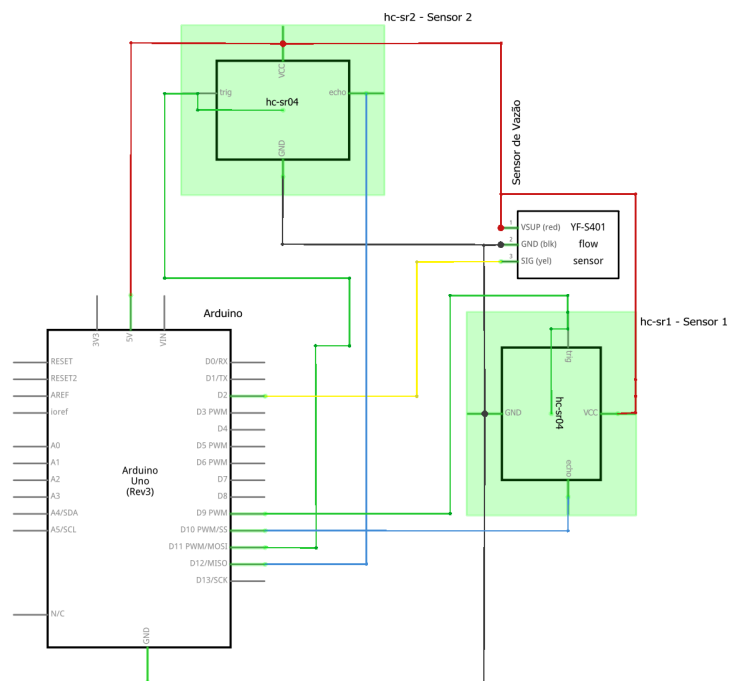


Figura 11: Visão esquemática das conexões no arduino. Desenvolvido no Fritizing

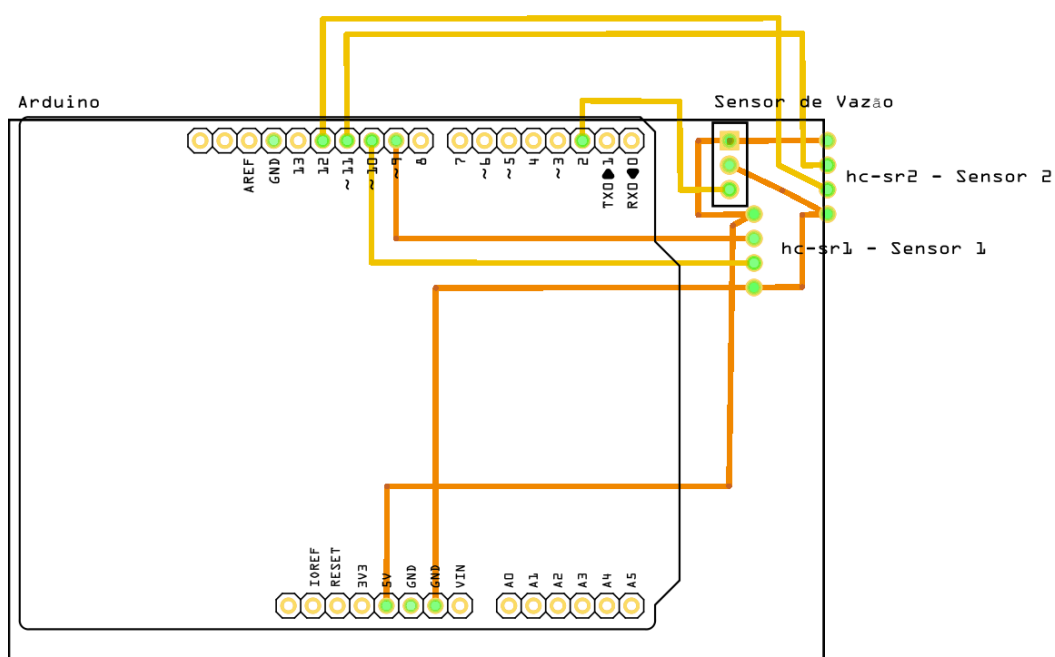


Figura 12: Visão esquemática em placa PCB das conexões no arduino. Desenvolvido no Fritizing

2.3. REALIZAÇÃO DO EXPERIMENTO

Após resultados do Relatório 1, ficou decidida a obtenção dos dados novamente, seguindo as etapas abaixo:

1. Atualização do código para arduino, utilizado no Experimento 1. Utilizou-se a IDE Arduino para captação de dados dos sensores ultrassônicos e do sensor de vazão presentes no experimento;
2. Descobrir o nível morto presente nos tanques e ajustar o código feito na etapa 1;
3. Coletar dados para o tanque 1, tanque 2 e vazão de entrada do tanque 2 através do arduino e também de forma simultânea via suplemento do Excel (Microsoft Data Streamer for Excel) para tratamento e análise posterior.
 - a. C_v - Para as duas constantes de vazão, os tanques foram preenchidos com água até o topo e foram coletados dados do seu esvaziamento ao longo do tempo. Estes dados foram utilizados conforme tópico 1.6 da Fundamentação Teórica e seção de Resultados.
 - b. F - Para os dados da vazão da bomba, ambos os tanques iniciaram com nível igual a 0 (vazios) e foram coletados dados do seu enchimento, através da bomba de vazão F , ao longo do tempo. A 2ª utilização desses dados para estimação do número foi detalhada no tópico 1.7 da Fundamentação Teórica e seção de Resultados.
4. Coletar dados para o tanque 1, tanque 2 e vazão de entrada do tanque 2 **em uma condição de vazão constante e equilíbrio do sistema**, através do arduino e também de forma simultânea via suplemento do Excel (Microsoft Data Streamer for Excel) para tratamento e análise posterior.
 - a. Para obtenção desses dados, foi ajustada a vazão de entrada do tanque 2 até um valor no qual os dois tanques estavam com os níveis estáveis.
5. Através da estimação dos parâmetros do sistema (C_{v1} , C_{v2} , área dos tanques) e uso do modelo para obtenção de dados através de simulação em python, fazer a comparação com os dados reais e coletar os resultados.
6. Implementação de um observador de estados simulado em Python.
7. Implementação de um filtro de Kalman, simulado em Python.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1. ESTIMAÇÃO DOS COEFICIENTES CVs

Com os dados coletados na etapa 3 do tópico 2.3, a próxima etapa foi consolidar os dados e diminuir os ruídos apresentados.

O método utilizado para redução de ruídos foi o filtro com uso da média móvel e redução de outliers por diferencial de pontos extremos. Para isso, foram calculadas as médias a cada 10 valores coletados, possibilitando a identificação do enchimento e esvaziamento dos tanques.

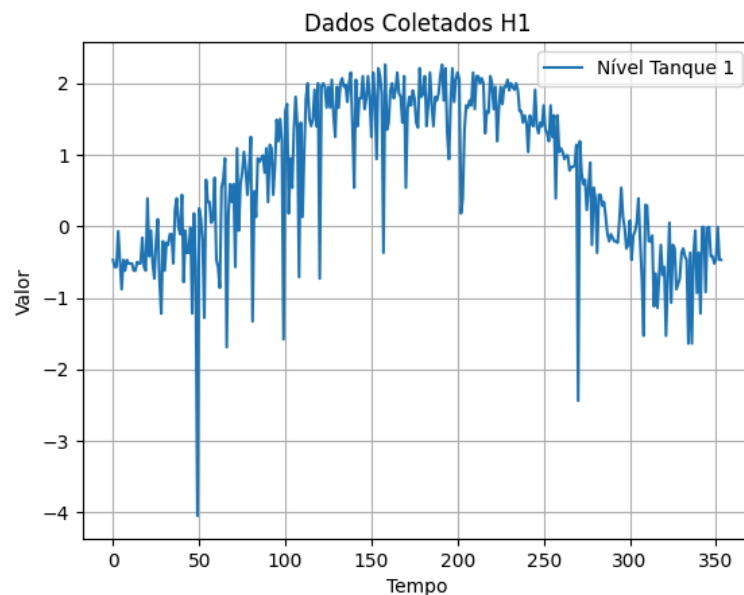


Figura 13: Dados coletados pelo sensor ultrassônico do Tanque 1

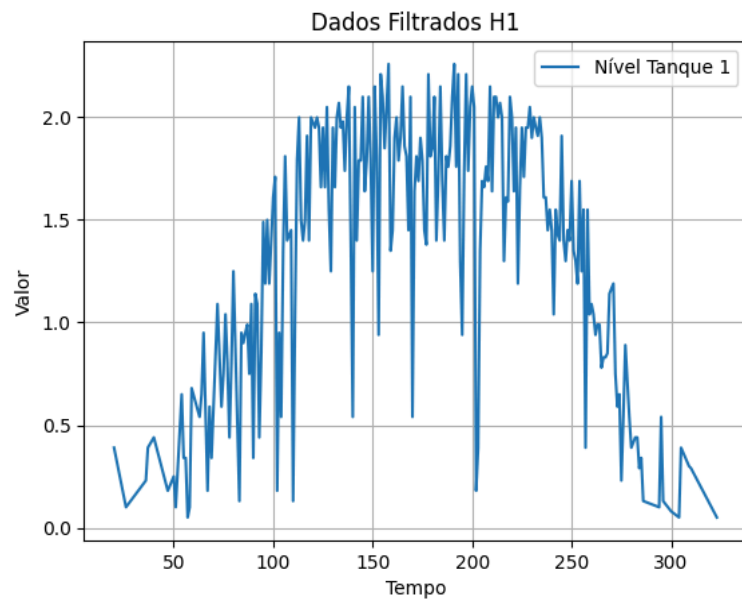


Figura 14: Dados do Tanque 1 pós-filtragem

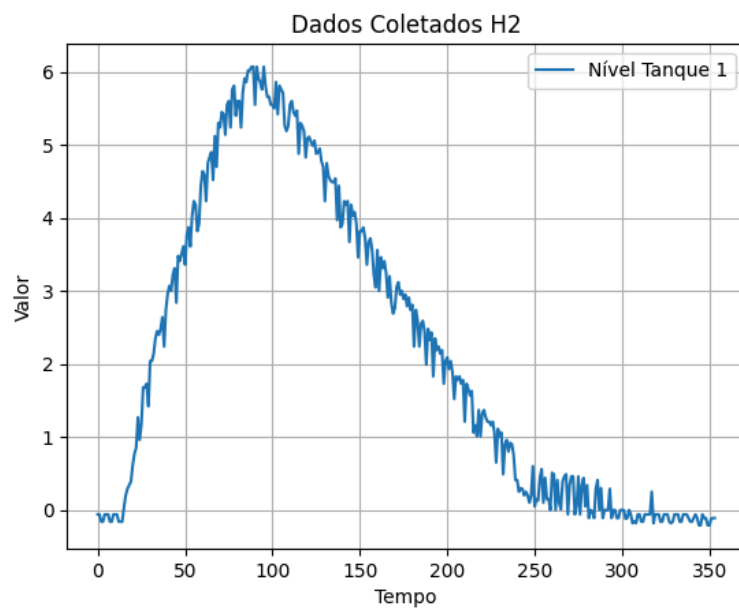


Figura 15: Dados coletados pelo sensor ultrassônico do Tanque 2

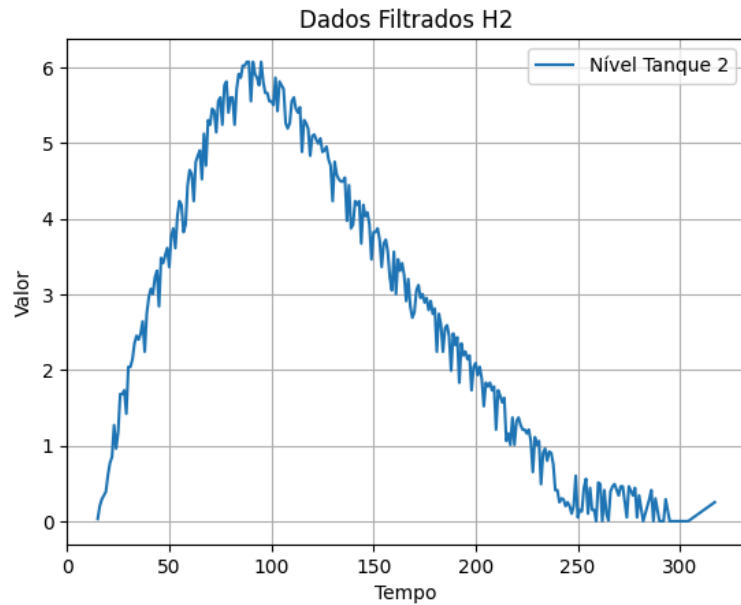


Figura 16: Dados do Tanque 1 pós-filtragem

Com esses novos dados definidos, foi utilizado um algoritmo de otimização para encontrar o $Cv1$ e $Cv2$ que minimizam a soma dos erros quadráticos, se adequando melhor aos dados coletados experimentalmente. Foi utilizado o Python para otimizar a função objetivo, através do método BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), algoritmo computacionalmente eficiente para problemas de otimização de médio e grande porte. Ao executar o algoritmo, foram encontrados os seguintes valores para $Cv1$ e $Cv2$:

$$Cv1 = 3.582cm^{5/2}s$$

$$Cv2 = 2.869cm^{5/2}s$$

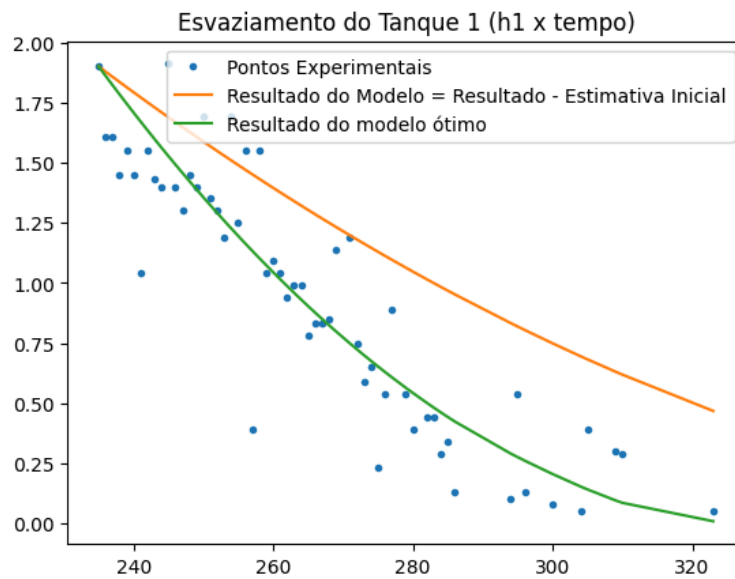


Figura 17: Comparativo dos modelos para representação do esvaziamento do Tanque 1

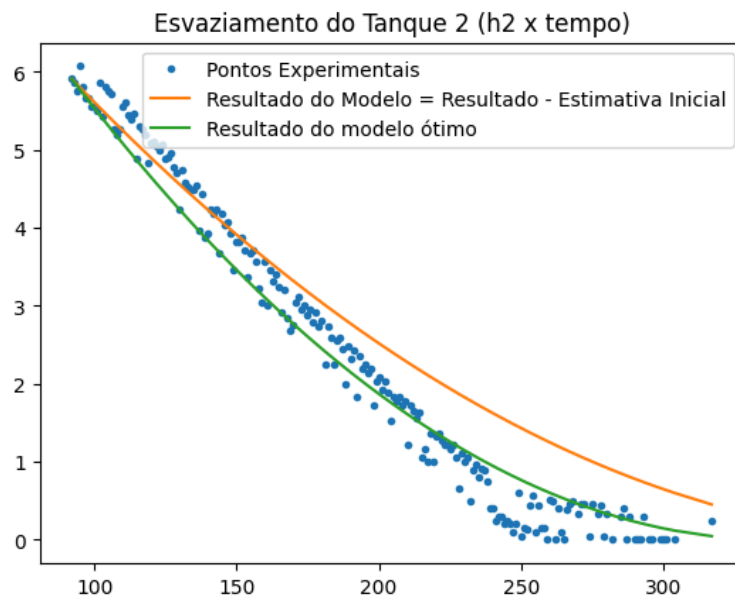


Figura 18: Comparativo dos modelos para representação do esvaziamento do Tanque 2

Os valores estimados para C_v representam o valor que obtém o menor erro entre o modelo ideal e experimental possível, se adequando melhor aos dados coletados. Vale notar também que foi obtido um melhor resultado se comparado a diferença entre o modelo com a estimativa inicial vs o modelo após as técnicas de otimização, onde os parâmetros C_{v1} e C_{v2} foram utilizados.

3.2. SIMULAÇÃO EDO X DADOS COLETADOS

Conforme estimado os coeficientes de vazão dos tanques, validado a vazão do sistema e obtidas todas as informações geométricas da planta, o próximo passo é encontrar as Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) que representam o processo estudado.

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{Cv_2 \sqrt{h_2 t(t)} - Cv_1 \sqrt{h_1 t(t)}}{a_1}$$

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{F}{a_2} - \frac{Cv_2 \sqrt{h_2 t(t)}}{a_2}$$

Substituindo os valores obtidos no modelo,

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= \frac{3.582\sqrt{h_2 t(t)}}{95.03} - \frac{2.869\sqrt{h_1 t(t)}}{95.03} \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{F(t) - 3.582\sqrt{h_2 t(t)}}{160} \end{aligned} \quad (27)$$

A partir disso, simulando as EDOs em Python e comparando os dados coletados com os dados simulados e ajustado ao modelo encontrado no passo anterior, foram encontrados os seguintes gráficos.

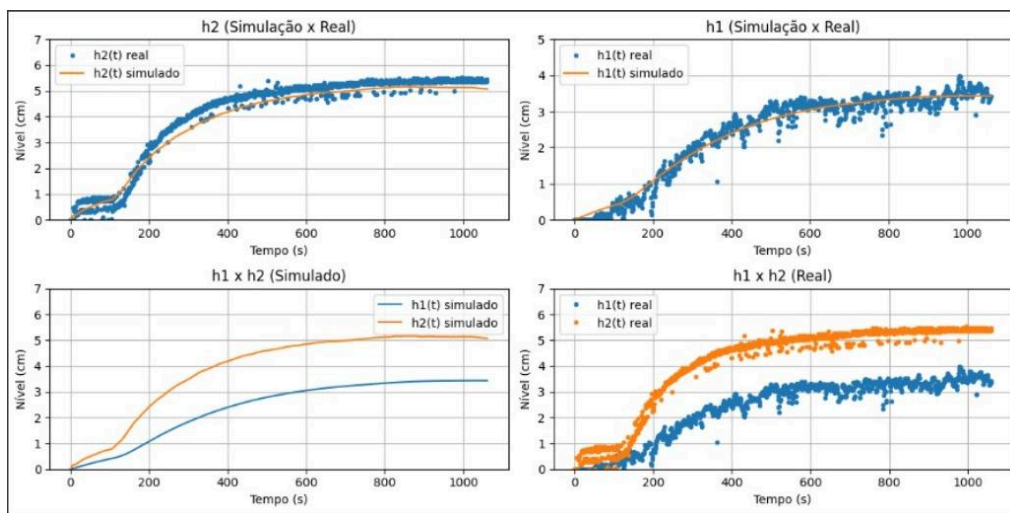


Figura 19: Comparação entre os dados de vazão coletados e dados de vazão estimados .

Conforme sugerido no Relatório 1, nessa nova medição ficou nítido que o modelo obtido com esses novos dados e a filtragem do sinal foram imprescindíveis para a melhora dos resultados quando comparado com o experimento realizado anteriormente. Percebe-se que, tanto a curva de h_1 quando de h_2 estão equivalentes aos pontos coletados e a resposta do modelo é muito semelhante entre as situações real e simulada.

Nota-se que, com esses dados, a representação está mais coerente e, portanto, isso trará mais assertividade na representação do mapa de fases, as análises de observabilidade e implementação do observador e do filtro de Kalman que serão apresentados adiante.

3.3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

A partir dos dados coletados no experimento e, através da linguagem Python, as EDOs foram transformadas de sua forma padrão na representação matricial em espaços de estados. Para isso, foi necessário encontrar o estado estacionário do sistema, através de um algoritmo utilizando o *solver*, foi possível encontrar o ponto de equilíbrio em $h1_{ss} = 3,113027760553738$ e $h2_{ss} = 4,85258397934363$. Utilizando esses pontos, podemos definir as matrizes A e B que representam a dinâmica do sistema. Escrevendo no formato padrão $\dot{x}(t) = AX(t) + Bu(t)$, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0106817733773608 & 0,00685256704411814 \\ 0 & -0,00406999653876592 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/160 \end{bmatrix} \cdot [F] \quad (28)$$

Foram considerados os seguintes valores encontrados através do experimento:

$$\begin{aligned} a_{h1} &= 95,03 \text{ cm}^2, & a_{h2} &= 160 \text{ cm}^2, & cv_{h1} &= 3.582 \text{ cm}^{5/2} \text{ s}, \\ cv_{h2} &= 2.869 \text{ cm}^{5/2} \text{ s}, & F &= 6,32 \text{ cm}^3/\text{s} \end{aligned}$$

3.4. SIMULAÇÃO DO MAPA DE FASES

Para traçar o mapa de fases, deve-se antes obter os autovalores e autovetores, a partir da matriz A do espaço de estados e das equações 20 e 21:

$$A = \begin{bmatrix} -0.0106817733773608 & 0.0068525670441814 \\ 0 & -0.00406999653876592 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (20)$$

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (21)$$

$$\lambda_2 = -0.0106817733608 \quad \lambda_1 = -0.00406999653876592$$

$$v_2 = [1; 0]^T \quad v_1 = [0.71963729; 0.69435018]^T$$

Importante notar que o autovalor do segundo tanque (λ_2) é mais negativo que o autovalor do primeiro tanque (λ_1), indicando que o tanque 2 chega mais rápido ao estado estacionário. Os autovetores, por sua vez, indicam que o tanque dois interfere no tanque um, mas a recíproca não é verdadeira.

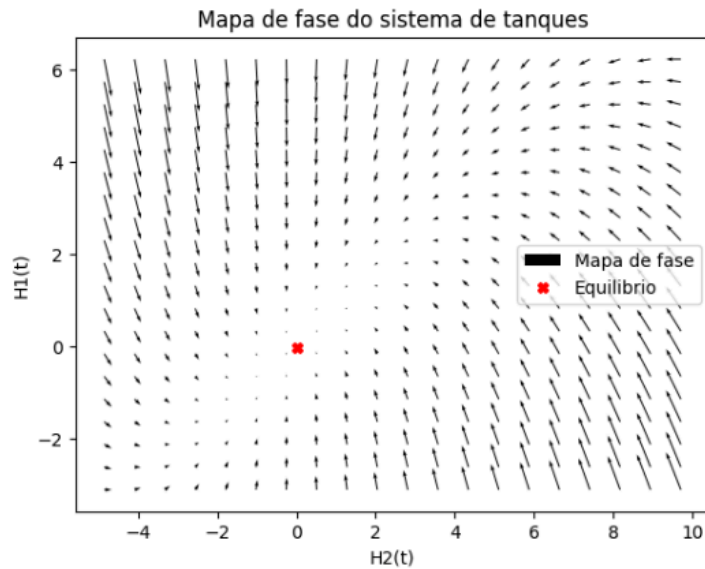


Figura 20: Mapa de Fase em desvio

No retrato de fase, as setas representam o campo vetorial associado às taxas de variação dos níveis de líquido nos tanques ao longo do tempo. O tamanho das setas é proporcional à velocidade de mudança dos níveis de água nos tanques. Setas maiores indicam uma variação mais rápida, enquanto setas menores indicam uma variação mais lenta. Ademais, a direção das setas indica o comportamento do sistema.

Como os autovalores possuem parte real negativa, as setas do mapa de fase convergem, esperado para um sistema estável. O ponto (0, 0) do mapa de fase, representa $H_2(t) = 4,85258397934363$ e $H_1(t) = 3,113027760553738$ no cenário real, que é o estado estacionário do sistema e o ponto de linearização.

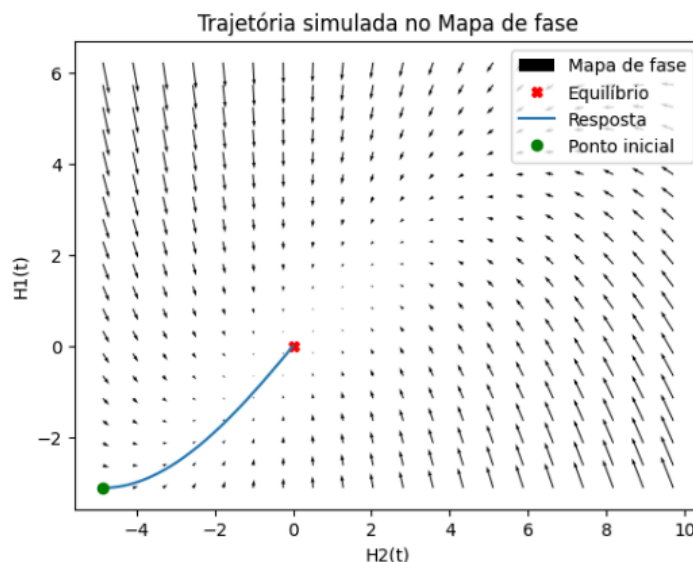


Figura 21: Simulação do sistema no mapa de fase

Na figura 21 é possível observar o comportamento do sistema durante a simulação, quando suas condições iniciais são $(-4,85258397934363; -3,113027760553738)$. Essas condições representam os dois tanques do cenário real saindo do zero e chegando ao estado estacionário.

3.5. ANÁLISE DE OBSERVABILIDADE E CONTROLABILIDADE

A partir das informações das matrizes A e B encontradas no tópico 3.3, foi realizado um algoritmo em Python, disponibilizado em anexo, que faz o processo matemático demonstrado nas equações 2 e 3 para encontrar os postos das matrizes. Na matriz de controlabilidade, o posto encontrado foi 2, o mesmo valor de estados do sistema, isso indica que o sistema é controlável. Essa mesma situação ocorreu na análise da observabilidade, sendo o posto da matriz de observabilidade encontrado também 2, o que demonstra que o sistema é também observável.

3.6. PROJETO DE OBSERVADOR DE ESTADOS

Para o projeto do observador, foi utilizado o modelo em espaço de estados encontrado ao longo do experimento e com base na teoria apresentada no tópico 1.7. Na simulação do observador com ação integral, foram obtidos os seguintes resultados:

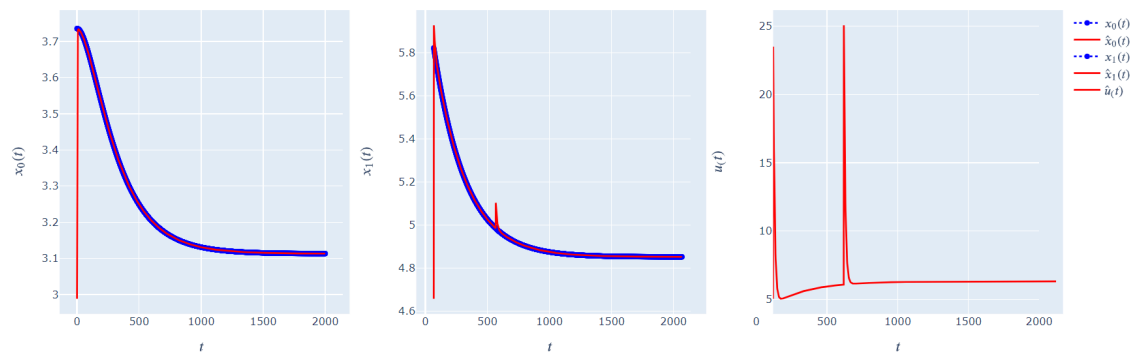


Figura 22: Simulação do observador de estados com ação integral

Em que $x_0(t)$ representa h_1 (nível do tanque 1) e $x_1(t)$ representa h_2 (nível do tanque 2). Percebe-se que para ambos os estados o estimador funcionou corretamente.

Após este primeiro teste do observador, foram utilizados os dados de h_1 , h_2 e F (vazão) coletados experimentalmente no cenário em que ambos os tanques foram enchidos simultaneamente, a fim de verificar, novamente, a eficácia do observador.

Vale ressaltar que, neste cenário em que os dados foram coletados, a vazão foi alterada diversas vezes até encontrar o estado estacionário do sistema. Dessa forma, a $F(vazão)$ não é constante, e teve que ser implementada no código como uma função no tempo. Segue o resultado:

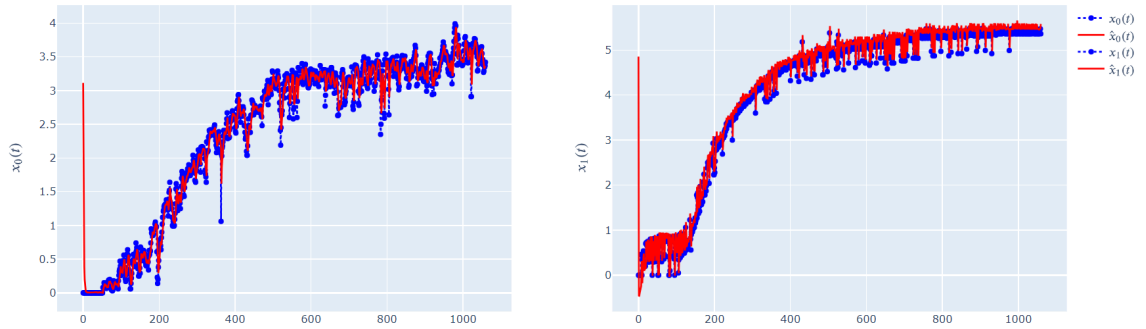


Figura 23: Simulação do observador de estados com os dados do experimento

Portanto, percebe-se que o projeto do observador com ação integral funcionou corretamente, estimando os estados neste cenário de maneira satisfatória.

Vale pontuar que em ambos os testes as condições iniciais do observador foram diferentes da condição inicial da planta. Ademais, os pólos escolhidos para estimação do ganho K do observador foram definidos para que o tempo de resposta do observador seja consideravelmente menor que o da planta.

3.7. PROJETO DO FILTRO DE KALMAN

Para o projeto do filtro de kalman, foi utilizado o modelo em espaço de estados encontrado ao longo do experimento e com base na teoria apresentada no tópico 1.4. Na simulação, aplicando um degrau de valor igual a 5.0, foram obtidos os seguintes resultados:

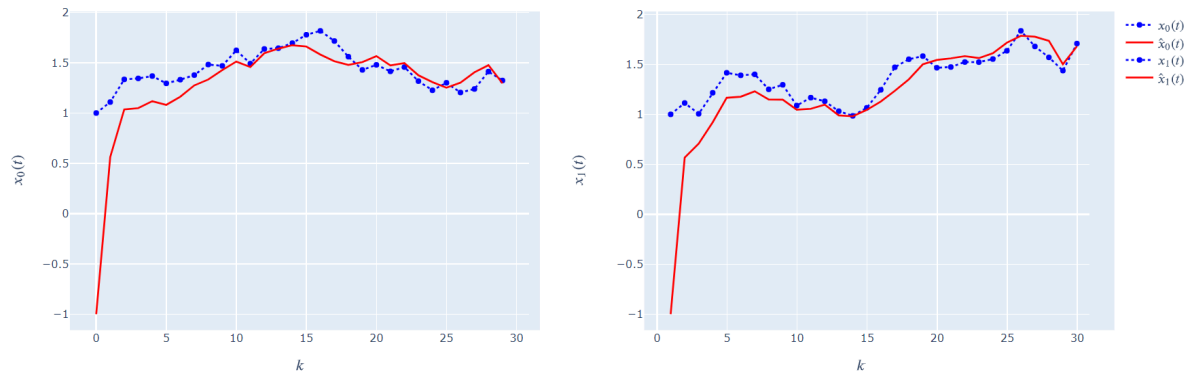


Figura 24: Simulação do filtro de Kalman com o modelo em resposta a uma entrada

Por fim, da mesma forma que foi testado o observador com ação integral, foram utilizados os dados coletados experimentalmente para simular o filtro de kalman, encontrando o seguinte resultado:

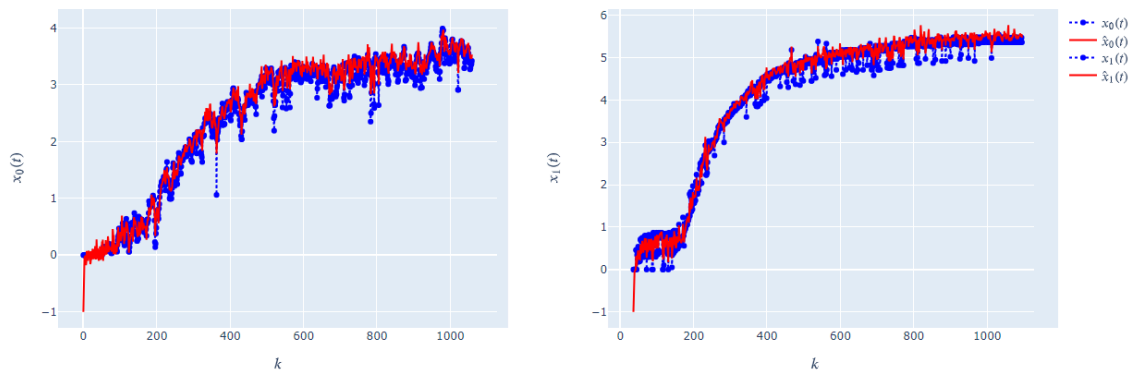


Figura 25: Simulação do filtro de Kalman com os dados coletados em resposta a uma entrada

O resultado obtido foi similar ao resultado do observador de estados do tópico anterior, porém, perceptivelmente, muito menos ruidoso.

4. CONCLUSÃO

O modelo estudado neste experimento, com os dois tanques acoplados verticalmente, é um modelo muito rico em possibilidades de desenvolvimento acadêmico e a partir dele ficou evidente a assertividade das ferramentas implementadas neste relatório. Foi possível observar todos os comportamentos físicos dos tanques e entender, com a ajuda de análise e ferramentas computacionais, o comportamento fenomenológico do sistema.

Nesta segunda etapa do relatório o foco era dar continuidade ao que foi feito no relatório 1 e implementar as ferramentas matemáticas para compreender mais a fundo sobre controlabilidade, observabilidade além de conseguir manipular os dados dos sinais para facilitar o entendimento, implementando o filtro de Kalman. Porém, para que isso fosse possível com uma maior assertividade, foi necessário realizar todos os passos do primeiro relatório, a fim de encontrar os melhores resultados possíveis.

Em conclusão, os resultados obtidos, tanto na primeira quanto na segunda etapa, justificam o esforço imposto para realização. Ficou evidenciado a importância do mapa de fases para o entendimento qualitativo do sistema, como estabilidade, ciclos limitantes, e pontos de equilíbrio. Além disso, o observador foi crucial para estimar os estados e a implementação do filtro melhorou os estados de saída estudados. Dito isso, considerando os resultados apresentados de forma satisfatória, o próximo passo é a implementação no kit para obter a validação dos métodos estudados neste relatório.

5. REFERÊNCIAS

Rohde, Leonardo Rosa. **Representação em espaço de estados para a flexibilidade de roteamento**. <https://www.scielo.br/j/gp/a/j4jWkYPVq4jp8twzPPKxKry/?lang=pt>

Almeida, M. C.; Garcia, A. V.; Asada, E. N. **Regularized Least Squares Power System State**

Dias, Letícia Leal. **Desenvolvimento de um reconciliador de dados dinâmico através da implementação de um filtro de Kalman estendido em uma torre desbutanizadora**. <https://pantheon.ufrj.br/handle/11422/16743>

Estimation. IEEE Transactions on Power Systems, Sep. 2011.

Demonstração da configuração do arduino. <https://fritzing.org/projects/readwrite-serial-eeprom-via-i2c>

Fontes, Raony Maia. **Material utilizado para obtenção dos resultados disponibilizados em sala de aula via ava/colab**.

6. ANEXOS

https://colab.research.google.com/drive/1dfUHByl5AN_1_m3YRFtl3yC0fEmvE-JW#scrollTo=JzGE3vy6eDhn

<https://colab.research.google.com/drive/1TD1Qp6IFJoUDSOa-Vu93jML-ZKwQUF74#scrollTo=p1znetWPI6sa>

<https://colab.research.google.com/drive/10hfaZJyXqrtNIFPFYPhYURftPsbQUzVD>

<https://colab.research.google.com/drive/1l49uvE0DXpllvJdqECrv72NaAbbjpxzk?authuser=1>

https://colab.research.google.com/drive/1FP_Q_x8FkfULf1XiU9s8vT4-kmBKjRQR?usp=sharing