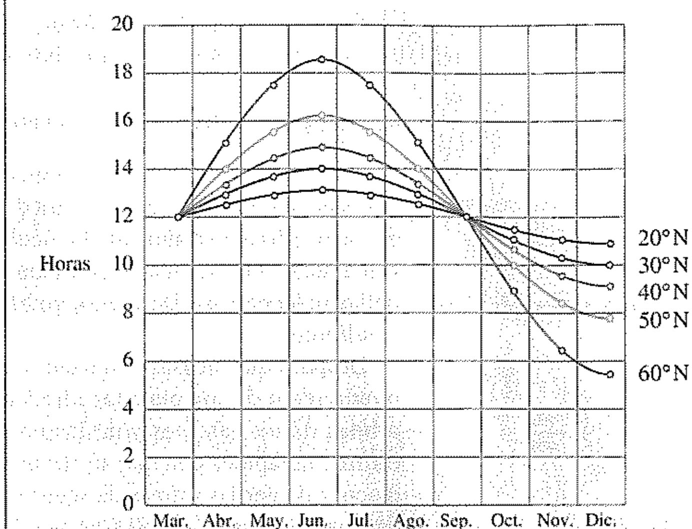
1

FUNCIONES Y MODELOS



Con frecuencia una representación gráfica de una función, en este caso la cantidad de horas con luz del Sol en función de la época del año en varias latitudes, es la manera más natural y conveniente de ilustrar la función.

El propósito fundamental del cálculo son las funciones. En este capítulo se prepara el camino para el cálculo al analizar las ideas básicas referentes a las funciones, sus gráficas y las maneras para transformarlas y combinarlas. Se hará hincapié en que una función se puede representar de diferentes modos: mediante una ecuación, en una tabla, con una gráfica o con palabras. Se considerarán los tipos principales de funciones que se presentan en el cálculo y se describirá el proceso de usarlas como modelos matemáticos de fenómenos del mundo real. También se expondrá el uso de las calculadoras graficadoras y del software para trazar gráficas.

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

A. El área A de un círculo depende del radio r del mismo. La regla que relaciona r con A se expresa mediante la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r existe asociado un valor de A, por lo que A es *función* de r.

Año	Población (en millones)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

B. La población humana del mundo, P, depende del tiempo t. En la tabla se dan estimaciones de la población del mundo, $P(t)$, en el tiempo t, para ciertos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor de tiempo t existe un valor de P correspondiente, por lo que P es una función de t.

C. El costo C de enviar por correo una carta de primera clase depende de su peso w. Aun cuando no existe una fórmula sencilla que relacione w con C, la oficina de correos tiene una regla parta determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a del suelo, según la mide un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido t. En la figura 1 se muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un valor dado de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.

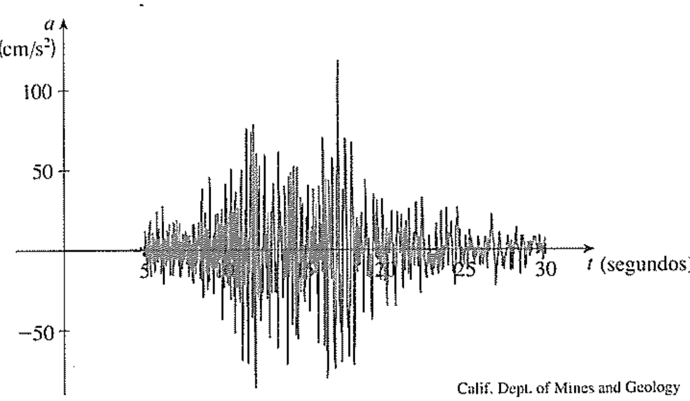


FIGURA 1
Aceleración vertical del suelo durante el terremoto de Northridge

En cada uno de estos ejemplos se describe una regla por la cual, dado un número (r, t, w o t), se asigna otro número (A, P, C o a). En cada caso, el segundo número es función del primero.

> Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Por lo común, se consideran funciones para las cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. El conjunto D se llama **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "f de x". El **intervalo** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *intervalo* de f se llama **variable dependiente**. En el ejemplo A, r es la variable independiente y A es la dependiente.

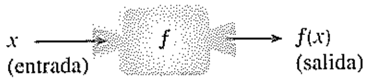


FIGURA 2
Diagrama de una máquina para una función f

Resulta útil concebir una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, por lo tanto cuando x entra en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, puede concebir el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el intervalo como el conjunto de todas las salidas posibles.

Las funciones preprogramadas de una calculadora son buenos ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, la tecla de raíz cuadrada en su calculadora calcula una de esas funciones. Usted oprime la tecla marcada como $\sqrt{\ }$ o $\sqrt{x}$ y registra la entrada x. Si $x < 0$, en tal caso x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable y la calculadora indicará un error. Si $x \geqslant 0$, en tal caso aparecerá una *aproximación* a $\sqrt{x}$ en la pantalla. Así, la tecla $\sqrt{x}$ de su calculadora no es exactamente lo mismo que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

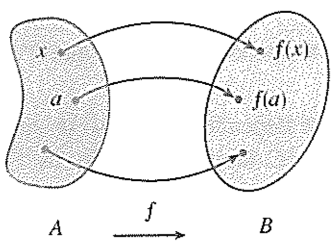


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

Otra manera de representar una función es un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha une un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ con a, y así sucesivamente.

El método más común para visualizar una función es su gráfica. Si f es una función con dominio D, después su **gráfica** es el conjunto de las parejas ordenadas

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que son parejas entrada-salida.) En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado, tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f da una imagen útil del comportamiento, o la "historia de la vida", de una función. Como la coordenada y de cualquier punto (x, y) de la gráfica es $y = f(x)$, es posible leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de esta última arriba del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f también permite tener una imagen del dominio de f sobre el eje x y su intervalo en el eje y como en la figura 5.

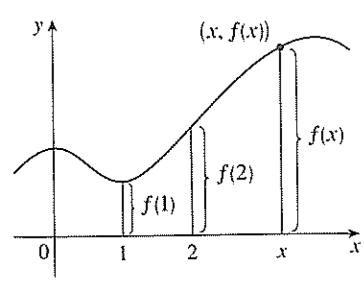


FIGURA 4

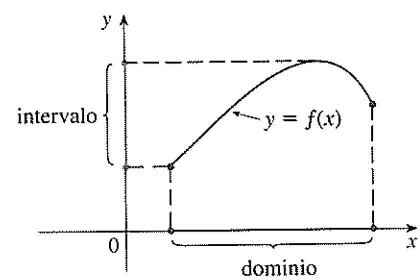


FIGURA 5

EJEMPLO 1 En la figura 6 se muestra la gráfica de una función f.
(a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.
(b) ¿Cuáles son el dominio y el intervalo de f?

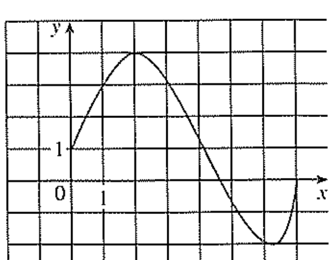


FIGURA 6

SOLUCIÓN
(a) En la figura 6 se ve que el punto $(1, 3)$ se encuentra sobre la gráfica de f, de modo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto de la gráfica que se encuentra arriba de $x = 1$ está tres unidades arriba del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra alrededor de 0.7 unidades debajo del eje x, por tanto, $f(5) \approx -0.7$

(b) $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, de modo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores desde -2 hasta 4, de manera que el intervalo de f es

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$ □

La notación para intervalos aparece en el apéndice A.

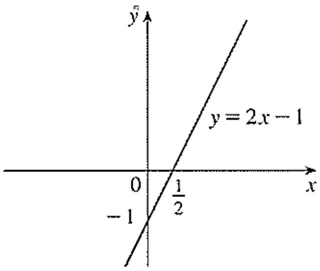


FIGURA 7

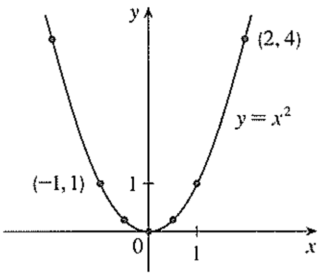


FIGURA 8

EJEMPLO 2 Trace una gráfica y encuentre el dominio y el intervalo de cada función.
(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN

(a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y esto se reconoce como la ecuación de una línea con pendiente 2 y ordenada al origen -1. (Recuerde la forma de pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta: $y = mx + b$. Véase apéndice B.) Esto permite trazar la gráfica de f de la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, de modo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, el cual se denota con $\mathbb{R}$. En la gráfica se muestra que el intervalo también es $\mathbb{R}$.

(b) Como $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podría dibujar los puntos $(2, 4)$ y $(-1, 1)$ junto con unos cuantos puntos más de la gráfica y unirlos para producir la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$, lo cual representa una parábola (véase el apéndice C). El dominio de g es $\mathbb{R}$. El intervalo de g consta de todos los valores de $g(x)$; es decir, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x y cualquier número positivo y es un cuadrado. De este modo, el intervalo de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto también se ve en la figura 8. □

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evaluar $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$

SOLUCIÓN Primero evalúe $f(a + h)$ sustituyendo x mediante $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 - 5(a + h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a + h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5\,a - h + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto al sustituir en la expresión que se proporciona y simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a - 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$ □

▪ La expresión

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

en el ejemplo 3 se le denomina un **cociente de diferencia** y habitualmente sucede en cálculo. Como verá en el capítulo 2, representa la relación de cambio promedio $f(x)$ entre $x = a$ y $x = a + h$

REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES

Se tienen cuatro maneras posibles para representar una función:

- Verbalmente (mediante una descripción en palabras)
- Numéricamente (con una tabla de valores)
- Visualmente (mediante una gráfica)
- Algebraicamente (por medio de una fórmula explícita)

Si una sola función se puede representar de las cuatro maneras, con frecuencia resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir un conocimiento adicional de esa función. (Por ejemplo, en el ejemplo 2 se empieza con fórmulas algebraicas y, a continuación, se obtuvieron las gráficas.) Pero ciertas funciones se describen de manera más natural con uno de los métodos que con otro. Con esto en mente, analice de nuevo las cuatro situaciones consideradas al principio de esta sección.

A. Quizá la representación más útil del área de un círculo como función de su radio sea la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores o trazar una gráfica (la mitad de una parábola). Como un círculo debe tener un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, y el intervalo también es $(0, \infty)$.

Año	Población (en millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

B. Se ha descrito verbalmente la función: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. La tabla de valores de la población mundial da una representación conveniente de esta función. Si coloca estos valores en una gráfica, obtendrá la gráfica (llamada *gráfica de dispersión*) de la figura 9. También es una representación útil; pues nos permite absorber todos los datos a la vez. ¿Qué hay acerca de una fórmula? Por supuesto, es imposible idear una fórmula explícita que dé la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible hallar una expresión para una función que proporcione una *aproximación de* $P(t)$. De hecho, con la aplicación de los métodos que se explican en la sección 1.2, se obtiene la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (0.008079266) \cdot (1.013731)^t$$

y en la figura 10 se ilustra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que da una aproximación para el comportamiento de la función dada. Sin embargo, verá que las ideas del cálculo se pueden aplicar a una tabla de valores; no se necesita una fórmula explícita.

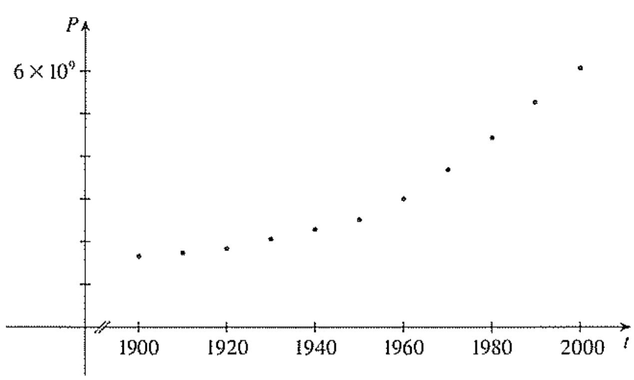


FIGURA 9

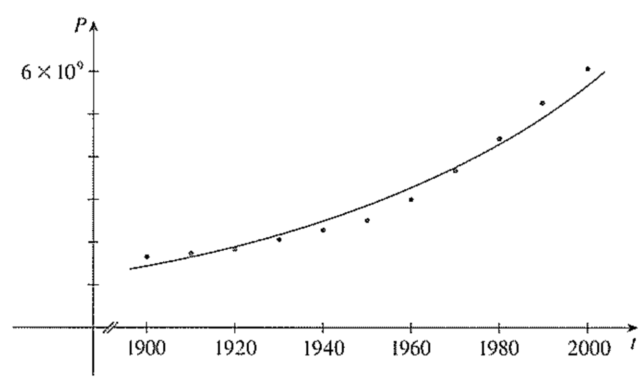


FIGURA 10

Una función definida por una tabla de valores se conoce como *función tabular*.

La función P es típica entre las funciones que surgen siempre que intenta aplicar el cálculo al mundo real. Empieza con una descripción verbal de la función. En seguida, es posible que sea capaz de construir una tabla de valores de la función, quizá a partir de lecturas de instrumentos en un experimento científico. Aun cuando no tenga el conocimiento completo de los valores de la función, a lo largo del libro verá que todavía es posible realizar las operaciones del cálculo en una función de ese tipo.

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.39
$1 < w \leq 2$	0.63
$2 < w \leq 3$	0.87
$3 < w \leq 4$	1.11
$4 < w \leq 5$	1.35
·	·
·	·
·	·
$12 < w \leq 13$	3.27

C. Una vez más, la función está descrita en palabras: $C(w)$ es el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w. La regla que en 1996 aplicaba el U.S. Postal Service (Servicio Postal de Estados Unidos) es la siguiente: el costo es de 39 centavos de dólar hasta por una onza, más 24 centavos por cada onza sucesiva, hasta 13 onzas. La tabla de valores que se muestra en el margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible trazar una gráfica (véase el ejemplo 10).

D. La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que se podría compilar una tabla de valores e incluso es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo, amplitudes y patrones, puede observarse con facilidad a partir de la gráfica. (Lo mismo se cumple para los patrones que se ven en los electrocardiogramas de los pacientes cardiacos y en los polígrafos para la detección de mentiras.)

En el ejemplo siguiente, se grafica una función definida verbalmente.

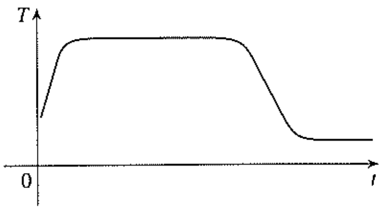


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Cuando abre un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. Trace una gráfica aproximada de T como función del tiempo t que ha transcurrido desde que se abrió el grifo.

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir la que se encuentra en el tanque de agua caliente, T aumenta con rapidez. En la fase siguiente, T es constante a la temperatura del agua calentada del tanque. Cuando éste se drena, T decrece hasta la temperatura de la fuente de agua. Esto permite realizar el boceto de gráfica de T como una función de t en la figura 11. □

El ejemplo que sigue, parte de una descripción verbal de una función, en una situación física, y se obtiene una fórmula algebraica explícita. La capacidad para llevar a cabo esto constituye una habilidad útil en los problemas de cálculo en los que se piden los valores máximo y mínimo de cantidades.

EJEMPLO 5 Un recipiente rectangular para almacenamiento, con su parte superior abierta, tiene un volumen de 10 m³. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado y el material para los lados, cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Exprese el costo del material como función del ancho de la base.

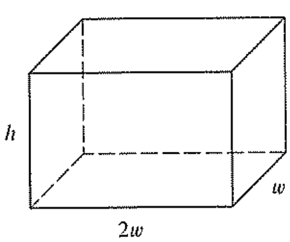


FIGURA 12

SOLUCIÓN Dibuje un diagrama como el de la figura 12 e introduzca la notación tomando w y $2w$ como el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h como la altura.

El área de la base es $(2w)w = 2w^2$, de modo que el costo, en dólares, del material para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen el área wh y el área de los otros dos es $2wh$, así el costo del material para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. En consecuencia el costo total es

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C como función sólo de w, necesita eliminar h, lo que sucede al aplicar el hecho de que el volumen es 10 m³. De este modo,

$$w(2w)h = 10$$

lo cual da
$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Si se sustituye esto en la expresión para C

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Por lo tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como función de w. □

■ Al establecer funciones de aplicación, como en el ejemplo 5, puede resultar útil repasar los principios para la resolución de problemas como se plantean en la página 76, en particular el paso 1: *comprender el problema*.

EJEMPLO 6 Encuentre el dominio de cada función.

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Si se da una función mediante una fórmula y no se da el dominio explícitamente, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

SOLUCIÓN

(a) Ya que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto es equivalente a $x \geqslant -2$, de modo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Dado que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

y la división entre 0 no está permitida, $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

lo cual también podría escribirse, con la notación de intervalos, como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

□

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la cuestión: ¿cuáles curvas en el plano xy son gráficas de funciones? La siguiente prueba responde lo anterior.

PRUEBA DE LA LÍNEA VERTICAL Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si ninguna línea vertical se interseca con la curva más de una vez.

En la figura 13 se puede ver la razón de la veracidad de la prueba de la línea vertical. Si cada línea vertical $x = a$ interseca una curva sólo una vez, en (a, b), por lo tanto se define exactamente un valor funcional mediante $f(a) = b$. Pero si una línea $x = a$ se interseca con la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), en tal caso la curva no puede representar una función, porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

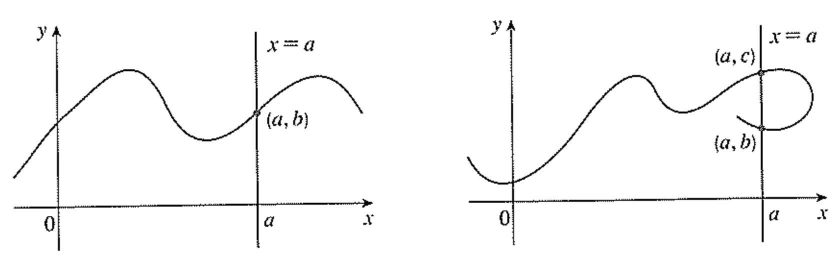


FIGURA 13

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que aparece en la figura 14(a) en la página que sigue no es la gráfica de una función de x porque, como el lector puede ver, existen líneas verticales que intersecan dos veces esa parábola. Sin embargo, la parábola en realidad contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Observe que $x = y^2 - 2$ significa $y^2 = x + 2$, por lo que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Por esto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 2}$ [del ejemplo 6(a)] y $g(x) = -\sqrt{x + 2}$ [véase las figuras 14(b) y (c)]. Observe que, si invierte los papeles de x y y, en tal caso la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ define x como función de y (con y como la variable independiente y x como dependiente) y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función h.

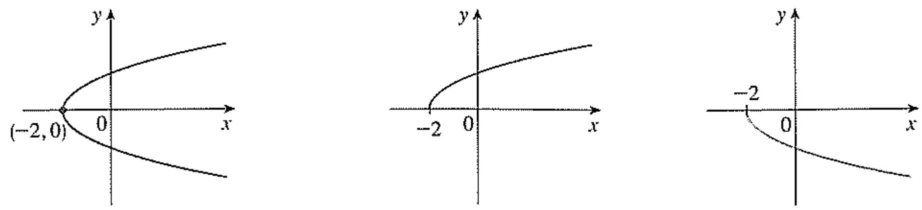


FIGURA 14 (a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

FUNCIONES SECCIONALMENTE DEFINIDAS

Las funciones de los cuatro ejemplos siguientes están definidas por fórmulas diferentes en diferentes partes de sus dominios.

EJEMPLO 7 Una función f se define por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Evalúe $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función en particular, la regla es: primero se considera el valor de la entrada x. Si sucede que $x \leqslant 1$, en tal caso el valor de $f(x)$ es $1 - x$. Por otra parte, si $x > 1$, después el valor de $f(x)$ es x^2.

$$\text{Como } 0 \leqslant 1, \text{ tenemos } f(0) = 1 - 0 = 1.$$
$$\text{Como } 1 \leqslant 1, \text{ tenemos } f(1) = 1 - 1 = 0.$$
$$\text{Como } 2 > 1, \text{ tenemos } f(2) = 2^2 = 4.$$

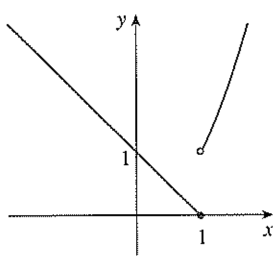


FIGURA 15

¿Cómo dibujar la gráfica de f? Observe que, si $x \leqslant 1$, por lo tanto $f(x) = 1 - x$ de modo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de la línea vertical $x = 1$ debe coincidir con la línea $y = 1 - x$, la cual tiene la pendiente -1 y 1 como ordenada al origen. Si $x > 1$, después $f(x) = x^2$, por lo que la parte de la gráfica de f que está a la derecha de la línea $x = 1$ tiene que coincidir con la gráfica de $y = x^2$, la cual es una parábola. Esto permite trazar la gráfica de la figura 15. El punto relleno indica que el punto $(1, 0)$ está incluido en la gráfica; el punto hueco indica que el punto $(1, 1)$ está fuera de la gráfica. □

El ejemplo siguiente de una función seccionalmente definida es la función valor absoluto. Recuerde que el **valor absoluto** de un número a, denotado con $|a|$, es la distancia de a hasta 0, sobre la recta de los números reales. Las distancias siempre son positivas o 0; de tal manera

> Para un repaso más extenso de los valores absolutos, véase el apéndice A.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general,

$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a & \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a & \text{si } a < 0 \end{aligned}}$$

(Recuerde que si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.)

EJEMPLO 8 Trace la gráfica de la función valor absoluto, $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN Con base en el análisis precedente, sabe que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Al aplicar el método del ejemplo 7, la gráfica de f coincide con la línea $y = x$, a la derecha del eje y, y coincide con la línea $y = -x$, a la izquierda del eje y (véase la figura 16). □

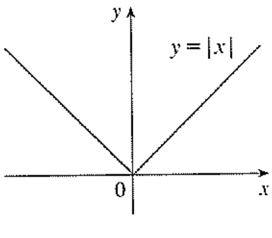


FIGURA 16

EJEMPLO 9 Encuentre una fórmula para la función f que se dibuja en la figura 17.

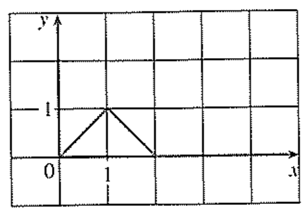


FIGURA 17

SOLUCIÓN La línea que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$ tiene pendiente $m = 1$ y su ordenada al origen es $b = 0$, de forma que su ecuación es $y = x$. Por esto, para la parte de la gráfica de f que une $(0, 0)$ con $(1, 1)$,

$$f(x) = x \qquad \text{si} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

véase el apéndice B.

La línea que pasa por $(1, 1)$ y $(2, 0)$ tiene pendiente $m = -1$, de suerte que su forma punto-pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{o} \qquad y = 2 - x$$

De tal manera que

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{si} \qquad 1 < x \leqslant 2$$

Observe también que, para $x > 2$, la gráfica de f coincide con el eje x. Si reúne esta información, tiene la fórmula siguiente para f, en tres secciones:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

□

EJEMPLO 10 En el ejemplo C del principio de esta sección, se consideró el costo $C(w)$ de enviar por correo una carta de primera clase con peso w. En realidad, ésta es una función seccionalmente definida porque, a partir de la tabla de valores, se tiene

$$C(w) = \begin{cases} 0.39 & \text{si } 0 < w \leqslant 1 \\ 0.63 & \text{si } 1 < w \leqslant 2 \\ 0.87 & \text{si } 2 < w \leqslant 3 \\ 1.11 & \text{si } 3 < w \leqslant 4 \\ \vdots & \end{cases}$$

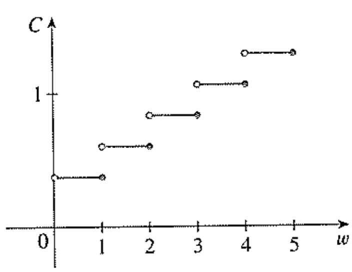


FIGURA 18

La gráfica se muestra en la figura 18. Usted puede ver por qué a las funciones semejantes a ésta se les llama **función escalón**: saltan de un valor al siguiente. En el capítulo 2 se estudiarán esas funciones. □

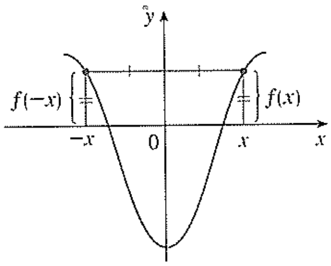


FIGURA 19
Una función par

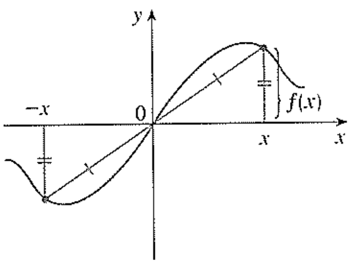


FIGURA 20
Una función impar

SIMETRÍA

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$, para todo número x en su dominio, en tal caso f se denomina **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase la figura 19). Esto significa que si traza la gráfica de f para $x \geqslant 0$, obtiene toda la gráfica con sólo reflejar esta porción con respecto al eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$, para todo número x en su dominio, en seguida f se conoce como **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen (véase la figura 20). Si ya tiene la gráfica de f para $x \geqslant 0$, puede obtener la gráfica entera al hacerla girar 180° alrededor del origen.

EJEMPLO 11 Determine si cada una de las funciones siguientes es par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

En consecuencia, f es una función impar.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

De modo que g es par.

(c)
$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Dado que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar. □

En la figura 21 se muestran las gráficas de las funciones del ejemplo 11. Observe que la gráfica de h no es simétrica respecto al eje y ni respecto al origen.

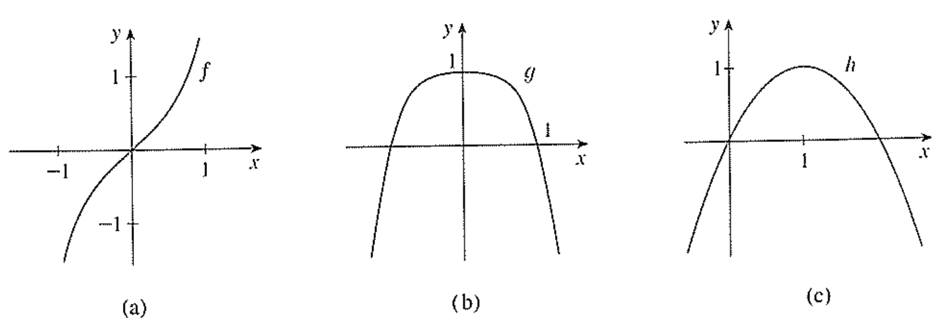


FIGURA 21

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

La gráfica que se muestra en la figura 22 sube desde A hasta B, desciende desde B hasta C, y vuelve a subir desde C hasta D. Se dice que la función f está creciendo sobre el intervalo $[a, b]$, decreciendo sobre $[b, c]$, y creciendo de nuevo sobre $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera entre a y b, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Use esto como la propiedad que define una función creciente.

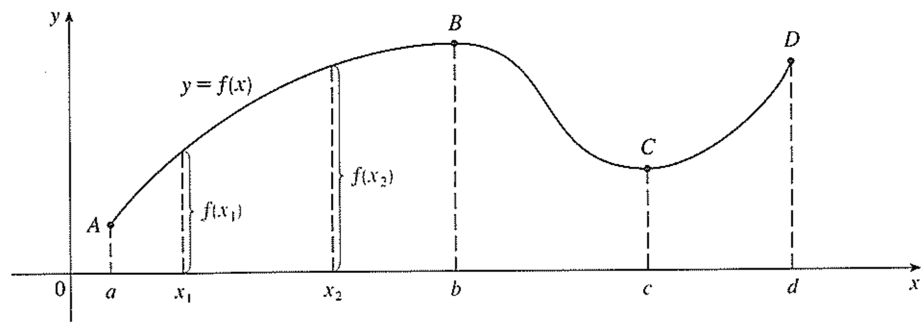


FIGURA 22

Se dice que una función f es **creciente** sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se dice que es **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

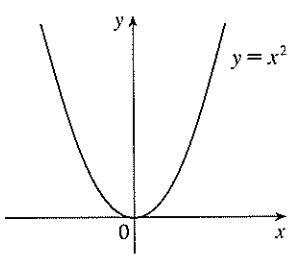


FIGURA 23

En la definición de función creciente es importante darse cuenta que se debe satisfacer la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ para *toda* pareja de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.

A partir de la figura 23 es posible observar que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

1.1 EJERCICIOS

1. Se da la gráfica de una función f.

(a) Establezca el valor de $f(-1)$.

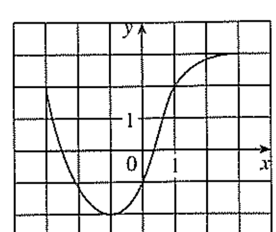
(b) Estime el valor de $f(2)$.

(c) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = 2$?

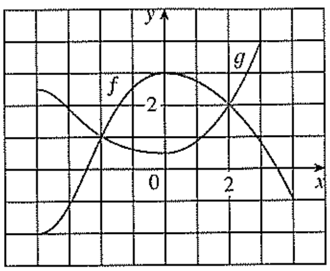
(d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.

(e) Establezca el dominio y el intervalo de f.

(f) ¿En qué intervalo es f creciente?



2. Se proporcionan las gráficas de f y g.
(a) Dé los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
(b) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = g(x)$?
(c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.
(d) ¿En qué intervalo f es decreciente?
(e) Dé el dominio y el intervalo de f.
(f) Dé el dominio y el intervalo de g.

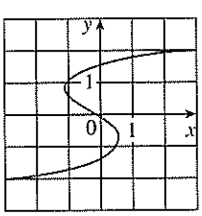


3. Un instrumento operado por el Departamento de Minas y Geología en el Hospital Universitario de la Universidad del Sur de California (USC) en Los Ángeles, registró la figura 1. Úsela para estimar el intervalo de la funcion aceleración vertical del suelo, en la USC durante el terremoto de Northridge.

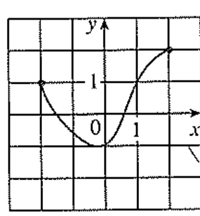
4. En esta sección se analizaron ejemplos de funciones, cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo del porte de correos es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. Dé otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describan verbalmente. ¿Qué puede decir acerca del dominio y del intervalo de cada una de sus funciones? Si es posible, trace una gráfica aproximada de cada función.

5–8 Determine si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, dé el dominio y el intervalo de la función.

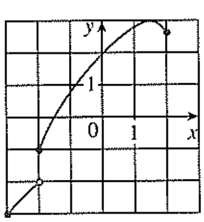
5.



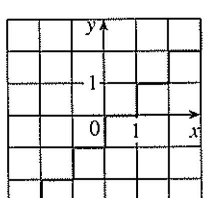
6.



7.

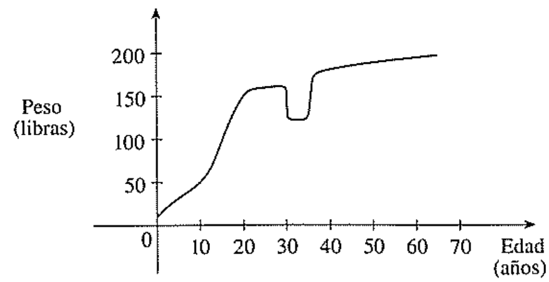


8.

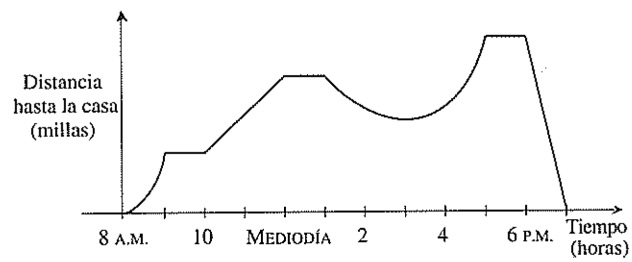


---

9. La gráfica que se muestra da el peso de cierta persona como una función de la edad. Describa con palabras la manera en que varía el peso de esta persona a lo largo del tiempo. ¿Qué piensa el lector que sucedió cuando esta persona tenía 30 años?



10. La gráfica que se muestra da la distancia a la que se encuentra un vendedor de su casa como función del tiempo en cierto día. Describa con palabras lo que la gráfica indica con respecto al recorrido del vendedor en este día.



11. Usted pone algunos cubos de hielo en un vaso, lo llena con agua fría y lo deja sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo. Después, trace una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

12. Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz del día como función de la época del año.

13. Trace una gráfica aproximada de la temperatura exterior como función del tiempo durante un día típico de primavera.

14. Dibuje una gráfica aproximada del valor en el mercado, por un periodo de 20 años de un automóvil nuevo. Considere que se le da buen mantenimiento.

15. Dibuje la gráfica de la cantidad de una marca particular de café vendida por una tienda como una función del precio del café.

16. Usted coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. Luego, lo saca y lo deja enfriar, antes de comerlo. Describa cómo cambia la temperatura del pastel conforme pasa el tiempo. Después, trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

17. El propietario de una casa corta el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo durante un periodo de cuatro semanas.

18. Un avión sale de un aeropuerto y aterriza, una hora más tarde, en otro aeropuerto que se encuentra a 400 millas de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado la terminal, sea $x(t)$ la distancia horizontal recorrida y $y(t)$ la altitud del avión. Trace.

(a) Una gráfica posible de $x(t)$.
(b) Una gráfica posible de $y(t)$.
(c) Una gráfica posible de la rapidez con respecto al suelo.
(d) Una gráfica posible de la velocidad vertical.

19. En la tabla se exhibe el número N (en millones) de usuarios de telefonos celulares en el mundo. (Se proporcionan estimaciones semestrales).

t	1990	1992	1994	1996	1998	2000
N	11	26	60	160	340	650

(a) Mediante los datos trace una gráfica de N en función de t.
(b) Utilice la gráfica para estimar la cantidad de usuarios de teléfono celular a mediados de año en 1995 y 1999.

20. El 2 de junio de 2001 se tomaron lecturas de temperatura T (en °F) cada dos horas desde la medianoche hasta las 2:00 P.M. El tiempo t se midió en horas a partir de la medianoche.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

(a) Utilice las lecturas para trazar una gráfica aproximada de T como una función de t.
(b) Utilice la gráfica que trazó para estimar la temperatura a las 11:00 A.M.

21. Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encuentre $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a + 1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ y $f(a + h)$.

22. Un globo esférico con radio de r pulgadas tiene el volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire que se requiere para inflarlo desde un radio de r pulgadas hasta otro de $r + 1$ pulgadas.

23–26 Valorar el cociente de diferencia para la función que se proporciona. Simplifique su respuesta.

23. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\quad \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$

24. $f(x) = x^3$, $\quad \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

26. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x + 1}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

27–31 Encuentre el dominio de la función.

27. $f(x) = \dfrac{x}{3x - 1}$

28. $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

29. $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$

30. $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4 - u}$

31. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

28. Encuentre el dominio, el intervalo y trace la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

33–44 Encuentre el dominio y trace la gráfica de la función.

33. $f(x) = 5$

34. $F(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$

35. $f(t) = t^2 - 6t$

36. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

37. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

38. $F(x) = |2x + 1|$

39. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

40. $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

41. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{si } x < -3 \\ -2x & \text{si } |x| \leqslant 3 \\ -6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

45–50 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

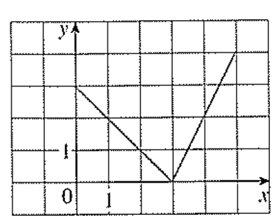
45. El segmento rectilíneo que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$

46. El segmento rectilíneo que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$

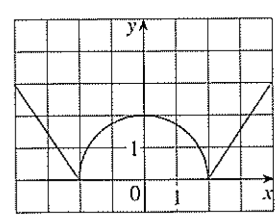
47. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$

48. La mitad superior del círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

49.



50.



51–55 Encuentre una fórmula para la función descrita y dé su dominio.

51. Un rectángulo tiene un perímetro de 20 m. Exprese el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

52. Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Exprese su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.

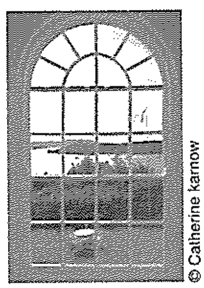
53. Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de los lados.

54. Exprese el área superficial de un cubo como función de su volumen.

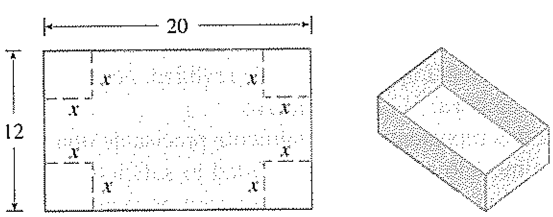
55. Una caja rectangular abierta, con volumen de 2 m^3, tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja como función de la longitud de uno de los lados de la base.

---

56. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, exprese el área A de ella como función del ancho x de la misma.



57. Debe construirse una caja con su parte superior abierta a partir de un trozo rectangular de cartón que tiene las dimensiones de 12 pulgadas por 20 pulgadas, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y, a continuación, doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja como función de x.



58. Una compañía de taxis cobra dos dólares por la primera milla (o parte de una milla) y 20 centavos de dólar por cada décimo de milla (o parte) subsiguiente. Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como función de la distancia x recorrida (en millas), para $0 < x < 2$, y dibuje la gráfica de esta función.

59. En cierto país, el impuesto sobre la renta se evalúa como se indica a continuación. No se paga impuesto sobre ingresos hasta de 10 000 dólares. Cualquier ingreso superior a 10 000 dólares paga un impuesto del 10% del mismo, hasta un ingreso de 20 000 dólares. Cualquier ingreso superior a 20 000 dólares paga impuesto con una tasa del 15%.

(a) Trace la gráfica de la tasa R de impuesto como función del ingreso I.

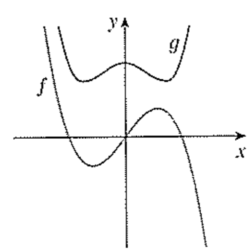
(b) ¿Cuál impuesto corresponde a un ingreso de 14 000 dólares y a otro de 26 000 dólares?

(c) Trace la gráfica del impuesto total correspondiente T como función del ingreso I.

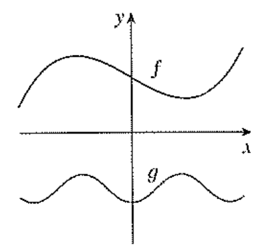
60. Las funciones del ejemplo 10 y de los ejercicios 58 y 59(a) se conocen como *funciones escalones* porque sus gráficas parecen escaleras. Dé otros dos ejemplos de funciones escalones que surjan en la vida cotidiana.

61–62 Se muestran las gráficas de f y g. Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

61.



62.



---

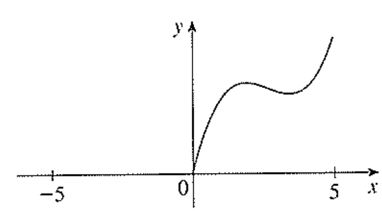
63. (a) Si el punto (5, 3) está sobre la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto también debe estar sobre la gráfica?

(b) Si el punto (5, 3) está sobre la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto también debe estar sobre la gráfica?

64. Una función f tiene el dominio $[-5, 5]$ y se muestra una parte de su gráfica.

(a) Complete la gráfica de f si se sabe que ésta es par.

(b) Complete la gráfica de f si se sabe que ésta es impar.



65–70 Determine si f es par, impar o ni par ni impar. Si tiene una calculadora graficadora, úsela para verificar de manera visual su respuesta

65. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

66. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

67. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

68. $f(x) = x|x|$

69. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

70. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

1.2 MODELOS MATEMÁTICOS: UN CATÁLOGO DE FUNCIONES BÁSICAS

Un **modelo matemático** es una descripción matemática (con frecuencia mediante una función o una ecuación), de un fenómeno del mundo real, como por ejemplo el tamaño de una población, la demanda por un producto, la rapidez de caída de un objeto, la concentración de un producto en una reacción química, la expectativa de vida de una persona cuando nace o el costo de la reducción de emisiones. El propósito de este modelo es entender el fenómeno y quizá hacer predicciones con respecto al comportamiento futuro.

La figura 1 ilustra el proceso del modelado matemático. Una vez que se especifica un problema del mundo real, la primera tarea consiste en formular un modelo matemático identificando y dándole un nombre a las variables independientes y dependientes, así como hacer supuestos que simplifiquen, lo suficiente, el fenómeno como para hacer que sea susceptible de rastrearse en forma matemática. Utilice su conocimiento acerca de la situación física y sus habilidades matemáticas para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En aquellas situaciones en las que no existen leyes físicas que lo guíen, tal vez necesite recabar información (ya sea de una biblioteca o de la Internet o llevando a cabo sus propios experimentos) y analizarlos en forma de tabla con objeto de discernir patrones. A partir de esta representación numérica quizá desee obtener una representación gráfica por medio del dibujo de los datos. En algunos casos, la gráfica puede hasta sugerir una forma algebraica adecuada.

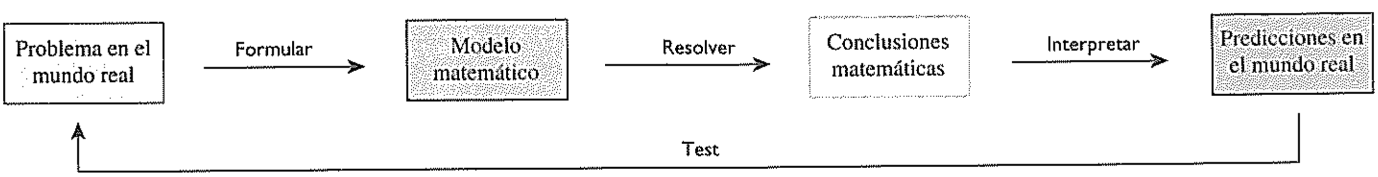


FIGURA 1 El proceso del modelado

La segunda etapa es aplicar las matemáticas que conoce (como por ejemplo el cálculo que se desarrollará en todas las partes de este libro) al modelo matemático formulado con el fin de deducir conclusiones matemáticas. Después, en la tercera etapa, tome esas conclusiones matemáticas e interprételas como información acerca del fenómeno original del mundo real por medio de ofrecer explicaciones o hacer predicciones. La etapa final es probar las predicciones que formuló verificándolas contra datos nuevos relativos al mundo real. Si las predicciones no se comparan de manera apropiada con la realidad, necesita afinar su modelo o bien formular uno nuevo y empezar el ciclo de nuevo.

Un modelo matemático nunca es una representación totalmente precisa de una situación física, es una *idealización*. Un buen modelo simplifica la realidad lo suficiente como para permitir cálculos matemáticos pero es lo suficientemente preciso para proveer conclusiones valiosas. Es importante darse cuenta de los límites del modelo. En última instancia, la madre naturaleza tiene la última palabra.

Existen muchos tipos diferentes de funciones que pueden usarse para modelar correspondencias que se observan en el mundo real. En las secciones subsecuentes, analizará el comportamiento y las gráficas de estas funciones y atenderá ejemplos de situaciones modeladas en forma apropiada por medio de esas funciones.

MODELOS LINEALES

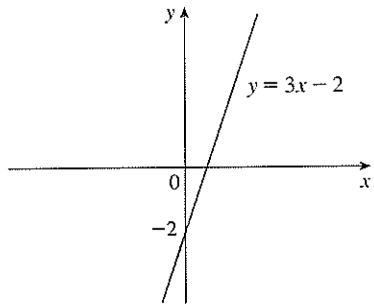
■ En el apéndice B se repasa la geometría analítica de las rectas.

Cuando dice que y es una **función lineal** de x, lo que quiere dar a entender es que la gráfica de la función es una recta, de tal manera puede usar la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta para escribir una fórmula para la función como

$$y = f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la coordenada al origen y.

Una característica representativa de las funciones lineales es que crecen en una proporción constante. La figura 2, por ejemplo, presenta una gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ y una tabla de valores muestra. Observe que siempre que x aumenta en 0.1, el valor de $f(x)$ se incrementa en 0.3. Por eso $f(x)$ se incrementa tres veces tan rápido como x. De este modo la pendiente de la gráfica $y = 3x - 2$, en este caso 3, puede interpretarse como la relación de cambio de y con respecto a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FIGURA 2

EJEMPLO 1

(a) A medida que el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es 20°C y la temperatura a la altura de 1 km es 10°C, exprese la temperatura T (en °C) como una función de la altura h (en kilómetros) suponiendo que es un modelo lineal adecuado.

(b) Trace la gráfica de la función del inciso (a). ¿Qué representa la pendiente?

(c) ¿Cuál es la temperatura a una altura de 2.5 km?

SOLUCIÓN

(a) Como supone que T es una función lineal de h, puede escribir

$$T = mh + b$$

Se dice que $T = 20$ cuando $h = 0$, así

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

En otras palabras, la ordenada al origen y es $b = 20$.

Además, $T = 10$ cuando $h = 1$, de modo que

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

Por lo tanto la pendiente de la recta es $m = 10 - 20 = -10$ y la función lineal requerida es

$$T = -10h + 20$$

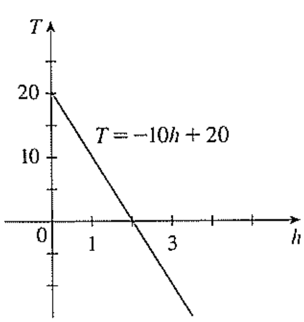


FIGURA 3

(b) La gráfica se traza en la figura 3. La pendiente es $m = -10$°C/km, y esto representa la relación de cambio de temperatura con respecto a la altura.

(c) A una altura $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -5°\text{C}$$

Si no existe una ley física o un principio que ayude a formular un modelo, se construye un **modelo empírico**, el cual se basa por completo en la información recabada. Se busca una curva que "coincida" con los datos en el sentido de que capte la tendencia fundamental de los puntos de los datos.

EJEMPLO 2 En la tabla 1 se enumera el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el observatorio Mauna Loa de 1980 a 2002. Use la información que en ella aparece para encontrar un modelo para el nivel de dióxido de carbono.

SOLUCIÓN Use los datos que aparecen en la tabla 1 para trazar la gráfica de dispersión que se muestra en la figura 4, donde t representa el tiempo (en años) y C el nivel de CO_2 (en partes por millón, ppm)

TABLA 1

Año	Nivel de CO_2 (en ppm)	Año	Nivel de CO_2 (en ppm)
1980	338.7	1992	356.4
1982	341.1	1994	358.9
1984	344.4	1996	362.6
1986	347.2	1998	366.6
1988	351.5	2000	369.4
1990	354.2	2002	372.9

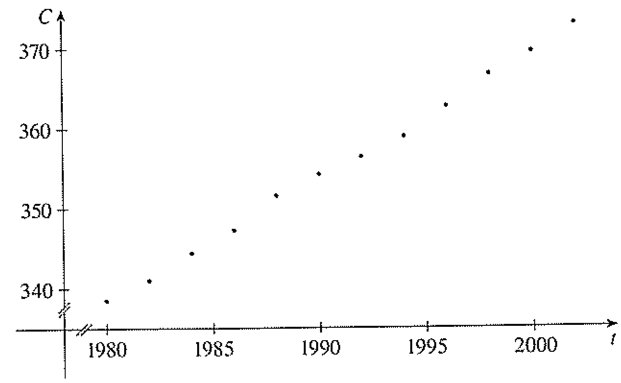


FIGURA 4 Gráfica de dispersión para el nivel de CO_2

Observe que al parecer los puntos correspondientes a la información se encuentran cerca de una recta, por tanto es natural que en este caso se elija un modelo lineal. Pero existen numerosas rectas posibles que se aproximan a estos puntos de información, por eso ¿cuál debe escoger? A partir de la gráfica, la línea que pasa por el primero y el último puntos de información parece ser una posibilidad. La pendiente de esta recta es

$$\frac{372.9 - 338.7}{2002 - 1980} = \frac{34.2}{22} = 1.5545$$

y su ecuación es

$$C - 338.7 = 1.5545(t - 1980)$$

o bien

$$\boxed{1} \qquad C = 1.5545t - 2739.21$$

La ecuación 1 proporciona un modelo lineal posible para el nivel de dióxido de carbono; se grafica en la figura 5.

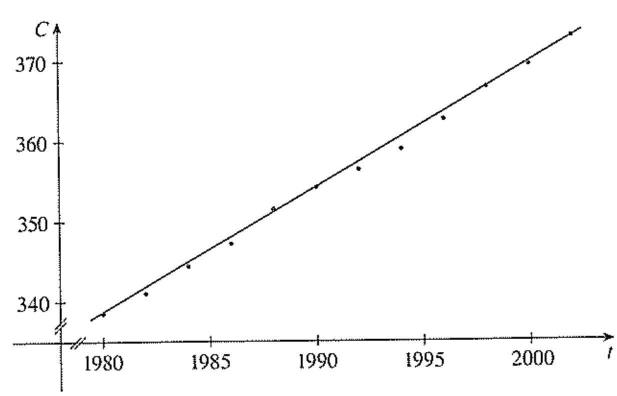


FIGURA 5 Modelo lineal a través del primero y último puntos de información

Si bien el modelo coincide razonablemente bien con la información, da puntos más altos que la mayor parte de los niveles reales de CO_2. Por medio de un procedimiento

Una computadora o una calculadora graficadora encuentra la recta de regresión por medio del método de **mínimos cuadrados**, el cual consiste en reducir al mínimo la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos correspondientes a datos y la recta. En la sección 14.7 se explican detalles de lo anterior.

de estadística conocido como *regresión lineal*, se obtiene un mejor modelo lineal. Si utiliza una calculadora graficadora, registre los datos de la tabla 1 en el editor de datos y elija el comando de regresión lineal. (Con Maple use el comando Fit [least square] en el paquete de estadística; con Mathematica utilice el comando Fit). La máquina da la pendiente y la ordenada al origen y de la recta de regresión como

$$m = 1.55192 \qquad b = -2734.55$$

De esta manera nuestro modelo de mínimos cuadrados para el nivel de CO_2 es

$$\boxed{2} \qquad C = 1.55192t - 2734.55$$

En la figura 6 aparece la gráfica de la recta de regresión así como los puntos de información. Al compararla con la figura 5 se observa que da una mejor coincidencia que nuestro modelo lineal anterior.

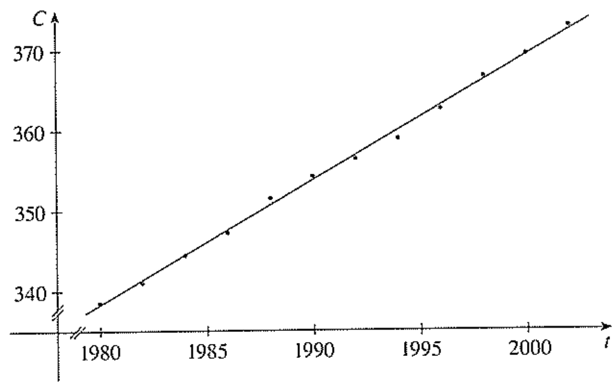


FIGURA 6
La recta de regresión

□

EJEMPLO 3 Use el modelo lineal que proporciona la ecuación 2 para estimar el nivel promedio de CO_2 correspondiente al año 1987 y predecir el nivel para el 2010. Según este modelo, ¿cuándo excederá el nivel de CO_2 las 400 partes por millón?

SOLUCIÓN Mediante la ecuación 2 con $t = 1987$, se estima que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue

$$C(1987) = (1.55192)(1987) - 2734.55 \approx 349.12$$

Esto es un ejemplo de *interpolación* porque ha estimado un valor *entre* valores observados. (De hecho, el observatorio Mauna Loa informó que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue 348.93 ppm, de igual manera su estimado es bastante preciso.)

Con $t = 2010$, obtiene

$$C(2010) = (1.55192)(2010) - 2734.55 \approx 384.81$$

De modo que se predice que el nivel promedio de CO_2 en el año 2010 será 384.8 ppm. Esto es un ejemplo de *extrapolación* porque pronosticó un valor *fuera* de la región de las observaciones. Por consecuencia, está mucho menos seguro acerca de la exactitud de su predicción.

Al usar la ecuación 2, observe que el nivel de CO_2 excede las 400 ppm cuando

$$1.55192t - 2734.55 > 400$$

Al resolver esta desigualdad tiene

$$t > \frac{3134.55}{1.55192} \approx 2019.79$$

En consecuencia, se pronostica que el nivel de CO_2 excederá de 400 ppm hacia el año 2020. Esta predicción es riesgosa hasta cierto punto porque implica un momento bastante remoto con respecto a sus observaciones. □

POLINOMIOS

A una función P se le lama **polinomio** si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes que se conocen como **coeficientes** del polinomio. El dominio de cualquier polinomio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el **grado** del polinomio es n. Por ejemplo, la función

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

es un polinomio de grado 6.

Un polinomio de grado 1 tiene la forma $P(x) = mx + b$ y de este modo es una función lineal. Un polinomio de grado 2 tiene la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ se le llama **función cuadrática**. Su gráfica es siempre una parábola que se obtiene, como verá en la sección siguiente, al cambiar la parábola $y = ax^2$. La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. (Véase la figura 7.)

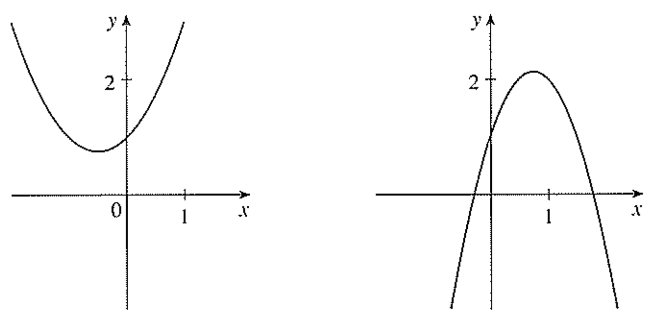


FIGURA 7
Las gráficas de las funciones cuadráticas son parábolas.

(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

Un polinomio de grado 3 tiene la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

y se le da el nombre de **función cúbica**. La figura 8 muestra la gráfica de una función cúbica en la parte (a) y gráficas de polinomios de grados 4 y 5 en las partes (b) y (c). Más adelante verá por qué las gráficas tienen las formas que se ilustran a continuación.

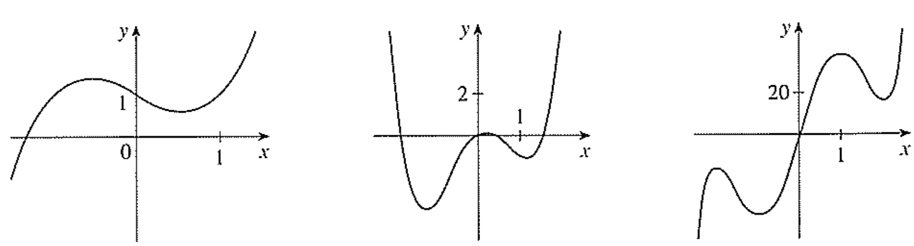


FIGURA 8 (a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

Usualmente los polinomios se utilizan para modelar diversas cantidades que se suscitan en las ciencias naturales y sociales. En la sección 3.7, por ejemplo, se explica por qué los economistas suelen usar un polinomio $P(x)$ para representar el costo de producir x unidades de una mercancía. El ejemplo siguiente usa una fórmula cuadrática para modelar la caída de una pelota.

TABLA 2

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EJEMPLO 4 Desde la plataforma superior de observación de la torre CN, a 450 m sobre el nivel, se deja caer una pelota y en la tabla 2 se registra su altura h del suelo sobre el nivel a intervalos de un segundo. Encuentre un modelo que coincida con la información y úselo para predecir el tiempo en que la pelota toca el suelo.

SOLUCIÓN En la figura 9 se traza una gráfica de dispersión de la información y se observa que no es adecuada una gráfica lineal. Pero parece ser que quizás los puntos de información se encuentren sobre una parábola, de este modo se hace la prueba con un modelo cuadrático. Al utilizar una calculadora graficadora o una computadora provista de sistema algebraico (que utiliza el método de mínimos cuadrados), se obtiene el modelo cuadrático siguiente:

$$\boxed{3} \qquad h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2$$

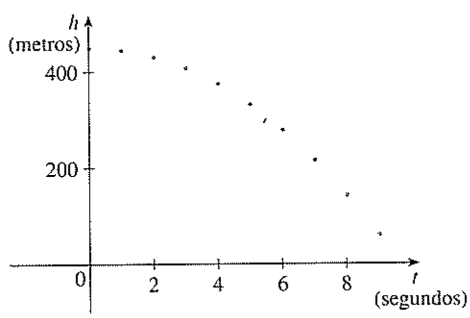


FIGURA 9
Diagrama de dispersión para una pelota que cae

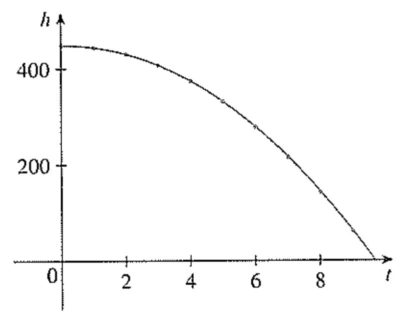


FIGURA 10
Modelo cuadrático para una pelota que cae

En la figura 10 se traza la gráfica de la ecuación 3 con los puntos de información y se observa que el modelo cuadrático da una coincidencia adecuada.

La pelota toca el suelo cuando $h = 0$, de modo que se resuelve la ecuación cuadrática

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

La fórmula cuadrática da

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

La raíz positiva es $t \approx 9.67$, por lo tanto se pronostica que la pelota tocará el suelo después de casi de 9.7 segundos. □

FUNCIONES DE POTENCIA

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es constante se llama **función potencia**. Considere varios casos.

(i) $a = n$, donde n es un entero positivo

La figura 11 ilustra las gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. (Éstos son polinomios con un solo término.) Ya conoce la forma de las gráficas de $y = x$ (una línea a través del origen con pendiente 1) y $y = x^2$ [una parábola, véase el ejemplo 2(b) en la sección 1.1].

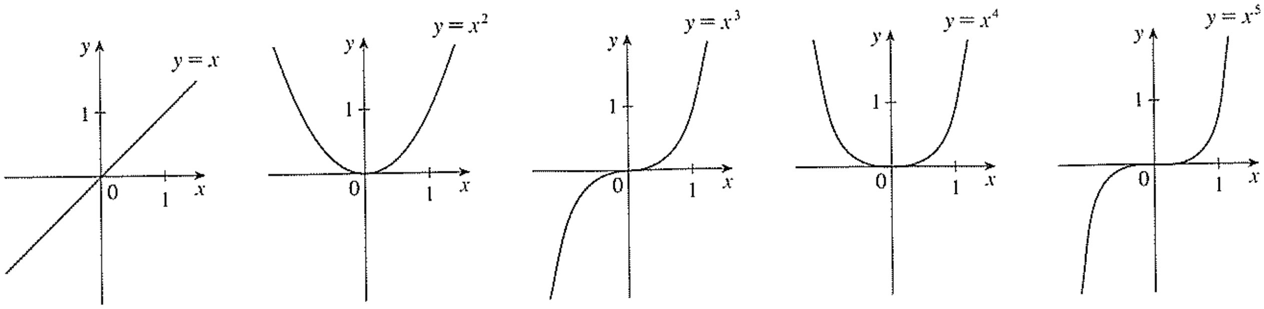


FIGURA 11 Gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. Si n es par, en tal caso $f(x) = x^n$ es una función par y su gráfica es semejante a la de la parábola $y = x^2$. Si n es impar, en tal caso $f(x) = x^n$ es una función impar y su gráfica es similar a la de $y = x^3$. Sin embargo, observe en la figura 12 que conforme aumenta n, la gráfica se hace más plana cerca de 0 y más pronunciada cuando $|x| \geq 1$. (Si x es pequeña después x^2 es más pequeña, x^3 aún más pequeña, x^4 es más pequeña y así sucesivamente.)

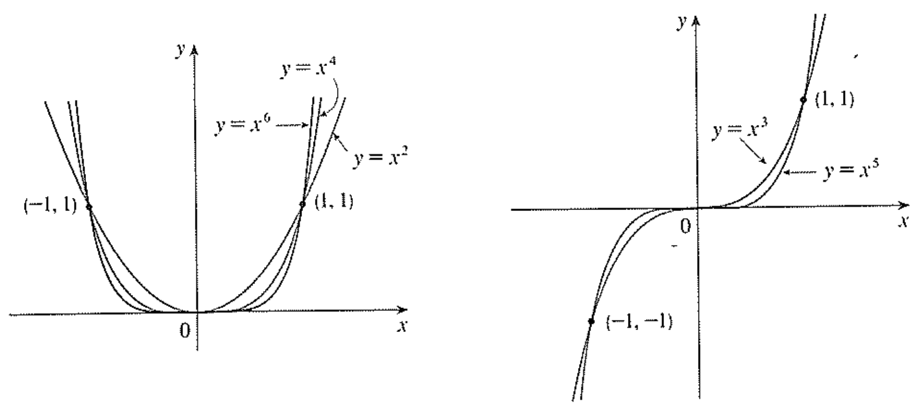
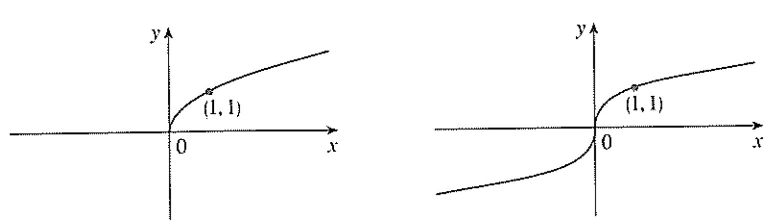


FIGURA 12
Familias de funciones de potencia

(ii) $a = 1/n$, donde n es un entero positivo

La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una **función raíz**. Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, cuyo dominio es $[0, \infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$. [Véase la figura 13(a).] Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$ tenemos la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$ (recuerde que todo número real tiene una raíz cúbica) y cuya gráfica se ilustra en la figura 13(b). La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar ($n > 3$) es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

FIGURA 13
Gráficas de funciones raíz

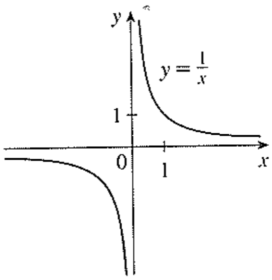


FIGURA 14
La función recíproca

(iii) $a = -1$

En la figura 14 se presenta la gráfica de la **función recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$. Su gráfica tiene la ecuación $y = 1/x$, o $xy = 1$ y es una hipérbola con sus ejes de coordenadas como sus asíntotas. Esta función surge en la física y en la química en conexión con la ley de Boyle, la cual dice que, cuando la temperatura es constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P:

$$V = \frac{C}{P}$$

donde C es una constante. En estos términos, la gráfica de V como una función de P (véase la figura 15) tiene la misma forma general que la mitad derecha de la figura 14.

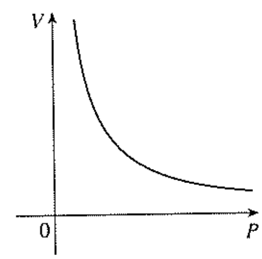


FIGURA 15
El volumen como una función de la presión a temperatura constante

En el ejercicio 26 se analiza otra situación en la que se utiliza una función potencia para modelar un fenómeno físico.

FUNCIONES RACIONALES

Una **función racional** f es una razón de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio consiste de todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo sencillo de una función racional es la función $f(x) = 1/x$, cuyo dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$; esto es la función recíproca que se dibuja en la figura 14. La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. En la figura 16 se ilustra su gráfica.

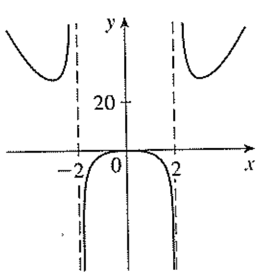


FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

FUNCIONES ALGEBRAICAS

Si una función puede construirse usando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación y sacar raíces) se le llama **función algebraica**. Cualquier función racional automáticamente es una función algebraica. A continuación dos ejemplos más:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Cuando trace funciones algebraicas en el capítulo 4, verá que sus gráficas adoptan diversas formas. La figura 17 ilustra algunas de las posibilidades.

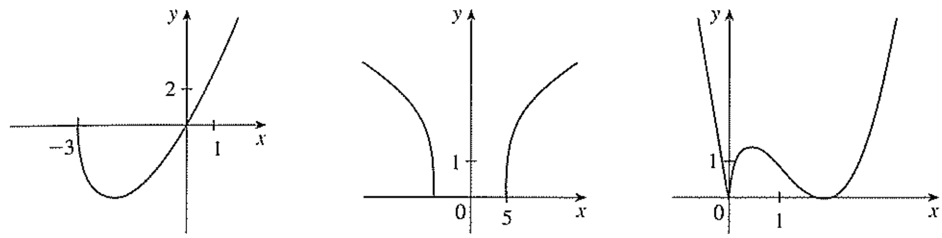


FIGURA 17 (a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

En la teoría de la relatividad surge un ejemplo de funciones algebraicas. La masa de una partícula con velocidad v, es

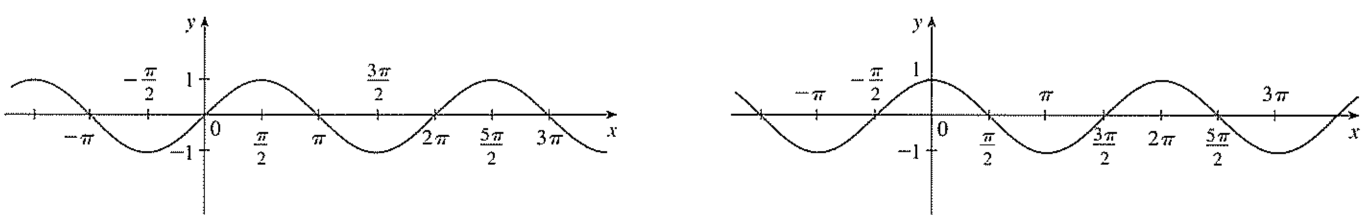
$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3.0 \times 10^5$ km/s es la rapidez de la luz en el vacío.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

▨ Las páginas de referencia RP están localizadas al final del libro.

La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan en la página de referencias 2 y también en el apéndice D. En el cálculo la convención es que siempre se utiliza la medida en radianes (excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando se usa la función $f(x) = \text{sen}\, x$, se supone que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es x. Por consiguiente, las gráficas de las funciones seno y coseno son como las que se ilustran en la figura 18.



(a) $f(x) = \text{sen}\, x$ (b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Observe que tanto para la función seno como coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el alcance es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. En estos términos, para todos los valores de x, se tiene

$$\boxed{-1 \leqslant \text{sen}\, x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1}$$

o, en términos de valores absolutos,

$$|\text{sen}\, x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

Además, los ceros de las funciones seno surgen en múltiplos enteros de π; es decir,

$$\text{sen}\, x = 0 \qquad \text{donde} \qquad x = n\pi \quad n \text{ es un número positivo}$$

Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son funciones periódicas y tienen periodos 2π. Esto significa que para todas las funciones de x,

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x}$$

La naturaleza periódica de estas funciones las hace adecuadas para modelar fenómenos repetitivos como por ejemplo las mareas, los resortes vibratorios y las ondas sonoras. En el caso del ejemplo 4 de la sección 1.3, verá que un modelo razonable para el número de horas de luz en Filadelfia t días después del 1 de enero está dado por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

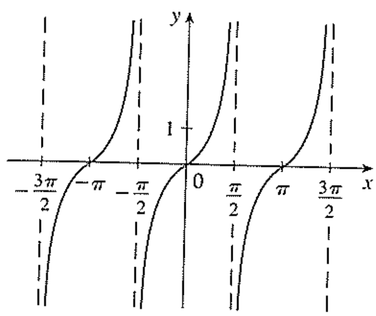


FIGURA 19
$y = \tan x$

La función tangente se relaciona con las funciones seno y coseno por medio de la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y su gráfica se muestra en la figura 19. Es indefinida siempre que $\cos x = 0$, es decir, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Su intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que la función tangente tiene periodos π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

Las tres funciones trigonométricas restantes (cosecante, secante y cotangente) son recíprocas de las funciones seno, coseno y tangente. Sus gráficas se ilustran en el apéndice D.

FUNCIONES EXPONENCIALES

Las **funciones exponenciales** son las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. En la figura 20 se muestran las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (0.5)^x$. En ambos casos el dominio es $(-\infty, \infty)$ y $(0, \infty)$ es el intervalo.

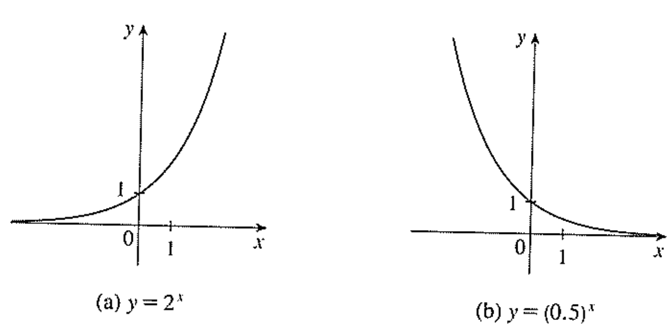


FIGURA 20

En la sección 1.5 se estudiarán las funciones exponenciales con mayores detalles y verá que resultan útiles para modelar muchos fenómenos naturales, como por ejemplo el crecimiento de la población (si $a > 1$) y el decaimiento radiactivo (si $a < 1$).

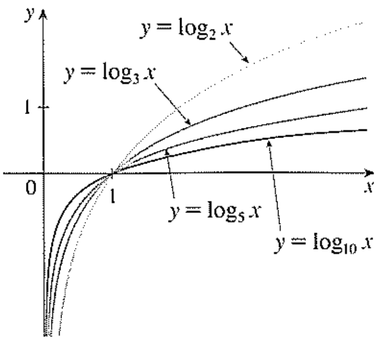


FIGURA 21

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Las **funciones logarítmicas** $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva, son las inversas de las funciones exponenciales. Las primeras se estudian en la sección 1.6. En la figura 21 se muestran las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con varias bases. En cada caso el dominio es $(0, \infty)$, el intervalo es $(-\infty, \infty)$, y la función crece lentamente cuando $x > 1$.

FUNCIONES TRASCENDENTES

Estas funciones no son algebraicas. El conjunto de funciones trascendentes incluye la trigonométrica, la trigonométrica inversa, exponencial y logarítmica, además comprende un buen número de otras funciones que nunca han recibido nombre. En el capítulo 11 se analizarán las funciones trascendentes que se definen como sumas de series infinitas.

EJEMPLO 5 Clasifique las funciones siguientes como uno de los tipos de funciones recién analizadas.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUCIÓN

(a) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)

(b) $g(x) = x^5$ es una función potencia. (La x es la base.) Podría considerar también que es un polinomio de grado 5.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ es una función algebraica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ es un polinomio de grado 4. □

1.2 EJERCICIOS

1–2 Clasifique cada función como función potencia, función raíz, polinomio (señale su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. (a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ (b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $h(x) = x^9 + x^4$ (d) $r(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x}$

(e) $s(x) = \tan 2x$ (f) $t(x) = \log_{10} x$

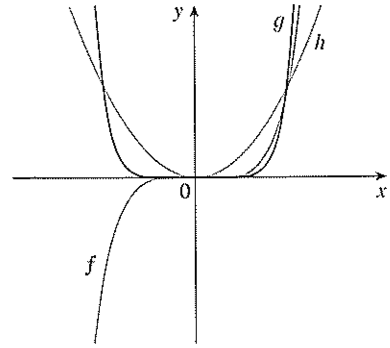
2. (a) $y = \dfrac{x - 6}{x + 6}$ (b) $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$

(c) $y = 10^x$ (d) $y = x^{10}$

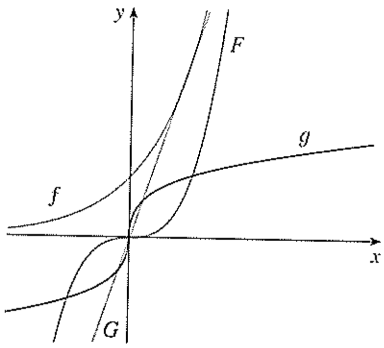
(e) $y = 2t^6 + t^4 - \pi$ (f) $y = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

3–4 Haga coincidir cada ecuación con su gráfica. Explique sus selecciones. (No use una computadora ni una calculadora graficadora.)

$\boxed{3.}$ (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$
(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$

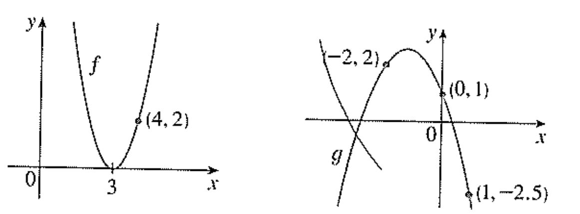


5. (a) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y trace la gráfica de varios miembros de la familia.
(b) Halle una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y dibuje varios miembros de la familia.
(c) ¿Qué función pertenece a ambas familias?

6. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Trace la gráfica de varios miembros de la familia.

7. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = c - x$? Trace la gráfica de varios miembros de la familia.

8. Halle las expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas son mostradas.



9. Hallar una expresión para una función cúbica f sí $f(-1) = 6$ y $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

10. Estudios recientes indican que la temperatura superficial de la Tierra se ha estado incrementando de manera firme. Algunos científicos han modelado la temperatura mediante la función lineal $T = 0.02t + 8.50$, donde T es la temperatura en °C y t representa años desde 1900.
(a) ¿Qué representa la pendiente y la intersección a T?
(b) Utilice la ecuación para predecir la temperatura superficial global al promedio al 2100.

11. Si la dosificación recomendada para un adulto de una droga es D (en mg), entonces, para establecer la dósis apropiada c para un infante de edad a, el químico farmacéutico utiliza la ecuación $c = 0.0417D(a + 1)$. Considere que la dósis para un adulto es 200 mg.
(a) Hallar la pendiente de la gráfica de c. ¿Qué representa?
(b) ¿Cuál es la dósis para un recién nacido?

12. El gerente de un bazar de fin de semana sabe con base en experiencias anteriores que si cobra x dólares por la renta de espacio en el bazar, entonces el número y de espacios que puede rentar está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.
(a) Trace una gráfica de esta función lineal. (Recuerde que la renta que se cobra por espacio y el número de espacios que pueden rentarse no pueden ser cantidades negativas.)
(b) ¿Qué representan la pendiente, la ordenada al origen y y la intersección x de la gráfica?

13. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.
(a) Trace una gráfica de esta función.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección de F y qué representa?

14. Jason sale de Detroit a las 2:00 P.M. y conduce con rapidez constante hacia el oeste a lo largo de la carretera I-96. Pasa por Ann Arbor, a 40 millas de Detroit a las 2:50
(a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.
(b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta línea? ¿Qué representa?

15. Los biólogos han notado que la cantidad de chirridos que emiten los grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura y la correspondencia parece ser casi lineal. Un grillo produce 113 chirridos por minuto a 70°F y 173 chirridos por minuto a 80°F.
(a) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura como una función del número de chirridos por minuto N.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ¿Qué representa?
(c) Si los grillos están chirreando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

16. El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta 2 200 dólares fabricar 100 sillas en un día y 4 800 dólares producir 300 en un día.
(a) Exprese el costo como una función del número de sillas que se producen, suponiendo que es lineal. Luego trace la gráfica.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
(c) ¿Cuál es la intersección de y de la gráfica y qué representa?

17. En la superficie del océano la presión del agua es la misma que la presión del aire por arriba del agua, 15 lb/pulg^2. Por debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies de descenso.
(a) Exprese la presión del agua como función de la profundidad por debajo de la superficie del océano.
(b) ¿A qué profundidad es 100 lb/pulg^2 la presión?

18. El costo mensual de conducir un automóvil depende del número de millas que se recorran. Lynn encontró que en el mes de mayo recorrer 480 millas le costó 380 dólares y en junio le costó 460 dólares recorrer 800 millas.

(a) Exprese el costo mensual C como una función de la distancia recorrida d, suponiendo que la correspondencia lineal provee un modelo adecuado.

(b) Utilice el inciso (a) para predecir el costo de conducir 1 500 millas por cada mes.

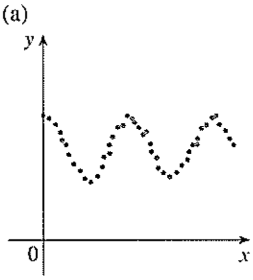
(c) Trace la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?

(d) ¿Qué representa la intersección de y?

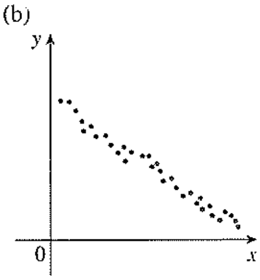
(e) ¿Por qué una función lineal proporciona un modelo apropiado en esta situación?

19–20 Determine, para cada una de las gráficas de dispersión, qué tipo de función elegiría como modelo para la información. Explique sus elecciones.

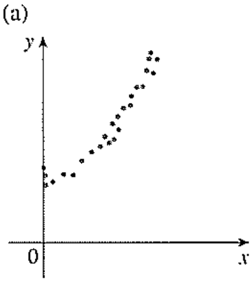
19. (a)



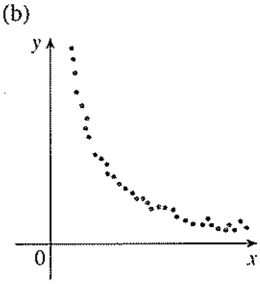
(b)



20. (a)



(b)



21. La tabla muestra las tasas de incidencia de úlcera péptica (a lo largo de toda la vida) respecto del ingreso de diversas familias (por cada 100 habitantes) según reportó el National Health Interview Survey (Encuesta Nacional de Salud por medio de Entrevistas) en 1989.

Ingreso	Incidencia de úlcera (por cada 100 habitantes)
\$4 000	14.1
\$6 000	13.0
\$8 000	13.4
\$12 000	12.5
\$16 000	12.0
\$20 000	12.4
\$30 000	10.5
\$45 000	9.4
\$60 000	8.2

(a) Trace una gráfica de dispersión y determine si es adecuado un modelo lineal.

(b) Halle y dibuje un modelo lineal utilizando el primero y el último puntos de información.

(c) Encuentre y dibuje la línea de regresión por mínimos cuadrados.

(d) Utilice el modelo lineal del inciso (c) para estimar la incidencia de úlcera para un ingreso de 25 000 dólares.

(e) Según el modelo, ¿qué tan probable es que alguien que percibe un ingreso de 80 000 dólares sufra úlcera péptica?

(f) ¿Cree usted que sería razonable aplicar el modelo a alguien que tiene un ingreso de 200 000 dólares?

22. Los biólogos han observado que la cantidad de chirridos que emiten los grillos de cierta especie parece estar relacionada con la temperatura. La tabla muestra la cantidad de chirridos para distintas temperaturas.

Temperatura (°F)	Cantidad de chirridos (chirridos/minuto)	Temperatura (°F)	Cantidad de chirridos (chirridos/minuto)
50	20	75	140
55	46	80	173
60	79	85	198
65	91	90	211
70	113		

(a) Realice una gráfica de dispersión de la información.

(b) Encuentre y dibuje la línea de regresión.

(c) Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar la cantidad de chirridos a 100°F.

23. La tabla proporciona las alturas ganadoras en las competencias de salto con garrocha de los Juegos Olímpicos durante el siglo XX.

Año	Altura (pies)	Año	Altura (pies)
1900	10.83	1956	14.96
1904	11.48	1960	15.42
1908	12.17	1964	16.73
1912	12.96	1968	17.71
1920	13.42	1972	18.04
1924	12.96	1976	18.04
1928	13.77	1980	18.96
1932	14.15	1984	18.85
1936	14.27	1988	19.77
1948	14.10	1992	19.02
1952	14.92	1996	19.42

(a) Dibuje una gráfica de dispersión y determine si un modelo lineal es adecuado.

(b) Encuentre y dibuje la línea de regresión.

(c) Utilice el modelo lineal para predecir la altura del salto con garrocha ganador en los Juegos Olímpicos del año 2000 y compárelo con la altura ganadora real de 19.36 pies.

(d) ¿Es razonable usar el modelo para predecir las alturas vencedoras en los Juegos Olímpicos del año 2100?

24. Un estudio que realizó la U.S. Office of Science and Technology (Oficina de Ciencia y Tecnología de Estados Unidos) en 1972 estimó el costo (en dólares de 1972) de reducir el costo de las emisiones de vehículos automotores en ciertos porcentajes:

Reducción de emisiones (%)	Costo por vehículo (en dólares)	Reducción de emisiones (%)	Costo por vehículo (en dólares)
50	45	75	90
55	55	80	100
60	62	85	200
65	70	90	375
70	80	95	600

Encuentre un modelo que capte la tendencia de "rendimientos decrecientes" de esta información.

25. Utilice la información que aparece en la tabla para modelar la población del mundo en el siglo XX por medio de una función cúbica. Utilice enseguida su modelo para estimar la población en el año 1925.

Años	Población (millones)	Años	Población (millones)
1900	1 650	1960	3 040
1910	1 750	1970	3 710
1920	1 860	1980	4 450
1930	2 070	1990	5 280
1940	2 300	2000	6 080
1950	2 560		

26. La tabla muestra las distancias medias (promedio) d de los planetas al Sol (suponiendo que la unidad de medida es la distancia de la Tierra al Sol) y sus periodos T (tiempo de revolución en años).

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784

(a) Haga que un modelo de potencias coincida con la información.

(b) La tercera ley de Kepler del movimiento planetario establece que

"El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media respecto del Sol."

¿El modelo que formuló corrobora la tercera ley de Kepler?

1.3 FUNCIONES NUEVAS A PARTIR DE FUNCIONES ANTIGUAS

Esta sección inicia con las funciones básicas analizadas en la sección 1.2 para obtener funciones nuevas mediante el desplazamiento, el alargamiento y la reflexión de sus gráficas. También es mostrará cómo combinar pares de funciones por medio de operaciones aritméticas estándar o por composición.

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Al aplicar ciertas transformaciones a la gráfica de una función dada, puede obtener las gráficas de ciertas funciones relacionadas. Esto le proporcionará la habilidad para trazar a mano las gráficas de muchas funciones. Además le permitirá escribir ecuaciones para gráficas conocidas. En primer lugar, se considera las **traslaciones**. Si c es un número positivo, por lo tanto la gráfica de $y = f(x) + c$ es precisamente la de $y = f(x)$ desplazada hacia arriba una distancia de c unidades (ya que a cada coordenada y se incrementa el mismo número c). Del mismo modo, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, por lo tanto el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). En consecuencia, la gráfica de $y = f(x - c)$ es precisamente la de $y = f(x)$ desplazada c unidades a la derecha (véase la figura 1).

DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba

$y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo

$y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha

$y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda

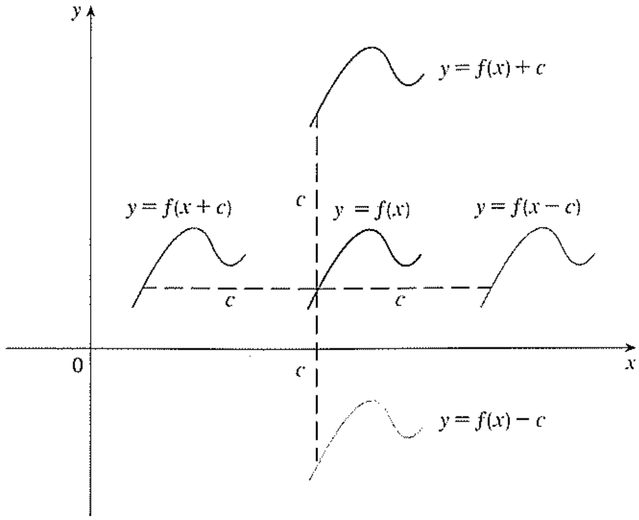


FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f

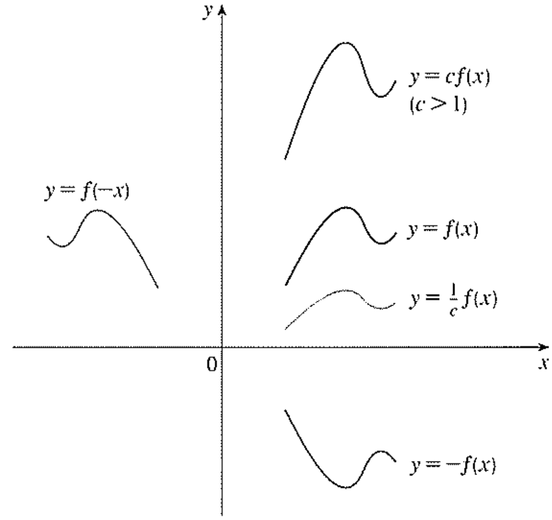


FIGURA 2
Alargamiento y reflexión de la gráfica de f

Considere ahora las transformaciones de **alargamiento** y **reflexión.** Si $c > 1$, en tal caso la gráfica de $y = cf(x)$ es la de $y = f(x)$ alargada en el factor c en la dirección vertical (porque cada coordenada y se multiplica por el mismo número c) La gráfica de $y = -f(x)$ es la de $y = f(x)$ reflejada respecto al eje x, porque el punto (x, y) reemplaza al punto $(x, -y)$. (Véase la figura 2 y la tabla a continuación, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.)

ALARGAMIENTOS Y REFLEXIONES VERTICALES Y HORIZONTALES Suponga que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

$y = cf(x)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c

$y = (1/c)f(x)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ verticalmernte en un factor de c

$y = f(cx)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c

$y = f(x/c)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c

$y = -f(x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje x

$y = f(-x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje y

La figura 3 ilustra estas transformaciones de alargamiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = 2\cos x$ multiplique la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$ por 2. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se alarga en dirección vertical por un factor de 2.

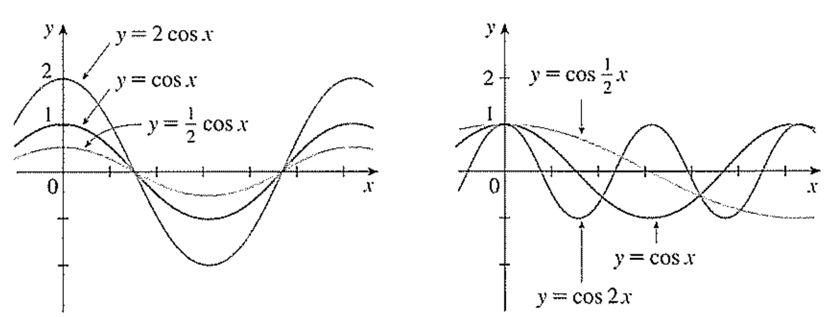
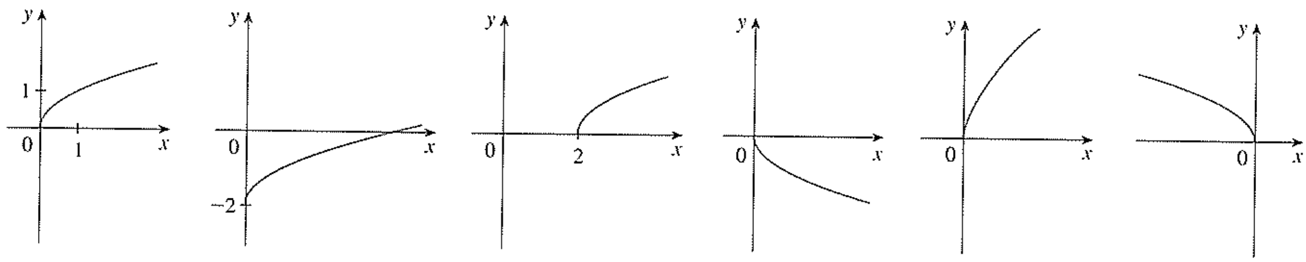


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use las transformaciones para dibujar $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN En la figura 4(a) aparece la gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, que se obtuvo de la figura 13(a) en la sección 1.2. En las otras partes de la figura, se ha trazado $y = \sqrt{x} - 2$ al desplazarla 2 unidades hacia abajo; $y = \sqrt{x - 2}$ al desplazarla 2 unidades hacia la derecha; $y = -\sqrt{x}$ al reflejarla respecto al eje x; $y = 2\sqrt{x}$ al alargarla verticalmente un factor de 2, y $y = \sqrt{-x}$ al reflejarla respecto al eje y.



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x - 2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$ □

FIGURA 4

EJEMPLO 2 Dibuje la función $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUCIÓN Al completar el cuadrado, escriba la ecuación de la gráfica como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Esto quiere decir que obtiene la gráfica deseada si parte de la parábola $y = x^2$ y la desplaza 3 unidades a la izquierda y, a continuación, 1 unidad hacia arriba (véase la figura 5).

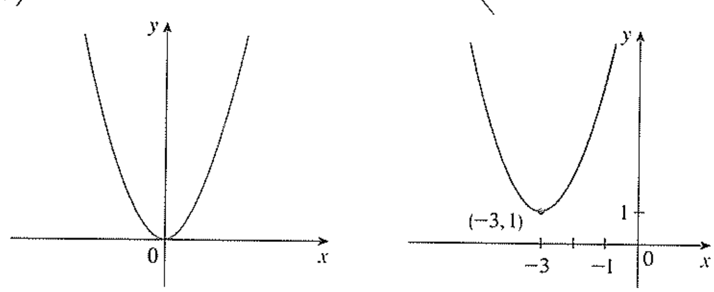


FIGURA 5

(a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$ □

EJEMPLO 3 Trace las gráficas de las funciones siguientes:
(a) $y = \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = 1 - \operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN
(a) Obtiene la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ a partir de la de $y = \operatorname{sen} x$, si la comprime horizontalmente un factor de 2 (véase las figuras 6 y 7). De modo que, mientras el periodo de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π, el periodo de $y = \operatorname{sen} 2x$ es $2\pi/2 = \pi$.

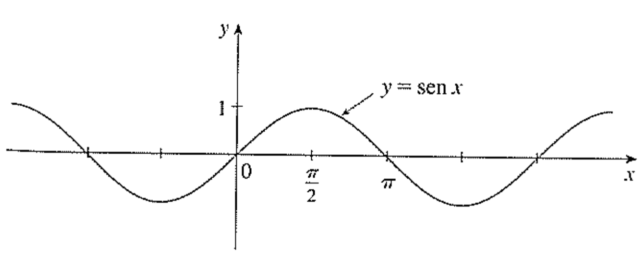


FIGURA 6

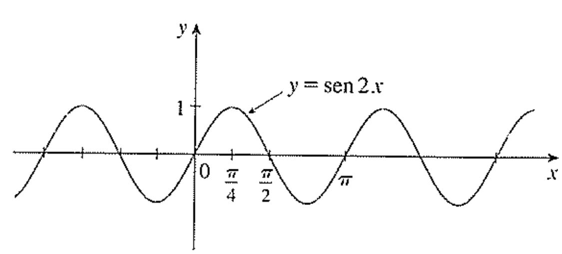
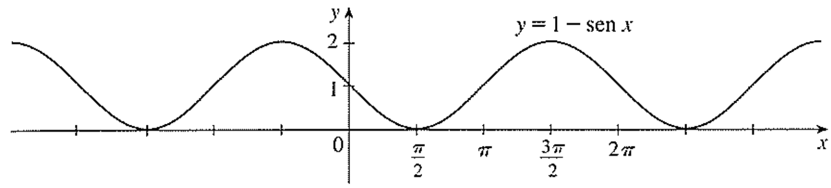


FIGURA 7

(b) Para obtener la gráfica de $y = 1 - \text{sen}\, x$, una vez más empiece con $y = \text{sen}\, x$. La refleja con respecto al eje x, para obtener la gráfica de $y = -\text{sen}\, x$ y, a continuación, desplácela 1 unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \text{sen}\, x$ (véase la figura 8).



□

FIGURA 8

EJEMPLO 4 La figura 9 muestra gráficas del número de horas de luz diurna como funciones de la época del año en diversas latitudes. Dado que la ciudad de Filadelfia está ubicada a 40° de latitud N, encuentre una función que modele la duración de la luz diurna en la ciudad mencionada.

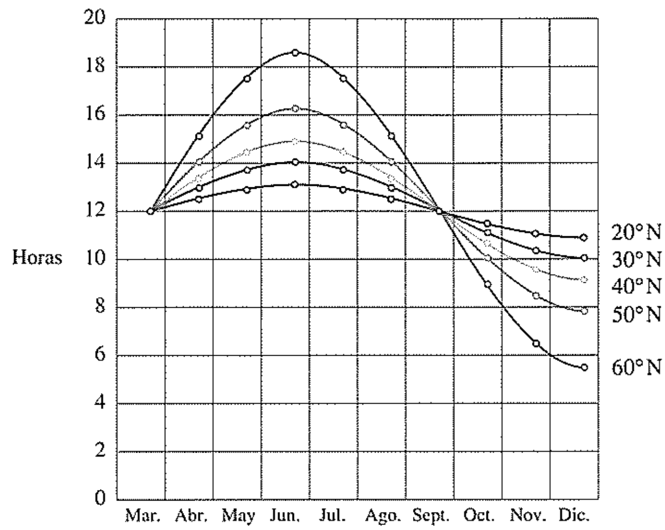


FIGURA 9
Gráfica de la duración de la luz diurna del 21 de marzo al 21 de diciembre en diversas latitudes
Fuente: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (New York: Silver, Burdett, 1935) página 40.

SOLUCIÓN Observe que cada curva se parece a una función seno desplazada y alargada. Al observar la curva de color azul parece que, en la latitud de Filadelfia, la luz diurna dura alrededor de 14.8 horas el 21 de junio y 9.2 horas el 21 de diciembre, de manera que la amplitud de la curva (el factor por el cual debe alargar la curva seno verticalmente) es $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$.

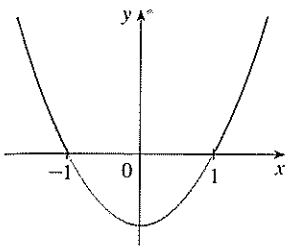
¿Por qué factor necesita alargar la curva seno horizontalmente si mide el tiempo t en días? Debido a que en un año hay 365 días, el periodo del modelo debe ser 365 días. Pero el periodo de $y = \text{sen}\, t$ es 2π, por consiguiente el factor de alargamiento horizontal es $c = 2\pi/365$.

Se observa también que la curva inicia su ciclo el 21 de marzo, el 80o. día del año, de modo que desplace la curva 80 unidades hacia la derecha. Además, la desplaza 12 unidades hacia arriba. En consecuencia, modele la duración de la luz diurna en Filadelfia sobre el t-ésimo. día del año mediante la función

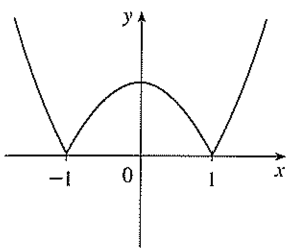
$$L(t) = 12 + 2.8\, \text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

□

Otra transformación de cierto interés es tomar el valor absoluto de una función. Si $y = |f(x)|$, en tal caso, según la definición de valor absoluto, $y = f(x)$ cuando $f(x) \geq 0$ y $y = -f(x)$ cuando $f(x) < 0$. Esto dice cómo obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$: la parte de la gráfica que se encuentra arriba del eje x sigue siendo la misma; la sección debajo del eje x se refleja respecto a este eje.



(a) $y = x^2 - 1$



(b) $y = |x^2 - 1|$

FIGURA 10

EJEMPLO 5 Dibuje la función $y = |x^2 - 1|$.

SOLUCIÓN En primer lugar, dibuje la parábola $y = x^2 - 1$ de la figura 10(a) desplazando la parábola $y = x^2$ hacia abajo 1 unidad. La gráfica se encuentra debajo del eje x cuando $-1 < x < 1$, de modo que reflejamos esa parte de la gráfica respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = |x^2 - 1|$ de la figura 10(b) □

COMBINACIONES DE FUNCIONES

Se pueden combinar las dos funciones f y g para formar funciones nuevas $f + g$, $f - g$, fg y f/g de manera semejante a la que aplica para sumar, restar, multiplicar y dividir números reales. Se definen la suma y resta de funciones mediante

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si el dominio de f es A y el de g es B, en tal caso el dominio de $f + g$ es la intersección $A \cap B$ porque tanto $f(x)$ y $g(x)$ estan definidas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $A = [0, \infty)$ y el dominio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ es $B = (-\infty, 2]$, de esa manera, el dominio de $(f + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ es $A \cap B = [0, 2]$

De manera análoga, se definen el producto y el cociente mediante

$$(fg)(x) = f(x|g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de fg es $A \cap B$, pero no puede dividir entre 0 y así, el dominio de f/g es $\{x \in A \cap B \mid (x) \neq 0\}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$, en tal caso, el dominio de la función racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ es $\{x/x \neq 1\}$, o bien $(-\infty,1) \cup (1, \infty)$.

Existe otra manera de combinar dos funciones, para obtener una función nueva. Por ejemplo, considere que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Ya que y es una función de u y u es, en su momento, una función de x, por último surge que y es una función de x. Calcule esto mediante la sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$$

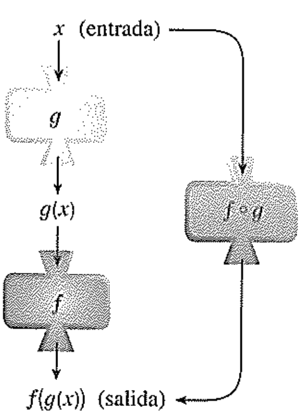


FIGURA 11
El dispositivo $f \circ g$ está constituido del dispositivo g (primero) y en seguida el dispositivo f.

El procedimiento se denomina composición porque la función nueva es compuesta de las dos funciones conocidas f y g.

En general, conocidas dos funciones cualesquiera f y g, inicie con un número x en el dominio de g y halle su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, en seguida puede calcular el valor de $f(g(x))$. El resultado es una función nueva $h(x) = f(g(x))$ que se obtiene al sustituir g en f. Esto se denomina composición (o composite) de f y g y se señala mediante $f \circ g$ ("f círculo g")

DEFINICIÓN Conocidas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (también denominada la **composición** de f y g) se define mediante

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida cada vez que tanto $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. La figura 11 exhibe cómo describir $f \circ g$ en términos de dispositivos.

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN Tiene

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

□

NOTA Con base en el ejemplo 7 puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, la notación $f \circ g$ significa que primero se aplica la función g y luego f. En el ejemplo 6, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y *a continuación* eleva al cuadrado; $g \circ f$ es la función que *en primer lugar* eleva al cuadrado y *luego* resta 3.

EJEMPLO 7 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre cada función y su dominio.
(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUCIÓN

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Para que $\sqrt{x}$ esté definida, debe tener $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida debe tener $2 - \sqrt{x} \geq 0$, es decir, $\sqrt{x} \leq 2$, o bien, $x \leq 4$. Por esto, tiene $0 \leq x \leq 4$, así el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

Si $0 \leq a \leq b$, entonces $a^2 \leq b^2$

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{2 - x}) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Esta expresión se define cuando $2 - x \geq 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. La primera desigualdad significa que $x \leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$, o $2 - x \leq 4$, o bien $x \geq -2$. En estos términos $-2 \leq x \leq 2$, de esta manera el dominio de $g \circ g$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$. □

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar primero h, a continuación g y, luego, f, como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 8 Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN
$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x + 3))$$
$$= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}$$

□

Hasta ahora, ha usado la composición para construir funciones complicadas a partir de otras más sencillas. Pero en cálculo a menudo resulta útil descomponer una función complicada en otras más sencillas, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN Como $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, la fórmula dada para F dice: primero sume 9, después tome el coseno del resultado y, por último, eleve al cuadrado. De modo que

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Entonces

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9))$$
$$= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)$$

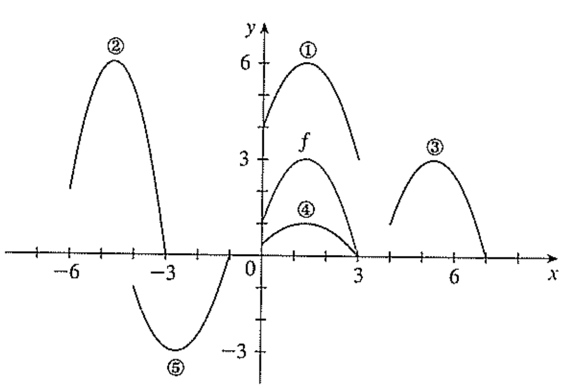
□

1.3 EJERCICIOS

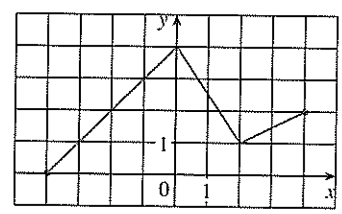
1. Suponga que se da la gráfica de f. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f, como se indica a continuación.
   (a) Desplácela 3 unidades hacia arriba.
   (b) Desplácela 3 unidades hacia abajo.
   (c) Desplácela 3 unidades a la derecha.
   (d) Desplácela 3 unidades a la izquierda.
   (e) Refléjela respecto al eje x.
   (f) Refléjela respecto al eje y.
   (g) Alárguela verticalmente un factor de 3.
   (h) Contráigala verticalmente un factor de 3.

2. Explique cómo se obtienen las gráficas siguientes a partir de la gráfica de $y = f(x)$.
   (a) $y = 5f(x)$ (b) $y = f(x - 5)$
   (c) $y = -f(x)$ (d) $y = -5f(x)$
   (e) $y = f(5x)$ (f) $y = 5f(x) - 3$

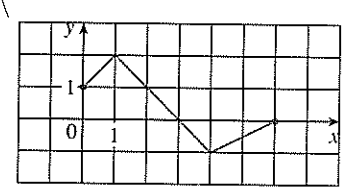
3. Se da la gráfica de $y = f(x)$. Haga que coincida cada ecuación con su gráfica y mencione los motivos de sus elecciones.
   (a) $y = f(x - 4)$ (b) $y = f(x) + 3$
   (c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ (d) $y = -f(x + 4)$
   (e) $y = 2f(x + 6)$



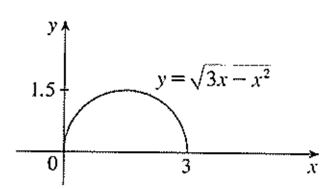
4. Se da la gráfica de f. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.
   (a) $y = f(x + 4)$ (b) $y = f(x) + 4$
   (c) $y = 2f(x)$ (d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$

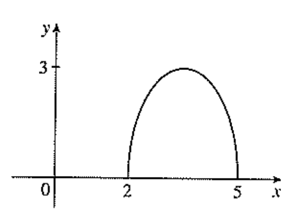


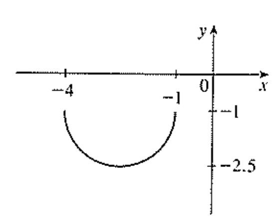
5. Se da la gráfica de f. Úsela para trazar la gráfica de las funciones siguientes.
   (a) $y = f(2x)$ (b) $y = f(\frac{1}{2}x)$
   (c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



6–7 Se da la gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$. Use transformaciones para crear una función cuya gráfica sea como la que se ilustra.



6. 

7. 

8. (a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$? Use su respuesta y la figura 6(a) para graficar $y = 2 \operatorname{sen} x$.
(b) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$ con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Use su respuesta y la figura 4(a) para graficar $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Dibuje cada función a mano, no por medio de la situación de puntos, sino a partir de la gráfica de una de las funciones estándares que se dan en la sección 1.2 y, luego, aplicando las transformaciones apropiadas.

9. $y = -x^3$

10. $y = 1 - x^2$

11. $y = (x + 1)^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3$

13. $y = 1 + 2 \cos x$

14. $y = 4 \operatorname{sen} 3x$

15. $y = \operatorname{sen}(x/2)$

16. $y = \dfrac{1}{x - 4}$

17. $y = \sqrt{x + 3}$

18. $y = (x + 2)^4 + 3$

19. $y = \frac{1}{2}(x^2 + 8x)$

20. $y = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$

21. $y = \dfrac{2}{x + 1}$

22. $y = \dfrac{1}{4} \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

23. $y = |\operatorname{sen} x|$

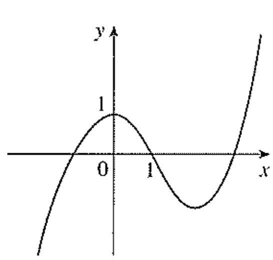
24. $y = |x^2 - 2x|$

25. La ciudad de Nueva Orleáns está ubicada a una latitud 30°N. Use la figura 9 para encontrar una función que modele el número de horas de luz diurna en esa ciudad como función de la época del año. Para verificar la precisión de su modelo, utilice el hecho de que el 31 de marzo, en Nueva Orleáns el Sol sale a las 5:51 A.M. y se pone a las 6:18 P.M.

26. Una estrella variable es aquella cuyo brillo aumenta y disminuye alternadamente. Para la estrella variable más cercana Delta Céfida, el tiempo entre periodos de brillo máximo es 5.4 días, el brillo promedio (o magnitud) de la estrella es 4.0 y su brillo varía en una magnitud de ±0.35. Halle una función que modele el brillo de Delta Céfida como una función del tiempo.

27. (a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(|x|)$ con la gráfica de f?
(b) Dibuje $y = \operatorname{sen} |x|$.
(c) Dibuje $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use la gráfica de f que se dio para dibujar $y = 1/f(x)$. ¿Cuáles características de f son las más importantes para trazar la gráfica de $y = 1/f(x)$? Explique cómo se usan.



29–30 Encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g y establezca sus dominios.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

31–36 Encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, y (d) $g \circ g$ y sus dominios.

31. $f(x) = x^2 - 1$ $g(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = 1 - 2$, $g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = \cos x$

34. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$, $g(x) = \operatorname{sen} 2x$

37–40 Encuentre $f \circ g \circ h$.

37. $f(x) = x - 1$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x - 1$

38. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 1 - x$

39. $f(x) = \sqrt{x - 3}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x^3 + 2$

40. $f(x) = \tan x$, $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$

41–46 Exprese la función en la forma $f \circ g$.

41. $F(x) = (x^2 + 1)^{10}$

42. $F(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$

43. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

45. $u(t) = \sqrt{\cos t}$

46. $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

47–49 Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

47. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$

48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

49. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

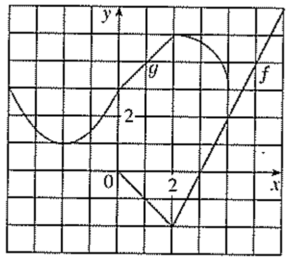
50. Utilice la tabla para evaluar cada expresión

(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$
(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

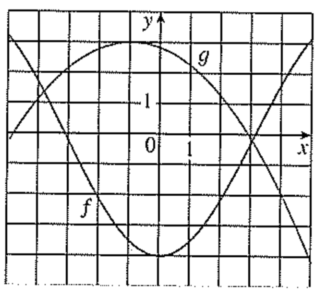
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

51. Use las gráficas dadas de f y g para evaluar cada expresión, o bien, explique por qué no está definida.

(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$
(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



52. Use las gráficas dadas de f y g para estimar el valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Use estas estimaciones para trazar una gráfica aproximada de $f \circ g$.



53. Se deja caer una piedra en un lago, que crea una ola circular que viaja hacia afuera con rapidez de 60 cm/s.

(a) Exprese el radio r de este círculo como función del tiempo t (en segundos).
(b) Si A es el área de este círculo como función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprétela.

54. Se infla un balón esférico y el radio del mismo se incrementa en una cantidad de 2 cm/s.

(a) Exprese el radio r del balón como una función del tiempo t (en segundos).
(b) Si V es el volumen del balón como una función del radio, halle $V \circ r$ e interprete

55. Un barco se mueve con una rapidez de 30 km/h paralelo al borde recto de la playa. El barco está a 6 km de la playa y pasa por un faro al medio día.

(a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco como una función de d, la distancia que el barco recorre desde el medio día; es decir, hallar f de modo que $s = f(d)$
(b) Exprese a d como una función de t, el tiempo transcurrido desde el medio día; es decir, hallar g de tal manera que $d = g(t)$
(c) Hallar $f \circ g$ ¿Qué representa esta función?

56. Un avión vuela con rapidez de 350 mi/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el instante $t = 0$

(a) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado como función de t.
(b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar como función de d.
(c) Aplique la composición para expresar s como función de t.

57. La **función de Heaviside** H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Se usa en el estudio de los circuitos eléctricos para representar la oleada repentina de corriente eléctrica, o de voltaje, cuando un interruptor se cierra instantáneamente.

(a) Dibuje la función de Heaviside.
(b) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$ y se aplican instantáneamente 120 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$.
(c) Dibuje el voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 5$ segundos y se aplican de manera instantánea 240 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$. (Note que partir de $t = 5$ corresponde a una traslación.)

58. La función de Heaviside que se definió en el ejercicio 57 puede utilizarse también para definir la **función rampa** $y = ctH(t)$, la cual representa un aumento gradual del voltaje o la corriente en un circuito.

(a) Dibuje la función rampa $y = tH(t)$.
(b) Dibuje el voltaje $V(t)$ en un circuito si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$ y el voltaje se incrementa gradualmente hasta 120 volts durante un intervalo de 60 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$, para $t \leqslant 60$.
(c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 7$ segundos y el voltaje se incrementa gradualmente hasta 100 volts durante un periodo de 25 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$, para $t \leqslant 32$.

59. Sea f y g funciones lineales con ecuaciones $f(x) = m_1x + b_1$ y $g(x) = m_2x + b_2$. ¿También $f \circ g$ es una función lineal? Si es así, ¿cuál es la pendiente de su gráfica?

60. Si invierte x dolares al 4% de interés compuesto anual, por lo tanto la cantidad $A(x)$ de la inversios después de un año es $A(x) = 1.04x$. Hallar $A \circ A$, $A \circ A \circ A$, y $A \circ A \circ A \circ A$. ¿Qué representan estas composiciones? Encontrar una formula para la composición de n copias de A.

61. (a) Si $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense qué operaciones tendrá que efectuar en la formula para g para terminar por obtener la fórmula para h.)
(b) Si $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.

62. Si $f(x) = x + 4$ y $h(x) = 4x - 1$, encuentre una función tal que $g \circ f = h$.

63. (a) Supongo que f y g son funciones pares. ¿Que puede decir sobre $f + g$ y fg?
(b) ¿Que diría si f y g son impares?

64. Supongo que f es par y g es impar. ¿Que puede decir sobre fg?

65. Suponga que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿h siempre es una función par?

66. Suponga que g es una función impar y sea $h = f \circ g$.¿Es h siempre una función impar? ¿Qué pasa si f es impar? ¿Qué pasa si f es par?

1.4 CALCULADORAS GRAFICADORAS Y COMPUTADORAS

En esta sección, se supondrá que tiene acceso a una calculadora graficadora o a una computadora con software para trazar gráficas. Se dará cuenta de que el uso de uno de esos aparatos le da capacidad para trazar gráficas de funciones más complicadas y resolver problemas más complejos de lo que sería posible de otra forma. También encontrará algunas de las dificultades que se pueden presentar con estas máquinas.

Ambos dispositivos pueden dar gráficas muy exactas de las funciones. Pero, en el capítulo 4, verá que sólo usando el cálculo puede estar seguro de haber descubierto todos los aspectos interesantes de una gráfica.

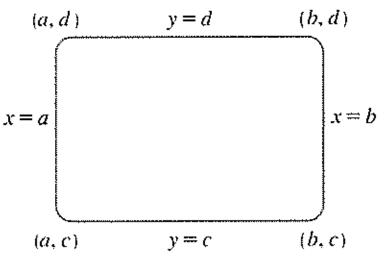


FIGURA 1
La pantalla de $[a, b]$ por $[c, d]$

Una calculadora graficadora o una computadora presentan una parte rectangular de la gráfica de una función en una **ventana de visualización** o **pantalla**, a los cuales se hará refencia simplemente como **rectángulo de visualización**. La pantalla predeterminada a menudo da una imagen incompleta o engañosa, de modo que es importante elegir con cuidado el rectángulo de visualización. Si elige que los valores x varíen desde un valor mínimo de *Xmín* $= a$ hasta un valor máximo de *Xmáx* $= b$ y que los valores y varíen desde uno mínimo de *Ymín* $= c$ hasta uno máximo de *Ymáx* $= d$, entonces la parte visible de la gráfica se encuentra en el rectángulo

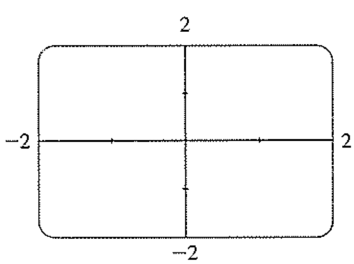
$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

que se muestra en la figura 1. A este espacio se le refiere como el *rectángulo de visualización* de $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

La máquina dibuja la gráfica de una función f de modo muy semejante a como usted lo haría. Sitúa los puntos de la forma $(x, f(x))$ para un cierto número de valores igualmente espaciados de x entre a y b. Si un valor x no está en el dominio de f o si $f(x)$ queda fuera el rectangulo de visualización, la máquina pasa al valor x siguiente. Une cada punto con el anterior para formar una representación de la gráfica de f.

EJEMPLO 1 Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en cada uno de los siguientes rectángulos de visualización.

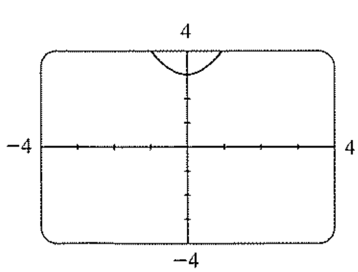
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$
(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$



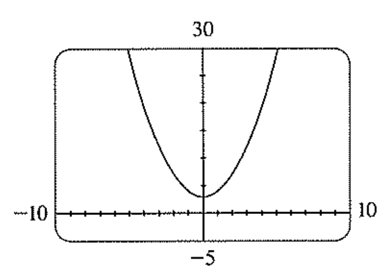
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

SOLUCIÓN Para el inciso (a), seleccione el intervalo al establecer *Xmín* $= -2$, *Xmáx* $= 2$, *Ymín* $= -2$ y *Ymáx* $= 2$. En la figura 2(a), aparece la gráfica resultante. ¡La pantalla está en blanco! Un momento de reflexión da la explicación: observe que $x^2 \geqslant 0$ para toda x, de modo que $x^2 + 3 \geqslant 3$ para toda x. Por lo tanto, el intervalo de la función $f(x) = x^2 + 3$ es $[3, \infty)$. Esto significa que la gráfica de f está por completo fuera de la pantalla $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

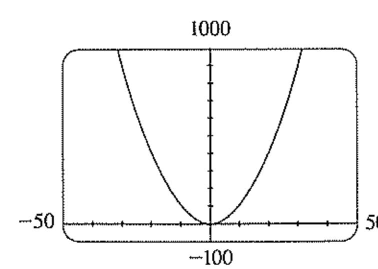
En la figura 2, también se muestran las gráficas para las pantallas de los incisos (b), (c) y (d). Observe que obtiene una imagen más completa en los incisos (c) y (d), pero en el inciso (d) no se ve con claridad que la intersección con el eje y es 3.



(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$



(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$



(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$

FIGURA 2 Gráficas de $f(x) = x^2 + 3$

□

Con base en el ejemplo 1, la elección de un rectángulo de visualización puede dar lugar a una gran diferencia en el aspecto de una gráfica. A veces es necesario cambiar a un rectángulo de visualización más grande para obtener una imagen más global de la gráfica. Pero una pantalla demasiado grande también puede ser engañosa. En el ejemplo siguiente, el conocimiento del dominio y del intervalo de una función a veces proporciona información suficiente para seleccionar un buen rectángulo de visualización.

EJEMPLO 2 Determine un rectángulo de visualización apropiada para la función $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ y úsela para trazar la gráfica de f.

SOLUCIÓN La expresión para $f(x)$ está definida cuando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

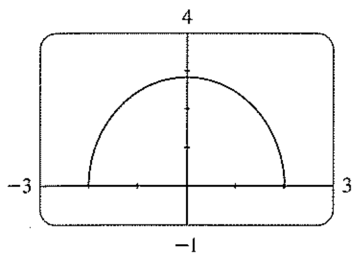


FIGURA 3

Debido a eso, el dominio de f es el intervalo $[-2, 2]$. Además,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

de modo que el alcance de f es el intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Elija el rectángulo de visualización de modo que el intervalo x sea algo mayor que el dominio y que el intervalo y sea mayor que el alcance. Si lo define en $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtiene la gráfica que se muestra en la figura 3. □

EJEMPLO 3 Dibuje la función $y = x^3 - 150x$.

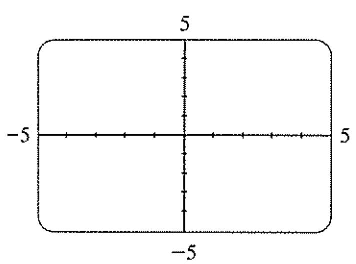


FIGURA 4

SOLUCIÓN En este caso, el dominio es $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales. Eso no ayuda a seleccionar un rectángulo de visualización. Experimente. Si empieza con el rectángulo de visualización $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obtiene la gráfica de la figura 4. Al parecer está en blanco, pero en realidad es casi tan vertical que se mezcla con el eje y.

Si cambia el rectángulo de visualización a $[-20, 20]$ por $[-20, 20]$, obtiene la imagen que se muestra en la figura 5(a). La gráfica parece consistir en rectas verticales, pero sabe que no es correcto. Si mira con cuidado mientras se traza la gráfica, veá que ésta sale de la pantalla y vuelve a aparecer durante el proceso. Esto indica que necesita ver más en dirección vertical, de modo que cambie el rectángulo de visualización a $[-20, 20]$ por $[-500, 500]$. En la figura 5(b) aparece la gráfica resultante. Todavía no revela todas las características principales de la función, de modo que pruebe con $[-20, 20]$ por $[-1\,000, 1\,000]$ en la figura 5(c). Ahora tiene más confianza de contar con un rectángulo de visualización apropiada. En el capítulo 4 será capaz de ver que la gráfica que se muestra en la figura 5(c) revela todas las características principales de la función.

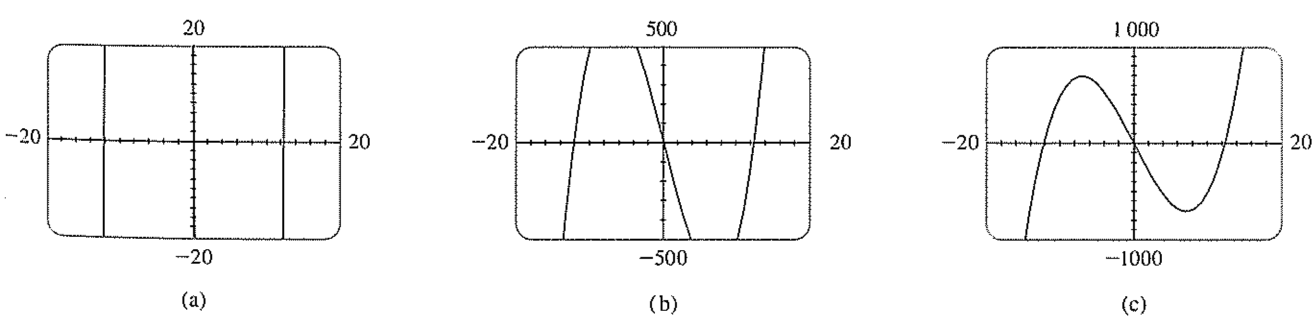


FIGURA 5 $y = x^3 - 150x$

□

V EJEMPLO 4 Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} 50\,x$ en un rectángulo de visualización apropiada.

SOLUCIÓN En la figura 6(a) se ilustra la gráfica de f producida por una calculadora graficadora usando un rectángulo de visualización $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista, la gráfica parece ser razonable. Pero si cambia el rectángulo de visualización a las que se presentan en las siguientes partes de la figura 6, la gráfica se ve muy diferente. Algo extraño está pasando.

▨ El aspecto de las gráficas de la figura 6 depende de la máquina que se use. Es posible que las gráficas que obtenga con su dispositivo graficador no se parezcan a estas figuras, pero también serán bastante inexactas.

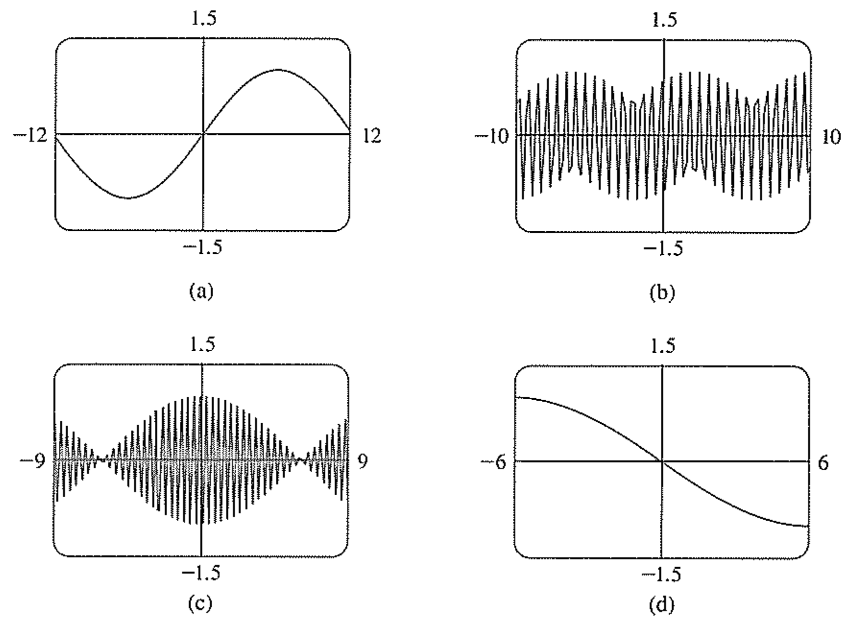


FIGURA 6
Gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} 50\,x$ en cuatro rectángulos de visualización

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y hallar un rectángulo de visualización adecuado, necesita hallar el periodo de la función $y = \operatorname{sen} 50\,x$. Puntos que la función $y = \operatorname{sen} x$ tiene el periodo 2π, y la gráfica de $y = \operatorname{sen} 50\,x$ se comprime horizontalmente por un factor de 50, el periodo de $y = \operatorname{sen} 50\,x$ es

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que sólo debe tratar con valores pequeños de x con el fin de mostrar sólo unas cuantas oscilaciones de la gráfica. Si elige el rectángulo de visualización $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtiene la gráfica que se muestra en la figura 7.

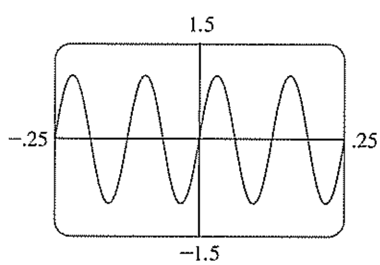


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen} 50x$

Ahora sabe en dónde estuvo el error en la figura 6. Las oscilaciones de $y = \operatorname{sen} 50\,x$ son tan rápidas que cuando la calculadora sitúa los puntos y los une, falla en la mayor parte de los puntos máximos y mínimos y, en consecuencia, da una impresión muy engañosa de la gráfica. □

Ha visto que el uso de un rectángulo de visualización inadecuado puede proporcionar una impresión engañosa de la gráfica de una función. En los ejemplos 1 y 3, resolvió el problema al cambiar a un rectángulo de visualización más grande. En el ejemplo 4, tuvo que reducirlo. En el ejemplo siguiente, verá una función para la que no existe un rectángulo de visualización sencilla que revele la verdadera forma de la gráfica.

V EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{100}\cos 100x$.

SOLUCIÓN En la figura 8 aparece la gráfica de f producida por una calculadora graficadora con el rectángulo de visualización $[-6.5, 6.5]$ por $[-1.5, 1.5]$. Se ve muy semejante a la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, pero con algunas protuberancias. Si realiza un acercamiento hacia el rectángulo de visualización $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.1]$, puede ver con mucho mayor claridad la forma de las protuberancias de la figura 9. La razón de este comportamiento es que el segundo término, $\frac{1}{100}\cos 100x$, es muy pequeño en comparación con el primero, sen x. Así, en realidad necesita dos gráficas para ver la verdadera naturaleza de esta función.

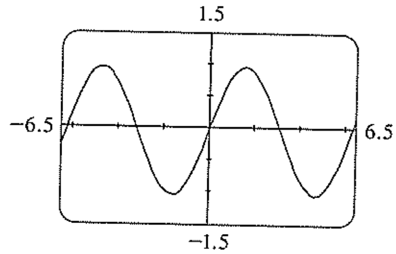


FIGURA 8

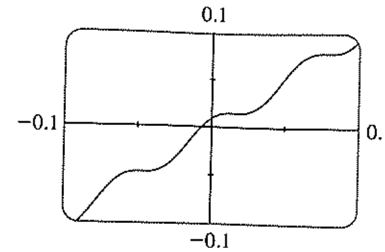


FIGURA 9

□

EJEMPLO 6 Dibuje la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{1 - x}$.

SOLUCIÓN En la figura 10(a) se ilustra la gráfica producida por una calculadora graficadora con el réctangulo de visualización $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. Al unir los puntos sucesivos de la gráfica, la calculadora produjo un segmento rectilíneo empinado de la parte superior a la inferior de la pantalla. Ese segmento rectilíneo en verdad no es parte de la gráfica. Note que el dominio de la función $y = 1/(1 - x)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$. Puede eliminar la extraña recta casi vertical experimentando con un cambio de escala. Cuando cambia al rectángulo de visualización más pequeño $[-4.7, 4.7]$ por $[-4.7, 4.7]$, en esta calculadora en particular, obtiene la gráfica mucho mejor que aparece en la figura 10(b).

▪ Otra forma de evitar la recta extraña es cambiar el modo de trazar las gráficas en la calculadora, de manera tal que los puntos no se unan.

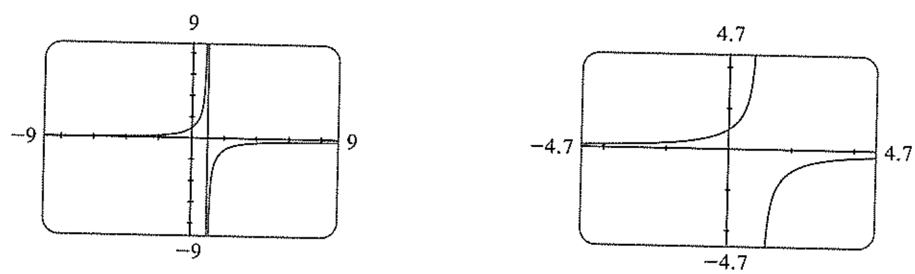


FIGURA 10 (a) (b)

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la función $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUCIÓN Algunos dispositivos graficadores despliegan la gráfica como en la figura 11, en tanto que otros producen una gráfica como la de la figura 12. Por lo que se vio en la sección 1.2 (figura 13), sabe que la gráfica de la figura 12 es la correcta; de esa manera, ¿qué sucedió en la figura 11? La explicación es que, algunas máquinas, calculan la raíz cúbica de x utilizando un logaritmo, en el cual no está definido si x es negativa, así que sólo se produce la mitad derecha de la gráfica.

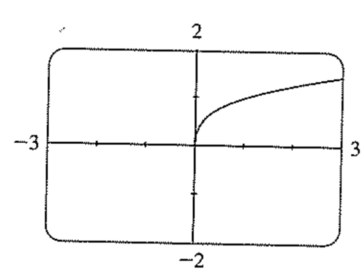


FIGURA 11

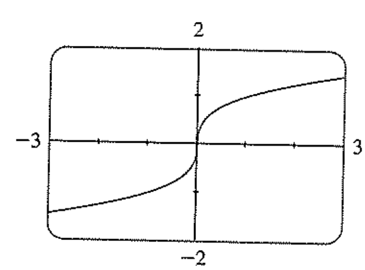


FIGURA 12

Usted debe experimentar con su máquina para ver cuál de estas dos gráficas se produce. Si obtiene la de la figura 11, puede obtener la imagen correcta al trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

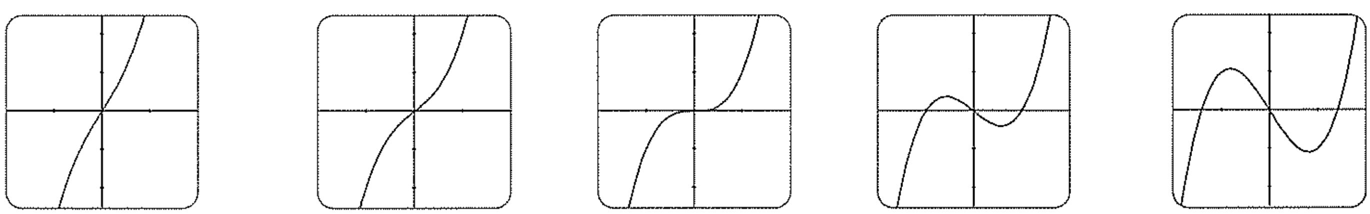
Note que esta función es igual a $\sqrt[3]{x}$, excepto cuando $x = 0$. □

Para comprender cómo se relaciona la expresión de una función con su gráfica, ayuda trazar la gráfica de una **familia de funciones**; es decir, una colección de funciones cuyas ecuaciones están relacionadas. En el ejemplo siguiente, se trazan las gráficas de los miembros de una familia de polinomios.

EJEMPLO 8 Dibuje $y = x^3 + cx$ para varios valores del número c. ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar c?

SOLUCIÓN En la figura 13 se muestran las gráficas de $y = x^3 + cx$ para $c = 2, 1, 0, -1$ y -2, para valores positivos de c, la gráfica crece de izquierda a derecha sin puntos máximos ni mínimos (picos o valles). Cuando $c = 0$, la curva es plana en el origen. Cuando c es negativo, la gráfica tiene un punto máximo y uno mínimo. Conforme c disminuye, el punto máximo se vuelve más alto y el mínimo, más bajo.

TEC En Visual 1.4 puede ver una animación de la figura 13



(a) $y = x^3 + 2x$ (b) $y = x^3 + x$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^3 - x$ (e) $y = x^3 - 2x$

FIGURA 13
Varios miembros de la familia de funciones $y = x^3 + cx$, se grafican todas en el rectángulo de visualización $[-2, 2]$ por $[-2.5, 2.5]$

□

EJEMPLO 9 Encuentre la solución de la ecuación $\cos x = x$ correcta hasta dos cifras decimales.

SOLUCIÓN Las soluciones de la ecuación $\cos x = x$ son las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = \cos x$ y $y = x$. En la figura 14(a), se ve que sólo existe una solución y que se encuentra entre 0 y 1. Si se hace un acercamiento al rectángulo de visualización $[0, 1]$ por $[0, 1]$, en la figura 14(b) se observa que la raíz está entre 0.7 y 0.8. De modo que al acercarse más hasta el rectángulo de visualización $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$ de la figura 14(c). Si mueve el cursor hasta el punto de intersección de las dos curvas, o por inspección y con base en que la escala x es 0.01, verá que la raíz de la ecuación es casi de 0.74. (Muchas calculadoras tienen una capacidad de intersección integrada.)

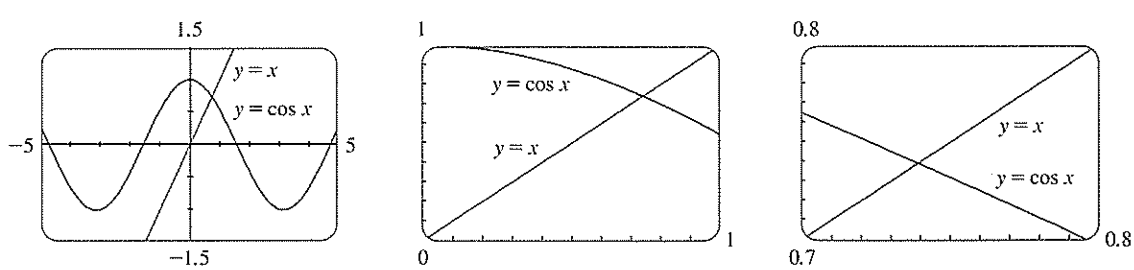


FIGURA 14
Localización de las raíces de $\cos x = x$

(a) $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$ escala-$x = 1$

(b) $[0, 1]$ por $[0, 1]$ escala-$x = 0.1$

(c) $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$ escala-$x = 0.01$ □

1.4 EJERCICIOS

1. Mediante una calculadora que grafique o una computadora determine cuál de los rectángulos de visualización da lugar a la gráfica más adecuada de la función $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2}$.
   (a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$ (b) $[0, 10]$ por $[0, 2]$
   (c) $[0, 10]$ por $[0, 10]$

2. Por medio de una calculadora que grafique o una computadora determine cuál de los rectángulos de visualización origina la gráfica más adecuada de la función $f(x) = x^4 - 16x^2 + 20$.
   (a) $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$ (b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
   (c) $[-50, 50]$ por $[-50, 50]$ (d) $[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

3–14 Determine un rectángulo de visualización adecuado para la función que se proporciona y úsela para dibujar la gráfica

3. $f(x) = 5 + 20x - x^2$
4. $f(x) = x^3 + 30x^2 + 200x$
5. $f(x) = \sqrt[4]{81 - x^4}$
6. $f(x) = \sqrt{0.1x + 20}$
7. $f(x) = x^3 - 225x$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$
9. $f(x) = \operatorname{sen}^2(1000x)$
10. $f(x) = \cos(0.001x)$
11. $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$
12. $f(x) = \sec(20\pi x)$
13. $y = 10 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 100x$
14. $y = x^2 + 0.002 \operatorname{sen} 50x$

15. Dibuje la elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$, al trazar las funciones cuyas gráficas son las mitades superior e inferior de la elipse.

16. Dibuje la hipérbola $y^2 - 9x^2 = 1$ dibujando las funciones cuyas gráficas son las ramas superior e inferior de la hipérbola.

17–18 ¿Los dibujos cruzan en el rectángulo de visualización que se proporciona? Si es así, ¿cuántos puntos de intersección están ahí?.

17. $y = 3x^2 - 6x + 1$, $y = 0.23x - 2.25$; $[-1, 3]$ por $[-2.5, 1.5]$

18. $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6, 2]$ por $[-5, 20]$

19–21 Encuentre todas las soluciones de la ecuación correcta hasta dos cifras decimales.

19. $x^3 - 9x^2 - 4 = 0$
20. $x^3 = 4x - 1$
21. $x^2 = \operatorname{sen} x$

22. En el ejemplo 9 se vio que la ecuación $\cos x = x$ tiene una solución.
   (a) Use una gráfica para demostrar que la ecuación $\cos x = 0.3x$ tiene tres soluciones y encuentre sus valores correctos hasta dos cifras decimales.
   (b) Encuentre un valor aproximado de m tal que la ecuación $\cos x = mx$ tiene dos soluciones.

23. Use gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = 10x^2$ y $g(x) = x^3/10$ será mayor en algún momento (es decir, mayor cuando x es muy grande).

24. Use gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = x^4 - 100x^3$ y $g(x) = x^3$ termina por ser mayor.

25. ¿Para cuáles valores de x se cumple que $|\operatorname{sen} x - x| < 0.1$?

26. Trace las gráficas de los polinomios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ y $Q(x) = 3x^5$ en la misma pantalla, usando en primer lugar el rectángulo de visualización $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y luego cambie al $[-10, 10]$ por $[-10000, 10000]$. ¿Qué observa a partir de estas gráficas?

27. En este ejercicio se considera la familia de las funciones $f(x) = \sqrt[n]{x}$, en donde n es un entero positivo.
   (a) Trace las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[6]{x}$ en la misma pantalla $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.
   (b) Trace las gráficas de las funciones $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla, $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Véase el ejemplo 7.)
   (c) Trace las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.
   (d) ¿A qué conclusiones puede llegar a partir de estas gráficas?

28. En este ejercicio se considera la familia de funciones $f(x) = 1/x^n$, en donde n es un entero positivo.
   (a) Trace las gráficas de las funciones $y = 1/x$ y $y = 1/x^3$ en la misma pantalla usando el rectángulo de visualización $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$.
   (b) Trace las gráficas de las funciones $y = 1/x^2$ y $y = 1/x^4$ en la misma pantalla usando el rectángulo de visualización del inciso (a).
   (c) Trace la gráfica de todas las funciones de los incisos (a) y (b) en la misma pantalla usando el rectángulo de visualización $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.
   (d) ¿A qué conclusiones puede llegar a partir de estas gráficas?

29. Dibuje la función $f(x) = x^4 + cx + x$, para varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar c?

30. Trace la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$, para diferentes valores de c. Describa cómo influye en la gráfica el valor de c variable.

31. Trace la gráfica de la función $y = x^n 2^{-x}$, $x \geqslant 0$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. ¿Cómo cambia la gráfica al crecer n?

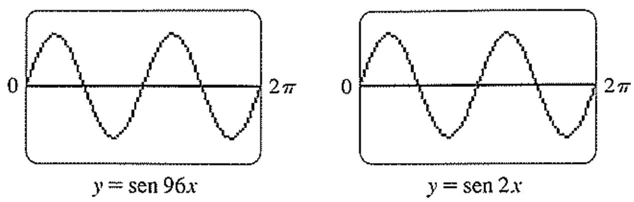
32. Las curvas con ecuaciones
$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$
se llaman **curvas de nariz de bala**. Dibuje algunas para ver por qué este nombre. ¿Qué sucede al crecer c?

33. ¿Qué sucede a la gráfica de la ecuación $y^2 = cx^3 + x^2$ a medida que c varía?

34. En este ejercicio se examina el efecto de la función interior g sobre una función compuesta $y = f(g(x))$.
   (a) Trace la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$, usando el rectángulo de visualización $[0, 400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Qué diferencia existe entre esta gráfica y la de la función seno?

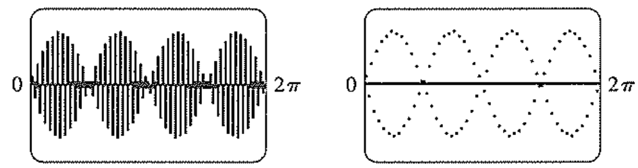
(b) Trace la gráfica de la función $y = \text{sen}\,(x^2)$ usando el rectángulo de visualización $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Qué diferencia existe entre esta gráfica y la de la función seno?

35. La figura muestra las gráficas de $y = \text{sen}\,96x$ y $y = \text{sen}\,2x$ según la exhibe una calculadora graficadora TI-83.



La primera gráfica es inexacta. Explique por qué las dos gráficas parecen ser idénticas. [*Sugerencia:* La ventana de graficación de la TI-83 tiene 95 pixeles de ancho.] ¿Qué puntos específicos dibuja la calculadora?

36. La primera gráfica que aparece en la figura es la de $y = \text{sen}\,45x$ según la exhibe una calculadora graficadora TI-83. Es inexacta y por eso, para ayudar a explicar su aspecto en la segunda gráfica se traza la curva de nuevo en la modalidad de puntos.



¿Qué dos curvas seno parece estar graficando la calculadora? Demuestre que cada punto sobre la gráfica de $y = \text{sen}\,45x$ que la TI-83 decide dibujar se encuentra de hecho sobre una de estas dos curvas. (La ventana de graficación de la TI-83 tiene 95 pixeles de ancho.)

1.5 FUNCIONES EXPONENCIALES

La función $f(x) = 2^x$ se denomina *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No debe confundirse con la función potencia $g(x) = x^2$ en la cual la variable es la base.

En general, una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es una constante positiva. Cabe recordar qué significa esto.

Si $x = n$, un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Si $x = 0$, en tal caso $a^0 = 1$, y si $x = -n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Si x es un número racional, $x = p/q$, donde p y q son enteros positivos y $q > 0$, por lo tanto

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Pero ¿cuál es el significado de a^x si x es un número irracional? ¿Qué quiere decir, por ejemplo, $2^{\sqrt{3}}$ o 5^{π}?

Para ayudar a responder esta pregunta primero se ve la gráfica de la función $y = 2^x$, donde x es racional. La figura 1 ilustra una representación de esta gráfica. Cabe ampliar el dominio de $y = 2^x$ para incluir números tanto racionales como irracionales.

En la gráfica de la figura 1 hay huecos que corresponden a valores irracionales de x. Cabe llenar los huecos definiendo $f(x) = 2^x$ donde $x \in \mathbb{R}$, de modo que f es una función que se incrementa. En particular, debido a que el número irracional $\sqrt{3}$ satisface

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

En el apéndice G aparece un planteamiento alterno para las funciones exponencial y logarítmica empleando cálculo integral.

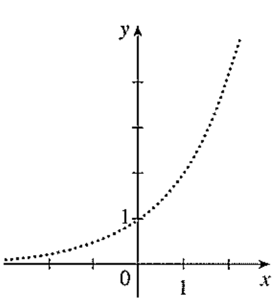


FIGURA 1
Representación de x racional $y = 2^x$

debe tener

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

y sabe qué significa $2^{1.7}$ y $2^{1.8}$ porque 1.7 y 1.8 son números racionales. De manera análoga, si usa mejores aproximaciones para $\sqrt{3}$, obtiene mejores aproximaciones para $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{array}{rcl} 1.73 < \sqrt{3} < 1.74 & \Rightarrow & 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\ 1.732 < \sqrt{3} < 1.733 & \Rightarrow & 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\ 1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 & \Rightarrow & 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\ 1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 & \Rightarrow & 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\ \vdots \quad \vdots & & \vdots \quad \vdots \end{array}$$

▨ Una prueba de este hecho se proporciona en J. Marsden y A. Weinstein, *Calculus Unlimited* (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1981.) Para una versión en línea, vease **www.cds.caltech.edu/~marsden/volume/cu/CU.pdf**

Es posible demostrar que existe exactamente un número que es mayor que todos los números

$$2^{1.7}, \quad 2^{1.73}, \quad 2^{1.732}, \quad 2^{1.7320}, \quad 2^{1.73205}, \quad \ldots$$

y menor que todos los números

$$2^{1.8}, \quad 2^{1.74}, \quad 2^{1.733}, \quad 2^{1.7321}, \quad 2^{1.73206}, \quad \ldots$$

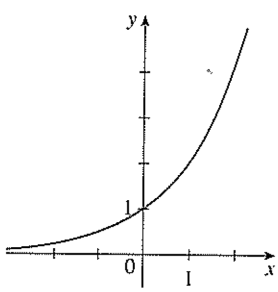


FIGURA 2
$y = 2^x$, real

Defina $2^{\sqrt{3}}$ como este número. Al utilizar el proceso de aproximación anterior puede calcularlo correcto hasta seis cifras decimales

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

De manera análoga, puede definir 2^x (o a^x, si $a > 0$) donde x es cualquier número irracional. La figura 2 muestra cómo se llenaron todos los huecos en la figura 1 para completar la gráfica de la función $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$.

En la figura 3 se muestran las gráficas de los miembros de la familia de funciones $y = a^x$ para distintos valores de la base a. Observe que todas estas gráficas pasan por el mismo punto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Note asimismo que a medida que aumenta la base a, se incrementa más rápido la función exponencial (para $x > 0$).

▨ Si $0 < a < 1$, después a^x se aproxima a 0 conforme x aumenta. Si $a > 1$, entonces a^x se aproxima a 0 a medida que x disminuye a través de valores negativos. En ambos casos el eje x es una asíntota horizontal. Estos aspectos se analizan en la sección 2.6.

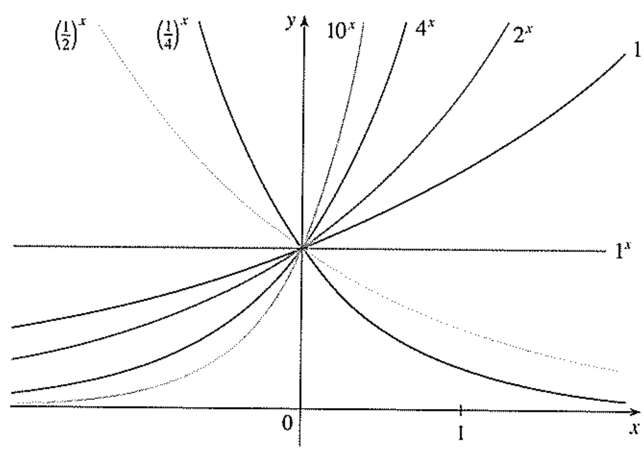
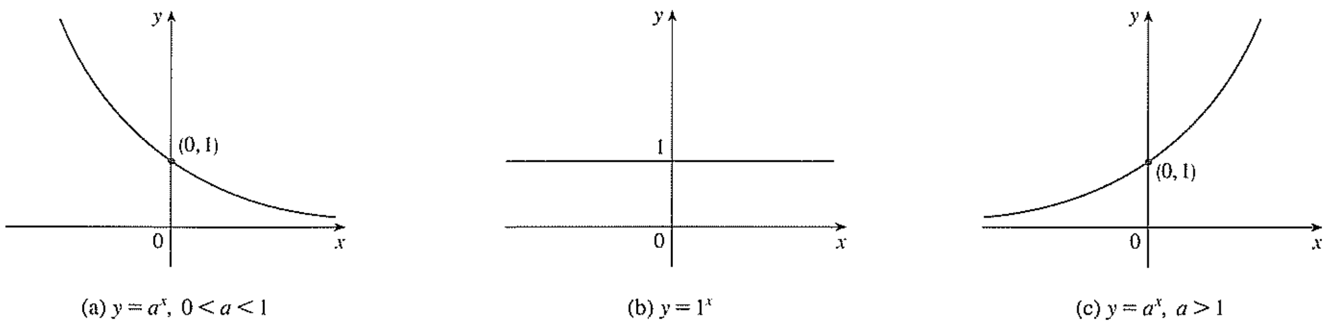


FIGURA 3

De la figura 3 puede verse que básicamente existen tres tipos de funciones exponenciales $y = a^x$. Si $0 < a < 1$, disminuye la función exponencial; si $a = 1$, es una constante, y si $a > 1$, se incrementa. Estos tres casos se ilustran en la figura 4. Observe que si $a \neq 1$, entonces la función exponencial $y = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Observe asimismo que, puesto que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, la gráfica de $y = (1/a)^x$ es sólo el reflejo de $y = a^x$ con respecto al eje y.



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

FIGURA 4

En las propiedades siguientes se encuentra un motivo de la importancia de la función exponencial. Si x y y son números racionales, entonces a partir del álgebra elemental se conocen bien estas leyes. Es posible probar que siguen siendo verdaderas para números arbitrarios reales x y y. (Vease apéndice G).

www.stewartcalculus.com Para revisar y practicar las leyes de exponentes, oprima en *Review of Algebra*

> **LEY DE LOS EXPONENTES** Si a y b son números positivos y x y y son cualquier número real, en tal caso
>
> **1.** $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la función $y = 3 - 2^x$ y determine su dominio y su intervalo.

Para un repaso de reflexión y desplazamiento de gráficas, vea la sección 1.3.

SOLUCIÓN Primero se refleja la gráfica de $y = 2^x$ [que se ilustra en la figura 5(a)] con respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = -2^x$ de la figura 5(b). Luego desplace la gráfica de $y = -2^x$ tres unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = 3 - 2^x$ que aparece en la figura 5(c). El dominio es $\mathbb{R}$ y el intervalo $(-\infty, 3)$.

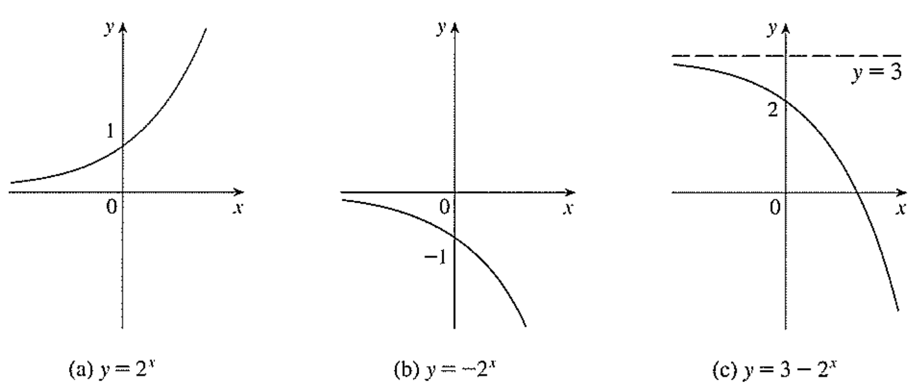


FIGURA 5 (a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$ □

EJEMPLO 2 Mediante un dispositivo graficador, compare la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función potencia $g(x) = x^2$. ¿Cuál función aumenta más rápido cuando x es grande?

SOLUCIÓN La figura 6 muestra ambas funciones trazadas en el rectángulo de visualización $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Observe que las gráficas se intersecan tres veces, pero para $x > 4$ la gráfica de $f(x) = 2x$ permanece por arriba de la gráfica de $g(x) = x^2$. La figura 7 proporciona una visión más global y denota que para valores grandes de x, la función exponencial $y = 2^x$ aumenta mucho más rápido que la función potencia $y = x^2$.

El ejemplo 2 muestra que $y = 2^x$ aumenta con mayor rapidez que $y = x^2$. Para demostrar qué tan rápido aumenta $f(x) = 2^x$, efectúe el experimento de pensamiento siguiente. Suponga que empieza con un trozo de papel de un milésimo de pulgada de espesor y lo dobla a la mitad 50 veces. Cada vez que dobla el papel a la mitad, el espesor se duplica, por lo tanto el espesor del trozo resultante sería $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿Qué tan grueso cree usted que es? Resulta ser ¡más de 17 millones de millas!

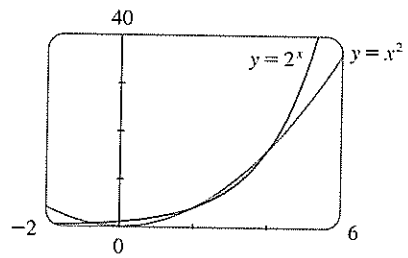


FIGURA 6

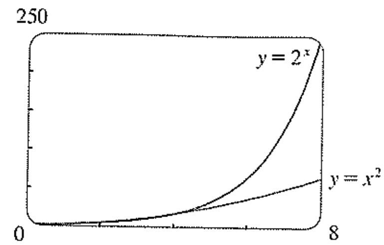


FIGURA 7

□

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial se suscita muy a menudo en los modelos matemáticos de la naturaleza y la sociedad. A continuación se indica brevemente cómo surge en la descripción de crecimiento de la población. En el capítulo 1.3 se abordarán éstas y otras aplicaciones con mayor detalle.

En primer lugar, considere una población de bacterias en un medio nutriente homogéneo. Suponga que al muestrear la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si el número de bacterias en el tiempo t es $p(t)$, donde t se mide en horas, y la población inicial es $p(0) = 1000$, tiene en tal caso

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$
$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

A partir de este patrón parece ser que, en términos generales,

$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

Esta función de población es un múltiplo constante de la función exponencial $y = 2^t$, de modo que manifiesta el crecimiento rápido que observa en las figuras 2 y 7. En condiciones ideales (espacio ilimitado así como nutrición y libertad de enfermedades) este crecimiento exponencial es típico de lo que ocurre en realidad en la naturaleza.

¿Qué sucede con la población humana? La tabla 1 muestra datos respecto de la población del mundo en el siglo XX y la figura 8 ilustra la gráfica de dispersión correspondiente.

TABLA 1

Año	Población (millones)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

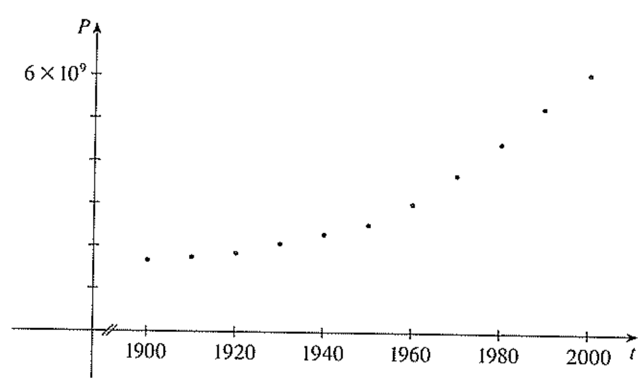


FIGURA 8 Gráfica de dispersión para el crecimiento de la población en el mundo

El patrón de los puntos de información que aparece en la figura 8 sugiere crecimiento exponencial, por eso es conveniente usar una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para aplicar el método de mínimos cuadrados y obtener el modelo exponencial

$$P = (0.008079266) \cdot (1.013731)^t$$

La figura 9 muestra la gráfica de esta función exponencial con los puntos de información originales. Observe que la curva exponencial coincide razonablemente bien con los datos. El periodo de crecimiento relativamente lento de la población se explica mediante las dos guerras mundiales y la Gran Depresión ocurrida en la década de los trienta.

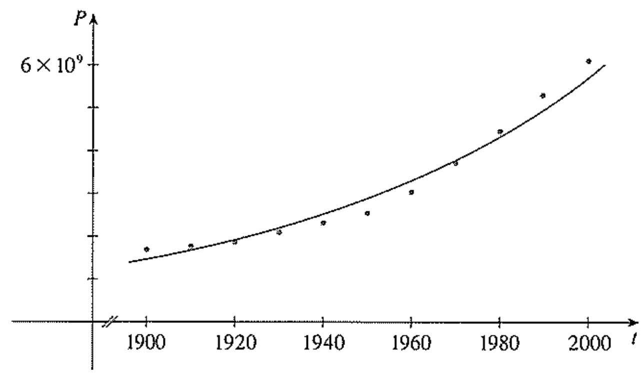


FIGURA 9
Modelo exponencial para crecimiento de la población

EL NÚMERO e

De todas las bases posibles para una función exponencial, existe una que es más conveniente para los propósitos del cálculo. La elección de una base a se ve influida por la manera en que la gráfica de $y = a^x$ cruza el eje y. Las figuras 10 y 11 muestran las líneas tangentes a las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto $(0, 1)$. (Las líneas tangentes se definirán con precisión en la sección 2.7. Para los propósitos actuales, puede imaginarse la línea tangente a una gráfica exponencial en un punto como la recta que toca la gráfica sólo en ese punto.) Si mide las pendientes de estas rectas tangentes en $(0, 1)$, encontrará que $m \approx 0.7$ para $y = 2^x$ y $m \approx 1.1$ para $y = 3^x$.

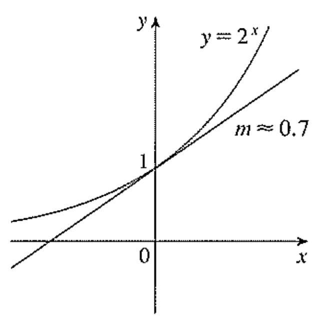


FIGURA 10

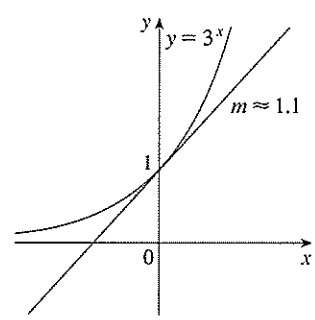


FIGURA 11

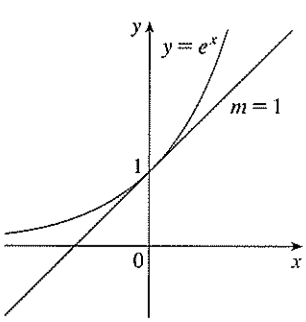


FIGURA 12
La función exponencial natural cruza el eje y con una pendiente de 1

Como verá en el capítulo 3, resulta que algunas de las fórmulas del cálculo se simplificarán en gran medida si elige la base a de manera que la pendiente de la línea tangente a $y = a^x$ en $(0, 1)$ sea *exactamente* 1 (véase la figura 12). De hecho, *existe* tal número y es denotado por la letra e. (Esta notación la escogió el matemático suizo Leonhard Euler en 1727, probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial.*) En vista de las figuras 10 y 11, no causa sorpresa alguna que el número e se encuentre entre 2 y 3 y la gráfica de $y = e^x$ entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. (Véase la figura 13.) En el capítulo 3 verá que el valor de e, correcto hasta cinco lugares decimales, es

$$e \approx 2.71828$$

TEC Module 1.5 le permite graficar funciones exponenciales con varias bases y con sus líneas tangentes, a fin de estimar en forma más aproximada el valor de a para el cual la tangente tiene la pendiente 1.

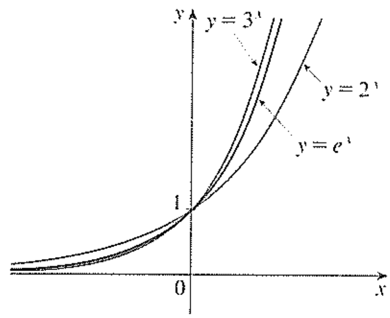
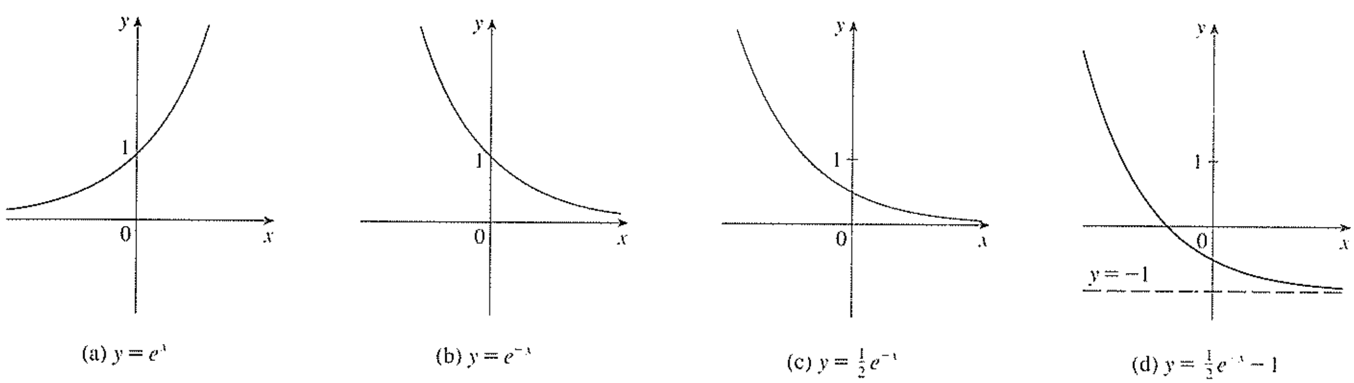


FIGURA 13

V EJEMPLO 3 Dibuje la función $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ y determine el dominio y el rango.

SOLUCIÓN Empiece por la gráfica de $y = e^x$ de las figuras 12 y 14(a) y refleje con respecto al eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ en la figura 14(b). (Note que la gráfica cruza el eje y con una pendiente de -1.) Luego comprima la gráfica verticalmente por un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en la figura 14(c). Por último, desplace la gráfica una unidad hacia abajo para obtener la gráfica deseada en la figura 14(d). El dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es $(-1, \infty)$.



(a) $y = e^x$ (b) $y = e^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 14

¿Qué tanto cree usted que tenga que ir hacia la derecha para que la altura de la gráfica de $y = e^x$ exceda de un millón? El ejemplo siguiente demuestra el crecimiento rápido de esta función al proporcionar una respuesta que quizás le sorprenda.

EJEMPLO 4 Use un dispositivo graficador para hallar los valores de x para los cuales $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUCIÓN En la figura 15 aparece tanto la función $y = e^x$ como la línea horizontal $y = 1\,000\,000$. Estas curvas se intersecan cuando $x \approx 13.8$. Así, $e^x > 10^6$ cuando $x > 13.8$. Tal vez le sorprenda que los valores de la función exponencial ya hayan rebasado un millón cuando x es sólo 14.

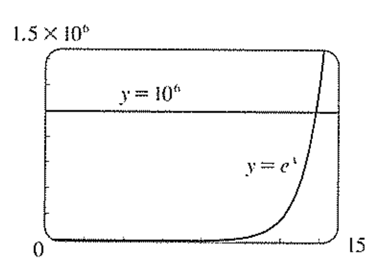


FIGURA 15

1.5 EJERCICIOS

1. (a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base $a > 0$.
   (b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
   (c) Si $a \neq 1$, ¿cuál es el intervalo de esta función?
   (d) Trace la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada uno de los casos siguientes.
   (i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

2. (a) ¿Cómo se define el número e?
   (b))¿Cuál es un valor aproximado para e?
   (c) ¿Cuál es la función exponencial natural?

3–6 Dibuje las funciones que se proporcionan sobre una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

3. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$
4. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$
5. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$
6. $y = 0.9^x$, $y = 0.6^x$, $y = 0.3^x$, $y = 0.1^x$

7–12 Realice un boceto de la gráfica de la función. No utilice calculadora. Sólo use las gráficas de las figuras 3 y 12 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

7. $y = 4^x - 3$
8. $y = 4^{x-3}$
9. $y = -2^{-x}$
10. $y = 1 + 2e^x$
11. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$
12. $y = 2(1 - e^{-x})$

13. Comenzando por la gráfica de $y = e^x$, escriba la ecuación de la gráfica que resulta de
   (a) desplazarse 2 unidades hacia abajo
   (b) desplazarse 2 unidades hacia la derecha
   (c) reflejar respecto al eje x
   (d) reflejar respecto al eje y
   (e) reflejar respecto al eje x y a continuación al eje y

14. Empezando por la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica resultante de
   (a) reflejar respecto a la recta $y = 4$
   (b) reflejar respecto a la línea $x = 2$

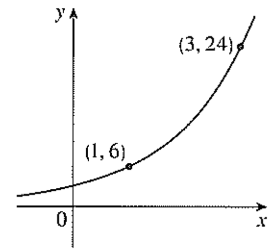
15–16 Encuentre el dominio de cada función.

15. (a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

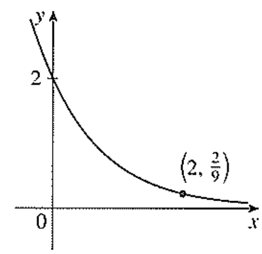
16. (a) $g(t) = \operatorname{sen}(e^{-t})$ (b) $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

17–18 Encuentre la función exponencial $f(x) = Ca^x$ cuya gráfica se proporciona.

17.



18.



19. Si $f(x) = 5^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

20. Suponga que le ofrecen un trabajo que dura un mes. ¿Cuál de los métodos de pago siguientes prefiere?
   I. Un millón al mes.
   II. Un centavo el primer día del mes. Dos centavos el segundo día, cuatro centavos el tercero y, en general, 2^{n-1} centavos el n-ésimo día.

21. Suponga que las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ se dibujan sobre una plantilla de coordenadas donde la unidad de medición es 1 pulgada. Demuestre que, a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica de f es 48 pies pero la altura de la gráfica es alrededor de 265 mi.

22. Compare las funciones $f(x) = x^5$ y $g(x) = 5^x$ al trazar ambas en varios rectángulos de visualización. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas corregidos a un solo lugar decimal. ¿Qué función crece más rápidamente cuando x es grande?

23. Compare las funciones $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = e^x$ trazando tanto f como g en varios rectángulos de visualización. ¿Cuándo rebasa finalmente la gráfica de g la gráfica de f?

24. Utilice una gráfica para estimar los valores de x tales que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

25. Se sabe que en condiciones ideales cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Suponga que al principio hay 100 bacterias.

(a) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?
(b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de t horas?
(c) Estime el tamaño de la población después de 20 horas.
(d) Dibuje la función de población y estime el tiempo que se requiere para que la población llegue a 50 000.

26. Un cultivo de bacterias inicia con 500 baterias y duplica su tamaño cada media hora..

(a) ¿Cuántas bacterias existen después de 3 horas?
(b) ¿Cuántas bacterias existen después de t horas?
(c) ¿Cuantas baterias existen después de 40 minutos?
(d) Grafique la función población y estime el tiempo para que la población alcance 100 000.

27. Use una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para modelar la población del mundo con la información de 1950 a 2000 que aparecen en la tabla 1 en la página 55. Recurra al modelo para estimar la población en el año 1993 y predecirla en el año 2010.

28. La tabla siguiente presenta la población de Estados Unidos, en millones, para los años 1900 a 2000. Use una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para modelar la población de Estados Unidos desde 1900. Use el modelo para estimar la población en el año 1925 y predecirla en el 2010 y el 2020.

Año	Población	Año	Población
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	281
1950	150		

29. Si gráfica la función

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

verá que f parece una función impar. Demuéstrelo

30. Dibuje diferentes grupos de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando b cambia? ¿Cómo cambia cuando a cambia?

1.6 FUNCIONES INVERSAS Y LOGARITMOS

La tabla 1 proporciona información de un experimento en el cual un cultivo de bacterias se inició con 100 bacterias en un medio nutriente limitado; el tamaño de la población de bacterias se registró a intervalos de horas. El número de bacterias N es una función del tiempo t: $N = f(t)$.

Sin embargo, suponga que la bióloga modifica su punto de vista y se interesa en el tiempo que se requiere para que la población alcance diversos niveles. En otras palabras, ella considera a t como una función de N. A esta función se le llama *función inversa* de f, denotada por f^{-1}, y se lee "f inversa". De esta manera, $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo que se requiere para que el nivel de la población llegue a N. Los valores de f^{-1} pueden encontrarse leyendo la tabla 1 de derecha a izquierda o bien consultando la tabla 2. Por ejemplo, $f^{-1}(550) = 6$ porque $f(6) = 550$.

TABLA 1 N como una función de t

t (horas)	$N = f(t)$ = población en el tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABLA 2 t como función de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo para llegar a N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

No todas las funciones poseen inversas. Compare las funciones f y g cuyos diagramas de flechas se muestran en la figura 1. Observe que f nunca adopta el mismo valor dos veces (dos entradas cualesquiera en A tienen salidas diferentes), en tanto que g adopta el mismo valor dos veces (tanto 2 como 3 tienen la misma salida, 4).
En símbolos,

$$g(2) = g(3)$$

pero $\qquad f(x_1) \neq f(x_2) \qquad$ siempre que $x_1 \neq x_2$

Las funciones que comparten esta función con f se llaman *funciones uno a uno.*

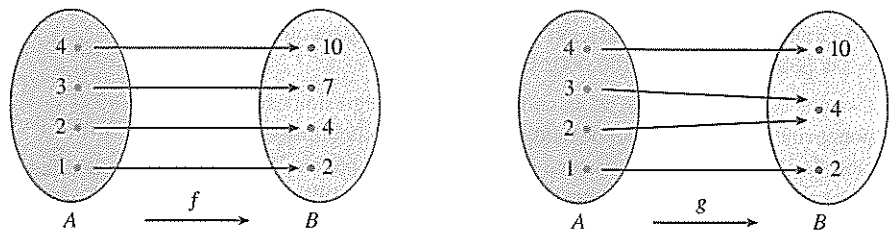


FIGURA 1
f es uno a uno; g no lo es

En el lenguaje de entradas y salidas, esta definición dice que f está uno a uno si cada salida correspoñde a sólo una entrada.

1 DEFINICIÓN A una función f se le llama **función uno a uno** si nunca adopta el mismo valor dos veces; es decir,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Si una línea horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, como es el caso de la figura 2 existen números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no está uno a uno. Debido a eso tenemos el método geométrico siguiente para determinar si una función es uno a uno.

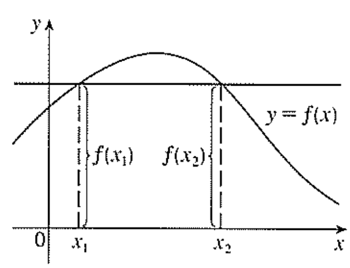


FIGURA 2
Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$

PRUEBA DE LA LÍNEA HORIZONTAL Una función es uno a uno si y sólo si, ninguna línea horizontal interseca su gráfica más de una vez.

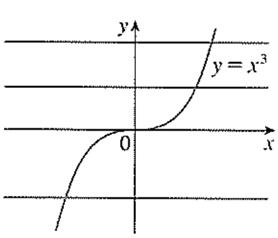


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ es uno a uno

EJEMPLO 1 ¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números distintos no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, por la definición 1, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 En la figura 3 ve que ninguna línea horizontal interseca la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por consiguiente, mediante la prueba de la línea horizontal, f es uno a uno. □

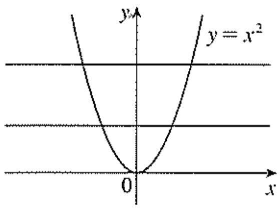


FIGURA 4
$g(x)=x^2$ no es uno a uno

EJEMPLO 2 ¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

y de este modo 1 y -1 tienen la misma salida.

SOLUCIÓN 2 En la figura 4 existen líneas horizontales que intersecan la gráfica de g más de una vez. Por consiguiente, mediante la prueba de la línea horizontal, g no es uno a uno □

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas según la siguiente definición

[2] **DEFINICIÓN** Sea f una función uno a uno con dominio A e intervalo B. Luego su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y intervalo A y se define mediante

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier y en B.

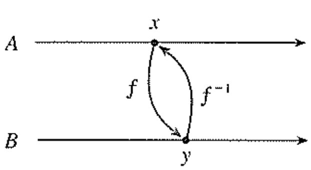


FIGURA 5

Esta definición dice que si f mapea x hacia y, después f^{-1} mapea y de regreso hacia x. (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida en forma única.) El diagrama de flechas de la figura 5 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. Observe que

dominio de f^{-1} = intervalo de f

intervalo f^{-1} = dominio de f

Por ejemplo, la función inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ porque si $y = x^3$, en tal caso

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

PRECAUCIÓN No confundir el -1 en f^{-1} con un exponente. De esta manera

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no} \text{ significa } \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ podría, no obstante, escribirse como $[f(x)]^{-1}$.

EJEMPLO 3 Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, encuentre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1}

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10$$

El diagrama que aparece en la figura 6 pone en evidencia la manera en que f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

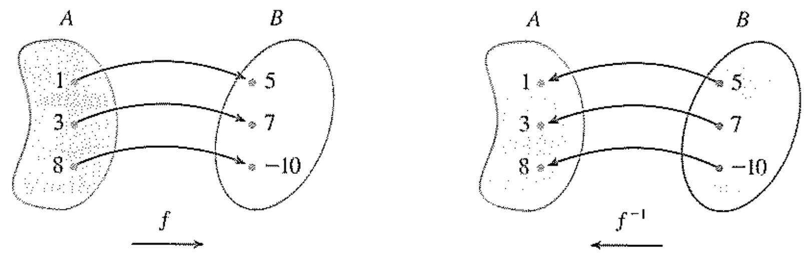


FIGURA 6
La función inversa invierte las entradas y las salidas

□

Por tradición la letra x se usa como la variable independiente, así, al concentrarse en f^{-1} en vez de sobre f, por lo regular invierte las funciones que juegan x y y en la definición 2 y escribia

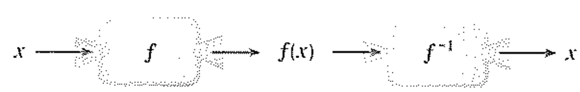
[3]
$$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$

Al sustituir y en la definición 2, y sustituir x en (3), obtiene las **ecuaciones** de **cancelación** siguientes:

[4]
$$\begin{array}{|ll|} f^{-1}(f(x)) = x & \text{para toda } x \text{ en } A \\ f(f^{-1}(x)) = x & \text{para toda } x \text{ en } B \end{array}$$

La primera ecuación de cancelación dice que si empieza con x, aplica f, a continuación aplica f^{-1}, llega de nuevo a x, donde empieza (véase el diagrama que aparece en la figura 7). Así, f^{-1} deshace lo que f hace. La segunda ecuación dice que f deshace lo que f^{-1} hace.

FIGURA 7



Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, luego $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y de ese modo las ecuaciones de cancelación se convierten en

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Estas ecuaciones indican simplemente que la función cúbica y la función raíz cúbica se cancelan entre sí cuando se aplican en forma sucesiva.

Vea ahora cómo calcular funciones inversas. Si tiene una función $y = f(x)$ y es capaz de resolver esta ecuación para x en términos de y, en tal caso según la definición 2 tiene que $x = f^{-1}(y)$. Si desea nombrar como x la variable independiente, por lo tanto intercambie x y y y llegue a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

[5] CÓMO ENCONTRAR LA FUNCIÓN INVERSA DE UNA FUNCIÓN f UNO A UNO

ETAPA 1 Escriba $y = f(x)$.

ETAPA 2 Resuelva la ecuación para x en términos de y (de ser posible).

ETAPA 3 Para expresar f^{-1} como una función de x, intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 4 Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUCIÓN Según (5) primero escriba

$$y = x^3 + 2$$

A continuación resuelva esta ecuación para x:

$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Por último, intercambie x y y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

En consecuencia, la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. □

Observe en el ejemplo 4 cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f sigue la regla "eleve al Cubo, entonces sume 2", f^{-1} sigue la regla "Reste 2, entonces obtenga la raíz cuadrada".

El principio de intercambiar x y y para hallar la función inversa da también el método para obtener la gráfica de f^{-1} de la gráfica de f. Puesto que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) se encuentra en la gráfica de f si y sólo si el punto (a, b) está sobre la gráfica de f^{-1}. Pero obtiene el punto (b, a) de (a, b) al reflejar respecto a la línea $y = x$. (Véase la figura 8.)

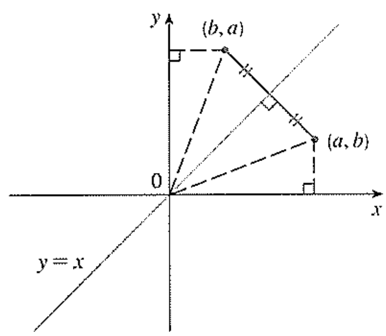


FIGURA 8

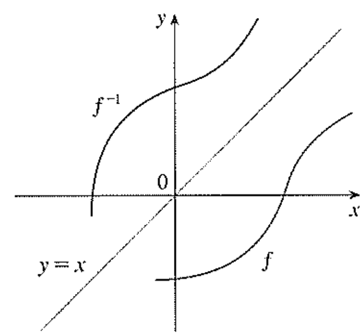


FIGURA 9

Debido a eso, como lo ilustra la figura 9:

La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la línea $y = x$.

EJEMPLO 5 Trace las gráficas de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ y su función inversa usando los mismos ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN En primer lugar trace la curva de $y = \sqrt{-1 - x}$ (la mitad superior de la parábola $y^2 = -1 - x$, o bien $x = -y^2 - 1$) y a continuación refleje respecto a la línea $y = x$ para obtener la gráfica de f^{-1}. (Véase la figura 10.) A manera de comprobación de la gráfica, observe que la expresión para f^{-1} es $f^{-1}(x) = -x^2 - 1, x \geqslant 0$. De modo que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = -x^2 - 1$ y a partir de la figura 10, esto parece ser razonable. □

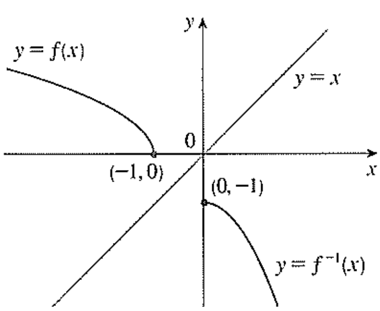


FIGURA 10

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función exponencial $f(x) = a^x$ bien se incrementa o disminuye y por eso mediante la prueba de la línea horizontal es uno a uno. Debido a eso tiene una función inversa f^{-1}, a la cual se le da el nombre de **función logarítmica con base *a*** y se denota mediante $\log_a$. Si utiliza la formulación de una función inversa dada por (3)

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

luego tiene

6 $$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

De ese modo, si $x > 0$, en tal caso $\log_a x$ es el exponente al cual debe elevarse la base a para dar x. Por ejemplo, $\log_{10} 0.001 = -3$ porque $10^{-3} = 0.001$.

Las ecuaciones de cancelación (4) cuando se aplican a las funciones $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se convierten en

7
$$\log_a(a^x) = x \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x \quad \text{para toda } x > 0$$

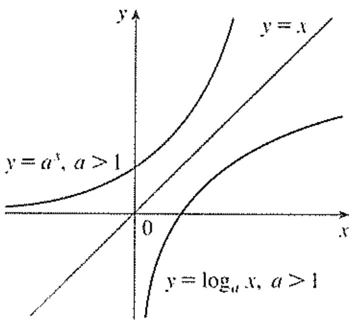


FIGURA 11

La función logarítmica $\log_a$ tiene dominio $(0, \infty)$ e intervalo $\mathbb{R}$. Su gráfica es el reflejo de la gráfica de $y = a^x$ respecto a la línea $y = x$.

La figura 11 muestra el caso en que $a > 1$. (Las funciones logarítmicas más importantes tienen base $a > 1$.) El hecho de que $y = a^x$ sea una función que aumenta muy rápidamente para $x > 0$ se refleja en el hecho de que $y = \log_a x$ es una función que aumenta muy lentamente para $x > 1$.

La figura 12 muestra las gráficas de $y = \log_a x$ con varios valores de la base $a > 1$. Como $\log_a 1 = 0$, las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

Las siguientes propiedades de las funciones logarítmicas se derivan de las propiedades correspondientes de las funciones exponenciales que se dieron en la sección 1.5.

LEYES DE LOS LOGARITMOS Si x y y son números positivos, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r\log_a x$ (donde r es cualquier número real)

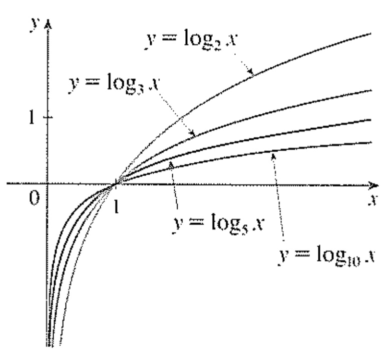


FIGURA 12

EJEMPLO 6 Use las leyes de los logaritmos para evaluar $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUCIÓN Al usar la ley 2, tiene

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

Porque $2^4 = 16$. □

■ NOTACIÓN PARA LOGARITMOS
La mayoría de los libros de texto de cálculo y de ciencias, así como las calculadoras usan la notación $\ln x$ para el logaritmo natural y $\log x$ para el "logaritmo común", $\log_{10} x$. Sin embargo, en la literatura de matemáticas y científica más avanzada y en los lenguajes de computadora, la notación $\log x$ denota por lo general al logaritmo natural

LOGARITMOS NATURALES

En el capítulo 3 verá que de todas las bases a posibles para logaritmos, la elección más conveniente es el número e, que se definió en la sección 1.5. Al logaritmo con base e se le llama **logaritmo natural** y tiene una notación especial

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Si pone $a = e$ y sustituye $\log_e$ con "ln" en (6) y (7), por lo tanto las propiedades definitorias de la función logaritmo natural se convierten en

8 $$\boxed{\ln x = y \iff e^y = x}$$

9 $$\boxed{\begin{array}{ll} \ln(e^x) = x & x \in \mathbb{R} \\ e^{\ln x} = x & x > 0 \end{array}}$$

En particular, si establece que $x = 1$, obtiene

$$\boxed{\ln e = 1}$$

EJEMPLO 7 Encuentre x si $\ln x = 5$.

SOLUCIÓN 1 De (8) observe que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Por lo tanto, $x = e^5$.

(Si trabajar con la notación "ln" le causa problemas, sustitúyala con $\log_e$. Por lo tanto la ecuación se convierte en $\log_e x = 5$; por consiguiente, mediante la definición de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUCIÓN 2 Empiece con la ecuación

$$\ln x = 5$$

y aplique la función exponencial a ambos lados de la ecuación

$$e^{\ln x} = e^5$$

Pero la segunda ecuación de cancelación en (9) dice que $e^{\ln x} = x$. Por lo tanto, $x = e^5$. □

EJEMPLO 8 Resuelva la ecuación $e^{5-3x} = 10$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación y use (9):

$$\begin{aligned} \ln(e^{5-3x}) &= \ln 10 \\ 5 - 3x &= \ln 10 \\ 3x &= 5 - \ln 10 \\ x &= \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10) \end{aligned}$$

Como el logaritmo natural se encuentra en las calculadoras científicas, puede aproximar la solución a cuatro cifras decimales: $x \approx 0.8991$. □

EJEMPLO 9 Exprese $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como un solo logaritmo.

SOLUCIÓN Usando las leyes 3 y 1 de los logaritmos

$$\begin{aligned}\ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2}\\ &= \ln a + \ln\sqrt{b}\\ &= \ln(a\sqrt{b})\end{aligned}$$ □

La fórmula siguiente muestra que los logaritmos con cualquier base pueden expresarse en términos del logaritmo natural

10 FÓRMULA DE CAMBIO DE BASE Para cualquier número positivo a ($a \neq 1$), tiene

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

PRUEBA Sea $y = \log_a x$. En tal caso de (6), tiene $a^y = x$. Al tomar los logaritmos naturales de ambos lados de esta ecuación, obtiene $y \ln a = \ln x$. Por consiguiente

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$ □

Las calculadoras científicas tienen una tecla para logaritmos naturales, de modo que la fórmula 10 permite usar una calculadora para calcular un logaritmo con cualquier base (como se ilustra en el ejemplo siguiente). De manera análoga, la fórmula 10 permite dibujar cualquier función logarítmica en una calculadora o computadora graficadora (véase ejercicios 43 y 44).

EJEMPLO 10 Evalúe $\log_8 5$ correcto hasta seis lugares decimales.

SOLUCIÓN La fórmula 10 produce

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$ □

Las gráficas de la función exponencial $y = e^x$ y su función inversa, la función logaritmo natural, se ilustran en la figura 13. Debido a que la curva $y = e^x$ cruza el eje y con una pendiente de 1, se deduce que la curva reflejada $y = \ln x$ cruza el eje x con una pendiente de 1.

Al igual que todas las demás funciones logarítmicas que tienen una base mayor que 1, el logaritmo natural es una función creciente que se define sobre $(0, \infty)$ y el eje y es una asíntota vertical. (Esto significa que los valores de $\ln x$ se convierten en negativos muy grandes a medida que x se aproxima a cero.)

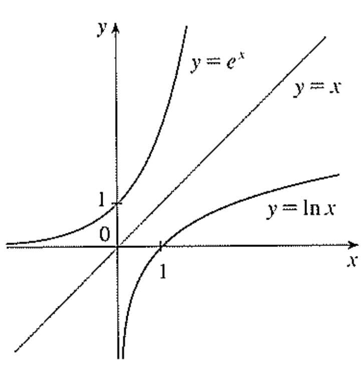


FIGURA 13

EJEMPLO 11 Trace la gráfica de la función $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUCIÓN Empiece con la gráfica de $y = \ln x$ según se proporciona en la figura 13. Al utilizar la transformación de la sección 1.3, vaya dos unidades hacia la derecha para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2)$ y luego desplácela una unidad hacia abajo para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2) - 1$. (Véase la figura 14.)

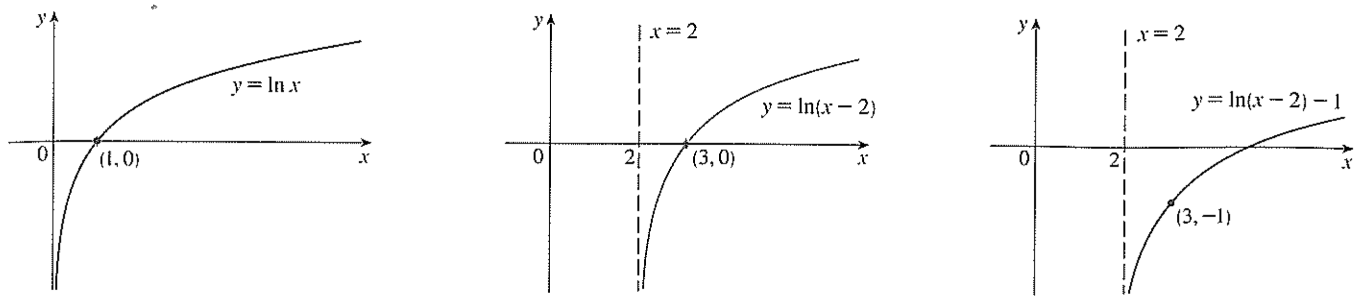


FIGURA 14

□

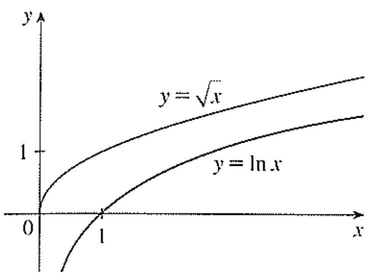


FIGURA 15

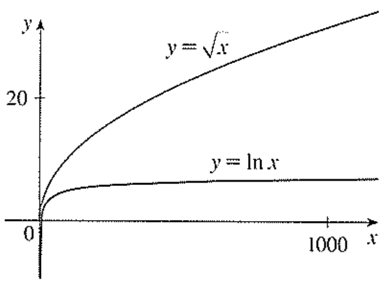


FIGURA 16

Si bien ln x es una función creciente, crece *muy* despacio cuando $x > 1$. De hecho, ln x crece más despacio que cualquier potencia positiva de x. Para ilustrar este hecho, compare valores aproximados de las funciones $y = \ln x$ y $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ en la tabla siguiente que aparecen dibujados en las figuras 15 y 16. Podrá observar que en un principio las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$ crecen en cantidades similares, pero en algún momento la función raíz rebasa por mucho al logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10 000	100 000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Cuando tratamos de calcular las funciones trigonométricas inversas hay una pequeña dificultad: puesto que las funciones trigonométricas no son uno a uno o biunívocas, no tienen funciones inversas. La dificultad se vence restringiendo los dominios de estas funciones de modo que se transformen en uno a uno.

Observe en la figura 17 que la función seno $y = \operatorname{sen} x$ no es uno a uno (aplique la prueba de la línea horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$ (véase figura 18) es uno a uno. La función inversa de esta función seno restringida f existe y se denota mediante sen^{-1} o arcsen. Se denomina **función inversa del seno** o **función arco seno**.

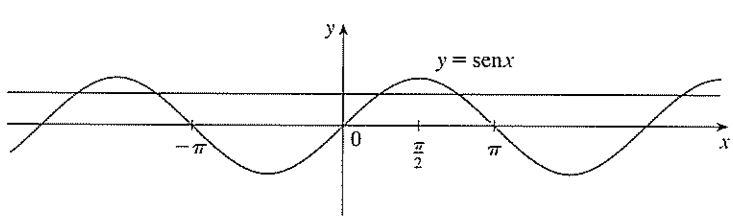


FIGURA 17

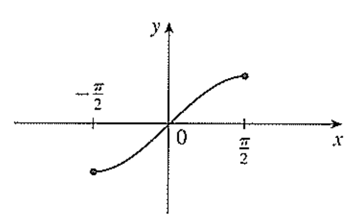


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x, -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Puesto que la definición de una función inversa establece que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

tiene

$$\boxed{\operatorname{sen}^{-1}x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

$\operatorname{sen}^{-1}x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Por esto, si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\operatorname{sen}^{-1}x$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

EJEMPLO 12 Determine (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\frac{1}{2})$ y (b) $\tan(\operatorname{arcsen} \frac{1}{3})$.

SOLUCIÓN

(a) Tenemos

$$\operatorname{sen}^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$$

porque $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\pi/6$ queda entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

(b) Sea $\theta = \operatorname{arcsen} \frac{1}{3}$, de modo que $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, podemos dibujar un triángulo rectángulo con ángulo θ como en la figura 19 y deducir de acuerdo con el Teorema de Pitágoras que el cateto faltante mide $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Esto permite que podamos saber a partir del triángulo que

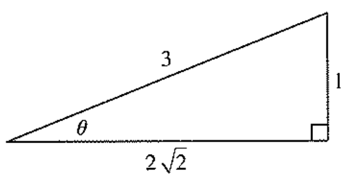


FIGURA 19

$$\tan(\operatorname{arcsen} \tfrac{1}{3}) = \tan \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$ □

Las ecuaciones de cancelación para el caso de las funciones inversas se transforman en

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) &= x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x) &= x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}}$$

El dominio de la función inversa del seno, sen^{-1}, es $[-1, 1]$ y el intervalo es $[-\pi/2, \pi/2]$, y su gráfica, que se ilustra en la figura 20, se obtiene de la función restringida del seno (figura 18) por reflexión con respecto a la línea $y = x$.

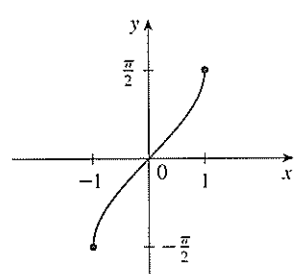


FIGURA 20
$y = \operatorname{sen}^{-1}x = \operatorname{arcsen} x$

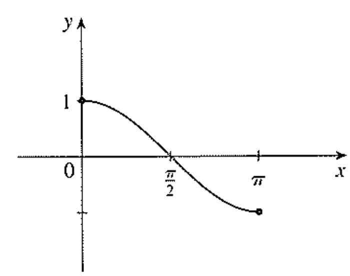


FIGURA 21
$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

La **función inversa del coseno** se trata en forma similar. La función restringida del coseno $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, es uno a uno (véase figura 21) y, de este modo, tiene una función inversa que se denota mediante $\cos^{-1}$ o arccos.

$$\boxed{\cos^{-1}x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi}$$

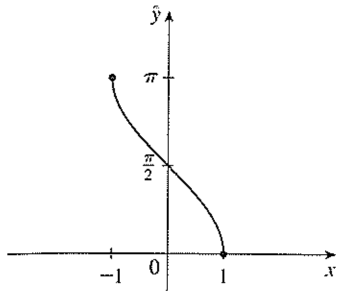


FIGURA 22
$y = \cos^{-1}x = \arccos x$

Las ecuaciones de cancelación son

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$\cos(\cos^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

El dominio de la función inversa del coseno, $\cos^{-1}$, es $[-1, 1]$ y el intervalo es $[0, \pi]$. Su gráfica se ilustra en la figura 22.

La función tangente se puede hacer uno a uno si se la restringe al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Por consiguiente, la **función tangente inversa** se define como la inversa de la función $f(x) = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Véase figura 23.) Se denota mediante $\tan^{-1}$ o arctan.

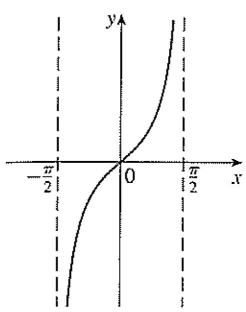


FIGURA 23
$y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\tan^{-1}x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

EJEMPLO 13 Simplifique la expresión $\cos(\tan^{-1}x)$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \tan^{-1}x$. Por lo tanto $\tan y = x$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Quiere determinar el cos y pero como tan y se conoce, es más fácil determinar primero sec y:

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{(puesto que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2\text{)}$$

De este modo $$\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

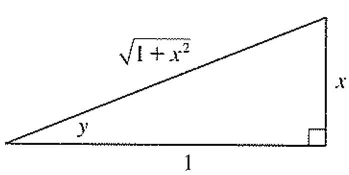


FIGURA 24

SOLUCIÓN 2 En lugar de aplicar las identidades trigonométricas como en la solución 1, es tal vez más fácil utilizar un diagrama. Si $y = \tan^{-1}x$, después $\tan y = x$, y puede saber a partir de la figura 24 (que ilustra el caso $y > 0$) que

$$\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$ □

La función tangente inversa, $\tan^{-1} = \arctan$, tiene por dominio $\mathbb{R}$ e intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Sus gráficas se muestran en la figura 25.

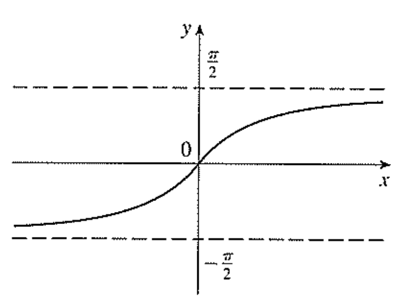


FIGURA 25
$y = \tan^{-1}x = \arctan x$

Las líneas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de la tangente. Puesto que la gráfica de $\tan^{-1}$ se obtiene reflejando la gráfica de la función tangente restringida con respecto a la línea $y = x$, se infiere que las líneas $y = \pi/2$ y $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica de $\tan^{-1}$.

Las funciones trigonométricas inversas restantes no se aplican con frecuencia por lo que se resumen en seguida.

11 $y = \csc^{-1}x \ (|x| \geqslant 1) \iff \csc y = x$ y $y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$

$y = \sec^{-1}x \ (|x| \geqslant 1) \iff \sec y = x$ y $y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$

$y = \cot^{-1}x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \cot y = x$ y $y \in (0, \pi)$

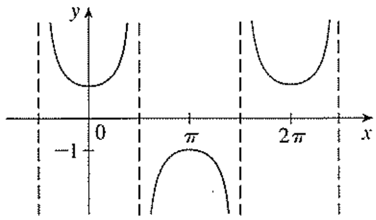


FIGURA 26
$y = \sec x$

No hay un acuerdo universal sobre la elección de los intervalos para y en las definiciones de $\csc^{-1}$ o $\sec^{-1}$. Por ejemplo, algunos autores usan $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ en la definición de $\sec^{-1}$. [Usted puede comprobar con la gráfica de la función secante de la figura 26 que funcionan tanto esta opción como la que se encuentra en (11).]

1.6 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una función uno a uno?
(b) ¿Cómo puede decir a partir de la gráfica de una función si ésta es uno a uno?

2. (a) Suponga que f es una función uno a uno con dominio A e intervalo B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el intervalo de f^{-1}?
(b) Si le dan una fórmula para f, ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1}?
(c) ¿Si le dan la gráfica de f, ¿cómo encuentra la gráfica de f^{-1}?

3–14 Se da una función mediante una tabla, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal. Determine si es uno a uno.

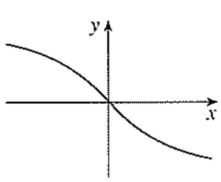
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

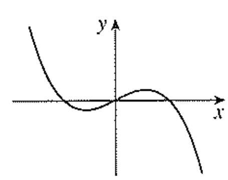
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

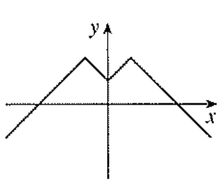
5.



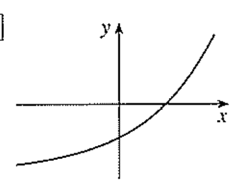
6.



7.



8.



9. $f(x) = x^2 - 2x$

10. $f(x) = 10 - 3x$

11. $g(x) = 1/x$

12. $g(x) = \cos x$

13. $f(t)$ es la altura de un balón de fútbol t segundos después de la patada de salida.

14. $f(t)$ es su altura a la edad de t.

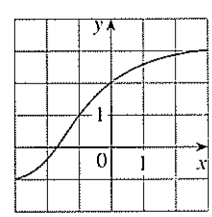
---

15. Si f es una función uno a uno tal que $f(2) = 9$, ¿cuánto es $f^{-1}(9)$?

16. Sea $f(x) = 3 + x^2 + \tan(\pi x/2)$, donde $-1 < x < 1$.
(a) Halle $f^{-1}(3)$.
(b) Encuentre $f(f^{-1}(5))$.

17. Si $g(x) = 3 + x + e^x$, encuentre $g^{-1}(4)$.

18. Se proporciona la gráfica de f.
(a) ¿Por qué f es uno a uno?
(b) Defina el dominio y el intervalo de f^{-1}.
(c) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(2)$.
(d) ¿Estime el valor de $f^{-1}(0)$.



19. La fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geqslant -459.67$, expresa la temperatura en grados Celsius C como una función de la temperatura en grados Fahrenheit F. Encuentre una fórmula para la función inversa e interprétela. ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

20. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con rapidez v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la rapidez de la luz en el vacío. Encuentre la función inversa de f y explique su significado.

21–26 Encuentre una fórmula para la inversa de la función.

21. $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$ **22.** $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{x^3}$ **24.** $y = 2x^3 + 3$

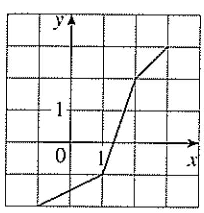
25. $y = \ln(x + 3)$ **26.** $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

27–28 Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y úsela para dibujar f^{-1}, f y la recta $y = x$ sobre la misma pantalla. Para verifi-car su trabajo, vea si las gráficas de f y f^{-1} son reflejos respecto a la recta.

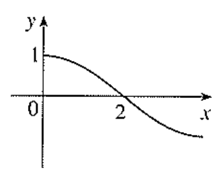
27. $f(x) = x^4 + 1,\ x \geqslant 0$ **28.** $f(x) = 2 - e^x$

29–30 Utilice la gráfica que se proporciona para f para dibujar la gráfica de f^{-1}.

29.



30.



---

31. (a) ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_a x$?
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) ¿Cuál es el intervalo de esta función?
(d) Trace la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$.

32. (a) ¿Qué es el logaritmo natural?
(b) ¿Qué es el logaritmo común?
(c) Trace las gráficas de la función logaritmo natural y la función exponencial natural con un conjunto común de ejes.

33–36 Encuentre el valor exacto de cada expresión.

33. (a) $\log_5 125$ (b) $\log_3 \frac{1}{27}$

34. (a) $\ln(1/e)$ (b) $\log_{10} \sqrt{10}$

35. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
(b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

36. (a) $e^{-2\ln 5}$ (b) $\ln(\ln e^{e^{10}})$

37–39 Exprese la cantidad que se proporciona como un logaritmo único.

37. $\ln 5 + 5\ln 3$

38. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2\ln c$

39. $\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln x - \ln \operatorname{sen} x$

---

40. Use la fórmula 10 para evaluar cada logaritmo correcto hasta seis cifras decimales.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8.4$

41–42 Use la fórmula 10 para dibujar las funciones que se proporcionan en una pantalla común. ¿De qué manera se relacionan estas gráficas?

41. $y = \log_{1.5} x,\quad y = \ln x,\quad y = \log_{10} x,\quad y = \log_{50} x$

42. $y = \ln x,\quad y = \log_{10} x,\quad y = e^x,\quad y = 10^x$

---

43. Suponga que la gráfica de $y = \log_2 x$ se dibuja en una plantilla de coordenadas donde la unidad de medida es una pulgada. ¿Cuántas millas hacia la derecha del origen hay que desplazarse antes que la altura de la curva llegue a 3 pies?

44. Compare las funciones $f(x) = x^{0.1}$ y $g(x) = \ln x$ mediante el dibujo de tanto f como g en varios rectángulos de visualización. ¿Cuándo termina la gráfica de f por rebasar la gráfica de g?

45–46 Haga un trazo aproximado de la gráfica de cada función. No use una calculadora. Utilice sólo las gráficas que se proporcionan en las figuras 12 y 13 y, de ser necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

45. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

46. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln|x|$

47–50 Resuelva cada ecuación para x.

47. (a) $2\ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

48. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

49. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

50. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, donde $a \neq b$

51–52 Resuelva cada desigualdad para x.

51. (a) $e^x < 10$ (b) $\ln x > -1$

52. (a) $2 < \ln x < 9$ (b) $e^{2-3x} > 4$

53–54 Encuentre (a) el dominio de f y (b) f^{-1} y su dominio.

53. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$ **54.** $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

CAS **55.** Dibuje la función $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ y explique por qué es uno a uno. A continuación use un sistema algebraico de computadora para encontrar una expresión explícita para $f^{-1}(x)$. (Su CAS generará tres expresiones posibles. Explique por qué dos de ellas son irrelevantes en este contexto.)

CAS **56.** (a) Si $g(x) = x^6 + x^4,\ x \geqslant 0$, utilice un sistema algebraico de computadora para encontrar una expresión para $g^{-1}(x)$.
(b) Use la expresión del inciso (a) para dibujar $y = g(x)$, $y = x$ y $y = g^{-1}(x)$ en la misma pantalla.

57. Si una población de bacterias inicia con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, luego el número de bacterias una vez que transcurren t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$. (Véase el ejercicio 25 en la sección 1.5.)
(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuándo llegará la población a 50 000?

58. Cuando se apaga el *flash* de una cámara, las baterías empiezan de inmediato a recargar el capacitor del *flash*, el cual almacena carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(La capacidad máxima de carga es Q_0 y t se mide en segundos.)

(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(b) ¿Cuánto tarda en cargar el capacitor hasta 90% de su capacidad si $a = 2$?

59–64 Calcule el valor exacto de cada expresión.

59. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

60. (a) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

61. (a) arctan 1 (b) $\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})$

62. (a) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\arccos(-\frac{1}{2})$

63. (a) tan(arctan 10) (b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(7\pi/3))$

64. (a) $\tan(\sec^{-1} 4)$ (b) $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{5}))$

65. Demuestre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1}x) = \sqrt{1 - x^2}$.

66–68 Simplifique la expresión.

66. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}x)$

67. $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$

68. $\cos(2\tan^{-1}x)$

69–70 Grafique las funciones dadas en la misma pantalla. ¿Cuál es la relación entre estas gráficas?

69. $y = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2; \quad y = \operatorname{sen}^{-1}x; \quad y = x$

70. $y = \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2; \quad y = \tan^{-1}x; \quad y = x$

71. Determine el dominio y el intervalo de la función.

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

72. (a) Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$ y explique el aspecto de la gráfica.

(b) Grafique la función $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. ¿Cuál es su explicación sobre el aspecto de esta gráfica?

73. (a) Si desplaza una curva hacia la izquierda, ¿qué pasa con su reflejo respecto a la línea $y = x$? En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$ donde f es una función uno a uno

(b) Encuentre una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.

1 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una función? ¿Cuál es su dominio y su intervalo?
   (b) ¿Qué es la gráfica de una función?
   (c) ¿Cómo puede usted decir si una curva dada es la gráfica de una función?
2. Analice cuatro maneras de representar una función. Ilustre su análisis con ejemplos.
3. (a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede decir si una función es par al mirar su gráfica?
   (b) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede decir si una función es impar al mirar su gráfica?
4. ¿Qué es una función creciente?
5. ¿Qué es un modelo matemático?
6. Proporcione un ejemplo de cada tipo de función
   (a) Función lineal (b) Función potencia
   (c) Función exponencial (d) Función cuadrática
   (e) Polinomio grado 5 (f) Función racional
7. Trace, a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las funciones siguientes.
   (a) $f(x) = x$ (b) $g(x) = x^2$
   (c) $h(x) = x^3$ (d) $j(x) = x^4$
8. Dibuje a mano un esquema aproximado de la gráfica de cada función.
   (a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \tan x$
   (c) $y = e^x$ (d) $y = \ln x$
   (e) $y = 1/x$ (f) $y = |x|$
   (g) $y = \sqrt{x}$ (h) $y = \tan^{-1} x$
9. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.
   (a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
   (b) ¿Cuál es el dominio de fg?
   (c) ¿Cuál es el dominio de f/g?
10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?
11. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen de la gráfica de f como se describe a continuación.
    (a) Desplazando 2 unidades hacia arriba
    (b) Desplazando 2 unidades hacia abajo
    (c) Desplazando 2 unidades hacia la derecha
    (d) Desplazando 2 unidades hacia la izquierda
    (e) Al reflejar respecto al eje x
    (f) Al reflejar respecto al eje y
    (g) Al alargar verticalmente por un factor de 2
    (h) Al contraer verticalmente por un factor de 2
    (i) Al alargar horizontalmente por un factor de 2
    (j) Al contraer horizontalmente por un factor de 2
12. (a) ¿Qué es una función uno a uno? ¿Cómo puede decir si una función es uno a uno al mirar su gráfica?
    (b) Si f es una función uno a uno, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?
13. (a) ¿Cómo se define la función seno inversa $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}x$? ¿Cuáles son su dominio y su intervalo?
    (b) ¿Cómo se define la función coseno inversa $f(x) = \cos^{-1}x$? ¿Cuáles son su dominio y su intervalo?
    (c) ¿Cómo se define la función tangente inversa $f(x) = \tan^{-1}x$? ¿Cuáles son su dominio y su intervalo?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f es una función, entonces $f(s + t) = f(s) + f(t)$.
2. Si $f(s) = f(t)$, luego $s = t$.
3. Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$.
4. Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, luego $f(x_1) > f(x_2)$.
5. Una línea vertical interseca la gráfica de una función más de una vez.
6. Si f y g son funciones, luego $f \circ g = g \circ f$.
7. Si f es uno a uno, en tal caso $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
8. Siempre se puede dividir entre e^x.
9. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$.
10. Si $x > 0$, entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.
11. Si $x > 0$ y $a > 1$, entonces $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.
12. $\tan^{-1}(-1) = 3\pi/4$.
13. $\tan^{-1}x = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\cos^{-1}x}$

EJERCICIOS

1. Sea f la función cuya gráfica se da.

(a) Estime el valor de $f(2)$.

(b) Estime los valores de x tales que $f(x) = 3$.

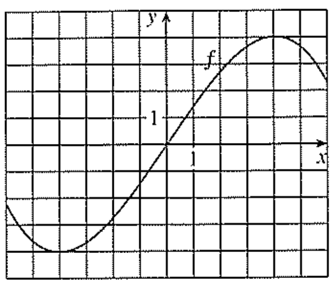
(c) Dé el dominio de f.

(d) Dé el intervalo de f.

(e) ¿Sobre cuál intervalo f es creciente?

(f) ¿f es uno a uno? Explique.

(g) ¿f es par, impar o de ninguno de los dos tipos? Explique



2. Se da la gráfica de g.

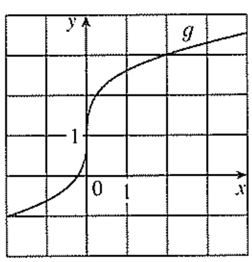
(a) Dé el valor de $g(2)$.

(b) ¿Por qué g es uno a uno?

(c) Estime el valor de $g^{-1}(2)$.

(d) Estime el dominio de g^{-1}.

(e) Trace la gráfica de g^{-1}.



3. Si $f(x) = x^5 - 2x + 3$, evalúe el cociente de diferencia

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

4. Trace la gráfica aproximada del rendimiento de un cultivo como función de la cantidad de fertilizante que se usó.

5–8 Encuentre el dominio y el intervalo de la función

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$

6. $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

7. $h(x) = \ln(x + 6)$

8. $F(t) = 3 + \cos 2t$

9. Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las funciones siguientes a partir de la gráfica de f.

(a) $y = f(x) + 8$

(b) $y = f(x + 8)$

(c) $y = 1 + 2f(x)$

(d) $y = f(x - 2) - 2$

(e) $y = -f(x)$

(f) $y = f^{-1}(x)$

10. Se da la gráfica de f. Dibuje las funciones siguientes.

(a) $y = f(x - 8)$

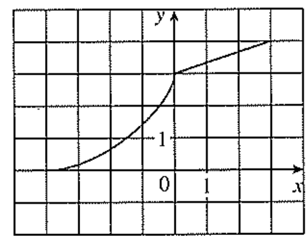
(b) $y = -f(x)$

(c) $y = 2 - f(x)$

(d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$

(e) $y = f^{-1}(x)$

(f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 Use transformaciones para trazar la gráfica de la función.

11. $y = -\text{sen } 2x$

12. $y = 3\ln(x - 2)$

13. $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$

14. $y = 2 - \sqrt{x}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

16. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Establezca si f es par, impar o ninguna de las dos cosas.

(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$

(b) $f(x) = x^3 - x^7$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f(x) = 1 + \text{sen } x$

18. Encuentre una expresión para la función cuya gráfica consta de un segmento de línea del punto $(-2, 2)$ hasta el punto $(-1, 0)$ junto con la mitad superior del círculo con centro en el origen y radio 1.

19. Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 9$, encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$, y sus dominios.

20. Exprese la función $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como una composición de tres funciones.

21. La expectativa de vida mejoró de manera dramática en el siglo XX. La tabla proporciona la expectativa de vida (en años) al momento del nacimiento de hombres en Estados Unidos.

Año de nacimiento	Expectativa de vida	Año de nacimiento	Expectativa de vida
1900	48.3	1960	66.6
1910	51.1	1970	67.1
1920	55.2	1980	70.0
1930	57.4	1990	71.8
1940	62.5	2000	73.0
1950	65.6		

Use una gráfica de dispersión para elegir un tipo de modelo apropiado. Utilice su modelo para predecir la duración de la vida de un hombre que nace en el año 2010.

22. Un pequeño fabricante de electrodomésticos encuentra que le cuesta 9 000 dólares producir 1 000 hornos para tostar y 12 000 dólares producir 1 500 hornos por semana.

(a) Exprese el costo como una función del número de hornos para tostar que se producen, suponiendo que es lineal. Enseguida trace la gráfica.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

(c) ¿Cuál es la intersección y de la gráfica y qué representa?

23. Si $f(x) = 2x + \ln x$, encuentre $f^{-1}(2)$.

24. Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$.

25. Halle el valor exacto de cada expresión.

(a) $e^{2\ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

(c) $\tan\left(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\right)$ (d) $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

26. Resuelva cada ecuación para x.

(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$

(c) $e^{e^x} = 2$ (d) $\tan^{-1} x = 1$

27. La población de cierta especie en un ambiente limitado, con población inicial de 100 y que soporta una capacidad de 1 000, es

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

donde t se mide en años.

(a) Dibuje esta función y estime cuánto tarda para que la población llegue a 900.

(b) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(c) Use la función inversa para encontrar el tiempo que se requiere para que la población llegue a 900. Compare con el resultado del inciso (a).

28. Dibuje las tres funciones $y = x^a$, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ en la misma pantalla para dos o tres valores de $a > 1$. Para valores grandes de x, ¿cuál de estas funciones tiene los valores más grandes y cuál los más pequeños?

PRINCIPIOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

No existen reglas firmes y rápidas que garanticen el éxito en la solución de problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos etapas generales del proceso de solución de problemas y dar algunos principios que pueden resultar útiles en la solución de ciertos problemas. Estas etapas y principios no son más que sentido común hecho explícito. Se han adaptado del libro *How To Solve It* de George Polya.

1 Comprender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de entenderlo con claridad. Hágase las preguntas siguientes:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son las cantidades dadas?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para muchos problemas, resulta útil

dibujar un diagrama

e identificar las cantidades dadas y requeridas en el diagrama.

Por lo común, es necesario

introducir una notación apropiada

Al elegir los símbolos para las cantidades desconocidas, use letras como a, b, c, m, n, x y y pero, en algunos casos, ayuda usar iniciales como los símbolos significantes; por ejemplo, V para el volumen o t para el tiempo.

2 Pensar en un plan

Encuentre una relación entre la información dada y lo que desconoce que le permita calcular la incógnita. Con frecuencia ayuda preguntarse: "¿Cómo puedo relacionar lo que se proporciona con lo desconocido?" Si no ve una relación de inmediato, las ideas siguientes pueden resultar útiles para idear un plan.

Intente reconocer algo familiar Relacione la situación que se proporciona con sus conocimientos previos. Observe la incógnita e intente recordar un problema más familiar que tenga una incógnita semejante.

Intente reconocer patrones Algunos problemas se resuelven al reconocer que se presenta alguna clase de patrón. Éste puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si reconoce regularidad o repetición en un problema, quizá sea capaz de conjeturar cuál es el patrón y probarlo.

Use la analogía Intente pensar en un problema análogo; es decir, un problema semejante o relacionado, pero más fácil que el original. Si puede resolver un problema similar, más sencillo, en tal caso éste le podría dar los indicios que necesita para resolver el problema original, más complicado. Por ejemplo, si en un problema intervienen números muy grandes, podría intentar primero un caso semejante con números más pequeños. O bien, si en el problema interviene geometría tridimensional, busque uno similar en geometría bidimensional. O también, si el problema con que empieza es general, podría intentar con un caso especial.

Introduzca algo adicional A veces puede ser necesario introducir algo nuevo, algo auxiliar, para ayudar a establecer la conexión entre lo dado y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, lo auxiliar podría ser una nueva línea trazada en un diagrama. En un problema más algebraico, podría ser una nueva incógnita relacionada con la original.

Establezca casos En ocasiones habrá que dividir el problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada uno. Por ejemplo, con frecuencia debe aplicar esta estrategia al tratar con el valor absoluto.

Resuelva hacia atrás A veces resulta útil imaginar que el problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a la información que se proporciona. Por lo tanto, es posible invertir las etapas y, de este modo, construir una solución del problema original. Es común aplicar este procedimiento al resolver ecuaciones. Por ejemplo, al resolver la ecuación $3x - 5 = 7$, suponga que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y proceda hacia atrás. Sume 5 a cada miembro de la ecuación y divida cada miembro entre 3 para obtenér $x = 4$. Como cada etapa se puede invertir, ha resuelto el problema.

Establezca metas parciales En un problema complejo suele convenir establecer metas intermedias (en las cuales sólo se satisface parcialmente la situación deseada). Si alcanza la primera de estas metas intermedias, luego es posible que sea capaz de construir sobre ellas hasta alcanzar la meta final.

Razonamiento indirecto En ocasiones es apropiado atacar un problema de manera indirecta. Al utilizar la demostración por contradicción para probar que P implica Q, suponga que P es verdadera y que Q es falsa e intente ver por qué esto no puede ser. De algún modo, debe usar esta información y llegar a una contradicción de lo que está seguros que es verdadero.

Inducción matemática Al probar proposiciones que comprenden un entero positivo n, con frecuencia es útil aplicar el principio siguiente:

> **PRINCIPIO DE LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA** Sea S_n una proposición acerca del entero n. Si:
>
> **1.** S_1 es verdadera.
>
> **2.** S_{k+1} es verdadera siempre que S_k es verdadera.
>
> Entonces S_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Esto es razonable porque, como S_1 es verdadera, de la condición 2 (con $k = 1$) se infiere que S_2 es verdadera. En tal caso, si se aplica la condición 2 con $k = 2$, S_3 es verdadera. Al aplicar una vez más la condición 2, esta vez con $k = 3$, S_4 es verdadera. Este procedimiento se puede seguir indefinidamente.

3 Llevar a cabo el plan

En la etapa 2 se ideó un plan. Al ponerlo en práctica debe comprobar cada etapa y escribir los detalles que prueben que cada una es correcta.

4 Mirar retrospectivamente

Luego de completar la solución, es inteligente revisarla, en parte para ver si hay errores en la solución y también para ver si es posible pensar en una manera más fácil de resolver el problema. Otra razón para mirar hacia atrás es que lo familiarizará con el método de solución y esto puede ser útil para resolver un problema futuro. Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas."

Estos principios de solución de problemas se ilustran en los ejemplos siguientes. Intente resolverlos antes de mirar las soluciones. Consulte estos principios de solución de problemas si se atora. Puede encontrar útil referirse a esta sección de vez en cuando al resolver los ejercicios de los capítulos restantes del libro.

PRINCIPIOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

EJEMPLO 1 Exprese la hipotenusa h de un triángulo rectángulo con un área de 25 m^2 como función de su perímetro P.

▪ Comprender el problema.

SOLUCIÓN Primero clasifique la información, identificando la cantidad desconocida y los datos:

Incógnita: hipotenusa h

Cantidades dadas: perímetro P, área de 25 m^2

▪ Dibujar un diagrama.

Ayuda dibujar un diagrama como el de la figura 1.

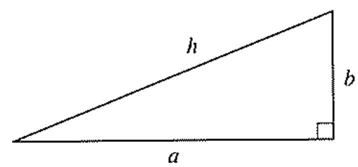


FIGURA 1

▪ Relacionar lo dado con lo desconocido.

▪ Introducir algo adicional.

Para relacionar las cantidades dadas con la incógnita, introduzca dos variables adicionales, a y b, que son las longitudes de los otros dos lados del triángulo. Esto permite expresar la condición dada, que el triángulo es rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Las otras relaciones entre las variables se obtienen al escribir las expresiones para el área y el perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Como se da P, note que ahora tiene tres ecuaciones en las tres incógnitas a, b y h:

$$\boxed{1} \qquad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \qquad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \qquad P = a + b + h$$

▪ Relacionar con algo familiar.

Aunque tiene el número correcto de ecuaciones, no son fáciles de resolver de manera directa; pero si aplica la estrategia de intentar reconocer algo familiar, en tal caso puede resolverlas con un método más fácil. Vea el lado derecho de las ecuaciones 1, 2 y 3. ¿Le recuerdan algo familiar? Observe que contienen los ingredientes de una fórmula conocida:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si aplica esta idea puede expresar $(a + b)^2$ de dos maneras. De las ecuaciones 1 y 2 tiene

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

De la ecuación 3

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

En estos términos,

$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Es la expresión requerida para h como función de P. □

PRINCIPIOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, a menudo es necesario aplicar el principio de resolución de problemas de *establecer casos*, al tratar con valores absolutos.

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

SOLUCIÓN Recuerde la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se concluye que

$$\begin{aligned} |x - 3| &= \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} |x + 2| &= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{si } x + 2 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

■ Establecer casos.

Estas expresiones hacen ver que debe considerar tres casos:

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I Si $x < -2$, tiene

$$\begin{aligned} |x - 3| + |x + 2| &< 11 \\ -x + 3 - x - 2 &< 11 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

CASO II Si $-2 \leqslant x < 3$, la desigualdad dada queda

$$\begin{aligned} -x + 3 + x + 2 &< 11 \\ 5 &< 11 \qquad \text{(siempre cierto)} \end{aligned}$$

CASO III Si $x \geqslant 3$, la desigualdad se transforma en

$$\begin{aligned} x - 3 + x + 2 &< 11 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

Si combina los casos I, II y III, observe que la desigualdad se satisface cuando $-5 < x < 6$. De modo que la solución es el intervalo $(-5, 6)$. □

En el ejemplo siguiente, primero suponga una respuesta revisando los casos especiales y reconociendo un patrón. A continuación, pruébelo mediante inducción matemática.

Al aplicar el principio de inducción matemática, sigue tres etapas:

ETAPA 1 Se prueba que S_n es verdadera cuando $n = 1$.

ETAPA 2 Se supone que S_n es verdadera cuando $n = k$ y se deduce que S_n es verdadera cuando $n = k + 1$.

ETAPA 3 Se concluye, por el principio de inducción matemática, que S_n es verdadera para toda n.

EJEMPLO 3 Si $f_0(x) = x/(x + 1)$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

■ Analogía: intente un problema semejante, más sencillo.

SOLUCIÓN Empiece por hallar fórmulas para $f_n(x)$, para los casos especiales $n = 1, 2$ y 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$

■ Buscar un patrón.

$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

Note un patrón: en los tres casos que se calcularon, el coeficiente de x en el denominador de $f_n(x)$ es $n + 1$. De modo que conjeture que, en general,

$$\boxed{4} \qquad f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

Para probar esto, aplique el principio de inducción matemática. Ya ha comprobado que (4) es verdadera para $n = 1$. Suponga que es verdadera para $n = k$; es decir,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x + 1}$$

En tal caso $\quad f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\dfrac{x}{(k+1)x+1}\right)$

$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

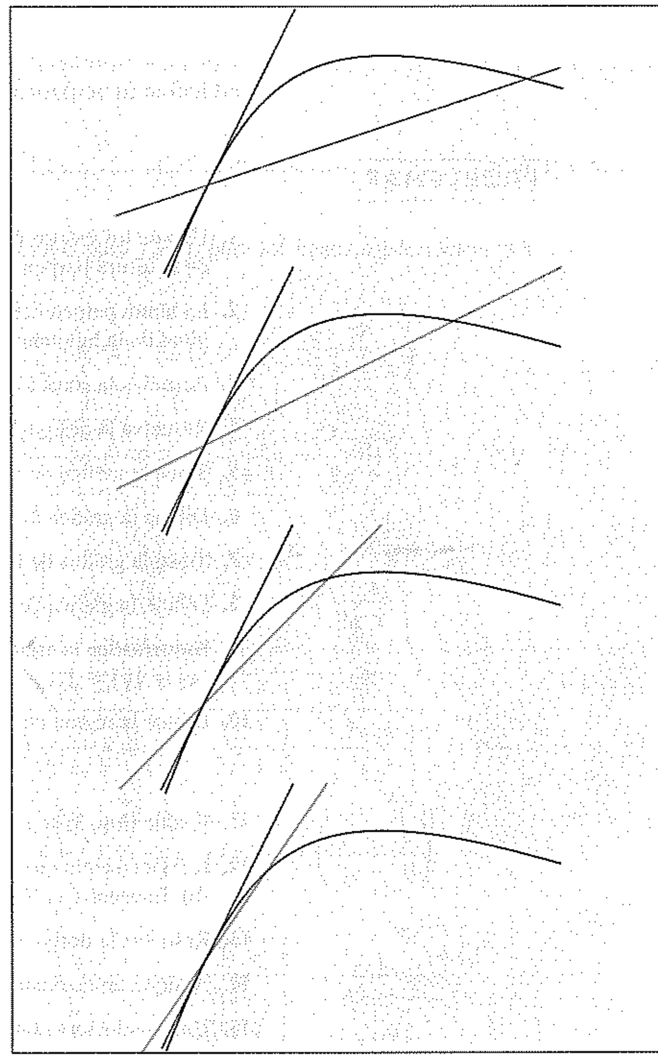
Esta expresión hace ver que (4) es verdadera para $n = k + 1$. En consecuencia, por inducción matemática, es verdadera para todos los enteros positivos n. □

PROBLEMAS

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo tiene una longitud de 4 cm. Exprese la longitud de la altura perpendicular a la hipotenusa como función de longitud de esta última.
2. La altura perpendicular a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 12 cm. Exprese la longitud de la hipotenusa como función del perímetro.
3. Resuelva la ecuación $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.
4. Resuelva la desigualdad $|x - 1| - |x - 3| \geqslant 5$.
5. Trace la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$.
6. Dibuje la gráfica de la función $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.
7. Trace la gráfica de la ecuación $x + |x| = y + |y|$.
8. Dibuje la gráfica de la ecuación $x^4 - 4x^2 - x^2y^2 + 4y^2 = 0$.
9. Esquematice la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leqslant 1$.
10. Dibuje la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que
$$|x - y| + |x| - |y| \leqslant 2$$
11. Evalúe $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.
12. (a) Demuestre que la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ es una función impar.
    (b) Encuentre la función inversa de f.
13. Resuelva la desigualdad $\ln(x^2 - 2x - 2) \leqslant 0$.
14. Aplique un razonamiento indirecto para probar que $\log_2 5$ es un número irracional.
15. Una conductora emprende un viaje. A lo largo de la primera parte del trayecto conduce a un paso moderado de 30 mi/h; en la segunda parte conduce a 60 mi/h. ¿Cuál es su rapidez promedio en esta travesía?
16. ¿Es cierto que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?
17. Compruebe que si n es un entero positivo, entonces, $7^n - 1$ es divisible entre 6.
18. Pruebe que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
19. Si $f_0(x) = x^2$ y $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ encuentre una fórmula para $f_n(x)$.
20. (a) Si $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots,$ encuentre una expresión para $f_n(x)$ y aplique la inducción matemática para probarla.
    (b) Trace la gráfica de f_0, f_1, f_2, f_3 en la misma pantalla y describa los efectos de la composición repetida.

2

LÍMITES Y DERIVADAS



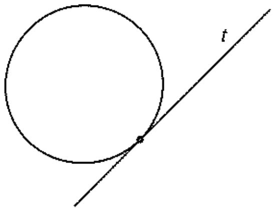
La idea de un límite se ilustra mediante líneas secantes que se aproximan a una línea tangente.

En la *Presentación preliminar del cálculo* (página 2) vio de qué manera la idea de límite sustenta las diversas ramas del cálculo. Por lo tanto, resulta adecuado empezar nuestro estudio de cálculo investigando los límites y sus propiedades. Clase especial de límite que se usa para hallar tangentes y velocidades, da lugar a la idea central del cálculo diferencial: la derivada.

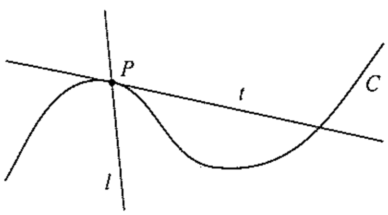
2.1 LA TANGENTE Y LOS PROBLEMAS DE LA VELOCIDAD

En esta sección se analiza cómo surgen los límites cuando intenta hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.

PROBLEMA DE LA TANGENTE



(a)



(b)

FIGURA 1

La palabra *tangente* se deriva de la palabra latina *tangens*, la cual significa "tocar". De este modo, una tangente a una curva es una línea que toca la curva. ¿De qué manera se puede precisar esta idea?

Para un círculo, podría seguir la idea de Euclides y decir que una tangente es una línea que pasa a través de ese círculo una vez y sólo una vez como en la figura 1(a). Para curvas más complicadas, esta definición es inadecuada. En la figura 1(b), se muestran dos rectas, l y t, que cruzan por un punto P de una curva C. La recta l interseca C sólo una vez, pero es evidente que no se parece a lo que consideramos una tangente. Por otra parte, la recta t parece una tangente pero interseca C dos veces.

Para ser específicos, considere el problema de intentar hallar una recta tangente t a la parábola $y = x^2$ en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación de la línea tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN Tan pronto conozca su pendiente m podra hallar la ecuación de la recta tangente t. La dificultad es que conoce sólo un punto P, de t, en tanto que necesita dos puntos para calcular la pendiente. Pero puede calcular una aproximación para m si elige un punto cercano $Q(x, x^2)$ de la parábola (como en la figura 2) y calcula la pendiente m_{PQ} de la línea secante PQ.

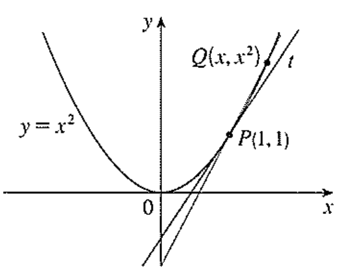


FIGURA 2

Elija $x \neq 1$, de modo que $Q \neq P$. Por lo tanto

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por ejemplo, para el punto $Q(1.5, 2.25)$

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

Las tablas en el margen muestran los valores de m_{PQ} para varios valores de x cercanos a 1. Entre más cerca está Q de P, más lo está x de 1 y, por lo que se ve en las tablas, m_{PQ} está más próxima a 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente t debe ser $m = 2$.

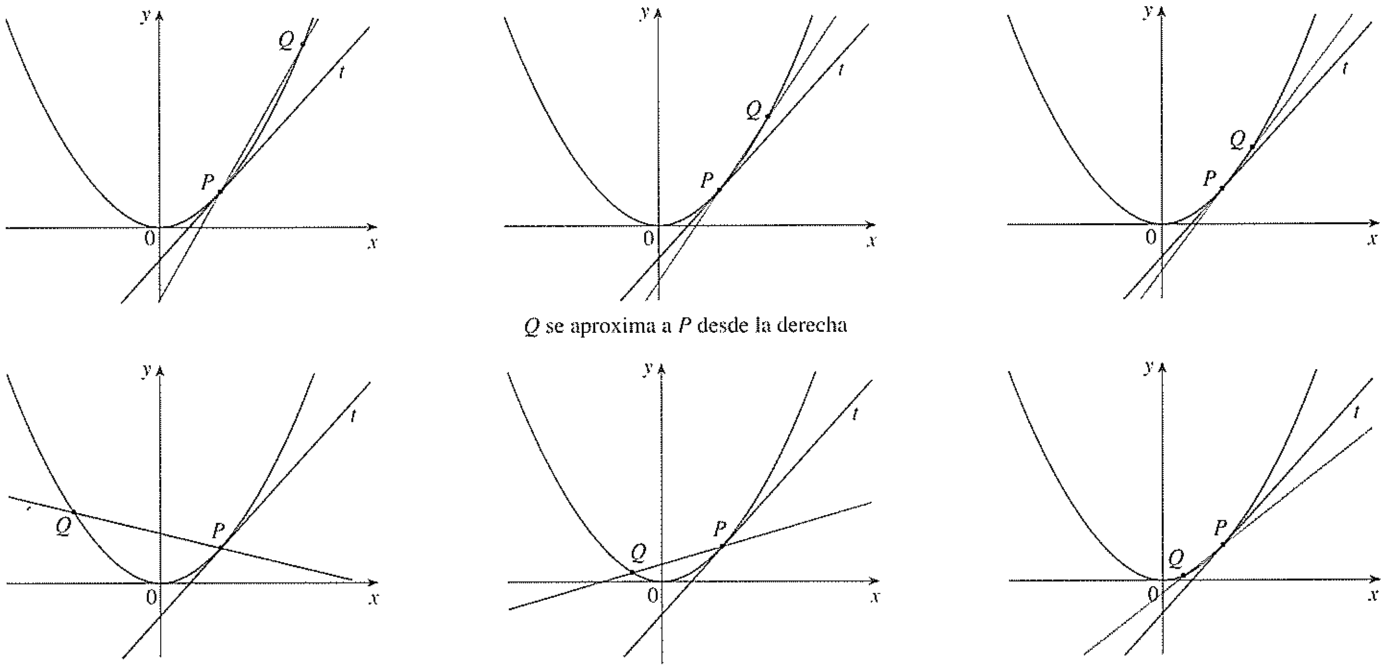
Se dice que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes y, simbólicamente, expresamos esto al escribir

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Si supone que, en efecto, la pendiente de la recta tangente es 2, use la forma punto-pendiente de la ecuación de una línea (véase el apéndice B) para escribir la ecuación de la recta tangente que pasa por $(1, 1)$ como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

En la figura 3 se ilustra el proceso de tender hacia el límite que se presenta en este ejemplo. Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las rectas secantes correspondientes giran en torno a P y se acercan a la recta tangente t.



Q se aproxima a P desde la derecha

Q se aproxima a P desde la izquierda

FIGURA 3

TEC En Visual 2.1 puede ver cómo funciona el proceso en la figura 3 para funciones adicionales.

Muchas funciones que se encuentran en las ciencias no se describen mediante una ecuación explícita; se definen por medio de información experimental. En el ejemplo siguiente se indica cómo estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de ese tipo de funciones.

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

V EJEMPLO 2 La unidad de destello (*flash*) de una cámara funciona por el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina al disparar la unidad. Los datos que se muestran al margen describen la carga Q que resta en el capacitor (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medido en segundos después de que la unidad de destello ha sido apagada). Use los datos para dibujar la gráfica de esta función y estime la pendiente de la recta tangente en el punto donde $t = 0.04$. [Nota: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica que circula del capacitor al bulbo del flash (medida en microamperes).]

SOLUCIÓN En la figura 4 está la información que se proporcionó y se usa para dibujar una curva que se aproxime a la gráfica de la función.

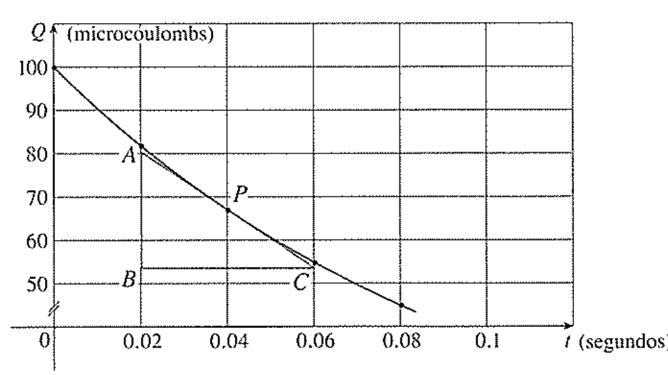


FIGURA 4

A partir de los puntos $P(0.04, 67.03)$ y $R(0.00, 100.00)$ de la gráfica la pendiente de la recta secante es

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

En la tabla que aparece a la izquierda se muestran los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. Con base en esa tabla cabe esperar que la pendiente de la recta tangente en $t = 0.04$ se encuentre en algún valor entre -742 y -607.5. De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más próximas es

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

De esa manera, mediante este método estima la pendiente de la recta tangente como -675.

Otro método es trazar una aproximación a la recta tangente en P y medir los lados del triángulo ABC como en la figura 4. Esto da una estimación de la pendiente de la recta tangente como

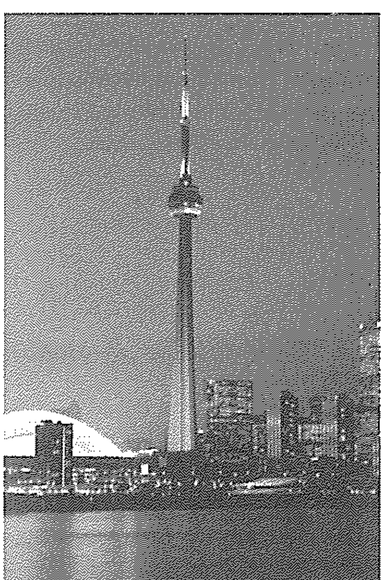
$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670 \qquad \square$$

El significado físico de la respuesta del ejemplo 2 es que la corriente eléctrica que fluye del capacitor al foco del *flash* después de 0.04 de segundo es de casi de −670 microamperes.

EL PROBLEMA DE LA VELOCIDAD

Si observa el velocímetro de un automóvil al viajar en el tráfico de la ciudad, puede ver que la aguja no permanece inmóvil mucho tiempo; es decir, la velocidad del auto no es constante. Al observar el velocímetro, supone que el vehículo tiene una velocidad definida en cada momento, ¿pero cómo se define la velocidad "instantánea"? Investigue el ejemplo de una pelota que cae.

EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN en Toronto, 450 m por encima del nivel del suelo. Encuentre la velocidad de la pelota una vez que transcurren 5 segundos.



© 2003 Brand X Pictures

La Torre CN en Toronto es el edificio autoestable más alto del mundo en la actualidad.

SOLUCIÓN A través de experimentos que se llevaron a cabo cuatro siglos atrás, Galileo descubrió que la distancia que recorre cualquier cuerpo que cae libremente es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (En este modelo de caída libre no se considera la resistencia del aire.) Si la distancia recorrida después de t segundos se denota mediante $s(t)$ y se mide en metros, en tal caso la ley de Galileo se expresa con la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para hallar la velocidad después de 5 s es que trata con un solo instante ($t = 5$), de modo que no interviene un intervalo. Sin embargo, puede tener una aproximación de la cantidad deseada calculando la velocidad promedio durante el breve intervalo de una décima de segundo, desde $t = 5$ hasta $t = 5.1$:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1}$$

$$= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s}$$

En la tabla siguiente se muestran los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante periodos sucesivamente cada vez más pequeños

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53.9
$5 \leq t \leq 5.1$	49.49
$5 \leq t \leq 5.05$	49.245
$5 \leq t \leq 5.01$	49.049
$5 \leq t \leq 5.001$	49.0049

Parece que conforme acorta el periodo, la velocidad promedio se aproxima a 49 m/s. La **velocidad instantánea**, cuando $t = 5$, se define como el valor límite de estas velocidades promedio, durante periodos cada vez más cortos que se inician en $t = 5$. En estos términos, la velocidad (instantánea) después de 5 s es

$$v = 49 \text{ m/s}$$ □

Quizá sienta que los cálculos que se utilizan en la solución de este problema son muy semejantes a los que se aplicaron con anterioridad en esta sección para hallar tangentes. De hecho, existe una relación íntima entre el problema de la tangente y el de hallar velocidades. Si dibuja la gráfica de la función distancia de la pelota (como en la figura 5) y considera los puntos $P(a, 4.9a^2)$ y $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ de la gráfica, en tonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}$$

lo cual es lo mismo que la velocidad promedio durante el periodo $[a, a + h]$. Por lo tanto, la velocidad en el instante $t = a$ (el límite de estas velocidades promedio a medida que h tiende a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en P (el límite de las pendientes de las rectas secantes).

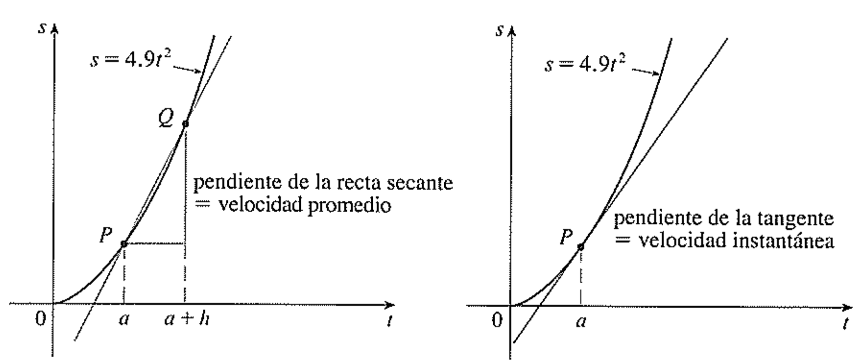


FIGURA 5

Los ejemplos 1 y 3 hacen ver que para resolver problemas de tangentes y de velocidades, debe ser capaz de hallar límites. Después de estudiar los métodos para calcular límites en las cinco secciones siguientes, en la sección 2.7 regresará a los problemas de hallar tangentes y velocidades.

2.1 EJERCICIOS

1. Un depósito contiene 1 000 galones de agua que se drenan desde la parte inferior en media hora. Los valores que aparecen en la tabla muestran el volumen V de agua que resta en el tanque (en galones) una vez que transcurren t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

(a) Si P es el punto $(15, 250)$ en la gráfica de V, encuentre las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto en la gráfica con $t = 5$, 10, 20, 25 y 30.

(b) Estime la pendiente de la recta tangente en P promediando las pendientes de dos rectas secantes.

(c) Use una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en P. (Esta pendiente representa la cantidad a la que fluye el agua desde el tanque después de 15 minutos.)

2. Se usa un monitor cardiaco para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. Éste recopila el número de latidos cardiacos después de t minutos. Cuando se sitúan los datos de la tabla en una gráfica, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Latidos cardiacos	2530	2661	2806	2948	3080

El monitor estima este valor calculando la pendiente de una recta secante. Use los datos para estimar la frecuencia cardiaca del paciente, después de 42 minutos, usando la recta secante entre los puntos

(a) $t = 36$ y $t = 42$ (b) $t = 38$ y $t = 42$
(c) $t = 40$ y $t = 42$ (d) $t = 42$ y $t = 44$

¿Cuáles son sus conclusiones?

3. El punto $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ está sobre la curva $y = x/(1 + x)$.

(a) Si Q es el punto $(x, x/(1 + x))$, use su calculadora para hallar la pendiente de la recta secante PQ (correcta hasta seis cifras decimales) para los valores de x que se enumeran a continuación:

(i) 0.5 (ii) 0.9 (iii) 0.99 (iv) 0.999
(v) 1.5 (vi) 1.1 (vii) 1.01 (viii) 1.001

(b) Mediante los resultados del inciso (a) conjeture el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

(c) Usando la pendiente del inciso (b) encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

4. El punto $P(3, 1)$ se encuentra sobre la curva $y = \sqrt{x - 2}$

(a) Si Q es el punto $\left(x, \sqrt{x - 2}\right)$, mediante una calculadora determine la pendiente de la secante PQ (con seis cifras decimales) para los valores siguientes de x:

(i) 2.5 (ii) 2.9 (iii) 2.99 (iv) 2.999
(v) 3.5 (vi) 3.1 (vii) 3.01 (viii) 3.001

(b) Por medio de los resultados del inciso (a), conjeture el valor de la pendiente de la recta tangente en $P(3, 1)$.

(c) Mediante la pendiente del inciso (b), halle una ecuación de la recta tangente a la curva en $P(3, 1)$.

(d) Trace la curva, dos de las rectas secantes y la recta tangente.

5. Si se lanza una pelota en el aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura en pies, después de t segundos, se expresa por $y = 40t - 16t^2$.

(a) Encuentre la velocidad promedio para el periodo que se inicia cuando $t = 2$ y dura:

(i) 0.5 seg (ii) 0.1 seg
(iii) 0.05 seg (iv) 0.01 seg

(b) Estime la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

6. Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después se proporciona mediante $y = 10t - 1.86t^2$.

(a) Hallar la velocidad promedio en los intervalos de tiempo que se proporcionan:

(i) $[1, 2]$ (ii) $[1, 1.5]$ (iii) $[1, 1.1]$
(iv) $[1, 1.01]$ (v) $[1, 1.001]$

(b) Estimar la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

7. La tabla exhibe la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

(a) Hallar la velocidad promedio para cada periodo:

(i) $[1, 3]$ (ii) $[2, 3]$ (iii) $[3, 5]$ (iv) $[3, 4]$

(b) Use la gráfica de s como una función de t para estimar la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

8. El desplazamiento (en centímetros) de una partícula de atrás hacia adelante en una línea recta se conoce por la ecuación de movimiento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, donde t se mide en segundos.

(a) Encuentre la velocidad promedio durante cada periodo:

(i) $[1, 2]$ (ii) $[1, 1.1]$
(iii) $[1, 1.01]$ (iv) $[1, 1.001]$

(b) Estimar la velocidad instantánea de la partícula cuando $t = 1$.

9. El punto $P(1, 0)$ está sobre la curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.

(a) Si Q es el punto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encuentre la pendiente de la recta secante PQ (correcta hasta cuatro cifras decimales) para $x = 2$, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9. ¿Parece que las pendientes tienden a un límite?

(b) Use una gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes del inciso (a) no están cercanas a la pendiente de la recta tangente en P.

(c) Mediante la selección de rectas secantes apropiadas, estime la pendiente de la recta tangente en P.

2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

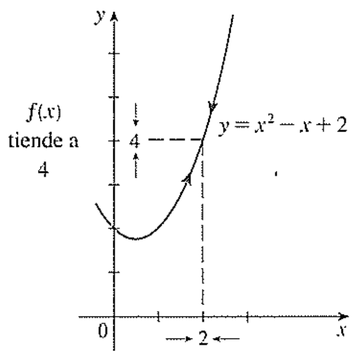


FIGURA 1

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si puede acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

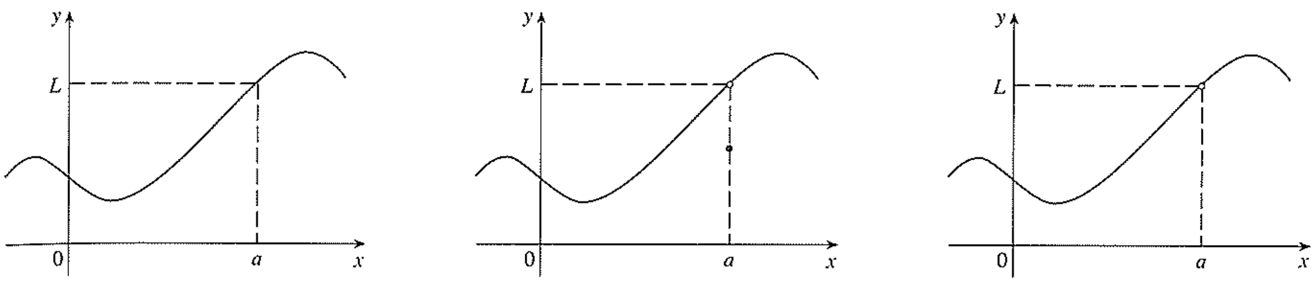
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $\qquad f(x) \to L \quad$ cuando $\quad x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Advierta la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, nunca consideró $x = a$. De hecho, incluso no es necesario que $f(x)$ esté definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo está definida f *cerca de a*.

En la figura 2 se muestran las gráficas de tres funciones. Observe que en la parte (c), $f(a)$ no está definida y, en la parte (b), $f(a) \neq L$. Pero en cada caso, sin importar lo que suceda en a, es verdadero que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.



(a) (b) (c)

FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 Conjeture el valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

SOLUCIÓN Advierta que la función $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que considere valores de x próximos a a pero diferentes de a.

En las tablas que aparecen al margen izquierdo se proporcionan los valores de $f(x)$ (correctos hasta seis cifras decimales) para valores de x que tienden a 1 (pero no son iguales a 1). Con base en los valores de las tablas, suponga que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0.5$$ □

El ejemplo 1 se ilustra mediante la gráfica de f de la figura 3. Cambie ahora ligeramente el valor de f, dándole un valor de 2 cuando $x = 1$ y denominando a la función resultante como g.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g todavía tiene el mismo límite conforme x tiende a 1 (véase la figura 4).

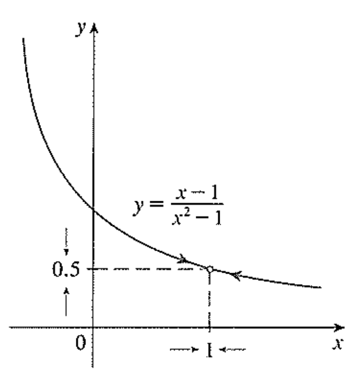


FIGURA 3

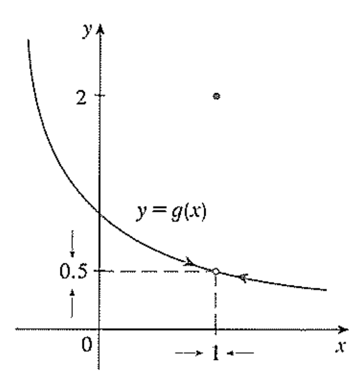


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Estime el valor de $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN En la tabla se enumeran los valores de la función para varios valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

A medida que t tiende a 0, los valores de la función parecen acercarse a 0.1666666... y, por consiguiente, supone que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$ □

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

En el ejemplo 2, ¿qué habría sucedido si hubiera tomado valores incluso más pequeños de t? En la tabla al margen se muestran los resultados que se obtuvieron con una calculadora; usted puede ver que parece suceder algo extraño.

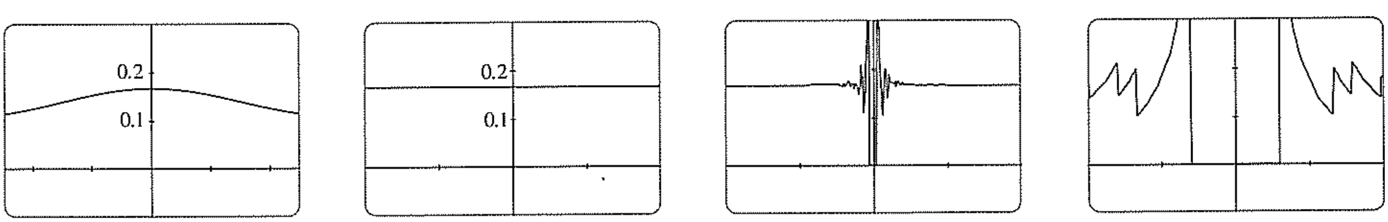
Si intenta realizar estos cálculos en su calculadora podría obtener valores diferentes, pero llegará un momento en que obtendrá el valor 0, si reduce t lo suficiente. ¿Significa esto que la respuesta en realidad es 0, en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como se demostrará en la sección siguiente. El problema es que las calculadoras dan valores falsos porque $\sqrt{t^2 + 9}$ está muy cercana a 3 cuando t es pequeño. (De hecho, cuando t es lo suficientemente pequeño, el valor para $\sqrt{t^2 + 9}$ de una calculadora es 3.000... hasta el número de dígitos que la calculadora es capaz de llevar.)

www.stewartcalculus.com
Para una explicación más detallada de por qué en ocasiones las calculadoras dan valores falsos, véase el sitio en la red. Dé un clic en *Additional Topics* y luego en *Lies My Calculator and Computer Told Me*. En particular, refiérase a la sección llamada *The Perils of Subtraction*.

Algo similar sucede cuando intenta trazar la gráfica de la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

del ejemplo 2 en una calculadora graficadora o en una computadora. Las partes (a) y (b) de la figura ilustran gráficas bastante exactas de f y, cuando se usa el modo de trazo (si cuenta con él), puede estimar con facilidad que el límite es alrededor de $\frac{1}{6}$. Pero si realiza un acercamiento muy grande, como en las partes (c) y (d), obtiene gráficas inexactas, una vez más debido a problemas con la sustracción.



(a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ (b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ (c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ (d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

FIGURA 5

EJEMPLO 3 Encuentre el valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Con una calculadora (y recordando que si $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen} x$ quiere decir el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x), construya la tabla siguiente de valores, correcta hasta ocho cifras decimales. A partir de la tabla a la izquierda y de la gráfica de la figura 6, suponga que

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

De hecho, esta conjetura es correcta, como se probará en el capítulo 3 mediante la aplicación de un argumento geométrico.

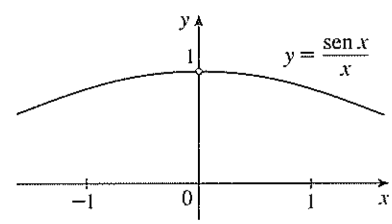


FIGURA 6

EJEMPLO 4 Investigue $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Una vez más, la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Si se evalúa la función para algunos valores pequeños de x, resulta

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$
$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$
$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

De manera análoga, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información, podría sentirse tentado a presumir que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero en esta ocasión su conjetura es errónea. Advierta que aun cuando $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$, para cualquier entero n, también se cumple que $f(x) = 1$ para un número infinito de valores de x que tienden a 0. La gráfica de f se da en la figura 7.

SISTEMAS ALGEBRAICOS PARA COMPUTADORA
Los sistemas algebraicos para computadora (CAS: computer algebra systems, CAS) tienen comandos que calculan límites. En virtud de las dificultades que se demostraron en los ejemplos 2, 4 y 5, no encuentran los límites por experimentación numérica, sino que aplican técnicas más elaboradas, como el cálculo de series infinitas. Si tiene acceso a un CAS, use el comando límite, calcule los límites de los ejemplos de esta sección y compruebe sus respuestas a los ejercicios de este capítulo.

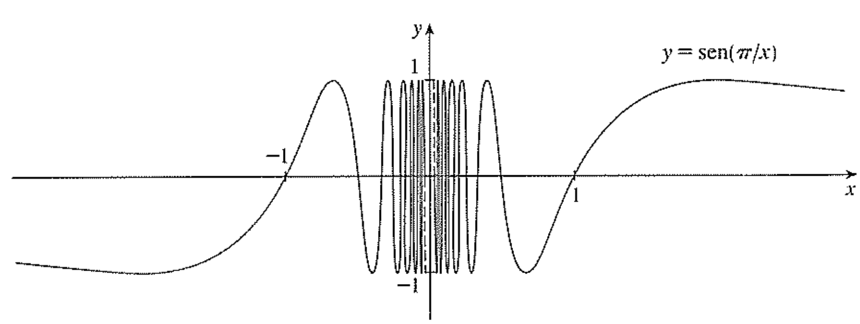


FIGURA 7

Las líneas discontinuas cerca del eje y indican que el valor de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscila entre 1 y -1 a menudo infinitamente cuando x se aproxima a 0. (Véase el ejercicio 39.)

Ya que el valor de $f(x)$ no se aproxima a un número fijo cuando x se aproxima a cero.

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{\pi}{x} \text{ no existe}$$ □

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

EJEMPLO 5 Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right)$.

SOLUCIÓN Como antes construya una tabla de valores. A partir de la primera tabla que aparece en el margen

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0$$

Pero si perseveran con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000}\right) = 0.000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Más adelante verá que $\lim_{x\to 0}\cos 5x = 1$ y en tal caso se concluye que el límite es 0.0001. □

Los ejemplos 4 y 5 ilustran algunos de los riesgos en la suposición del valor de un límite. Es fácil suponer un valor erróneo, si se usan valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo suspender el cálculo de valores. Y, como hace ver el análisis que sigue al ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores erróneos. Sin embargo, más adelante se desarrollan métodos infalibles para calcular límites.

EJEMPLO 6 La función de Heaviside H se define por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

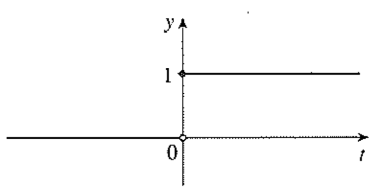


FIGURA 8

[Esta función recibe ese nombre en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que se hace circular en el instante $t = 0$.] En la figura 8 se muestra su gráfica.

Conforme t se acerca a 0 desde la izquierda, $H(t)$ tiende a 0. Cuando t se aproxima a 0 desde la derecha, $H(t)$ tiende a 1. No existe un número único al que $H(t)$ se aproxime cuando t tiende a 0. Por consiguiente, $\lim_{t\to 0} H(t)$ no existe. □

LÍMITES LATERALES

En el ejemplo 6 se vio que $H(t)$ tiende a 0 cuando t lo hace a 0 desde la izquierda y que esa función tiende a 1 cuando t lo hace a 0 desde la derecha. Se indica simbólicamente esta situación escribiendo

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que sólo se consideran valores de t menores que 0. Del mismo modo "$t \to 0^+$" indica que sólo se consideran valores de t mayores que 0.

2 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se lee **el límite izquierdo de $f(x)$ cuando x tiende a a** [o el **límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a desde la izquierda**] es igual a L, si puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de a pero menor que a.

Advierta que la definición de 2 difiere de la 1 sólo en que x debe ser menor que a. De manera análoga, si requiere que x sea mayor que a, obtiene: "el límite por **la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a a** es igual a L" y escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Así, el símbolo "$x \to a^+$" significa que considere sólo $x > a$. En la figura 9 se ilustran estas definiciones

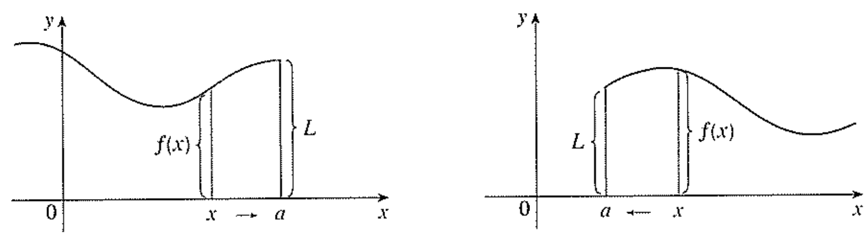


FIGURA 9 (a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la definición 1 con las definiciones de los límites laterales, se cumple lo siguiente

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

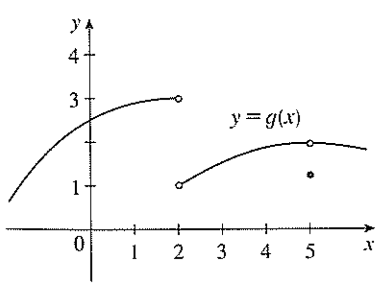


FIGURA 10

EJEMPLO 7 En la figura 10 se muestra la gráfica de una función g. Úsela para dar los valores (si existen) de los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUCIÓN A partir de la gráfica es claro que los valores de $g(x)$ tienden a 3 cuando x tiende a 2 desde la izquierda, pero se acercan a 1 cuando x se aproxima a 2 desde la derecha. Por consiguiente

$$\text{(a)} \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \text{(b)} \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Como los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, con base en (3) se concluye que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe

La gráfica muestra también que

$$\text{(d)} \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \text{(e)} \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) En esta ocasión los límites por la izquierda y la derecha son los mismos y, de este modo, con base en (3)

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, observe que $g(5) \neq 2$. □

LÍMITES INFINITOS

EJEMPLO 8 Halle $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ si existe.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

SOLUCIÓN Conforme x se aproxima a 0, x^2 también se aproxima a 0 y $1/x^2$ se hace muy grande. (Vea la tabla en el margen.) De hecho, al ver la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ que se muestra en la figura 11, parece que los valores de $f(x)$ se pueden aumentar en forma arbitraria, si se escoge una x lo suficientemente cerca de 0. De este modo los valores de $f(x)$ no tienden a un número, de tal manera que $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe. □

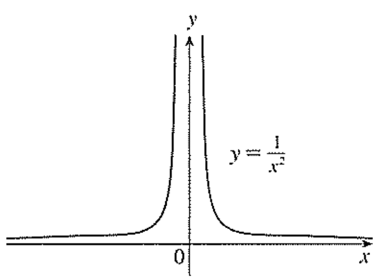


FIGURA 11

Para indicar la clase de comportamiento que se muestra en el ejemplo 8, utilice la notación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no quiere decir que se considere ∞ como un número. Ni siquiera significa que el límite existe. Simplemente expresa la manera particular en la cual el límite no existe: $1/x^2$ puede ser tan grande como guste llevando a x lo suficientemente cerca de 0.

En general, se escribe simbólicamente

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se vuelven más y más grandes, es decir (se "incrementan sin límite") a medida que x se acerca más y más a a.

> **4 DEFINICIÓN** Sea f un función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Por lo tanto,
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
>
> quiere decir que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tan grandes como uno quiera) haciendo que x se acerque suficientemente a a, pero no es igual que a.

Otra notación para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ es

$$f(x) \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

Recuerde que el símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ se lee con frecuencia como

"el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el infinito"

o bien, "$f(x)$ se vuelve infinita cuando x se aproxima a a"

o bien, "$f(x)$ se incrementa sin límite cuando x tiende a a"

Esta definición se ilustra en la figura 12.

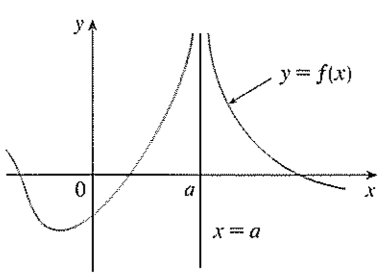


FIGURA 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Al decir que un número es "negativo muy grande" significa que es negativo pero su magnitud (valor absoluto) es considerable.

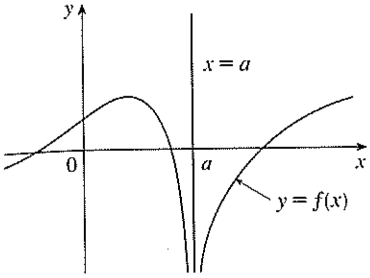


FIGURA 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Un tipo similar de límite, para el caso de funciones que manifiestan valores negativos muy grandes cuando x tiende a a, se presenta en la definición 5 y se ilustra en la figura 13.

> **5 DEFINICIÓN** Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Por lo tanto,
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
>
> significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer de manera arbitraria grandes y negativos al dar valores a x que estén muy cerca de a, pero sin que lleguen a ser iguales a a.

El símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ quiere decir "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el infinito negativo" o bien, "$f(x)$ decrece sin límite cuando x tiende a a". Como ejemplo tiene

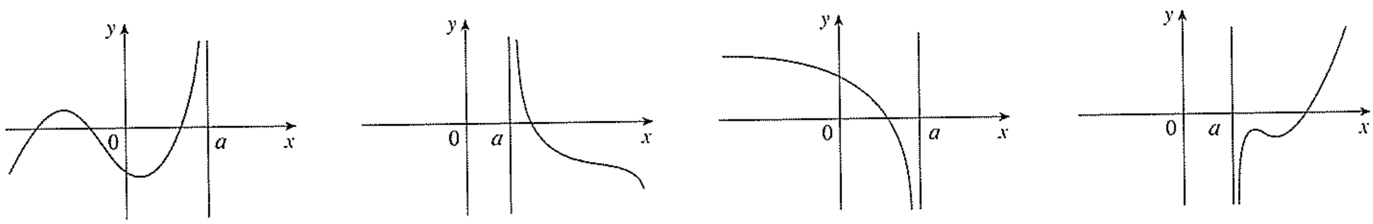
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definiciones similares se pueden dar para los límites infinitos laterales

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

sin olvidar que "$x \to a^-$" significa que considera sólo valores de x que sean menores que a y, de igual manera, "$x \to a^+$" quiere decir que considera sólo $x > a$. Ejemplos de estos cuatro casos se presentan en la figura 14.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

> **6 DEFINICIÓN** La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos uno de los siguientes enunciados es verdadero
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, el eje y es una asíntota vertical de la curva $y = 1/x^2$ porque $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. En la figura 14, la recta $x = a$ es una asíntota vertical en cada uno de los cuatro casos mostrados. En general, es muy útil conocer las asíntotas verticales para trazar las gráficas.

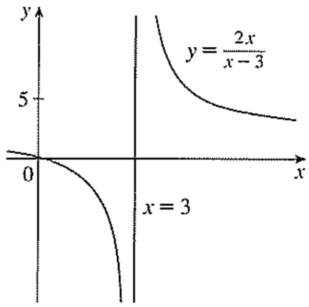


FIGURA 15

EJEMPLO 9 Determine $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ y $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$.

SOLUCIÓN Si x está en la vecindad de 3, pero es mayor que 3, entonces el denominador $x - 3$ es un número positivo pequeño y $2x$ está cercano a 6. Así, el cociente $2x/(x - 3)$ es un número *positivo* grande. En estos términos, ve intuitivamente que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

De manera similar, si x está cerca de 3 pero es más pequeña que 3, entonces $x - 3$ es un número negativo pequeño, pero $2x$ es aún un número positivo, cercano a 6. De esa manera, $2x/(x - 3)$ es desde el punto de vista numérico un número *negativo* grande. Por esto,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

La gráfica de la curva $y = 2x/(x - 3)$ se ilustra en la figura 15. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. □

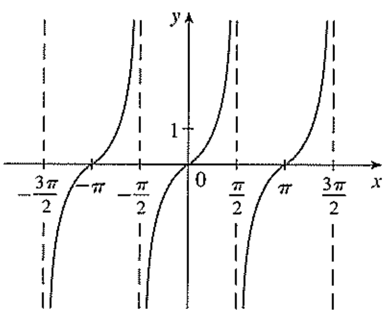


FIGURA 16
$y = \tan x$

EJEMPLO 10 Determine las asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

hay asíntotas verticales potenciales donde $\cos x = 0$. En efecto, como $\cos x \to 0^+$ cuando $x \to (\pi/2)^-$ y $\cos x \to 0^-$ cuando $x \to (\pi/2)^+$, en vista de que $\operatorname{sen} x$ es positiva cuando x está cerca de $\pi/2$,

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

Esto demuestra que la recta $x = \pi/2$ es una asíntota vertical. Un razonamiento similar muestra que las rectas $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero, son asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$. La gráfica de la figura 16 lo confirma. □

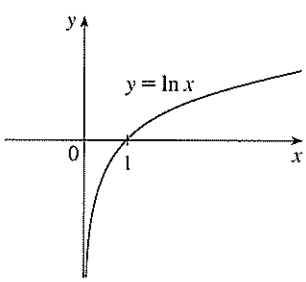


FIGURA 17
El eje y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

Otro ejemplo de una función cuya gráfica tiene una asíntota vertical es la función logaritmo natural $y = \ln x$. A partir de la figura 17

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

y de este modo la recta $x = 0$, el eje y, es una asíntota vertical. En efecto, lo mismo se cumple para $y = \log_a x$ siempre que $a > 1$. (Véase figuras 11 y 12 de la sección 1.6.)

2.2 EJERCICIOS

1. Explique con sus propias palabras qué se quiere dar a entender mediante la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla esta proposición y todavía $f(2) = 3$? Dé una explicación.

2. Explique qué se quiere dar a entender con

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación ¿es posible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Dé una explicación.

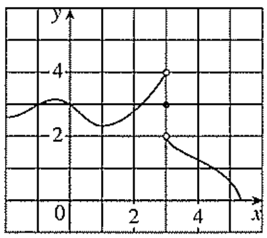
3. Explique el significado de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Para la función f cuya gráfica se proporciona, establezca el valor de cada cantidad, si existe. Si no la hay, explique por qué.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

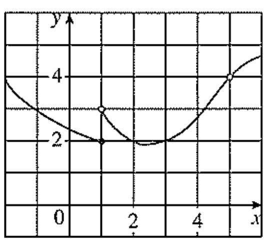
(d) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



5. Use la gráfica de f que se proporciona para establecer el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ (e) $f(5)$



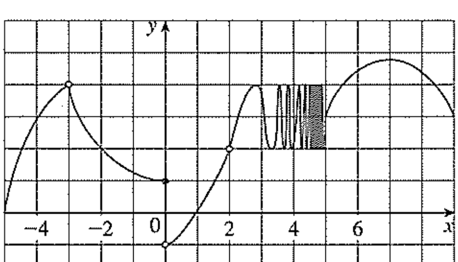
6. Para la función h, cuya gráfica se da, determine el valor de cada cantidad, si existe. En caso que no exista explique por qué.

(a) $\lim\limits_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$

(g) $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim\limits_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim\limits_{x \to 5^-} h(x)$

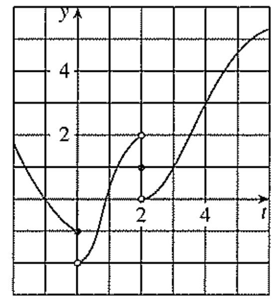


7. Para la función g cuya gráfica se proporciona, establezca el valor de cada cantidad, si acaso existe. Si no existe, explique la razón.

(a) $\lim\limits_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim\limits_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim\limits_{t \to 2^-} g(t)$ (e) $\lim\limits_{x \to 0^+} g(t)$ (f) $\lim\limits_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim\limits_{t \to 4} g(t)$

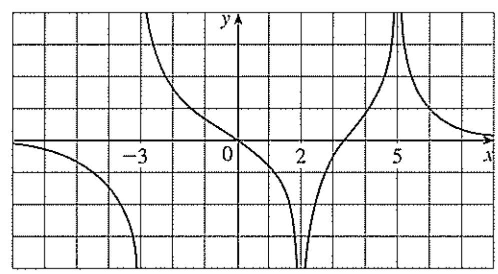


8. En el caso de la función R cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim\limits_{x \to 2} R(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 5} R(x)$

(c) $\lim\limits_{x \to -3^-} R(x)$ (d) $\lim\limits_{x \to -3^+} R(x)$

(e) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.

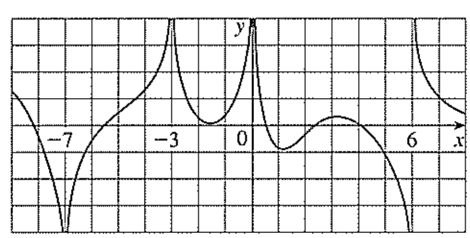


9. En el caso de la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim\limits_{x \to -7} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x)$ (e) $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x)$

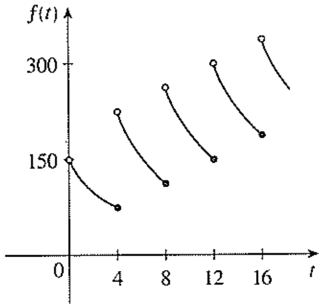
(f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.



10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del medicamento en el torrente sanguíneo, después de t horas.

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11. Use la gráfica de la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ para establecer el valor de cada límite, si es que existe. Si no existe dé la razón.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

12. Trace la gráfica de la función siguiente y úsela para determinar los valores de a para los cuales existe $\lim_{x\to a} f(x)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

13–16 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

13. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$

14. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0,$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0)$ no está definida

15. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x\to -2} f(x) = 2,$

$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

16. $\lim_{x\to 1} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = -3,$

$f(1) = 1, \ f(4) = -1$

17–20 Suponga el valor del límite (siempre y cuando exista) evaluando la función en los números dados (con seis cifras decimales).

17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001,$
$1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$

18. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$,
$x = 0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999,$
$-2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01$

20. $\lim_{x\to 0^+} x \ln(x + x^2)$, $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$

21–24 Mediante una tabla de valores estime el valor del límite. Si dispone de una calculadora o de una computadora para graficar, úsela para confirmar gráficamente sus resultados.

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$

23. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

25–32 Determine el límite infinito.

25. $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{x+2}{x+3}$

26. $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{x+2}{x+3}$

27. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$

28. $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{e^x}{(x-5)^3}$

29. $\lim_{x\to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

30. $\lim_{x\to \pi^-} \cot x$

31. $\lim_{x\to 2\pi^-} x \csc x$

32. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

33. Determine $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ y $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$

(a) evaluando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para encontrar valores de x que se aproximen a 1 desde la izquierda y desde la derecha.

(b) planteando un razonamiento como en el ejemplo 9 y

(c) a partir de la gráfica de f.

34. (a) Determine las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme su respuesta del inciso (a) graficando la función.

35. (a) Estime el valor del límite $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$ hasta cinco cifras decimales. ¿Le resulta familiar este número?

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la función $y = (1 + x)^{1/x}$.

36. (a) Grafique la función $f(x) = (\tan 4x)/x$ y realice un acercamiento hacia el punto donde la gráfica cruza el eje y, estimar el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Verificar su respuesta del inciso (a) evaluando $f(x)$ para valores de x que se aproximan a cero.

37. (a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ para $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ y 0.05 y conjeture el valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1000} \right)$$

(b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ y 0.001. Conjeture de nuevo.

38. (a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.05

(b) Conjeture el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

(c) Evalúe $h(x)$ para valores cada vez más pequeños de x hasta que finalmente llegue a valores 0 para $h(x)$. ¿Aún está seguro de que lo que conjeturó en el inciso (b) es correcto? Explique por qué obtuvo valores 0 en algún momento. (En la sección 4.4 se explicará un método para evaluar el límite.)

(d) Dibuje la función h en el rectángulo de visualización $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. A continuación haga un acercamiento hasta el punto en que la gráfica cruza el eje y para estimar el límite de $h(x)$ conforme x se aproxima a 0. Prosiga con el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso (c).

39. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ del ejemplo 4 en el rectángulo de visión $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Después efectúe varias veces un acercamiento hacia el origen. Comente el comportamiento de esta función.

40. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la rapidez de la luz. ¿Qué sucede cuando $v \to c^-$?

41. Estime mediante una gráfica las ecuaciones de todas las asíntotas verticales de la curva

$$y = \tan(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

Luego determine las ecuaciones exactas de estas asíntotas.

$\boxed{\textbf{42.}}$ (a) Use evidencia numérica y gráfica para conjeturar el valor del límite.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) ¿Qué tan cerca de 1 tiene que estar x para asegurar que la función del inciso (a) esté dentro de una distancia 0.5 respecto de su límite?

2.3 CÁLCULO DE LÍMITES UTILIZANDO LAS LEYES DE LOS LÍMITES

En la sección 2.2 usó calculadoras y gráficas para suponer los valores de los límites, pero fue claro que esos métodos no siempre conducen a la respuesta correcta. En esta sección aplicará las siguientes propiedades de los límites, conocidas como *leyes de los límites*, para calcularlos.

LEYES DE LOS LÍMITES Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existen. En tal caso

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$

4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Estas leyes se pueden expresar en forma verbal como sigue

LEY DE LA SUMA
1. El límite de una suma es la suma de los límites.

LEY DE LA DIFERENCIA
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

LEY DE MÚLTIPLO CONSTANTE
3. El límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función

LEY DEL PRODUCTO
4. El límite de un producto es el producto de los límites.

LEY DEL COCIENTE
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero).

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ está cercano a L y $g(x)$ lo está de M, resulta razonable concluir que $f(x) + g(x)$ está cercano a $L + M$. Esto da una base intuitiva para creer que la ley 1 es verdadera. En la sección 2.4 aparece una definición precisa de límite; la cual se utilizará para demostrar esta ley. Las demostraciones de las leyes restantes se proporcionan en el apéndice F.

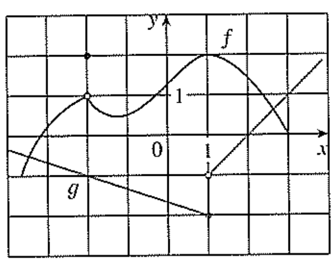


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Use las leyes de los límites y las gráficas de f y g de la figura 1 para evaluar los límites siguientes, si existen.

(a) $\lim\limits_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

(a) A partir de las gráficas de f y g,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] &= \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] && \text{(por la ley 1)} \\ &= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) && \text{(por la ley 3)} \\ &= 1 + 5(-1) = -4 \end{aligned}$$

(b) Observe que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existe porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

De suerte que no es posible usar la ley 4 para el límite deseado. Pero puede usar la ley 4 para los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

los límites izquierdo y derecho no son iguales, así $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ no existe.

(c) Las gráficas muestran que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Ya que el límite del denominador es 0, no puede aplicar la ley 5. El límite dado no existe porque el denominador se aproxima a cero en tanto que el numerador tiende a un número no cero. □

Si aplica la ley del producto repetidas veces, con $g(x) = f(x)$, obtiene la ley siguiente:

LEY DE LA POTENCIA

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ en donde n es un entero positivo

En la aplicación de estas seis leyes de los límites, necesita usar dos límites especiales:

7. $\lim_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim_{x \to a} x = a$

Estos límites son evidentes desde un punto de vista intuitivo (establézcalos verbalmente o dibuje $y = c$ y $y = x$), pero demostraciones en términos de la definición precisa se piden en los ejercicios de la sección 2.4.

Si en la ley 6 pone ahora $f(x) = x$ y aplica la Ley 8, obtiene otro límite especial útil.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo

Se cumple un límite similar para las raíces, como sigue. (En el caso de las raíces cuadradas la demostración se delinea en el ejercicio 37 de la sección 2.4.)

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo

(Si n es par, considere que $a > 0$.)

De modo más general, tiene la siguiente ley, que es verificada como una consecuencia de la ley 10 en la sección 2.5.

LEY DE LA RAÍZ

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo

$\left[\text{Si } n \text{ es par, suponga que } \lim_{x \to a} f(x) > 0.\right]$

EJEMPLO 2 Evalúe los límites siguientes y justifique cada paso.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por las leyes 2 y 1)} \\ &= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4 && \text{(por la 3)} \\ &= 2(5^2) - 3(5) + 4 && \text{(por las 9, 8 y 7)} \\ &= 39 \end{aligned}$$

NEWTON Y LOS LÍMITES

Isaac Newton nació el día de Navidad, en 1642, el año en que murió Galileo. Cuando ingresó a la Universidad de Cambridge, en 1661, no sabía mucho de matemáticas, pero aprendió con rapidez leyendo a Euclides y Descartes y asistiendo a las conferencias de Isaac Barrow. Cambridge se cerró debido a la plaga de 1665 y 1666, y Newton regresó a casa a reflexionar en lo que había aprendido. Esos dos años fueron asombrosamente productivos porque hizo cuatro de sus principales descubrimientos: 1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; 2) su trabajo sobre el cálculo diferencial e integral; 3) sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal y 4) sus experimentos del prisma acerca de la naturaleza de la luz y del color. Debido a cierto temor a la controversia y a la crítica, se mostró renuente a publicar sus descubrimientos y no fue sino hasta 1687, a instancias del astrónomo Halley, que publicó *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton expuso su versión del cálculo y lo usó para investigar la mecánica, la dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de los planetas y de los cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en las operaciones para hallar las áreas y los volúmenes que realizaron los antiguos eruditos griegos, como Eudoxo y Arquímedes. Aun cuando los aspectos de la idea de límite se encuentran implícitos en su "método de agotamiento", Eudoxo y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Fermat y Barrow, los precursores inmediatos de Newton en el desarrollo del cálculo, no usaron los límites. Isaac Newton fue el primero en hablar explícitamente al respecto. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se acercan más que cualquier diferencia dada". Newton expresó que el límite era el concepto básico del cálculo, pero fue tarea de matemáticos posteriores, como Cauchy, aclarar sus ideas acerca de los límites.

(b) Empiece con la ley 5, pero su aplicación sólo se justifica plenamente en la etapa final, cuando los límites del numerador y del denominador existen, y este último no es 0.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \to -2} (5 - 3x)} \qquad \text{(por la ley 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -2} x^3 + 2 \lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} 1}{\lim_{x \to -2} 5 - 3 \lim_{x \to -2} x} \qquad \text{(por las 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} \qquad \text{(por las 9, 8 y 7)}$$

$$= -\frac{1}{11}$$

□

NOTA Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En otras palabras, habría obtenido la respuesta correcta del ejemplo 2(a) sustituyendo x con 5. De manera análoga, la sustitución directa da la respuesta correcta en el inciso (b). Las funciones del ejemplo 2 son un polinomio y una función racional, respectivamente y el uso semejante de las leyes de los límites prueba que la sustitución directa siempre funciona para este tipo de funciones (vea los ejercicios 53 y 54). Este hecho se expresa del modo siguiente:

PROPIEDAD DE SUSTITUCIÓN DIRECTA Si f es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de f, en consecuencia

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman *continuas en a* y se estudian en la sección 2.5. Sin embargo, no todos los límites se pueden evaluar por sustitución directa, como los ejemplos siguientes hacen ver.

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$. No puede hallar el límite al sustituir $x = 1$ porque $f(1)$ no está definido. tampoco puede aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. En lugar de ello, necesita algo de álgebra preliminar. Factorice el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Cuando toma el límite a medida que x tiende a 1, tiene $x \neq 1$ y, por lo tanto, $x - 1 \neq 0$. Por consiguiente, cancele el factor común y calcule el límite como sigue:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

El límite de este ejemplo surgió en la sección 2.1, cuando trató de hallar la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (1, 1). □

NOTA En el ejemplo 3 fue capaz de calcular el límite sustituyendo la función dada $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ por una función más sencilla, $g(x) = x + 1$, con el mismo límite.

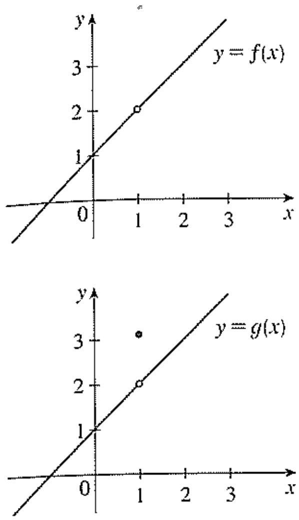


FIGURA 2
Las gráficas de las funciones f (del ejemplo 3) y g (del ejemplo 4)

Esto es válido porque $f(x) = g(x)$ excepto cuando $x = 1$, y al calcular un límite conforme x se aproxima a 1 no se considera qué sucede cuando x es en realidad *igual* a 1. En general tiene el hecho útil siguiente.

> Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, en caso de que exista el límite.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x \to 1} g(x)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN En este caso, g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor de un límite cuando x tiende a 1 no depende del valor de la función en 1. Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$ □

Advierta que los valores de las funciones de los ejemplos 3 y 4 son idénticos, excepto cuando $x = 1$ (véase la figura 2), de modo que tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si define

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

en tal caso, como en el ejemplo 3, no puede calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ haciendo $h = 0$, ya que $F(0)$ no está definido. Pero si simplifica $F(h)$ algebraicamente, encuentra que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que sólo se considera $h \neq 0$ cuando se hace que h tienda a 0.) De este modo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$ □

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No puede aplicar la ley del cociente de inmediato, puesto que el límite del denominador es 0. En el presente caso, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Este cálculo confirma lo que se conjeturó en el ejemplo 2 de la sección 2.2. □

Lo mejor para calcular algunos límites es hallar en primer lugar los límites por la izquierda y por la derecha. El teorema siguiente es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Afirma que existe un límite bilateral si y sólo si los dos límites laterales existen y son iguales.

1 TEOREMA $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Cuando calculamos un límite lateral aplicamos el hecho de que las Leyes de los Límites también se cumplen para los límites de este tipo.

Según la figura 3, el resultado del ejemplo 7 parece plausible.

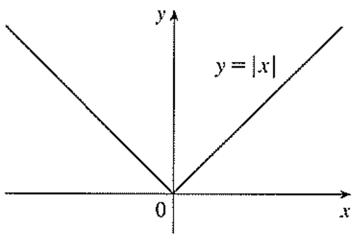


FIGURA 3

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como $|x| = x$ para $x > 0$, tiene

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, tiene $|x| = -x$ y, por consiguiente,

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

En consecuencia, por el teorema 1,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

□

V EJEMPLO 8 Compruebe que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

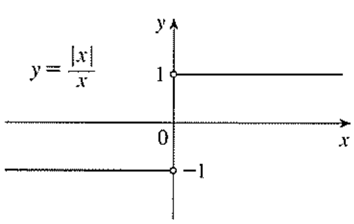


FIGURA 4

Como los límites por la derecha y por la izquierda son diferentes, por el teorema 1 se concluye que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ no existe. La figura 4 muestra la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ y apoya los límites laterales que encontró. □

EJEMPLO 9 Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determine si existe $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Se demuestra en el ejemplo 3 de la sección 2.4 que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, tiene

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

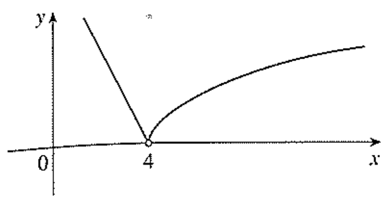


FIGURA 5

Puesto que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tiene

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Los límites del lado derecho y del lado izquierdo son iguales. Por lo tanto, el límite existe y

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

La gráfica de f se ilustra en la figura 5. □

Otras expresiones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. A la función entero máximo algunas veces se le llama la *función piso*.

EJEMPLO 10 La **función entero máximo** se define como $[\![x]\!]$ = el entero más grande que es menor o igual que x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$, $[\![-\frac{1}{2}]\!] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe.

SOLUCIÓN En la figura 6 se muestra la gráfica de la función entero máximo. Puesto que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leqslant x < 4$, tiene

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

Dado que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leqslant x < 3$, tiene

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

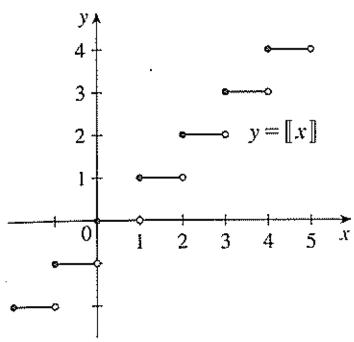


FIGURA 6
Función máximo entero

En virtud de que estos límites unilaterales no son iguales, por el teorema 1, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe. □

En los dos teoremas siguientes se dan dos propiedades adicionales de los límites. Sus demostraciones se proporcionan en el apéndice F.

$\boxed{2}$ **TEOREMA** Si $f(x) \leqslant g(x)$, cuando x está cerca de a (excepto posiblemente en a), y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, por lo tanto

$$\lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)$$

$\boxed{3}$ **TEOREMA DE LA COMPRESIÓN** Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, cuando x está cerca de a (excepto quizá en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

en tal caso
$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

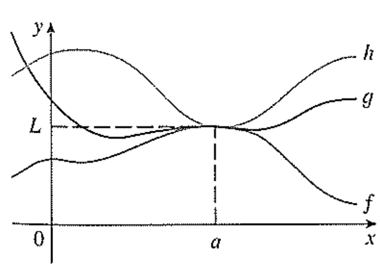


FIGURA 7

En la figura 7 se ilustra el teorema de la compresión, a veces conocido como teorema del emparedado o del apretón. Afirma que si $g(x)$ se comprime entre $f(x)$ y $h(x)$, cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, por lo tanto es forzoso que g tenga el mismo límite L en a

EJEMPLO 11 Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN En primer lugar, note que **no puede** aplicar

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (véase el ejemplo 4, en la sección 2.2). Sin embargo, como

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant 1$$

tiene, como se ilustra mediante la figura 8,

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leqslant x^2$$

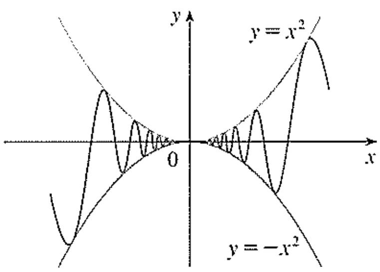


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Sabe que

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} (-x^2) = 0$$

Al tomar $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ en el teorema de la compresión, obtiene

$$\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0 \qquad \square$$

2.3 EJERCICIOS

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

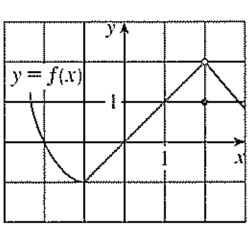
encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

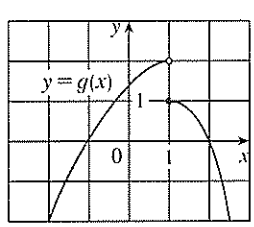
(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Se dan las gráficas de f y g. Úselas para evaluar cada límite, si existe. Si el límite no existe, explique por qué.





(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Evalúe el límite y justifique cada etapa indicando la(s) ley(es) de los límites apropiada(s).

3. $\lim_{x\to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$ **4.** $\lim_{x\to -2} \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4}$

5. $\lim_{x\to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$ **6.** $\lim_{t\to -1} (t^2 + 1)^3(t + 3)^5$

7. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4}\right)^3$ **8.** $\lim_{u\to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9. $\lim_{x\to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

10. (a) ¿Qué está incorrecto en la ecuación siguiente?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) En vista del inciso (a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+3)$$

es correcta.

11–30 Evalúe el límite, si existe.

11. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

13. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+6}{x-2}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

15. $\displaystyle\lim_{t\to -3}\frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

17. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-16}{h}$

18. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$

19. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^3+8}$

20. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-8}{h}$

21. $\displaystyle\lim_{t\to 9}\frac{9-t}{3-\sqrt{t}}$

22. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{4+x}$

26. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 16}\frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

28. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

29. $\displaystyle\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)$

30. $\displaystyle\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

31. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

dibujando la función $f(x)=x/(\sqrt{1+3x}-1)$.

(b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cerca de 0 e intente el valor del límite.

(c) Use las leyes de los límites para probar que su conjetura es correcta.

32. (a) Use una gráfica de

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to 0}f(x)$ hasta dos cifras decimales.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro cifras decimales.

(c) Utilice las leyes de los límites para hallar el valor exacto del límite.

33. Aplique el teorema de la compresión para demostrar que $\lim_{x\to 0}x^2\cos 20\pi x=0$. Ilustre dibujando las funciones $f(x)=-x^2$, $g(x)=x^2\cos 20\pi x$ y $h(x)=x^2$ en la misma pantalla.

34. Aplique el teorema de la compresión para demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}=0$$

Ilustre dibujando las funciones f, g y h (en la notación de ese teorema) en la misma pantalla.

35. Si $4x-9\leqslant f(x)\leqslant x^2-4x+7$ para $x\geqslant 0$, hallar el $\lim_{x\to 4}f(x)$.

36. Si $2x\leqslant g(x)\leqslant x^4-x^2+2$ para toda x, valorar el $\lim_{x\to 1}g(x)$.

37. Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^4\cos\frac{2}{x}=0$.

38. Demuestre que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,e^{\operatorname{sen}(\pi/x)}=0$.

39–44 Determine el límite, si acaso existe. Si el límite no existe explique la razón.

39. $\displaystyle\lim_{x\to 3}(2x+|x-3|)$

40. $\displaystyle\lim_{x\to -6}\frac{2x+12}{|x+6|}$

41. $\displaystyle\lim_{x\to 0.5^-}\frac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

42. $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{2-|x|}{2+x}$

43. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

44. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right)$

45. La *función signum* o *signo* se denota mediante sgn y se define como

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & \text{si } x<0\\ 0 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$$

(a) Trace la gráfica de esta función.

(b) Calcule cada uno de los límites siguientes o explique por qué no existe.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}x$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0}|\operatorname{sgn}x|$

46. Sea

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 & \text{si } x\leqslant 2\\ x-1 & \text{si } x>2\end{cases}$$

(a) Determine $\lim_{x\to 2^-}f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+}f(x)$.

(b) ¿Existe $\lim_{x\to 2}f(x)$?

(c) Trace la gráfica de f.

47. Sea $F(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.

(a) Encuentre

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}F(x)$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}F(x)$

(b) ¿Existe $\lim_{x\to 1} F(x)$?

(c) Trace la gráfica de F.

48. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada uno de los límites siguientes, si es que existe.

(i) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$

(b) Trace la gráfica de g.

49. (a) Si el símbolo $[\![\ ]\!]$ denota la función entero máximo definida en el ejemplo 10, evalúe

(i) $\lim_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x\to -2.4} [\![x]\!]$

(b) Si n es un entero, evalúe

(i) $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$

(c) ¿Para cuáles valores de a existe $\lim_{x\to a} [\![x]\!]$?

50. Sea $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Trace la gráfica de f

(b) Evalúe cada límite, si es que existe.

(i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to(\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to(\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to\pi/2} f(x)$

(c) ¿Para cuáles valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?

51. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, demuestre que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe pero no es igual a $f(2)$.

52. En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la rapidez de la luz. Encuentre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué se necesita un límite por la izquierda?

53. Si p es un polinomio, demuestre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

54. Si r es una función racional, aplique el resultado del ejercicio 53 para demostrar que $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$, para todo número a en el dominio de r.

55. Si $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, hallar $\lim_{x\to 1} f(x)$.

56. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, hallar los límites que siguen.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

57. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

58. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque no existan ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

59. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ puede existir aunque no existan ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

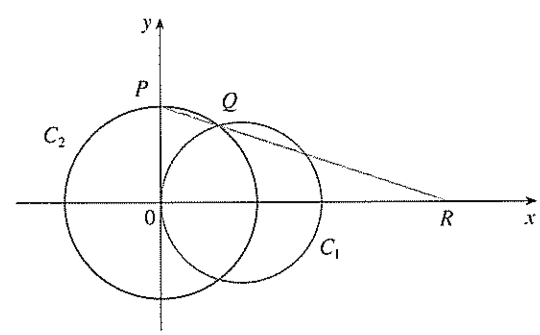
60. Evalúe $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

61. ¿Hay un número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Si es así, encuentre los valores de a y del límite.

62. En la figura se muestra un círculo fijo C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y un círculo C_2 que se contrae, con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de los dos círculos y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. ¿Qué le sucede a R al contraerse C_2; es decir, cuando $r \to 0^+$?



2.4 DEFINICIÓN EXACTA DE UN LÍMITE

La definición intuitiva de un límite que se presenta en la sección 2.2 es inaceptable en algunos casos porque son vagas frases como "x se acerca a 2" y "$f(x)$ se acerca más y más a L". Con objeto de ser capaz de demostrar en forma concluyente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0.0001 \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

tiene que definir un límite en forma precisa.

Para impulsar la definición precisa de un límite considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

De manera intuitiva es evidente que cuando x se acerca a 3 pero $x \neq 3$, en tal caso $f(x)$ está cerca de 5 y así $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Con el fin de obtener más detalles con respecto a cómo varía $f(x)$ cuando x se acerca a 3, se plantean las cuestiones siguientes:

¿Qué tan cerca de 3 tiene que estar x para que $f(x)$ difiera de 5 en menos de 0.1?

El uso de la letra griega δ (delta) ya es una costumbre en esta situación.

La distancia de x a 3 es $|x - 3|$ y la distancia desde $f(x)$ a 5 es $|f(x) - 5|$, de modo que el problema es encontrar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \qquad \text{si} \qquad |x - 3| < \delta \quad \text{pero } x \neq 3$$

Si $|x - 3| > 0$, por lo tanto $x \neq 3$, de modo que una formulación equivalente del problema es determinar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

Observe que si $0 < |x - 3| < (0.1)/2 = 0.05$, entonces

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 0.1$$

es decir, $$|f(x) - 5| < 0.1 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0.05$$

De este modo, una respuesta al problema lo da $\delta = 0.05$; es decir, si x está dentro de una distancia de 0.05 desde 3, después $f(x)$ estará dentro de una distancia de 0.1 desde 5.

Si cambia la cantidad 0.1 del problema por una cantidad menor 0.01, luego de aplicar el mismo método se encuentra que $f(x)$ diferirá de 5 por menos de 0.01 siempre que x difiera de 3 en menos de $(0.01)/2 = 0.005$:

$$|f(x) - 5| < 0.01 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0.005$$

De manera igual,

$$|f(x) - 5| < 0.001 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0.0005$$

Las cantidades 0.1, 0.01 y 0.001 consideradas como *tolerancias de error* que podría permitir. Para que 5 sea el límite exacto de $f(x)$ cuando x tiende a 3, tiene no sólo que ser capaz de llevar la diferencia entre $f(x)$ y 5 por abajo de cada una de estas tres cantidades; tiene que conservar abajo a *cualquier* número positivo. Y de acuerdo con el mismo razonamiento, ¡claro que es posible! Si escribe ε (la letra griega épsilon) para que represente un número positivo arbitrario, después se encuentra al igual que antes que

$$\boxed{1} \qquad |f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ésta es una forma exacta de decir que $f(x)$ está cerca de 5 cuando x se acerca a 3 porque (1) establece que es posible hacer que los valores de $f(x)$ queden dentro de una distancia arbitraria ε a partir de 5 conservando los valores de x dentro de una distancia $\varepsilon/2$ a partir de 3 (pero $x \neq 3$).

Observe que otra forma de (1) es:

$$\text{si} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \quad (x \neq 3) \quad \text{en tal caso} \quad 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

lo cual se ilustra en la figura 1. Al hacer que los valores de x ($\neq 3$) queden en el intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$ es posible hacer que los valores de $f(x)$ se ubiquen en el intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Si utiliza (1) como modelo da una definición exacta de un límite.

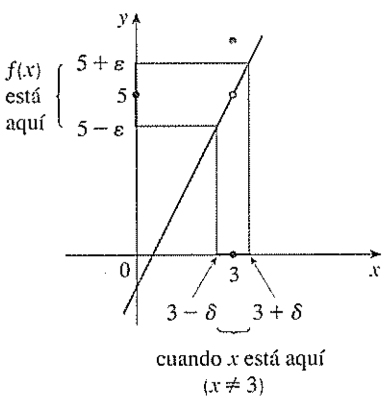


FIGURA 1

> $\boxed{2}$ **DEFINICIÓN** Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. En consecuencia puede decir que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L**, y escriba
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que
>
> $$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{en tal caso} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Puesto que $|x - a|$ es la distancia desde x hasta a y $|f(x) - L|$ es la distancia desde $f(x)$ hasta L y como ε puede ser arbitrariamente pequeño, la definición de un límite se puede expresar en palabras como se indica a continuación:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ quiere decir que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse pequeña en forma arbitraria al hacer que la distancia desde x hasta a sea suficientemente pequeña (pero no 0).

Otra posibilidad es

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden ser tan cercanos como quiera a L al hacer que x se acerque lo suficiente a a (pero que no sea igual a a).

Asimismo, puede replantear la definición 2 en términos de intervalos si observa que la desigualdad $|x - a| < \delta$ equivale a $-\delta < x - a < \delta$, que a su vez se puede escribir como $a - \delta < x < a + \delta$. También $0 < |x - a|$ es verdadera si y sólo si $x - a \neq 0$ es decir, $x \neq a$. De manera similar, la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ equivale al par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Por lo tanto, en términos de intervalos, la definición 2 se puede plantear como sigue:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ (sin que importe lo pequeño que sea ε) puede encontrar una $\delta > 0$ tal que si x está en el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$, por lo tanto $f(x)$ queda en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

La interpretación geométrica de este enunciado se consigue representando una función mediante un diagrama de flechas como en la figura 2, donde f mapea un subconjunto de $\mathbb{R}$ en otro subconjunto de $\mathbb{R}$.

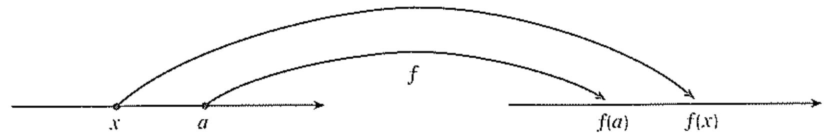


FIGURA 2

La definición de límite establece que si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ está alrededor de L, en seguida es posible encontrar un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ alrededor de a tal que f mapea todos los puntos en $(a - \delta, a + \delta)$ (excepto quizá a) en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Véase figura 3.

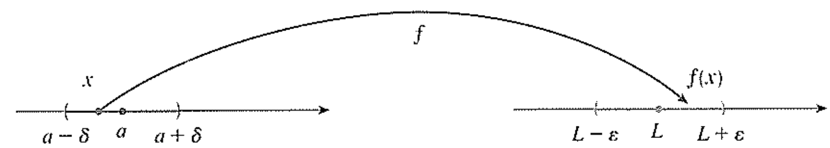


FIGURA 3

Otra interpretación geométrica de los límites se puede hacer en términos de la gráfica de la función. Si se tiene $\varepsilon > 0$ después trace las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ y la gráfica de f (véase figura 4). Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, por lo tanto puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que si restringe a x a que quede en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ y hace $x \neq a$, en seguida la curva $y = f(x)$ está entre las rectas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$. (Véase figura 5.) Usted puede ver que si se ha encontrado tal δ en tal caso cualquier δ más pequeña también funcionará.

Es importante darse cuenta que el proceso ilustrado en las figuras 4 y 5 debe funcionar para *todo* número positivo ε sin que importe qué tan pequeño sea. En la figura 6 se ilustra que si se elige un ε más pequeño, en seguida se podría requerir una δ más pequeña.

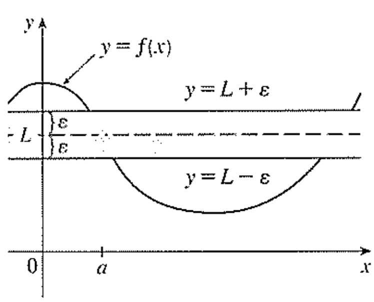


FIGURA 4

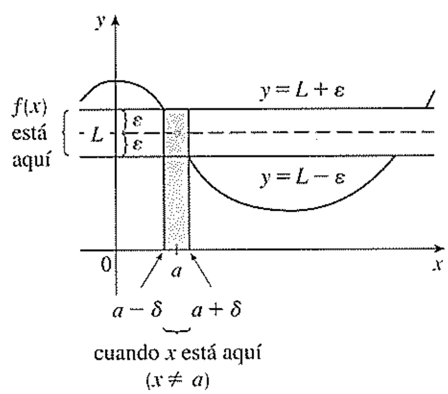


FIGURA 5

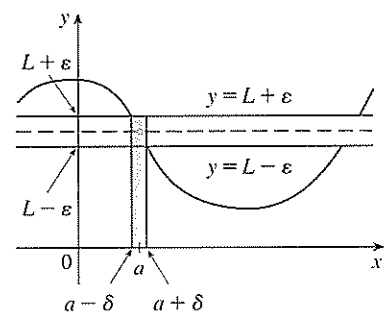


FIGURA 6

EJEMPLO 1 Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{por lo tanto} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

En otras palabras, encuentre un número δ que corresponda a $\varepsilon = 0.2$ en la definición de un límite para la función $f(x) = x^3 - 5x + 6$ en donde $a = 1$ y $L = 2$.

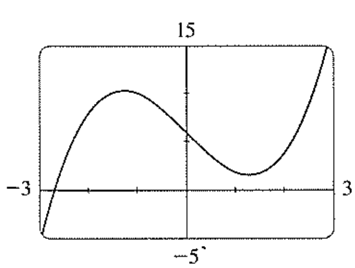


FIGURA 7

SOLUCIÓN Una gráfica de f se presenta en la figura 7; está interesado en la región cercana al punto $(1, 2)$. Observe que puede volver a escribir la desigualdad

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

como

$$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

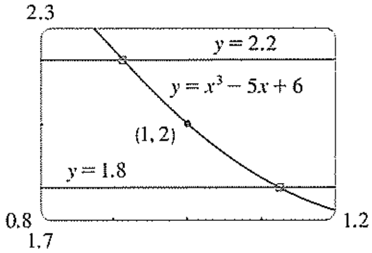


FIGURA 8

También, necesita establecer los valores de x para los cuales la curva $y = x^3 - 5x + 6$ se sitúa entre las horizontales $y = 1.8$ y $y = 2.2$. Por lo tanto, grafique las curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1.8$ y $y = 2.2$ cerca del punto $(1, 2)$ en la figura 8. Luego utilice el cursor para estimar que la coordenada x del punto donde se cortan la recta $y = 2.2$ y la curva $y = x^3 - 5x + 6$ está por 0.911. De igual manera, $y = x^3 - 5x + 6$ corta la recta $y = 1.8$ cuando $x \approx 1.124$. De este modo, al redondear para estar seguro, puede decir que

$$\text{si} \quad 0.92 < x < 1.12 \quad \text{en seguida} \quad 1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

Este intervalo $(0.92, 1.12)$ no es simétrico con respecto a $x = 1$. La distancia desde $x = 1$ hasta el extremo izquierdo es $1 - 0.92 = 0.08$ y la distancia hasta el extremo derecho es 0.12. Puede escoger δ para que sea la más pequeña de estos números, es decir, $\delta = 0.08$. Luego puede reescribir las desigualdades en términos de distancias como sigue:

$$\text{si} \quad |x - 1| < 0.08 \quad \text{después} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

Esto dice justamente que al mantener a x dentro del 0.08 de 1, es capaz de conservar a $f(x)$ dentro de 0.2 de 2. $f(x)$

Aunque elija $\delta = 0.08$, cualquier valor positivo más pequeño de δ además habría funcionado. □

El procedimiento gráfico del ejemplo 1 ilustra la definición para $\varepsilon = 0.2$, pero no *demuestra* que el límite es igual a 2. Una demostración tiene que proporcionar una δ para *cada* ε.

Para mejorar los enunciados de límite sería útil pensar en la definición de límite como un desafío. Primero lo retan con un número ε. Después usted debe ser capaz de obtener una δ adecuada. Debe ser capaz de hacerlo para *toda* $\varepsilon > 0$, no sólo para una ε en particular.

Considere una contienda entre dos personas A y B, piense que usted es B. La persona A estipula que se debe aproximar al número fijo L por medio de valores de $f(x)$ dentro de un grado de exactitud ε (por ejemplo 0.01). Por lo tanto, la persona B responde determinando un número δ tal que $0 < |x - a| < \delta$ siempre que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Luego A podría volverse más exigente y desafiar a B con un valor más pequeño de ε, por ejemplo, 0.0001. Una vez más, B tiene que responder encontrando una δ correspondiente. Por lo regular, a medida que el valor de ε es más pequeño, es menor el correspondiente valor de δ. Si B siempre gana, sin importar qué tan pequeño haga A a ε, en seguida $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\lim\limits_{x\to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUCIÓN

1. *Análisis preliminar del problema (adivinar un valor de δ).* Sea ε un número positivo dado. Quiere encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{por lo tanto} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Pero $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Por lo tanto, quiere

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{en tal caso} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

es decir,
$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{en consecuencia} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Esto hace pensar que debe escoger $\delta = \varepsilon/4$.

2. *Comprobación (presentación de que esta δ funciona).* Dado $\varepsilon > 0$, elija $\delta = \varepsilon/4$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, después

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

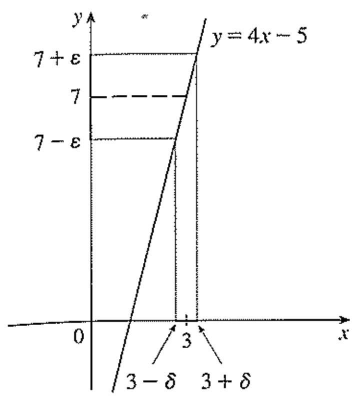


FIGURA 9

Por esto,

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{por consiguiente} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Por lo tanto, de acuerdo con la definición de límite,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Este ejemplo se ilustra en la figura 9. □

Observe que en la solución del ejemplo 2 hay dos etapas: adivinar y ensayar. Efectuó un análisis preliminar que posibilitó suponer un valor de δ. Pero luego, en la segunda etapa, tuvo que regresar y comprobar en forma cuidadosa y lógica que dio una opinión correcta. Este procedimiento es característico de gran parte de la matemática. Algunas veces se necesita hacer primero una conjetura inteligente con respecto a la respuesta de un problema y luego demostrar que la suposición es correcta.

Las definiciones intuitivas de límites unilaterales que se presentan en la sección 2.2 se pueden reformular exactamente como se señala a continuación

CAUCHY Y LOS LÍMITES

Después de la invención del cálculo infinitesimal en el siglo XVII, siguió un periodo de libre desarrollo de esta materia en el siglo XVIII. Matemáticos como los hermanos Bernoulli y Euler estaban ansiosos por explotar el poder del cálculo y exploraron con audacia las consecuencias de esta nueva y maravillosa teoría matemática sin preocuparse mucho por si las demostraciones eran correctas del todo.

En cambio, el siglo XIX fue la Época del Rigor en la matemática. Hubo un movimiento para volver a los fundamentos de la materia –para proporcionar definiciones cuidadosas y demostraciones. A la vanguardia de este movimiento se encontraba el matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), quien fue primero ingeniero militar antes de convertirse en profesor de matemáticas en París. Cauchy tomó la idea de límite de Newton, idea que el matemático francés Jean d'Alembert había mantenido viva en el siglo XVIII y la hizo más exacta. Su definición de límite era: "Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para terminar diferenciándose de éste por tan poco como uno quiere, esto se llama *límite* de todos los otros." Pero cuando Cauchy aplicaba esta definición en ejemplos y demostraciones utilizaba a menudo desigualdades delta-épsilon similares a las de esta sección. Una demostración representativa de Cauchy inicia con: "Denótese mediante δ y ε dos números muy pequeños; . . ." Utilizaba ε debido a la correspondencia entre épsilon y la palabra francesa *erreur*. Posteriormente, el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) estableció la definición de un límite exactamente como en la definición de este texto.

[3] DEFINICIÓN DE LÍMITE IZQUIERDO

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad a - \delta < x < a \quad \text{en tal caso} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

[4] DEFINICIÓN DE LÍMITE DERECHO

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad a < x < a + \delta \quad \text{por lo tanto} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observe que la definición 3 es la misma que la definición 2 salvo que x está restringida a estar en la mitad *izquierda* $(a - \delta, a)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. En la definición 4, x tiene que estar en la mitad *derecha* $(a, a + \delta)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

EJEMPLO 3 Mediante la definición 4 demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN

1. *Adivinar un valor de* δ. Sea ε un número positivo dado. Aquí $a = 0$ y $L = 0$, de modo que busca un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

es decir, $$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{luego entonces} \quad \sqrt{x} < \varepsilon$$

o bien, al elevar al cuadrado ambos lados de la desigualdad $\sqrt{x} < \varepsilon$, obtiene

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{por lo tanto} \quad x < \varepsilon^2$$

Esto lleva a pensar que debe elegir $\delta = \varepsilon^2$.

2. *Demostración de que sí trabaja esta* δ. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon^2$. Si $0 < x < \delta$, después

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

de modo que
$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

De acuerdo con la definición 4, esto demuestra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. □

EJEMPLO 4 Demuestre que $\displaystyle\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

SOLUCIÓN

1. *Adivinar un valor de* δ. Está dado $\varepsilon > 0$. Debe encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{en tal caso} \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Para relacionar $|x^2 - 9|$ con $|x - 3|$ escriba $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Luego quiere

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x + 3|\,|x - 3| < \varepsilon$$

Observe que si puede encontrar una constante positiva C tal que $|x + 3| < C$, después

$$|x + 3|\,|x - 3| < C|x - 3|$$

y puede hacer $C|x - 3| < \varepsilon$ tomando $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$.

Puede determinar tal número C si restringe a x a quedar en un intervalo con centro en 3. En efecto, puesto que está interesado sólo en valores de x que estén cercanos a 3, es razonable suponer que x está a una distancia 1 desde 3, es decir, $|x - 3| < 1$. Por lo tanto $2 < x < 4$, de modo que $5 < x + 3 < 7$. Así, $|x + 3| < 7$, y por eso $C = 7$ es una elección aceptable para la constante.

Pero ahora ya hay dos restricciones en $|x - 3|$, a saber

$$|x - 3| < 1 \qquad \text{y} \qquad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Para tener la certeza de que ambas desigualdades se cumplen, haga que δ sea la más pequeña de los dos números 1 y $\varepsilon/7$. La notación para esto es $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$.

2. *Demostración de que esta* δ *funciona.* Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, en tal caso $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$ (como en la parte 1). También tiene que $|x - 3| < \varepsilon/7$, de modo que

$$|x^2 - 9| = |x + 3|\,|x - 3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$. □

Como se observa en el ejemplo 4, no siempre es fácil demostrar que son verdaderos los enunciados de límite usando la definición ε, δ. En efecto, si tiene una función más complicada como $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, una demostración requeriría una gran cantidad de ingenio. Por fortuna esto es innecesario porque las leyes de los límites establecidas en la sección 2.3 se demuestran usando la definición 2 y luego los límites de funciones complicadas se pueden determinar en forma rigurosa a partir de las leyes de los límites sin recurrir directamente a la definición.

Por ejemplo la ley de la suma: si existen tanto $\lim_{x \to a} f(x) = L$ como $\lim_{x \to a} g(x) = M$ en tal caso

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Las leyes restantes se demuestran en los ejercicios y en el apéndice F.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LA SUMA Se proporciona $\varepsilon > 0$. Es necesario determinar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Desigualdad triangular

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

(Véase apéndice A.)

Si usa la desigualdad triangular puede escribir

$$\boxed{5} \qquad \begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \end{aligned}$$

Haga que $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ sea menor que ε dejando que los términos $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$ sean menores que $\varepsilon/2$.

Puesto que $\varepsilon/2 > 0$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De manera similar, puesto que $\lim_{x \to a} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Observe que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

de modo que $\qquad |f(x) - L| < \dfrac{\varepsilon}{2} \quad$ y $\quad |g(x) - M| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Por lo tanto, de acuerdo con (5)

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &\leqslant |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Para resumir,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{luego entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

De esta manera, según la definición de un límite,

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M \qquad \square$$

LÍMITES INFINITOS

Los límites infinitos también se pueden definir de manera exacta. La que sigue es una versión exacta de la definición 4 de la sección 2.2.

> **6 DEFINICIÓN** Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto tal vez en a misma. Por lo tanto,
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$
>
> quiere decir que para todo número positivo M hay un número positivo δ tal que
>
> $$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{en consecuencia} \quad f(x) > M$$

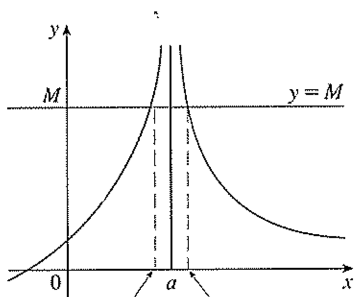


FIGURA 10

Esto establece que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (más grandes que cualquier número dado M) al acercar x lo suficiente a a (a una distancia δ, donde δ depende de M, pero $x \neq a$). Una representación geométrica se ilustra en la figura 10.

Dada una línea horizontal $y = M$, puede hallar un número $\delta > 0$ tal que si restringe a que x se sitúe en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ donde $x \neq a$, en tal caso la curva $y = f(x)$ queda por arriba de la recta $y = M$. Se puede ver si escoge una M más grande, en consecuencia se requeriría una δ más pequeña.

EJEMPLO 5 Aplique la definición 6 para demostrar que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

SOLUCIÓN Sea M un número positivo determinado. Busca un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x| < \delta \quad \text{entonces} \quad 1/x^2 > M$$

Pero
$$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

También si elige $\delta = 1/\sqrt{M}$ y $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, entonces $1/x^2 > M$. Esto demuestra que $1/x^2 \to \infty$ cuando $x \to 0$. □

La que sigue es una versión exacta de la definición 5 de la sección 2.2. Se ilustra en la figura 11.

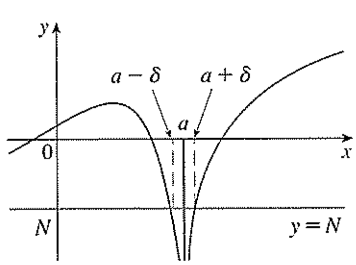


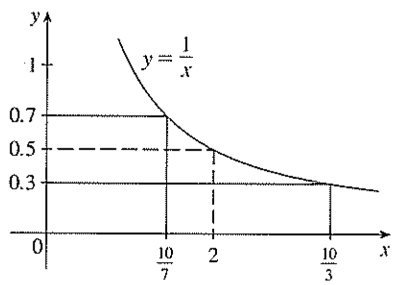
FIGURA 11

> **7 DEFINICIÓN** Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente para a misma. Entonces
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$
>
> quiere decir que para todo número negativo N hay un número positivo δ tal que
>
> $$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

2.4 EJERCICIOS

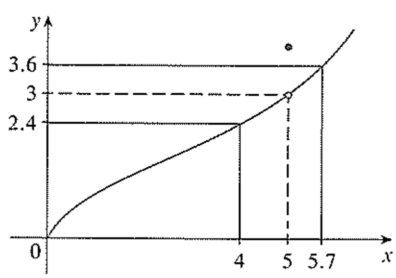
1. Utilice la gráfica dada de $f(x) = 1/x$ para calcular un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 2| < \delta \quad \text{en seguida} \quad \left|\frac{1}{x} - 0.5\right| < 0.2$$



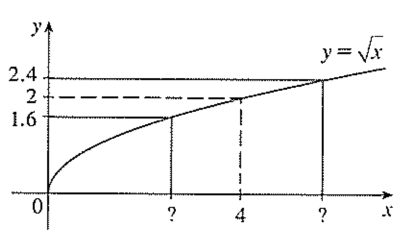
2. Utilice la gráfica dada de f para determinar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 5| < \delta \quad \text{en consecuencia} \quad |f(x) - 3| < 0.6$$



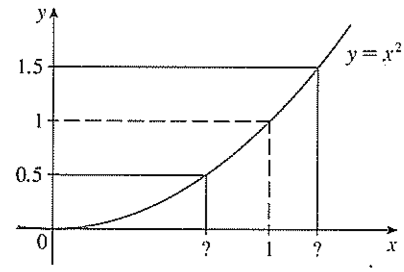
3. Mediante la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ hallar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 4| < \delta \quad \text{por lo tanto} \quad |\sqrt{x} - 2| < 0.4$$



4. Con la gráfica dada de $f(x) = x^2$ encuentre un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{después} \quad |x^2 - 1| < \tfrac{1}{2}$$



5. Por medio de una gráfica determine un número δ tal que

$$\text{si} \quad \left|x - \frac{\pi}{4}\right| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\tan x - 1| < 0.2$$

6. Con la ayuda de una gráfica determine un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{2x}{x^2 + 4} - 0.4\right| < 0.1$$

7. Para el límite

$$\lim_{x \to 1} (4 + x - 3x^3) = 2$$

ilustre la definición 2 calculando valores de δ que corresponden a $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon = 0.1$.

8. Para el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ilustre la definición 2 determinando valores de δ que corresponden a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

9. Teniendo en cuenta que el $\lim_{x \to \pi/2} \tan^2 x = \infty$, explicar la definición 6 hallando valores de δ que corresponda (a) $M = 1\,000$ y (b) $M = 10\,000$.

10. Utilice una gráfica para hallar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 5 < x < 5 + \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x - 5}} > 100$$

11. Se requiere un tornero para fabricar un disco circular de metal cuya área sea de 1 000 cm^2.
   (a) ¿Qué radio produce dicho disco?
   (b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de ± 5 cm^2 en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso (a) debe el tornero controlar el radio?
   (c) Según la definición ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

12. Se utiliza un horno de crecimiento de cristales en la investigación para determinar cuál es la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea el correcto, la temperatura se tiene que controlar exactamente ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se representa con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la entrada de potencia en watts.
(a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a 200°C?
(b) Si se permite una variación de temperatura de hasta ± 1 °C, con respecto a 200°C, ¿qué intervalo de potencia en watts se permite para la potencia de entrada?
(c) De acuerdo con la definición ε, δ de $\lim_{x\to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

13. (a) Hallar un número δ tal que si $|x - 2| < \delta$, por lo tanto $|4x - 8| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0.1$.
(b) Repetir el inciso (a) con $\varepsilon = 0.01$.

14. Teniendo en cuenta que el $\lim_{x\to 2} (5x - 7) = 3$, explicar la definición 2 hallando valores de δ que corresponda a $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$ y $\varepsilon = 0.01$.

15–18 Demuestre el enunciado aplicando la definición ε, δ de límite e ilustre con un diagrama como el de la figura 9.

15. $\lim\limits_{x\to 1} (2x + 3) = 5$

16. $\lim\limits_{x\to -2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$

17. $\lim\limits_{x\to -3} (1 - 4x) = 13$

18. $\lim\limits_{x\to 4} (7 - 3x) = -5$

19–32 Demuestre el enunciado aplicando la definición ε, δ de límite.

19. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x}{5} = \dfrac{3}{5}$

20. $\lim\limits_{x\to 6} \left(\dfrac{x}{4} + 3\right) = \dfrac{9}{2}$

21. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

22. $\lim\limits_{x\to -1.5} \dfrac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

23. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

24. $\lim\limits_{x\to a} c = c$

25. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

26. $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$

27. $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

28. $\lim\limits_{x\to 9^-} \sqrt[4]{9 - x} = 0$

29. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim\limits_{x\to 3} (x^2 + x - 4) = 8$

31. $\lim\limits_{x\to -2} (x^2 - 1) = 3$

32. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$

33. Compruebe que otra elección posible de δ es demostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ en el ejemplo 4 es $\delta = \text{mín}\,\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique mediante un razonamiento geométrico que la elección más grande posible de δ para demostrar que $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ es $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

CAS 35. (a) En el caso del límite $\lim_{x\to 1} (x^3 + x + 1) = 3$, determine un valor de δ mediante una gráfica que corresponde a $\varepsilon = 0.4$.
(b) Utilice un sistema algebraico para computadora con el fin de resolver la ecuación cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, y determinar el valor más grande posible de δ que funciona para cualquier $\varepsilon > 0$.
(c) Use $\varepsilon = 0.4$ en su respuesta del inciso (b) y compare con su respuesta del inciso (a).

36. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}$.

37. Demuestre que $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

$$\left[\textit{Sugerencia}\text{: utilice } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.\right]$$

38. Si H es la función de Heaviside que se definió en el ejemplo 6 de la sección 2.2, demuestre mediante la definición 2 que no existe el $\lim_{t\to 0} H(t)$. [*Sugerencia*: efectúe una demostración indirecta como se indica. Suponga que el límite es L. Haga $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en la definición de un límite e intente llegar a una contradicción.]

39. Si la función f se define mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

40. Mediante la comparación de las definiciones 2, 3 y 4 demuestre el teorema 1 de la sección 2.3.

41. ¿Qué tan cerca a -3 tiene que hacer a x para que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000$$

42. Demuestre aplicando la definición 6 que $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

44. Suponga que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, donde c es un número real. Demuestre cada proposición.
(a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \infty$
(b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \infty$ si $c > 0$
(c) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = -\infty$ si $c < 0$

2.5 CONTINUIDAD

En la sección 2.3 se le hizo notar que a menudo se puede hallar el límite de una función cuando x tiende a a, con sólo calcular el valor de la función en a. Se dice que las funciones con esta propiedad son *continuas en a*. Ahora verá que la definición matemática de continuidad corresponde íntimamente al significado de la palabra *continuidad* en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo tiene lugar gradualmente, sin interrupción ni cambio abrupto.)

1 **DEFINICIÓN** Una función f es **continua en un número a** si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Como se ilustra en la figura 1, si f es continua, después los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de f tienden al punto $(a, f(a))$ de la gráfica. Así, no hay brecha alguna en la curva.

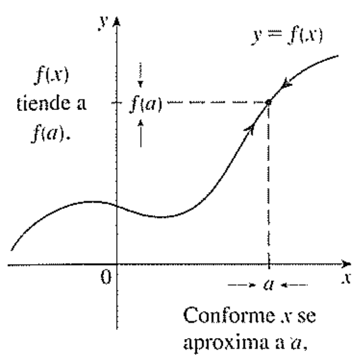


FIGURA 1

Advierta que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas si f es continua en a:

1. $f(a)$ está definido (es decir, a está en el dominio de f)

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La definición afirma que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Así, una función continua tiene la propiedad de que un cambio pequeño en x sólo produce una pequeña alteración en $f(x)$. De hecho, el cambio en $f(x)$ se puede mantener tan pequeño como desee, restringiendo el cambio en x lo necesario.

Si f está definida cerca de a (en otras palabras, f está definida en un intervalo abierto que contiene a, excepto tal vez en a), f es **discontinua en a** (o f tiene una **discontinuidad** en a) si f no es continua en a.

Los fenómenos físicos suelen ser continuos. Por ejemplo, el desplazamiento o la velocidad de un vehículo varían en forma continua con el tiempo, como pasa con la estatura de una persona. Pero en realidad se presentan discontinuidades en situaciones como las corrientes eléctricas. [Vea el ejemplo 6, de la sección 2.2, donde la función de Heaviside es discontinua en 0 porque $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.]

Geométricamente, una función continua en todo número en un intervalo se puede concebir como una función cuya gráfica no se interrumpe. La gráfica se puede trazar sin levantar la pluma del papel.

EJEMPLO 1 En la figura 2 se muestra la gráfica de una función f. ¿En cuáles números es f discontinua? ¿Por qué?

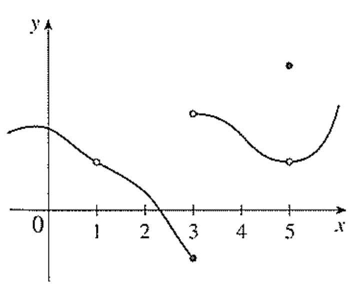


FIGURA 2

SOLUCIÓN Se ve como si hubiera una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. La razón oficial de que f sea discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definido.

La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón de la discontinuidad es diferente. En este caso, $f(3)$ está definido, pero $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes). Por lo tanto, f es discontinua en 3.

¿Qué pasa cuando $x = 5$? En tal caso, $f(5)$ está definido y $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos). Pero

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

De este modo, f es discontinua en 5. □

Observe ahora cómo detectar las discontinuidades cuando una fórmula define a la función.

V EJEMPLO 2 ¿En dónde son discontinuas cada una de las funciones siguientes?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

(a) Advierta que $f(2)$ no está definido, también f es discontinua en 2. Más adelante verá por qué es continua en todos los otros números.

(b) En este caso, $f(0) = 1$ está definido pero

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Véase el ejemplo 8 en la sección 2.2.) Así, f es discontinua en 0.

(c) En este caso $f(2) = 1$ está definido y

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+1) = 3$$

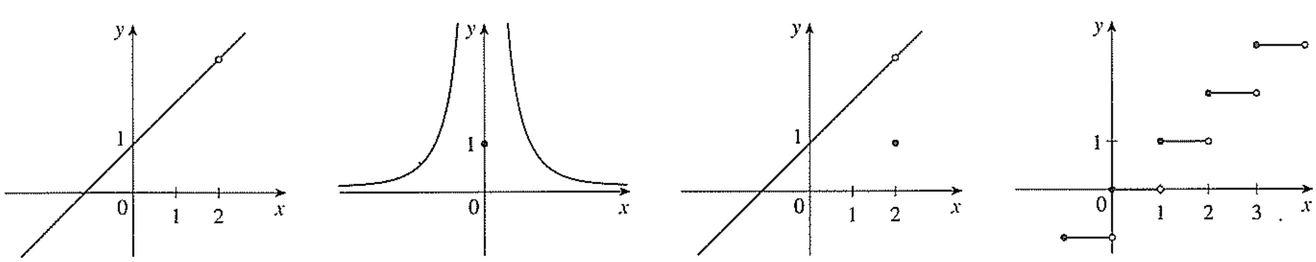
existe. Pero

$$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$$

por eso, f no es continua en 2.

(d) La función entero máximo $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque $\lim_{x\to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Véase el ejemplo 10 y el ejercicio 49 de la sección 2.3.) □

En la figura 3 se muestran las gráficas de las funciones del ejemplo 2. En cada caso no se puede dibujar la gráfica sin levantar la pluma del papel, porque se presenta un agujero, una ruptura o un salto en esa gráfica. El tipo de discontinuidad que se ilustra en los incisos (a) y (c) se conoce como **removible** porque la discontinuidad podría eliminarse al redefinir f justo en el número único 2. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad del inciso (b) recibe el nombre de **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades del inciso (d) se llaman **discontinuidad por salto** porque la función "salta" de un valor a otro.



(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ (d) $f(x) = [\![x]\!]$

FIGURA 3 Gráficas de las funciones del ejemplo 2

2 DEFINICIÓN Una función f es **continua desde la derecha en un número a** si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua desde la izquierda en a** si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO 3 En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [véase la figura 3(d)] es continua desde la derecha pero discontinua desde la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero
$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$ □

3 DEFINICIÓN Una función f es **continua sobre un intervalo** si es continua en todo número en el intervalo. (Si f se define únicamente en un lado de un punto extremo del intervalo, *continua* quiere decir *continua desde la derecha* o *continua desde la izquierda.*)

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$ en tal caso, al aplicar las leyes de los límites

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\ &= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\ &= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(por la ley 11)} \\ &= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por las leyes 2, 7 y 9)} \\ &= f(a) \end{aligned}$$

De suerte que por la definición 1, f es continua en a si $-1 < a < 1$. Cálculos similares hacen ver que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

de modo que f es continua desde la derecha en -1 y continua desde la izquierda en 1. Por consiguiente, según la definición 3, f es continua sobre $[-1, 1]$.

En la figura 4 se ilustra la gráfica de f. Es la mitad inferior del círculo

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$ □

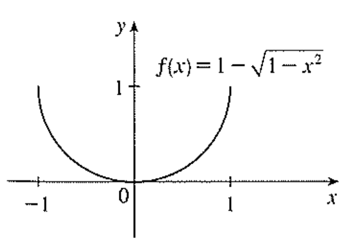


FIGURA 4

En lugar de aplicar siempre las definiciones 1, 2 y 3 para comprobar la continuidad de una función, como en el ejemplo 4, a menudo resulta conveniente aplicar el teorema siguiente, el cual muestra cómo formar funciones continuas complicadas a partir de funciones sencillas.

4 TEOREMA Si f y g son continuas en a y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en a:

1. $f + g$ **2.** $f - g$ **3.** cf

4. fg **5.** $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Cada una de las cinco partes de este teorema se infieren de la ley de los límites correspondiente de la sección 2.3. Por ejemplo, demuestra la parte 1. Puesto que f y g son continuas en a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{(por la Ley 1)} \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

Esto muestra que $f + g$ es continua en a. □

Del teorema 4 y la definición 3 se deduce que si f y g son continuas sobre un intervalo, también lo son las funciones $f + g$, $f - g$, cf, fg y (si g nunca es 0) f/g. En la sección 2.3 se enunció el siguiente teorema como propiedad de sustitución directa.

5 TEOREMA
(a) Cualquier polinomio es continuo en todas partes; es decir, es continuo sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
(b) Cualquier función racional es continua, siempre que esté definida; es decir, es continua en su dominio.

DEMOSTRACIÓN
(a) Un polinomio es una función de la forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes. Sabe que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(por la ley 7)}$$

y

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1.2, \ldots, n \qquad \text{(por la ley 9)}$$

Esta ecuación es precisamente la proposición de que la función $f(x) = x^m$ es una función continua. Por esto, con base en la parte 3 del teorema 4, la función $g(x) = cx^m$ es continua. Dado que P es una suma de funciones de esta forma y una función constante, a partir de la parte 1 del teorema 4 se deduce que P es continua.

(b) Una función racional es una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio de f es $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Sabe, del inciso (a), que P y Q son continuas en todas partes. De esta manera, f es continua en todo número en D, de acuerdo con la parte 5 del teorema 4. □

Como ilustración del teorema 5, observe que el volumen de una esfera varía continuamente con su radio porque la fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ hace ver que V es una función polinomial de r. Del mismo modo, si se lanza una pelota verticalmente en el aire, con una velocidad de 50 ft/s, después la fórmula $h = 50t - 16t^2$ expresa la altura de la pelota, en pies, después de t segundos. De nuevo, es una función polinomial, de modo que la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

Saber cuáles funciones son continuas permite evaluar algunos límites con mucha rapidez, como demuestra el ejemplo siguiente. Compárelo con el ejemplo 2(b) de la sección 2.3.

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, de modo que por el teorema 5 es continua sobre su dominio, el cual es $\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\}$. En consecuencia

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x\to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$ □

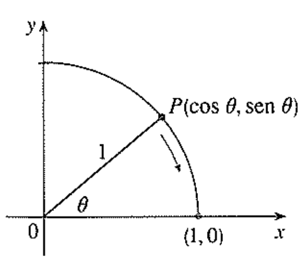


FIGURA 5

Resulta que la mayor parte de las funciones conocidas son continuas en todo número en su dominio. Por ejemplo, la ley de los límites 10 (página 110) es exactamente la proposición de que las funciones raíz son continuas.

Con base en el aspecto de las gráficas de las funciones seno y coseno (figura 18, en la sección 1.2), podría suponer con toda certeza que son continuas. De acuerdo con la definición de sen θ y cos θ sabe que las coordenadas del punto P de la figura 5 son (cos θ, sen θ). Cuando $\theta \to 0$, P tiende al punto (1, 0) y, por consiguiente, cos $\theta \to 1$ y sen $\theta \to 0$. De esta manera

6 $$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta\to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$$

Otra forma de establecer los límites en (6) es usar el teorema de la compresión con la desigualdad sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), lo cual se prueba en la sección 3.3.

Como cos 0 = 1 y sen 0 = 0, las ecuaciones dadas en (6) afirman que las funciones seno y coseno son continuas en 0. Por lo tanto se pueden aplicar las fórmulas de la adición para coseno y seno para deducir que estas funciones son continuas en todas partes (véase los ejercicios 56 y 57).

De la parte 5 del teorema 4, se deduce que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

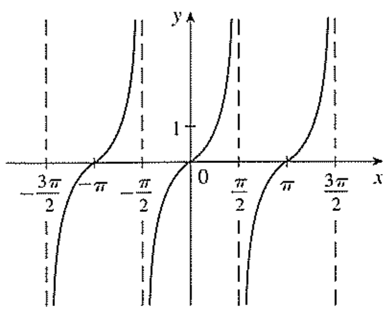


FIGURA 6 $y = \tan x$

≡ En la sección 1.6 se hace un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

es continua excepto donde $\cos x = 0$. Esto sucede cuando x es un múltiplo impar de $\pi/2$, de modo que $y = \tan x$ tiene discontinuidades infinitas cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, y así sucesivamente (véase la figura 6).

La función inversa de cualquier función uno a uno continua también es continua. (Este hecho se comprueba en el apéndice F, pero la intuición geométrica lo hace parecer razonable: La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la recta $y = x$. También, si la gráfica de f no tiene ruptura alguna, tampoco la tiene la gráfica de f^{-1}.) De este modo, las funciones trigonométricas inversas son continuas.

En la sección 1.5 se definió la función exponencial $y = a^x$ de modo que se llenaran los agujeros en la gráfica de esta función donde x es racional. En otras palabras, la simple definición de $y = a^x$ la hace una función continua sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto, su función inversa $y = \log_a x$ es continua sobre $(0, \infty)$.

7 TEOREMA Los tipos siguientes de funciones son continuos en todo número en sus dominios:

polinomios funciones racionales funciones raíz

funciones trigonométricas funciones trigonométricas inversas

funciones exponenciales funciones logarítmicas

EJEMPLO 6 ¿En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$?

SOLUCIÓN Por el teorema 7, sabe que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y que $y = \tan^{-1} x$ es continua sobre $\mathbb{R}$. Así, por la parte 1 del teorema 4, $y = \ln x + \tan^{-1} x$ es continua sobre $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es un polinomio, de modo que es continuo en todas partes. Por lo tanto, por la parte 5 del teorema 4, f es continua en todos los números positivos x, excepto donde $x^2 - 1 = 0$. De este modo, f es continua en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. □

EJEMPLO 7 Hallar el valor numérico del $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUCIÓN El teorema 7 dice que $y = \operatorname{sen} x$ es continua. La función en el denominador, $y = 2 + \cos x$, es la suma de dos funciones continuas y en consecuencia es continua. Dese cuenta que esta función jamás es cero porque $\cos x \geq -1$ para toda x y también $2 + \cos x > 0$ en todas partes. En estos términos la relación

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

es continua en todas partes. Por lo tanto, mediante la definición de función continua,

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$ □

Otra manera de combinar las funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del teorema siguiente.

Este teorema expresa que se puede mover un símbolo de límite a través de un símbolo de función, si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, se puede invertir el orden de estos dos símbolos.

8 TEOREMA Si f es continua en b y $\lim_{x\to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

A nivel intuitivo, este teorema resulta razonable porque si x está cerca de a, después $g(x)$ está cerca de b y como f es continua en b, si $g(x)$ está cerca de b, en seguida $f(g(x))$ está cerca de $f(b)$. Una demostración del teorema 8 se proporciona en el apéndice F.

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$.

SOLUCIÓN Ya que arcsen es una función continua, aplique el teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$ □

Aplique el teorema 8 en el caso especial donde $f(x) = \sqrt[n]{x}$, y n es un entero positivo. En tal caso

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y $$f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Si sustituye estas expresiones en el teorema 8 obtiene

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} g(x)}$$

con lo que queda demostrada la ley 11 de los límites. (Supone que las raíces existen.)

9 TEOREMA Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a.

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función continua".

DEMOSTRACIÓN Como g es continua en a

$$\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

Como f es continua en $b = g(a)$, puede aplicar el teorema 8 para obtener

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

que es precisamente la proposición de que la función $h(x) = f(g(x))$ es continua en a; es decir, $f \circ g$ es continua en a. □

EJEMPLO 9 ¿En dónde son continuas las funciones siguientes?

(a) $h(x) = \text{sen}(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUCIÓN

(a) Tiene $h(x) = f(g(x))$ donde

$$g(x) = x^2 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \text{sen } x$$

Ahora g es continua sobre $\mathbb{R}$, puesto que es un polinomio, y f también es continua en todas partes. Por consiguiente, $h = f \circ g$ es continua sobre $\mathbb{R}$ por el teorema 9.

(b) Con base en el teorema 7, sabe que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (porque tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Por lo tanto, del teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ es continuo siempre que esté definido. Ahora bien, $\ln(1 + \cos x)$ está definido cuando $1 + \cos x > 0$. De este modo, no está definido cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Por esto, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua sobre los intervalos entre estos valores. (Véase la figura 7.) □

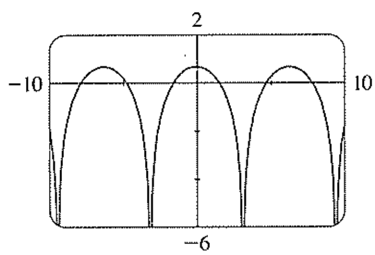


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

Una propiedad importante de las funciones continuas se expresa con el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en libros más avanzados de cálculo.

> **10 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO** Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Por lo tanto existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El teorema del valor intermedio afirma que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la figura 8. Observe que el valor N se puede tomar una vez [como en la parte (a)] o más de una vez [como en la parte (b)].

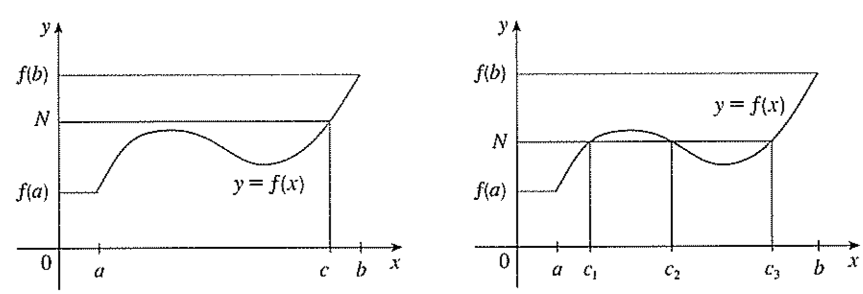


FIGURA 8 (a) (b)

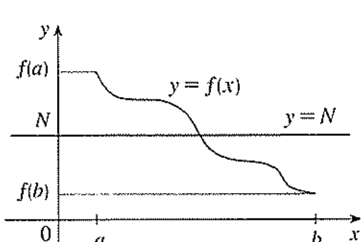


FIGURA 9

Si piensa en una función continua como en una función cuya gráfica no tiene agujeros o rupturas, en tal caso es fácil creer que el teorema del valor intermedio es cierto. En términos geométricos, dice que si se da cualquier recta horizontal $y = N$ entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$, como en la figura 9, por lo tanto la gráfica de f no puede saltar sobre la recta. Debe intersecar $y = N$ en alguna parte.

Es importante que la función f del teorema 10 sea continua. En general, el teorema del valor intermedio no se cumple para las funciones discontinuas (véase el ejercicio 44).

Un uso del teorema del valor intermedio es hallar las raíces de ecuaciones, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 10 Demuestre que existe una raíz de la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Busca una solución de la ecuación dada; es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por lo tanto, en el teorema 10, toma $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$. Tiene

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Por esto, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es un polinomio, de modo que el teorema del valor intermedio afirma que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, podemos localizar una raíz con mayor precisión aplicando de nuevo el teorema del valor intermedio. Puesto que

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz se debe encontrar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por tanteos,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \qquad \text{y} \qquad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

de modo que una raíz se encuentra en el intervalo $(1.22, 1.23)$. □

Use una calculadora graficadora o una computadora para ilustrar la aplicación del teorema del valor intermedio en el ejemplo 10. En la figura 10 se muestra la gráfica de f en rectángulo de visualización $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$ y se puede ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. En la figura 11 se muestra el resultado de realizar un acercamiento hacia la pantalla $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

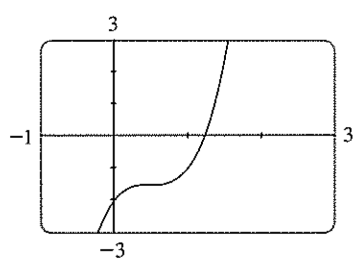


FIGURA 10

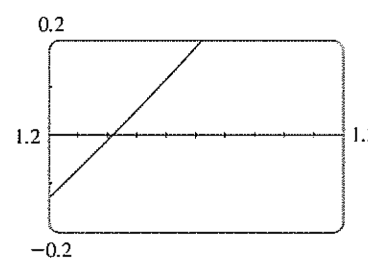


FIGURA 11

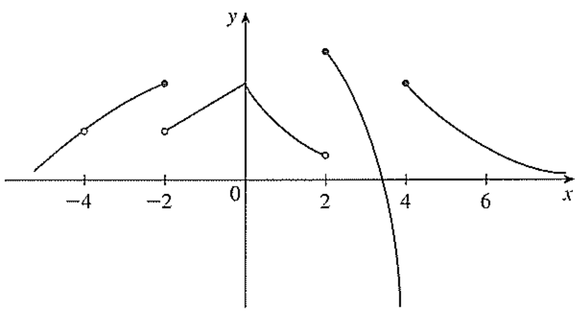
De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un papel en la manera en que funcionan estos aparatos graficadores. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y hace aparecer los pixeles que contienen estos puntos calculados. Supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. En consecuencia, la computadora une los pixeles al hacer aparecer los pixeles intermedios.

2.5 EJERCICIOS

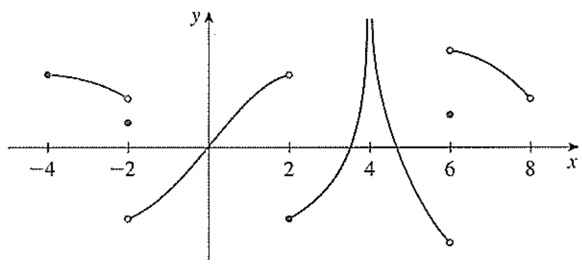
1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

2. Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su gráfica?

3. (a) A partir de la gráfica de f, establezca el número al cual f es discontinua y explique por qué.
   (b) Para cada uno de los números que se determinaron en el inciso (a), determine si f es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados.



4. A partir de la gráfica de g, dé los intervalos sobre los que g es continua.



5. Trace la gráfica de una función que sea continua en todas partes, excepto en $x = 3$, y sea continua desde la izquierda en 3.

6. Dibuje una función que tenga una discontinuidad de salto en $x = 2$ y una discontinuidad removible en $x = 4$, pero que sea continua en todas las demás partes.

7. En un lote de estacionamiento se cobran \$3 por la primera hora (o fracción) y \$2 por cada hora (o fracción) subsiguiente, hasta un máximo diario de \$10.
   (a) Dibuje el costo de estacionar un automóvil en este lote, como función del tiempo que permanezca allí.
   (b) Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que estacione su automóvil en el lote.

8. Explique por qué cada función es continua o discontinua.
   (a) La temperatura en un lugar específico como función del tiempo.
   (b) La temperatura en un momento dado como función de la distancia hacia el oeste de la ciudad de Nueva York
   (c) La altitud sobre el nivel del mar como función de la distancia hacia el oeste de la ciudad de Nueva York.
   (d) El costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida.
   (e) La corriente en el circuito para las luces de una habitación como función del tiempo.

9. Si f y g son funciones continuas con $f(3) = 5$ y $\lim_{x \to 3} [2f(x) - g(x)] = 4$, encuentre $g(3)$.

10–12 Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el número a dado.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

12. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

13–14 Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el intervalo

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

14. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$.

15–20 Explique por qué la función es discontinua en el punto dado a. Dibuje la gráfica de la función.

15. $f(x) = \ln|x - 2| \qquad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

21–28 Con los teoremas 4, 5, 7 y 9 explique por qué la función es continua en todo número en su dominio. Dé el dominio.

21. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$

22. $G(x) = \sqrt[3]{x}(1 + x^3)$

23. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$

24. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

25. $L(t) = e^{-5t} \cos 2\pi t$

26. $F(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln(t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos(e^{\sqrt{x}})$

29–30 Localice las discontinuidades de la función e ilústrelas trazando una gráfica.

29. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\tan^2 x)$

31–34 Aplique la continuidad para evaluar el límite.

31. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

32. $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

33. $\lim\limits_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

34. $\lim\limits_{x \to 2} \arctan\left(\dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

35–36 Demuestre que f es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

35. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{si } x \geq \pi/4 \end{cases}$

37–39 Determine los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos valores f es continua por la derecha, por la izquierda o no lo es ni por la derecha ni por la izquierda? Trace la gráfica de f.

37. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional. ¿F es una función continua de r?

41. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

42. Hallar el valor de a y b que hace a f continua en todas partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

43. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en a? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y es continua en $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$, $\quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}$, $\quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!]$, $\quad a = \pi$

44. Suponga que una función f es continua sobre $[0, 1]$, excepto en 0.25, y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos gráficas posibles de f, una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema (aun cuando no satisfaga la hipótesis).

45. Si $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 1\,000$.

46. Considere que f es continua en $[1, 5]$ y la única solución de $f(x) = 6$ son $x = 1$ y $x = 4$. Si $f(2) = 8$, explique ¿por qué $f(3) > 6$?

47–50 Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación dada en el intervalo especificado.

47. $x^4 + x - 3 = 0$, $\quad (1, 2)$

48. $\sqrt[3]{x} = 1 - x$, $\quad (0, 1)$

49. $\cos x = x$, $\quad (0, 1)$

50. $\ln x = e^{-x}$, $\quad (1, 2)$

51–52 (a) Compruebe que la ecuación tiene cuando menos una raíz real. (b) Use su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

51. $\cos x = x^3$

52. $\ln x = 3 - 2x$

53–54 (a) Pruebe que la ecuación tiene cuando menos una raíz real. (b) Utilice su dispositivo graficador para encontrar la raíz correcta hasta tres cifras decimales.

53. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$

54. $\arctan x = 1 - x$

55. Demuestre que f es continua en a si y sólo si

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

56. Para demostrar que seno es continuo necesita demostrar que $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real a. Según el ejercicio 55, una proposición equivalente es que

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Aplique (6) para demostrar que esto es cierto.

57. Compruebe que coseno es una función continua.

58. (a) Demuestre el teorema 4, parte 3.
(b) Demuestre el teorema 4, parte 5.

59. ¿Para qué valores de x es continua f?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

60. ¿Para qué valores de x es continua g?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{61.}}$ ¿Hay un número que es exactamente 1 más que su cubo?

62. Si a y b son números positivos, comprobar que la ecuación

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tiene por lo menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

63. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $(-\infty, \infty)$.

64. (a) Demuestre que la función de valor absoluto $F(x) = |x|$ es continua en todas partes.
(b) Compruebe que si f es una función continua sobre un intervalo, entonces también lo es $|f|$.
(c) ¿Lo inverso de la proposición del inciso (b) también es verdadero? En otras palabras, ¿si $|f|$ es continua se deduce que f es continua? De ser así, compruébelo. En caso de no ser así, halle un ejemplo contrario.

65. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 A.M. y emprende su camino habitual hacia la cima de la montaña, a donde llega a las 7:00 P.M. La mañana siguiente inicia el regreso desde la cima por la misma ruta a las 7:00 A.M. y llega al monasterio a las 7:00 P.M. Mediante el teorema del valor intermedio demuestre que existe un punto a lo largo de la ruta que el monje cruzará exactamente a la misma hora en ambos días.

2.6 LÍMITES AL INFINITO, ASÍNTOTAS HORIZONTALES

En las secciones 2.2 y 2.4 se trataron los límites infinitos y las asíntotas verticales. Ahí se dejó que x se aproximara a un número y el resultado es que los valores de y se vuelven arbitrariamente grandes (ya sean positivos o negativos). En esta sección se permite que x se vuelva arbitrariamente grande (positiva o negativa) y se observe qué le sucede a y.

Empiece por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

cuando x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función correctos hasta seis cifras decimales y, en la figura 1, se ha trazado la gráfica de f por medio de una computadora.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998

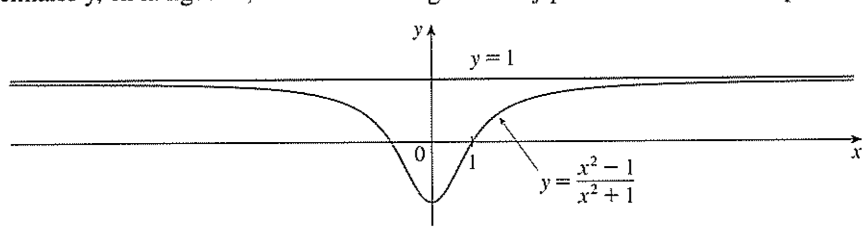


FIGURA 1

Conforme x crece más y más, se puede ver que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 1. De hecho, parece que puede acercar cuanto quiera los valores de $f(x)$ a 1 eligiendo una x lo suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica escribiendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, use el simbolismo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L conforme x se hace más y más grande.

[1] DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). En tal caso

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como desee, si escoge una x suficientemente grande.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{conforme} \quad x \to \infty$$

El símbolo ∞ no representa un número. No obstante, la expresión $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ a menudo se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito, es L"

o "el límite de $f(x)$, cuando x se hace infinito, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x crece sin cota, es L"

La definición 1 da el significado de esas frases. Una definición más exacta, similar a la definición de ε, δ de la sección 2.4 se encuentra al final de esta sección

En la figura 2 se muestran ilustraciones geométricas de la definición 1. Advierta que hay muchas maneras de aproximar la gráfica de f a la recta $y = L$ (la cual se llama *asíntota horizontal*) a medida que ve hacia el extremo derecho de cada gráfica.

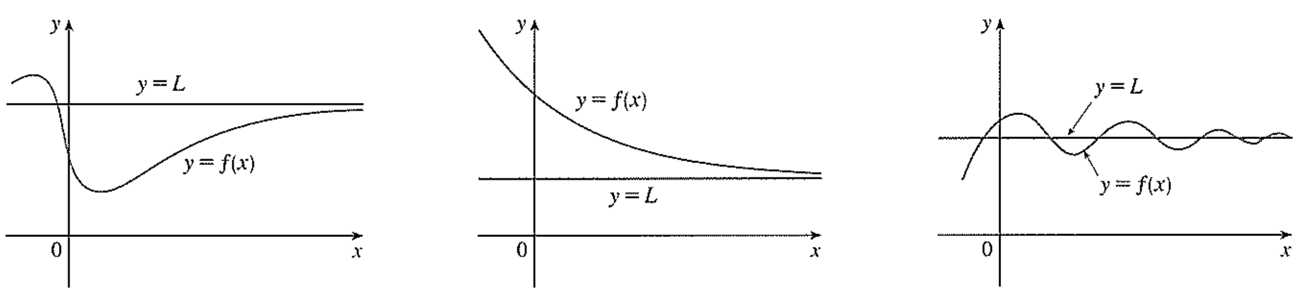


FIGURA 2
Ejemplos que ilustran $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

Si vuelve a la figura 1, verá que para valores negativos numéricamente grandes de x, los valores de $f(x)$ están cercanos a 1. Al reducir x a través de valores negativos sin cota, puede acercar $f(x)$ a 1 cuanto quiera. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es como sigue:

[2] DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

quiere decir que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea lo suficientemente grande y negativa.

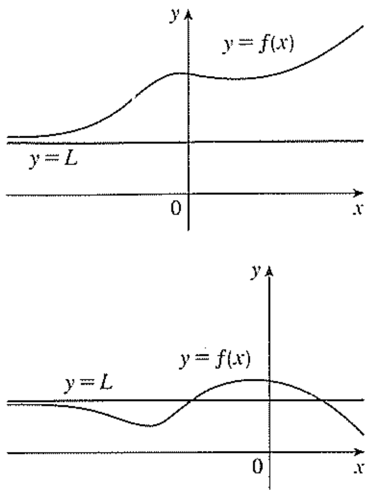


FIGURA 3
Ejemplos que ilustran $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

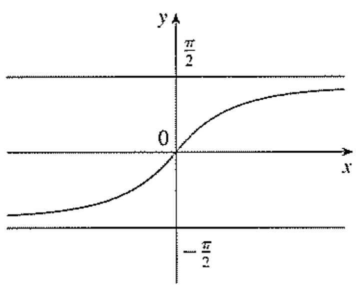


FIGURA 4
$y = \tan^{-1}x$

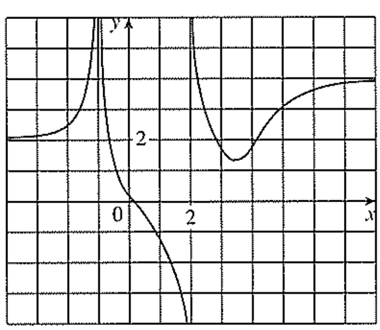


FIGURA 5

Es necesario remarcar que el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito negativo, es L".

La definición 2 se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica tiende a la recta $y = L$ como en el extremo izquierdo de cada gráfica.

3 DEFINICIÓN La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Por ejemplo, la curva que se ilustra en la figura 1 tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1}x$. (Véase la figura 4.) En efecto,

$$\boxed{4} \qquad \lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to\infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las dos rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se concluye a partir del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan.)

EJEMPLO 1 Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función f cuya gráfica se muestra en la figura 5.

SOLUCIÓN Va que los valores de $f(x)$ se vuelven grandes cuando $x \to -1$ desde ambos lados; por lo tanto

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \infty$$

Advierta que $f(x)$ se hace grande negativo cuando x tiende a 2 desde la izquierda, pero grande positivo cuando x tiende a 2 desde la derecha. De este modo,

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$$

De esta suerte, las dos rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x crece, $f(x)$ tiende a 4. Pero cuando x decrece a través de valores negativos, $f(x)$ tiende a 2. Así entonces,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que tanto $y = 4$ como $y = 2$ son asíntotas horizontales. □

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}$ y $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeño. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

De hecho, si elige una x suficientemente grande, puede aproximar $1/x$ a 0 cuanto quiera. Por lo tanto, según la definición 4

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Un razonamiento similar hace ver que cuando x es grande negativo, $1/x$ es pequeño negativo; de este modo, también tiene

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

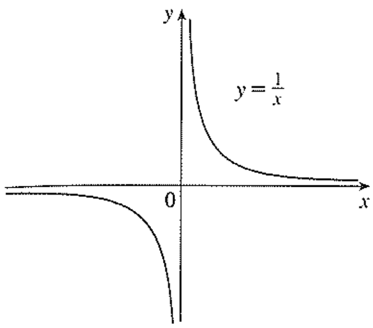


FIGURA 6
$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Se infiere que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$ (que es una hipérbola equilátera; véase la figura 6). □

La mayor parte de las leyes de los límites que se dieron en la sección 2.3 también se cumplen para los límites en el infinito. Se puede probar que las *leyes de los límites, cuya lista se da en la sección 2.3 (con la excepción de las leyes 9 y 10), también son válidas si "$x \to a$" se reemplaza con "$x \to \infty$" o con "$x \to -\infty$"*. En particular, si combina la ley 6 con los resultados del ejemplo 2, obtiene la importante regla que sigue para el cálculo de límites.

> **[5] TEOREMA** Si $r > 0$ es un número racional, entonces
>
> $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^r} = 0$$
>
> Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida para toda x, entonces
>
> $$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique las propiedades de límites que se usan en cada etapa.

SOLUCIÓN Conforme x se hace más grande, tanto el numerador como el denominador se hacen más grandes, por lo tanto no resulta evidente qué sucede con su proporción. Necesita hacer algunas operaciones algebraicas preliminares.

Para evaluar el límite en el infinito de una función racional, divida el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que hay en el denominador. (Puede suponer que $x \neq 0$, puesto que sólo está interesados en los valores grandes de x.) En este caso, la mayor potencia de x en el dominador es x^2, con lo cual tiene

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x-2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(por la ley de los Límites 5)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(por 1, 2 y 3)}$$

$$=\frac{3-0-0}{5+0+0} \qquad \text{(por 7 y el teorema 5)}$$

$$=\frac{3}{5}$$

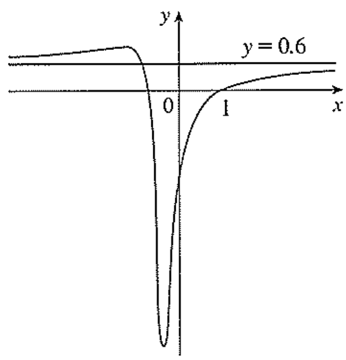


FIGURA 7
$y=\dfrac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$

Un cálculo semejante hace ver que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. En la figura 7 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$. □

EJEMPLO 4 Determine las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

SOLUCIÓN Al dividir tanto el numerador como el denominador entre x y aplicar las propiedades de los límites tiene

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} \qquad \text{(puesto que } \sqrt{x^2}=x \text{ para } x>0\text{)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{x}\right)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}2+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}=\frac{\sqrt{2+0}}{3-5\cdot 0}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por lo tanto, la recta $y = \sqrt{2}/3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Si calcula el límite cuando $x \to -\infty$, debe recordar que para $x < 0$, tiene $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. De donde, al dividir el numerador entre x, para $x < 0$ obtiene

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+1}=-\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2+1}=-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{3-5\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

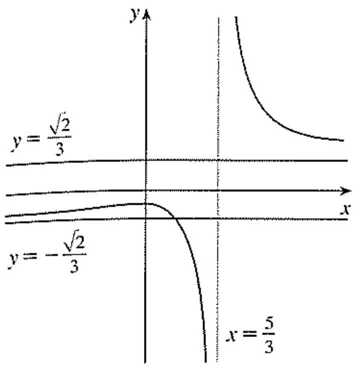


FIGURA 8
$y=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

Así, la recta $y = -\sqrt{2}/3$ también es una asíntota horizontal.

Es probable que haya una asíntota vertical cuando el denominador, $3x - 5$, es 0, es decir, cuando $x = \frac{5}{3}$. Si x tiende a $\frac{5}{3}$ y $x > \frac{5}{3}$, después el denominador está cercano a 0 y $3x - 5$ es positivo. El numerador $\sqrt{2x^2+1}$ siempre es positivo, de modo que $f(x)$ es positivo. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to(5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \infty$$

Si x está cerca de $\frac{5}{3}$ pero $x < \frac{5}{3}$, en seguida $3x - 5 < 0$ y $f(x)$ es grande y negativa. De esta manera,

$$\lim_{x\to(5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

La asíntota vertical es $x = \frac{5}{3}$. Las tres asíntotas se ilustran en la figura 8. □

EJEMPLO 5 Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

SOLUCIÓN Ya que tanto $\sqrt{x^2+1}$ como x son grandes cuando x es grande, es difícil ver qué sucede con su diferencia, por eso, use el álgebra para escribir de nuevo la función. En primer lugar multiplique el numerador y el denominador por el radical conjugado.

▪ Puede considerar que la función dada tiene un denominador de 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\end{aligned}$$

Se podría aplicar el teorema de la compresión para demostrar que este límite es 0. Pero un método más fácil es dividir el numerador y el denominador entre x. Al efectuar esto y aplicar las leyes de los límites obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0\end{aligned}$$

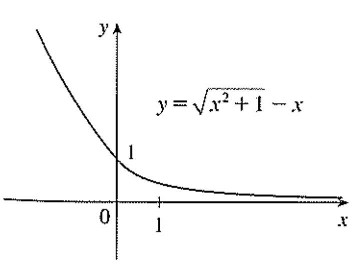


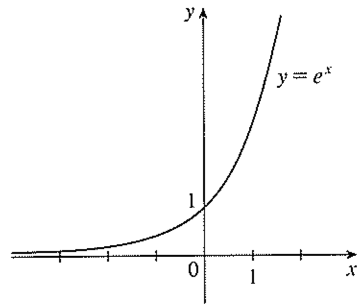
FIGURA 9

En la figura 9 se ilustra este resultado. □

En la gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ tiene la recta $y = 0$ (el eje x) como asíntota horizontal. (Lo mismo se cumple para cualquier función exponencial con base $a > 1$.) En efecto, a partir de la gráfica de la figura 10 y la tabla correspondiente de valores observe que

$$\boxed{6} \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

Advierta que los valores de e^x tienden a 0 con mucha rapidez.



x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

FIGURA 10

EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

La estrategia para resolver problemas para el ejemplo 6 es *introducir algo adicional* (véase página 76). En este caso, lo adicional, el elemento auxiliar, es la variable t.

SOLUCIÓN Si hace que $t = 1/x$, sabe que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por lo tanto, de acuerdo con (6),

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

(Véase ejercicio 71.) □

EJEMPLO 7 Evalúe $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Cuando x crece, los valores de sen x oscilan entre 1 y -1 infinitamente a menudo, y, de este modo, no se aproximan a ningún número definido. Así, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ no existe. □

LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO

La notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

se usa para indicar que los valores de $f(x)$ se agrandan cuando x se hace grande. Se asocian significados semejantes a los símbolos siguientes:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

EJEMPLO 8 Determine $\lim_{x \to \infty} x^3$ y $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

SOLUCIÓN Cuando x se incrementa, también lo hace x^3. Por ejemplo,

$$10^3 = 1000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1000^3 = 1\,000\,000\,000$$

En efecto, puede hacer a x^3 tan grande como quiera incrementando de manera suficiente a x. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

de manera similar, cuando x toma un valor negativo grande, así es x^3. En estos términos

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Asimismo, eatas proposiciones de los límites se pueden ver en la gráfica de $y = x^3$ en la figura 11. □

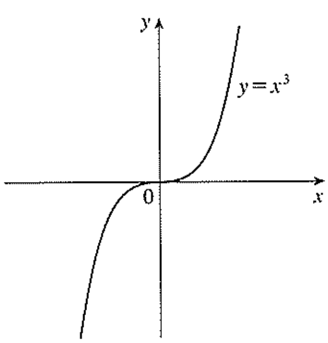


FIGURA 11
$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

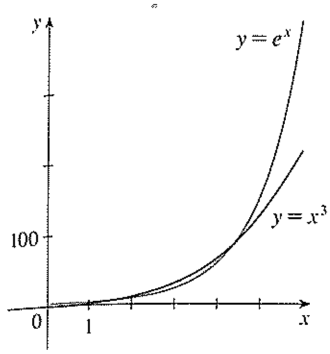


FIGURA 12
e^x es tan grande como x^3 cuando x es grande.

Al examinar la figura 10 observe que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

pero, como se muestra en la figura 12, $y = e^x$ se hace grande cuando $x \to \infty$ con mucha mayor rapidez que $y = x^3$.

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Advierta que **no puede** escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

Las leyes de los límites no se pueden aplicar a los límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ está indefinido). Sin embargo, *puede* escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty$$

porque tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y, por lo tanto, también su producto. □

EJEMPLO 10 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, divida el numerador y denominador entre la potencia más alta de x en el denominador, que es justamente x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

porque $x + 1 \to \infty$ y $3/x - 1 \to -1$ cuando $x \to \infty$. □

En el ejemplo siguiente se muestra que al analizar límites infinitos en el infinito, junto con intersecciones, es posible llegar a tener una idea general de la gráfica de un polinomio sin tener que graficar una gran cantidad de puntos.

EJEMPLO 11 Trace la gráfica de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ con ayuda de las intersecciones y sus límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

SOLUCIÓN La intersección con el eje y es $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ y los cortes con el eje x se encuentran al hacer $y = 0$: $x = 2, -1, 1$. Observe que como $(x - 2)^4$ es positiva, la función no cambia de signo en 2; de este modo, la gráfica no corta el eje x en 2. La gráfica corta el eje en -1 y 1.

Cuando x adquiere un valor grande y positivo, los tres factores son grandes, de modo que

$$\lim_{x \to \infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Cuando x tiene un valor grande y negativo, el primer factor toma un valor grande y positivo y el segundo y el tercer factores son grandes negativos, por lo que

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Al combinar esta información, obtiene un esbozo de la gráfica en la figura 13. □

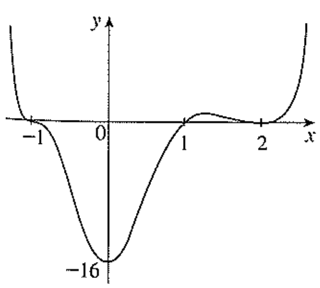


FIGURA 13
$y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$

DEFINICIONES EXACTAS

La definición 1 se puede establecer precisamente como se indica a continuación.

7 DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). En tal caso,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

En lenguaje común, esto establece que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L (dentro de una distancia ε, donde ε es cualquier número positivo) al hacer que x tome valores suficientemente grandes (más grandes que N, donde N depende de ε). Desde el punto de vista gráfico, esto plantea que al escoger valores grandes de x (mayores que algún número N) es posible hacer que la gráfica de f se sitúe entre las rectas horizontales $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$ como en la figura 14. Esto se tiene que cumplir sin que importe qué tan pequeño sea ε. En la figura 15 se ilustra que si se escoge un valor pequeño de ε, después se podría requerir un valor mayor de N.

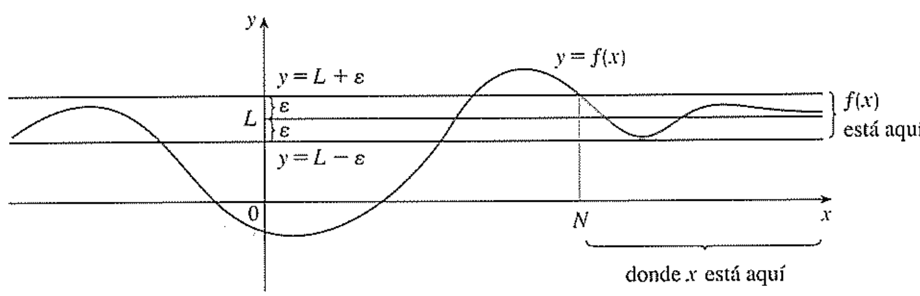


FIGURA 14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

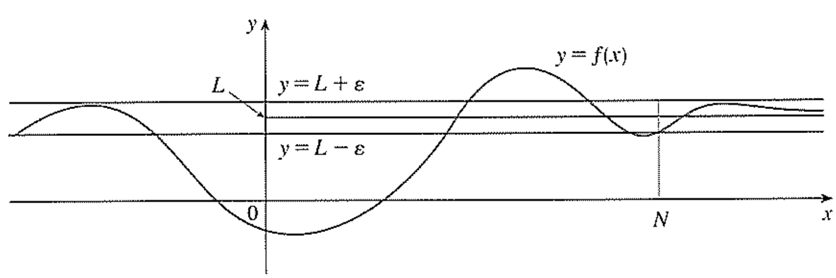


FIGURA 15
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

De igual manera, una versión exacta de la definición 2 se proporciona mediante la definición 8, la cual se ilustra en la figura 16.

8 DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo de $(-\infty, a)$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

quiere decir que para toda $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente N tal que

$$\text{si} \quad x < N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

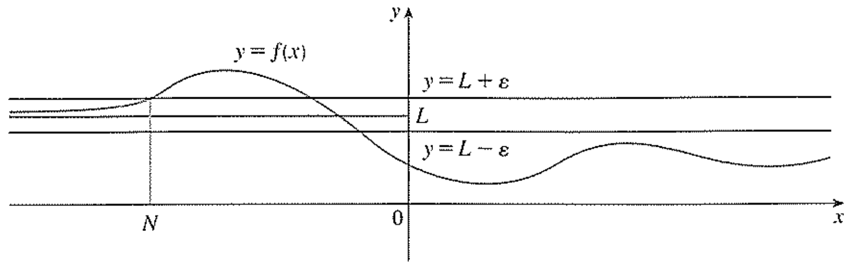


FIGURA 16
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

En el ejemplo 3 se calculó que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

En el ejemplo siguiente se utiliza una calculadora o computadora para relacionar este enunciado de la definición 7 con $L = \frac{3}{5}$ y $\varepsilon = 0.1$.

EJEMPLO 12 Mediante una gráfica determine un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

SOLUCIÓN Reescriba la desigualdad como

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

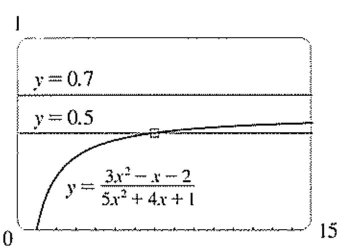


FIGURA 17

Es necesario determinar los valores de x para los cuales la curva dada queda entre las rectas horizontales $y = 0.5$ y $y = 0.7$. La curva y las rectas están graficadas en la figura 17. Luego, por medio del cursor, se estima que la curva cruza la recta $y = 0.5$ cuando $x \approx 6.7$. A la derecha de este número, la curva se localiza entre las rectas $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Efectúe un redondeo y después

$$\text{si} \quad x > 7 \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

En otras palabras, para $\varepsilon = 0.1$ puede elegir $N = 7$ (o cualquier otro número mayor) en la definición 7. □

EJEMPLO 13 Mediante la definición 7 demuestre que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Dado $\varepsilon > 0$, busca N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Al calcular el límite podría suponer que $x > 0$. En tal caso $1/x < \varepsilon \iff x > 1/\varepsilon$. Seleccione $N = 1/\varepsilon$. De esa manera

$$\text{si} \quad x > N = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

De donde, según la definición 7,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

En la figura 18 se ilustra la demostración en la que se muestran algunos valores de ε y los valores correspondientes de N.

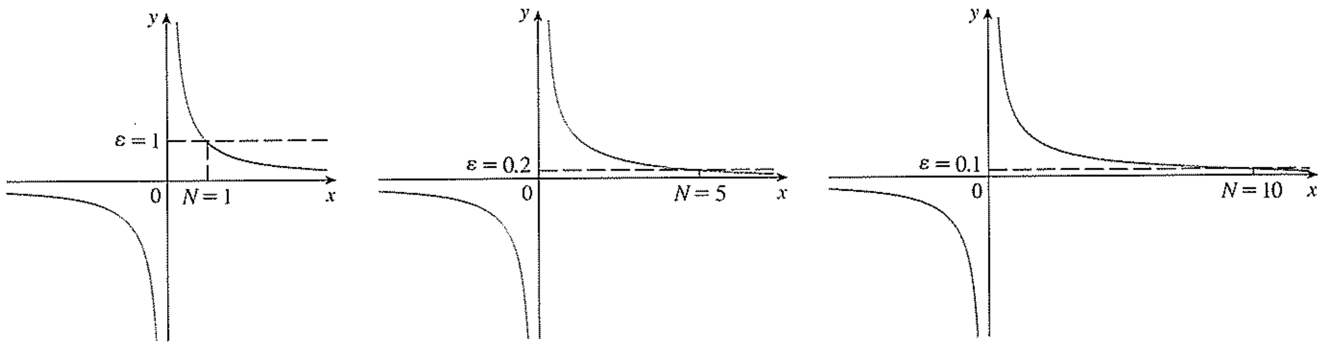


FIGURA 18

□

Para finalizar, observe que se puede definir un límite infinito en el infinito como sigue. La representación geométrica se proporciona en la figura 19.

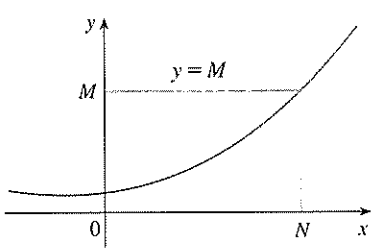


FIGURA 19
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

> **[9] DEFINICIÓN** Si f es una función definida en algún intervalo (a, ∞). entonces
>
> $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$
>
> significa que para todo número positivo M hay un número positivo correspondiente N tal que
>
> $$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad f(x) > M$$

Definiciones similares son válidas cuando el símbolo ∞ se reemplaza con $-\infty$. (Véase ejercicio 70.)

2.6 EJERCICIOS

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

[2.] (a) ¿La gráfica de $y = f(x)$ se puede intersecar con una asíntota vertical? ¿Se puede intersecar con una asíntota horizontal? Ilustre trazando gráficas.

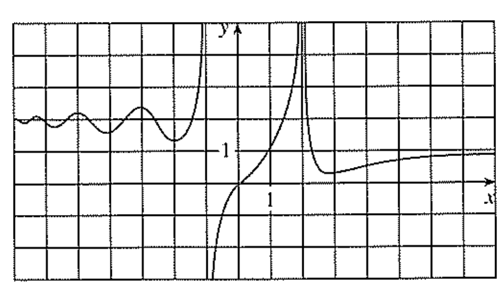
(b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas para ilustrar las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica se ilustra, dé lo siguiente:

(a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(f) Las ecuaciones de las asíntotas.

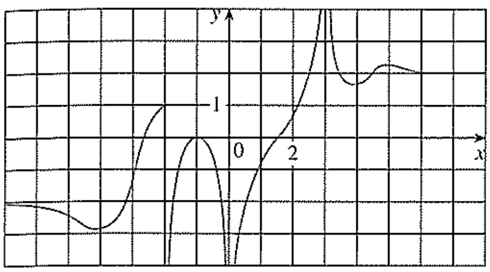


4. Para la función g cuya gráfica se ilustra, proporcione lo siguiente:

(a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} g(x)$

(e) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$ (f) Las ecuaciones de las asíntotas.



5–10 Dibuje el ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

5. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, f es impar

6. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$,

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f es par

11. Determine el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. A continuación, utilice una gráfica de f para respaldar su conjetura.

12. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ correcto hasta dos cifras decimales

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro cifras decimales.

13–14 Evalúe un límite y justifique cada etapa señalando las propiedades adecuadas de los límites.

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15–36 Calcule el límite.

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x + 3}$

16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\lim_{y\to\infty} \dfrac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$

20. $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1}$

21. $\lim_{u\to\infty} \dfrac{4u^4 + 5}{(u^2 - 2)(2u^2 - 1)}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

23. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim_{x\to\infty} \cos x$

29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$

30. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

31. $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 3}{5 - 2x^2}$

33. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

34. $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}(x^2 - x^4)$

35. $\lim_{x\to\infty} (e^{-2x} \cos x)$

36. $\lim_{x\to(\pi/2)^+} e^{\tan x}$

37. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

dibujando la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para conjeturar el valor del límite.

(c) Pruebe que su conjetura es correcta.

38. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ hasta una cifra decimal.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro cifras decimales.

(c) Halle el valor exacto del límite.

39–44 Hallar las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo graficador, verifique su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

39. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

40. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

41. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

42. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

43. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

44. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

45. Estimar la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$$

mediante la gráfica de f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. Después calcule la ecuación de la asíntota evaluando el límite. ¿Cómo explica la discrepancia?

46. (a) Grafique la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

¿Cuántas asíntotas horizontales y verticales observa? Use la gráfica para estimar el valor de los límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calcular los valores de $f(x)$, proporcione estimaciones numéricas de los límites del inciso (a).

(c) Calcular los valores exactos de los límites en el inciso (a) obtenga el mismo valor o valores diferentes de esos dos límites [con respecto a su respuesta del inciso (a), tendrá que verificar su cálculo para el segundo límite].

47. Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

48. Plantee una fórmula para una función cuyas asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

49–52 Determine los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para conseguir un esbozo de la gráfica como en el ejemplo 11.

49. $y = x^4 - x^6$

50. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

51. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

52. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

53. (a) Aplique el teorema de la compresión para evaluar $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(b) Grafique $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. ¿Cuántas veces la gráfica corta la asíntota?

54. Por *comportamiento al final* de una función debe dar a entender una descripción de lo que sucede a sus valores cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

(a) Describa y compare el comportamiento al final de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

dibujando las dos funciones en los rectángulos de visualización $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$.

(b) Se dice que dos funciones tienen el *mismo comportamiento al final* si su relación tiende a 1 cuando $x \to \infty$. Demuestre que P y Q tienen el mismo comportamiento al final.

55. Sean P y Q dos polinomios. Encuentre

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es (a) menor que el grado de Q y (b) mayor que el grado de Q.

56. Haga un boceto aproximado de la gráfica de la curva $y = x^n$ (n un entero) para los cinco casos siguientes:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n impar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n impar
(v) $n < 0$, n par

Después use estos bocetos para encontrar los límites siguientes.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^n$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} x^n$
(c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x^n$ (d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^n$

57. Determine $\lim_{x \to \infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

58. (a) Un depósito contiene 5 000 L de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito a una proporción de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal t minutos después (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \to \infty$?

59. En el capítulo 9 se demostrará que, según ciertas hipótesis, la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia que cae, en el instante t, es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la *velocidad terminal* de la gota de lluvia.

(a) Encuentre $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

(b) Trace la gráfica de $v(t)$ si $v^* = 1$ m/s y $g = 9.8$ m/s^2. ¿Cuánto tiempo transcurre para que la velocidad de la gota de agua alcance el 99% de su velocidad terminal?

60. (a) Mediante el trazo de $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuánto tiene que aumentar x de modo que $e^{-x/10} < 0.1$.
(b) ¿Puede resolver el inciso (a) sin un aparato graficador?

61. Mediante una gráfica determine un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1.5 \right| < 0.05$$

62. En el caso del límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre la definición 7 mediante la determinación de valores de N que corresponden a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

63. Ilustre la definición 8 para el límite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

determinando valores de N que corresponden a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

64. Ilustre la definición 9 para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

calculando valores de N que corresponden a $M = 100$.

65. (a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?
(b) Al hacer $r = 2$ en el Teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la Definición 7.

66. (a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?
(b) Al hacer $r = \frac{1}{2}$ en el Teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la Definición 7.

67. Aplique la Definición 8 para demostrar que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

68. Demuestre mediante la Definición 9 que $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

69. Mediante la definición 9 demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

70. Formule una definición exacta de

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Luego aplique su definición para demostrar que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

71. Demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$$

$$\text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$$

si existen los límites.

2.7 DERIVADAS Y RAZONES DE CAMBIO

El problema del hallazgo de la línea tangente a una curva y el problema del descubrimiento de la velocidad de un objeto, involucran el hallazgo de la misma clase de límite, como se vio en la sección 2.1. Esta clase especial de límite se denomina derivada y puede ser interpretada como una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o ingeniería.

TANGENTES

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere hallar la tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la línea secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En seguida, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, después defina la *tangente* t como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. Véase la figura 1.)

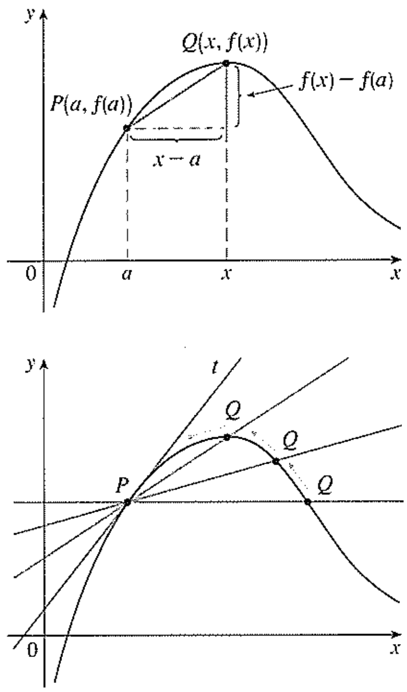


FIGURA 1

1 DEFINICIÓN La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

cuando el límite existe.

En el primer ejemplo, se confirma la suposición hecha en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, se encuentra que una ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = 2x - 1$$ □

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Entre más se acerque, la parábola más parece una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

TEC Visual 2.7 muestra una animación de la figura 2.

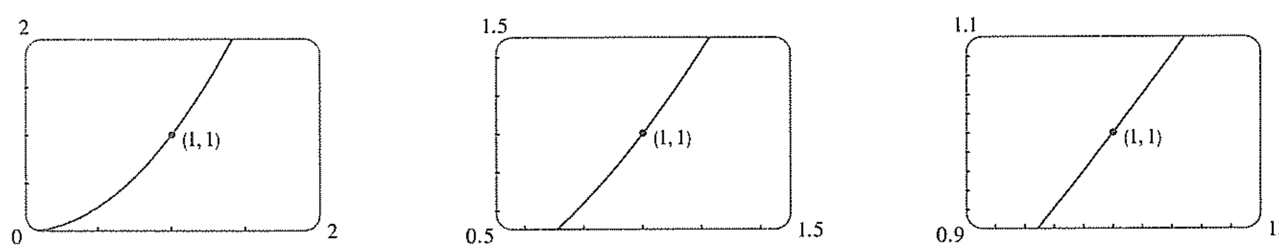


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) sobre la parábola $y = x^2$

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$ y así la pendiente de la línea secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

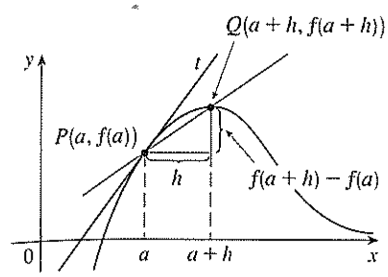


FIGURA 3

(Véase la figura 3, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

Advierta que, cuando x tiende a a, h lo hace a 0 (porque $h = x - a$) y, de este modo, la expresión para la pendiente de la recta tangente, que se da en la definición 1, se convierte en

$$\boxed{2} \qquad \boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto (3, 1).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Por lo tanto, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3+h)}{3+h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

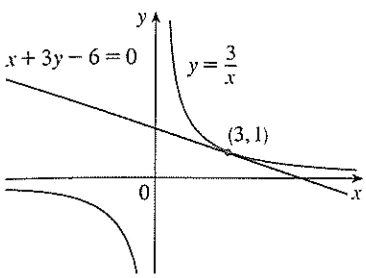


FIGURA 4

En consecuencia, una ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

la cual se simplifica hasta $\qquad x + 3y - 6 = 0$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente. □

VELOCIDADES

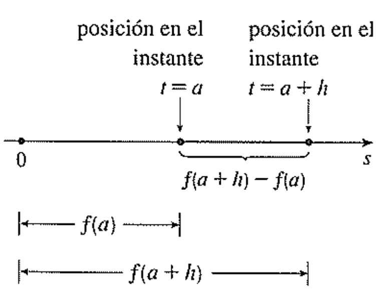
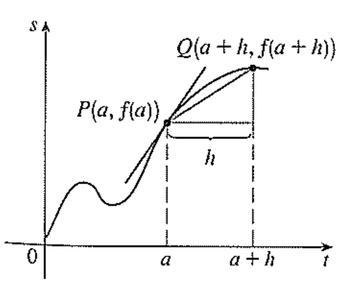


FIGURA 5

En la sección 2.1 se investigó el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia directa) del objeto respecto al origen, en el instante t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función de posición** del objeto. En el intervalo de $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.) La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$m_{PQ} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

= velocidad promedio

FIGURA 6

que es lo mismo que la pendiente de la secante PQ en la figura 6.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre lapsos $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

$$\boxed{3} \qquad \boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la línea tangente en P. (Compare las ecuaciones 2 y 3.)

Ahora que sabe calcular límites, vuelva a considerar el problema de la pelota que cae.

EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, 450 m sobre el nivel del suelo.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
(b) ¿Con qué velocidad viaja cuando choca contra el suelo?

Recuerde que en la sección 2.1 vimos que la distancia (en metros) que recorre la pelota que cae una vez que transcurren t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Necesita hallar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera, que es eficaz iniciar la búsqueda de la velocidad en un tiempo común $t = a$. Empleando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, tiene

$$\begin{aligned}
v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a
\end{aligned}$$

(a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.

(b) Como la plataforma de observación está 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t_1, cuando $s(t_1) = 450$; es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por lo tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$ □

DERIVADAS

Ha visto que surge la misma clase de límite en la búsqueda de la pendiente de una línea tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3). En realidad, los límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

surgen cuando calcula una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite sucede, muy seguido, se proporciona un nombre y notación especial.

$f'(a)$ se lee "f es fundamental de a".

4 DEFINICIÓN La **derivada de una función f en un número a**, se indica mediante $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Si escribe $x = a + h$, en tal caso, tiene $h = x - a$ y h se aproxima a 0 si y sólo si x se aproxima a a. En consecuencia, una manera equivalente de establecer la definición de la derivada, como se mencionó en la búsqueda de líneas tangentes, es

5
$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

EJEMPLO 4 Hallar la derivada de la funcion $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(a + h)^2 - 8(a + h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

□

Defina la línea tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la línea que pasa a través de P y tiene pendiente m, proporcionada por la ecuación 1 o 2, ya que, mediante la definición 4, es la misma que la derivada $f'(a)$, ahora puede decir lo siguiente.

> La línea tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la línea a través de $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Si usa la forma punto pendiente de la ecuación de una línea, puede escribir una ecuación de la línea tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

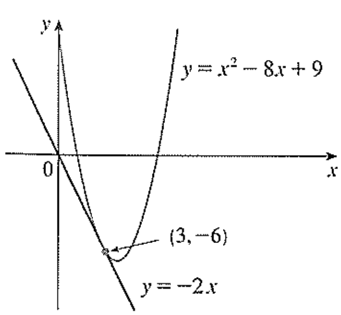


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Halle una ecuación de la línea tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 sabe que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a es $f'(a) = 2a - 8$. En consecuencia la pendiente de la línea tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. En estos términos, una ecuación de la línea tangente, se muestra en la figura 7, es

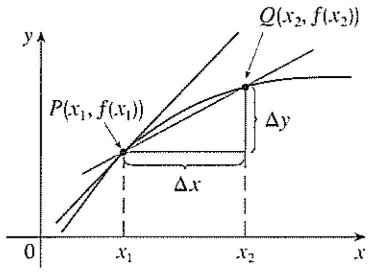
$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \qquad \text{o bien} \qquad y = -2x$$

□

RELACIONES DE CAMBIO

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y escriba $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, por lo tanto el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



razón promedio de cambio $= m_{PQ}$
razón instantánea de cambio = pendiente de la tangente en P

FIGURA 8

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se llama **razón de cambio promedio de y con respecto a x** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la línea secante PQ de la figura 7.

Por analogía con la velocidad, considere la relación de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por lo tanto, al hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas relaciones de cambio promedio se llama **razón (instantánea) de cambio de y con respecto a x** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

$$\boxed{6} \qquad \text{razón de cambio instantánea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Reconocer este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabe que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tiene una segunda interpretación:

> La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = a$.

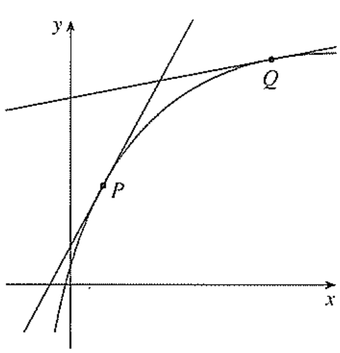


FIGURA 9
Los valores de y cambian con rapidez en P y con lentitud en Q

El enlace con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, a continuación la razón de cambio instantánea es la pendiente de la tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es considerable (y en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto P de la figura 9), los valores y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se traslada a lo largo de una línea recta, después $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s con respecto al tiempo t. En otras palabras, *$f'(a)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = a$*. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo se analiza el significado de la derivada de una función que es definida verbalmente.

EJEMPLO 6 Un fabricante produce un rollo de un tejido con un ancho fijo. El costo de producir x yardas de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) En términos prácticos, ¿qué significa decir que $f'(1000) = 9$?
(c) ¿Qué le hace pensar que es grande, $f'(50)$ o bien $f'(500)$? ¿Qué hay con respecto a $f'(5\,000)$?

SOLUCIÓN
(a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C con respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción con respecto al número de yardas producidas. (Los economistas llaman a esto rapidez de cambio del *costo marginal*. Esta idea se analiza con más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Porque

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las unidades para el cociente de diferencia $\Delta C/\Delta x$. Ya que ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, por lo que las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada yarda.

(b) El enunciado de que $f'(1000) = 9$ significa que, después de fabricar 1000 yardas de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de 9 dólares/yarda. (Cuando $x = 1000$, C se incrementa 9 veces tan rápido como x.)

Ya que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1000$, podría usarse la aproximación

En este caso suponga que la función costo se conduce bien, en otras palabras, $C(x)$ no oscila rápidamente cerca de $x = 1000$.

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decir que el costo de fabricación de la yarda 1000 (o de la 1001) es de casi 9 dólares.

(c) La proporción a la cual se incrementa el costo de producción (por cada yarda) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación de la yarda 500 es menor que el costo de la yarda 50) debido a la economía de proporción. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, como se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será deficiente y con eso los costos de horas extras de trabajo. En estos términos es posible que la proporción de incremento de costos por último aumentarán. De este modo, es posible que suceda

$$f'(5000) > f'(500)$$

□

En el ejemplo siguiente estimará la proporción de cambio de la deuda nacional con respecto al tiempo. En este caso, la función no se define mediante una fórmula sino mediante una tabla de valores.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2

EJEMPLO 7 Sea $D(t)$ la deuda nacional de Estados Unidos en el tiempo t. La tabla en el margen proporciona valores aproximados de esta función siempre que se estime a fin de año, en miles de míllones de dólares, desde 1980 hasta 2000. Explique y juzgue el valor de $D'(1990)$.

SOLUCIÓN La derivada $D'(1990)$ significa que la razón de cambio de D con respecto a t cuando $t = 1990$, es decir, la proporción de incremento de la deuda nacional en 1990.

De acuerdo a la ecuación 5,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Así calcule y tabule los valores del cociente de diferencia (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09

UNA NOTA SOBRE UNIDADES
Las unidades de la razón de cambio promedio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades de ΔD divididas entre las unidades de Δt, o sea, de dólares por cada año. La razón de cambio instantánea es el límite de la razón de cambio promedio, de este modo, se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por cada año.

A partir de esta tabla se ve que $D'(1990)$ se localiza en alguna parte entre 257.48 y 348.14 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuará de manera errática entre 1980 y 2000.] Se estima que la proporción de incremento de la deuda nacional de Estados Unidos en 1990 fue el promedio de estos números, específicamente

$$D'(1990) \approx 303 \text{ miles de millones de dólares por cada año}$$

Otro método sería una gráfica de la función deuda y valorar la pendiente de la línea tangente cuando $t = 1990$.

En los ejemplos 3, 6 y 7 aparecen tres casos específicos de razones de cambio: la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción con respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda con respecto al tiempo es de interés en economía. En este caso, es una muestra pequeña de otras razones de cambio: En física, la razón de cambio de trabajo con respecto al tiempo se le denomina *potencia*. Los químicos quienes estudian una reacción química están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (denominada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la relación de cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio se pueden interpretar como pendientes de tangentes. Esto le confiere un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que resulva problemas en que intervienen rectas tangentes, no resulve sólo un problema de geometría. También resuelve implícitamente una gran variedad de problemas de la ciencia y la ingeniería en que intervienen razones de cambio.

2.7 EJERCICIOS

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
(a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
(b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Dibuje la curva $y = e^x$ en los rectángulos de visualización $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué advierte acerca de la curva conforme hace un acercamiento hacia el punto $(0, 1)$?

3. (a) Halle la pendiente de la línea tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Dibuje la parábola y la tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la tangente sean indistinguibles.

4. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Halle una ecuación de la tangente del inciso (a).
(c) Dibuje la curva y la tangente en rectángulos de visualización cada vez más pequeñas centradas en $(1, 0)$ hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5–8 Encuentre una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado.

5. $y = \dfrac{x-1}{x-2}$, $(3, 2)$

6. $y = 2x^3 - 5x$, $(-1, 3)$

7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

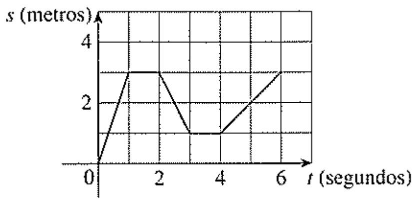
8. $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$, $(0, 0)$

9. (a) Determine la pendiente de la tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ en el punto donde $x = a$.
(b) Determine las ecuaciones de las tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.
(c) Grafique la curva y ambas tangentes en una misma pantalla.

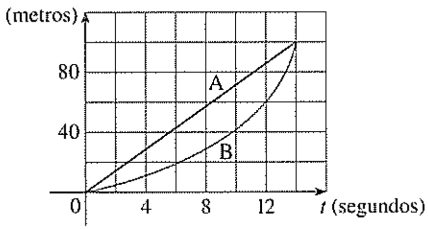
10. (a) Determine la pendiente de la tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
(b) Plantee las ecuaciones de las tangentes en los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Grafique la curva y las tres tangentes en una misma pantalla.

11. (a) Una partícula inicia moviéndose a la derecha a lo largo de una línea horizontal; se muestra la gráfica de su función de posición. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?

(b) Dibuje una gráfica de la función velocidad.



12. Se muestran las gráficas de las funciones de posición de dos competidoras, A y B, quienes compiten en los 100 m y terminan en empate.



(a) Relate y compare cómo desarrollaron la competencia.
(b) ¿En qué momento la distancia entre las competidoras es la más grande?
(c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota se lanza al aire hacia arriba, con una velocidad de 40 ft/s, su altura (en ft) una vez que transcurren t segundos, está dada por $y = 40\,t - 16t^2$. Encuentre la velocidad después de $t = 2$.

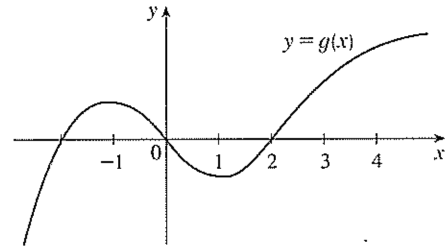
14. Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos se conoce por $H = 10t - 1.86t^2$.
(a) Halle la velocidad de la roca después de un segundo.
(b) Halle la velocidad de la roca cuando $t = a$.
(c) ¿Cuándo incidirá en la superficie la roca?
(d) ¿Con qué velocidad la roca incidirá en la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación del movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos
(a) Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3.5, 4]$
(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4.5]$
(b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
(c) Dibuje la gráfica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio del inciso (a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea del inciso (b).

17. Se proporciona la gráfica de la función g, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$



18. (a) Halle una ecuación de la línea tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.
(b) Si la línea tangente a $y = f(x)$ en $(4, 3)$ pasa a través del punto $(0, 2)$, halle $f(4)$ y $f'(4)$.

19. Dibuje la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

20. Dibuje la gráfica de una función g para la que $g(0) = g'(0) = 0$, $g'(-1) = -1$, $g'(1) = 3$ y $g'(2) = 1$.

21. Si $f(x) = 3x^2 - 5x$, halle $f'(2)$ y utilice esto para hallar una ecuación de la línea tangente a la parábola $y = 3x^2 - 5x$ en el punto $(2, 2)$.

22. Si $g(x) = 1 - x^3$, halle $g'(0)$ y utilice esto para hallar una ecuación de la línea tangente a la curva $y = 1 - x^3$ en el punto $(0, 1)$.

23. (a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, halle $F'(2)$ utilice esto para hallar una ecuación de la línea tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto $(2, 2)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la línea tangente en la misma pantalla.

24. (a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, hallar $G'(a)$ utilice esto para encontrar una ecuación de la línea tangente a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos $(2, 8)$ y $(3, 9)$.
(b) Ilustre el inciso (a) mediante la gráfica de la curva y la línea tangente en la misma pantalla.

25–30 Hallar $f'(a)$.

25. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

26. $f(t) = t^4 - 5t$

27. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

30. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

31–36 Cada límite representa la derivada de alguna función f en algún número a. Presente en cada caso las f y a.

31. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

32. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

35. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

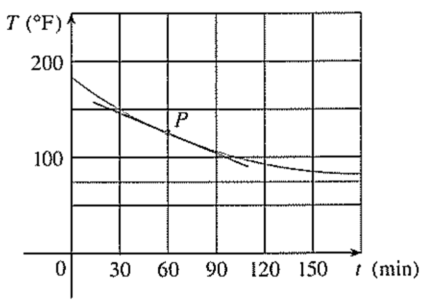
36. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

37–38 Una partícula se traslada a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Halle la velocidad y la rapidez cuando $t = 5$.

37. $f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$ **38.** $f(t) = t^{-1} - t$

39. Se coloca una lata tibia de gaseosa en un refrigerador frío. Grafique la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la relación de cambio después de una hora?

40. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde la temperatura es de 75°F. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. Por medio de la medición de la pendiente de la tangente, estime la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



41. La tabla muestra el porcentaje estimado P de la población de Europa que utiliza teléfono celular. (Se proporcionan estimaciones semestrales.)

Año	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

(a) Halle la razón de crecimiento promedio de celulares
 (i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001
 (iii) de 1999 a 2000
 En cada caso, incluya las unidades.
(b) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 tomando el promedio de dos relaciones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
(c) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 midiendo la pendiente de la tangente.

42. En la tabla se proporciona el número N de establecimientos de una popular cadena de cafeterías. (Se dan los números de establecimientos al 30 de junio.)

Año	1998	1999	2000	2001	2002
N	1 886	2 135	3 501	4 709	5 886

(a) Determine la tasa media de crecimiento
 (i) desde 2000 a 2002 (ii) desde 2000 a 2001
 (iii) de 1999 a 2000
 En cada caso incluya las unidades.
(b) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 considerando el promedio de dos relaciones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
(c) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 midiendo la pendiente de una tangente.

43. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.
(a) Encuentre la razón de cambio promedio de C con respecto a x, cuando se cambia el nivel de producción:
 (i) de $x = 100$ a $x = 105$
 (ii) de $x = 100$ a $x = 101$
(b) Halle la razón de cambio instantánea de C con respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la sección 3.7 se explica su significado.)

44. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 galones de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 60$$

Encuentre la rapidez con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantánea de V con respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 min, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una oración o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

45. El costo de producir x onzas de oro a partir de una mina de oro reciente es $C = f(x)$ dólares.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Qué significa enunciar $f'(800) = 17$?
(c) ¿Los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto tiempo, cuál es su opinión? ¿Y a largo plazo? Explique.

46. El número de bacterias después de t horas en un experimento de laboratorio controlado es $n = f(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Considere que existe una cantidad de espacio y nutrimentos para la bacteria. ¿Cuál es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? Si se limita el suministro de nutrimentos, ¿afectaría su conclusión?

47. Sea $T(t)$ la temperatura (en °F) en Dallas t horas después de la medianoche el 2 de junio de 2001. La tabla muestra los valores de esta función registrada cada dos horas. ¿Cuál es el significado de $T'(10)$? Estime su valor.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

48. La cantidad (en libras) de un café que es vendido por una compañía en un precio de p dólares por cada libra es $Q = f(p)$.

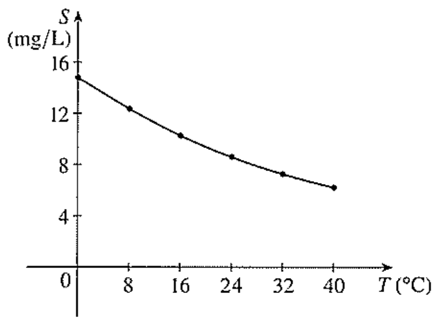
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) ¿$f'(8)$ es positiva o negativa? Explique.

49. La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura del agua. (De esa manera la polución térmica induce el contenido de oxígeno en el agua.) La gráfica muestra cómo varía la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Estime e interprete el valor de $S'(16)$.

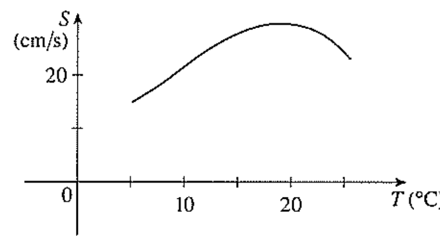


Adaptada de *Environmental Science: Science: Living Within the System of Nature,* 2d ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989. Reimpreso, por autorización de Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ.

50. La gráfica muestra la influencia de la temperatura T en la rapidez máxima sostenible de nado del salmón Coho.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) Estime los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



51–52 Establezca si existe $f'(0)$.

$\boxed{51.}$ $$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

52. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

REDACCIÓN DE PROYECTO — MÉTODOS ANTICIPADOS PARA LA BÚSQUEDA DE TANGENTES

La primera persona en formular explícitamente las ideas de los límites y derivadas fue Isaac Newton, en la década de 1660. Pero Newton reconoció: "Si he visto más lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes." Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat (1601-1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estaba familiarizado con los métodos que estos hombres habían aplicado para hallar rectas tangentes y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegó Newton.

Las referencias siguientes contienen explicaciones de estos métodos. Lea una o varias y escriba un informe en que compare los métodos de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, aplique el método de la sección 2.7 para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto $(1, 3)$ y muestre cómo habrían resuelto Fermat o Barrow el mismo problema. Aunque usted usó derivadas y ellos no, señale las semejanzas entre los dos métodos.

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: Wiley, 1989), pp. 389, 432.
2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.
3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.
4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.8 LA DERIVADA COMO UNA FUNCIÓN

En la sección anterior consideró la derivada de una función f en un número fijo a:

$$\boxed{1} \qquad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ahora cambie su punto de vista y haga que el número a varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, obtiene

$$\boxed{2} \qquad \boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Dado cualquier número x para el cual este límite exista, asigne a x el número $f'(x)$. De modo que considere f' como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Sabe que el valor de f' en x, $f'(x)$, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f, porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x)$ existe$\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Úsela para dibujar la derivada f'.

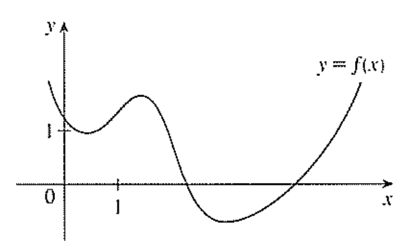
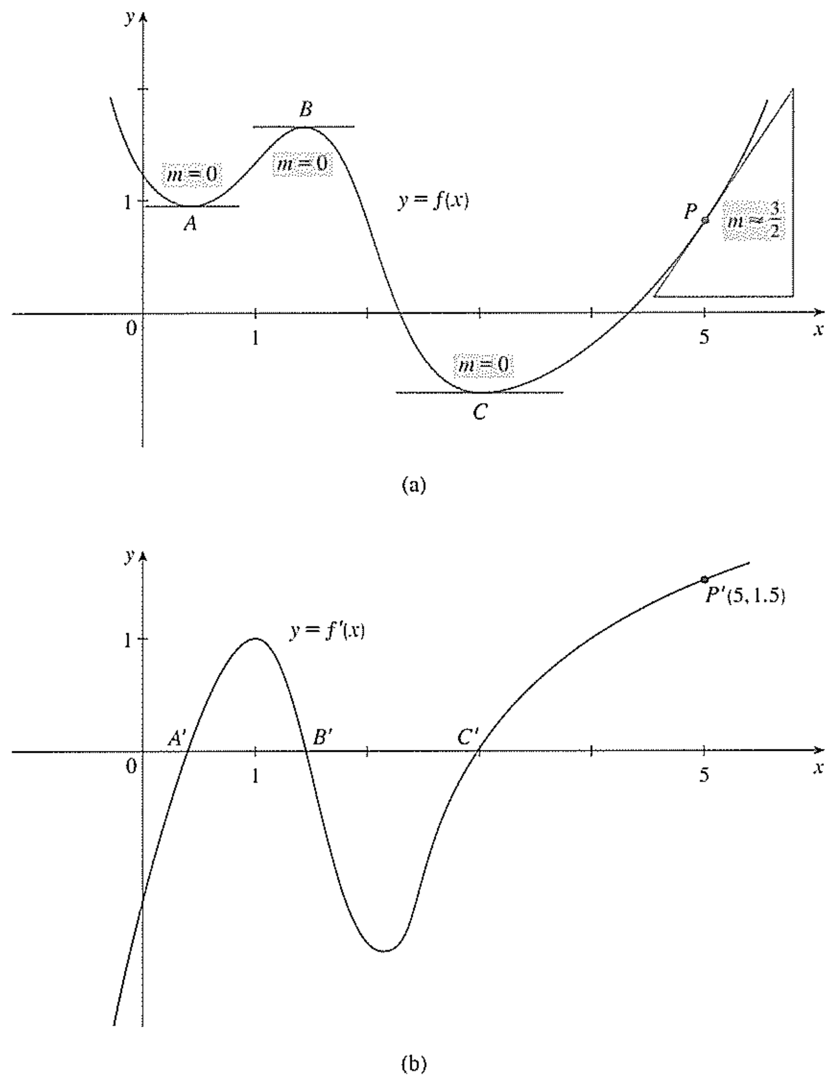


FIGURA 1

SOLUCIÓN Puede estimar el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la tangente en P de la figura 2(a) y estime su pendiente como alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. Si repite este procedimiento en varios puntos, obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2(b). Advierta que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 allí y la gráfica de f' cruza el eje x en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B, las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva allí. Pero entre B y C, las tangentes tienen pendientes negativas, de modo que $f'(x)$ es negativa allí.



TEC Visual 2.8 muestra una animación de la figura 2 para diferentes funciones.

FIGURA 2 □

V EJEMPLO 2
(a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.
(b) Ilústrela comparando las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN
(a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante, durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

(b) Use un aparato para trazar las gráficas de f y f' de la figura 3. Advierta que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas gráficas sirven como comprobación de nuestra solución del inciso (a).

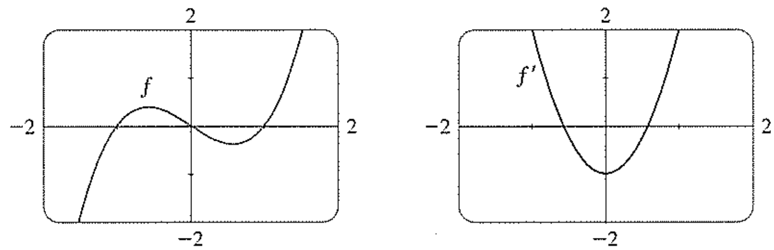


FIGURA 3

□

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Establezca el dominio de f'.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

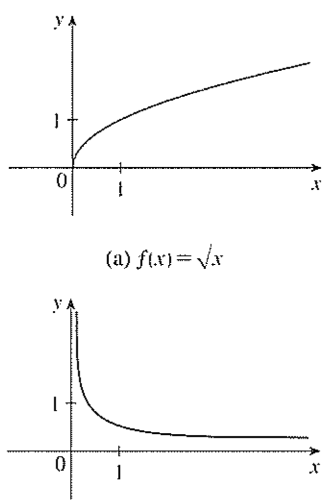
$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Aquí racionalice el numerador.

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$. Éste es menor que el dominio de f, el cual es $[0, \infty)$. □



(a) $f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Compruebe que el resultado del ejemplo 3 es razonable observando las gráficas de f y f' en la figura 4. Cuando x está cerca de 0, $\sqrt{x}$ está cerca de 0, por lo tanto, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ es muy grande y esto corresponde a las rectas tangentes empinadas cerca de (0, 0) de la figura 4(a) y a los valores grandes de $f'(x)$ justo a la derecha de 0 en la figura 5(b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeño y esto corresponde a las rectas tangentes más aplanadas en la extrema derecha de la gráfica de f y la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$ □

OTRAS NOTACIONES

Si usa la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, en tal caso algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de **derivación**, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx introducido por Leibniz no debe considerarse como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con base en la ecuación 2.7.6, puede volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico a, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{o bien} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudió leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad de allí. Obtuvo el grado de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones diplomáticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar las Iglesias católica y protestante.

Su estudio serio de las matemáticas no se inició sino hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en las matemáticas y las ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En la versión del cálculo que publicó en 1684 estableció la notación y las reglas para hallar derivadas que aún se usan en la actualidad.

Por desgracia, en la década de 1690 surgió una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del cálculo pero, debido a su temor a la controversia, no la publicó de inmediato. Por tanto, el informe de Leibniz del cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

> **3 DEFINICIÓN** Una función f es **derivable en a** si $f'(a)$ existe. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y puede elegir h suficientemente pequeño que $x + h > 0$, de donde $|x + h| = x + h$. Por lo tanto, para $x > 0$ tiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

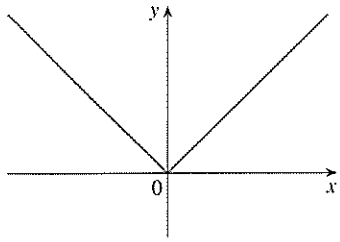
y así f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ tiene $|x| = -x$ y se puede elegir h suficientemente pequeño para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por lo tanto, para $x < 0$,

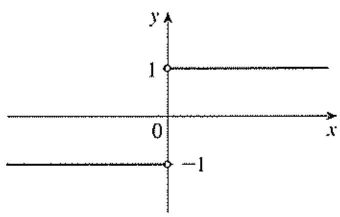
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

con lo que f es derivable para cualquier $x < 0$.



(a) $y = f(x) = |x|$



(b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Para $x = 0$ debe investigar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{(si existe)}$$

Compare los límites por la izquierda y por la derecha, por separado:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

y
$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Como estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto 0.

Se da una fórmula para f'

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica aparece en la figura 5(b). La inexistencia de $f'(0)$ se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5(a).] □

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función y el teorema siguiente muestra cómo se relacionan ambas

4 TEOREMA Si f es derivable en a, en tal caso f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN Para probar que f es continua en a, debe probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Lleve a cabo esto demostrando que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es derivable en a; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. (Véase la ecuación 2.7.5.) Para vincular lo dado con lo desconocido, divida y multiplique $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es viable cuando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

De este modo, si usa la ley de producto y la ecuación (2.7.5), puede escribir

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Para utilizar lo que acaba de probar, parta de $f(x)$ y súmele y réstele $f(a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\,[f(a) + (f(x) - f(a))]\\ &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a}\,[f(x) - f(a)]\\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

En consecuencia, f es continua en a. □

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas pero no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en 0 porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 7 de la sección 2.3.) Pero, en el ejemplo 5 demostró que f no es derivable en 0.

¿CÓMO DEJA DE SER DERIVABLE UNA FUNCIÓN?

En el ejemplo 5 vio que la función $y = |x|$ no es derivable en 0 y en la figura 5(a) muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "rizos", la gráfica de f no tiene tangente en esos puntos y f no es derivable allí. [Al intentar calcular $f'(a)$, encuentra que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 señala otra forma en que una función no tiene derivada. En él se afirma que si f no es continua en a, después f no es derivable en a. Por ende, en cualquier discontinuidad (por ejemplo, una discontinuidad por salto), f deja de ser derivable.

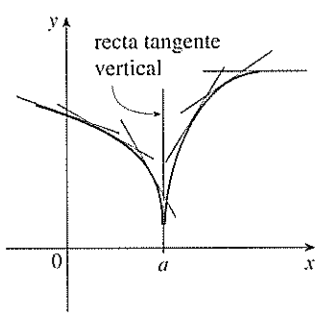


FIGURA 6

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en a y

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7(c) ilustra otra. Las tres posibilidades recién analizadas se ilustran en la figura 7.

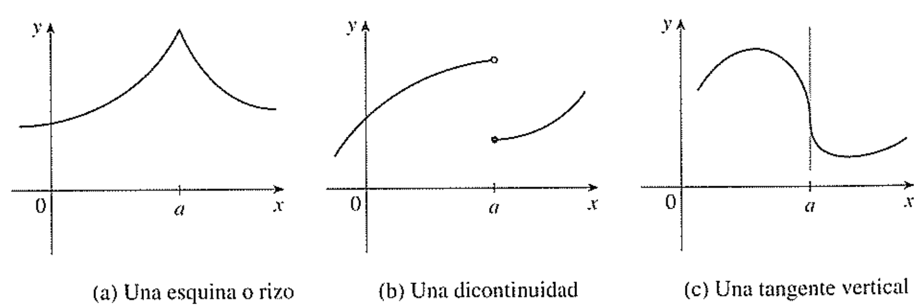


FIGURA 7
Tres maneras para que f no sea derivable en a

Una calculadora graficadora o una computadora ofrecen otra manera de ver la derivabilidad. Si f es derivable en a, por lo tanto, con un acercamiento al punto $(a, f(a))$, la gráfica se endereza y adquiere más y más la apariencia de un recta. (Véase la figura 8. Un ejemplo específico es la figura 2 de la sección 2.7.) Pero no importa cuánto se acerque a puntos como los de las figuras 6 y 7(a), no puede eliminar el punto agudo o esquina. (Véase la figura 9.)

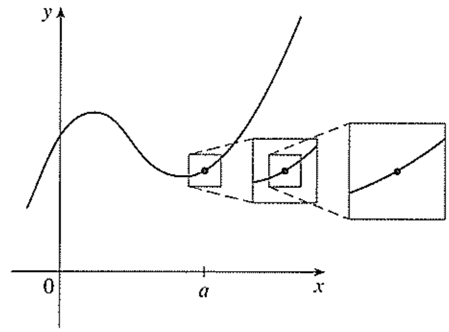


FIGURA 8
f es derivable en a

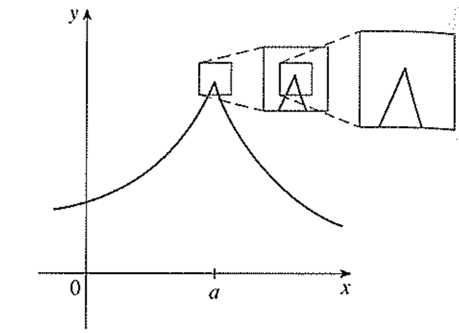


FIGURA 9
f no es derivable en a

DERIVADAS SUPERIORES

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, así, f' puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, se escribe la segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, hallar e interpretar $f''(x)$.

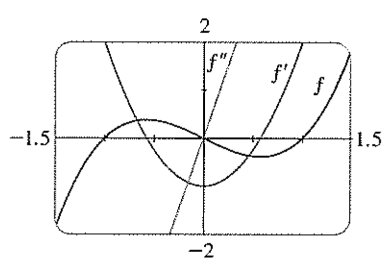


FIGURA 10

TEC En Module 2.8 puede ver cómo cambian los coeficientes de un polinomio f que afecta el aspecto de la gráfica de f, f' y f''.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 encontró que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. De este modo, la segunda derivada es

$$\begin{aligned} f''(x) = (f')'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

Las gráficas de f, f' y f'' se exhiben en la figura 10.

Puede interpretar $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la relación de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos. □

En general, se puede interpretar una segunda derivada como una relación de cambio de una relación de cambio. El ejemplo más familiar es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se traslada en una línea recta, sabe que su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A la relación de cambio de la velocidad instantánea con respecto al tiempo se le denomina **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La **tercera derivada** f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este modo, $f'''(x)$ se puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la relación de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, por lo tanto, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se señala mediante $f^{(4)}$. En general, la n-esima derivada de f se señala mediante $f^{(n)}$ y se obtiene de f derivando n veces. Si $y = f(x)$, escriba

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, hallar $f'''(x)$ e interpretar $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 encontró que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y de este modo, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Así, f''' es una función constante y su gráfica es una línea horizontal. En consecuencia, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$ □

Se puede interpretar la tercera derivada físicamente en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se traslada a lo largo de una línea recta. Porque $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk**:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

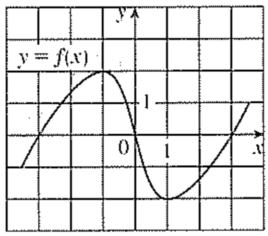
Por esto el jerk j es la relación de cambio de la aceleración. Nombre apropiado porque un jerk considerable significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' proporciona información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 vera cómo la segunda derivada y derivadas superiores permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

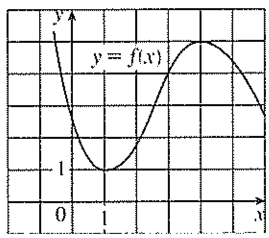
2.8 EJERCICIOS

1–2 Use la gráfica que se proporciona para estimar el valor de cada derivada. Luego dibuje f'.

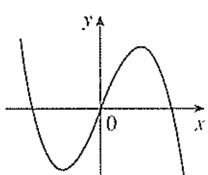
1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

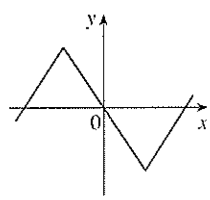


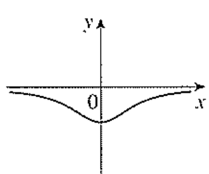
2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

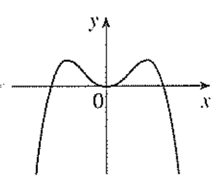


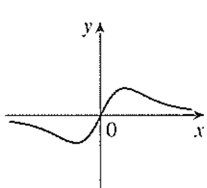
3. Correlacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I a IV. Dé las razones para sus selecciones.

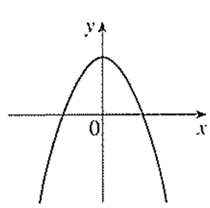
(a)


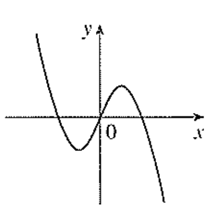
(b)


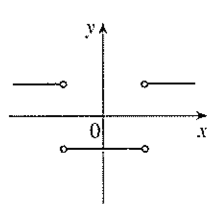
(c)


(d)


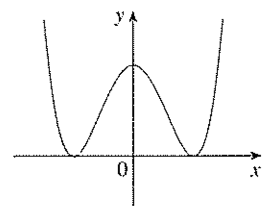
I


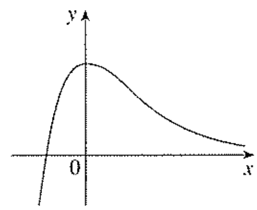
II


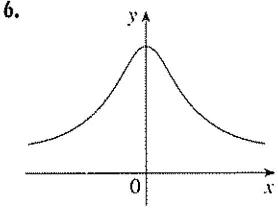
III


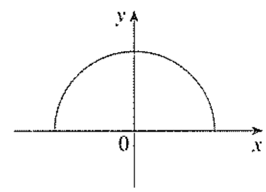
IV


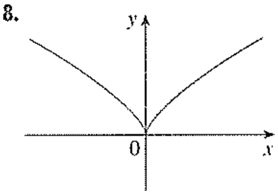
4–11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego aplique el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de ella.

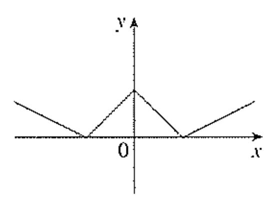
4.


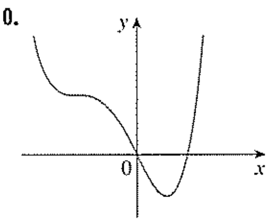
5.


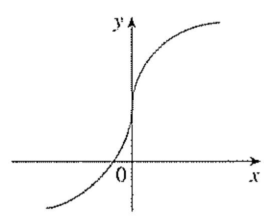
6.


7.


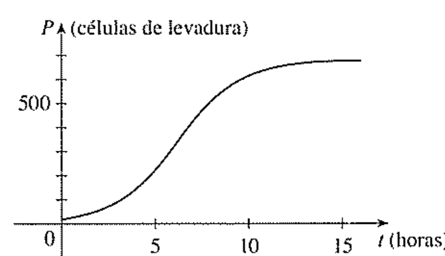
8.


9.


10.


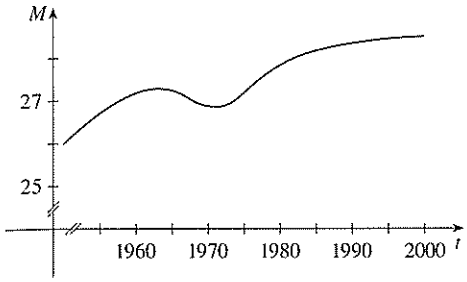
11.


12. Se muestra la gráfica de la función de población $P(t)$ para célı las de levadura en un cultivo de laboratorio. Use el método del



ejemplo 1 para dibujar la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?

13. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo XX. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



14–16 Trace una gráfica cuidadosa de f y, debajo de ella, la gráfica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4–11. ¿Puede intentar una fórmula para $f'(x)$ a partir de su gráfica?

14. $f(x) = \operatorname{sen} x$

15. $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

---

17. Sea $f(x) = x^2$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$ y $f'(2)$ usando un aparato graficador para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
(c) Con los resultados de los incisos (a) y (b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
(d) Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso (c) es correcta.

18. Sea $f(x) = x^3$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$ usando un aparato graficador para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ y $f'(-3)$.
(c) Use los valores de los incisos (a) y (b) para trazar la gráfica f'.
(d) Proponga una fórmula parar $f'(x)$.
(e) Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso (d) es correcta.

19–29 Encuentre la derivada de la función dada aplicando la definición de derivada. Dé los dominios de la función y de su derivada.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

20. $f(x) = mx + b$

21. $f(t) = 5t - 9t^2$

22. $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

23. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

24. $f(x) = x + \sqrt{x}$

25. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$

26. $f(x) = \dfrac{3 + x}{1 - 3x}$

27. $G(t) = \dfrac{4t}{t + 1}$

28. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

29. $f(x) = x^4$

---

30. (a) Dibuje $f(x) = \sqrt{6 - x}$ a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
(b) Use la gráfica del inciso (a) para trazar la de f'.
(c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
(d) Use un aparato graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su esquema del inciso (b).

31. (a) Si $f(x) = x^4 + 2x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

32. (a) Si $f(t) = t^2 - \sqrt{t}$, encuentre $f'(t)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

33. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla del Bureau of Labor Statistics (Oficina de Estadísticas de Empleo) proporciona el porcentaje de desempleados en la fuerza laboral de Estados Unidos de 1993 al 2002.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1993	6.9	1998	4.5
1994	6.1	1999	4.2
1995	5.6	2000	4.0
1996	5.4	2001	4.7
1997	4.9	2002	5.8

(a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $U'(t)$.

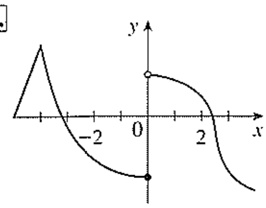
34. Sea $P(t)$ el porcentaje de estadounidenses por debajo de 18 años de edad en el instante t. La tabla proporciona valores de esta función en los años en que se levantó un censo de 1950 a 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

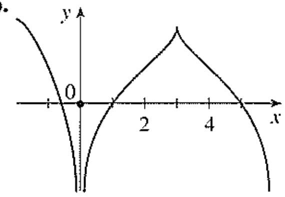
(a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $P'(t)$.
(c) Dibuje P y P'.
(d) ¿Cómo sería posible obtener valores más precisos para $P'(t)$?

35–38 Se proporciona la gráfica de f. Establezca, con argumentos, los números en que f no es derivable.

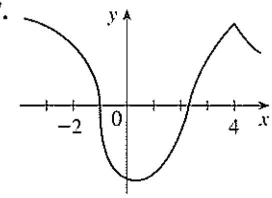
35.



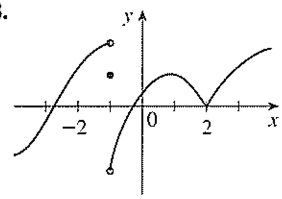
36.



37.



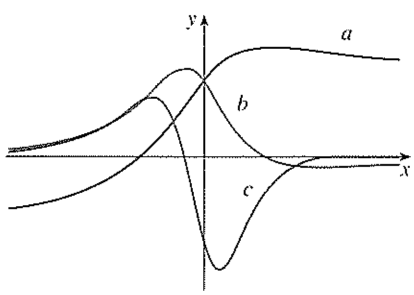
38.



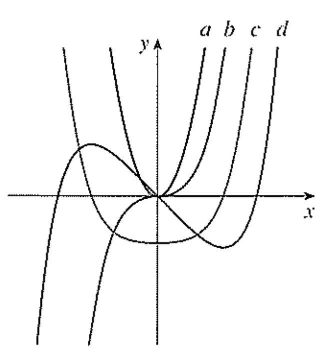
39. Dibuje la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga acercamientos sucesivos primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego en dirección al origen. ¿Qué diferencia existe en cuanto al comportamiento de f en las cercanías de estos dos puntos? ¿Qué conclusiones infiere acerca de la derivabilidad de f?

40. Haga un acercamiento hacia los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ sobre la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Qué advierte? Registre lo que observa en términos de la derivabilidad de g.

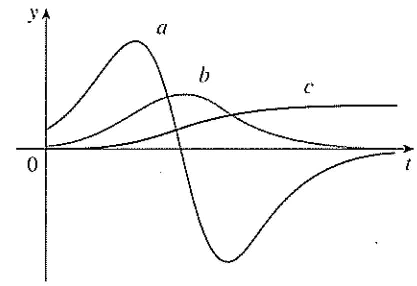
41. La figura exhibe las gráficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique su elección.



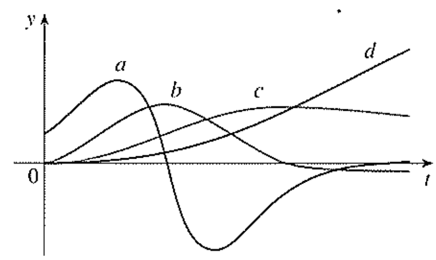
42. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique su alternativa.



43. La figura describe las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique su opción.



44. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones posición de un automóvil, otra la velocidad de él, la aceleración y la que resta su jerk. Identifique cada curva y explique su preferencia.

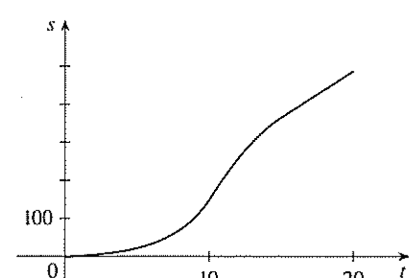


45–46 Aplique la definición de una derivada para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$. Después, grafique f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son justas.

45. $f(x) = 1 + 4x - x^2$ **46.** $f(x) = 1/x$

47. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$, hallar $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Grafique f, f', f'' y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

48. (a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuál es la aceleración en $t = 10$ segundos?



(b) Aplique la curva de aceleración del inciso (a) para estimar el jerk en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del jerk?

49. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Si $a \neq 0$, use la ecuación 2.7.5 para hallar $f'(a)$.
(b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
(c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$. (Recuerde la forma de la función de f. Véase la figura 13 de la sección 1.2.)

50. (a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(0)$ no existe.
(b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
(c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$.
(d) Ilustre el inciso (c) dibujando $y = x^{2/3}$.

51. Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en 6. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

52. ¿Dónde es no derivable la función entero máximo $f(x) = [\![x]\!]$? Halle una fórmula para f' y trace su gráfica.

53. (a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x\,|x|$.
(b) Para qué valores de x es f derivable.
(c) Halle una fórmula para f'.

54. Las **derivadas izquierda** y **derecha** de f en a están definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y
$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si existen estos límites. En tal caso, $f'(a)$ existe si y sólo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

(a) Halle $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Dibuje la gráfica de f.
(c) ¿Dónde es f discontinua?
(d) ¿Dónde f no es derivable?

55. Recuerde que a una función se le denomina como *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Pruebe cada uno de los siguientes
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

56. Cuando abre un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.
(a) Trace una gráfica posible de T como función del tiempo transcurrido desde que abrió el grifo.
(b) Describa cómo varía la relación de cambio de T con respecto a t, conforme ésta aumenta.
(c) Dibuje la derivada de T.

57. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$. El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ describe con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ correcto al grado más cercano.

2 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Explique qué significa cada una de las siguientes e ilustre mediante un boceto.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$
(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$
(d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con bocetos.

3. Enuncie las leyes de los límites siguientes.
(a) Ley de la suma
(b) Ley de la diferencia
(c) Ley del múltiplo constante
(d) Ley del producto
(e) Ley del cociente
(f) Ley de la potencia
(g) Ley de la raíz

4. ¿Qué dice el teorema de la compresión?

5. (a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
(b) Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuál de las curvas siguientes tiene asíntotas verticales? ¿Cuál tiene asíntotas horizontales?
(a) $y = x^4$
(b) $y = \operatorname{sen} x$
(c) $y = \tan x$
(d) $y = \tan^{-1} x$
(e) $y = e^x$
(f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$
(h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) ¿Qué significa que f sea continua en a?
(b) ¿Qué significa que f sea continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de tal función?

8. ¿Qué dice el teorema del valor intermedio?

9. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

10. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo puede interpretar esta velocidad en términos de la gráfica de f?

11. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente:
    (a) La razón de cambio promedio de y con respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.
    (b) La razón instantánea de cambio de y con respecto a x en $x = x_1$.

12. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

13. Defina la segunda derivada de f. Si $f(x)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

14. (a) ¿Qué significa que f sea derivable en a?
    (b) ¿Cuál es la relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función?
    (c) Trace la gráfica de una función que es continua pero no derivable en $a = 2$.

15. Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con bocetos.

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{8}{x-4}\right) = \lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x}{x-4} - \lim\limits_{x\to4}\dfrac{8}{x-4}$

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+6x-7)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2+5x-6)}$

3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4} = \dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x-3)}{\lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-4)}$

4. Si $\lim_{x\to5} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

5. Si $\lim_{x\to5} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to5} [f(x)/g(x)]$ no existe.

6. Si $\lim_{x\to6} f(x)g(x)$ existe, entonces el límite tiene que ser $f(6)g(6)$.

7. Si p es un polinomio, entonces $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

8. Si $\lim_{x\to0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to0} g(x) = \infty$, luego $\lim_{x\to0} [f(x) - g(x)] = 0$.

9. Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas.

10. Si f tiene un dominio $[0, \infty)$ y no tiene asíntota horizontal entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

11. Si la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, entonces f no está definida en 1.

12. Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

13. Si f es continua en 5 y $f(5) = 2$ y $f(4) = 3$, entonces $\lim_{x\to2} f(4x^2 - 11) = 2$.

14. Si f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

15. Sea f una función tal que $\lim_{x\to0} f(x) = 6$. Entonces existe un número δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 6| < 1$.

16. Si $f(x) > 1$ para toda x y $\lim_{x\to0} f(x)$ entonces $\lim_{x\to0} f(x) > 1$.

17. Si f es continua en a, entonces f es derivable en a.

18. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

20. La ecuación $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 2)$

EJERCICIOS

1. Se da la gráfica de f.

(a) Encuentre cada uno de los límites o explique por qué no existe.

(i) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to 4} f(x)$

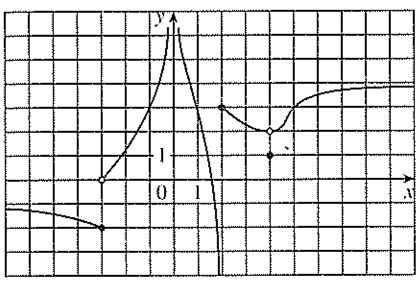
(v) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

(vii) $\lim_{x\to \infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

(b) Enuncie las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

(c) Enuncie las ecuaciones de las asíntotas verticales.

(d) ¿En qué números f es discontinua?



2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to -3^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 2,$$

f es continua desde la derecha en 3.

3–20 Encuentre el límite

3. $\lim_{x\to 1} e^{x^3 - x}$

4. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

5. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

7. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h - 1)^3 + 1}{h}$

8. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

9. $\lim_{r\to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r - 9)^4}$

10. $\lim_{v\to 4^+} \dfrac{4 - v}{|4 - v|}$

11. $\lim_{u\to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 + 5u^2 - 6u}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x + 6} - x}{x^3 - 3x^2}$

13. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

14. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

15. $\lim_{x\to \pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1 - 2x^2 - x^4}{5 + x - 3x^4}$

17. $\lim_{x\to \infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x)$

18. $\lim_{x\to -\infty} e^{x - x^2}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \tan^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$

21–22 Use las gráficas para descubrir las asíntotas de la curva. Luego pruebe qué ha descubierto.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$

23. Si $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encuentre $\lim_{x\to 1} f(x)$.

24. Pruebe que $\lim_{x\to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

25–28 Demuestre que cada afirmación es verdadera usando la definición precisa de límite.

25. $\lim_{x\to 2} (14 - 5x) = 4$

26. $\lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x) = -2$

28. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x - 4}} = \infty$

29. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ (x - 3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada límite, si existe.

(i) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x\to 3} f(x)$

(b) ¿Dónde es discontinua f?

(c) Trace la gráfica de f.

30. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - x & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(a) Para cada uno de los números 2, 3 y 4, descubra si g es continua por la izquierda, por la derecha o continua en el número.

(b) Bosqueje la gráfica de g.

31–32 Demuestre que cada función es continua en su dominio. Dé el dominio.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

32. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$

33–34 Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

33. $2x^3 + x^2 + 2 = 0, \quad (-2, -1)$

34. $e^{-x^2} = x, \quad (0, 1)$

---

35. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente en la curva $y = 9 - 2x^2$ en el punto $(2, 1)$.
(b) Escriba una ecuación de esta tangente.

36. Encuentre las ecuaciones de las tangentes a la curva

$$y = \frac{2}{1 - 3x}$$

en los puntos de abcisas 0 y -1.

37. La expresión $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, da el desplazamiento (en metros) de un objeto que se mueve en una línea recta. En dicha expresión, t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio en los siguientes periodos
(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$
(iii) $[1, 1.5]$ (iv) $[1, 1.1]$
(b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

38. Según la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV = 800$, donde P se mide en libras por pulgada cuadrada y V en pulgadas cúbicas.
(a) Encuentre la razón promedio de cambio de P cuando V se incrementa de 200 pulg^3 a 250 pulg^3.
(b) Exprese V como función de P y demuestre que la razón instantánea de cambio de V con respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de esta última.

39. (a) Use la definición de derivada para hallar $f'(2)$, donde $f(x) = x^3 - 2x$.
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto $(2, 4)$.
(c) Ilustre el inciso (b) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

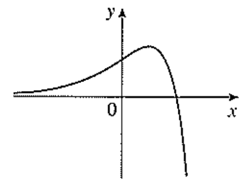
40. Encuentre una función f y un número a tales que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

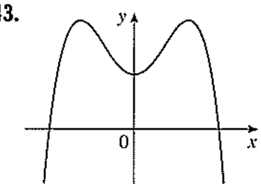
41. El costo total de pagar un préstamo para estudiante, a una tasa de interés de r% por año es $C = f(r)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Qué significa la proposición $f'(10) = 1200$?
(c) ¿$f'(r)$ siempre es positiva o cambia de signo?

42–44 Trace o copie la gráfica de la función dada. Luego dibuje directamente debajo su derivada.

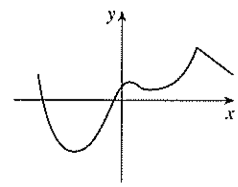
42.



43.



44.

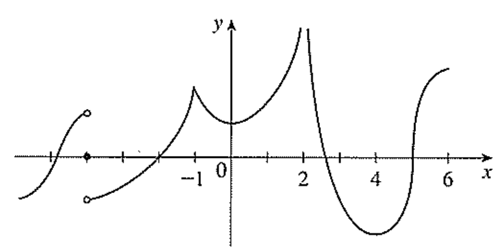


---

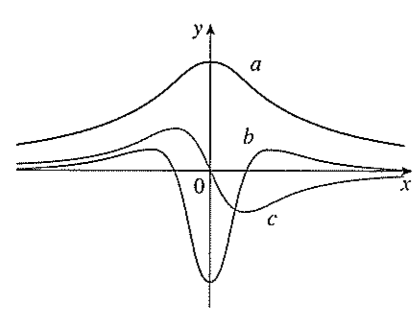
45. (a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
(b) Encuentre los dominios de f y f'.
(c) Trace f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso (a) es razonable.

46. (a) Encuentre las asíntotas de la gráfica de $f(x) = (4 - x)/(3 + x)$ y úselas para dibujar la gráfica.
(b) Use la gráfica del inciso (a) para graficar f'.
(c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
(d) Utilice un aparato graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su dibujo del inciso (b).

47. Se muestra la gráfica de f. Enuncie, con razones, los números en que f no es diferenciable.



48. La figura muestra la gráfica de f, f' y f''. Identifique cada cuerva y explique su elección.



49. Sea $C(t)$ el valor total de certificados bancarios en circulación en el instante t. La tabla de valores de esta función de 1980 a 2000, en miles de millones de dólares. Estime e interprete el valor de $C'(1990)$.

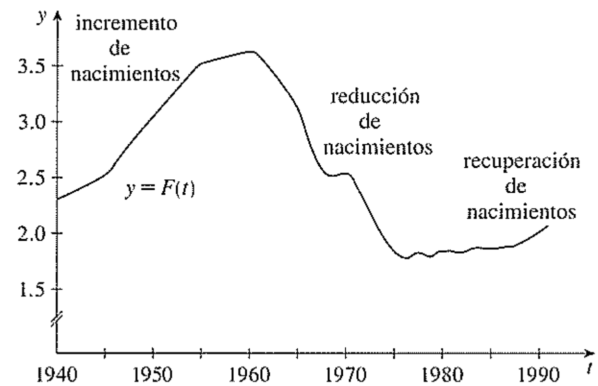
t	1980	1985	1990	1995	2000
$C(t)$	129.9	187.3	271.9	409.3	568.6

50. La *tasa de fertilidad total*, en el tiempo t, denotada con $F(t)$, es una estimación del número promedio de niños nacidos de cada mujer (suponiendo que las tasas de natalidad actuales permanezcan constantes). En la gráfica de la tasa de fertilidad total en Estados Unidos, se muestran las fluctuaciones desde 1940 hasta 1990.

(a) Estime los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.

(b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?

(c) ¿Puede sugerir razones de los valores de estas derivadas?



51. Suponga que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, y que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encuentre el $\lim_{x \to a} f(x)$.

52. Sea $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

(a) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

(b) ¿En qué números es discontinua la función f?

PROBLEMAS ADICIONALES

En el análisis de los principios para la resolución de problemas, se consideró la estrateg para resolver problemas llamada *Introduzca algo adicional* (véase la página 76). En el ejem plo siguiente, se muestra cómo este principio resulta útil a veces cuando evalúa límites. I idea es cambiar la variable —introducir una nueva variable relacionada con la original— tal manera que el problema se haga más sencillo. Más adelante, en la sección 5.5, utiliza más esta idea general.

EJEMPLO 1 Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, donde c es una constante.

SOLUCIÓN Según se ve, este límite parece desafiante. En la sección 2.3 evaluó varios límites e los que tanto el numerador como el denominador tendieron a 0. Allí, la estrategia fue realiz cierto tipo de manipulación algebraica que condujo a una cancelación simplificadora, pero e este caso no está claro qué clase de álgebra se necesita.

Por lo tanto, se introduce una nueva variable t mediante la ecuación

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

También necesita expresar x en términos de t, de modo que resuelva esta ecuación:

$$t^3 = 1 + cx$$

$$x = \frac{t^3 - 1}{c}$$

Advierta que $x \to 0$ equivale a $t \to 1$. Esto permite convertir el límite dado en uno que comprende la variable t:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} &= \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} \end{aligned}$$

El cambio de variable permitió reemplazar un límite relativamente complicado con uno más sencillo de un tipo que ya ha visto. Si factoriza el denominador como un diferencia de cubos, obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} &= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3} \end{aligned}$$

Los problemas siguientes sirven para poner a prueba y desafiar sus habilidades para resolver problemas. Algunos requieren una cantidad considerable de tiempo para pensai de modo que no se desaliente si no los puede resolver de inmediato. Si tiene alguna dificultad, quizás le sirva consultar el análisis de los principios para la resolución de problemas en la página 76.

PROBLEMAS

1. Evalúe $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encuentre los números a y b tales que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

3. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

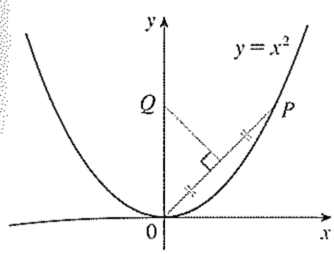


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

4. En la figura se muestra un punto P, en la parábola $y = x^2$ y el punto Q donde la mediatriz de OP interseca al eje y. Conforme P se aproxima al origen, a lo largo de la parábola, ¿qué sucede con Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

5. Si $[\![x]\!]$ denota la función entero, encuentre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{[\![x]\!]}$.

6. Dibuje la región en el plano definida por cada una de las ecuaciones siguientes.
(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ (c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encuentre todos los valores de a tales que f sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

8. Un **punto fijo** de una función f es un número c en su dominio tal que $f(c) = c$. (La función no mueve a c; éste permanece fijo.)
(a) Dibuje la gráfica de una función continua con dominio $[0, 1]$ cuyo rango también se encuentre en $[0, 1]$. Localice un punto fijo de f.
(b) Intente graficar una función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ que *no* tenga un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?
(c) Use el teorema de valor intermedio para comprobar que cualquier función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ tiene que tener un punto fijo.

9. Si $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$, encuentre $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$.

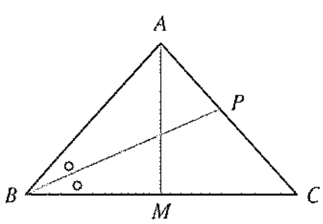


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

10. (a) En la figura se muestra un triángulo isósceles ABC con $\angle B = \angle C$. La bisectriz del ángulo B interseca el lado AC en el punto P. Suponga que la base BC permanece fija, pero que la altura $|AM|$ del triángulo tiende a 0, de modo que A se aproxima al punto medio M de BC. ¿Qué sucede con P durante este proceso? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.
(b) Intente trazar la trayectoria recorrida por P durante este proceso. A continuación halle la ecuación de esta curva y úsela para dibujarla.

11. (a) Si parte de la latitud 0° y avanza en dirección oeste, puede denotar con $T(x)$ la temperatura en el punto x en cualquier tiempo dado. Suponga que T es una función continua de x, y demuestre que, en cualquier tiempo fijo, existen por lo menos dos puntos opuestos sobre el ecuador que tienen exactamente la misma temperatura.
(b) ¿El resultado del inciso (a) se cumple para puntos que estén sobre cualquier círculo sobre la superficie de la Tierra?
(c) ¿El resultado del inciso (a) se cumple para la presión barométrica y para la altitud arriba del nivel del mar?

12. Si f es una función derivable y $g(x) = xf(x)$, use la definición derivada para demostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponga que f es una función que satisface $f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos los números reales x y y. Suponga también que

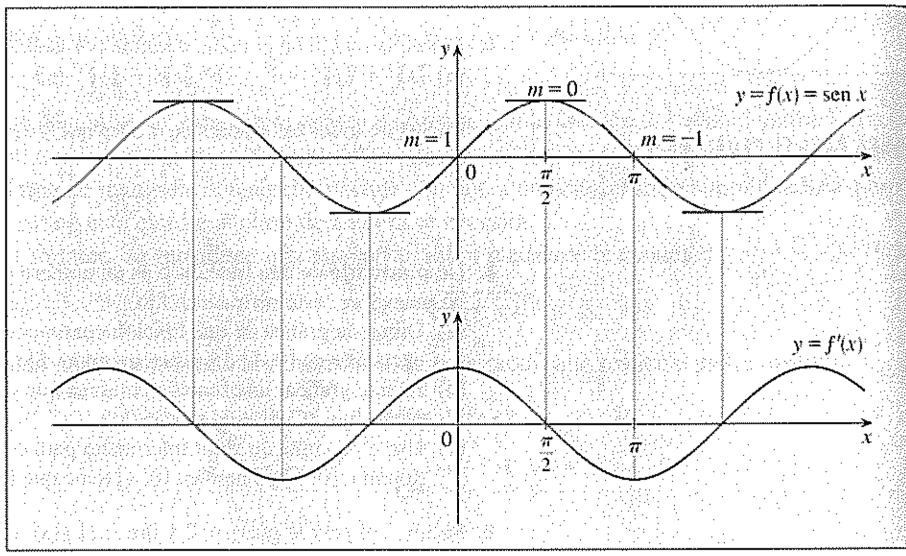
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

(a) Encuentre $f(0)$. (b) Encuentre $f'(0)$. (c) Encuentre $f'(x)$.

14. Suponga que f es una función con la propiedad de que $|f(x)| \leq x^2$ para toda x. Muestre que $f(0) = 0$. Enseguida, muestre que $f'(0) = 0$.

3

REGLAS DE DERIVACIÓN



Al medir las pendientes en puntos que se localizan en la curva seno obtiene claras evidencias de que la derivada de la función seno es la función coseno

Hasta aquí, ha visto cómo interpretar las derivadas como pendientes y relaciones de cambio y ha estudiado cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. También ha aprendido la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente y ha usado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso si siempre tuviéra que aplicar la definición, de modo que, en este capítulo se desarrollan reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente esa definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales, funciones algebraicas, funciones exponenciales y logarítmicas y funciones trigonométricas inversas. A continuación usará estas reglas para resolver problemas en que intervienen relaciones de cambio, tangentes a curvas paramétricas y la aproximación de funciones.

3.1 DERIVADAS DE POLINOMIOS Y DE FUNCIONES EXPONENCIALES

En esta sección aprenderá la manera de derivar funciones constantes, funciones de potencias, polinomios y funciones exponenciales.

Empiece por la más sencilla de todas las funciones, la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, de modo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

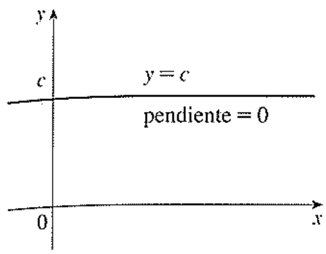


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$, por tanto $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

En la notación de Leibniz, se escribe está notación como sigue:

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

FUNCIONES POTENCIA

En seguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, la cual tiene pendiente 1 (véase la figura 2). De modo que

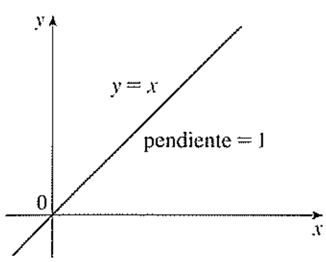


FIGURA 2
La gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, por tanto $f'(x) = 1$

1 $$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

(También puede comprobar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya ha investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.8 (ejercicios 17 y 18), encontró que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, la derivada de $f(x) = x^4$, queda como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Así

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si compara las ecuaciones (1), (2), (3), surge un patrón. Parece razonable presumir que cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto. Se demuestra de dos modos; en la segunda demostración se aplica el teorema del binomio

REGLA DE LA POTENCIA Si n es un entero positivo, en consecuencia

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN Puede verificar la fórmula

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

multiplicando sólo el lado derecho (o mediante la suma del segundo factor como una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, puede aplicar la ecuación 2.7.5 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

El teorema del binomio se da en la página de referencia 1.

Al hallar la derivada de x^4, tuvo que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, necesita desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, aplique el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor, y, por lo tanto, tienden a 0.

En el ejemplo 1, se ilustra la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1

(a) Si $f(x) = x^6$, después $f'(x) = 6x^5$. (b) Si $y = x^{1000}$, por lo tanto $y' = 1000x^{999}$.

(c) Si $y = t^4$, en seguida $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$. (d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

¿Qué se puede decir acerca de las funciones potencia con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 61 se le pide al lector que compruebe, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que puede escribir de nuevo esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por consiguiente, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente [ejercicio 58(c)] se demuestra que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo 3 de la sección 2.8 encontró que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.6, se demuestra que es verdadera para todos los números reales n.

REGLA DE LA POTENCIA (VERSIÓN GENERAL) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

En la figura 3 se muestra la función y del ejemplo 2(b) y su derivada y'. Advierta que y no es derivable en 0 (y' no está definida allí). Observe que y' es positiva cuando y crece, y negativa cuando y decrece.

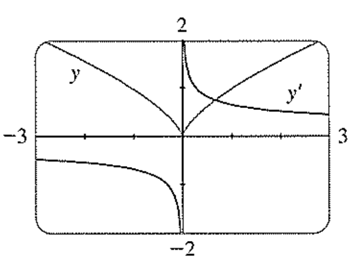


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EJEMPLO 2 Derive:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso, reescriba la función como una potencia de x.

(a) Como $f(x) = x^{-2}$, aplique la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$ □

La regla de la potencia permite hallar las líneas tangentes sin hacer uso de la definición de una derivada. Además permite encontrar *línea normales*. La **línea normal** a una curva C en un punto P es la línea a través de P que es perpendicular a la línea tangente en P. (En el estudio de lo óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la línea normal al lente.)

EJEMPLO 3 Halle la ecuación de la recta tangente y de la línea normal a la curva $y = x\sqrt{\ }$ en el punto $(1, 1)$. Ilustre dibujando la curva y estas líneas.

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

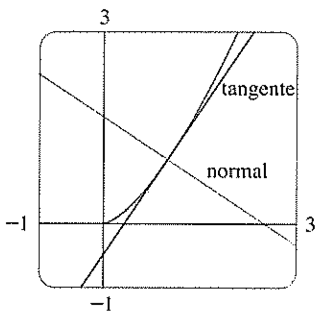


FIGURA 4

De este modo, la pendiente de la recta tangente en $(1, 1)$ es $f'(1) = \frac{3}{2}$. Por consiguiente l ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La línea normal es perpendicular a la línea tangente de tal manera que, su pendiente es (reciproco negativo de $\frac{3}{2}$, es decir, $-\frac{3}{2}$. En estos términos una ecuación de la línea normal e

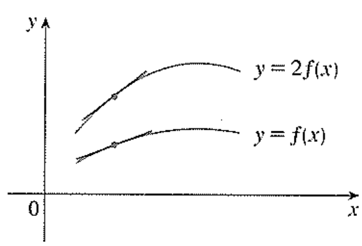
$$y - 1 = -\tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = -\tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{3}$$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y su recta tangente.

NUEVAS DERIVADAS A PARTIR DE ANTERIORES

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustrac ción o multiplicación por una constante, sus derivadas se pueden calcular en términos de l derivada de sus funciones anteriores. En particular, en la fórmula siguiente se afirma qu la *derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicad por la derivada de la función.*

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los avances permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE Si c es una constante y f es una función derivable, en tal caso

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

COMPROBACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Después

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley de los límites 3)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

(a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

La siguiente regla dice que *la derivada de una suma de funciones es la suma de la. derivadas.*

Si se utiliza la notación del apóstrofo, puede escribir la regla de la suma como

$$(f+g)' = f' + g'$$

REGLA DE LA SUMA Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

PRUEBA $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1)}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

□

La regla de la suma se puede extender a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicando la regla de la suma y la del múltiplo constante, obtiene la fórmula siguiente.

REGLA DE LA DIFERENCIA Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Estas tres reglas se pueden combinar con la regla de la potencia para derivar cualquier polinomio, como se demuestra en los ejemplos que siguen

EJEMPLO 5

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

□

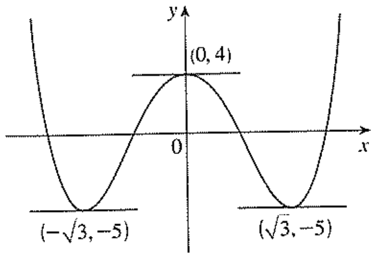


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus tangentes horizontales

EJEMPLO 6 Encuentre sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$, los puntos donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)\\ &= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)\end{aligned}$$

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por eso, la curva dada tiene tangentes horizontales cuando $x = 0$, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$ $(\sqrt{3}, -5)$ y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.) □

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una particula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centimetros y t en segundos. Hallar la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14$ cm/s^2. □

FUNCIONES EXPONENCIALES

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, aplicando la función de derivada

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h} - a^x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h - 1)}{h}\end{aligned}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que puede llevarlo adelante del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h}$$

Advierta que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

En consecuencia, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, en tal caso es derivable en todas partes y

$$\boxed{4} \qquad f'(x) = f'(0)a^x$$

En esta ecuación se afirma que *la relación de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la propia función.* (La pendiente es proporcional a la altura.)

En la tabla que aparece a la izquierda, se da evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $a = 2$ y $a = 3$. (Los valores se dan correctos hasta cuatro cifras decimales.) Parece que los límites existen y

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

$$\text{Para } a = 2 \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{Para } a = 3 \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, se establecen los límites existentes y, correctos hasta seis cifras decimales, los valores son

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por esto, de la ecuación 4

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las ecuaciones posibles para la base a de la ecuación 4, se tiene la fórmula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de las estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que exista un número a entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es tradicional denotar este valor con la letra e. (De hecho, así se presentó e en la sección 1.5.) Por esto se tiene la siguiente definición

En el ejercicio 1 verá que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante será capaz de demostrar que e con cinco cifras decimales es

$$e \approx 2.71828$$

DEFINICIÓN DEL NÚMERO e

$$e \text{ es el número tal que} \quad \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en $(0, 1)$ tiene una pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véase las figuras 6 y 7.)

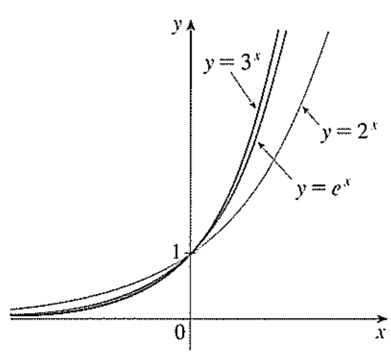


FIGURA 6

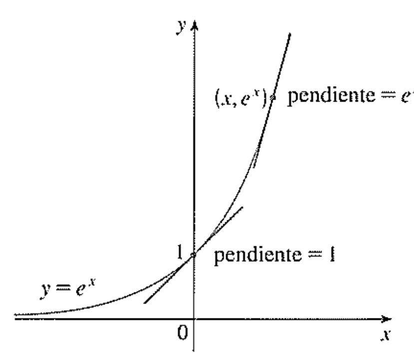


FIGURA 7

Si pone $a = e$ y, por lo tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la importante fórmula de derivación que se proporciona a continuación.

DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

TEC Visual 3.1 aplica el alcance de una pendiente para examinar esta formula

De donde la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase la figura 7).

V EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', así

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

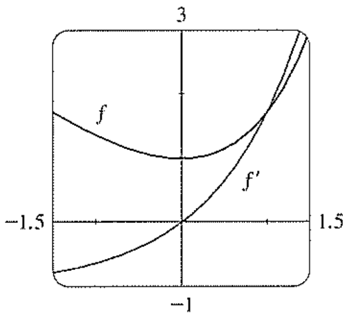


FIGURA 8

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Asimismo, observe que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente.

EJEMPLO 9 ¿En cuál punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Como $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Después, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, tiene

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

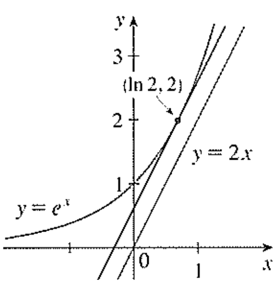


FIGURA 9

Por lo tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.)

3.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cómo se define el número e?
   (b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{2.7^h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0}\frac{2.8^h - 1}{h}$$

   correctos hasta dos cifras decimales. ¿Qué puede concluir acerca del valor de e?

2. (a) Dibuje, a mano, la función $f(x) = e^x$, poniendo particular atención a la forma en que la gráfica cruza el eje y. ¿Qué hecho le permite hacer esto?
   (b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
   (c) ¿Cuál de las dos funciones del inciso (b) crece con mayor rapidez cuando x es grande?

3–32 Derive la función.

3. $f(x) = 186.5$
4. $f(x) = \sqrt{30}$
5. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$
6. $F(x) = \frac{3}{4}x^8$
7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$
8. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$

9. $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $y = 5e^x + 3$

13. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

14. $R(t) = 5t^{-3/5}$

15. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

16. $B(y) = cy^{-6}$

17. $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$

18. $y = \sqrt[3]{x}$

19. $F(x) = (\frac{1}{2}x)^5$

20. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

21. $y = ax^2 + bx + c$

22. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$

25. $y = 4\pi^2$

26. $g(u) = \sqrt{2}u + \sqrt{3u}$

27. $H(x) = (x + x^{-1})3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33–34 Hallar una ecuación de la línea tangente a la curva en el punto que se indica.

33. $y = \sqrt[4]{x}$, $(1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x$, $(1, 2)$

35–36 Determine una ecuación de la tangente y la normal a la curva en el punto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

36. $y = (1 + 2x)^2$, $(1, 9)$

37–38 Formule una ecuación para la tangente a la curva en el punto dado. Grafique la curva y la tangente en la misma pantalla.

37. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

39–42 Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y úselas enseguida para explicar por qué su respuesta es razonable.

39. $f(x) = e^x - 5x$

40. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$

41. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$

42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

---

43. (a) Use una calculadora graficadora o una computadora para dibujar la función $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ en el rectángulo de visualización $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.

(b) Utilizando la gráfica del inciso (a) para estimar pendientes, haga a mano un boceto aproximado de la gráfica de f'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.9.)

(c) Calcule $f'(x)$ y use esta expresión, con un aparato graficador, para dibujar f'. Compare con el boceto que trazó usted en el inciso (b).

44. (a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para dibujar la función $g(x) = e^x - 3x^2$ en el rectángulo de visualización $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.

(b) Aplicando la gráfica del inciso (a) para estimar pendientes, haga a mano un boceto aproximado de la gráfica de g'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.8.)

(c) Calcule $g'(x)$ y aplique esta expresión, con un dispositivo graficador, para dibujar g'. Compare con su boceto del inciso (b).

45–46 Hallar la primera y segunda derivadas de la función

45. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 16x$

46. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

47–48 Hallar la primera y segunda derivadas de la función. Verifique para ver que sus respuestas sean razonables al comparar las gráficas de f, f' y f''

47. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

48. $f(x) = e^x - x^3$

---

49. La ecuación de movimiento de una particula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Hallar

(a) la velocidad y aceleración como funciones de t.

(b) la aceleración después de 2 s, y

(c) la aceleración cuando la velocidad es 0

50. La ecuación de movimiento de una particula es $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$, donde s esta en metros y t en segundos.

(a) Hallar la velocidad y aceleración como funciones de t.

(b) Hallar la aceleración después de 1 s.

(c) grafíque las funciones, posición, velocidad y aceleración en la misma pantalla

51. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la tangente es horizontal

52. ¿Para qué valores de x tiene una tangente horizontal la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$?

53. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.

54. Encuentre una ecuación de la línea tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$ que es paralela a la línea $y = 1 + 3x$

55. Hallar una ecuación de ambas líneas que son tangente a la curva $y = 1 + x^3$ y paralela a la línea $12x - y = 1$

56. ¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$. Ilústrelo dibujando la curva y ambas líneas.

57. Establezca una ecuación de la línea normal a la parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que es paralela a la línea $x - 34 = 5$

58. ¿Dónde corta por segunda vez la normal a la parábola $y = x - x^2$ que pasa por el punto $(1, 0)$ a la misma parábola? Elabore un esquema.

59. Dibuje un diagrama para demostrar que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes intersecan la parábola.

60. (a) Halle ecuaciones de ambas rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que sean tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.
(b) Muestre que no hay ninguna línea que pase por el punto (2,7) que es tangente a la parábola. Cuando dibuje el diagrama verá por qué.

61. Aplique la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, después $f'(x) = -1/x^2$. (Esto demuestra la regla de la potencia para el caso $n = -1$.)

62. Encuentre la derivada n-ésima de cada función calculando las primeras derivadas y observe el patrón que se desarrolla

(a) $f(x) = x^n$ $\qquad f(x) = 1/x$

63. Hallar un polinomio de segundo grado P de tal manera que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$, y $P''(2) = 2$

64. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ se le denomina **ecuación diferencial** porque involucra uno función desconocida y y sus derivadas y' y y''. Hallar las constantes A, B y C de tal manera que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación. (Las ecuaciones diferenciales se estudiarán con detalle en el capítulo 9.)

65. Hallar una función cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene una tangente horizontal en los puntos $(-2,6)$ y $(2,0)$.

66. Hallar una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente -8 en $x = -1$, y pasa a través de el punto $(2, 15)$.

67. Sean

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Es derivable f en 1? Dibuje las gráficas f y f'.

68. ¿En qué valores la función siguiente g es derivable?

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Proporcione una fórmula para g' y trace las gráficas de g y g'.

69. (a) ¿Para qué valores de x la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es derivable? Encuentre una fórmula para f'.
(b) Grafique f y f'.

70. ¿Dónde es derivable la función $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$? Proporcione una fórmula para h' y grafique h y h'.

71. Determine la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya tangente en $(1, 1)$ tiene por ecuación $y = 3x - 2$.

72. Considere la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tiene una línea tangente donde $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una línea tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 + 3x$. Halle los valores de a, b, c y d.

73. ¿Para qué valores de a y b es la recta $2x + y = b$ tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

74. Hallar el valor de c tal que la línea $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$.

75. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine los valores de m y b que hacen que f sea siempre derivable.

76. Se dibuja una recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto P.
(a) Demuestre que el punto medio de este segmento de la recta que se corta de su recta tangente mediante los ejes de coordenadas es P.
(b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas tiene siempre la misma área, sin importar dónde se ubique P sobre la hipérbola.

77. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

78. Dibuje un diagrama en el que se muestren dos rectas perpendiculares que se intersecan sobre el eje y, y son tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Dónde se intersecan estas rectas?

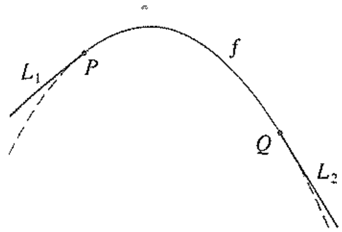
79. Si $c > \frac{1}{2}$, ¿cuántas líneas a través del punto (0, c) son líneas normales a la parábola $y = x^2$? ¿que sucede si $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Dibuje la parábola $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$. ¿Considera que existe una línea que es tangente a ambas curvas? De ser así, hallar su ecuación. Si no es así, ¿Por qué no?

PROYECTO DE APLICACIÓN

CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA

Suponga que se le solicita que diseñe el primer ascenso y descenso de una montaña rusa nueva. Después de estudiar fotografías de sus montañas rusas predilectas, decide hacer la pendiente del ascenso 0.8 y la del descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ mediante parte de una parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que el trayecto sea uniforme no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo tanto desea que los



segmentos lineales L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q. (Véase la figura.) Para simplificar las ecuaciones decide situar el origen en P.

1. (a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Escriba ecuaciones en a, b y c que aseguren que el trayecto es suave en los puntos de transición.
   (b) Resuelva la ecuación del inciso (a) para a, b y c para hallar una fórmula para $f(x)$.
   (c) Dibuje L_1, f y L_2 para verificar que las transiciones son uniformes.
   (d) Encuentre la diferencia en elevación entre P y Q.

2. La solución del problema 1 quizá *parezca* suave, pero es posible que no *se sienta* suave debido a que la pieza definida como función [consistente de $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leq x \leq 100$ y $L_2(x)$ para $x > 100$] no tiene una segunda derivada continua. Por consiguiente decide mejorar el diseño aplicando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ únicamente en el intervalo $10 \leq x \leq 90$ y conectándolo con las funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leq x < 10$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 90 < x \leq 100$$

   (a) Escriba un sistema de ecuaciones en 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus dos primeras derivadas coincidan en los puntos de transición.
   CAS (b) Resuelva las ecuaciones del inciso (a) con un sistema de computo algebraico para encontrar las fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.
   (c) Dibuje L_1, g, q, h y L_2 y compárelos con las gráficas del problema 1 inciso (c).

3.2 LAS REGLAS DEL PRODUCTO Y EL COCIENTE

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

REGLA DEL PRODUCTO

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría sentirse la tentación de presumir —como Leibniz lo hizo hace tres siglos— que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por lo tanto la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Por eso, $(fg)' \neq f'g'$. La fórmula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

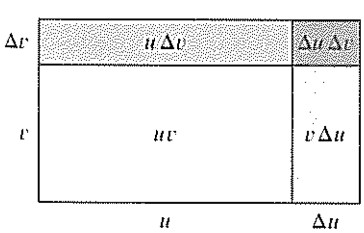


FIGURA 1
La geometría de la regla del producto

Antes de enunciar la regla del producto, vea cómo podría descubrirla. En el caso donde tanto $u = f(x)$ como $v = g(x)$ son funciones positivas, puede interpretar el producto uv como un área de un rectángulo (véase la figura 1). Si x cambia una cantidad Δx, en seguida los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, se puede interpretar como el área del rectángulo grande en la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

$$\boxed{1} \qquad \Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$= \text{la suma de las tres áreas sombreadas}$$

Si divide entre Δx, obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

■ Recuerde que en la notación de Leibniz la definición de derivada se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora hace que $\Delta x \to 0$, obtiene la derivada de uv.

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx}$$

2 $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Advierta que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, puesto que f es derivable y, por lo tanto, continua.)

Aun cuando se partió de la hipótesis (para la interpretación geométrica) que todas las cantidades son positivas, observe que la ecuación 1 siempre es verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu y Δv son positivas o negativas.) De modo que ha probado la ecuación 2, conocida como regla del producto, para todas las funciones diferenciables u y v.

■ En notación prima:
$$(fg)' = fg' + gf'$$

REGLA DEL PRODUCTO Si tanto f como g son derivables, en tal caso

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En palabras, la regla del producto expresa que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función.*

EJEMPLO 1

(a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.
(a) Hallar la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

■ En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f del ejemplo 1 y su derivada f'. Advierta que $f'(x)$ es positiva cuando f crece y negativa cuando f disminuye.

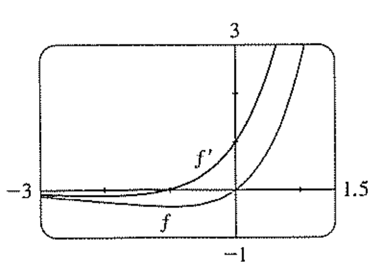


FIGURA 2

SOLUCIÓN

(a) Por la regla del producto se tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$
$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x$$

(b) Aplicando la regla del producto una segunda vez se obtiene

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] = (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1)$$
$$= (x+1)e^x + e^x \cdot 1 = (x+2)e^x$$

La aplicación adicional de la regla del producto proporciona

$$f'''(x) = (x + 3)e^x \qquad\qquad f^{(4)}(x) = (x + 4)e^x$$

En realidad, cada derivada que sigue adiciona otro término e^x, de esa manera

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$$ □

▪ En el ejemplo 2, a y b son constantes. En matemáticas es habitual aplicar letras cerca del inicio del alfabeto para representar constantes y las letras cercanas del final del alfabeto representan variables

EJEMPLO 2 Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$.

SOLUCIÓN 1 Si se aplica la regla del producto, tiene

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a - bt) + (a + bt)\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) \\ &= \sqrt{t}\cdot b + (a + bt)\cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= b\sqrt{t} + \frac{a + bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a + 3bt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si en primer lugar usa las leyes de los exponentes para volver a escribir $f(t)$, después puede proceder directamente, sin aplicar la regla del producto.

$$\begin{aligned} f(t) &= a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2} \\ f'(t) &= \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2} \end{aligned}$$

la cual equivale a la respuesta de la solución 1. □

En el ejemplo 2 se muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones que utilizar la regla del producto. Sin embargo, en el ejemplo 1 esta regla es el único método posible.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\,g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla del producto, obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\,g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\ &= \sqrt{x}\,g'(x) + g(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \sqrt{x}\,g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

De este modo $\quad f'(4) = \sqrt{4}\,g'(4) + \dfrac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \dfrac{2}{2\cdot 2} = 6.5$ □

REGLA DEL COCIENTE

Encontrar una regla para derivar el cociente de dos funciones derivables $u = f(x)$ y $v = g(x)$ de manera muy similar a como se encontró la regla del producto. Si x, u y v cambian en cantidades Δx, Δu y Δv, en tal caso el cambio correspondiente en el cociente u/v es

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

por eso

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

A medida que $\Delta x \to 0$, $\Delta v \to 0$ también porque g es derivable y por consiguiente continua. Así, al aplicar las leyes de los límites, obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

En notación prima

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

REGLA DEL COCIENTE Si tanto f como g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En palabras, en la regla del cociente se expresa que la *derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

La regla del cociente y las otras fórmulas de derivación permiten calcular la derivada de cualquier función racional, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Puede usar un aparato graficador para comprobar que la respuesta al ejemplo 4 es plausible. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función de ese ejemplo y su derivada. Advierta que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cercana a 0.

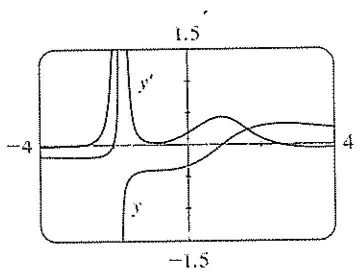


FIGURA 3

EJEMPLO 4 Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2} \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 5 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $(1, e/2)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

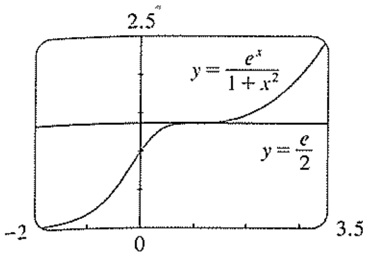


FIGURA 4

De modo que la pendiente de la recta tangente en $(1, \frac{1}{2}e)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $(1, \frac{1}{2}e)$ es horizontal y su ecuación es $y = \frac{1}{2}e$. [Véase la figura 4. Advierta que la función es creciente y cruza su recta tangente en $(1, \frac{1}{2}e)$.] □

NOTA No use la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces es más fácil volver a escribir un cociente para ponerlo en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente es más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

Se resumen las fórmulas de derivación que ha aprendido hasta el momento como se describe a continuación:

TABLA DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 EJERCICIOS

1. Encuentre la derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas son equivalentes?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

de dos maneras: primero aplicando la regla del cociente y simplificando. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere?

3–26 Derive la función

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 + t^2}$

9. $V(x) = (2x^3 + 3)(x^4 - 2x)$

10. $Y(u) = (u^{-2} + u^{-3})(u^5 - 2u^2)$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $R(t) = (t + e^t)(3 - \sqrt{t})$

13. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^3 + 1}$

16. $y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = (r^2 - 2r)e^r$

18. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27–30 Hallar $f'(x)$ y $f''(x)$

27. $f(x) = x^4e^x$

28. $f(x) = x^{5/2}e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{3 + e^x}$

31–32 Encontrar una ecuación de la línea tangente a la curva que se proporciona en el punto especifico.

31. $y = \dfrac{2x}{x + 1}$, $(1, 1)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33–34 Halle ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la curva dada en el punto que se especifica.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$, $(4, 0.4)$

---

35. (a) La curva $y = 1/(1 + x^2)$ se llama **bruja de Agnesi**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Ilustre el inciso (a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

36. (a) La curva $y = x/(1 + x^2)$ se llama **serpentina**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(3, 0.3)$.

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

37. (a) Si $f(x) = e^x/x^3$, encuentre $f'(x)$.

(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

38. (a) Si $f(x) = x/(x^2 - 1)$, halle $f'(x)$.

(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

39. (a) Si $f(x) = (x - 1)e^x$, hallar $f'(x)$ y $f''(x)$.

(b) Verifique para ver que sus respuestas en el inciso (a) son razonables al comparar los gráficas de f, f' y f''.

40. (a) Si $f(x) = x/(x^2 + 1)$, hallar $f'(x)$ y $f''(x)$.

(b) Verifique para comprobar que sus respuestas en el inciso (son son justas al comparar los gráficas de f, f' y f''.

41. Si $f(x) = x^2/(1 + x)$, hallar $f''(1)$.

42. Si $g(x) = x/e^x$, hallar $g^{(n)}(x)$.

43. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. En cuentre los valores siguientes

(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$

(c) $(g/f)'(5)$

44. Considere que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, encuentre $h'(2)$.

(a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$

(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

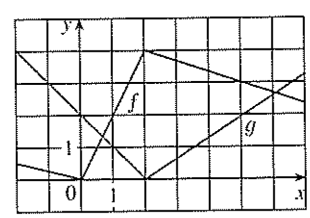
45. Si $f(x) = e^xg(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

46. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

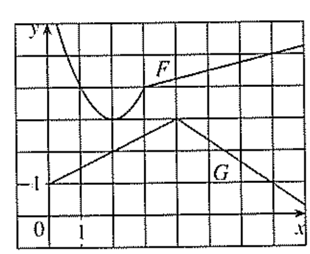
47. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.

(a) Encuentre $u'(1)$. (b) Encuentre $v'(5)$.



48. Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G son las funciones cuyas gráficas se muestran

(a) Encuentre $P'(2)$. (b) Encuentre $Q'(7)$.



49. Si g es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

50. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

51. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x + 1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos toca la curva estas rectas tangentes?

52. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

53. En este ejercicio estime la proporción a la que se está elevando el ingreso personal total en el área metropolitana de Richmond-Petersburg, Virginia. En 1999, la población de esta área era 961 400 y la población aumentaba en alrededor de 9 200 personas al año. El ingreso anual promedio era \$30 593 per cápita, y este promedio aumentaba en cerca de \$1 400 al año (ligeramente por arriba del promedio nacional de alrededor de \$1 225 al año). Use la regla del producto y estas cifras para estimar la proporción en la que estaba aumentando el ingreso personal total en el área de Richmond-Petersburg en 1999. Explique el significado de cada término en la regla del producto.

54. Un fabricante produce rollos de una tela con un ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en yardas) que se vende es función del precio de venta p (en dólares por yarda), de modo que $q = f(p)$. Luego el ingreso total que se percibe con el precio de venta p es $R(p) = pf(p)$.
(a) ¿Qué significa afirmar que $f(20) = 10\,000$ y $f'(20) = -350$?
(b) Suponiendo los valores del inciso (a), encuentre $R'(20)$ e interprete su respuesta.

55. (a) Utilice la regla del producto dos veces para probar que si f, g y h son derivables, en tal caso

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

(b) Tome $f = g = h$ en el inciso (a) y demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Aplique el resultado del inciso (b) para derivar $y = e^{3x}$.

56. (a) Si $F(x) = f(x)g(x)$, donde f y g son derivables en todos los ordenes y demostrar que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.
(b) Hallar formulas similares para F''' y $F^{(4)}$.
(c) Intente una formula para $F^{(n)}$.

57. Hallar expresiones para las primeras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. ¿Observa algún patrón en estas expresiones? Intente una formula para $f^{(n)}(x)$ y compruebe aplicando inducción matemática.

58. (a) Si g es derivable la **regla del recíproco** dice que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Aplique la regla del cociente para comprobar la regla del recíproco
(b) Utilice la regla del recíproco para derivar la función del ejercicio 18.
(c) Utilice la regla del recíproco para comprobar que la regla de la potencia es válida para números enteros negativos, es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todos los números enteros positivos n.

3.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En el apéndice D se da un repaso de las funciones trigonométricas

Antes de iniciar esta sección, quizá podría necesitar repasar las funciones trigonométricas. En particular, es importante recordar que cuando habla de la función f definida para todos los números reales x por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Se cumple una convención similar para las demás funciones trigonométricas: cos, tan, csc, sec y cot. Recuerde, por lo que se vio en la sección 2.5, que todas las funciones trigonométricas son continuas en cada número en sus dominios.

Si traza la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y utiliza la interpretación de $f'(x)$ como la pendiente de la tangente a la curva seno para trazar la gráfica de f' (véase el ejercicio 14 de la sección 2.8), parece que la gráfica de esta última es la misma que la curva coseno (véase figura 1).

TEC Visual 3.3 muestra una animación de la figura 1

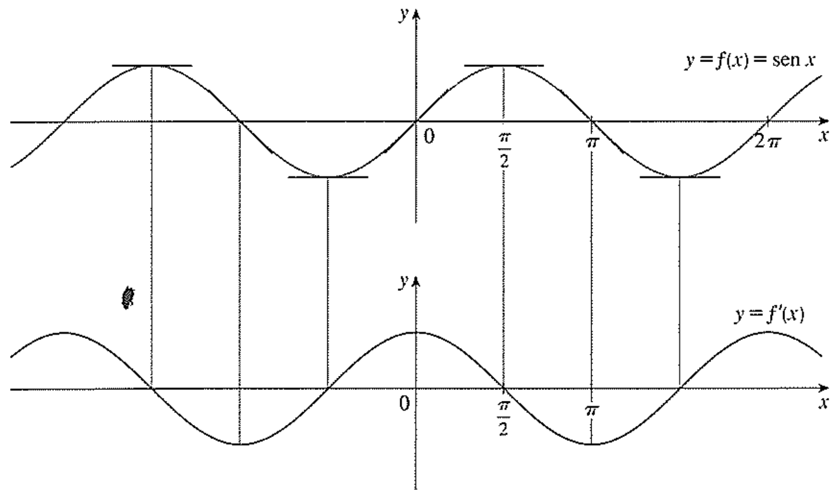


FIGURA 1

Intente confirmar la conjetura de que si $f(x) = \operatorname{sen} x$, por lo tanto $f'(x) = \cos x$. A partir de la definición de derivada

Se usa la fórmula de la adición para el seno. Véase el apéndice D.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right]$$

$$\boxed{1} \qquad = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Puesto que se considera a x como constante al calcular un límite cuando $h \to 0$, tiene

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de $(\operatorname{sen} h)/h$ no es tan obvio. Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 3 de la sección 2.2, se infiere que

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1}$$

Ahora, use un argumento geométrico para probar la ecuación 2. Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura 2(a) se muestra un sector de círculo con centro en O, ángulo central θ y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián,

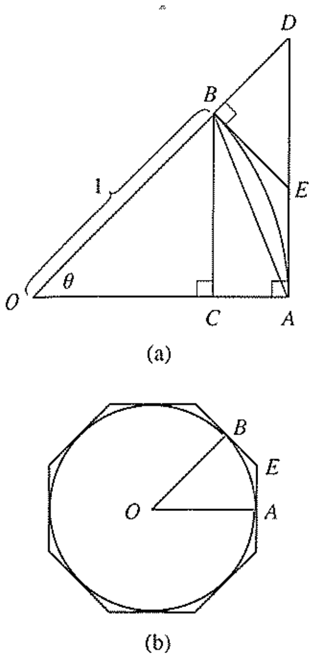


FIGURA 2

arco $AB = \theta$. Asimismo, $|BC| = |OB|\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta$. Con base en el diagrama, se ve que

$$|BC| < |AB| < \text{arco } AB$$

En consecuencia $\quad \text{sen}\,\theta < \theta \quad$ de igual manera $\quad \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} < 1$

Suponga que las tangentes en A y B se intersecan en E. Puede ver, con base en la figura 2(b) que la circunferencia de un círculo es menor que la longitud de un polígono circunscrito, de modo que arco $AB < |AE| + |EB|$. Así,

$$\begin{aligned}\theta = \text{arco } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA|\tan\theta \\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

(En el apéndice F se demuestra directamente la desigualdad $\theta \leqslant \tan\theta$ a partir de la definición de la longitud de un arco, sin recurrir a la intuición geométrica como se hizo aquí.) Por lo tanto,

$$\theta < \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$$

de modo que

$$\cos\theta < \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} < 1$$

Sabe que $\lim_{\theta\to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$; de este modo, por el teorema de la compresión

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$$

Pero la función $(\text{sen}\,\theta)/\theta$ es una función par, de suerte que sus límites por la derecha y la izquierda deben ser iguales. De donde, tiene

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$$

de forma que ha probado la ecuación 2.

Puede deducir el valor del límite restante en (1), como sigue:

▪ Multiplique el numerador y el denominador por $\cos\theta + 1$ para poner la función en una forma en que pueda usar los límites que conoce.

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1}\right) = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta\to 0}\frac{-\text{sen}^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\cdot\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta + 1}\right) \\ &= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\,\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta + 1} \\ &= -1\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0 \qquad \text{(por la ecuación 2)}\end{aligned}$$

3
$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0}$$

Si ahora pone los límites (2) y (3) en (1), obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Así ha probado la fórmula para la derivada de la función seno:

4
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x}$$

La figura 3 muestra las gráficas de la función del ejemplo 1 y su derivada. Advierta que $y' = 0$ siempre que y tenga una tangente horizontal.

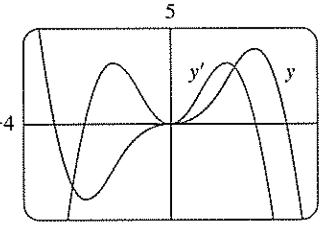


FIGURA 3

V EJEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Con la regla del producto y la fórmula 4, tiene

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$ □

Si se aplican los mismos métodos que en la demostración de la fórmula 4, se puede probar (véase el ejercicio 20) que

5
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

También se puede derivar la función tangente aplicando la definición de derivada, pero es más fácil usar la regla del cociente con las fórmulas 4 y 5:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

También es fácil hallar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente (véase los ejercicios 17-19). En la tabla siguiente aparecen todas las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas. Recuerde que son válidas sólo cuando x se mide en radianes.

Cuando memorice esta tabla, resulta útil notar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones"; es decir, coseno, cosecante y cotangente.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una tangente horizontal?

SOLUCIÓN La regla del cociente da

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x\dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

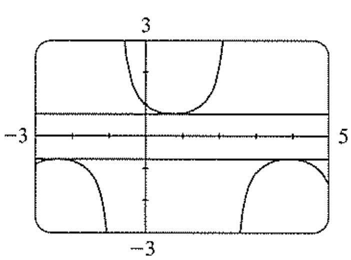


FIGURA 4
Las tangentes horizontales del ejemplo 2

Al simplificar la respuesta, se usó la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Como $\sec x$ nunca es 0, $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase la figura 4). □

Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, las ondas, los movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica, se pueden describir por medio de las funciones trigonométricas. En el ejemplo siguiente, se analiza un caso de movimiento armónico simple.

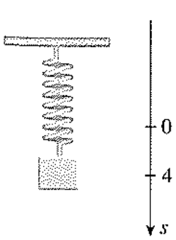


FIGURA 5

EJEMPLO 3 Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm más allá de su posición de reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

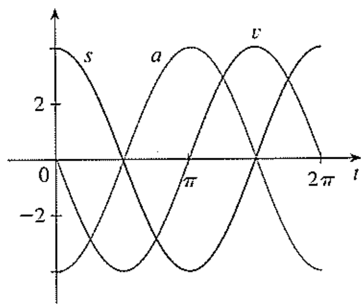


FIGURA 6

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de la oscilación es 2π, el periodo de cos t.

La rapidez (magnitud de la velocidad) es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando sen $t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo.

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6.

EJEMPLO 4 Hallar la vigésima séptima derivada de cos x.

■ Busque la norma

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x)$ cos x son como sigue:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$$

Así que las derivadas sucesivas suceden en un ciclo de extención 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ cada vez que n es un múltiplo de 4. En consecuencia

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

y, derivando tres veces más, tiene

$$f^{(27)}(x) = \operatorname{sen} x$$

La principal aplicación del límite en la ecuación 2 ha sido comprobar la formula de derivación de la función seno. Pero este límite también se aplica en la búsqueda de otros límites trigonométricos, como en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Determine $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la ecuación 2, primero vuelva a escribir la función para multiplicar y dividir entre 7:

Observe que sen $7x \neq 7$ sen x.

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Si considera $\theta = 7x$, entonces $\theta \to 0$, cuando $x \to 0$, de este modo, mediante la ecuación 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x} \right) = \frac{7}{4} \lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$ □

EJEMPLO 6 Calcule $\lim_{x\to 0} x \cot x$.

SOLUCIÓN En este caso se divide tanto al numerador como el denominador entre x:

$$\lim_{x\to 0} x \cot x = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0} \cos x}{\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(según la continuidad del coseno y la ecuación 2)}$$

$$= 1$$ □

3.3 EJERCICIOS

1–16 Encuentre las derivadas de:

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$
2. $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cot x$
4. $y = 2\csc x + 5\cos x$
5. $g(t) = t^3 \cos t$
6. $g(t) = 4\sec t + \tan t$
7. $h(\theta) = \csc \theta + e^\theta \cot \theta$
8. $y = e^u(\cos u + cu)$
9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$
10. $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$
11. $f(\theta) = \dfrac{\sec \theta}{1 + \sec \theta}$
12. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$
13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
14. $y = \csc \theta\, (\theta + \cot \theta)$
15. $f(x) = ex^x \csc x$
16. $y = x^2 \operatorname{sen} x \tan x$

17. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$.

18. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$.

19. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.

20. Aplique la definición de derivada y pruebe que si $f(x) = \cos x$, por lo tanto $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

21. $y = \sec x, \quad (\pi/3, 2)$
22. $y = e^x \cos x, \quad (0, 1)$
23. $y = x + \cos x, \quad (0, 1)$
24. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}, \quad (0, 1)$

25. (a) Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x \operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, \pi)$.
 (b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

26. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sec x - 2\cos x$ en el punto $(\pi/3, 1)$.
 (b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

27. (a) Si $f(x) = \operatorname{sen} x - x$, encuentre $f'(x)$.
 (b) Compruebe para ver que su respuesta al inciso (a) es razonable trazando las gráficas de f y f' para $|x| < \pi/2$.

28. (a) Si $f(x) = e^x \cos x$, calcule $f'(x)$ y $f''(x)$.
 (b) Verifique que su respuesta del inciso (a) sea razonable graficando f, f' y f''.

29. Si $H(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$ hallar $H'(\theta)$ y $H''(\theta)$

30. Si $f(x) = \sec x$, hallar $f''(\pi/4)$.

31. (a) Aplique la regla del cociente para derivar la función.

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique la expresión de $f(x)$ expresándola en términos de sen x y cos x y en seguida halle $f'(x)$.

(c) Demuestre que sus respuestas a los incisos (a) y (b) son equivalentes

32. Considere $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea

$$g(x) = f(x) \operatorname{sen} x$$

y

$$h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$$

Hallar (a) $g'(\pi/3)$ y (b) $h'(\pi/3)$.

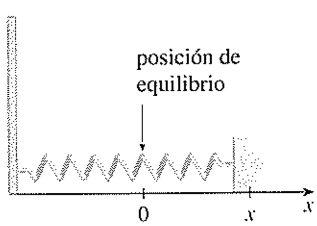
33. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$ tiene una tangente horizontal?

34. Determine los puntos de la curva $y = (\cos x)/(2 + \operatorname{sen} x)$ en los cuales la tangente es horizontal.

35. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada, en un movimiento armónico simple. (Véase la figura.) Su ecuación del movimiento es $x(t) = 8 \operatorname{sen} t$, donde t está en segundos y x en centímetros.

(a) Encuentre la velocidad y aclaración en el instante t.

(b) Encuentre la posición, la velocidad y la aclaración de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante?



36. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego, se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. La ecuación del movimiento es $s = 2 \cos t + 3 \operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tome la dirección positiva correspondiente hacia abajo.)

(a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.

(b) Dibuje las funciones velocidad y aceleración.

(c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?

(d) ¿Cuán lejos de su posición de equilibrio viaja la masa?

(e) ¿Cuándo es máxima la magnitud de la velocidad?

37. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada sobre una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquélla hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared, ¿con qué rapidez cambia x con respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$?

38. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al propio objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, después la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción*.

(a) Encuentre la relación de cambio de F con respecto a θ.

(b) ¿Cuándo es igual a 0 esta relación de cambio?

(c) Si $W = 50$ lb y $\mu = 0.6$ dibuje la gráfica de F como función de θ y úsela para localizar el valor de esta última para el cual $dF/d\theta = 0$. ¿Resulta coherente el valor con su respuesta al inciso (b)?

39–48 Determine el límite

39. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

40. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 6x}$

41. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{\tan 6t}{\operatorname{sen} 2t}$

42. $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

43. $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\cos \theta)}{\sec \theta}$

44. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 3t}{t^2}$

45. $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \tan \theta}$

46. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} (x^2)}{x}$

47. $\displaystyle \lim_{x \to \pi/4} \frac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

48. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

49. Derive cada identidad trigonométrica para obtener una identidad nueva (o conocida)

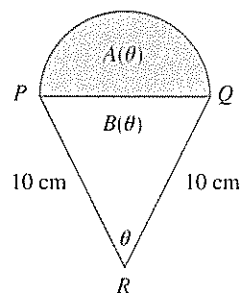
(a) $\displaystyle \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

(b) $\displaystyle \sec x = \frac{1}{\cos x}$

(c) $\displaystyle \operatorname{sen} x + \cos x = \frac{1 + \cot x}{\csc x}$

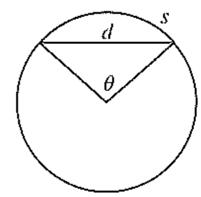
50. Un semicírculo con diámetro PQ descansa sobre un triángulo isósceles PQR para formar una región en forma de cono, como el que se ilustra en la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triángulo, halle

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



51. En la figura se muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, los dos subtendidos por un ángulo central θ. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$



3.4 LA REGLA DE LA CADENA

Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no lo capacitan para calcular $F'(x)$.

Vea la sección 1.3 para un repaso de funciones compuestas

Observe que F es una función compuesta. De hecho, si hace $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, en este caso puede escribir $y = F(x) = f(g(x))$, es decir, $F = f \circ g$. Sabe cómo derivar tanto f como g, de modo que sería útil contar con una regla que le diga cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Parece plausible, si interpreta las derivadas como relaciones de cambio. Considere du/dx como la relación de cambio de u con respecto a x, dy/du como la relación de cambio de y en relación a u y dy/du como la relación de cambio de y con respecto de x. Si u cambia el doble de rápido que x y y tres veces de rápido que u, en este caso resulta razonable que y cambie seis veces de rápido que x y, por consiguiente, espera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

REGLA DE LA CADENA Si g es derivable en x y f en $g(x)$, por lo tanto la función compuesta $F = f \circ g$ se definen mediante $F(x) = f(g(x))$, derivable en x y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si tanto $y = f(u)$ como $u = g(x)$ son funciones diferenciables, por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

COMENTARIOS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x; es decir

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Por lo tanto el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Resulta tentador escribir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{1} \qquad = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(Advierta que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ porque g es continua.)

$$= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

El único defecto de este razonamiento es que, en (1), podría suceder que $\Delta u = 0$ (incluso cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no puede dividir entre 0. No obstante, este razonamiento por lo menos sugiere que la regla de la cadena es verdadera. Al final de esta sección se da una prueba completa de la regla de la cadena. □

La regla de la cadena se puede escribir con apóstrofos

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque, si dy/du y du/dx fueran cocientes, después podría cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y no debe concebir du/dx como un cociente real.

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Con la ecuación 2): Al principio de esta sección, se expresó F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tiene

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

SOLUCIÓN 2 (con la ecuación 3): Si hace $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, después

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ □

Al utilizar la fórmula 3, debe tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando ésta se considera como función de x (llamada *derivada de y con respecto a x*), en tanto que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y en función de u). Por lo tanto, en el ejemplo 1 y se puede considerar como función de x $\left(y = \sqrt{x^2+1}\right)$ y como función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Advierta que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{en tanto que} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA En la aplicación de la regla de la cadena, trabaja del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *deriva la función exterior f [en la función interior g(x)] y, a continuación, multiplica por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

EJEMPLO 2 Derive (a) $y = \operatorname{sen}(x^2)$ y (b) $y = \operatorname{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a) Si $y = \operatorname{sen}(x^2)$, por lo tanto la función exterior es la función seno y la interior es la función de elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\operatorname{sen}}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

(b) Observe que $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado y la interior es la función seno. Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

La respuesta se puede dejar como $2 \operatorname{sen} x \cos x$, o bien, escribirse como $\operatorname{sen} 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como la fórmula del ángulo doble). □

Véase la página de referencia 2 o el apéndice D.

En el ejemplo 2(a), combinó la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \operatorname{sen} u$, donde u es una función diferenciable de x, en consecuencia, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

De esta manera, $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De manera semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas se pueden combinar con la regla de la cadena.

Para hacer explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior f es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, por lo tanto puede escribir $y = f(u) = u^n$, donde $u = g(x)$. Si aplica la regla de la cadena y, a continuación, la regla de la potencia, obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

[4] REGLA DE LA POTENCIA COMBINADA CON LA REGLA DE LA CADENA Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Advierta que la derivada del ejemplo 1 pudo calcularse al tomar $n = \frac{1}{2}$ en la regla 4.

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si, en (4), se toma $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)\\ &= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}\end{aligned}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescriba f: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$.

De este modo $$\begin{aligned}f'(x) &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)\\ &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combina la regla de la potencia, la de la cadena y la del cociente, obtiene

$$\begin{aligned}g'(t) &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)\\ &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}\end{aligned}$$

■ En la figura 1 se muestran las gráficas de las funciones y y y' del ejemplo 6. Advierta que y' es grande cuando y crece con rapidez, y $y' = 0$ cuando y tiene una tangente horizontal. De modo que la respuesta parece ser razonable.

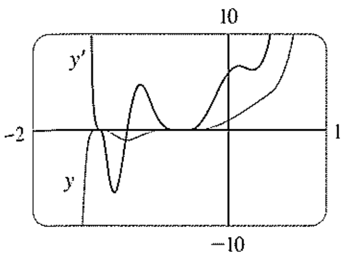


FIGURA 1

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo debe aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (2x+1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x+1)^5 \\ &= (2x+1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1) \\ &\qquad + (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x+1)^4 \frac{d}{dx}(2x+1) \\ &= 4(2x+1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x+1)^4 \cdot 2\end{aligned}$$

Al observar que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, podría factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x+1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$ □

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso, la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$ y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por lo tanto, por la regla de la cadena,

■ La regla de la cadena en su forma más general

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x$$ □

Puede aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$. Recuerde, por lo visto en la sección 1.6, que $a = e^{\ln a}$. De este modo,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x \\ &= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a\end{aligned}$$

porque $\ln a$ es una constante. De este modo, tiene la fórmula

■ No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia (donde x es la base):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

En particular, si $a = 2$, obtiene

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

En la sección 3.1, se dio la estimación

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Esto resulta coherente con la fórmula exacta (6), porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

Queda clara la razón del nombre "regla de la cadena", cuando se alarga una caden se agrega al otro eslabón. Suponga que $y = f(u)$, $u = g(x)$ y $x = h(t)$, donde f, g y son funciones derivables. En tal caso, para calcular la derivada de y con respecto a aplica dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

EJEMPLO 8 Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x) \\ &= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x \end{aligned}$$

Advierta que la regla de la cadena se ha aplicado dos veces.

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función media es la función secante y la función interna es la función triplicadora. De modo que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta) \\ &= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta \frac{d}{d\theta}(3\theta) \\ &= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta \tan 3\theta \end{aligned}$$

CÓMO PROBAR LA REGLA DE LA CADENA

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Según la definición de derivada

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Por consiguiente, si denota por medio de ε la diferencia entre el cociente de diferenc y la derivada, obtiene

$$\lim_{\Delta x \to 0}\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si define ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, después ε se convierte en función continua de Δx. De esta manera para una función f derivable, puede escribir

$$\boxed{7} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \qquad \text{donde} \quad \varepsilon \to 0 \text{ a medida que } \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de las funciones derivables es lo que permite probar la regla de la cadena.

PRUEBA DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en a y $y = f(u)$ lo es en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x y Δu y Δy son los incrementos correspondientes en u y y, en seguida puede aplicar la ecuación 7 para escribir

$$\boxed{8} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De manera análoga

$$\boxed{9} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituye la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, obtiene

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

de modo que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 demuestra que $\Delta u \to 0$. De modo que tanto el $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ a medida que $\Delta x \to 0$. Debido a eso

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Esto prueba la regla de la cadena. □

3.4 EJERCICIOS

1–6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$

2. $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$

4. $y = \tan(\operatorname{sen} x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \operatorname{sen}(e^x)$

7–46 Halle la derivada de la función.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$

10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$

12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$

16. $y = 3\cos(n\theta)$

17. $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$

18. $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

20. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$

22. $y = e^{-5x} \cos 3x$

$\boxed{23.}$ $y = e^{x \cos x}$

24. $y = 10^{1-x^2}$

25. $F(z) = \sqrt{\dfrac{z - 1}{z + 1}}$

26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{e^u - e^u}{e^u + e^{-u}}$

29. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$

30. $G(y) = \left(\dfrac{y^2}{y + 1}\right)^5$

31. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$

32. $y = \tan^2(3\theta)$

33. $y = \sec^2 x + \tan^2 x$

34. $y = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$

36. $f(t) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2 + 4}}$

$\boxed{37.}$ $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$

38. $y = e^{k \tan \sqrt{x}}$

39. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$

40. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$

41. $f(t) = \operatorname{sen}^2(e^{\operatorname{sen}^2 t})$

42. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$

44. $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$

46. $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Hallar la primera y segunda derivadas de la función.

47. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

48. $y = xe^{cx}$

49. $y = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$

50. $y = e^{e^x}$

51–54 Encuentre una ecuación de la recta tangente de la curva en un punto dado.

51. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$

52. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 0)$

53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$

54. $y = x^2 e^{-x}$ $(1, 1/e)$

$\boxed{55.}$ (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente sobre la misma pantalla.

56. (a) La curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ se llama *curva nariz de bala*. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$.

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente sobre la misma pantalla.

57. (a) Si $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encuentre $f'(x)$.

(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

58. La función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$, $0 \leq x \leq \pi$, surge en aplicaciones de la síntesis de modulación de frecuencia (FM).

(a) Use una gráfica de f producida por un aparato graficador para trazar un boceto aproximado de la gráfica de f'.

(b) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión, junto con un dispositivo graficador, para graficar f'. Compare con su boceto del inciso (a).

$\boxed{59.}$ Encuentre todos los puntos en la gráfica de la función

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$$

en los cuales la recta tangente es horizontal.

60. Determine las coordenadas x de todos los puntos de la curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x$ en los cuales la tangente es horizontal.

$\boxed{61.}$ Si $F(x) = f(g(x))$ donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$. $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$ Hallar $F'(5)$.

62. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, hallar $h'(1)$.

63. Se da una tabla de valores de f, g, f' y g'

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.

(b) Si $H(x) = g(f(x))$, halle $H'(1)$.

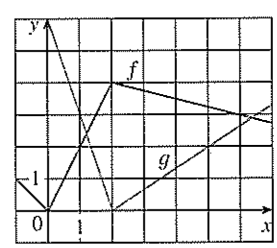
64. Sean f y g las funciones del ejercicio 63.

(a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.

(b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

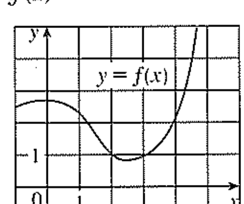
$\boxed{65.}$ Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. En caso contrario, explique por qué.

(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



66. Si f es la derivada cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x))$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de cada derivada.

(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



67. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

68. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

69. Sea $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$. Encuentre $r'(1)$.

70. Si g es una función derivable dos veces y $f(x) = xg(x^2)$, hallar f'' en términos de g, g', y g''.

71. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, hallar $F'(0)$.

72. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$, y $f'(3) = 6$, hallar $F'(1)$.

73. Demuestre que la función $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$.

74. ¿Para que valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?

75. Hallar la quincuagésima derivada de $y = \cos 2x$.

76. Encuentre la derivada 1000 de $f(x) = xe^{-x}$.

77. La ecuación expresa el desplazamiento de una partícula de una cuerda vibrante.

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(10\pi t)$$

En ella s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula después de t segundos.

78. Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula describe un *movimiento armónico simple*.
(a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.
(b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

79. Una estrella variable Cefeida tiene brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es la Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0 y su brillantez cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de la Delta Cefeida en el tiempo t, donde éste se mide en días, se ha modelado mediante la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

(a) Halle la relación de cambio de la brillantez después de t días.
(b) Encuentre, correcta hasta dos cifras decimales, la relación de aumento después de un día.

80. En el ejemplo 4 de la sección 1.3, obtuvo un modelo para la duración de la luz diurna (en horas) en Filadelfia en el t-ésimo día del año

$$L(t) = 12 + 2.8\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Aplique este modelo para comparar cómo aumentan las horas de luz diurna en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

81. El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t}\operatorname{sen} 2\pi t$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Halle la velocidad después que transcurren t segundos y dibuje las funciones de posición y de velocidad para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

82. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce según la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t, y a y k son constantes positivas. [En la sección 9.4 verá que ésta es una ecuación razonable para $p(t)$.]
(a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.
(b) Halle la rapidez de esparcimiento del rumor.
(c) Dibuje p para el caso en que $a = 10$, $k = 0.5$, con t medido en horas. Use la gráfica para estimar cuánto tiempo transcurrirá para que el 80% de la población escuche el rumor.

83. Una particula se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento $s(t)$, velocidad $v(t)$, y aceleración $a(t)$. Demuestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre los significados de los derivados dv/dt y dv/ds.

84. Se bombea aire dentro de un globo esférico para el clima. En cualquier tiempo t, el volumen del globos es $V(t)$ y su radio es $r(t)$.
(a) ¿qué representa las derivadas dV/dr y dV/dt.
(b) Expres dV/dt en terminos de dr/dt.

85. El *flash* (unidad de destello) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina cuando se lanza el destello. Los datos siguientes describen la carga que queda en el capacitor (en microcoulombs, μC) en el instante t (en segundos)

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

(a) Halle, usando una calculadora graficadora o una computadora, un modelo exponencial para la carga.
(b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (en microamperes, μA) que fluye del capacitor hacia el bulbo de la lámpara de destello. Con el resultado del inciso (a), estime la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare la respuesta con el resultado del ejemplo 2 de la sección 2.1.

86. En la tabla se da la población de estadounidenses, desde 1790 hasta 1860.

Año	Población	Año	Población
1790	3 929 000	1830	12 861 000
1800	5 308 000	1840	17 063 000
1810	7 240 000	1850	23 192 000
1820	9 639 000	1860	31 443 000

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para hacer coincidir una función exponencial con los datos. Dibuje los puntos correspondientes a los datos y el modelo exponencial. ¿Qué tan bien coinciden?
(b) Estime las proporción de incremento de la población en 1800 y 1850 promediando las pendientes de las rectas secantes.
(c) Use el modelo exponencial del inciso (a) para estimar las proporciones de crecimiento en 1800 y 1850. Compare estas estimaciones con las del inciso (b).
(d) Utilice el modelo exponencial para predecir la población en 1870. Compare con la población real de 38 558 000. ¿Puede explicar la discrepancia?

CAS **87.** Los sistemas algebraicos para computadora (CAS) tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta quizá no convenga, como consecuencia, pueden ser necesarios otros comandos para simplificarla.
(a) Use un CAS para hallar la derivada del ejemplo 5 y compárela con la respuesta en ese ejemplo. Enseguida, use el comando de simplificación y vuelva a comparar.
(b) Utilice un CAS para derivar la función del ejemplo 6. ¿Qué sucede si usa el comando de simplificación? ¿Qué ocurre si emplea el comando de factorización? ¿Cuál forma de la respuesta sería la mejor para localizar las tangentes horizontales?

CAS **88.** (a) Use un CAS para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplificar el resultado.
(b) ¿En dónde tiene la gráfica de f tangentes horizontales?
(c) Trace las gráficas de f y f' en la misma pantalla. ¿Son coherentes las gráficas con su respuesta al inciso (b)?

89. Mediante la regla de la cadena demuestre lo siguiente.
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

90. Aplique la regla de la cadena y la regla del producto para obtener otra demostración de la regla del cociente. [*Sugerencia:* escriba $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

91. (a) Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}^n x \cos nx) = n\,\text{sen}^{n-1}x \cos(n+1)x$$

(b) Plantee una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que es similar a la del inciso (a).

92. Suponga que $y = f(x)$ es una curva que siempre queda arriba del eje x y nunca tiene una tangente horizontal, donde f es derivable en todos los puntos. ¿Para qué valor de y la relación de cambio de y^5 con respecto a x es 80 veces la tasa de cambio de y con respecto a x?

93. Use la regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, después

$$\frac{d}{d\theta}(\text{sen}\,\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da una razón para la convención de que siempre se use el radián cuando se manejen funciones trigonométricas en el cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usara el grado.)

94. (a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y aplique la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Si $f(x) = |\text{sen}\,x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde f no es derivable?
(c) Si $g(x) = \text{sen}\,|x|$, halle $g'(x)$ y dibuje g y g'. ¿En dónde g no es derivable?

95. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, f y g son funciones derivables dos veces, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

96. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g tienen tercera derivada, hallar una formula por d^3y/dx^3 parecida a la que se proporciona en el ejercicio 95

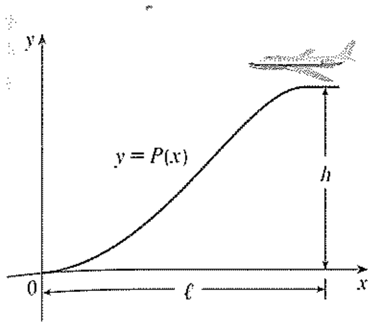
PROYECTO DE APLICACIÓN

¿DÓNDE DEBE UN PILOTO INICIAR UN DESCENSO?

En la figura se muestra una trayectoria de aproximación para el aterrizaje de un avión que satisface las condiciones siguientes:

(i) La altura de crucero es h, cuando se inicia el descenso a una distancia ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.

(ii) El piloto debe mantener una rapidez horizontal constante v a todo lo largo del descenso.



(iii) El valor absoluto de la aceleración vertical no debe sobrepasar una constante k (la cual es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad).

1. Encuentre un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga la condición (i), imponiendo condiciones adecuadas sobre $P(x)$ y $P'(x)$ en el inicio del descenso y el contacto con la pista.
2. Use las condiciones (ii) y (iii) para demostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponga que una aerolínea comercial decide no permitir que la aceleración vertical de un avión sea mayor que $k = 860$ mi/h^2. Si la altitud de crucero de un avión es de 35 000 pies y la rapidez de 300 mi/h, ¿a qué distancia del aeropuerto debe el piloto iniciar el descenso?
4. Trace la gráfica de la trayectoria de aproximación, si se satisfacen las condiciones que se enuncian en el problema 3.

3.5 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

La mayor parte de las funciones vistas pueden describirse expresando una variable explícitamente en términos de otra variable; por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o bien} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

o bien

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

En algunos casos, es posible resolver una ecuación de ese tipo para y como una función explícita (o varias funciones) de x. Por ejemplo, si resuelve la ecuación 1 para y, obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, de modo que dos de las funciones determinadas por la ecuación implícita 1 son $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Las gráficas de f y g son los semicírculos superior e inferior del círculo $x^2 + y^2 = 25$. (Véase la figura 1.)

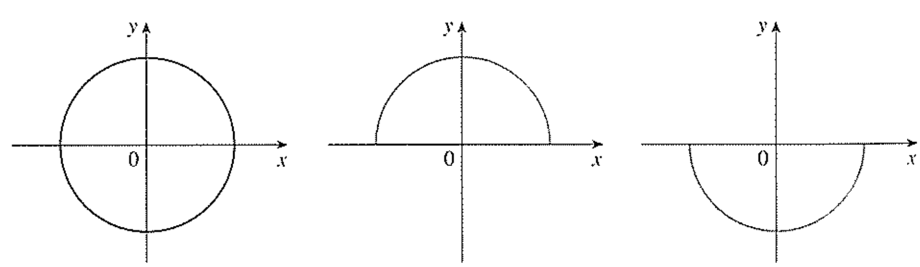


FIGURA 1 (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es fácil resolver a mano la ecuación 2 para y explícitamente como función x. (Con un sistema algebraico para computadora no hay dificultad, pero las expresiones que se obtienen son muy complicadas.) Pero (2) es la ecuación de una curva llamada **folio** **Descartes**, que se ilustra en la figura 2 y, de manera implícita, define y como varias fu ciones de x. En la figura 3 se muestran las gráficas de esas tres funciones. Cuando se di que f es una función definida implícitamente por la ecuación 2, se da a entender que ecuación

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

es verdadera para todos los valores de x en el dominio de f.

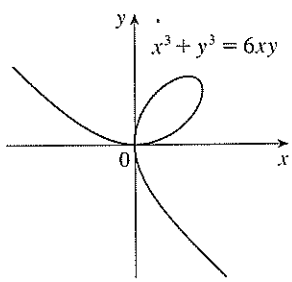


FIGURA 2 Folio de Descartes

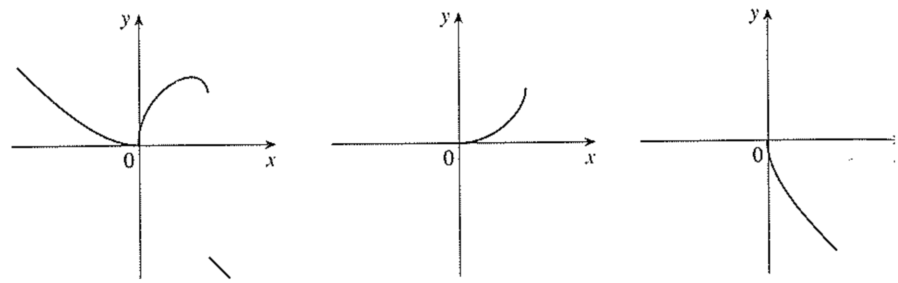


FIGURA 3 Gráficas de tres funciones definidas por el folio de Descartes

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x con fin de hallar la derivada de y. En lugar de ello, aplica el método de **derivación imp cita**. Éste consiste en derivar ambos miembros de la ecuación con respecto a x y continuación, resolver la ecuación resultante para y'. En los ejemplos y ejercicios esta sección, siempre se supone que la ecuación dada determina y implícitamente mo una función derivable de x, de modo que puede aplicarse el método de derivaci implícita.

EJEMPLO 1

(a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encuentre la ecuación de la tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$, en el punto $(3, 4)$.

SOLUCIÓN 1

(a) Derive ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recuerde que y es una función de x, aplique la regla de la cadena y tendrá

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto $$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora, se resuelve esta ecuación para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) En el punto $(3, 4)$, tiene $x = 3$ y $y = 4$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Por lo tanto, una ecuación de la tangente al círculo en $(3, 4)$ es

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUCIÓN 2

(b) Al resolver la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. El punto $(3, 4)$ se encuentra en el semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$ y, por consiguiente, considere la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Si al aplicar la regla de la cadena deriva f, tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 se ilustra que incluso cuando es posible resolver una ecuación explícita para y en términos de x puede ser más fácil aplicar la derivación implícita

De modo que $\qquad f'(3) = -\dfrac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\dfrac{3}{4}$

y, como en la solución 1, la ecuación de la tangente es $3x + 4y = 25$. □

NOTA 1 La expresión $dy/dx = -x/y$ en la solución 1 da la derivada en términos tanto de x como de y. Esto es correcto sin importar cuál función y queda determinada por la ecuación dada. Por ejemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

en tanto que, para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

EJEMPLO 2

(a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

(b) Halle la tangente al folio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$, en el punto $(3, 3)$.

(c) ¿En cuáles puntos de la curva se tiene que la recta tangente es horizontal o vertical?

SOLUCIÓN

(a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ con respecto a x, considerando y como función de x, y usando la regla de la cadena en el término y^3 y la regla del producto en el término $6xy$, obtiene

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

o bien $\qquad x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$

Ahora resuelva para y':
$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$
$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$
$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

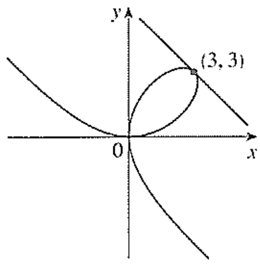


FIGURA 4

(b) Cuando $x = y = 3$,
$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$
un vistazo a la figura 4 confirma que éste es un valor razonable para la pendiente en $(3, 3)$ De este modo, una ecuación de la recta tangente al folio en $(3, 3)$ es
$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{o bien} \qquad x + y = 6$$

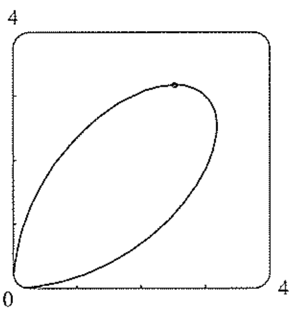


FIGURA 5

(c) La recta tangente es horizontal si $y' = 0$. Si utiliza la expresión para y' del inciso (a), $y' = 0$ cuando $2y - x^2 = 0$. (siempre que $y^2 - 2x \neq 0$). Al sustituir $y = \frac{1}{2}x^2$ en la ecuación de la curva, obtiene
$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$
lo cual se simplifica para quedar $x^6 = 16x^3$. De modo que $x \neq 0$, en el primer cuadrant o bien, $x^3 = 16$. Si $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, por lo tanto $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Por esto, la tangen te es horizontal en $(0, 0)$ y en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$, lo cual es aproximadamente $(2.5198, 3.1748)$. A estudiar la figura 5, es claro que la respuesta es razonable.

NOTA 2 Existe una fórmula para las tres raíces de una ecuación cúbica, que es seme jante a la fórmula cuadrática pero mucho más complicada. Si usa esta fórmula (o un sis tema de cómputo algebraico) para resolver la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$, para y en término de x, obtiene tres funciones determinadas por la ecuación:
$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$
y
$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

▨ El matemático noruego Niels Abel probó en 1824 que no se puede dar una fórmula general para las raíces de una ecuación de quinto grado. Tiempo después, el matemático francés Evariste Galois probó que es imposible hallar una fórmula general para las raíces de una ecuación de n-ésimo grado (en términos de operaciones algebraicas sobre los coeficientes), si n es cualquier entero mayor que 4.

(Éstas son las tres funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3.) Usted pued ver que el método de la derivación implícita ahorra una cantidad enorme de trabajo, e casos como éste. Es más, la derivación implícita funciona con igual facilidad para fun ciones como
$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$
las cuales son *imposibles* de resolver para y en términos de x.

EJEMPLO 3 Encuentre y' si $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUCIÓN Si deriva implícitamente con respecto a x y recuerda que y es una función de x, obtiene
$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

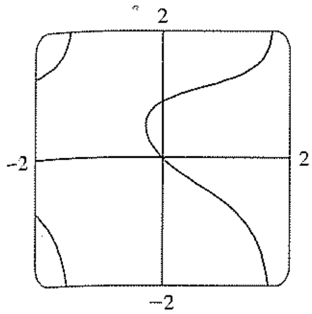


FIGURA 6

(Note que en el lado izquierdo aplica la regla de la cadena y, en el derecho, la regla de la cadena y la del producto.) Si agrupa los términos que contienen y', obtiene

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Por lo que
$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

En la figura 6 dibujada con el comando de construir gráficas en forma implícita de un sistema de cálculo algebraico, se muestra parte de la curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como comprobación del cálculo, advierta que $y' = -1$, cuando $x = y = 0$ y en la gráfica parece que la pendiente es alrededor de -1 en el origen. □

El siguiente ejemplo muestra cómo encontrar la segunda derivada de una función si es definida implícita.

EJEMPLO 4 Hallar y'' sí $x^4 + y^4) = 16$.

SOLUCIÓN Derivando la ecuación de manera implicita con respecto a x, obtiene

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Resolviendo para y'

$$\boxed{3} \qquad y' = -\frac{x^3}{y^2}$$

■ La figura 7 muestra la gráfica de la curva $x^4 + y^4 = 16$ del ejemplo y observe que su versión del círculo se extiende y se achata $x^2 + y^2 = 4$. Por esta razón algunas veces se le llama círculo grueso, inicia muy escarpador a la izquierda pero rapidamente se hace muy plano. Se puede ver de la expresión.

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

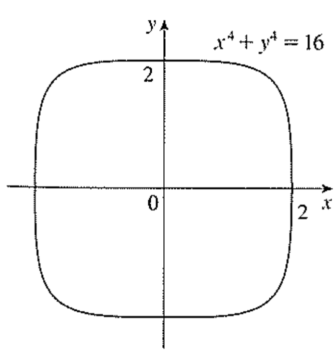


FIGURA 7

Para hallar y'' derive esta expresión para y' aplicando la regla del cociente recordando que y es una función de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3(d/dx)(x^3) - x^3(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$
$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Si ahora sustituye la ecuación 3 dentro de esta expresión, obtiene

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^2y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$
$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Pero el valor de x y y debe satisfacer la ecuación original $x^4 + y^4 = 16$. De esa manera la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\frac{x^2}{y^7}$$ □

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas inversas se repasan en la sección 1.6. En la sección 2.5 analizó su continuidad y en la sección 2.6 sus asíntotas. Aquí se usa la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, porque se supone que estas funciones son derivables. [En efecto, si f es una función derivable uno a uno, se pued demostrar que su función inversa f^{-1} también es derivable, excepto donde sus tangente son verticales. Esto es posible porque la gráfica de una función derivable no tiene vértices ı bucles y, de este modo, si la refleja con respecto a $y = x$, la gráfica de su función invers tampoco tiene vértices ni bucles.]

Recuerde la definición de la función arco seno:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \quad \text{significa} \quad \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Al derivar implícitamente sen $y = x$ con respecto a x, obtiene

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora $\cos y \geqslant 0$, debido a que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, de modo que

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

▪ El mismo método puede utilizarse para hallar una fórmula para la derivada de *cualquier* función inversa. Véase el ejercicio 67.

De manera que $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

▪ En la figura 8 se muestra la gráfica de $f(x) = \tan^{-1}x$ y su derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Advierta que f es creciente y $f'(x)$ siempre es positiva. El hecho de que $\tan^{-1}x \to \pm\pi/2$ como $x \to \pm\infty$ se refleja en el hecho de que $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.

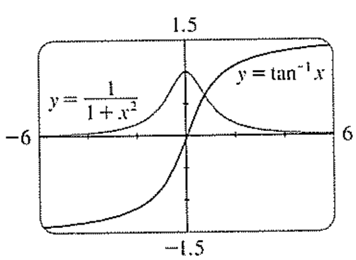


FIGURA 8

La fórmula para la derivada de la función arco tangente se obtiene de manera semeja te. Si $y = \tan^{-1} x$, en tal caso $\tan y = x$. Si se deriva esta última ecuación implícitamer con respecto a x, tiene

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

V EJEMPLO 5 Derive (a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1}x}$ y (b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$

$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1 - x^2}}$$

▪ Recuerde que $\arctan x$ es una notación alterna para $\tan^{-1}x$.

(b) $$f'(x) = x\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \arctan\sqrt{x}$$

Las funciones trigonométricas inversas que se generan con mayor frecuencia son las que acaba de analizar. Las derivadas de las cuatro restantes se presentan en la tabla siguiente. Las demostraciones de las fórmulas se dejan como ejercicios.

Las fórmulas de las derivadas de $\csc^{-1}x$ y $\sec^{-1}x$ dependen de las definiciones que se aplican para estas funciones. Véase ejercicio 58.

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

3.5 EJERCICIOS

1–4

(a) Encuentre y' por derivación implícita.

(b) Resuelva en forma explícita la ecuación para y y derive para obtener y' en términos de x.

(c) Compruebe que sean coherentes sus soluciones a los incisos (a) y (b) sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ **4.** $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5–20 Encuentre dy/dx por derivación implícita.

5. $x^2 + y^2 = 1$ **6.** $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$ **8.** $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$ **10.** $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $x^2y^2 + x\operatorname{sen} y = 4$ **12.** $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $4\cos x \operatorname{sen} y = 1$ **14.** $y\operatorname{sen}(x^2) = x\operatorname{sen}(y^2)$

15. $e^{x^2y} = x + y$ **16.** $\sqrt{x+y} = 1 + x^2y^2$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$ **18.** $\tan(x-y) = \dfrac{y}{1+x^2}$

19. $e^y\cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$ **20.** $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

21. Si $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ y $f(1) = 2$, encuentre $f'(1)$.

22. Si $g(x) + x\operatorname{sen} g(x) = x^2$, determine $g'(0)$.

23–24 Considere a y como la variable independiente y a x como la variable dependiente, y aplique la derivación implícita para calcular dx/dy.

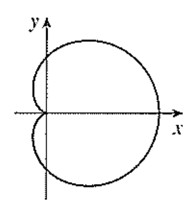
23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **24.** $y\sec x = x\tan y$

25–30 Utilice la derivación implícita para encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

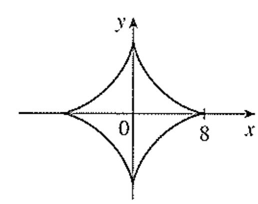
25. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

26. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbola)

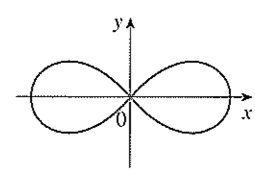
27. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$(0, \frac{1}{2})$
(cardioide)



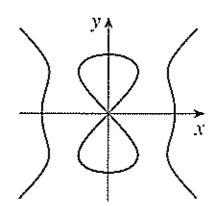
28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$(-3\sqrt{3}, 1)$
(astroide)



29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



30. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva del diablo)



31. (a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se llama **kampila de Eudoxo**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 2)$.

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en una pantalla común. (Si su aparato graficador puede trazar las gráficas de curvas definidas implícitamente, después utilice esa capacidad. Si no es así, puede dibujar esta curva trazando sus mitades superior e inferior por separado.)

32. (a) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama **cúbica de Tschirnhausen**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1, -2)$.
(b) ¿En cuáles puntos esta curva tiene una tangente horizontal?
(c) Ilustre los incisos (a) y (b) dibujando la curva y las rectas tangentes en una pantalla común.

33–36 Hallar por derivación implícita

33. $9x^2 + y^2 = 9$ **34.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

35. $x^3 + y^3 = 1$ **36.** $x^4 + y^4 = a^4$

CAS **37.** Se pueden crear formas caprichosas con las capacidades de construir gráficas en forma implícita de los sistemas algebraicos para computadora (sistema de computo algebraico).
(a) Trace la gráfica de la curva con ecuación

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

¿En cuántos puntos esta curva tiene tangentes horizontales? Estime las coordenadas x de estos puntos.
(b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(0, 1)$ y $(0, 2)$.
(c) Halle las coordenadas x exactas de los puntos mencionados en el inciso (a).
(d) Cree curvas incluso más caprichosas modificando la ecuación del inciso (a).

CAS **38.** (a) La curva con ecuación

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

se ha ligado a un carretón que rebota. Utilice un sistema de computo algebraico para dibujarla y descubra por qué.
(b) ¿En cuántos puntos esta curva tiene tangentes horizontales? Encuentre las coordenadas x de estos puntos.

39. Halle los puntos de la lemniscata del ejercicio 29 donde la tangente sea horizontal.

40. Demuestre por derivación implícita que la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

41. Formule una ecuación para la tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0).

42 Demuestre que la suma de las intersecciones x y y de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ es igual a c.

43. Mediante la derivación implícita demuestre que cualquier tangente en un punto P a una circunferencia con centro O es perpendicular al radio OP.

44. La regla de la potencia se puede demostrar por medio de la derivación implícita para el caso donde n es un número racional, $n = p/q$, y se presupone que $y = f(x) = x^n$ es una función derivable. Si $y = x^{p/q}$, entonces $y^q = x^p$. Mediante la derivación implícita demuestre que

$$y' = \frac{p}{q}x^{(p/q)-1}$$

45–54 Halle la derivada de la función. Simplifique donde se pueda.

45. $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$ **46.** $y = \sqrt{\tan^{-1}x}$

47. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$ **48.** $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\sec^{-1}x$

49. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\arccos x$ **50.** $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

51. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$ **52.** $F(\theta) = \arcsin\sqrt{\text{sen}\,\theta}$

53. $y = \cos^{-1}(e^{2x})$ **54.** $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

55–56 Encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

55. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\text{arcsen}\,x$ **56.** $f(x) = \arctan(x^2 - x)$

---

57. Compruebe las fórmulas $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ y $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$ por medio del mismo método.

58. (a) Una manera de definir $\sec^{-1}x$ es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leqslant y < \pi/2$, o bien, $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Demuestre que con esta definición,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Otro modo de definir $\sec^{-1}x$ que se utiliza a veces es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Demuestre que con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

59–62 Dos curvas son **ortogonales** si sus líneas tagentes son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las familias dadas de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí, es decir, cualquier curva en una familia es ortogonal a cualquier curva en la otra familia. Dibuje ambas familias de curvas usando los mismos ejes de coordenadas.

59. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

60. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

61. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

62. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

---

63. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa una "elipse girada"; es decir, una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos en que esta elipse cruza el eje x y demuestre que las rectas tangentes en estos puntos son paralelas.

64. (a) ¿Dónde la recta normal a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$, en el punto $(-1, 1)$ cruza la elipse por segunda vez?

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la elipse y la recta normal.

65. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

66. Halle las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasen por el punto $(12, 3)$.

67. (a) Suponga que f es una función derivable uno a uno y que su función inversa f^{-1} también es derivable. Utilice la derivación implícita para demostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que el denominador no sea 0.

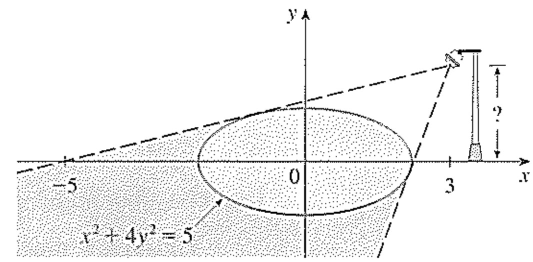
(b) Si $f(4) = 5$ y $f'(4) = \frac{2}{3}$, encuentre $(f^{-1})'(5)$.

68. (a) Demuestre que $f(x) = 2x + \cos x$ es uno a uno.

(b) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(1)$?

(c) Use la fórmula del ejercicio 67(a) para hallar $(f^{-1})'(1)$.

69. En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿qué tan arriba del eje x está colocada la lámpara?



3.6 DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

En esta sección se usa la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ y, en particular, de la función logaritmo natural $y = \ln x$. [Suponga que las funciones logarítmicas son derivables; ciertamente esto es plausible a partir de sus gráficas (véase la figura 12 de la sección 1.6).]

1

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Por lo tanto

$$a^y = x$$

La fórmula 3.4.5 expresa que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Si se deriva esta ecuación de manera implícita con respecto a x, mediante la fórmula (3.45) obtiene

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

y por consiguiente
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$ □

Si en la fórmula (1) pone $a = e$, en tal caso el factor $\ln a$ en el lado derecho se convierte en $\ln e = 1$ y obtiene la fórmula para la derivada de la función logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

2

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Si se comparan las fórmulas (1) y (2), aparece una de las razones principales por la que se usan los logaritmos naturales (logaritmos con base e) en el cálculo. La fórmula de derivación es más sencilla cuando $a = e$, porque $\ln e = 1$.

EJEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para aplicar la regla de la cadena, se hace $u = x^3 + 1$. Por lo tanto $y = \ln u$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3+1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3+1}$$

En general, si combina la fórmula (2) con la regla de la cadena como en el ejemplo 1 obtiene

3 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Al aplicar (3), tiene

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \cot x$$

EJEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN En esta ocasión el logaritmo es la función interior, de modo que la regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

EJEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Si se usa la fórmula 1 con $a = 10$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}(2 + \operatorname{sen} x) = \frac{1}{(2+\operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2 + \operatorname{sen} x)$$
$$= \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ln 10}$$

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función f del ejemplo 5, junto con la gráfica de su derivada. Proporciona una comprobación visual del cálculo. Advierta que $f'(x)$ es grande negativa cuando f está decreciendo con rapidez.

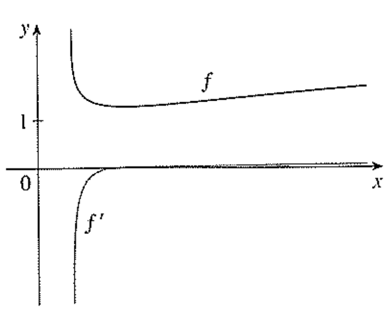


FIGURA 1

EJEMPLO 5 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$$
$$= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2}$$
$$= \frac{x - 2 - \frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$$

SOLUCIÓN 2 Si en primer lugar simplifica la función dada aplicando las leyes de los logaritmos, entonces la derivación se vuelve más fácil:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

(Esta respuesta se puede dejar como está pero, si usara un denominador común, vería que da la misma respuesta que en la solución 1.) □

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función $f(x) = \ln|x|$ del ejemplo 6 y la de su derivada $f'(x) = 1/x$. Note que cuando x es pequeño, la gráfica de $y = \ln|x|$ está inclinada y, por lo consiguiente, $f'(x)$ es grande (positiva o negativa).

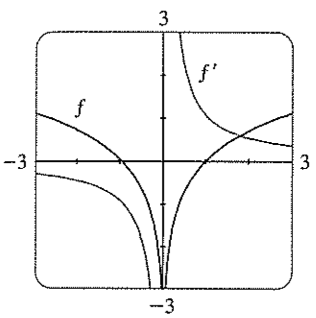


FIGURA 2

EJEMPLO 6 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se concluye que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por esto, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$. □

Vale la pena recordar el resultado del ejemplo 6:

4 $$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}}$$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias se puede simplificar tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente con respecto a x, resulta

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Al resolver para dy/dx obtiene

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Como tiene una expresión explícita para y, puede sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Si no hubiera utilizado la derivación logarítmica en el ejemplo 7, habría tenido que aplicar tanto la regla del cociente como la regla del producto. El cálculo resultante habría sido horrendo.

PASOS EN LA DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

1. Tome logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilice las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derive implícitamente con respecto a x.
3. Resuelva la ecuación resultante para y'.

Si $f(x) < 0$ para algunos valores de x, después $\ln f(x)$ no está definido, pero puede escribir $|y| = |f(x)|$ y aplicar la ecuación (4). Se ilustra este procedimiento probando la versión general de la regla de la potencia, según se prometió en la sección 3.1.

REGLA DE LA POTENCIA Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, en seguida

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$ y aplique la derivación logarítmica:

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Si $x = 0$ puede demostrar que $f'(0) = 0$, para $n > 1$, de modo directo a partir de la definición de derivada.

Por lo tanto,
$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

De donde,
$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Debe distinguir con cuidado la regla de la potencia $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, donde la base es variable y el exponente constante de la regla para derivar funciones exponenciales $[(a^x)' = a^x \ln a]$, donde la base es constante y el exponente es variable.

En general, se tienen cuatro casos para exponentes y bases

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0 \qquad$ (a y b son constantes)

2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

4. Para hallar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, se puede aplicar la derivación logarítmica, como en el ejemplo que sigue:

EJEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$

SOLUCIÓN 1 Con la derivación logarítmica tiene

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

La figura 3 ilustra el ejemplo 8 mostrando las gráficas de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ y su derivada.

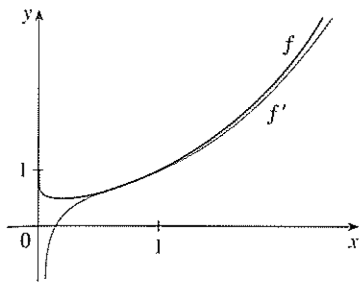


FIGURA 3

SOLUCIÓN 2 Otro método es escribir $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$

□

EL NÚMERO e COMO LÍMITE

Se ha demostrado que si $f(x) = \ln x$, después $f'(x) = 1/x$. Por esto, $f'(1) = 1$. Aplique ahora esto para expresar el número e como un límite.

A partir de la definición de derivada como un límite, tiene

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1 + x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1 + x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1 + x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1 + x)^{1/x}$$

Ya que $f'(1) = 1$, tiene

$$\lim_{x\to 0}\ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

Luego, por el teorema 2.5.8 y la continuidad de la función exponencial, tiene

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}$$

5 $$\boxed{e = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x}}$$

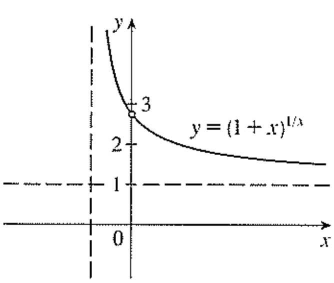


FIGURA 4

x	$(1 + x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

En la figura 4 se ilustra la fórmula (5) mediante la gráfica de la función $y = (1 + x)^{1/x}$ y una tabla de valores para valores pequeños de x. Con esto se ilustra el hecho de que es correcto hasta siete cifras decimales

$$e \approx 2.7182818$$

Si hace $n = 1/x$ en la fórmula (5), en seguida $n \longrightarrow \infty$ cuando $x \longrightarrow 0^+$ y, por consiguiente una expresión alternativa para e es

$$\boxed{6} \qquad \boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

3.6 EJERCICIOS

1. Explique por qué en cálculo se usa con mucha más frecuencia la función logarítmica natural, $y = \ln x$, que las otras funciones logarítmicas, $y = \log_a x$.

2–22 Derive la función.

2. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$
3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$
4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$
5. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$
6. $f(x) = \log_5(xe^x)$
7. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$
8. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$
9. $f(x) = \operatorname{sen} x \ln(5x)$
10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$
11. $F(t) = \ln \dfrac{(2t + 1)^3}{(3t - 1)^4}$
12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
13. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$
14. $F(y) = y \ln(1 + e^y)$
15. $f(u) = \dfrac{\ln u}{1 + \ln(2u)}$
16. $y = \dfrac{1}{\ln x}$
17. $y = \ln|2 - x - 5x^2|$
18. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$
19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
20. $y = [\ln(1 + e^x)]^2$
21. $x = 2x\log_{10}\sqrt{x}$
22. $y = \log_2(e^{-x} \cos \pi x)$

23–26 Encuentre y' y y''.

23. $y = x^2 \ln(2x)$
24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
25. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}$
26. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

27–30 Derive f y encuentre su dominio.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$
28. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$
29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$
30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Si $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, determine $f'(1)$.

32. Si $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, determine $f'(0)$.

33–34 Determine una ecuación de la tangente a la curva en un punto dado.

33. $y = \ln(xe^{x^2})$, $(1,1)$
34. $y = \ln(x^3 - 7)$, $(2, 0)$

35. Si $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

36. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = (\ln x)/x$, en los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1/e)$. Ilustre lo anterior dibujando la curva y sus rectas tangentes.

37–48 Aplique la derivación logarítmica para hallar la derivada de la función.

37. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$
38. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$
39. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \tan^4 x}{(x^2 + 1)^2}$
40. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$
41. $y = x^x$
42. $y = x^{\cos x}$
43. $y = x^{\operatorname{sen} x}$
44. $y = \sqrt{x}^x$
45. $y = (\cos x)^x$
46. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$
47. $y = (\tan x)^{1/x}$
48. $y = (\ln x)^{\cos x}$

49. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

50. Halle y' si $x^y = y^x$.

51. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \ln(x - 1)$.

52. Encuentre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

53. Use la definición de derivada para probar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

52. Demuestre que $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ para cualquier $x > 0$.

3.7 RAZONES DE CAMBIO EN LAS CIENCIAS NATURALES Y SOCIALES

Sabe que si $y = f(x)$, en seguida la derivada dy/dx se puede interpretar como la razón de cambio de y con respecto a x. En esta sección se analizan algunas de las aplicaciones de esta idea a la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias.

Con base en la sección 2.7, recuerde la idea básica que se encuentra detrás de las razones de cambio. Si x cambia de x_1 a x_2, por lo tanto el cambio en x es

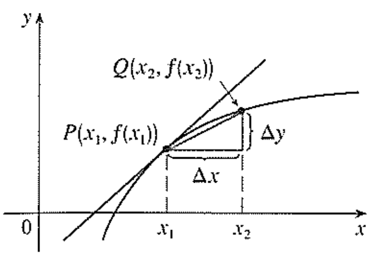
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



m_{PQ} = relación promedio de cambio
$m = f'(x_1)$ = relación de cambio instantánea

FIGURA 1

es la **razón promedio de cambio de y con respecto a x** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ de la figura 1. Su límite, cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, la cual, por lo tanto, puede interpretarse como la **razón de cambio instantánea de y con respecto a x**, o sea, la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Si se usa la notación de Leibniz, escriba el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio. (Como se analizó en la sección 2.7, las unidades de dy/dx son las unidades correspondientes a y divididas entre las de x.) Vea ahora algunas de estas interpretaciones en las ciencias naturales y sociales.

FÍSICA

Si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, por lo tanto $\Delta s/\Delta t$ representa la velocidad promedio en un periodo Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo). La razón de cambio instantánea de la velocidad con respecto al tiempo es la **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Esto se vio en las secciones 2.7 y 2.8; pero ahora que conoce las fórmulas de derivación, es capaz de resolver los problemas de velocidades con mayor facilidad.

EJEMPLO 1 La ecuación siguiente da la posición de una partícula

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.
(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
(c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
(d) ¿Cuándo se mueve hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
(e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
(f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.

(g) Hallar la aceleración en el tiempo t y después de 4 s.
(h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
(i) ¿Cuándo incrementa se rapidez la partícula? ¿cuándo la disminuye.

SOLUCIÓN
(a) La función velocidad es la derivada de la función de posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. Por lo tanto, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.
(d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$, es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando los dos son negativos ($t < 1$). Así, la partícula se mueve en dirección positiva en los periodos $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.
(e) En la figura 2, se esquematiza el movimiento de la partícula hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta (el eje s), aplicando la información del inciso (d).
(f) En virtud de los incisos (d) y (e), necesita calcular las distancias recorridas durante los periodos [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

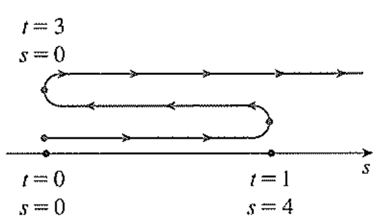


FIGURA 2

De $t = 1$ a $t = 3$, la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$, la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m. □
(g) La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$
$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/}s^2$$

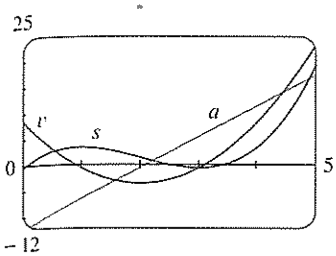


FIGURA 3

(h) La figura 3 escribe las gráficas de s, v y a.

(i) El incremento de la rapidez de la partícula cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son negativas). En otras palabras, el aumento en la rapidez cuando la velocidad y la aceleración tiene el mismo signo. (La partícula es empujada en la misma dirección en que se está moviendo.) De la figura 3 se ve que ésta sucede cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula disminuye su rapidez cuando v y a tienen signos opuestos, es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 4 resume el movimiento de la partícula

TEC En Module 3.7 puede ver una animación de la figura 4 con una expresión para s que selecione.

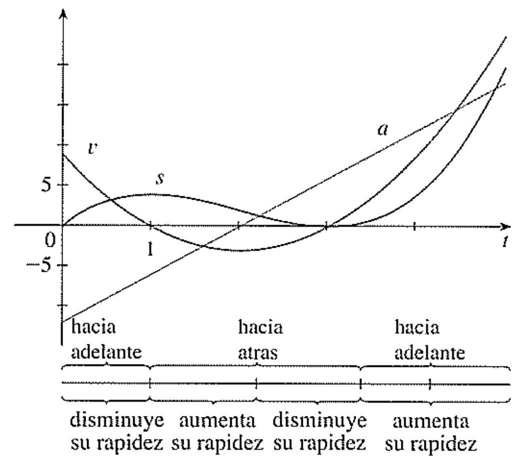


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Si una varilla o un trozo de alambre son homogéneos, por lo tanto su densidad lineal es uniforme y se define como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramos por cada metro. Pero suponga que la varilla no es homogénea sino que su masa medida desde su extremo izquierdo hasta un punto x es $m = f(x)$, como se muestra en la figura 5.

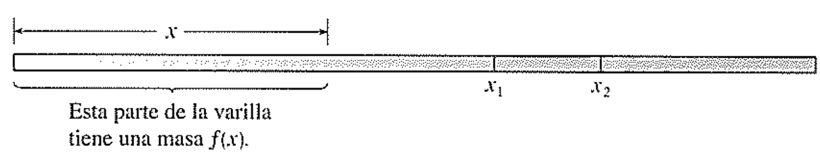


FIGURA 5

La masa de la parte de la varilla que se encuentra entre $x = x_1$ y $x = x_2$ se expresa con $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, de modo que la densidad promedio de esa sección es

$$\text{densidad promedio} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si ahora hace que $\Delta x \to 0$ (es decir $x_2 \to x_1$), calcula la densidad promedio sobre un intervalo cada vez más pequeño. La **densidad lineal** ρ en x_1 es el límite de estas densidades promedio cuando $\Delta x \to 0$; es decir, la densidad lineal es la razón de cambio de la masa con respecto a la longitud. En forma simbólica,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

De este modo, la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa con respecto a la longitud.

Por ejemplo, si $m = f(x) = \sqrt{x}$, en donde x se mide en metros y m en kilogramos, después la densidad promedio de la parte de la varilla dada por $1 \leqslant x \leqslant 1.2$ es

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48 \text{ kg/m}$$

en tanto que la densidad en $x = 1$ es

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50 \text{ kg/m}$$

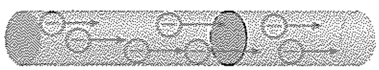


FIGURA 6

EJEMPLO 3 Hay corriente siempre que las cargas eléctricas se mueven. En la figura 6 se muestra parte de un alambre con electrones que cruzan una superficie plana sombreada. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, en tal caso la corriente promedio durante este intervalo se define como

$$\text{corriente promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Si toma el límite de esta corriente promedio sobre lapsos más y más pequeños, obtiene lo que se llama **corriente** I en un instante dado t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Por esto, la corriente es la rapidez con que la carga fluye por una superficie. Se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (a menudo coulombs por segundo, llamados amperes).

La velocidad, la densidad y la corriente no son las únicas razones de cambio de importancia para la física. Otras incluyen la potencia (la rapidez a la cual se consume trabajo), la relación de flujo de calor, el gradiente de temperatura (la razón de cambio de la temperatura con respecto a la posición) y la razón de decaimiento de una sustancia radiactiva en la física nuclear.

QUÍMICA

EJEMPLO 4 El resultado de una reacción química en la formación de una o más sustancias (llamadas *productos*) a partir de uno o más materiales (*reactivos*). Por ejemplo, la "ecuación"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno forman dos moléculas de agua. Considere la reacción

$$A + B \rightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles ($1 \text{ mol} = 6.022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro y se denota con [A]. La concentración varía durante una reacción, de modo que [A], [B] y [C] son funciones del tiempo (t). La velocidad de reacción promedio del producto C en un intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ es

$$\frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{[\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pero los químicos tienen más interés en la **velocidad instantánea de reacción**, la cual se obtiene tomando el límite de la velocidad promedio de reacción conforme el intervalo Δt tiende a 0:

$$\text{velocidad de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}$$

Como la concentración del producto aumenta a medida que la reacción avanza, la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$ será positiva, y así la velocidad de reacción de C es positiva. Sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción; por eso, para que las velocidades de reacción de A y B sean números positivos, ponga signos negativos delante de las derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ y $d[\mathrm{B}]/dt$. Dado que [A] y [B] disminuyen con la misma rapidez que [C] crece, tiene

$$\text{velocidad de reacción} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

De modo más general, resulta que para una reacción de la forma

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \rightarrow c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

tiene

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

La velocidad de reacción se puede determinar a partir de datos y con métodos gráficos. En algunos casos existen fórmulas explícitas para las concentraciones como funciones del tiempo, que permiten calcular la velocidad de reacción (véase el ejercicio 22). □

EJEMPLO 5 Una de las cantidades de interés en termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a una temperatura constante, en tal caso su volumen V depende de su presión P. Puede considerar la razón de cambio del volumen con respecto a la presión: a saber, la derivada dV/dP. Cuando P crece, V decrece, de modo que $dV/dP < 0$. La **compresibilidad** se define al introducir un signo menos y dividir esta derivada entre el volumen V:

$$\text{compresibilidad isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

En estos términos, β mide cuán rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante.

Por ejemplo, se encontró que la siguiente ecuación relaciona el volumen V (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25°C se encontró que está relacionada con la presión P (en kilopascales) mediante la ecuación.

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La razón de cambio de V con respecto a P, cuando $P = 50$ kPa, es

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5.3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5.3}{2500} = -0.00212 \text{ m}^3/\text{kPa}$$

La compresibilidad a esa presión es

$$\beta = -\left.\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0.00212}{\frac{5.3}{50}} = 0.02 \text{ (m}^3/\text{kPa)/m}^3 \qquad \square$$

BIOLOGÍA

EJEMPLO 6 Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población de animales o plantas en el tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, de modo que la rapidez de crecimiento promedio durante el periodo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\text{rapidez de crecimiento promedio} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **rapidez instantánea de crecimiento** se obtiene a partir de esta rapidez promedio al hacer que el periodo Δt tienda a 0:

$$\text{rapidez de crecimiento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

En términos estrictos, esto no es muy exacto porque la gráfica real de una función de población $n = f(t)$ sería una función escalón que es discontinua siempre que ocurre un nacimiento o una muerte y, por lo tanto, no es derivable. Sin embargo, para una población grande de animales o plantas, es posible reemplazar la gráfica con una curva de aproximación uniforme como en la figura 7.

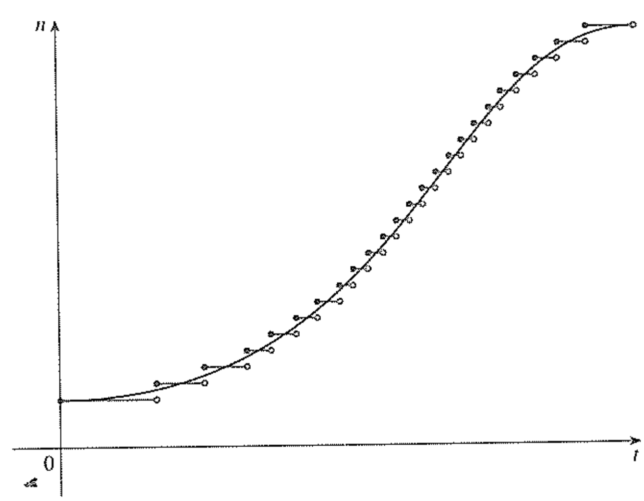


FIGURA 7
Una curva uniforme que se hace con una aproximación a una función de crecimiento

Para ser más específicos, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, en consecuencia

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3n_0$$

y, en general,

$$f(t) = 2^t n_0$$

La función de población es $n = n_0 2^t$.

En la sección 3.4 se demostró que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Por eso, la rapidez de crecimiento de la población de bacterias, en el tiempo t, es

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por ejemplo, suponga que inicia con una población inicial de $n_0 = 100$ bacterias. En consecuencia, la rapidez de crecimiento después de 4 horas es

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$$

Esto significa que, después de 4 horas, la población de bacterias crece en una cantidad de casi 1 109 bacterias por hora. □

EJEMPLO 7 Cuando considera el flujo de la sangre por un vaso sanguíneo, como una vena o una arteria, puede tomar la forma de este vaso como el de un tubo cilíndrico con radio R y longitud l, como se ilustra en la figura 6.

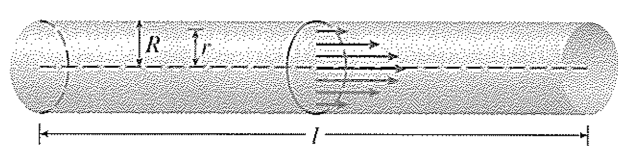


FIGURA 8
Flujo de sangre dentro de una arteria

Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad v de la sangre es máxima a lo largo del eje central del propio tubo y decrece conforme aumenta la distancia r al eje, hasta que v se vuelve 0 en la pared. La relación entre v y r está dada por la **ley del flujo laminar** descubierta por el físico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille en 1840. En ésta se afirma que

$$\boxed{1} \qquad v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia en la presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, en tal caso v es función de r, con dominio $[0, R]$.

Para información más detalladas, véase W. Nichols y M. O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 4th ed. (Nueva York: Oxford University Press, 1998).

La razón de cambio promedio de la velocidad, al moverse de $r = r_1$ hacia afuera, hasta $r = r_2$ es

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

y si hace que $\Delta r \to 0$, obtiene el **gradiente de velocidad**, es decir, la razón de cambio instantánea de la velocidad con respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Al aplicar la ecuación (1) obtiene

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para una de las arterias humanas más pequeñas, puede tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm y $P = 4000$ dinas/cm^2, lo cual da

$$\begin{aligned} v &= \frac{4000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2) \\ &\approx 1.85 \times 10^4(6.4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

En $r = 0.002$ cm la sangre fluye a una rapidez de

$$\begin{aligned} v(0.002) &\approx 1.85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1.11 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

y el gradiente de velocidad en ese punto es

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$$

Para tener una idea de lo que esto significa, cambie las unidades de centímetros a micrómetros (1 cm = 10 000 μm). Por lo tanto el radio de la arteria es de 80 μm. La velocidad en el eje central es de 11 850 μm/s, la cual disminuye hasta 11 110 μm/s a una distancia de $r = 20$ μm. El hecho de que $dv/dr = -74$ (μm/s)/μm significa que cuando $r = 20$ μm, la velocidad disminuye en una cantidad de casi 74 μm/s por cada micrómetro que se aleja del centro.

ECONOMÍA

V EJEMPLO 8 Suponga que $C(x)$ es el costo total en que una compañía incurre al produ cir x unidades de cierto artículo. La función C se llama **función de costo**. Si el númer de artículos producidos se incrementa de x_1 hasta x_2, el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ y la razón de cambio promedio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Los economistas llaman **costo marginal** al límite de esta cantidad, cuando $\Delta x \to 0$ es decir, la razón de cambio instantánea del costo con respecto al número de artículos producidos:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Como x suele tomar sólo valores enteros, quizá no tenga sentido hacer que Δx tienda a 0, pero siempre podrá reemplazar $C(x)$ con una función suave de aproximación uniforme, como en el ejemplo 6.]

Si se toma $\Delta x = 1$ y n grande (de modo que Δx sea pequeño en comparación con n), tiene

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Así entonces, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de elaborar una unidad más [la $(n + 1)$-ésima unidad].

A menudo, resulta apropiado representar una función de costo total con un polinomio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo de los gastos generales (renta, calefacción, mantenimiento) y los demás términos representan el costo de las materias primas, la mano de obra y demás. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de la mano de obra podrían depender en parte de potencias mayores de x, debido a los costos del tiempo extra y de las faltas de eficiencia relacionadas con las operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0.01x^2$$

En tal caso la función de costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

El costo marginal en el nivel de producción de 500 artículos es

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = \$15/\text{artículo}$$

Esto da la cantidad a la cual se incrementan los costos con respecto al nivel de producción, cuando $x = 500$, y predice el costo del artículo 501.

El costo real de producir el artículo 501 es

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10\,000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\quad - [10\,000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= \$15.01 \end{aligned}$$

Advierta que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$. □

Los economistas también estudian la demanda, el ingreso y la utilidad marginales, que son las derivadas de las funciones de demanda, ingreso y utilidad. Éstas se consideran en el capítulo 4, después de desarrollar las técnicas para hallar los valores máximos y mínimos de funciones.

OTRAS CIENCIAS

Las razones de cambio se presentan en todas las ciencias. Un geólogo se interesa en conocer la rapidez a la cual una masa incrustada de roca fundida se enfría por conducción del calor hacia las rocas que la rodean. Un ingeniero desea conocer la proporción a la cual el agua fluye hacia adentro o hacia afuera de un depósito. Un geógrafo urbano se interesa en la razón de cambio de la densidad de población en una ciudad, al aumentar la distancia al centro de la propia ciudad. Un meteorólogo siente interés por la razón de cambio de la presión atmosférica con respecto a la altura. (Véase el ejercicio 17, de la sección 3.8.)

En psicología, quienes se interesan en la teoría del aprendizaje estudian la curva del aprendizaje, la cual presenta en forma de gráfica el rendimiento $P(t)$ de alguien que aprende de una habilidad, como función del tiempo de capacitación t. Tiene un interés particular la rapidez a la cual mejora el rendimiento a medida que pasa el tiempo; es decir, dP/dt.

En sociología, el cálculo diferencial se aplica al análisis del esparcimiento de rumores (o de innovaciones, novedades o modas). Si $p(t)$ denota la proporción de una población que conoce un rumor en el momento t, por lo tanto la derivada dp/dt denota la rapidez de esparcimiento de ese rumor. (Véase el ejercicio 82 de la sección 3.4.)

UNA SOLA IDEA, VARIAS INTERPRETACIONES

La velocidad, la densidad, la corriente, la potencia y el gradiente de temperatura, en física; la velocidad de reacción y la compresibilidad, en química; la rapidez de crecimiento y el gradiente de velocidad de la sangre, en biología; el costo marginal y la utilidad marginal, en economía; la rapidez de flujo del calor, en geología; la rapidez de mejora del rendimiento, en psicología, y la rapidez de esparcimiento de un rumor, en sociología, son casos especiales de un concepto matemático: la derivada.

Ésta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas descansa en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (como la derivada) puede tener interpretaciones diferentes en cada ciencia. Cuando desarrolle las propiedades del concepto matemático, de una vez y por todas, podrá dar la vuelta y aplicar estos resultados a todas las ciencias. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada una por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) lo expresó de manera sucinta: "Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías secretas que los unen."

3.7 EJERCICIOS

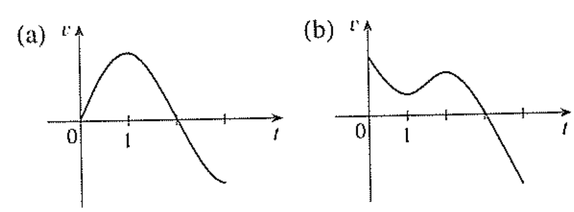
1–4 Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t)$, $t \geqslant 0$, donde t se mide en segundos y s en pies.

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
(c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
(d) ¿Cuándo se mueve hacia la dirección positiva?
(e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
(f) Dibuje un diagrama, como el de la figura 2, con el fin de ilustrar el movimiento de la partícula.
(g) Hallar la aclaración en el tiempo t y después de 3 s.
(h) Grafique las funciones de posición, velocidad, yaceleración para $0 \leqslant t \leqslant 8$.
(i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿cuándo disminuye.

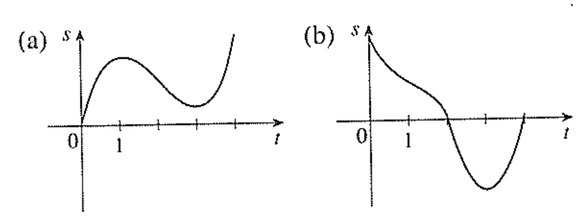
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ **2.** $f(t) = 0.01t^4 - 0.04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4)$, $t \leqslant 10$ **4.** $f(t) = te^{-t/2}$

5. Se exhiben las gráficas de los funciones *velocidad* de dos partículas, donde t se mide en segundos ¿Cuándo incrementa su rapidez cada partícula? Cuándo disminuyen su rapidez? Explique



6. Se exhiben las funciones de *posición* de dos partículas, donde t se mide en segundos ¿Cuándo incrementa su rapidez cada una de la partícula? ¿cuándo la disminuyen? Explique.



7. La función de posición de una partícula está dada por

$s = t^3 - 4.5t^2 - 7t$, $t \geqslant 0$

(a) ¿Cuándo alcanza la partícula una velocidad de 5 m/s?
(b) ¿Cuándo la aceleración es 0? ¿Cuál es el significado de ese valor de t?

8. Si se empuja una pelota de modo que alcance una velocidad inicial de 5 m/s hacia abajo a lo largo de cierto plano inclinado, en tal caso la distancia que ha rodado después de t segundos es $s = 5t + 3t^2$.
(a) Encuentre la velocidad una vez que transcurren 2 s.
(b) ¿Cuánto tiempo tarda para que la velocidad alcance 35 m/s?

9. Si se lanza una piedra hacia arriba verticalmente desde la superficie de la Luna, con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos es $h = 10t - 0.83t^2$.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la piedra después que transcurren 3 s?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la piedra una vez que se ha elevado 25 m?

10. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 ft/s, en seguida su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.
(a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
(b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está 96 pies arriba de la superficie de la tierra en su trayectoria hacia arriba y luego hacia abajo?

11. (a) Una compañía fabrica *chips* para computadora a partir de placas cuadradas de silicio. Se desea conservar la longitud del lado de esas placas muy próxima a 15 mm y, asimismo, saber cómo cambia el área $A(x)$ de ellas cuando cambia la longitud x del lado. Encuentre $A'(15)$ y explique su significado en esta situación.
(b) Demuestre que la rapidez de cambio del área de uno de los cuadrados con respecto a la longitud de su lado es la mitad de su perímetro. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto, dibujando un cuadrado cuya longitud x del lado se incremente en una cantidad Δx. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δx es pequeño?

12. (a) Es fácil hacer crecer cristales de clorato de sodio en forma de cubos dejando que una solución de esta sal en agua se evapore con lentitud. Si V es el volumen de uno de esos cubos, con longitud x del lado, calcule dV/dx cuando $x = 3$ mm y explique su significado.
(b) Demuestre que la razón de cambio del volumen de un cubo con respecto a la longitud de su arista es igual a la mitad del área superficial de ese cubo. Explique geométricamente por qué este resultado es cierto; básese en el ejercicio 11 (b) para establecer una analogía.

13. (a) Encuentre la razón de cambio promedio del área de un círculo con respecto a su radio r, cuando éste cambia de
(i) 2 a 3 (ii) 2 a 2.5 (iii) 2 a 2.1
(b) Encuentre la razón de cambio instantánea cuando $r = 2$.
(c) Demuestre que la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio (a cualquier r) es igual a la circunferencia del círculo. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto dibujando un círculo cuyo radio se incrementa en una cantidad Δr. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δr es pequeño?

14. Se deja caer una piedra en un lago que crea una onda circular que viaja hacia afuera con una rapidez de 60 cm/s. Encuentre la proporción a la cual aumenta el área dentro del círculo después de (a) 1 s, (b) 3 s y (c) 5 s. ¿Qué puede concluir?

15. Se está inflando un globo esférico. Encuentre la proporción de aumento del área superficial ($S = 4\pi r^2$) con respecto al radio r, cuando éste es de (a) 1 pie, (b) 2 pies y (c) 3 pies. ¿A qué conclusiones llega?

16. (a) El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). Encuentre la razón de cambio promedio de V con respecto a r, cuando éste cambia de
(i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5.1 μm
(b) Halle la razón de cambio instantánea de V con respecto a r, cuando $r = 5\ \mu$m.
(c) Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geométricamente por qué esto es cierto. Argumente por analogía con el ejercicio 13(c).

17. La masa de parte de una varilla metálica que se encuentra entre su extremo izquierdo y un punto x metros a la derecha es $3x^2$ kg. Encuentre la densidad lineal (véase el ejemplo 2) cuando x es (a) 1 m, (b) 2 m y (c) 3 m. ¿En dónde es más alta la densidad y dónde es más baja?

18. Si un tanque contiene 5 000 galones de agua, la cual se drena desde el fondo del tanque en 40 min, en tal caso la ley de Torricelli da el volumen V de agua que queda en el tanque después de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 40$$

Encuentre la cantidad de drenado después de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min y (d) 40 min. ¿En qué momento fluye el agua más rápido hacia afuera? ¿Con mayor lentitud? Resuma sus hallazgos.

19. La cantidad de carga, Q, en coulombs (C) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando (a) $t = 0.5$ s y (b) $t = 1$ s. [Véase el ejemplo 3. La unidad de corriente es el ampere (1 A = 1 C/s).] ¿En qué momento la corriente es la más baja?

20. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.
(a) Encuentre dF/dr y explique su significado. ¿Qué indica el signo menos?
(b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye en proporción de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esta fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

21. La ley de Boyle expresa que cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$.
(a) Encuentre la razón de cambio del volumen en relación con la presión.

(b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.
(c) Pruebe que la compresibilidad isotérmica (véase el ejemplo 5) se expresa mediante $\beta = 1/P$.

22. Si en el ejemplo 4 se forma una molécula del producto C a partir de una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B y las concentraciones iniciales de A y B tienen un valor común $[A] = [B] = a$ moles/L, después

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

donde k es una constante.
(a) Halle la velocidad de reacción en el instante t.
(b) Demuestre que si $x = [C]$, en seguida

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \to \infty$?
(d) ¿Qué ocurre con la velocidad de reacción cuando $t \to \infty$?
(e) ¿Qué significan en términos prácticos los resultados de los incisos (c) y (d)?

23. En el ejemplo 6 consideró una población de bacterias que se duplican cada hora. Considere que otra población de bacterias se triplica cada hora y se inicia con 400 bacterias. Hallar una expresión para el número n de bacterias después de t horas y aplique para estimar la rapidez de crecimiento de la población después de 2.5 horas

24. El número de células de levadura en un cultivo de laboratorio se incrementa rapidamente al principio pero los niveles con el tiempo terminan. La población se modela por la función

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}}$$

donde t se mide en horas. En el tiempo $t = 0$ la población es de 20 células y se incrementa en una proporción de 12 células/hora. Hallar los valores de a y b. De acuerdo a este modelo, ¿finalmente que sucede a la población de levadura?

25. La tabla proporciona la población del mundo en el siglo XX.

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

(a) Estime la rapidez de crecimiento de la población en 1920 y 1980 promediando las pendientes de dos rectas secantes.
(b) Use un dispositivo graficador o una computadora para encontrar una función cúbica (un polinomio de tercer grado) que modele los datos.
(c) Aplique su modelo del inciso (b) para encontrar un modelo para la rapidez de crecimiento de la población en el siglo XX.
(d) Use el inciso (c) para estimar las rapidez de crecimiento en 1920 y 1980. Compare sus estimados con los del inciso (a).
(e) Estime la rapidez de crecimiento en 1985.

26. La tabla muestra cómo varió la edad promedio en que las mujeres japonesas contraen matrimonio por primera vez a lo largo de la segunda mitad del siglo XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1980	25.2
1955	23.8	1985	25.5
1960	24.4	1990	25.9
1965	24.5	1995	26.3
1970	24.2	2000	27.0
1975	24.7		

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de cuarto grado.
(b) Recurra al inciso (a) para encontrar un modelo para $A'(t)$.
(c) Estime la razón de cambio de la edad en que contraen matrimonio las mujeres durante la década de 1990.
(d) Dibuje los puntos correspondientes a datos así como los modelos para A y A'.

27. Remítase a la ley de flujo laminar que se da en el ejemplo 7. Considere un vaso sanguíneo con radio 0.01 cm, longitud 3 cm, diferencia de presión 3 000 dinas/cm², y viscosidad $\eta = 0.027$.
(a) Halle la velocidad de la sangre a lo largo de la línea central $r = 0$, en el radio $r = 0.005$ cm, y en la pared $r = R = 0.01$ cm.
(b) Encuentre el gradiente de velocidad en $r = 0$, $r = 0.005$, y $r = 0.01$.
(c) ¿Adónde es máxima la velocidad? ¿Adónde cambia en mayor medida?

28. La frecuencia de las vibraciones de una cuerda vibrante de un violín se expresa por medio de

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

donde L es la longitud de la cuerda, T es su tensión y ρ es su densidad lineal. [Véase el capítulo 11 en D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 3a. ed. (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2002).]
(a) Encuentre la rapidez de cambio de la frecuencia con respecto a
 (i) La longitud (cuando T y ρ son constantes).
 (ii) La tensión (cuando L y ρ son constantes).
 (iii) La densidad lineal (cuando L y T son constantes).
(b) El tono de una nota (qué tan alto o bajo suena) está determinado por la frecuencia f (entre más alta es la frecuencia más alto es el tono). Use los signos de las derivadas del inciso (a) para hallar qué sucede en el tono de una nota
 (i) cuando se disminuye la longitud efectiva de una cuerda colocando un dedo sobre ésta de modo que vibre una parte más corta de la misma,
 (ii) cuando se aumenta la tensión haciendo girar una de las clavijas,
 (iii) cuando se incrementa la densidad lineal al cambiar hacia otra cuerda,

29. El costo, en dolares, de producir x yardas de una cierta tela es

$$C(x) = 1200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

(a) Hallar la función costo marginal.
(b) Hallar $C'(200)$ y explique su significado. ¿Qué predice?
(c) Compare $C'(200)$ con el costo de fabricación de la yarda 201 de tela.

30. La función de costo para la producción de una mercancia es

$$C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$$

(a) Hallar e interpretar $C'(100)$.
(b) Comparar $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

31. Si $p(x)$ es el valor total de la producción cuando se tienen x trabajadores en una planta, por lo tanto la *productividad promedio* de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encuentre $A'(x)$. ¿Por qué la compañía desea contratar más trabajadores si $A'(x) > 0$?
(b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que la productividad promedio.

32. Si R denota la reacción del cuerpo ante cierto estímulo de intensidad x, la *sensibilidad* S se define como la razón de cambio de la reacción con respecto a x. Un ejemplo específico es cuando aumenta el brillo x de una fuente de luz, el ojo reacciona disminuyendo el área R de la pupila. La fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

se ha utilizado para modelar la dependencia de R con respecto a x cuando R se mide en milímetros cuadrados y x se mide en unidades de brillo adecuadas.
(a) Encuentre la sensibilidad.
(b) Ilustre el inciso (a) dibujando tanto R como S como función de x. Comente acerca de los valores de R y S en los niveles de brillo más bajos. ¿Es esto lo que esperaba?

33. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (en kelvin), la presión P (en atmósferas) y el volumen V (en litros) es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante del gas. Suponga que, en cierto instante, $P = 8.0$ atm y aumenta en una de 0.10 atm/min y $V = 10$ L y disminuyen proporción de 0.15 L/min. Encuentre la razón de cambio de T con respecto al tiempo en ese instante si $n = 10$ mol.

34. En una granja piscícola se introduce una población de peces en un estanque y se cosechan con regularidad. Un modelo para la razón de cambio de la población se expresa con la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

donde r_0 es la rapidez de nacimientos, P_c es la población máxima que el estanque puede sostener (llamada *capacidad de contención*) y β es el porcentaje de la población que se cosecha.
(a) ¿Cuál valor de dP/dt corresponde a una población estable?
(b) Si el estanque puede sostener 10 000 peces, la rapidez de nacimiento es del 5% y la cantidad de cosecha es del 4%, encuentre el nivel estable de la población.
(c) ¿Qué sucede si β se eleva hasta el 5%?

35. En el estudio de los ecosistemas, a menudo se usan los modelos *depredador-presa* para estudiar la interacción entre las especies. Considere una población de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y de caribúes, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción se ha modelado mediante las ecuaciones

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) ¿Cuáles valores de dC/dt y dW/dt corresponden a poblaciones estables?
(b) ¿Cómo se representaría matemáticamente la afirmación "los caribúes van hacia la extinción"?
(c) Suponga que $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ y $d = 0.0001$. Encuentre todas las parejas de poblaciones (C, W) que conducen a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las especies vivan en armonía o una de ellas, o ambas, se extinguirán?

3.8 CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO EXPONENCIAL

En muchos fenómenos naturales, las cantidades crecen o decaen en una cantidad proporcional a su tamaño. Por ejemplo, si $y = f(t)$ es el número de individuos en una población de animales o bacterias en el tiempo t, por lo tanto, parece razonable esperar que la rapidez de crecimiento $f'(t)$ es proporcional a la población $f(t)$; es decir, $f'(t) = kf(t)$ por alguna constante k. A propósito, bajo condiciones ideales (ambientes sin límite, nutrición adecuada, inmunidad a las enfermedades) el modelo matemático conocido por la ecuación $f'(t) = kf(t)$ sin duda predice lo que realmente sucede con precisión. Otro ejemplo sucede en física nuclear donde la masa de una sustancia radiactiva decae en una cantidad proporcional a su masa. En química la velocidad de una reacción de primer orden unimolecular es proporcional a la concentración de la sustancia. En finanzas, el valor de una cuenta de ahorros con interés compuesto se incrementa de manera continua en una cantidad proporcional a ese valor.

En general, si $y(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la razón de cambio de y con respecto a t es proporcional a su tamaño $y(t)$ en cualquier tiempo, en tal caso

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = ky}$$

donde k es una constante. Algunas veces la ecuación 1 se le llama **ley de crecimiento natural** (si $k > 0$) o la **ley de decaimiento natural** (si $k < 0$). Se le denomina una ecuación diferencial porque involucra una función desconocida y y su derivada dy/dt.

No es difícil pensar una solución de la ecuación 1. Esta ecuación pregunta hallar una función cuya derivada es un múltiplo constante de sí mismo. Conocerá tales funciones en este capítulo. Cualquier función exponencial de la forma $y(t) = Ce^{kt}$, donde C es una constante, que satisface

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Verá en la sección 9.4 que *cualquier* función que satisface $dy/dt = ky$ es de la forma $Y = Ce^{kt}$. Para ver el significado de la constante C, observe que

$$y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

En consecuencia C es el valor inicial de la función

> $\boxed{2}$ **TEOREMA** Las únicas soluciones de la ecuación diferencial y $dy/dt = ky$ son las funciones exponenciales
>
> $$y(t) = y(0)e^{kt}$$

CRECIMIENTO DE POBLACIÓN

¿Cuál es el significado de la constante de proporcionalidad k? En el panorama del crecimiento de la población, cuando $P(t)$ es el tamaño de una población en el tiempo t, escriba

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP \quad \text{o} \quad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

La cantidad

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

es la rapidez de crecimiento dividido entre el tamaño de la población; a esto se le denomina la **rapidez de crecimiento relativo**. De acuerdo a (3), en lugar de decir "la rapidez de crecimiento es proporcional al tamaño de la población" podría decir "la rapidez de crecimiento relativo es constante." Por lo tanto, de acuerdo a (2) dice que la población con rapidez de crecimiento relativo k aparece como el coeficiente de t en la función exponencial Ce^{kt}. Por ejemplo, si

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

t se mide en años, en tal caso la rapidez de crecimiento relativo es $k = 0.02$ y el crecimiento de población relativa de 2% por cada año

$$P(t) = P_0 e^{0.02t}$$

EJEMPLO 1 Use el hecho de que la población mundial fue 2 560 millones en 1950 y 3 040 millones en 1960 para modelar la población del mundo en la segunda mitad del siglo XX. (Suponga que la razón de crecimiento es proporcional al tamaño de la población. ¿Cuál es la razón de crecimiento relativo? Aplique el modelo para estimar la población mundial en 1993 y del mismo modo predecir la población en el año 2020.

SOLUCIÓN Mida el tiempo t en años y sea que $t = 0$ en el año 1950. Mida la población $P(t)$ en millones de personas. Por lo tanto, $P(0) = 2\,560$ y $P(10) = 3\,040$. Ya que está suponiendo que $dP/dt = kP$, del teorema 2 proporciona

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2560e^{kt}$$

$$P(10) = 2560e^{10k} = 3040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560} \approx 0.017185$$

La rapidez de crecimiento relativo es casi 1.7% por cada año y el modelo es

$$P(t) = 2560e^{0.017185t}$$

Se estima que en 1993 la población mundial fue

$$P(43) = 2560e^{0.017185(43)} \approx 5360 \text{ millones}$$

El modelo predice que en 2020 la población será

$$P(70) = 2560e^{0.017185(70)} \approx 8524 \text{ millones}$$

La gráfica en la figura 1 muestra que el modelo ya es exacto para finales del siglo XX (los puntos representan la población actual), de esta manera la estimación para 1993 es completamente confiable. Pero la predicción para 2020 es aventurado.

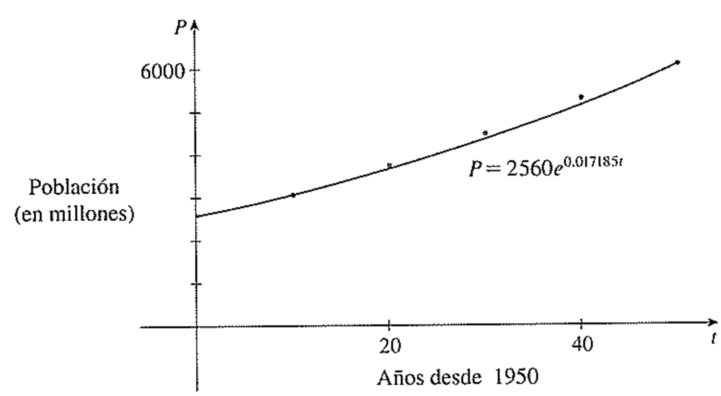


FIGURA 1
Un modelo del crecimiento de la población mundial en la segunda mitad del siglo XX

□

DECAIMIENTO RADIACTIVO

Una sustancia radiactiva decae emitiendo radiación de manera espontánea. Si $m(t)$ es la masa que queda a partir de una masa inicial m_0 de la sustancia después de tiempo t, por lo tanto, se ha encontrado de manera experimental que la rapidez de decaimiento

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

relativa es constante. (Ya que dm/dt es negativo, la rapidez de desintegración relativa es pósitiva.) Lo que permite que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

donde k es una constante negativa. En otras palabras, las sustancias radiactivas decaen en una cantidad proporcional a la masa restante. Esto significa que puede usar (2) para demostrar que la masa decae de manera exponencial:

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

Los fisicos expresan la relación de decaimiento en términos del **tiempo de vida media**, el tiempo que se requiere para que la mitad de cualquier cantidad conocida se desintegre.

EJEMPLO 2 El tiempo de vida media del radio-226 es 1 590 años.
(a) Una muestra de radio-226 tiene una masa de 100 mg. Hallar una formula para la masa de la muestra que permanece después de t años.
(b) Hallar la masa después de 100 años exacto a lo más cercano de los miligramos.
(c) ¿Cuándo se ha reducido la masa a 30 mg?

SOLUCIÓN
(a) Sea $m(t)$ la masa de radio-226 (en miligramos) que permanece después de t años. En tal caso $dm/dt = km$ y $y(0) = 100$, de tal manera que (2) proporciona

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

Con la finalidad de establecer el valor de k, aplique el hecho de de que $y(1\,590) = \frac{1}{2}(100)$.
En estos términos,

$$100e^{1590k} = 50 \qquad \text{o} \qquad e^{1590k} = \tfrac{1}{2}$$

y $$1\,590k = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

En consecuencia $$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1590}$$

Podría aplicar el hecho de que $e^{\ln 2} = 2$ y escribir la expresión para $m(t)$ de forma alterna

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

(b) La masa después de 100 años es

$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2)1000/1590} \approx 65 \text{ mg}$$

(c) Busque el valor de t tal que $m(t) = 30$, es decir,

$$100e^{-(\ln 2)t/1590} = 30 \qquad \text{o bien} \qquad e^{-(\ln 2)t/1590} = 0.3$$

Resuelva esta ecuación para t tomando el logaritmo natural de ambos lados:

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

Por esto $$t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2762 \text{ años}$$ □

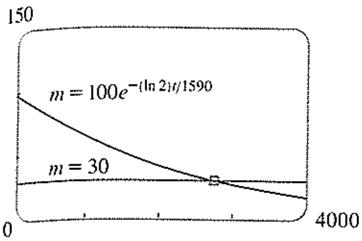


FIGURA 2

Para una verificación del ejemplo 2, aplique un dispositivo gráfico para dibujar la gráfica de $m(t)$ en la figura 2 junto con la línea horizontal $m = 30$. Estas curvas cruzan cuando $t \approx 2800$, y está de acuerdo con la respuesta del inciso (c).

LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y sus alrededores, siempre que esta diferncia no sea muy grande (además esta ley se aplica al calentamiento.) Si permite que $T(t)$ sea la temperatura del objeto en el tiempo t y T_s la temperatura de los alrededores. En seguida, puede formular la ley de enfriamiento de Newton como una ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

Donde k es una constante. Esta ecuación no es completamente la misma que la ecuación 1, de tal manera que el cambio de variable $y(t) = T(t) - T_s$. Ya que T_s, es constante, $y'(t) = T'(t)$ y de este modo la ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Por lo tanto puede usar (2) para hallar una expresión para y, de la que puede encontrar T.

EJEMPLO 3 Un recipiente con una bebida gasificada a temperatura ambiente (72°F) se coloca dentro de un refrigerador donde la temperatura es 44°F. Después de media hora la bebida se ha enfriado hasta 61°F.
(a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida después de la otra media hora?
(b) ¿Cuánto tardará la bebida en enfriarse a 50°F?

SOLUCIÓN
(a) Sea $T(t)$ la temperatura de la bebida después de t minutos. La temperatura de los alrededores es $T_s = 44°F$, por consiguiente la ley de enfriamiento de Newton establece que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 44)$$

Si permite que $y = T - 44$, en seguida $y(0) = T(0) - 44 = 72 - 44 = 28$, de este modo y satisface que

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 28$$

y mediante (2) tiene

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 28e^{kt}$$

Entonces $T(30) = 61$, igualmente $y(30) = 61 - 44 = 17$ y

$$28e^{30k} = 17 \qquad e^{30k} = \tfrac{17}{28}$$

Tomando logaritmos, tiene

$$k = \frac{\ln\left(\frac{17}{28}\right)}{30} \approx -0.01663$$

Por esto

$$y(t) = 28e^{-0.01663t}$$

$$T(t) = 44 + 28e^{-0.01663t}$$

$$T(60) = 44 + 28e^{-0.01663(60)} \approx 54.3$$

Así después de la otra mitad de la hora, la bebida se ha enfriado a casi 54°F.
(b) Tiene $T(t) = 50$ cuando

$$44 + 28e^{-0.01663t} = 50$$

$$e^{-0.01663t} = \tfrac{6}{28}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{28}\right)}{-0.01663} \approx 92.6$$

La bebida se enfría a 50°F después de casi 1 hora 33 minutos.

Observe que en el ejemplo 3

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty}(44 + 28e^{-0.01663t}) = 44 + 28 \cdot 0 = 44$$

lo que se esperaba. La gráfica de la función temperatura se muestra en la figura 3.

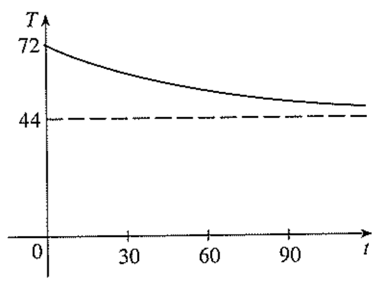


FIGURA 3

INTERÉS COMPUESTO CONTINUAMENTE

EJEMPLO 4 Si se inverten 1000 dólares al 6% de interés anual compuesto, entonces, después de 1 año la inversión es valorada en $1000(1.06) = 1060$ dólares, después de 2 años su valor es $[1000(1.06)]\,1.06 = 1123.60$ dólares y después de t años su valor es $1000(1.06)\,t$ dólares. En general, si se invierte una cantidad A_0 con una tasa de interés $r(r = 0.06$, en este ejemplo), entonces después de t años su valor es de $A_0(1 + r)^t$. No obstante, por lo general con más frecuencia el interés es compuesto, se dice, n veces el año. Por lo tanto en cada periodo combinado la tasa de interés es r/n y existe nt periodos combinados en t años, de este modo el valor de la inversión es

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por ejemplo, una inversión de 1000 dólares después de 3 años al 6% de interés estará valorados en

$$\$1000(1.06)^3 = \$1191.02 \text{ con combinación anual}$$

$$\$1000(1.03)^6 = \$1194.05 \text{ con combinación semestral}$$

$$\$1000(1.015)^{12} = \$1195.62 \text{ con combinación trimestral}$$

$$\$1000(1.005)^{36} = \$1196.68 \text{ con combinación mensual}$$

$$\$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = \$1197.20 \text{ con combinación diaria}$$

Puede ver que el pago del interés se incrementa cuando el número de periodos combinados (n) se incrementa. Si permite que $n \to \infty$ en consecuencia, estará combinando el interés de **manera continua** y el valor de la inversión será

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad \text{(donde } m = n/r\text{)} \end{aligned}$$

Pero el límite en esta expresión es igual al número e. (Véase la ecuación 3.6.6). Así, con la combinación continua del interés en la tasa de interés r, la cantidad después de t años es

$$A(t) = A_0e^{rt}$$

Si deriva esta función, obtiene

$$\frac{dA}{dt} = rA_0e^{rt} = rA(t)$$

la cual dice que, con combinación continua de interés, la proporción de incremento de una inversión es proporcional a su tamaño.

Regresando al ejemplo de 1000 dólares invertidos por 3 años al 6% de interés, con combinación de interés, el valor de la inversión será

$$A(3) = \$1000e^{(0.06)3} = \$1197.22$$

Observe cómo se acerca a la cantidad calculada por combinación diaria, 1197.20 dólares. Pero es más fácil calcular la cantidad si aplica combinación continua. □

3.8 EJERCICIOS

1. Una población de protozoarios se desarrollan en una razón de crecimiento relativo constante de 0.7944 por miembro por cada día. En el día cero la población consiste de dos miembros. Hallar el tamaño de la población después de seis días.

2. Un habitante común del intestino humano es la bacteria *Escherichia coli*. Una célula de esta bacteria en un caldo nutriente se divide en dos células cada 20 minutos. La población inicial de un cultivo es de 60 células
   (a) Hallar la razón de crecimiento relativo.
   (b) Encontrar una expresión para el número de células después de t horas.
   (c) Calcular el número de células después de 8 horas.
   (d) Establecer la razón de crecimiento después de 8 horas.
   (e) ¿Cuándo la población alcanzará 20 000 células.

3. Un cultivo de bacterias al inicio contiene 100 células y crece en una cantidad proporcional a su tamaño. Después de 1 hora la población se ha incrementado a 420.
   (a) Establecer una expresión para el número de bacterias después de t horas.
   (b) Calcular el número de bacterias después de 3 horas.
   (c) Encuentre la tasa de crecimiento después de 3 horas.
   (d) ¿Cuándo la población alcanza 10 000?

4. Un cultivo de bacterias crece con una rapidez de crecimiento relativo constante. Después de 2 horas existen 600 bacterias y después de 8 horas la cuenta es de 75 000.
   (a) Hallar la población inicial.
   (b) Establecer una expresión para la población después de t horas.

(c) Calcular el número de células después de 5 horas.
(d) Establecer la rapidez de crecimiento después de 5 horas.
(e) ¿Cuándo la población alcanzará 200 000?

5. La tabla proporciona estimados de la población mundial, en millones, desde 1750 hasta 2000.

Año	Población	Año	Población
1750	790	1900	1650
1800	980	1950	2560
1850	1260	2000	6080

(a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de población para 1750 y 1800 para predecir la población mundial en 1900 y en 1950. Compare con las cifras actuales.
(b) Utilice el modelo exponencial y las cifras de población para 1850 y 1900 para predecir la población mundial en 1950. Compare con la población actual.
(c) Emplee el modelo exponencial y las cifras de población de 1900 y 1950 para predecir la población mundial en 2000. Compare con la población actual e intente explicar la discrepancia.

6. La tabla proporciona la población de Estados Unidos, en millones, para los años 1900-2000.

Año	Población	Año	Población
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	275
1950	150		

(a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de censo para 1900 y 1910 para predecir la población en 2000. Compare con las cifras actuales e intente explicar la discrepancia.
(b) Use el modelo exponencial y las cifras del censo para 1980 y 1990 para predecir la población en 2000. Compare con la población actual. A continuación aplique este modelo para predecir la población en los años 2010 y 2020.
(c) Grafique ambas funciones exponenciales de los incisos (a) y (b) junto con una gráfica de la población actual. ¿Alguno de estos modelos es razonable?

7. Los experimentos muestran que si la reacción quimica.

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

se realiza a 45°C, la velocidad de reacción del pentóxido de dinitrógeno es proporcional a su concentración como sigue:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

(a) Hallar una expresión para la concentración $[N_2O_5]$ después de t segundos si la concentración inicial es C.
(b) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para reducir la concentración de N_2O_5 a 90% de su valor original?

8. El bismuto-210 tiene un tiempo de vida media de 5.0 días.
(a) Una muestra tiene originalmente una masa de 800 mg. Establecer una formula para la masa que resta después de t días.
(b) Calcular la masa que esta después de 30 días.
(c) ¿Cuándo se reduce la masa a 1 mg?
(d)Bosquejar la gráfica de la función masa.

9. El tiempo de vida media del cesio-137 es de 30 años. Considere una masa de 100 mg.
(a) Establecer la masa que permanece después de t años.
(b)¿Cuánto de la masa permanece después de 100 años?
(c) ¿Después de cuanto tiempo permanece únicamente 1 mg?

10. Una muestra de tritium-3 se desintegró a 94.5% de su cantidad original después de 1 año.
(a) ¿Cuál es el tiempo de vida media del tritium-3?
(b)¿Cuánto tardaría en decaer a 20% de su cantidad original?

11. Los científicos pueden establecer la edad de objetos antiguos mediante el método del carbono. El bombardeo de la atmósfera superior por los rayos cósmicos convierte al nitrógeno en un isótopo radioactivo de carbono, ^{14}C, con un tiempo de vida media aproximado de 5 730 años. La vegetación absorbe dióxido de carbono a través de la atmósfera y la vida animal asimila ^{14}C a través de la cadena alimenticia. Cuando una planta o un animal mueren, se detiene la sustitución de su carbono y la cantidad de ^{14}C inicia su disminución a través de la desintegración radiactiva. En consecuencia el nivel de radiactividad también decae de manera exponencial.

Fue descubierto un fragmento de pergamino que tiene casi 74% de ^{14}C tanta radiactividad como el material de la planta en la tierra hoy en día. Estimar la edad del pergamino.

12. Una curva pasa a través del punto (0, 5) y tiene la propiedad de que la pendiente de la curva en cualquier punto P es dos veces la coordenada y de P. ¿Cuál es la ecuación de la curva?

13. De un horno se toma un pavo rostizado cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre una mesa en un espacio donde la temperatura es 75°F.
(a) Si la temperatura del pavo es 150°F después de media hora: ¿cuál es la temperatura 45 minutos después?
(b)¿Cuándo se enfriará el pavo a 100°F?

14. Se toma un termómetro de una habitación donde la temperatura es 5°C. Un minuto después la lectura en el termómetro es de 12°C.
(a) ¿Cuál será la lectura en el termómetro unos minutos después?
(b)¿Cuándo la lectura del termómetro será 6°C?

15. Cuando se toma una bebida fría del refrigerador, su temperatura es 5°C. Después de 25 minutos dentro de una habitación a 20°C su temperatura se incrementa a 10°C.
(a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida 50 minutos después?
(b)¿Cuándo su temperatura será de 15°C?

16. Una taza de café recién hecha tiene 95°C de temperatura en una habitación a 20°C. Cuando la temperatura es de 70°C, se enfría en una proporción de 1°C por cada minuto. ¿Cuándo sucede esto?

17. La razón de cambio de la presión atmosférica P con respecto a la altitud h es proporcional a P, considere que la temperatura es constante. En 15°C la presión es 101.3 kPa al nivel del mar y 87.14 kPa en $h = 100$ m.
   (a) ¿Cuál es la presión en una altitud de 3 000 m?
   (b)¿Cuál es la presión en la cima del monte McKinly, en una altitud de 6 187 m?

18. (a) Si se prestan 1 000 dólares al 8% de interés, calcular la cantidad que se debe al final de 3 años si el interés es compuesto. (i) anual, (ii) trimestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) diario, (vi) por hora, y (vii) de manera continua.
   (b) Considere que se prestan 1 000 dólares y el interés es compuesto de manera continua. Si $A(t)$ es la cantidad que se debe t años después, donde $0 \leq t \leq 3$, grafique $A(t)$ para cada una de las tasas de interés 6%, 8% y 10% en una pantalla común.

19. (a) Si invierta 3 000 dólares al 5% de interés, calcule el valor de la inversión al final de 5 años si el interés es compuesto (i) anual, (ii) semestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) por día, y (vi) de manera contínua.
   (b)Si $A(t)$ es la cantidad de la invesión al tiempo t para el caso de combinación continua, escriba una ecuación diferencial y una condición inicial que satisfaga $A(t)$.

20. (a) ¿Cuánto transcurrirá para que una inversión se duplique en valor si la tasa de interés es de 6% compuesto de manera continua?
   (b) ¿Cuál es la tasa de interés anual equivalente?

3.9 RELACIONES AFINES

Si está inflando un globo, tanto su volumen como su radio se incrementan y sus proporciones de incremento están relacionadas entre sí. Pero es mucho más fácil medir de modo directo la proporción de aumento de volumen que la proporción de incremento del radio.

En un problema de relaciones afines, la idea es calcular la relación de cambio de una cantidad en términos de la relación de cambio de otra cantidad, la cual, además, se podría medir con más facilidad. El procedimiento es determinar una ecuación que relaciona las dos cantidades y aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros con respecto al tiempo.

EJEMPLO 1 Se infla un globo esférico y su volumen se incrementa en una proporción de 100 cm³/s. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

De acuerdo con los principios de la resolución de problemas estudiados en la página 76, el primer paso es entender el problema. Ahí está incluida la lectura cuidadosa del problema, la identificación de los datos con que se cuenta y lo que se desconoce y la introducción de una notación conveniente.

SOLUCIÓN Empiece por identificar dos aspectos:

la *información que se proporciona:*

la proporción de incremento del volumen del aire es 100 cm³/s

y lo *que se desconoce*:

la rapidez de incremento del radio cuando el diámetro es 50 cm

Con objeto de expresar estas cantidades en forma matemática, introduzca una *notación* sugerente:

Sea V el volumen del globo y r su radio.

La clave que hay que tener presente es que las razones de cambio son derivables. En este problema, tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo t. La proporción de incremento del volumen con respecto al tiempo es la derivada dV/dt, y la rapidez del incremento del radio es dr/dt. Por lo tanto, replantee lo que conoce y lo que desconoce de la manera siguiente:

$$\textit{Conocido:} \quad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3\text{/s}$$

$$\textit{Desconocido:} \quad \frac{dr}{dt} \quad \text{cuando } r = 25 \text{ cm}$$

▪ La segunda etapa de la resolución de problemas es pensar en un plan para relacionar la información conocida con la desconocida.

Con objeto de relacionar dV/dt y dr/dt, primero relacione V y r mediante la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Para utilizar la información dada, derive con respecto a t a ambos miembros de la ecuación. Para derivar el lado derecho necesita aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora resuelva para la cantidad desconocida:

▪ Observe que aunque dV/dt es constante, dr/dt *no* lo es.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Si sustituye $r = 25$ y $dV/dt = 100$ en esta ecuación, obtiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo se incrementa en una proporción de $1/(25\pi) \approx 0.0127$ cm/s. □

EJEMPLO 2 Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared en una proporción de 1 pie/s, ¿qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo por la pared cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

SOLUCIÓN Primero dibuje un esquema y ponga los datos como se muestra en la figura 1. Sea x pies la distancia desde la parte inferior de la escalera al muro y y pies la distancia desde la parte superior de la escalera al piso. Observe que x y y son funciones del tiempo t (tiempo que se mide en segundos)

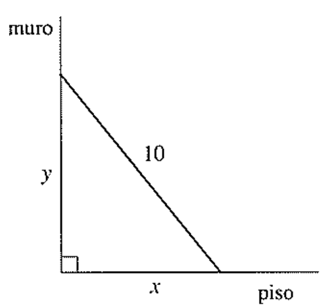


FIGURA 1

Sabe que $dx/dt = 1$ pie/s y se pide determinar dy/dt cuando $x = 6$ pies (véase figura 2). En este problema, la relación entre x y y la define el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros aplicando la regla de la cadena

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

y al resolver esta ecuación para determinar la relación deseada

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da $y = 8$ y al sustituir estos valores y $dx/dt = 1$, llega a

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4}\ \text{pies/s}$$

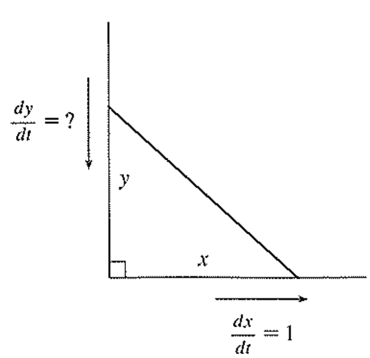


FIGURA 2

El hecho de que dy/dt sea negativa quiere decir que la distancia desde la parte superior de la escalera al suelo *decrece* una proporción de $\frac{3}{4}$ pie/s. En otras palabras, la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo de la pared una proporción de $\frac{3}{4}$ pie/s. □

EJEMPLO 3 Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a una razón de 2 m^3/min, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

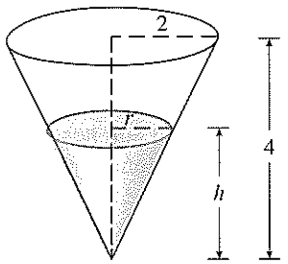


FIGURA 3

SOLUCIÓN Primero elabore un diagrama del cono y anote la información como en la figura 3. Sean V, r y h el volumen del agua, el radio de la superficie circular y la altura en el tiempo t, donde t se mide en minutos.

Sabe que $dV/dt = 2$ m^3/min y se pide determinar dh/dt cuando h es 3 m. Las cantidades V y h se relacionan mediante la ecuación

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

pero es muy útil expresar V sólo en función de h. Con objeto de eliminar r, recurra a los triángulos semejantes en la figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

y la expresión para V se vuelve

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ahora puede derivar con respecto a t cada miembro:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

de modo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $h = 3$ m y $dV/dt = 2$ m^3/min obtiene

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

El nivel del agua sube a razón de $8/(9\pi) \approx 0.28$ m/min. □

■ Reflexione. ¿Qué ha aprendido de los ejemplos 1 a 3 que le ayude a resolver problemas futuros?

ESTRATEGIA Es útil recordar algunos de los principios para resolver problemas que se encuentran en la página 76 y adaptarlos a las razones relacionadas luego de lo que aprendió en los ejemplos 1 a 3:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la relación requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, aplique las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución, como en el ejemplo 3.
6. Aplique la regla de la cadena para derivar con respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y determine la proporción desconocida.

ADVERTENCIA: Un error común es la sustitución de la información numérica conocida (por cantidades que varían con el tiempo) muy pronto. La sustitución se efectúa sólo *después* de la derivación. (El paso 7 va después del paso 6.) Es decir, en el ejemplo 3 se tratan valores generales de h hasta que finalmente sustituye $h = 3$ en la última etapa. (Si hubiera sustituido $h = 3$ desde antes, habría obtenido $dV/dt = 0$, lo cual es evidentemente erróneo.)

Los ejemplos siguientes son otras ilustraciones de la estrategia.

EJEMPLO 4 El automóvil A se dirige hacia el oeste a 50 millas/h y el vehículo B viaja hacia el norte a 60 millas/h. Ambos se dirigen hacia la intersección de los dos caminos. ¿Con que rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a 0.3 millas y el vehículo B está a 0.4 millas de la intersección?

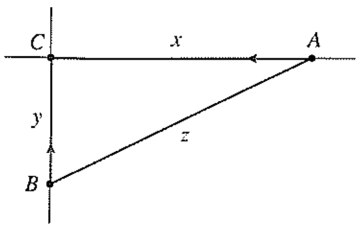


FIGURA 4

SOLUCIÓN Dibuje la figura 4 donde C es la intersección de los caminos. En un tiempo dado t, sea x la distancia entre el automóvil A y C, sea y la distancia desde el automóvil B a C, y sea z la distancia entre los vehículos, donde x, y y z se miden en millas.

Sabe que $dx/dt = -50$ millas/h y $dy/dt = -60$ millas/h. Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes. Se pide calcular dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z la proporciona el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados con respecto a t obtiene

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Cuando $x = 0.3$ millas y $y = 0.4$ millas, el teorema de Pitágoras da $z = 0.5$ millas, de modo que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}[0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78 \text{ millas/h}$$

Los vehículos se aproximan entre sí a razón de 78 millas/h. □

EJEMPLO 5 Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 pies/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. ¿Con que rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 pies del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?

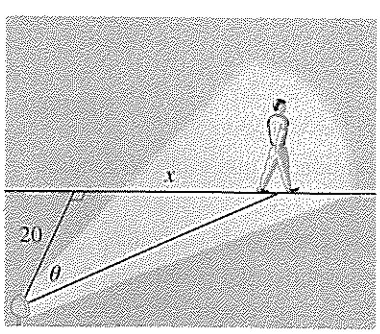


FIGURA 5

SOLUCIÓN Trace la figura 5 y haga que x sea la distancia desde el hombre hasta el punto sobre la trayectoria que esté más cercana al faro. Sea θ el ángulo entre el rayo desde el faro y la perpendicular a la trayectoria.

Sabe que $dx/dt = 4$ pies/s y se pide calcular $d\theta/dt$ cuando $x = 15$. La ecuación que relaciona x y θ se puede escribir a partir de la figura 5:

$$\frac{x}{20} = \tan\theta \qquad x = 20\tan\theta$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

por lo que $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Cuando $x = 15$, la longitud del rayo es 25, por eso $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El faro gira con una rapidez de 0.128 rad/s. □

3.9 EJERCICIOS

1. Si V es el volumen de un cubo que mide por lado x y, además, el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, calcule dV/dt en términos de dx/dt.

2. (a) Si A es el área de un círculo cuyo radio es r y el círculo se amplía a medida que pasa el tiempo, determine dA/dt en términos de dr/dt.
   (b) Suponga que el aceite se derrama de un depósito agrietado y que se extiende según un patrón circular. Si el radio del derrame de aceite se incrementa a una proporción constante de 1 m/s, ¿qué tan rápido se incrementa el área del derrame cuado el radio es de 30 m?

3. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón de 6 cm/s. ¿En que proporción se incrementa el área del cuadrado cuando el área del cuadrado es de 16 cm^2?

4. El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm/s y el ancho en 3 cm/s. Cuando la longitud es 20 cm y el ancho es 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

5. Un tanque cilíndrico con 5 m de diámetro se está llenando con agua a razón de 3 cm^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de agua'?

6. El radio de una esfera se incrementa a razón de 4 mm/s. ¿Qué tan rápido se incrementa el volumen cuando el diámetro es de 80 mm?

7. Si $y = x^3 + 2x$ y $dx/dt = 5$, determine dy/dt cuando $x = 2$.

8. Si $x^2 + y^2 = 25$ y $dy/dt = 6$, determine dx/dt cuando $y = 4$.

9. Si $z^2 = x^2 + y^2$, $dx/dt = 2$, y $dy/dt = 3$, encuentre dz/dt cuando $x = 5$ y $y = 12$.

10. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$. Cuando alcanza el punto (2, 3), la coordenada y se incrementa a una rapidez de 4 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x del punto variable en ese instante?

11–14

(a) ¿Qué cantidades se proporcionan en el problema?
(b) ¿Qué se desconoce?
(c) Trace un diagrama de la situación en cualquier tiempo t.
(d) Plantee una ecuación que relacione las cantidades.
(e) Termine de resolver el problema.

11. Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla y a una rapidez de 500 millas/h pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez a la cual la distancia desde el avión a la estación se incrementa cuando está a 2 millas de la estación.

12. Si una bola de nieve se funde de tal modo que el área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, calcule la rapidez a la cual disminuye el diámetro cuando éste es 10 cm.

13. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de 15 pies de altura. Un hombre de 6 pies de estatura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de 5 pies/s a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Qué tan rápido la punta de su sombra se desplaza cuando está a 40 pies del poste?

14. A mediodía, un barco A está a 150 km al oeste del barco B. El barco A navega hacia el este a 35 km/h y el barco B navega hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 4:00 PM?

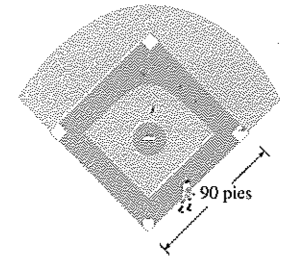
---

15. Dos vehículos parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 60 millas/h y el otro hacia el oeste a 25 millas/h. ¿En que proporción se incrementa la distancia entre los vehículos dos horas después?

16. Una luminaria sobre el piso ilumina una pared a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina desde la luminaria hacia el edificio a una rapidez de 1.6 m/s, ¿qué tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre el muro cuando está a 4 m del edificio?

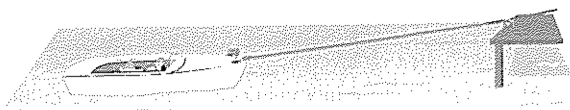
17. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 4 pies/s desde el punto P. Cinco minutos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 5 pies/s desde un punto a 500 pies directo al este de P. ¿Con qué rapidez se están separando las personas 15 min después de que la mujer empezó a caminar?

18. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base con una rapidez de 24 pies/s.
   (a) ¿En qué proporción su distancia desde la segunda base decrece cuando está a medio camino de la primera base?
   (b) ¿En qué proporción su distancia desde la tercera base se incrementa en el mismo momento?



19. La altitud de un triángulo se incrementa a razón de 1 cm/min mientras que el área del triángulo aumenta en una proporción de 2 cm^2/min. ¿En qué proporción cambia la base del triángulo cuando la altitud es de 10 cm y el área es de 100 cm^2?

20. Una embarcación se jala hacia un muelle mediante una soga unida a la proa del bote y pasa por una polea que se encuentra instalada en el muelle a 1 m más arriba que la proa del bote. Si la soga se jala a una rapidez de 1 m/s, ¿qué tan rápido se aproxima al muelle cuando está a 8 m de éste?



21. A mediodía, el barco A está a 100 km al oeste del barco B. El barco A se dirige hacia el sur a 35 km/h y el barco B va hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido se modifica la distancia entre los barcos a las 4:00 PM?

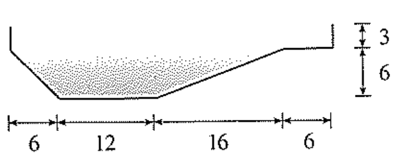
22. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = \sqrt{x}$. Cuando pasa por el punto (4, 2), su coordenada x se incrementa en una proporción de 3 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la partícula al origen en ese instante?

23. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a una relación de 10 000 cm^3/min al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a una proporción constante. El depósito mide 6 m de alto y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a una relación de 20 cm/min cuando la altura del agua es de 2 m, calcule la proporción a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

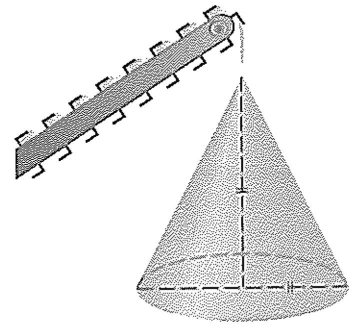
24. Un canalón mide 10 pies de largo y sus extremos tienen la forma de un triángulo isósceles; el ancho del canalón es de 3 pies, lo que sería la base del triángulo, y la altura es de 1 pie. Si el canalón se llena con agua a razón de 12 pies cúbicos por minuto, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 6 pulg?

25. Un canal de agua mide 10 pies de largo y su sección transversal tiene la forma de un trapezoide isósceles que tiene 30 cm de ancho en el fondo, 80 cm de ancho en la parte superior y mide 50 cm de alto. Si el canal se está llenando con agua a razón de 0.2 m^3/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene 30 cm de profundidad?

26. Una piscina mide 20 pies de ancho, 40 pies de largo y 3 pies en el extremo polo profundo, y tiene 9 pies de fondo en la parte más profunda. En la figura se ilustra una sección transversal de la piscina. Si ésta se llena a razón de 0.8 pies cúbicos/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando la altura del agua en el punto más profundo es de 5 pies?



27. Se entrega grava por medio de una cinta transportadora a razón de 30 pies cúbicos por minuto; las dimensiones de sus fragmentos permiten formar una pila en forma de cono cuyo diámetro y altura son siempre iguales. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de la pila cuando ésta mide 10 pies de alto?



28. Un papalote que está a 100 pies por arriba de la superficie de la tierra se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 8 pies/s. ¿En que proporción disminuye el ángulo entre la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 200 pies de cuerda?

29. Dos lados de un triángulo miden 4 y 5 m, y el ángulo entre ellos se incrementa a razón de 0.06 rad/s. Calcule la proporción a la cual el área del triángulo se incrementa cuando el ángulo entre los lados de longitud constante es de $\pi/3$.

30. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo entre el muro y la escalera cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

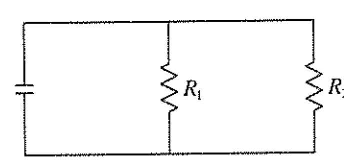
31. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V cumplen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es de 150 kPa y que la presión se incrementa una cantidad de 20 kPa/min. ¿En que proporción disminuye el volumen en este instante?

32. Cuando el aire se expande en forma adiabática, es decir, no gana ni pierde calor, su presión P y su volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es 400 cm^3 y que la presión es 80 kPa y está disminuyendo en una cantidad de 10 kPa/min. ¿En que proporción se incrementa el volumen en este instante?

33. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como se ilustra en la figura, por lo tanto la resistencia total R, medida en ohms (Ω) es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

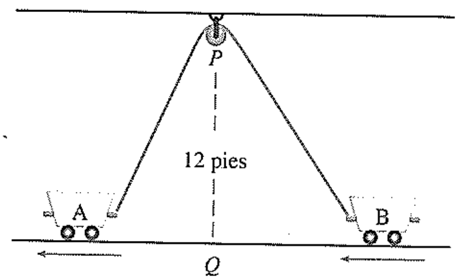
Si R_1 y R_2 se incrementan en proporción de 0.3 Ω/s y 0.2 Ω/s, respectivamente, ¿qué tan rápido cambia R cuando $R_1 = 80\ \Omega$ y $R_2 = 100\ \Omega$?



34. El peso B del cerebro en función del peso del cuerpo W en los peces ha sido modelado mediante la función potencia $B = 0.007W^{2/3}$, donde B y W se dan en gramos. Un modelo para el peso corporal en función de la longitud del cuerpo L en centímetros, es $W = 0.12L^{2.53}$. Si en 10 millones de años la longitud promedio de ciertas especies de peces evolucionaron desde 15 cm a 20 cm a una proporción constante, ¿qué tan rápido creció el cerebro de estas especies cuando la longitud promedio era de 18 cm?

35. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 m y 15 m. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 2°/min ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60°?

36. Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 39 pies de longitud que pasa por una polea P (véase la figura). El punto O está en el suelo a 12 pies directamente abajo de P y entre los carros. El carro A es jalado a partir de O a una rapidez de 2 pies/s. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia O en el instante en que el carro A está a 5 pies de O?



37. Se instala una cámara de televisión a 4 000 pies de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la proporción correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 600 pies/s cuando se ha elevado 3 000 pies.

(a) ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento?

(b) Si la cámara de televisión se mantiene dirigida hacia el cohete, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento?

38. Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km del punto más cercano P que se encuentra en una playa recta; la lámpara del faro da cuatro revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa cuando está a 1 km de P?

39. Un avión vuela horizontalmente en una altitud de 5 km y pasa directamente sobre un telescopio de seguimiento en la superficie de la tierra. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/3$, este ángulo está disminuyendo en una prororción de $\pi/6$ rad/min. ¿En ese instante con que rapidez está viajando el avión?

40. Una rueda de la fortuna de 10 m de radio está girando con una proporción de una revolución cada 2 minutos. ¿Qué tan rápido se está elevando un pasajero cuando su silla está a 16 m arriba del nivel de la superficie de la tierra?

41. Un avión que vuela con rapidez constante de 300 km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altitud de 1 km y se eleva con un ángulo de 30°. ¿En que proporción se incrementa la distancia del avión a la estación de radar un minuto más tarde?

42. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 millas/h y la otra camina hacia el noreste a 2 millas/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 15 minutos?

43. Un individuo corre por una pista circular de 100 m de radio a una rapidez constante de 7 m/s. Un amigo del corredor está parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los amigos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?

44. La manecilla de los minutos de un reloj mide 18 mm de largo y la manecilla de las horas mide 4 mm de largo. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las puntas de las manecillas cuando es la 1 de la tarde?

3.10 APROXIMACIONES LINEALES Y DIFERENCIALES

Ya vio que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, advirtio que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. (Véase la figura 2 en la sección 2.7.) Esta observación es la base de un método para hallar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f. Por lo tanto, recurra a los valores calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)

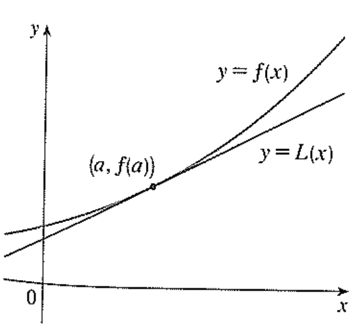


FIGURA 1

En otras palabras, use la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \boxed{1}$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es su recta tangente, es decir,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se le llama **linealización** de f en a.

V EJEMPLO 1 Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ en $a = 1$ y úsela para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$. ¿Estas aproximaciones son sobrestimaciones o subestimaciones?

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$$

y, de este modo se tiene $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Si se ponen estos valores en la ecuación (2) la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

La aproximación lineal correspondiente (1) es

$$\sqrt{x + 3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(cuando } x \text{ está cerca de 1)}$$

En particular, tiene

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

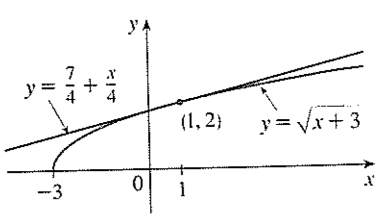


FIGURA 2

En la figura 2 se ilustra la aproximación lineal. En efecto, la aproximación de la recta tangente funciona para la función dada cuando x está cerca de 1. También que las aproximaciones son sobrestimaciones porque la recta tangente se encuentra por arriba de la curva.

Por supuesto, una calculadora podría dar aproximaciones para $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero aproximación lineal da esa aproximación *sobre un intervalo completo.*

En la tabla siguiente se compara las estimaciones de la aproximación lineal del ejemplo con los valores reales. Advierta en esta tabla, y asimismo en la figura 2, que la aproximación de la recta tangente da buenas estimaciones cuando x está cerca de 1 pero la precisión de aproximación disminuye cuando x está más lejos de 1.

	x	A partir de $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

¿Qué tan buena es la aproximación obtenida en el ejemplo 2? El ejemplo siguiente muestra que usando una calculadora graficadora o una computadora es posible determinar un intervalo a lo largo del cual una aproximación lineal proporciona una precisión especificada.

EJEMPLO 3 ¿Para cuáles valores de x la aproximación lineal

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5? ¿Qué puede decir de una exactitud con una diferencia menor que 0.1?

SOLUCIÓN Una exactitud con una diferencia menor que 0.5 significa que las funciones deben diferir en menos de 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

De modo equivalente podría escribir

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

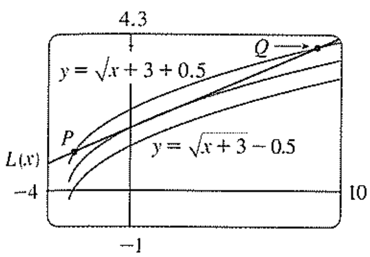


FIGURA 3

Con esto se expresa que la aproximación lineal debe encontrarse entre las curvas que se obtienen al desplazar la curva $y = \sqrt{x+3}$ hacia arriba y hacia abajo en una cantidad de 0.5. En la figura 3 se muestra la recta tangente $y = (7 + x)/4$ que interseca la curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ en P y en Q. Al hacer un acercamiento y usar el cursor, estima que la coordenada x de P se aproxima a -2.66 y la coordenada x de Q es más o menos 8.66. Por esto, con base en la gráfica, la aproximación

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

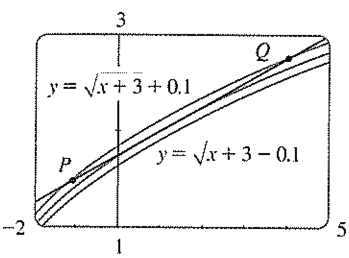


FIGURA 4

es exacta con una diferencia menor que 0.5, cuando $-2.6 < x < 8.6$. (Se ha redondeado para quedar dentro del margen de seguridad.)

De manera análoga, en la figura 5 la aproximación es exacta con una diferencia menor que 0.1 cuando $-1.1 < x < 3.9$. □

APLICACIONES EN LA FÍSICA

Las aproximaciones lineales se usan con frecuencia en la física. Al analizar las consecuencias de una ecuación, a veces un físico necesita simplificar una función sustituyéndola con una aproximación lineal. Por ejemplo, al derivar una fórmula para el periodo de un péndulo, los libros de texto de física obtienen la expresión $a_T = -g \text{ sen } \theta$ para la aceleración tangencial y luego sustituyen sen θ por θ haciendo la observación de que sen θ está muy cerca de θ si θ no es demasiado grande. [Véase, por ejemplo, *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), p. 431.] Puede comprobar que la linealización de la función $f(x) = \text{sen } x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$ y así la aproximación lineal en 0 es

$$\text{sen } x \approx x$$

(véase el ejercicio 42). Por consiguiente, en efecto, la derivación de la fórmula para el periodo de un péndulo utiliza la aproximación a la recta tangente para la función seno.

Otro ejemplo se presenta en la teoría de la óptica donde los rayos de luz que llegan con ángulos bajos con relación al eje óptico se llaman *rayos paraxiales*. En la óptica paraxial (o gaussiana) tanto sen θ como cos θ se sustituyen con sus linealizaciones. En otras palabras, las aproximaciones lineales

$$\text{sen } \theta \approx \theta \qquad \text{y} \qquad \cos \theta \approx 1$$

se usan porque θ está cerca de 0. Los resultados de los cálculos que se efectúan con estas aproximaciones se convierten en la herramienta teórica básica que se utiliza para diseñar lentes. [Véase *Optics*, 4a. edición, por Eugene Hecht (San Francisco: Addison Wesley, 2002), p. 154]

En la sección 11.11 aparecen varias aplicaciones de la idea de las aproximaciones lineales a la física.

DIFERENCIALES

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales en ocasiones se formulan en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy se define por lo tanto en términos de dx mediante la ecuación

Si $dx \neq 0$, puede dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes ha visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una relación de diferenciales.

$$\boxed{3} \qquad dy = f'(x)\,dx$$

De modo que dy es una variable dependiente; depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico y x se considera como algún número específico en el dominio de f, en seguida se determina el valor numérico de dy.

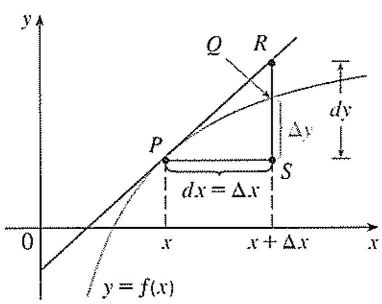


FIGURA 5

En la figura 5 se muestra el significado geométrico de los diferenciales. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos sobre la gráfica de f y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por esto, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)\,dx = dy$. Por consiguiente, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), en tanto que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.

EJEMPLO 3 Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y x cambia (a) de 2 a 2.05 y (b) de 2 a 2.01.

SOLUCIÓN

(a) Tiene

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

En la figura 6 se ilustra la función del ejemplo 3 y una comparación de dy y Δy cuando $a = 2$. El rectángulo de visión es $[1.8, 2.5]$ por $[6, 18]$.

En general, $\quad dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$

Cuando $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.05$, esto se transforma en

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

(b) $$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

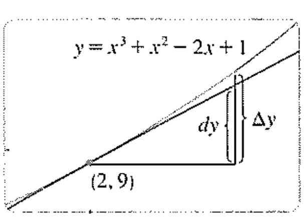


FIGURA 6

Cuando $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.01 = 0.14$$

Advierta, en el ejemplo 3, que la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora a medida que Δx se hace más pequeña. Observe también que es más fácil de calcular dy que Δy. En el caso de funciones más complicadas sería imposible calcular exactamente Δy. En estos casos, la aproximación mediante diferenciales es especialmente útil.

En la notación de diferenciales, la aproximación lineal (1) se puede escribir como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ del ejemplo 2, tiene

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, después

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y
$$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

igual a lo que halló en el ejemplo 1.

El ejemplo final ilustra el uso de diferenciales al estimar los errores que ocurren debido a las mediciones aproximadas.

EJEMPLO 4 Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en medición de cuanto mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

SOLUCIÓN Si el radio de la esfera es r, por lo tanto el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el error en el valor medido de r se denota por medio de $dr = \Delta r$, luego el error correspondiente en el valor calculado de V es ΔV, el cual puede aproximarse mediante el diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Cuando $r = 21$ y $dr = 0.05$, esto se convierte en

$$dV = 4\pi(21)^2 0.05 \approx 277$$

El error máximo en el volumen calculado es de alrededor de 277 cm^3 □

NOTA Si bien el posible error en el ejemplo 4 puede parecer bastante grande, el **error relativo** ofrece un mejor panorama del error; se calcula dividiendo el error entre el volumen total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Por esto el error relativo en el volumen es aproximadamente tres veces el error relativo en el radio. En el ejemplo 4, el error relativo en el radio es $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ y produce un error relativo de alrededor de 0.007 en el volumen. Los errores pueden expresarse asimismo como **errores de porcentaje** de 0.24% en el radio y 0.7% en el volumen.

3.10 EJERCICIOS

1–4 Encuentre la linealización $L(x)$ de la función en a.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2,\ a = -1$

2. $f(x) = \ln x,\ a = 1$

3. $f(x) = \cos x,\quad a = \pi/2$

4. $f(x) = x^{3/4},\ a = 16$

5. Encuentre la aproximación lineal a la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ en $a = 0$ y úsela para hacer una aproximación a los números $\sqrt{0.9}$ y $\sqrt{0.99}$. Ilustre dibujando f y la recta tangente.

6. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $a = 0$ y aplíquela para hacer una aproximación a los números $\sqrt[3]{0.95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$. Ilustre dibujando g y la recta tangente.

7–10 Compruebe la aproximación lineal dada en $a = 0$. A continuación determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es exacta hasta un valor menor que 0.1.

7. $\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{3}x$

8. $\tan x \approx x$

9. $1/(1+2x)^4 \approx 1 - 8x$

10. $e^x \approx 1 + x$

11–14 Calcule la diferencial de las funciones.

11. (a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \ln\sqrt{1+t^2}$

12. (a) $y = s/(1+2s)$ (b) $y = e^{-u}\cos u$

13. (a) $y = \dfrac{u+1}{u-1}$ (b) $y = (1+r^3)^{-2}$

14. (a) $y = e^{\tan \pi t}$ (b) $y = \sqrt{1+\ln z}$

15–18 (a) Calcule la diferencial de dy y (b) evalúe dy para los valores dados de x y dx.

15. $y = e^{x/10},\quad x = 0,\quad dx = 0.1$

16. $y = 1/(x+1),\quad x = 1,\quad dx = -0.01$

17. $y = \tan x,\quad x = \pi/4,\quad dx = -0.1$

18. $y = \cos x,\quad x = \pi/3,\quad dx = 0.05$

19–22 Calcule Δy y dy para los valores dados de x y $dx = \Delta x$. Luego elabore un esquema como el de la figura 5 en el que se muestren los segmentos lineales con longitudes dx, dy y Δy.

19. $y = 2x - x^2,\quad x = 2,\quad \Delta x = -0.4$

20. $y = \sqrt{x},\quad x = 1,\quad \Delta x = 1$

21. $y = 2/x,\quad x = 4,\quad \Delta x = 1$

22. $y = e^x,\quad x = 0,\quad \Delta x = 0.5$

23–28 Aplique la aproximación lineal o bien las diferenciales para estimar el número dado.

23. $(2.001)^5$

24. $e^{-0.015}$

25. $(8.06)^{2/3}$

26. $1/1002$

27. $\tan 44°$

28. $\sqrt{99.8}$

29–31 Explique, en términos de aproximaciones lineales o diferenciales, por qué es razonable la aproximación.

29. $\sec 0.08 \approx 1$

30. $(1.01)^6 \approx 1.06$

31. $\ln 1.05 \approx 0.05$

32. Sean $\quad f(x) = (x-1)^2 \qquad g(x) = e^{-2x}$

y $\qquad h(x) = 1 + \ln(1-2x)$

(a) Encuentre la linealización de f, g y h en $a = 0$. ¿Qué advierte? ¿Cómo explica lo que sucedió?

(b) Dibuje f, g y h y su aproximación lineal. ¿Para cuál función es mejor la aproximación lineal? Explique.

33. Se encontró que la arista de un cubo es 30 cm, con un error posible en la medición de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error posible máximo, error relativo, y el porciento de error al calcular (a) el volumen del cubo y (b) el área superficial del cubo.

34. Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm.

(a) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.

(b) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el error en porcentaje?

35. La circunferencia de una esfera se midió como 84 cm, con un error posible de 0.5 cm.

(a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?

(b) Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

36. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.

37. (a) Aplique diferenciales para determinar una fórmula para el volumen aproximado de un cascarón cilíndrico de altura h, radio interno r y espesor Δr.

(b) ¿Cuál es el error que hay al utilizar la fórmula del inciso (a)?

38. Se conocen un lado de un triángulo rectángulo de 20 cm de longitud y se mide el ángulo opuesto de 30°, con un error posible de ±1°.

(a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?

(b) Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

39. Si una corriente I pasa através de un resistor con resistencia R la ley de Ohm establece que la caida de voltaje es $V = RI$. Si V es constante y R se mide con un cierto error, aplique diferenciales para mostrar que el cálculo de I es aproximadamente el mismo (en magnitud) que el error relativo en R.

40. Cuando la sangre fluye por un vaso sanguíneo, el flujo F (el volumen de sangre por unidad de tiempo que corre por un punto dado) es proporcional a la cuarta potencia del radio R de ese vaso:

$$F = kR^4$$

(Ésta se conoce como ley de Poiseuille; en la sección 8.4 se muestra por qué es verdadera.) Una arteria parcialmente obstruida se puede expandir por medio de una operación llamada angioplastia, en la cual un catéter provisto de un globo en la punta se infla dentro del vaso con el fin de ensancharlo y restituir el flujo sanguíneo normal.

Demuestre que el cambio relativo en F es alrededor de cuatro veces el cambio relativo en R. ¿Cómo afectará un aumento del 5% en el radio al flujo de sangre?

41. Deduzca las reglas siguientes para trabajar con diferenciales, donde c es una constante y u y v son funciones de x).

(a) $dc = 0$ (b) $d(cu) = c\,du$

(b) $d(u + v) = du + dv$ (b) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

(c) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ (b) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. En la página 431 de *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), mientras se deriva la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para el periodo de un péndulo de duración L, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g\,\text{sen}\,\theta$ para la aceleración tangencial del breve movimiento del péndulo. Luego dice "para ángulos pequeños, el valor de θ en radianes está muy cerca del valor de sen θ; difieren menos que 2% hasta alrededor de 20°".

(a) Compruebe la aproximación lineal en 0 para la función seno:

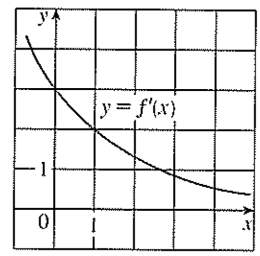
$$\text{sen}\,x \approx x$$

(b) Use un dispositivo graficador para determinar los valores de x para los cuales sen x y x difieren menos de 2%. Enseguida compruebe la afirmación de Hecht convirtiendo de radianes a grados.

43. Suponga que la única información acerca de una función f es que $f(1) = 5$ y la gráfica de su *derivada* es como se ilustra.

(a) Use una aproximación lineal para estimar $f(0.9)$ y $f(1.1)$.

(b) ¿Sus estimaciones para el inciso (a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.



44. Suponga que no tiene una fórmula para $g(x)$ pero sabe que $g(2) = -4$ y $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para toda x.

(a) Use una aproximación lineal para estimar $g(1.95)$ y $g(2.05)$.

(b) ¿Sus estimaciones para el inciso (a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.

PROYECTO DE LABORATORIO — POLINOMIOS DE TAYLOR

La aproximación de la recta tangente $L(x)$ es la mejor aproximación de primer grado (lineal) a $f(x)$, cerca de $x = a$, porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen la misma relación de cambio (derivada) en a. Para tener una aproximación mejor que una lineal, intente una aproximación de segundo grado (cuadrática) $P(x)$. En otras palabras, aproxime una curva mediante una parábola en lugar de por una recta. Para tener la seguridad de que la aproximación es buena, estipule lo siguiente:

(i) $P(a) = f(a)$ (P y f deben tener el mismo valor en a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ (P y f deben tener la misma relación de cambio en a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ (Las pendientes de P y f deben tener la misma relación de cambio en a.)

1. Encuentre la aproximación cuadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para la función $f(x) = \cos x$, que satisfaga las condiciones (i), (ii) y (iii), con $a = 0$. Dibuje P, f y la aproximación lineal $L(x) = 1$, en una pantalla común. Comente cuán bien las funciones P y L se aproximan a f.

2. Determine los valores de x para los que la aproximación cuadrática $f(x) = P(x)$ del problema 1 es exacta con una diferencia menor que 0.1. [*Sugerencia*: Dibuje $y = P(x)$, $y = \cos x - 0.1$ y $y = \cos x + 0.1$ en una pantalla común.]

3. Para obtener una aproximación de una función f mediante una función cuadrática P cerca de un número a, lo mejor es escribir P en la forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Demuestre que la función cuadrática que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) es

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encuentre la aproximación cuadrática para $f(x) = \sqrt{x + 3}$, cerca de $a = 1$. Trace las gráficas de f, la aproximación cuadrática y la aproximación lineal del ejemplo 2 de la sección 3.10 en una pantalla común. ¿Qué podría concluir?

5. En lugar de quedar conforme con una aproximación lineal o una cuadrática para $f(x)$, cerca de $x = a$, intente hallar mejores aproximaciones, con polinomios de grado más alto. Busque un polinomio de n-ésimo grado

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n y sus n primeras derivadas tengan los mismos valores en $x = a$ como f y sus n primeras derivadas. Derive repetidas veces y haga $x = a$, para demostrar que estas condiciones se satisfacen si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ y, en general,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

donde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. El polinomio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

se llama **polinomio de Taylor de n-ésimo grado, de f, con centro en a.**

6. Encuentre el polinomio de Taylor de octavo grado, con centro en $a = 0$, para la función $f(x) = \cos x$. Dibuje f y los polinomios de Taylor T_2, T_4, T_6, T_8, en rectángulos de visualización $[-5, 5]$ por $[-1.4, 1.4]$; comente cuán bien se aproximan a f.

3.11 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Ciertas combinaciones de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} surgen tan a menudo en la matemática y sus aplicaciones que merecen recibir un nombre especial. En muchos aspectos son similares a las funciones trigonométricas y tienen la misma relación con la hipérbola que las funciones trigonométricas tienen con la circunferencia. Por esta razón se les llama en forma colectiva **funciones hiperbólicas** y de manera individual se les conoce como **seno hiperbólico**, **coseno hiperbólico** y así sucesivamente.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Las gráficas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico se pueden delinear mediante suma gráfica como en las figuras 1 y 2.

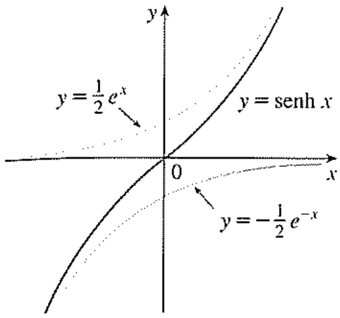


FIGURA 1
$y = \text{senh} x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

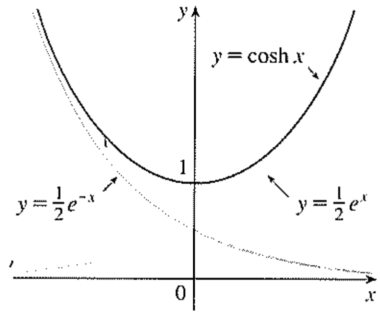


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

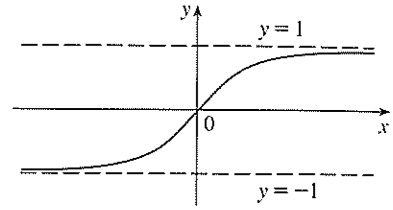


FIGURA 3
$y = \tanh x$

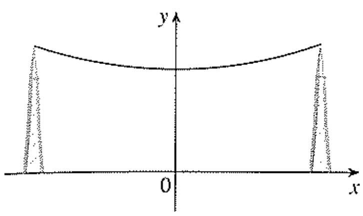


FIGURA 4
Catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$

Observe que el dominio de senh es $\mathbb{R}$ y el intervalo es $\mathbb{R}$, pero que cosh tiene por dominio $\mathbb{R}$ y intervalo $[1, \infty)$. En la figura 3 se muestra la gráfica de tanh. Ésta tiene las asíntotas horizontales $y = \pm 1$. (Véase ejercicio 23.)

Algunos de los usos matemáticos de las funciones hiperbólicas se tratan en el capítulo 7. Las aplicaciones en la ciencia y la ingeniería se tienen siempre que una entidad, como luz, velocidad, electricidad o radiactividad se absorbe o se extingue en forma gradual, puesto que el decaimiento se puede representar mediante funciones hiperbólicas. La aplicación más famosa es el uso del coseno hiperbólico para describir la forma de un cable colgante. Se puede demostrar que si un cable pesado y flexible (como los que se usan para las líneas telefónicas o eléctricas) se tiende entre dos puntos a la misma altura, en tal caso el cable toma la forma de una curva con ecuación $y = c + a\cosh(x/a)$ que se denomina *catenaria* (véase figura 4). (Esta palabra proviene de la palabra latina *catena* que significa "cadena".)

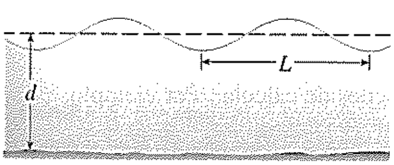


FIGURA 5
Ola en el mar idealizada

Otras aplicación de las funciones hiperbólicas suceden en la descripción de los olas del mar: La velocidad de una ola con longitud L que se traslada através de un cuerpo de agua con profundidad d se modela por la función

$$v \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

donde g es la aceleración debido a la gravedad (véase figura 5 y ejercicio 49.)

Las funciones hiperbólicas satisfacen un número de identidades que son similares a las muy bien conocidas identidades trigonométricas. A continuación se listan algunas de ellas y la mayoría de las demostraciones se deja para los ejercicios.

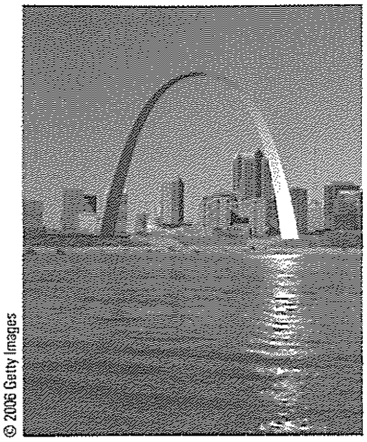
IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

$$\text{senh}(-x) = -\text{senh } x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$$

$$\text{senh}(x + y) = \text{senh } x \cosh y + \cosh x \text{ senh } y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \text{senh } x \text{ senh } y$$



El arco Gateway en St. Louis se diseñó aplicando una función coseno hiperbólico (ejercicio 48).

V EJEMPLO 1 Demuestre (a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ y (b) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a)
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(b) Empiece con la identidad demostrada en el inciso (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Si divide los dos lados por $\cosh^2 x$, obtiene

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

o bien,
$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$ □

La identidad demostrada en el ejemplo 1(a) proporciona una pista sobre el nombre de funciones "hiperbólicas":

Si t es cualquier número real, después el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ queda en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ porque $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. En efecto, t se puede interpretar como la medida en radianes de $\angle POQ$ de la figura 6. Ésta es la razón por la que las funciones trigonométricas se denominan algunas veces funciones *circulares*.

De manera similar, si t es cualquier número real, en seguida el punto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ queda en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ porque $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ y $\cosh t \geqslant 1$. Pero ahora t no representa la medida de un ángulo. Resulta que t representa el doble del área del sector hiperbólico sombreado de la figura 7, de la misma manera como en el caso trigonométrico t representa el doble del área del sector circular sombreado en la figura 6.

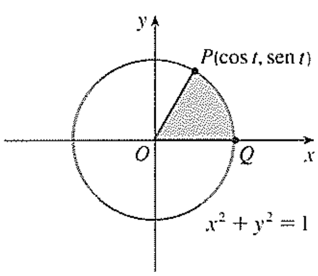


FIGURA 6

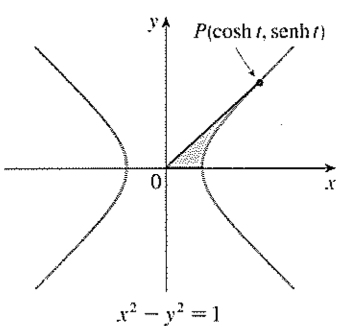


FIGURA 7

Las derivadas de las funciones hiperbólicas son fáciles de calcular. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Se da una lista de las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas en la tabla 1 siguiente. El resto de las demostraciones se dejan como ejercicios. Observe la similitud con las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas, pero advierta que los signos son diferentes en algunos casos.

1 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

EJEMPLO 2 Cualquiera de estas reglas de derivación se puede combinar con la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh\sqrt{x}) = \operatorname{senh}\sqrt{x}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$ □

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

De acuerdo con las figuras 1 y 3, senh y tanh son funciones uno a uno por lo que tienen funciones inversas denotadas por senh^{-1} y $\tanh^{-1}$. En la figura 2 se observa que cosh no es uno a uno, sino que cuando queda restringido al dominio $[0, \infty)$ se transforma en uno a uno. La función coseno hiperbólico inversa se define como la inversa de esta función restringida.

2

$$\begin{aligned} y = \operatorname{senh}^{-1}x &\iff \operatorname{senh} y = x \\ y = \cosh^{-1}x &\iff \cosh y = x \quad \text{y} \quad y \geqslant 0 \\ y = \tanh^{-1}x &\iff \tanh y = x \end{aligned}$$

Las funciones hiperbólicas inversas que faltan se definen de manera similar (véase ejercicio 28).

Las funciones senh^{-1}, $\cosh^{-1}$ y $\tanh^{-1}$ se grafican en las figuras 8, 9, y 10 con ayuda de las figuras 1, 2 y 3.

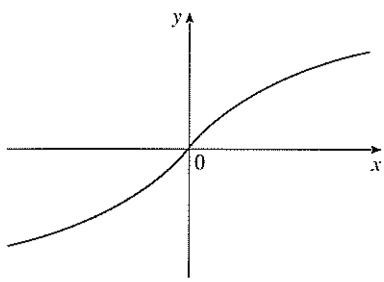


FIGURA 8 $y = \operatorname{senh}^{-1}x$
dominio $= \mathbb{R}$ rango $= \mathbb{R}$

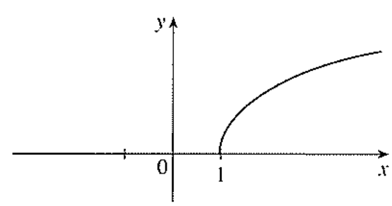


FIGURA 9 $y = \cosh^{-1}x$
dominio $= [1, \infty)$ rango $= [0, \infty)$

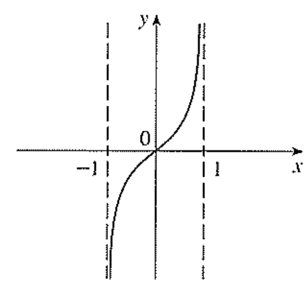


FIGURA 10 $y = \tanh^{-1}x$
dominio $= (-1, 1)$ rango $= \mathbb{R}$

Puesto que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no sorprende enterarse que las funciones hiperbólicas inversas se pueden expresar en términos de logaritmos. En particular, tiene que:

La fórmula 3 se demuestra en el ejemplo 3. En los ejercicios 26 y 27 se piden las demostraciones de las fórmulas 4 y 5.

3 $$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

5 $$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

EJEMPLO 3 Demuestre que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

SOLUCIÓN Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. En tal caso

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

por lo que $$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

o bien, si multiplica por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Esto es ni más ni menos que una ecuación cuadrática en e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Observe que $e^y > 0$, pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (porque $x < \sqrt{x^2 + 1}$). Por esto, el signo menos es inadmisible y

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Por lo tanto, $$y = \ln(e^y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

(Refiérase al ejercicio 25 donde se ilustra otro método.)

[6] DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Observe que, al parecer, las fórmulas para las derivadas de $\tanh^{-1}x$ y $\coth^{-1}x$ son idénticas, pero los dominios de estas funciones no tienen números comunes: $\tanh^{-1}x$ se define por $|x| < 1$, mientras que $\coth^{-1}x$ se define por $|x| > 1$.

Las funciones hiperbólicas inversas son derivables porque las funciones hiperbólicas son derivables. Las fórmulas de la tabla 6 se pueden demostrar por el método de las funciones inversas o mediante la derivación de las fórmulas 3, 4 y 5.

V EJEMPLO 4 Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUCIÓN Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Por lo tanto $\operatorname{senh} y = x$. Si deriva esta ecuación en forma implícita con respecto a x, obtiene

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Puesto que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ y $\cosh y \geqslant 0$, tiene $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUCIÓN 2 De acuerdo con la ecuación 3 (demostrada en el ejemplo 3) obtiene

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$ □

EJEMPLO 5 Determine $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)]$.

SOLUCIÓN Con ayuda de la tabla 6 y de la regla de la cadena obtiene

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)] = \frac{1}{1-(\operatorname{sen} x)^2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$$ □

3.11 EJERCICIOS

1–6 Calcule el valor numérico de cada expresión.

1. (a) senh 0 (b) cosh 0

2. (a) tanh 0 (b) tanh 1

3. (a) senh(ln 2) (b) senh 2

4. (a) cosh 3 (b) cosh(ln 3)

5. (a) sech 0 (b) $\cosh^{-1} 1$

6. (a) senh 1 (b) $\operatorname{senh}^{-1} 1$

7–19 Demuestre la identidad

7. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
(Esto demuestra que senh es una función impar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Esto demuestra que cosh es una función par.)

9. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$

10. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$

11. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

12. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

13. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

14. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

15. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

17. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$

19. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$
(n es un número real)

20. Si $\tanh x = \frac{12}{13}$, calcular los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

21. Si $\cosh x = \frac{5}{3}$ y $x > 0$, calcular los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

22. (a) Utilice las gráficas de senh, cosh y tanh de las figuras 1 a 3 para dibujar las gráficas de csch, sech y coth.

(b) Compruebe las gráficas que trazó en el inciso (a) mediante una calculadora graficadora o de una computadora.

23. Aplique las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar cada uno de los límites siguientes.

(a) $\lim_{x\to\infty} \tanh x$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \tanh x$

(c) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{senh} x$ (d) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{senh} x$

(e) $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sech} x$ (f) $\lim_{x\to\infty} \coth x$

(g) $\lim_{x\to0^+} \coth x$ (h) $\lim_{x\to0^-} \coth x$

(i) $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{csch} x$

24. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 1 para el caso de las derivadas de las funciones (a) cosh, (b) tanh, (c) csch, (d) sech y (e) coth.

25. Encuentre otra solución para el ejemplo 3 haciendo $y = \operatorname{senh}^{-1}x$ y luego usando el ejercicio 9 y el ejemplo 1(a) en donde y reemplaza a x.

26. Demuestre la ecuación 4.

27. Demuestre la ecuación 5 aplicando (a) el método del ejemplo 3 y (b) el ejercicio 18 en donde y reemplaza a x.

28. Para cada una de las funciones siguientes (i) proporcione una definición como la de (2), (ii) trace la gráfica y (iii) encuentre una fórmula similar a la ecuación 3.
(a) csch^{-1} (b) sech^{-1} (c) $\coth^{-1}$

29. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 6 para las derivadas de las funciones siguientes.
(a) $\cosh^{-1}$ (b) $\tanh^{-1}$ (c) csch^{-1}
(d) sech^{-1} (e) $\coth^{-1}$

30–47 Encuentre la derivada.

30. $f(x) = \tanh(1 + e^{2x})$

31. $f(x) = x \operatorname{senh} x - \cosh x$

32. $g(x) = \cosh(\ln x)$

33. $h(x) = \ln(\cosh x)$

34. $y = x \coth(1 + x^2)$

35. $y = e^{\cosh 3x}$

36. $f(t) = \operatorname{csch} t(1 - \ln \operatorname{csch} t)$

37. $f(t) = \operatorname{sech}^2(e^t)$

38. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$

39. $y = \arctan(\tanh x)$

40. $x = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}}$

41. $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

42. $y = x^2 \operatorname{senh}^{-1}(2x)$

43. $y = \tanh^{-1}\sqrt{x}$

44. $y = x \tanh^{-1}x + \ln\sqrt{1 - x^2}$

45. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

46. $y = \operatorname{sech}^{-1}\sqrt{1 - x^2}, \quad x > 0$

47. $y = \coth^{-1}\sqrt{x^2 + 1}$

---

48. El Arco Gateway en St. Louis fue diseñado por Eero Saarinen y fue construido empleando la ecuación.

$$y = 211.49 - 20.96 \cosh 0.03291765x$$

para la curva central del acrco. Donde x y y se miden en metros y $|x| \leq 91.20$.
(a) Grafique la curva central.
(b) ¿Cuál es la altura del arco en su centro?
(c) ¿En qué punto la altura es de 100 m?
(d) ¿Cuál es la pendiente del arco en el punto del inciso (c)?

49. Si las olas con longitud L se mueven con velocidad v en un cuerpo de agua con profundidad d en tal caso.

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

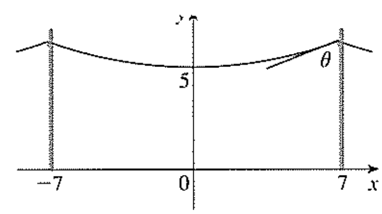
Donde g es la aceleración debida a la gravedad. (Véase figura 5.) Explique por que la aproximación

$$v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

es apropiada en aguas profundas.

50. Un cable flexible siempre forma una catenaria $y = c + a \cosh(x/a)$, donde c y a son constantes y $a > 0$ (véase figura 4 y ejercicio 50). Grafique varios miembros de la familia de las funciones $y = a \cosh(x/a)$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando a varía?

51. Un cable de teléfono cuelga entre dos postes que están separados entre sí 14 metros y forma una catenaria $y = 20 \cosh(x/20) - 15$, donde x y y se miden en metros.
(a) Encuentre la pendiente de esta curva donde se encuentra con el poste derecho.
(b) Calcule el ángulo θ entre el cable y el poste.



Mediante los principios de la física se puede demostrar que ...lo un cable cuelga entre dos postes toma la forma de una $y = f(x)$ que cumple con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde ρ es la densidad lineal del cable, g es la aceleración de la gravedad y T es la tensión del cable en su punto más bajo. El sistema coordenado se elige en forma adecuada. Compruebe que la función

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g} \cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

es una solución de esta ecuación diferencial.

53. (a) Demuestre que cualquier función de la forma

$$y = A \operatorname{senh} mx + B \cosh mx$$

cumple con la ecuación diferencial $y'' = m^2 y$.

(b) Determine $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$, y $y'(0) = 6$.

54. Evalúe $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x}$.

55. ¿En qué punto de la curva $y = \cosh x$ la tangente tiene pendiente 1?

56. Si $x = \ln(\sec \theta + \tan \theta)$, demuestre que $\sec \theta = \cosh x$.

57. Demuestre que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces existen números α y β tales que $ae^x + be^{-x}$ es igual a $\alpha \operatorname{senh}(x + \beta)$ o a $\alpha \cosh(x + \beta)$. En otras palabras, casi toda función de la forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ es una función seno hiperbólico o coseno hiperbólico desplazada o estirada.

3 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Exprese cada una de las siguientes reglas de derivación, tanto en símbolos como en palabras.
   (a) Regla de la potencia (b) Regla del múltiplo constante
   (c) Regla de la suma (d) Regla de la diferencia
   (e) Regla del producto (f) Regla del cociente
   (g) Regla de la cadena

2. Proporcione las derivadas de cada función
   (a) $y = x^n$ (b) $y = e^x$ (c) $y = a^x$
   (d) $y = \ln x$ (e) $y = \log_a x$ (f) $y = \operatorname{sen} x$
   (g) $y = \cos x$ (h) $y = \tan x$ (i) $y = \csc x$
   (j) $y = \sec x$ (k) $y = \cot x$ (l) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
   (m) $y = \cos^{-1} x$ (n) $y = \tan^{-1} x$ (o) $y = \operatorname{senh} x$
   (p) $y = \cosh x$ (q) $y = \tanh x$ (r) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
   (s) $y = \cosh^{-1} x$ (t) $y = \tanh^{-1} x$

3. (a) ¿Cómo se define el número e?
   (b) Exprese e como un límite.
   (c) ¿Por qué en cálculo se usa la función exponencial natural, $y = e^x$, con más frecuencia que las demás funciones exponenciales, $y = a^x$?
   (d) ¿Por qué en el cálculo se usa más la función logarítmica natural, $y = \ln x$ que las demás funciones logarítmicas, $y = \log_a x$?

4. (a) Explique cómo funciona la derivación implícita.
   (b) Explique cómo funciona la derivación logarítmica.

5. (a) Escriba una expresión para la linealización de f en a.
   (b) Si $y = f(x)$, escriba un expresión para la diferencial dy.
   (c) Si $dx = \Delta x$, dibuje un esquema para mostrar el significado geométrico de Δy y dy.

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o mencione un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son derivables, por lo tanto

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Si $y = e^2$, entonces $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. Si $g(x) = x^5$, entonces $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

12. Una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en $(-2, 4)$ es $y - 4 = 2x(x + 2)$.

EJERCICIOS

1–50 Calcule y'.

1. $y = (x^4 - 3x^2 + 5)^3$

2. $y = \cos(\tan x)$

3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

4. $y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$

5. $y = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

7. $y = e^{\operatorname{sen} 2\theta}$

8. $y = e^{-t}(t^2 - 2t + 2)$

9. $y = \dfrac{t}{1 - t^2}$

10. $y = e^{mx} \cos nx$

11. $y = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$

12. $y = (\operatorname{arcsen} 2x)^2$

13. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

14. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$

15. $xy^4 + x^2y = x + 3y$

16. $y = \ln(\csc 5x)$

17. $y = \dfrac{\sec 2\theta}{1 + \tan 2\theta}$

18. $x^2 \cos y + \operatorname{sen} 2y = xy$

19. $y = e^{cx}(c \operatorname{sen} x - \cos x)$

20. $y = \ln(x^2 e^x)$

21. $y = e^{e^x}$

22. $y = \sec(1 + x^2)$

23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$

24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$

26. $y = \sqrt{\operatorname{sen} \sqrt{x}}$

27. $y = \log_5(1 + 2x)$

28. $y = (\cos x)^x$

29. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$

30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$

31. $y = x \tan^{-1}(4x)$

32. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

33. $y = \ln|\sec 5x + \tan 5x|$

34. $y = 10^{\tan \pi\theta}$

35. $y = \cot(3x^2 + 5)$

36. $y = \sqrt{t \ln(t^4)}$

37. $y = \operatorname{sen}\left(\tan \sqrt{1 + x^3}\right)$

38. $y = \arctan\left(\operatorname{arcsen} \sqrt{x}\right)$

39. $y = \tan^2(\operatorname{sen} \theta)$

40. $xe^y = y - 1$

41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}\,(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$

42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

43. $y = x \operatorname{senh}(x^2)$

44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$

45. $y = \ln(\cosh 3x)$

46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$

47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$

48. $y = x \tanh^{-1}\sqrt{x}$

49. $y = \cos(e^{\sqrt{\tan 3x}})$

50. $y = \operatorname{sen}^2(\cos\sqrt{\operatorname{sen} \pi x})$

51. Si $f(t) = \sqrt{4t + 1}$, encuentre $f''(2)$.

52. Si $g(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, halle $g''(\pi/6)$.

53. Encuentre y'' si $x^6 + y^6 = 1$.

54. Determine $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = 1/(2 - x)$.

55. Aplique la inducción matemática (página 77) para demostrar que si $f(x) = xe^x$, entonces $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Evalúe $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{t^3}{\tan^3(2t)}$.

57–59 Encuentre ecuaciones de la recta tangente a la curva en el punto dado.

57. $y = 4 \operatorname{sen}^2 x, \quad (\pi/6, 1)$

58. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad (0, -1)$

59. $y = \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen} x}, \quad (0, 1)$

60–61 Hallar ecuaciones de línea tangente y normal a la curva en el punto que se especifica.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13, \quad (2, 1)$

61. $y = (2 + x)e^{-x}, \quad (0, 2)$

62. Si $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, halle $f'(x)$. Dibuje f y f' en la misma pantalla y haga comentarios.

63. (a) Si $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, halle $f'(x)$.
(b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x\sqrt{5 - x}$ en los puntos $(1, 2)$ y $(4, 4)$.
(c) Ilustre el inciso (b) dibujando la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.
(d) Verifique si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

64. (a) Si $f(x) = 4x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encuentre f' y f''.
(b) Verifique si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f, f' y f''.

65. ¿En qué puntos de la curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, la tangente es una recta horizontal?

66. Encuentre los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde la recta tangente tiene pendiente 1.

67. Si $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, demuestre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$$

68. (a) Al derivar la fórmula del coseno del ángulo doble

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

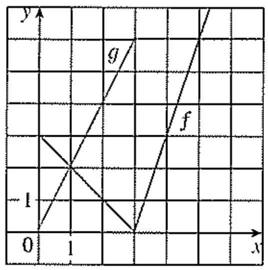
obtenga la fórmula correspondiente para la función seno.
(b) Al derivar la fórmula de la adición

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$$

obtenga la fórmula de la adición para la función coseno.

69. Suponga que $h(x) = f(g)g(x)$ y $F(x) = f(g(x))$, donde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $f'(5) = 11$. Encuentre (a) $h'(2)$ y (b) $F'(2)$.

70. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sea $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ y $C(x) = f(g(x))$. Encuentre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$ y (c) $C'(2)$.



71–78 Encuentre f' en términos de g'.

71. $f(x) = x^2g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln|g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79–81 Halle h' en términos de f' y g'.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\text{sen } 4x))$

82. (a) Dibuje la función $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ en el rectángulo de visualización $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
(b) ¿En qué intervalo es más grande la razón de cambio promedio: $[1, 2]$ o $[2, 3]$?
(c) ¿En qué valor de x es más grande la razón de cambio instantánea: $x = 2$ o $x = 5$?
(d) Compruebe sus estimaciones visuales del inciso (c) calculando $f'(x)$ y comparando los valores numéricos de $f'(2)$ y $f'(5)$.

83. ¿En qué punto sobre la curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ es la tangente horizontal?

84. (a) Encuentre una ecuación de la tangente a la curva $y = e^x$ que sea paralela a la recta $x - 4y = 1$.
(b) Encuentre una ecuación para la tangente de la curva $y = e^x$ que pase a través del origen.

85. Halle una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pase por el punto $(1, 4)$ y cuyas rectas tangentes en $x = -1$ y $x = 5$ tengan pendientes 6 y -2 respectivamente.

86. La función $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$, se usa para modelar la concentración en el instante t de un medicamento que se inyecta en el torrente sanguíneo.
(a) Demuestre que $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.
(b) Encuentre $C'(t)$, la rapidez con que el medicamento se disipa en la circulación.
(c) ¿Cuándo es esta rapidez igual a 0?

87. Una ecuación de movimiento de la forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa oscilación amortiguada de un objeto. Encuentre la velocidad y la aceleración del objeto.

88. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de modo que su coordenada en el instante t es $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geq 0$, donde b y c son constantes positivas.
(a) Encuentre las funciones de aceleración y de velocidad.
(b) Demuestre que la partícula siempre se desplaza en dirección positiva.

89. Una partícula se desplaza sobre una recta vertical de manera que su ordenada en el instante t es $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geq 0$.
(a) Encuentre las funciones de aceleración y de velocidad.
(b) ¿Cuándo se mueve hacia arriba la partícula y cuándo hacia abajo?
(c) Halle la distancia a lo largo de la cual se desplaza la partícula en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 3$.
(d) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 3$.
(e) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿Cuándo disminuye su rapidez $0 \leq t \leq 3$?

90. El volumen de un cono circular recto es $V = \pi r^2h/3$, en donde r es el radio de la base y h es la altura.
(a) Halle la proporción de cambio del volumen con respecto a la altura, si el radio es constante.
(b) Encuentre la proporción de cambio del volumen con respecto al radio, si la altura es constante.

91. La masa de una parte de un alambre es $x(1 + \sqrt{x})$ kilogramos, donde x se mide en metros desde uno de los extremos del alambre. Encuentre la densidad lineal del alambre cuando $x = 4$ m.

92. El costo, en dólares, de producir x unidades de un artículo es

$$C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.00007x^3$$

(a) Encuentre la función de costo marginal.
(b) Halle $C'(100)$ y explique su significado.
(c) Compare $C'(100)$ con el costo para producir el artículo 101.

93. Inicialmente un cultivo de bacterias contiene 200 células y crecen con una razón porporcional a su tamaño. Después de media hora la población se ha incrementado a 360 células
(a) Establecer el número de bacterias después de t horas.
(b) Calcular el número de bacterias después de 4 horas.
(c) Encontrar la rapidez de crecimiento después de 4 horas.
(d) ¿Cuándo la población alcanzá 10 000?

94. El cobalto-60 tiene una vida media de 5.24 años.
(a) Hallar la masa que queda de una muestra de 100 mg después de 20 años.
(b) ¿Cuánto tardaría la masa en decaer a 1 mg?

95. Sea $C(t)$ la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo. Cuando el cuerpo elimina el medicamento, $C(t)$ disminuye con una rapidez que es proporcional a la cantidad de medicamento que está presente en el tiempo t. En estos términos $C'(t) = -kC(t)$, donde k es un número positivo o denominado *constante de eliminación* del medicamento.
(a) Si C_o es la concentración en el tiempo $t = 0$, hallar la concentración en el tiempo t.
(b) Si el cuerpo elimina la mitad del medicamento en 30 horas, ¿cuánto tiempo transcurre para eliminar el 90% de medicamento.

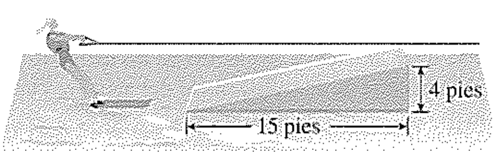
96. Una taza con chocolate caliente tiene una temperatura de 80°C en una habitación que se mantiene en 20°C. Después de media hora el chocolate caliente se enfría a 60°C.
(a) ¿Cuál es la temperatura del chocolate después de otra media hora.
(b) ¿Cuándo se enfriará el chocolate a 40°C?

97. El volumen de un cubo se incrementa a razón de 10 cm^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa el área superficial cuando la longitud de un lado es de 30 cm?

98. Un vaso de papel tiene la forma de un cono de altura igual a 10 cm y radio de 3 cm, en la parte superior. Si el agua se vierte en el vaso a razón de 2 cm^3/s, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene 5 cm de profundidad?

99. Un globo sube con rapidez constante de 5 pies/s. Un niño va en bicicleta por un camino recto a una rapidez de 15 pies/s. Cuando pasa bajo el globo, éste está a 45 pies arriba de él. ¿Qué tan rápido se incrementa la distancia entre el niño y el globo 3 s más tarde?

100. Una esquiadora pasa por la rampa que se ilustra en la figura con una rapidez de 30 pies/s. ¿Qué tan rápido se eleva cuando deja la rampa?



101. El ángulo de elevación del Sol decrece a razón de 0.25 rad/h. ¿Qué tan rápido se incrementa la sombra de un edificio de 400 pies de altura cuando el ángulo de elevación del Sol es $\pi/6$?

102. (a) Encuentre la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ cerca de 3.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando f y la aproximación lineal.
(c) ¿Para qué valores de x es exacta la aproximación lineal dentro de 0.1?

103. (a) Halle la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ en $a = 0$. Enuncie la aproximación lineal correspondiente y úsela para proporcionar un valor aproximado de $\sqrt[3]{1.03}$.
(b) Determine los valores de x para los que la aproximación lineal dada en el inciso (a) sea exacta con una diferencia menor que 0.1.

104. Evalúe dy si $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ y $dx = 0.2$.

105. Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. La base de la ventana se mide como si tuviera un ancho de 60 cm, con un error posible en la medición de 0.1 cm. Use diferenciales para estimar el error posible máximo al calcular el área de la ventana.

106–108 Exprese el límite como una derivada y evalúelo.

106. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{17} - 1}{x - 1}$

107. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

108. $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi/3} \frac{\cos\theta - 0.5}{\theta - \pi/3}$

---

109. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$

110. Suponga que f es una función derivable tal que $f(g(x)) = x$ y $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Demuestre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

111. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

112. Demuestre que la longitud de la parte de cualquier recta tangente a la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ limitada por los ejes de coordenadas es constante.

Antes de trabajar en el ejemplo, cubra la solución e intente resolverlo primero

EJEMPLO 1 ¿Cuántas rectas son tangentes a las dos parábolas $y = -1 - x^2$ y $y = 1 + x^2$? Calcule las coordenadas de los puntos en los cuales estas tangentes tocan a las parábolas.

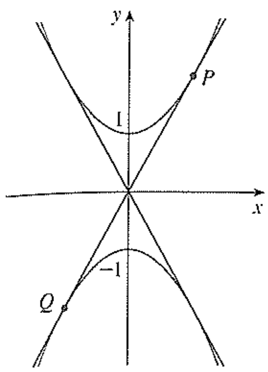


FIGURA 1

SOLUCIÓN Para entender este problema es esencial elaborar un esquema en donde estén las parábolas $y = 1 + x^2$ (que es la parábola estándar $y = x^2$ desplazada una unidad hacia arriba) y $y = -1 - x^2$ (la cual se obtiene al reflejar la primera parábola con respecto al eje x). Si trata de dibujar una tangente para ambas parábolas, pronto descubrirá que sólo hay dos posibilidades, que se ilustran en la figura 1.

Sea P un punto en el cual una de estas tangentes toca la parábola superior y sea a su coordenada x. (Es muy importante escoger la notación para la incógnita. Muy bien podía haber escogido b o c o x_0 o x_1 en lugar de a. Sin embargo, no se recomienda utilizar x en lugar de a porque se podría confundir con la variable x de la ecuación de la parábola.) Después, como P está en la parábola $y = 1 + x^2$, su coordenada y debe ser $1 + a^2$. Debido a la simetría mostrada en la figura 1, las coordenadas del punto Q donde la tangente toca a la parábola inferior debe ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar la información de que la recta es una tangente, iguale la pendiente de la recta PQ con la pendiente de la tangente en P. Así tiene que

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

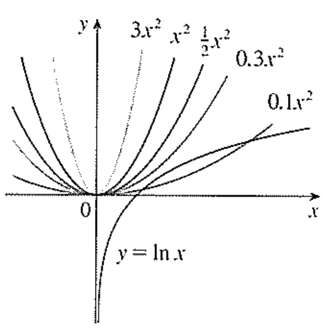


FIGURA 2

Si $f(x) = 1 + x^2$, en tal caso la pendiente de la tangente en P es $f'(a) = 2a$. Por consiguiente, la condición que necesita aplicar es

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Al resolver esta ecuación tiene $1 + a^2 = 2a^2$, por lo que $a^2 = 1$ y $a = \pm 1$. Por lo tanto, los puntos son $(1, 2)$ y $(-1, -2)$. Por simetría, los dos puntos restantes son $(-1, 2)$ y $(1, -2)$. □

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de c la ecuación $\ln x = cx^2$ tiene exactamente una solución?

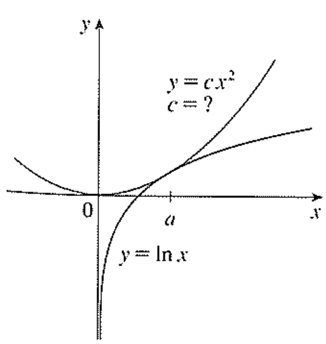


FIGURA 3

SOLUCIÓN Uno de los principios más importantes de la solución de problemas es dibujar un diagrama, incluso si el problema, según se enuncia, no menciona en forma explícita una situación geométrica. Este problema se puede formular de nuevo en términos geométricos, como sigue: ¿Para cuáles valores de c la curva $y = \ln x$ interseca la curva $y = cx^2$ exactamente en un punto?

Empiece por trazar las gráficas de $y = \ln x$ y $y = cx^2$ para diversos valores de c. Sabe que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ es una parábola que se abre hacia arriba si $c > 0$ y, hacia abajo, si $c < 0$. En la figura 2 se muestran las parábolas $y = cx^2$ para varios valores positivos de c. La mayor parte no se cruzan con $y = \ln x$ y una la corta dos veces. Se tiene la sensación de que debe haber un valor de c (en alguna parte entre 0.1 y 0.3) para el cual las curvas se cruzan exactamente una vez, como en la figura 3.

Para hallar ese valor de c en particular, denote con a la coordenada x del punto único de intersección. En otras palabras, $\ln a = ca^2$, de modo que a sea la solución única de la ecuación dada. En la figura 2 las curvas sólo se tocan, de modo que tienen una tangente común cuando $x = a$. Esto significa que las curvas $y = \ln x$ y tienen la misma pendiente cuando $x = a$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

Si se resuelven las ecuaciones $\ln a = ca^2$ y $1/a = 2ca$, se obtiene

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

De donde, $a = e^{1/2}$ y

$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

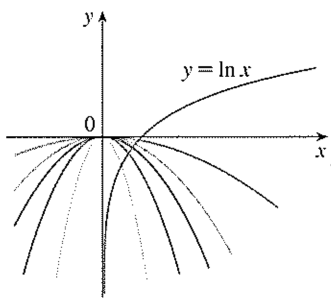


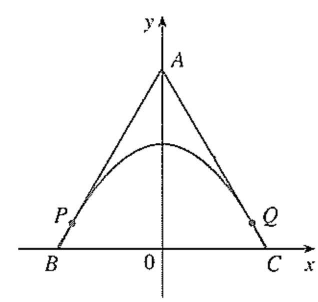
FIGURA 4

Para los valores negativos de c, la situación que se ilustra en la figura 4: todas las parábolas $y = cx^2$ con valores negativos de c cruzan $y = \ln x$ exactamente una vez. Y no olvide lo referente a $c = 0$. La curva $y = 0x^2 = 0$ es el eje x, el cual cruza $y = \ln x$ exactamente una vez.

Para resumir, los valores requeridos de c son $c = 1/(2e)$ y $c \leqslant 0$. □

PROBLEMAS

1. Determine los puntos P y Q sobre la parábola $y = 1 - x^2$ de modo que el triángulo ABC formado por el eje x y las tangentes en P y Q sea un triángulo equilátero.



2. Determine el punto donde las curvas $y = x^3 - 3x + 4$ y $y = 3(x^2 - x)$ son tangentes entre sí, es decir, tienen una tangente común. Ilustre mediante la representación gráfica de ambas curvas y la tangente común.

3. Demuestre que las líneas tangente a la parábola $y = ax^3 + bx + c$ en dos puntos cualesquiera con coordenadas-x p y q se cruzan en un punto cuya coordenada-x está a la mitad entre p y q.

4. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}\right) = -\cos 2x$$

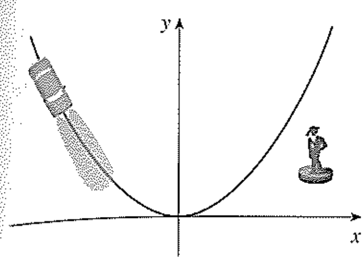


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

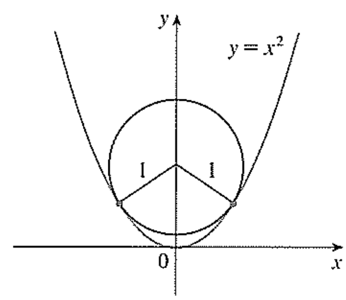
5. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1}(\tanh x) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x)$.

6. Un automóvil viaja por la noche por una carretera que tiene la forma de parábola con vértice en el origen (véase figura). El automóvil parte del punto 100 m al oeste y 100 m al norte del origen, y se desplaza en una dirección hacia el este. Hay una estatua localizada 100 m al este y 50 m al norte del origen. ¿En qué punto de la carretera los faros del vehículo iluminarán a la estatua?

7. Demuestre que $\dfrac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$.

8. Determine la n-ésima derivada de la función $f(x) = x^n/(1 - x)$

9. En la figura se muestra un círculo con radio 1 inscrito en la parábola $y = x^2$. Encuentre el centro del círculo.



10. Si f es derivable en a, donde $a > 0$, evalúe el siguiente límite en términos de $f'(a)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

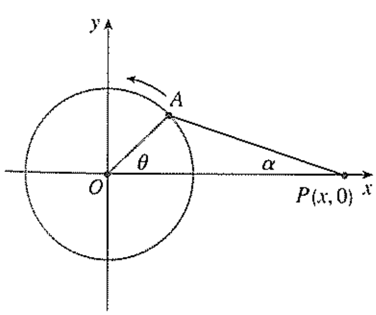


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

11. En la figura se muestra una rueda giratoria, con radio de 40 cm y una leva AP de longitud 1.2 m. El pasador P se desliza hacia atrás y hacia adelante, a lo largo del eje x, conforme la rueda gira en sentido contrario a las manecillas de un reloj con una rapidez de 360 revoluciones por minuto.
   (a) Encuentre la velocidad angular de la leva, $d\alpha/dt$, en radianes por cada segundo, cuando $\theta = \pi/3$.
   (b) Exprese la distancia $x = |OP|$, en términos de θ.
   (c) Halle una expresión para la velocidad del pasador P, en términos de θ.

12. Se trazan las rectas tangentes T_1 y T_2 en los dos puntos P_1 y P_2 sobre la parábola $y = x^2$ y se cruzan en un punto P. Se traza otra recta tangente T en un punto entre P_1 y P_2; ésta cruza T_1 en Q_1 y T_2 en Q_2. Demuestre que

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

13. Demuestre que

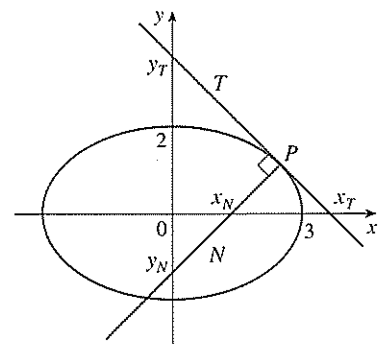
$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\operatorname{sen} bx) = r^n e^{ax}\operatorname{sen}(bx + n\theta)$$

en donde a y b son números positivos, $r^2 = a^2 + b^2$ y $\theta = \tan^{-1}(b/a)$.

14. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi}$.

PROBLEMAS ADICIONALES

15. Sean T y N las rectas tangente y normal a la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$, en cualquier punto P de ésta en el primer cuadrante. Sean x_T y y_T las intersecciones de T con los ejes x y y, y x_N y y_N las intersecciones de N. Conforme P se mueve a lo largo de la elipse en el primer cuadrante (pero no sobre los ejes), ¿qué valores pueden adoptar x_T, y_T, x_N y y_N? En primer lugar, intente inferir las respuestas con sólo mirar la figura. A continuación, aplique el cálculo para resolver el problema y vea qué tan buena es su intuición.



16. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$.

17. (a) Use la identidad para $\tan(x - y)$ (véase la ecuación 14 (b) del apéndice D) para demostrar que si dos rectas L_1 y L_2 se intersecan en un ángulo α, después

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

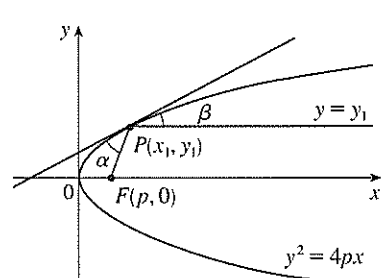
donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente.

(b) El **ángulo entre las curvas** C_1 y C_2 en un punto de intersección se define como el ángulo entre las rectas tangentes a C_1 y C_2 en P (si estas rectas tangentes existen). Use el inciso (a) para hallar, correcto hasta el grado más cercano, el ángulo entre cada par de curvas en cada punto de intersección.

(i) $y = x^2$ y $y = (x - 2)^2$

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ y $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

18. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la parábola $y^2 = 4px$ con foco $F(p, 0)$. Sea α el ángulo entre la parábola y el segmento rectilíneo FP y sea β el ángulo entre la recta horizontal $y = y_1$ y la parábola como en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (De modo que, por un principio de óptica geométrica, la luz proveniente de una fuente colocada en F se reflejará a lo largo de una recta paralela al eje x. Esto explica por qué las *paraboloides*, las superficies que se obtienen al hacer girar las parábolas sobre sus ejes, se emplean como la forma de algunos faros delanteros de automóviles y espejos para telescopios.)



PROBLEMAS ADICIONALES

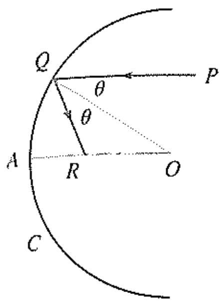


FIGURA PARA EL PROBLEMA 19

19. Suponga que reemplaza el espejo parabólico que aparece en el problema 18 con un espejo esférico. Aunque el espejo no tiene foco, puede demostrar la existencia de un foco *aproximado*. En la figura, C es un semicírculo con centro O. Un rayo de luz que llega hacia el espejo paralelo al eje a lo largo de la recta PQ, se reflejará hacia el punto R sobre el eje, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). ¿Qué sucede con el punto R a medida que P se lleva cada vez más cerca al eje?

20. Si f y g son funciones derivables donde $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$, demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

21. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a + 2x) - 2\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$.

CAS **22.** (a) La función cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tiene tres ceros distintos: 0, 2 y 6. Dibuje f y su rectas tangentes en el *promedio* de cada par de ceros. ¿Qué advierte?

(b) Suponga que la función cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tiene tres ceros diferentes: a, b y c. Compruebe, con ayuda de un sistema algebraico para computadora, que una recta tangente dibujada en el promedio de los ceros a y b interseca la gráfica de f en el tercer cero.

23. ¿Para qué valor de k la ecuación $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tiene exactamente una solución?

24. ¿Para qué números positivos a se cumple que $a^x \geqslant 1 + x$ para toda x?

25. Si

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

demuestre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

26. Dada una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a \neq b$, encuentre la ecuación de todo el conjunto de puntos a partir de los cuales hay dos tangentes a la curva cuyas pendientes son (a) recíprocos y (b) recíprocos negativos.

27. Encuentre los dos puntos sobre la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que tienen una recta tangente en común.

28. Suponga que tres puntos sobre la parábola $y = x^2$ tienen la propiedad de que sus rectas normales se cruzan en un punto común. Demuestre que la suma de sus coordenadas x es cero.

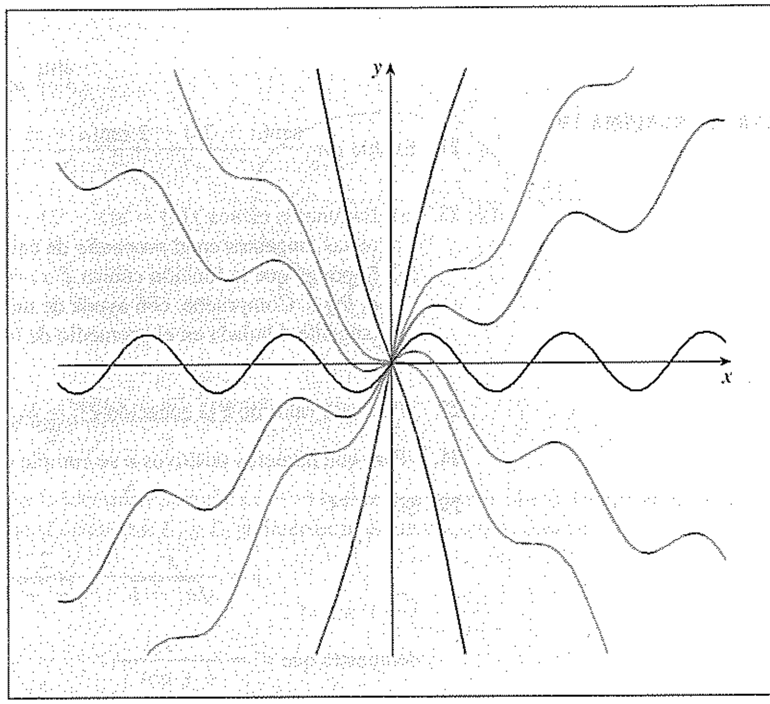
29. Un *punto de reticulado* sobre el plano es un punto con coordenadas enteras. Suponga que se dibujan círculos con radio r usando todos los puntos reticulados como centros. Encuentre el valor más pequeño de r tal que cualquier recta con pendiente $\frac{2}{5}$ cruce alguno de estos círculos.

30. Un cono de radio r centímetros y altura h centímetros se introduce por la punta con una rapidez de 1 cm/s en un cilindro alto de radio R centímetros que contiene una parte de agua. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua en el instante en que el cono está totalmente sumergido?

31. Un recipiente en forma de un cono invertido tiene una altura de 16 cm y su radio mide 5 cm en la parte superior. Está lleno en parte con un líquido que escurre por los lados con una rapidez proporcional al área del recipiente que está en contacto con el líquido. [El área superficial de un cono es πrl, donde r es el radio y l es la altura inclinada.] Si vierte líquido en el recipiente a razón de 2 cm³/min, entonces la altura del líquido disminuye a razón de 0.3 cm/min cuando la altura es de 10 cm. Si el objetivo es mantener el líquido a una altura constante de 10 cm, ¿en que proporción debe verter líquido al recipiente?

4

APLICACIONES DE LA DERIVACIÓN



El cálculo revela todos los aspectos importantes de las gráficas de las funciones. Se examinan grupos de la familia de funciones $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

Ya ha investigado algunas de las aplicaciones de las derivadas, pero ahora que conoce las reglas de derivación se encuentra en mejor posición para continuar con las aplicaciones de la derivación, con mayor profundidad. Aquí aprendera cómo las derivadas afectan la forma de una gráfica de una función y, particularmente, cómo ayudan a localizar valores máximos y mínimos de funciones. En la práctica muchos problemas exigen minimizar un costo o maximizar una superficie o bien encontrar el mejor resultado posible para una situación. En particular, será capaz de investigar la forma óptima de una lata y explicar la ubicación de los arcoíris en el cielo.

4.1 VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Algunas de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial son los *problemas de optimización*, en los cuales se pide la manera óptima (la mejor) de hacer algo. En seguida se listan ejemplos de esos problemas, los cuales se resuelven en este capítulo.

- ¿Cuál es la forma de una lata que minimice los costos de fabricación?
- ¿Cuál es la aceleración máxima de un trasbordador espacial? (Ésta es una cuestión importante para los astronautas que tienen que soportar los efectos de la aceleración.)
- ¿Cuál es el radio de una tráquea contraída que expele aire del modo más rápido al toser?
- ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

Estos problemas se pueden reducir a encontrar los valores máximo o mínimo de una función. En seguida se define con exactitud lo que son valores máximo y mínimo.

1 DEFINICIÓN Una función f tiene un **máximo absoluto** (o **máximo global**) en c si $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x en D, donde D es el dominio de f. El número $f(c)$ se llama **valor máximo** de f en D. De manera análoga, f tiene un **mínimo absoluto** en c si $f(c) \leqslant f(x)$ para todo x en D; el número $f(c)$ se denomina **valor mínimo** de f en D. Los valores máximo y mínimo de f se conocen como **valores extremos** de f.

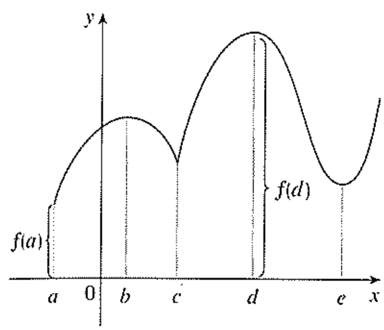


FIGURA 1
Valor mínimo $f(a)$, valor máximo $f(d)$

En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f con máximo absoluto en d y mínimo absoluto en a. Observe que $(d, f(d))$ es el punto más alto de la gráfica y $(a, f(a))$ es el más bajo. Si sólo considera valores de x cercanos a b en la figura 1 [por ejemplo, si restringe su atención al intervalo (a, c)], después $f(b)$ es el más grande de esos valores de $f(x)$ y se conoce como *valor máximo local* de f. De modo semejante, $f(c)$ es el *valor mínimo local* de f porque $f(c) \leqslant f(x)$ para x cercano a c [por ejemplo en el intervalo (b, d)]. La función f también tiene un mínimo local en e. En general, se da la definición siguiente:

2 DEFINICIÓN Una función f posee un **máximo local** (o **máximo relativo**) en c si $f(c) \geqslant f(x)$ cuando x está cercano a c. [Esto significa que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c.] De manera análoga, f tiene un **mínimo local** en c si $f(c) \leqslant f(x)$ cuando x está cerca de c.

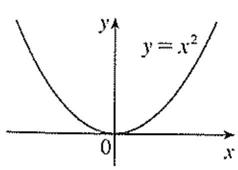


FIGURA 2
Valor mínimo 0, no hay valor máximo

EJEMPLO 1 La función $f(x) = \cos x$ toma su valor máximo (local y absoluto) de una infinidad de veces, ya que $\cos 2n\pi = 1$ para cualquier entero n y $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x. Del mismo modo, $\cos(2n + 1)\pi = -1$ es su valor mínimo, donde n es cualquier entero.

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2$, entonces $f(x) \geqslant f(0)$ porque $x^2 \geqslant 0$ para todo x. Por lo tanto, $f(0) = 0$ es el valor mínimo absoluto (y local) de f. Esto corresponde al hecho de que el origen es el punto más bajo sobre la parábola $y = x^2$. (Véase la figura 2.) Sin embargo, no existe el punto más alto sobre la parábola, por lo que esta función no tiene valor máximo.

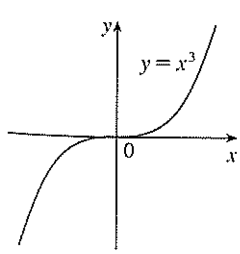


FIGURA 3
No hay mínimo ni máximo

EJEMPLO 3 En la gráfica de la función $f(x) = x^3$, que se muestra en la figura 3, esta función no tiene valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto. De hecho, tampoco posee valores extremos locales.

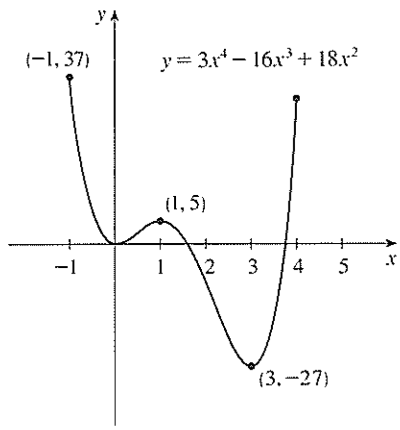


FIGURA 4

EJEMPLO 4 La gráfica de la función

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 4$$

se muestra en la figura 4. Puede ver que $f(1) = 5$ es un máximo local, en tanto que el máximo absoluto es $f(-1) = 37$. (Este máximo absoluto no es un máximo local porque se presenta en un punto extremo.) Asimismo, $f(0) = 0$ es un mínimo local y $f(3) = -27$ es un mínimo tanto local como absoluto. Advierta que f no tiene valor local ni máximo absoluto en $x = 4$. □

Ha visto que algunas funciones tienen valores extremos y otras no. En el teorema siguiente se dan las condiciones con que se garantiza que una función posea valores extremos.

3 TEOREMA DEL VALOR EXTREMO Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

En la figura 5 se ilustra el teorema del valor extremo. Observe que un valor extremo se puede tomar más de una vez. Aun cuando el Teorema del valor extremo es muy posible a nivel intuitivo, es difícil de probar y, por consiguiente, se omite la demostración.

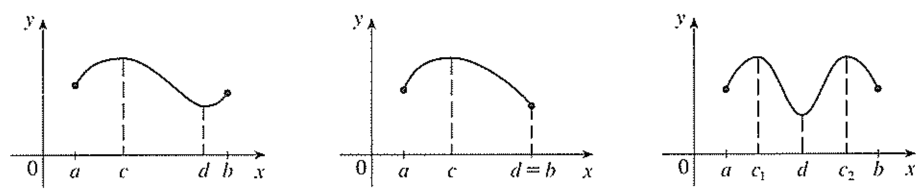


FIGURA 5

En las figuras 6 y 7 se hace ver que una función no tiene que poseer valores extremos si se omite cualquiera de las dos hipótesis (continuidad e intervalo cerrado) del teorema del valor extremo.

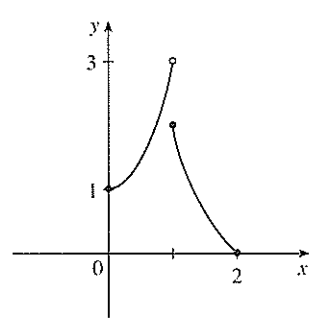


FIGURA 6
Esta función tiene valor mínimo $f(2) = 0$, pero no valor máximo

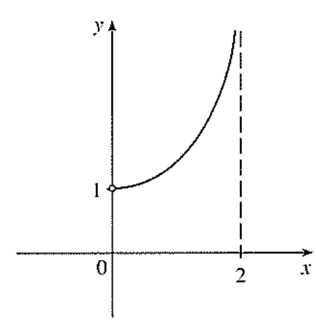


FIGURA 7
Esta función continua g no tiene máximo ni mínimo

La función f, cuya gráfica se muestra en la figura 6, está definida sobre el intervalo cerrado $[0, 2]$ pero no tiene valor máximo. (Advierta que el intervalo de f es $[0, 3)$. La función toma valores arbitrariamente cercanos a 3, pero nunca alcanza el valor 3.) Esto no contradice el teorema del valor extremo porque f no es continua. [Sin embargo, una función discontinua pudiera tener valores máximo y mínimo. Véase el ejercicio 13(b).]

La función g que se muestra en la figura 7 es continua sobre el intervalo abierto $(0, 2)$, pero no tiene valor máximo ni mínimo. [El intervalo de g es $(1, \infty)$. La función toma valores arbitrariamente grandes.] Esto no contradice el teorema del valor extremo porque el intervalo $(0, 2)$ no es cerrado.

El teorema del valor extremo dice que una función continua sobre un intervalo cerrado tiene un valor máximo y uno mínimo, pero no indica cómo hallarlos. Empiece por buscar valores extremos locales.

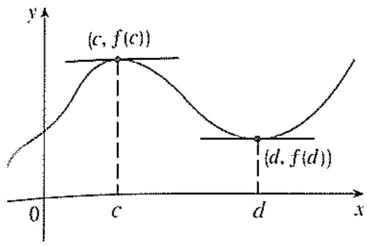


FIGURA 8

En la figura 8 se muestra la gráfica de una función f con un máximo local en c y un mínimo local en d. Parece que en los puntos máximo y mínimo la recta tangente es horizontal y, por consiguiente, tiene pendiente 0. Sabe que la derivada es la pendiente de la recta tangente, de modo que parece que $f'(c) = 0$ y $f'(d) = 0$. En el teorema siguiente se afirma que esto siempre se cumple para las funciones derivables.

■ El teorema de Fermat lleva ese nombre en honor de Pierre Fermat (1601-1665), un abogado francés que tomó las matemáticas como un pasatiempo. A pesar de su condición de aficionado, Fermat fue uno de los dos inventores de la geometría analítica (Descartes fue el otro). Sus métodos para hallar tangentes a las curvas y valores máximos y mínimos (antes de la invención de los límites y de las derivadas) lo hicieron un precursor de Newton en la creación del cálculo diferencial.

$\boxed{4}$ **TEOREMA DE FERMAT** Si f tiene un máximo o un mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, por lo tanto $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN Por consideración de la definitividad, suponga que f tiene un máximo local en c. Por lo tanto, según la definición 2, $f(c) \geqslant f(x)$ si x es suficientemente cercana a c. Esto ocasiona que si h está lo suficiente cerca de 0 y h es positiva o negativa, entonces

$$f(c) \geqslant f(c + h)$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{5} \qquad f(c + h) - f(c) \leqslant 0$$

Puede dividir ambos miembros de una desigualdad entre un número positivo. Por consiguiente, si $h > 0$ y h es suficientemente pequeña, tiene

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant 0$$

Si calcula el límite derecho de ambos lados de esta desigualdad (aplicando el teorema 2.3.2), obtiene

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Pero como $f'(c)$ existe

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

y de este modo ha demostrado que $f'(c) \leqslant 0$.

Si $h < 0$, en tal caso la dirección de la desigualdad (5) se invierte al dividir entre h:

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \qquad h < 0$$

Así, al calcular el límite izquierdo obtiene

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \geqslant 0$$

Ya se demostró que $f'(c) \geqslant 0$ y también que $f'(c) \leqslant 0$. Puesto que ambas desigualdades deben ser verdaderas, la única posibilidad es que $f'(c) = 0$.

Ya se demostró el teorema de Fermat para el caso de un máximo relativo. El caso de un mínimo local se puede demostrar de modo similar, o bien, puede usar el ejercicio 76 para deducirlo del caso que justamente ha demostrado (véase ejercicio 77). □

Los ejemplos siguientes advierten contra la interpretación excesiva del teorema de Fermat. No puede esperar localizar valores extremos simplemente haciendo $f'(x) = 0$ y resolviendo para x.

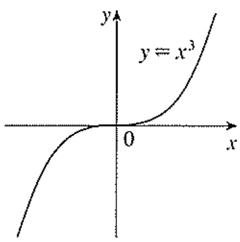


FIGURA 9
Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(0) = 0$ pero f no tiene máximo o mínimo.

EJEMPLO 5 Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(0) = 0$. Pero f no tiene máximo ni mínimo en 0, como puede ver en la gráfica de la figura 9. (O bien, observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$ pero $x^3 < 0$ para $x < 0$. El hecho de que $f'(0) = 0$ sólo significa que la curva $y = x^3$ tiene una tangente horizontal en (0, 0). En lugar de tener un máximo o un mínimo en (0, 0), la curva cruza allí su tangente horizontal. □

EJEMPLO 6 La función $f(x) = |x|$ muestra un valor mínimo (local o absoluto), en 0, pero ese valor no se puede determinar haciendo $f'(x) = 0$ porque, como se demostró en el ejemplo 5 de la sección 2.8, $f'(0)$ no existe (véase figura 10). □

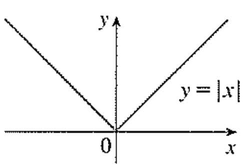


FIGURA 10
Si $f(x) = |x|$, entonces $f(0) = 0$ es un valor mínimo, pero $f'(0)$ no existe.

PRECAUCIÓN ◦ Los ejemplos 5 y 6 demuestran que debe ser cuidadoso al aplicar el teorema de Fermat. El ejemplo 5 demuestra que aun cuando $f'(c) = 0$, no necesariamente hay un máximo o un mínimo en c. (En otras palabras, el inverso del teorema de Fermat es en general falso.) Además, podría haber un valor extremo aun cuando $f'(c)$ no exista, (como en el ejemplo 6).

El teorema de Fermat en realidad sugiere que, por lo menos, debe empezar a buscar los valores extremos de f en los números c , donde $f'(c) = 0$ o donde $f'(c)$ no existe. Estos números reciben un nombre especial.

> $\boxed{6}$ **DEFINICIÓN** Un **número crítico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

■ En la figura 11 se muestra una gráfica de la función f del ejemplo 7. Sirve de apoyo a la respuesta porque hay una tangente horizontal cuando $x = 1.5$ y una vertical cuando $x = 0$.

EJEMPLO 7 Encuentre los números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUCIÓN La regla del producto da

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)(\tfrac{3}{5}x^{-2/5}) = -x^{-3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

[Pudo obtenerse el mismo resultado escribiendo primero $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.] Por lo tanto, $f'(x) = 0$ si $12 - 8x = 0$, esto es, $x = \frac{3}{2}$, y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$. Por esto, los números críticos son $\frac{3}{2}$ y 0. □

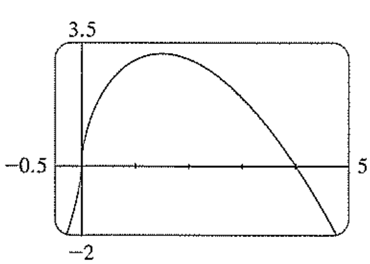


FIGURA 11

En términos de los números críticos, el teorema de Fermat se puede volver a redactar como sigue (compare la definición 6 con el teorema 4):

> $\boxed{7}$ Si f tiene un máximo o minimo local en c, entonces c es un número crítico de f.

Para hallar un máximo o un mínimo absolutos de una función continua sobre un intervalo cerrado, observe que tiene un extremo local [en cuyo caso, por (7), se presenta en un número crítico] o se presenta en uno de los puntos extremos del intervalo. De este modo, el procedimiento siguiente de tres pasos siempre funciona.

MÉTODO DEL INTERVALO CERRADO Para hallar los valores máximo y mínimo *absolutos* de una función continua f sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño, el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 8 Calcule los valores máximo y mínimo absolutos de la función.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Puesto que f es continua en $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$, puede aplicar el método del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

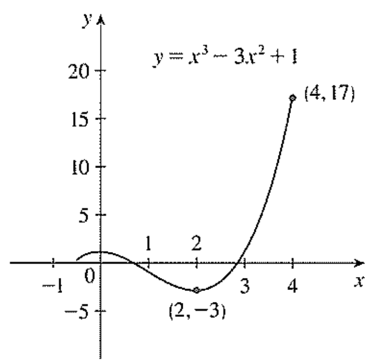


FIGURA 12

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos números críticos de f se presentan cuando $f'(x) = 0$, es decir, $x = 0$ o $x = 2$. Observe que cada uno de estos valores críticos queda en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los extremos del intervalo son

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Al comparar los cuatro números resulta que el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y que el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

Observe que en este ejemplo el máximo absoluto se presenta en un extremo, y el mínimo absoluto se presenta en un número crítico. La gráfica de f se ilustra en la figura 12. □

Si tiene una calculadora que grafique o una computadora con programas que le permitan graficar, es posible estimar con mucha facilidad los valores máximo y mínimo. Pero, como se puede ver en el ejemplo siguiente, el cálculo infinitesimal es necesario para determinar los valores *exactos*.

EJEMPLO 9

(a) Use un aparato graficador para estimar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

(b) Aplique el cálculo para hallar los valores mínimo y máximo exactos.

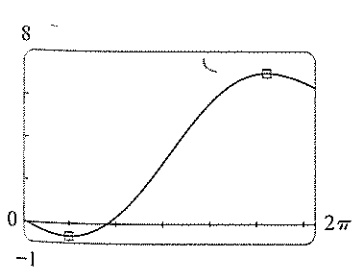


FIGURA 13

SOLUCIÓN

(a) En la figura 13 se muestra una gráfica de f en la pantalla $[0, 2\pi]$ por $[-1, 8]$. Al acercar el cursor al punto máximo, observe que las coordenadas y no cambian mucho en la vecindad del máximo. El valor máximo absoluto es alrededor de 6.97 y se presenta cuando $x \approx 5.2$. De manera análoga, al mover el cursor cerca del punto mínimo, el valor mínimo absoluto es alrededor de -0.68 y se presenta cuando $x \approx 1.0$. Es posible lograr estimaciones más exactas al hacer un acercamiento hacia los puntos máximo y mínimo pero, en lugar de ello, aplique el cálculo.

(b) La función $f(x) = x - 2 \operatorname{sen} x$ es continua sobre $[0, 2\pi]$. Puesto que $f'(x) = 1 - 2\cos x$, tiene $f'(x) = 0$ cuando $\cos x = \frac{1}{2}$ esto ocurre cuando $x = \pi/3$ o $5\pi/3$. Los valores de f en estos puntos críticos son

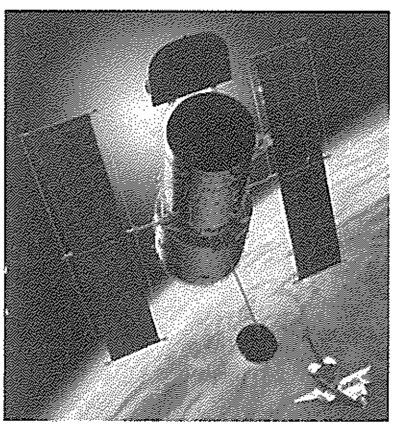
$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

y $$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Los valores de f en los puntos extremos son

$$f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Si se comparan estos cuatro números y se aplica el método del intervalo cerrado, el valor mínimo absoluto es $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$ y el valor máximo absoluto es $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$. Los valores del inciso (a) sirven de comprobación. □



NASA

EJEMPLO 10 El telescopio espacial Hubble fue puesto en operación el 24 de abril de 1990 por el trasbordador espacial *Discovery*. Un modelo para la velocidad del trasbordador durante su misión desde el lanzamiento en $t = 0$ hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprenden en el instante $t = 126$ s, está dado por

$$v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$$

(en pies por segundo). Usando este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la *aceleración* del trasbordador entre el lanzamiento y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

SOLUCIÓN Se pide hallar los valores extremos no de la función de velocidad dada sino de la función de aceleración. Por consiguiente, primero necesita derivar para encontrar la aceleración:

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= \frac{d}{dt}(0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083) \\ &= 0.003906t^2 - 0.18058t + 23.61 \end{aligned}$$

Ahora aplique el método del intervalo cerrado a la función continua a en el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 126$. Su derivada es

$$a'(t) = 0.007812t - 0.18058$$

El único número crítico se presenta cuando $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0.18058}{0.007812} \approx 23.12$$

Al evaluar a $a(t)$ en el número crítico y en los extremos, tiene

$$a(0) = 23.61 \qquad a(t_1) \approx 21.52 \qquad a(126) \approx 62.87$$

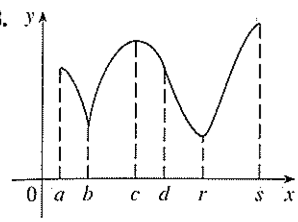
De modo que la aceleración máxima es alrededor de 62.87 pies/s^2 y la aceleración mínima es alrededor de 21.52 pies/s^2. □

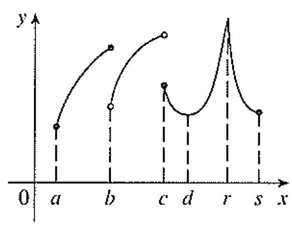
4.1 EJERCICIOS

1. Explique la diferencia entre un mínimo absoluto y un mínimo local.

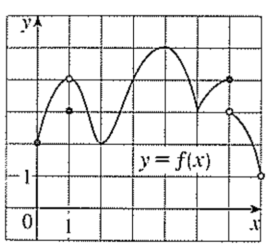
2. Suponga que f es una función continua definida sobre un intervalo $[a, b]$.
   (a) ¿Qué teorema garantiza la existencia de un valor máximo absoluto y uno mínimo absoluto para f?
   (b) ¿Qué pasos emprendería para hallar esos valores máximo y mínimo?

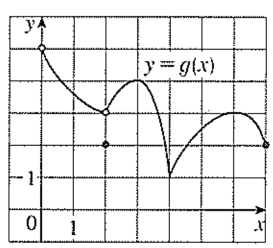
3–4 Para cada uno de los números a, b, c, d, r, y s, determine si la función cuya gráfica se ilustra tiene un máximo o un mínimo absolutos, un máximo o un mínimo locales o no tiene ni máximo ni mínimo.

3. 

4. 

5–6 Use la gráfica para determinar los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función.

5. 

6. 

7–10 Dibuje la gráfica de una función f que sea continua sobre $[1, 5]$ y tenga las propiedades dadas.

7. Mínimo absoluto en 2, máximo absoluto en 3, mínimo local en 4.

8. Mínimo absoluto en 1, máximo absoluto en 5, mínimo local en 2, mínimo local en 4.

9. Máximo absoluto en 5, mínimo absoluto en 2, máximo local en 3, mínimo local en 2 y 4.

10. f no tiene máximo ni mínimo locales, pero 2 y 4 son números críticos.

11. (a) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y sea derivable en 2.
    (b) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea derivable en 2.
    (c) Trace la gráfica de una función que tenga un máximo local en 2 y no sea continua en 2.

12. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tenga un máximo absoluto pero no máximo local.
    (b) Trace la gráfica de una función en $[-1, 2]$ que tiene un máximo local pero no un máximo absoluto.

13. (a) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que tenga un máximo absoluto pero no mínimo absoluto.
    (b) Trace la gráfica de una función sobre $[-1, 2]$ que sea discontinua pero que tenga tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto.

14. (a) Trace la gráfica de una función que tenga dos máximos locales, un mínimo local y no mínimo absoluto.
    (b) Trace la gráfica de una función que tenga tres mínimos locales, dos máximos locales y siete números críticos.

15–28 Trace a mano la gráfica de f y use su boceto para encontrar los valores máximos y mínimos, absolutos y locales de f. (Utilice las gráficas así como las transformaciones de las secciones 1.2 y 1.3.)

15. $f(x) = 8 - 3x, \quad x \geqslant 1$
16. $f(x) = 3 - 2x, \quad x \leqslant 5$
17. $f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2$
18. $f(x) = x^2, \quad 0 < x \leqslant 2$
19. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x < 2$
20. $f(x) = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$
21. $f(x) = x^2, \quad -3 \leqslant x \leqslant 2$
22. $f(x) = 1 + (x + 1)^2, \quad -2 \leqslant x < 5$
23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$
24. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$
25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
26. $f(x) = e^x$
27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$
28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

29–44 Encuentre los números críticos de la función.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$
30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$
31. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$
32. $f(x) = x^3 + x^2 + x$
33. $s(t) = 3t^4 + 4t^3 - 6t^2$
34. $g(t) = |3t - 4|$
35. $g(y) = \dfrac{y + 1}{y^2 - y + 1}$
36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $g(\theta) = 4\theta - \tan\theta$

43. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2x}\ln x$

45–46 Se proporciona una formula para la *derivada* de una función f. ¿Cuántos números críticos tiene f?

45. $f'(x) = 5e^{-0.1|x|}\operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{x^2 + 1}$

47–62 Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2, \quad [-1, 4]$

51. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, \quad [-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

54. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad [-4, 4]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(x) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \cot(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad [\tfrac{1}{2}, 2]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

---

63. Si a y b son números positivos, encuentre el valor máximo de $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

64. Use una gráfica para estimar los números críticos de $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ correctos hasta un lugar decimal.

65–68

(a) Utilice una gráfica para estimar los valores máximo y mínimo de la función hasta dos cifras decimales.

(b) Use el cálculo para encontrar los valores máximo y mínimo exactos.

65. $f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

66. $f(x) = e^{x^3 - x}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0$

67. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

68. $f(x) = x - 2\cos x, \quad -2 \leqslant x \leqslant 0$

---

69. Entre 0°C y 30°C el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T se expresa aproximadamente mediante la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el agua tiene su densidad máxima.

70. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda atada al objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, por lo tanto la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

donde μ es una constante positiva denominada *coeficiente de fricción* y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Demuestre que F se minimiza cuando $\tan\theta = \mu$.

71. Se proporciona un modelo para el precio en Estados Unidos de una libra de azúcar blanca desde 1993 a 2003

$$S(t) = -0.00003237t^5 + 0.0009037t^4 - 0.008956t^3 + 0.03629t^2 - 0.04458t + 0.4074$$

donde t se mide en años desde agosto de 1993. Estime las ocasiones en que el azúcar estuvo más barata y más cara durante el periodo de 1993 a 2007.

72. El 7 de mayo de 1992, el transbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla siguiente se dan los datos de la velocidad del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de maniobra de giro	10	185
Fin de maniobra de giro	15	319
Válvula de estrangulación al 89%	20	447
Válvula de estrangulación al 67%	32	742
Válvula de estrangulación al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación de los cohetes auxiliares de combustible sólido	125	4151

(a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para hallar el polinomio cúbico que modele de la mejor manera la velocidad del transbordador para el lapso $t \in [0, 125]$. A continuación, dibuje este polinomio.

(b) Encuentre un modelo para su aceleración y úselo para estimar los valores máximo y mínimo de la aceleración durante los primeros 125 s.

73. Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba y causa un aumento de la presión en los pulmones. Esto viene acompañado por una contracción de la tráquea, con lo cual se produce un canal más angosto por el que debe fluir el aire expelido. Para que escape una cantidad dada de aire en un tiempo fijo, éste debe moverse con mayor rapidez por el canal más angosto que por el más amplio. Entre mayor sea la velocidad de la corriente de aire, mayor es la fuerza aplicada sobre el objeto extraño. Los rayos X muestran que el radio del tubo circular de la tráquea se contrae hasta alrededor de dos tercios de su radio normal durante un acceso de tos. De acuerdo con un modelo matemático de la tos, la velocidad n de la corriente de aire se relaciona con el radio r de la tráquea mediante la ecuación

$$v(r) = k(r_0 - r)r^2 \qquad \tfrac{1}{2}r_0 \leq r \leq r_0$$

donde k es una constante y r_0 es el radio normal de la tráquea. La restricción sobre r se debe al hecho de que la pared de la tráquea se pone rígida bajo la presión y se impide una contracción mayor que $\frac{1}{2}r_0$ (de lo contrario, la persona se sofocaría).

(a) Determine el valor de r en el intervalo $\left[\frac{1}{2}r_0, r_0\right]$ al cual v tiene un máximo absoluto. ¿Cómo se equipara esto con la evidencia experimental?

(b) ¿Cuál es el valor máximo absoluto de v sobre el intervalo?

(c) Dibuje v sobre el intervalo $[0, r_0]$.

74. Demuestre que 5 es un valor crítico de la función

$$g(x) = 2 + (x - 5)^3$$

pero g no tiene un valor extremo local en 5.

75. Demuestre que la función

$$f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$$

no tiene ni máximo local ni mínimo local.

76. Si f tiene un valor mínimo en c, demuestre que la función $g(x) = -f(x)$ posee un valor máximo en c.

77. Demuestre el teorema de Fermat para el caso en el cual f posee un mínimo relativo en c.

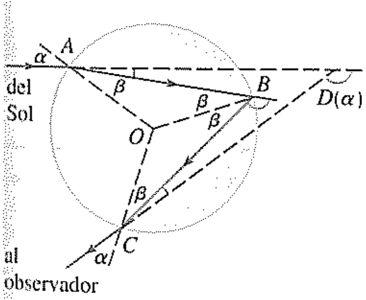
$\boxed{\textbf{78.}}$ Una función cúbica es un polinomio de grado 3; esto es, tiene la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \neq 0$.

(a) Demuestre que una función cúbica puede tener dos números críticos, uno o ninguno. Dé ejemplos y trace gráficas para ilustrar las tres posibilidades.

(b) ¿Cuántos valores extremos locales puede tener una función cúbica?

PROYECTO DE APLICACIÓN — EL CÁLCULO DE LOS ARCOÍRIS

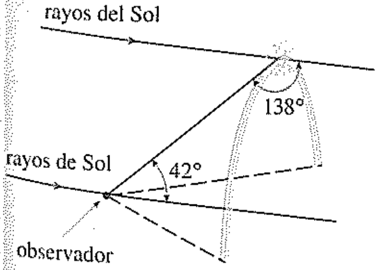
Los arcoíris se forman cuando las gotas de lluvia dispersan la luz solar. Han fascinado a la humanidad desde los tiempos más remotos y han inspirado intentos de explicación científica desde la época de Aristóteles. En este proyecto se siguen las ideas de Descartes y de Newton para explicar la forma, la ubicación y los colores de los arcoíris.



Formación del arcoíris primario

1. En la figura se muestra un rayo de luz solar que entra en una gota de lluvia esférica en A. Algo de la luz se refleja, pero la recta AB muestra la trayectoria de la parte que entra a la gota. Advierta que la luz se refracta hacia la recta normal AO y, de hecho, la ley de Snell afirma que sen $\alpha = k$ sen β, donde α es el ángulo de incidencia, β es el ángulo de refracción y $k \approx \frac{4}{3}$ es el índice de refracción para el agua. En B algo de la luz pasa por la gota y se refracta hacia el aire, pero la recta BC muestra la parte que se refleja. (El ángulo de incidencia es igual al de reflexión.) Cuando el rayo llega a C, parte de él se refleja pero, por el momento, hay más interés en la parte que sale de la gota de lluvia en C. (Advierta que se refracta alejándose de la recta normal.) El *ángulo de desviación* $D(\alpha)$ es la magnitud de la rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj que ha descrito el rayo durante este proceso de tres etapas. Por lo tanto

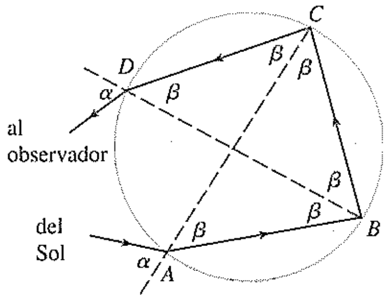
$$D(\alpha) = (\alpha - \beta) + (\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = \pi + 2\alpha - 4\beta$$



Demuestre que el valor mínimo de la desviación es $D(\alpha) \approx 138°$ y ocurre cuando $\alpha \approx 59.4°$.

El significado de la desviación mínima es que, cuando $\alpha \approx 59.4°$ tiene $D'(\alpha) \approx 0$, de modo que $\Delta D/\Delta\alpha \approx 0$. Esto significa que muchos rayos con $\alpha \approx 59.4°$ resultan desviados en más o menos la misma cantidad. La *concentración* de los rayos que vienen de las cercanías de la desviación mínima crea la brillantez del arcoíris primario. En la figura se muestra que el ángulo de elevación desde el observador, hacia arriba hasta el punto más alto del arcoíris es $180° - 138° = 42°$. (Este ángulo se conoce como *ángulo del arcoíris.*)

2. En el problema 1 se explica la ubicación del arcoíris primario, ¿pero cómo explica los colores? La luz solar comprende una gama de longitudes de onda, desde el rojo, hasta el naranja, amarillo, verde, azul, índigo y violeta. Como Newton descubrió en sus experimento del prisma de 1666, el índice de refracción es diferente para cada color. (El efecto se llama *dispersión*.) Para la luz roja, el índice de refracción es $k \approx 1.3318$ en tanto que para la luz violeta es $k \approx 1.3435$. Al repetir el cálculo del problema 1 para estos valores de k, se demuestra que el ángulo del arcoíris es alrededor de 42.3° para el arco rojo y de 40.6° para el arco violeta. Así pues, el arcoíris en realidad consta de siete arcos separados que corresponden a los siete colores.



Formación del arcoíris secundario

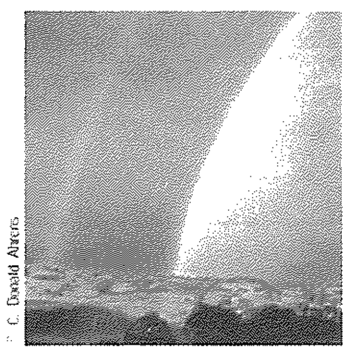
3. Quizá haya visto un arcoíris secundario más tenue, arriba del arco primario. Se produce por la parte de un rayo que entra en una gota de lluvia y se refracta en A, se refleja dos veces (en B y C) y se refracta al salir de la gota en D (véase la figura que aparece a la izquierda). En esta ocasión, el ángulo de desviación $D(\alpha)$ es la magnitud total de la rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj que describe el rayo en este proceso de cuatro etapas. Demuestre que

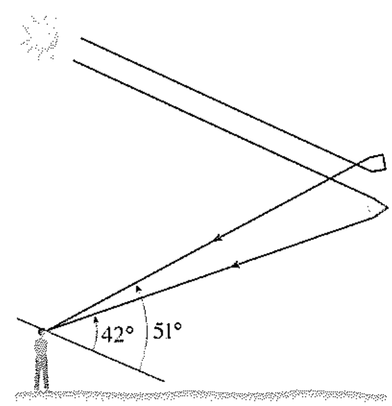
$$D(\alpha) = 2\alpha - 6\beta + 2\pi$$

y $D(\alpha)$ tiene un valor mínimo cuando

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{k^2 - 1}{8}}$$

Si se toma $k = \frac{4}{3}$, demuestre que la desviación mínima es alrededor de 129° y, por lo tanto, el ángulo del arcoíris secundario es de más o menos 51°, como se muestra en la figura siguiente.





4. Demuestre que los colores del arcoíris secundario aparecen en orden opuesto al del primario.

4.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Verá que muchos de los resultados de este capítulo dependen de un hecho principal, que es el llamado teorema del valor medio. Pero para llegar a este teorema es necesario primero el siguiente resultado.

■ El matemático francés Michel Rolle (1652-1719) publicó por primera vez el teorema de Rolle en un libro titulado *Méthode pour résoudre les égalitéz* en 1691. Sin embargo, tiempo después, se volvió un fuerte crítico de los métodos de su época y atacó al cálculo calificándolo de "una colección de ingeniosas falacias".

TEOREMA DE ROLLE Sea f una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$

En tal caso hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de la demostración, dé una mirada a las gráficas de algunas funciones representativas que cumplen las tres hipótesis. En la figura 1 se muestran las gráficas de cuatro de dichas funciones. En cada caso aparece que hay por lo menos un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la tangente es horizontal y, por lo tanto, $f'(c) = 0$. Por lo tanto, el teorema de Rolle es posible.

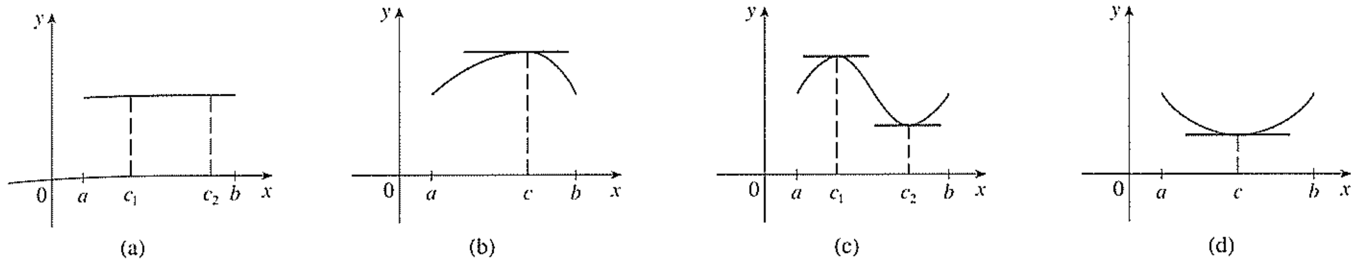


FIGURA 1

▪ Presentación de casos

DEMOSTRACIÓN Hay tres casos:

CASO I ▪ $f(x) = k$, una constante
En tal caso $f'(x) = 0$, de modo que el número c se puede tomar de *cualquier* número en (a, b).

CASO II ▪ $f(x) > f(a)$ para cualquier x en (a, b) [como en la figura 1(b) o (c)]
Según el teorema del valor extremo, (el cual aplica por la hipótesis 1), f tiene un valor máximo en cualquier lugar de $[a, b]$. Puesto que $f(a) = f(b)$, debe alcanzar su valor máximo en un número c en el intervalo abierto (a, b). Después f tiene un máximo *local* en c, y, según la hipótesis 2, f es derivable en c. Por lo tanto, $f'(c) = 0$, de acuerdo con el teorema de Fermat.

CASO III ▪ $f(x) < f(a)$ para alguna x en (a, b) [como en la figura 1(c) o (d)]
De acuerdo con el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a, b]$, y como $f(a) = f(b)$, alcanza su valor mínimo en un número c en (a, b). Una vez más, $f'(c) = 0$, según el teorema de Fermat. □

EJEMPLO 1 Aplique el teorema de Rolle a la función de posición $s = f(t)$ de un objeto que se desplaza. Si el objeto está en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, por lo tanto $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle establece que hay algún instante del tiempo $t = c$ entre a y b cuando $f'(c) = 0$; es decir, la velocidad es 0. (En particular, usted puede ver que esto se cumple cuando una pelota es lanzada directamente hacia arriba.) □

▪ En la figura 2 se ilustra una gráfica de la función $f(x) = x^3 + x - 1$ estudiada en el ejemplo 2. El teorema de Rolle dice que no importa qué tanto amplifique el rectángulo de visión, ya que nunca podrá encontrar una segunda intersección con el eje de las x.

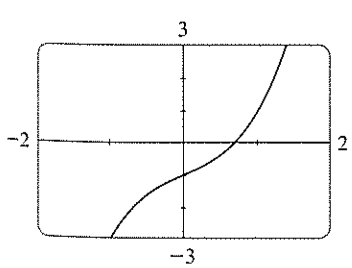


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Demuestre que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene sólo una raíz real.

SOLUCIÓN Primero aplique el teorema del valor intermedio (2.5.10) para demostrar que existe una raíz. Sea $f(x) = x^3 + x - 1$. Después $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$. Puesto que f es un polinomio, es continua, de modo que el teorema del valor intermedio establece que hay un número c entre 0 y 1 tal que $f(c) = 0$. Así, la ecuación dada tiene una raíz.

Para demostrar que la ecuación no posee otra raíz real, aplique el teorema de Rolle y siga un razonamiento de contradicción. Suponga que hay dos raíces a y b. Entonces, $f(a) = 0 = f(b)$ y, como f es un polinomio, es derivable en (a, b) y continua en $[a, b]$. Por esto, de acuerdo con el teorema de Rolle, hay un número c entre a y b tal que $f'(c) = 0$. Pero

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 \qquad \text{para toda } x$$

porque $x^2 \geqslant 0$ de modo que $f'(x)$ nunca puede ser 0. Esto es una contradicción. Por lo tanto, la ecuación no puede tener dos raíces reales. □

El uso principal que se le da al teorema de Rolle es en la demostración del importante teorema siguiente, el cual fue planteado por primera vez por otro matemático francés, Joseph-Louis Lagrange.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO Sea f una función que cumple con las hipótesis siguientes:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Por lo tanto hay un número c en (a, b) tal que

$$\boxed{1} \qquad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, en forma equivalente,

$$\boxed{2} \qquad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

El teorema del valor medio es un ejemplo de lo que se llama un teorema de existencia. Al igual que el teorema del valor intermedio, el teorema del valor extremo y el teorema de Rolle, garantiza que *existe* un número con una cierta propiedad, pero no dice cómo determinar dicho número.

Antes de demostrar este teorema, conviene ver que es razonable interpretarlo desde el punto de vista geométrico. Las figuras 3 y 4 muestran los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ sobre las gráficas de dos funciones derivables. La pendiente de la secante AB es

$$\boxed{3} \qquad m_{AB} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

la cual es la misma expresión que en el lado derecho de la ecuación 1. Como $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$, el teorema del valor medio, en la forma dada por la ecuación 1, expresa que existe por lo menos un punto $P(c, f(c))$ sobre la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es la misma que la de la recta secante AB. En otras palabras, existe un punto P donde la recta tangente es paralela a la recta secante AB.

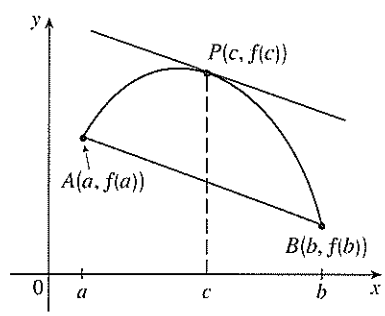


FIGURA 3

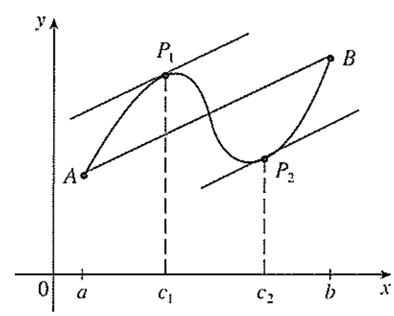


FIGURA 4

DEMOSTRACIÓN Aplique el teorema de Rolle a una nueva función h definida como la diferencia entre f y la función cuya gráfica es la secante AB. Si usa la ecuación 3 verá que la ecuación de la recta AB se puede escribir como

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

o bien, como

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

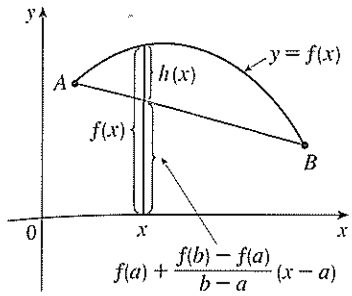


FIGURA 5

LAGRANGE Y EL TEOREMA DE VALOR MEDIO

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) formuló por primera vez el teorema del valor medio. Nacido en Italia, de padre francés y de madre italiana. Fue un niño prodigio y se convirtió en profesor en Turín, a la temprana edad de 19 años. Lagrange hizo grandes colaboraciones a la teoría de números, la teoría de funciones, la teoría de ecuaciones y la mecánica analítica y celeste. En particular, aplicó el cálculo al análisis de la estabilidad del sistema solar. Por invitación de Federico el Grande, se convirtió en el sucesor de Euler en la Academia de Berlín; al morir su mecenas aceptó la invitación del rey Luis XVI para trasladarse a París, donde se le dieron apartamentos en el Louvre. A pesar de todas las tentaciones del lujo y la fama, fue un hombre bondadoso y tranquilo, aunque sólo vivió para la ciencia.

De tal manera, como se muestra en la figura 5,

$$\boxed{4} \qquad h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Primero hay que comprobar que h cumple con las tres hipótesis del teorema de Rolle.

1. La función h es continua en $[a, b]$ porque es la suma de f y de un polinomio de primer grado, y ambos son continuos.
2. La función h es derivable en (a, b) porque tanto f como el polinomio de primer grado son derivables. En efecto, es posible calcular h' directamente con la ecuación 4:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(Observe que $f(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ son constantes.)

3.
$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)$$
$$= f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0$$

Por lo tanto, $h(a) = h(b)$.

Como h cumple con las hipótesis del teorema de Rolle, ese teorema establece que hay un número c en (a, b) tal que $h'(c) = 0$. Por lo tanto,

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y de esa manera
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ □

EJEMPLO 3 Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, considere $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es un polinomio, es continuo y derivable para toda x, por lo que es ciertamente continuo en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$. Por lo tanto, de acuerdo con el teorema del valor medio, hay un número c en $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora, $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, de modo que esta ecuación se vuelve

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

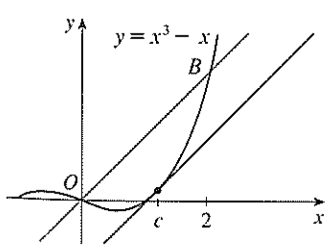


FIGURA 6

lo cual da $c^2 = \frac{4}{3}$, es decir, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero c debe estar en $(0, 2)$, de modo que $c = 2/\sqrt{3}$. En la figura 6 se ilustra este cálculo: la tangente en este valor de c es paralela a la secante OB. □

EJEMPLO 4 Si un objeto se mueve en una línea recta con función de posición $s = f(t)$, entonces la velocidad promedio entre $t = a$ y $t = b$ es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la velocidad en $t = c$ es $f'(c)$. De este modo, el teorema del valor medio (en la forma de la ecuación 1) dice que en algún instante $t = c$, entre a y b, la velocidad instantánea $f'(c)$ es igual a esa velocidad promedio. Por ejemplo, si un automóvil recorrió 180 km en 2 h, en seguida el velocímetro debió indicar 90 km/h por lo menos una vez.

En general, una interpretación del teorema del valor medio es que hay un número en el cual la relación de cambio instantánea es igual a la relación de cambio promedio en el intervalo. □

El principal significado del Teorema del Valor Medio es que permite obtener información relacionada con una función a partir de información con respecto a su derivada. El ejemplo siguiente ilustra este principio.

EJEMPLO 5 Suponga que $f(0) = -3$ y $f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. ¿Qué tan grande es posible que sea $f(2)$?

SOLUCIÓN Sabe que f es derivable (y, por lo tanto, continua) dondequiera. En particular, puede aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Allí existe un número c tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

por lo que
$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Con la información de que $f'(x) \leqslant 5$ para toda x, de modo que en particular sabe que $f'(c) \leqslant 5$. Al multiplicar ambos lados de esta desigualdad por 2 obtiene $2f'(c) \leqslant 10$, y por eso

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leqslant -3 + 10 = 7$$

El valor más grande posible para $f(2)$ es 7. □

Mediante el teorema del valor medio se pueden establecer algunos de los hechos básicos del cálculo diferencial. Uno de estos hechos básicos es el teorema siguiente. Otros se tratan en las secciones siguientes.

> **5 TEOREMA** Si $f'(x) = 0$ para toda x en un intervalo (a, b), entonces f es constante en (a, b).

DEMOSTRACIÓN Sean x_1 y x_2 dos números cualquiera en (a, b) donde $x_1 < x_2$. Puesto que f es derivable en (a, b), debe ser derivable en (x_1, x_2) y continua en $[x_1, x_2]$. Al aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_1, x_2]$ obtiene un número c tal que $x_1 < c < x_2$ y

$$\boxed{6} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Puesto que $f'(x) = 0$ para toda x, $f'(c) = 0$, y así la ecuación 6 se transforma en

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad f(x_2) = f(x_1)$$

Por lo tanto, f tiene el mismo valor en dos números cualquiera x_1 y x_2 en (a, b). Esto quiere decir que f es constante en (a, b). □

> **7 COROLARIO** Si $f'(x) = g'(x)$ para toda x en el intervalo (a, b), entonces $f - g$ es constante en (a, b); es decir, $f(x) = g(x) + c$ donde c es constante.

DEMOSTRACIÓN Sea $F(x) = f(x) - g(x)$. En tal caso

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

para toda x en (a, b). Por esto, según el teorema 5, F es constante; es decir, $f - g$ es constante. □

NOTA Es necesario tener cuidado al aplicar el teorema 5. Sea

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

El dominio de f es $D = \{x \mid x \neq 0\}$ y $f'(x) = 0$ para toda x en D. Pero obviamente f no es una función constante. Esto no contradice el teorema 5 porque D no es un intervalo. Observe que f es constante en el intervalo $(0, \infty)$ y también en el intervalo $(-\infty, 0)$.

EJEMPLO 6 Demuestre la identidad $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Aunque no se necesita al cálculo para demostrar esta identidad, la demostración con ayuda del cálculo es muy simple. Si $f(x) = \tan^{-1}x + \cot^{-1}x$, entonces

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} = 0$$

para todos los valores de x. Por lo tanto, $f(x) = C$, una constante. Para determinar el valor de C, $x = 1$, [porque así puede evaluar en forma exacta $f(1)$]. En consecuencia,

$$C = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

En estos términos, $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$. □

4.2 EJERCICIOS

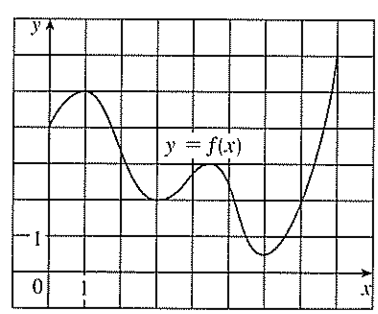
1–4 Verifique que la función cumple las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo dado. Luego determine todos los números c que cumplen con la conclusión del teorema de Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $[1, 3]$
2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, $[0, 3]$
3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$
4. $f(x) = \cos 2x$, $[\pi/8, 7\pi/8]$

5. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$ pero no hay número c en $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice al teorema de Rolle?

6. Sea $f(x) = \tan x$. Demuestre que $f(0) = f(\pi)$ pero no hay número c en $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué esto no contradice al teorema de Rolle?

7. Use la gráfica f para estimar los valores de c que satisfagan la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[0, 8]$.



8. Mediante la gráfica de f del ejercicio 7 estime los valores de c que cumplen con la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[1, 7]$.

9. (a) Grafique la función $f(x) = x + 4/x$ en el rectángulo de visión $[0, 10]$ por $[0, 10]$.
(b) Trace la recta secante que pasa por los puntos $(1, 5)$ y $(8, 8.5)$ en la misma pantalla con f.
(c) Calcule el número c que satisface la conclusión del teorema del valor medio para esta función f y el intervalo $[1, 8]$. Luego grafique la tangente en el punto $(c, f(c))$ y observe que es paralela a la recta secante.

10. (a) En el rectángulo de visión $[-3, 3]$ por $[-5, 5]$, grafique la función $f(x) = x^3 - 2x$ y su recta secante que pasa por los puntos $(-2, -4)$ y $(2, 4)$. Mediante la gráfica estime las coordenadas x de los puntos donde la recta tangente es paralela a la recta secante.
(b) Calcule los valores exactos de los números c que satisfacen la conclusión del teorema del valor medio para el intervalo $[-2, 2]$ y compare con las respuestas del inciso (a).

11–14 Compruebe que la función cumple con las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo dado. Después determine todos los números c que cumplen con la conclusión del teorema del valor medio

11. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5, \quad [-1, 1]$

12. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

13. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

14. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad [1, 4]$

---

15. Sea $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Demuestre que no hay valor de c en $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

16. Sea $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Demuestre que no hay valor de c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. ¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?

17. Demuestre que la ecuación $1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

18. Demuestre que la ecuación $2x - 1 - \operatorname{sen} x = 0$ tiene exactamente una raíz real.

19. Demuestre que la ecuación $x^3 - 15x + c = 0$ tiene cuando mucho una raíz en el intervalo $[-2, 2]$.

20. Demuestre que la ecuación $x^4 + 4x + c = 0$ tiene cuando mucho dos raíces reales.

21. (a) Demuestre que el polinomio de grado 3 tiene a lo más tres raíces reales.
(b) Demuestre que el polinomio de grado n tiene cuando mucho n raíces reales.

22. (a) Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y que tiene dos raíces. Demuestre que f' tiene por lo menos una raíz.
(b) Suponga que f es derivable dos veces en $\mathbb{R}$ y que tiene tres raíces. Demuestre que f'' tiene por lo menos una raíz real.
(c) ¿Puede generalizar los incisos (a) y (b)?

23. Si $f(1) = 10$ y $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, ¿qué tan pequeña es posible que sea $f(4)$?

24. Suponga que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos los valores de x. Demuestre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

25. ¿Existe una función f tal que $f(0) = -1$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leqslant 2$ para toda x?

26. Suponga que f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Suponga además que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Demuestre que $f(b) < g(b)$. [*Sugerencia*: aplique el teorema del valor medio a la función $h = f - g$.]

27. Demuestre que $\sqrt{1 + x} < 1 + \frac{1}{2}x$ si $x > 0$.

28. Suponga que f es una función impar y es derivable dondequiera. Demuestre que por cada número positivo b, existe un número c en $(-b, b)$ tal que $f'(c) = f(b)/b$.

29. Aplique el teorema del valor medio para demostrar la desigualdad

$$|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \leqslant |a - b| \qquad \text{para toda } a \text{ y } b$$

30. Si $f'(x) = c$ (c es una constante) para toda x, aplique el corolario 7 para mostrar que $f(x) = cx + d$ para alguna constante d.

31. Sean $f(x) = 1/x$ y

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\[2mm] 1 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que $f'(x) = g'(x)$ para toda x en sus dominios. ¿Puede concluir de acuerdo con el corolario 7 que $f - g$ es constante?

32. Aplique el método del ejemplo 6 para demostrar la identidad

$$2 \operatorname{sen}^{-1} x = \cos^{-1}(1 - 2x^2) \qquad x \geqslant 0$$

33. Demuestre la identidad

$$\operatorname{arcsen} \frac{x - 1}{x + 1} = 2 \arctan \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

34. A las 2:00 PM el velocímetro de un automóvil señala 30 millas/h. A las 2:10 PM indica 50 millas/h. Demuestre que en algún instante entre las 2:00 y las 2:10 la aceleración es exactamente 120 millas/h^2.

35. Dos corredores inician una carrera al mismo tiempo y terminan empatados. Demuestre que en algún momento durante la carrera tuvieron la misma velocidad. [*Sugerencia*: considere $f(t) = g(t) - h(t)$, donde g y h son las funciones de posición de los dos corredores.]

36. Un número a se denomina **punto fijo** de una función f si $f(a) = a$. Demuestre que si $f'(x) \neq 1$ para todos los números reales x, después f tiene cuando mucho un punto fijo.

4.3 MANERA EN QUE LAS DERIVADAS AFECTAN LA FORMA DE UNA GRÁFICA

Muchas de las aplicaciones del cálculo dependen de la habilidad para deducir hechos relacionados con una función f a partir de información que aportan sus derivadas. Como $f'(x)$ representa la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, indica la dirección en la cual la curva progresa en cada punto. Por eso es razonable esperar que la información con respecto a $f'(x)$ proporcione información relacionada con $f(x)$.

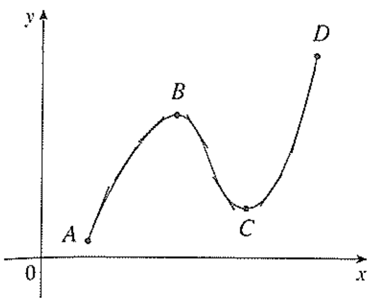


FIGURA 1

¿QUÉ DICE f' CON RESPECTO A f?

Para ver cómo la derivada de f puede decir dónde una función es creciente o decreciente observe la figura 1. (Las funciones crecientes y decrecientes se definen en la sección 1.1.) Entre A y B y entre C y D, las tangentes tienen pendiente positiva y de este modo $f'(x) > 0$. Entre B y C, las tangentes tienen pendiente negativa por lo que $f'(x) < 0$. Por esto, parece que f se incrementa cuando $f'(x)$ es positiva y decrece cuando $f'(x)$ es negativa. Para demostrar que siempre es así, se recurre al teorema del valor medio.

Abrevie el nombre de esta prueba llamándola prueba C/D.

PRUEBA DE LAS CRECIENTES/DECRECIENTES
(a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, en tal caso f es creciente en ese intervalo.
(b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, en consecuencia f es decreciente en ese intervalo.

DEMOSTRACIÓN
(a) Sean x_1 y x_2 dos números cualesquiera en el intervalo, con $x_1 < x_2$. Según la definición de una función creciente (página 20) tiene que demostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Debido a que $f'(x) > 0$, sabe que f es derivable sobre $[x_1, x_2]$. De modo que, por el teorema del valor medio existe un número c entre x_1 y x_2 tal que

$$\boxed{1} \qquad f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Ahora bien, por hipótesis $f'(c) > 0$ y $x_2 - x_1 > 0$ porque $x_1 < x_2$. De este modo, el lado derecho de la ecuación 1 es positivo, con lo cual,

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad \text{o} \qquad f(x_1) < f(x_2)$$

Esto demuestra que f es creciente.

La parte (b) se prueba de manera análoga. □

EJEMPLO 1 Encuentre dónde crece la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ y dónde decrece.

SOLUCIÓN $\qquad f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$

Para aplicar la prueba C/D, debe saber dónde $f'(x) > 0$ y dónde $f'(x) < 0$. Esto depende de los signos de los tres factores de $f'(x)$; a saber, $12x$, $x - 2$ y $x + 1$. Divida la recta real en intervalos cuyos puntos extremos sean los números críticos -1, 0 y 2 y ordene su trabajo en una tabla. Un signo de más indica que la expresión dada es positiva y uno de menos, que es negativa. En la última columna de la tabla se da la conclusión basada en la prueba C/D. Por ejemplo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$, de modo que f es decreciente sobre (0, 2). (También sería verdadero decir que f es decreciente sobre el intervalo cerrado [0, 2].)

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x<-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente sobre $(-\infty, -1)$
$-1<x<0$	$-$	$-$	$+$	$+$	creciente sobre $(-1, 0)$
$0<x<2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreciente sobre $(0, 2)$
$x>2$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente sobre $(2, \infty)$

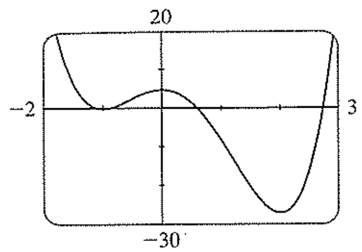


FIGURA 2

La gráfica de f que se muestra en la figura 2, confirma la información que aparece en la tabla. □

Recuerde, por lo visto en la sección 4.1, que si f tiene un máximo o un mínimo locales en c, en tal caso c debe ser un número crítico de f (por el teorema de Fermat), pero no todos los números críticos dan lugar a un máximo o un mínimo. Debido a eso, necesita una prueba que le diga si f tiene o no un máximo o un mínimo locales en un número crítico.

En la figura 2 puede ver que $f(0) = 5$ es un valor máximo local porque f crece sobre $(-1, 0)$ y decrece sobre $(0, 2)$. O, en términos de derivadas, $f'(x) > 0$ para $-1 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$. En otras palabras, el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en 0. Esta observación constituye la base de la prueba siguiente.

PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA Suponga que c es un número crítico de una función continua f.

(a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.

(b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.

(c) Si f' no cambia de signo en c (es decir, f' es positiva en ambos lados de c, o negativa en ambos lados), entonces f no tiene máximo ni mínimo locales en c.

La prueba de la primera derivada es consecuencia de la prueba C/D. En el inciso (a), por ejemplo, como el signo de $f'(x)$ cambia de positivo a negativo en c, f es creciente a la izquierda de c y decreciente a su derecha. Se concluye que f tiene un máximo local en c.

Para recordar fácilmente la prueba de la primera derivada, observe los diagramas de la figura 3

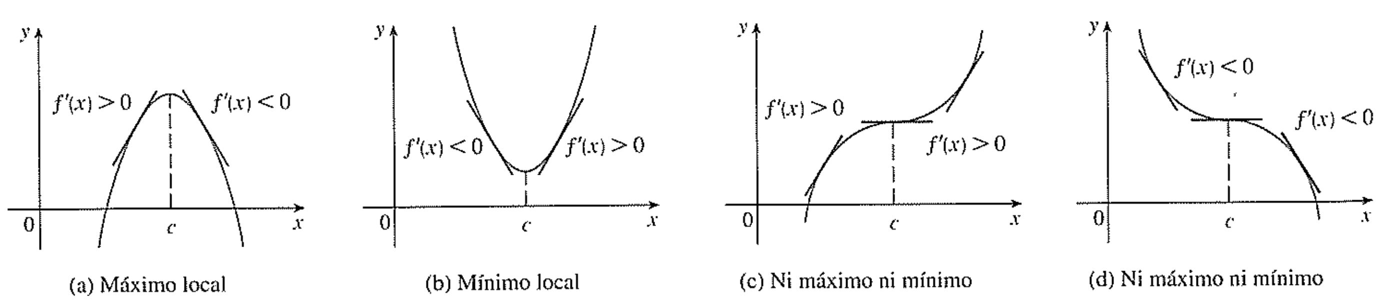


FIGURA 3

EJEMPLO 2 Encuentre los valores máximos y mínimos locales de la función f del ejemplo 1.

SOLUCIÓN A partir de la tabla de la solución para el ejemplo 1, $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en -1, de modo que $f(-1) = 0$ es un valor mínimo local por la Prueba de la primera derivada. De manera análoga, f' cambia de negativa a positiva en 2, de modo que $f(2) = -27$ también es un valor mínimo local. Como ya se hizo notar, $f(0) = 5$ es un valor máximo local porque $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en 0. □

EJEMPLO 3 Determine los valores máximo y mínimo de la función

$$g(x) = x + 2 \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

SOLUCIÓN Con el fin de calcular los números críticos de g derive:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

De tal manera $g'(x) = 0$ cuando $\cos x = -\frac{1}{2}$. Las soluciones de esta ecuación son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Como g es derivable dondequiera, los únicos números críticos son $2\pi/3$ y $4\pi/3$ y de esta manera se analiza g en la tabla siguiente.

Los signos + de la tabla provienen del hecho de que $g'(x) > 0$ cuando $\cos x > -\frac{1}{2}$. A partir de la gráfica de $y = \cos x$, esto es verdadero en los intervalos indicados.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	+	creciente en $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−	decreciente en $(2/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+	creciente en $(4\pi/3, 2\pi)$

Puesto que $g'(x)$ cambia de positivo a negativo en $2\pi/3$, la prueba de la primera derivada establece que hay un máximo local en $2\pi/3$ y que el máximo local es

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

De manera similar, $g'(x)$ pasa de negativo a positivo en $4\pi/3$ por lo que

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

es un valor mínimo local. La gráfica de g en la figura 4 apoya esta conclusión.

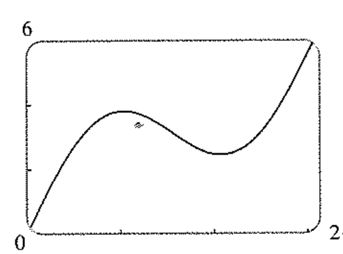


FIGURA 4
$y = x + 2 \operatorname{sen} x$

□

¿QUÉ DICE f'' CON RESPECTO A f?

En la figura 5 se ilustran las gráficas de dos funciones crecientes en (a, b). Ambas gráficas unen el punto A con el punto B, pero lucen distintas porque se flexionan en direcciones diferentes. ¿Cómo se puede distinguir entre estos dos tipos de comportamientos? En la figura 6, las tangentes a estas curvas se han dibujado en diferentes puntos. En (a) la curva queda por arriba de las tangentes y se dice que f es *cóncava hacia arriba* en (a, b). En (b), la curva se sitúa abajo de las tangentes y entonces se dice que g es *cóncava hacia abajo* en (a, b).

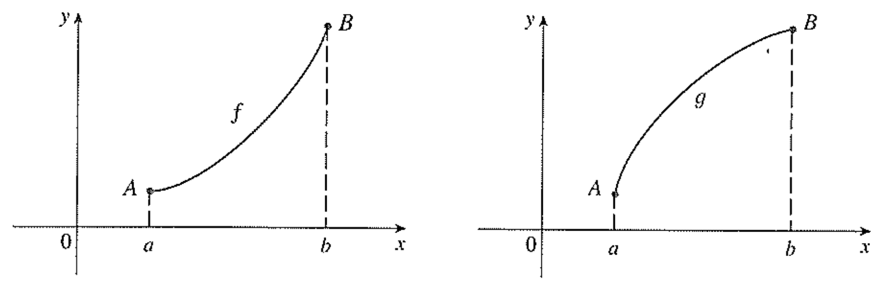


FIGURA 5 (a) (b)

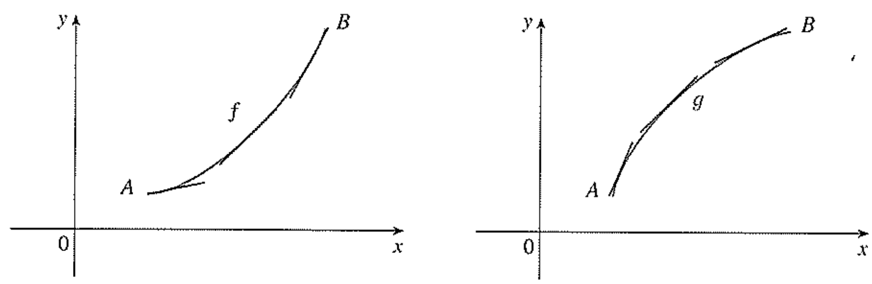


FIGURA 6 (a) Cóncava hacia arriba (b) Cóncava hacia abajo

> **DEFINICIÓN** Si la gráfica de f queda por arriba de todas sus tangentes en un intervalo I, entonces se dice que es **cóncava hacia arriba** en I. Si la gráfica de f queda por abajo de todas sus tangentes en I, se dice que es **cóncava hacia abajo** en I.

En la figura 7 se muestra la gráfica de una función que es cóncava hacia arriba (abreviado CA) en los intervalos (b, c), (d, e) y (e, p) y cóncava hacia abajo (CAB) en los intervalos (a, b), (c, d) y (p, q).

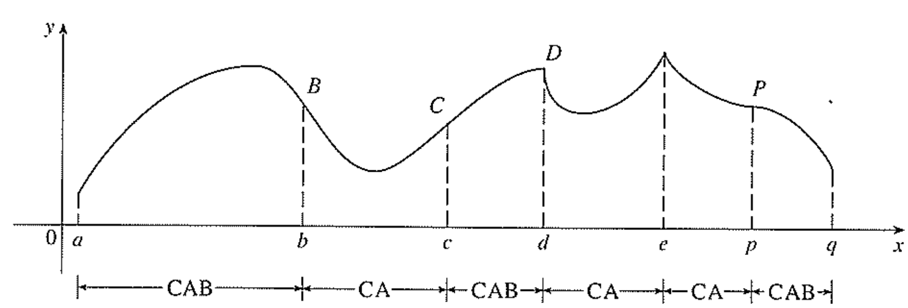


FIGURA 7

Vea cómo la segunda derivada ayuda a determinar los intervalos de concavidad. Al inspeccionar la figura 6(a) se puede ver que se incrementa, de izquierda a derecha, la pendiente de la tangente.

Esto quiere decir que la derivada f' es una función creciente y, por lo tanto, su derivada f'' es positiva. En forma similar, en la figura 6(b) la pendiente de la tangente disminuye de izquierda a derecha, por lo que f' decrece y, por consiguiente, f'' es negativa. Este razonamiento se puede invertir y lleva a pensar que el teorema siguiente es verdadero. En el apéndice F se presenta una demostración con la ayuda del teorema del valor medio.

PRUEBA DE LA CONCAVIDAD

(a) Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.

(b) Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.

EJEMPLO 4 En la figura 8 se ilustra una gráfica de una población de las abejas mieleras que han sido criadas en un apiario. ¿Cuál es el incremento de la proporción de población con respecto al tiempo? ¿Cuándo este incremento alcanza su punto más alto? ¿En qué intervalos P es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?

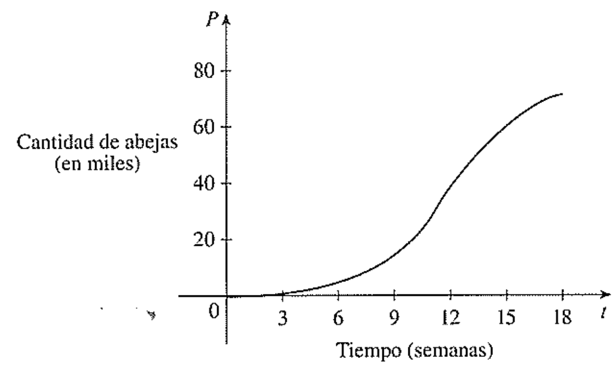


FIGURA 8

SOLUCIÓN Al examinar la pendiente de la curva cuando t se incrementa, se ve que la proporción del incremento de la población es al principio muy pequeña, luego aumenta hasta que alcanza un valor máximo alrededor de $t = 12$ semanas, y disminuye cuando la población empieza a nivelarse. A medida que la población se aproxima a su valor máximo de casi 75 000 (que se denomina *capacidad conducción*, el incremento, $P'(t)$, tiende a 0. Al parecer, la curva es cóncava hacia arriba en (0, 12) y cóncava hacia abajo en (12, 18). □

En el ejemplo 4, la curva de población pasó de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo por el punto (12, 38 000). Este punto se llama *punto de inflexión* de la curva. La importancia de este punto es que el valor máximo del incremento de la población está allí. En general, un punto de inflexión es un punto donde cambia de dirección la concavidad de una curva.

DEFINICIÓN Un punto P en una curva $y = f(x)$ recibe el nombre de **punto de inflexión** si f es continua ahí y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Por ejemplo, en la figura 7, B, C, D y P son los puntos de inflexión. Observe que si una curva tiene una tangente en un punto de inflexión, después la curva corta a la tangente en ese punto.

De acuerdo con la prueba de concavidad, hay un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada cambia de signo.

V EJEMPLO 5 Trace una posible gráfica de una función f que cumple con las condiciones siguientes:

(i) $f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ en $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ en $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

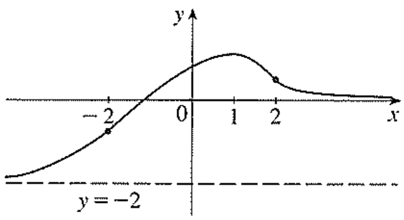


FIGURA 9

SOLUCIÓN La condición (i) establece que f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, \infty)$. La condición (ii) dice que f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, y cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$. Por la condición (iii) sabe que la gráfica de f tiene dos asíntotas horizontales: $y = -2$ y $y = 0$.

Primero se dibuja la asíntota horizontal $y = -2$ como una línea discontinua (véase figura 9). Después trace la gráfica de f, que se aproxima a esta asíntota por la izquierda, llega a su punto máximo en $x = 1$ y decrece acercándose al eje x a la derecha. También se tiene la certeza de que la gráfica tiene puntos de inflexión cuando $x = -2$ y 2. Observe que se hizo que la curva se doble hacia arriba para $x < -2$ y $x > 2$, y se flexiona hacia abajo cuando x está entre -2 y 2. □

Otra aplicación de la segunda derivada es la siguiente prueba para encontrar los valores máximo y mínimo. Es una consecuencia de la prueba de concavidad.

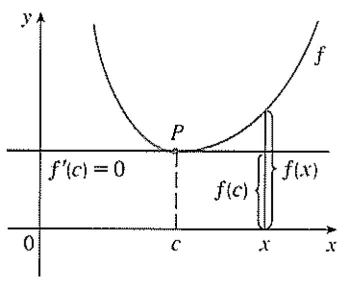


FIGURA 10
$f''(c) > 0$, f es cóncava hacia arriba

> **PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA** Suponga que f'' es continua cerca de c.
> (a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.
> (b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.

Por ejemplo, el inciso (a) es verdadero porque $f''(x) > 0$ cerca de c y, por consiguiente, f es cóncava hacia arriba cerca de c. Esto significa que la gráfica de f se encuentra *arriba* de su tangente horizontal en c, por lo que f tiene un mínimo local en c. (Véase la figura 10.)

V EJEMPLO 6 Analice la curva $y = x^4 - 4x^3$ con respecto a la concavidad, puntos de inflexión y máximos y mínimos locales. Use esta información para dibujar la curva.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

A fin de hallar los números críticos, haga $f'(x) = 0$ y obtiene $x = 0$ y $x = 3$. Para aplicar la prueba de la segunda derivada, evalúe f'' en estos números críticos:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Como $f'(3) = 0$ y $f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ es un mínimo local. Dado que $f''(0) = 0$, la prueba de la segunda derivada no da información acerca del número crítico 0. Pero como $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y también para $0 < x < 3$, la prueba de la primera derivada dice que f no tiene máximo ni mínimo locales en 0. [En efecto, la expresión de $f'(x)$ muestra que f decrece a la izquierda de 3 y se incrementa a la derecha de 3.]

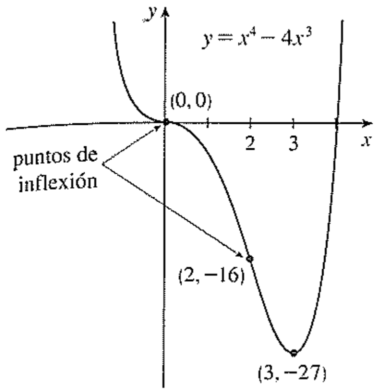


FIGURA 11

Como $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o 2, divida la recta real en intervalos con estos números como puntos extremos y complete la tabla siguiente.

Intervalo	$f''(x) = 12x(x - 2)$	Concavidad
$(-\infty, 0)$	$+$	hacia arriba
$(0, 2)$	$-$	hacia abajo
$(2, \infty)$	$+$	hacia arriba

El punto (0, 0) es un punto de inflexión, ya que la curva cambia allí de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. Asimismo, $(2, -16)$ es un punto de inflexión, puesto que la curva cambia allí de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

Con el uso del mínimo local, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión se dibuja la curva de la figura 11. □

NOTA La prueba de la segunda derivada no es concluyente cuando $f''(c) = 0$. En otras palabras, en ese punto podría haber un máximo, un mínimo o ninguno de los dos (como en el ejemplo 6). Esta prueba no funciona cuando $f''(c)$ no existe. En estos casos, debe aplicarse la prueba de la primera derivada. De hecho, incluso cuando ambas pruebas son aplicables, a menudo la prueba de la primera derivada es más fácil de usar.

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$.

SOLUCIÓN Puede recurrir a las reglas de la derivación para comprobar que las dos primeras derivadas son

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

■ Intente reproducir la gráfica de la figura 12 con una calculadora graficadora o una computadora. Algunas máquinas producen la gráfica completa, otras generan sólo la parte de la derecha del eje y algunas otras nada más la parte entre $x = 0$ y $x = 6$. Para obtener la explicación y el remedio, vea el ejemplo 7 de la sección 1.4. Una expresión equivalente que da la gráfica correcta es

$$y = (x^2)^{1/3} \cdot \frac{6 - x}{|6 - x|} |6 - x|^{1/3}$$

Como $f'(x) = 0$ cuando $x = 4$ y $f'(x)$ no existe cuando $x = 0$ o $x = 6$, los números críticos son 0, 4 y 6.

Intervalo	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreciente en $(-\infty, 0)$
$0 < x < 4$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente en $(0, 4)$
$4 < x < 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decreciente en $(4, 6)$
$x > 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	decreciente en $(6, \infty)$

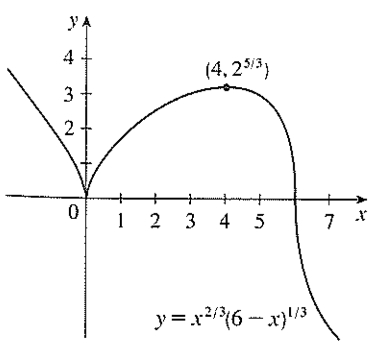


FIGURA 12

Para hallar los valores extremos locales, use la prueba de la primera derivada. Dado que f' cambia de negativa a positiva en 0, $f(0) = 0$ es un mínimo local. Como f' pasa de positiva a negativa en 4, $f(4) = 2^{5/3}$ es un máximo local. El signo de f' no varía en 6, de modo que allí no hay mínimo ni máximo. (Se podría usar la prueba de la segunda derivada en 4, pero no en 0 o 6, puesto que f'' no existe en ninguno de estos números.)

Si se estudia la expresión para $f''(x)$ y se observa que $x^{4/3} \geqslant 0$ para todo x, tiene $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y para $0 < x < 6$ y $f''(x) > 0$ para $x > 6$. De modo que f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$ y $(0, 6)$, cóncava hacia arriba sobre $(6, \infty)$, y el único punto de inflexión es $(6, 0)$. En la figura 12 se encuentra la gráfica. Observe que la curva tiene tangentes verticales en (0, 0) y (6, 0) porque $|f'(x)| \to \infty$ cuando $x \to 0$ y cuando $x \to 6$. □

EJEMPLO 8 Use la primera y segunda derivadas de $f(x) = e^{1/x}$, más las asíntotas para dibujar su gráfica.

SOLUCIÓN Advierta que el dominio de f es $\{x \mid x \neq 0\}$, de modo que se hace la comprobación en relación con las asíntotas verticales calculando los límites por la izquierda y por la derecha cuando $x \to 0$. Cuando $x \to 0^+$, sabe que $t = 1/x \to \infty$, de suerte que

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = \lim_{t \to \infty} e^t = \infty$$

y esto hace ver que $x = 0$ es un asíntota vertical. Cuando $x \to 0^-$, tiene $t = 1/x \to -\infty$, de igual manera

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

TEC En Module 4.3 puede practicar usando la información gráfica sobre f' para determinar la forma de la gráfica de f.

Cuando $x \to \pm\infty$, tiene $1/x \to 0$ de este modo,

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$$

Esto demuestra que $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Calcule ahora la derivada. la regla de la cadena da

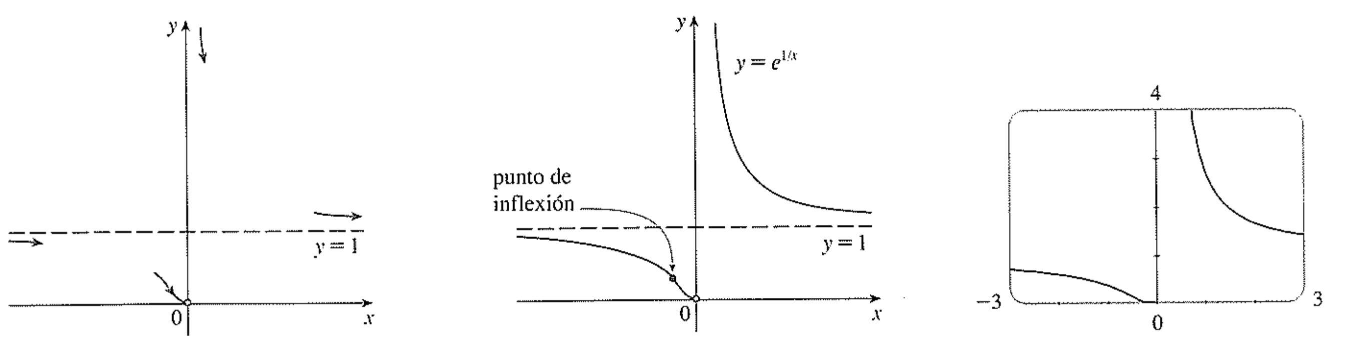
$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$$

Dado que $e^{1/x} > 0$ y $x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, tiene $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 0$. Por esto, f es decreciente sobre $(-\infty, 0)$ y sobre $(0, \infty)$. No hay número crítico, de forma que la función no tiene máximo ni mínimo. La segunda derivada es

$$f''(x) = -\frac{x^2 e^{1/x}(-1/x^2) - e^{1/x}(2x)}{x^4} = \frac{e^{1/x}(2x + 1)}{x^4}$$

Como $e^{1/x} > 0$ y $x^4 > 0$, tiene $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$ y $f''(x) < 0$ cuando $x < -\frac{1}{2}$. Por consiguiente, la curva es cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ y sobre $(0, \infty)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.

Para dibujar f, primero trace la asíntota horizontal $y = 1$ (como una línea intermitente), junto con las partes de la curva que están cerca de ella, en un esquema preliminar [figura 13(a)]. Estas partes reflejan la información referente a los límites y al hecho de que f es decreciente tanto sobre $(-\infty, 0)$ como sobre $(0, \infty)$. Advierta que ha indicado que $f(x) \to 0$ cuando $x \to 0^-$ aun cuando $f(0)$ no exista. En la figura 13(b) se termina el dibujo incorporando la información referente a la concavidad y al punto de inflexión. En la figura 13(c) se comprueba el trabajo con un aparato graficador.



(a) Esquema preliminar

(b) Dibujo terminado

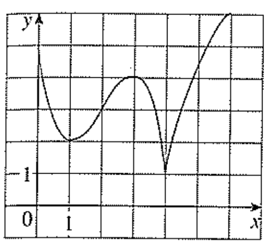
(c) Conformación por computadora

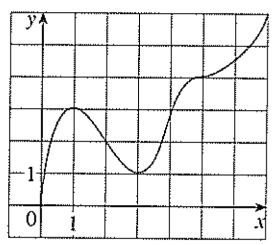
FIGURA 13

4.3 EJERCICIOS

1–2 Mediante la gráfica de f que se proporciona determine lo siguiente:

(a) Los intervalos abiertos en los cuales f es creciente.
(b) Los intervalos abiertos en los cuales f es decreciente.
(c) Los intervalos abiertos en los cuales f es cóncava hacia arriba.
(d) Los intervalos abiertos en los cuales f es cóncava hacia abajo.
(e) Las coordenadas de los puntos de inflexión.

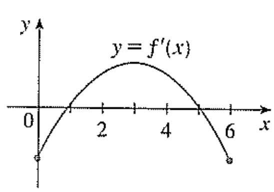
1. 

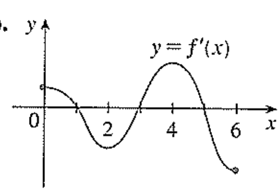
2. 

3. Suponga que se le da una fórmula para una función f.
(a) ¿Cómo determina dónde f es creciente o decreciente?
(b) ¿Cómo determina en dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
(c) ¿Cómo localiza los puntos de inflexión?

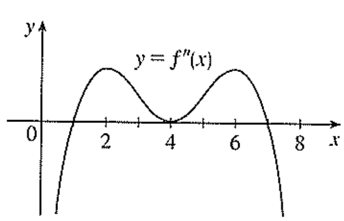
4. (a) Enuncie la prueba de la primera derivada.
(b) Enuncie la prueba de la segunda derivada. ¿En cuáles circunstancias no es concluyente? ¿Qué haría si falla?

5–6 Se ilustra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.
(a) ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?
(b) ¿En qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?

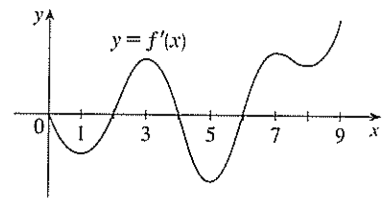
5. 

6. 

7. Se muestra la gráfica de la segunda derivada f'' de una función f. Dé las coordenadas x de los puntos de inflexión de f. Exprese las razones que fundamentan sus respuestas.



8. Se ilustra la gráfica de la primera derivada f' de una función f.
(a) ¿Sobre cuáles intervalos f es creciente? Explique.
(b) ¿En cuáles valores de x tiene f un máximo o un mínimo locales? Explique.
(c) ¿Sobre cuáles intervalos f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? Explique.
(d) ¿Cuáles son las coordenadas x de los puntos de inflexión de f? ¿Por qué?



9–18
(a) Encuentre los intervalos sobre los cuales f es creciente o decreciente.
(b) Halle los valores máximos y mínimos locales de f.
(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

18. $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$

19–20 Encuentre los valores máximos y mínimos locales de f utilizando las pruebas de la primera y la segunda derivadas. ¿Cuál método prefiere?

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

21. $f(x) = x + \sqrt{1 - x}$

22. (a) Halle los números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) ¿Qué le dice la prueba de la segunda derivada con respecto al comportamiento de f sobre estos puntos críticos?
(c) ¿Qué le dice la prueba de la segunda derivada?

23. Suponga que f'' es continua sobre $(-\infty, \infty)$.
(a) Si $f'(2) = 0$ y $f''(2) = -5$, ¿qué puede usted decir acerca de f?
(b) Si $f'(6) = 0$ y $f''(6) = 0$, ¿qué puede usted decir acerca de f?

24–29 Trace la gráfica de una función que cumple todas las condiciones dadas.

24. $f'(x) > 0$ para toda $x \neq 1$, asíntota vertical $x = 1$,
$f''(x) > 0$ si $x < 1$ o $x > 3$, $f''(x) < 0$ si $1 < x < 3$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ si $x < 0$ o $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ si $0 < x < 2$ o $x > 4$,
$f''(x) > 0$ si $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ si $x < 1$ o $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ si $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ si $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0$, punto de inflexión $(0, 1)$

27. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ si $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $f''\cancel{(x) >} 0$ si $x \neq 2$

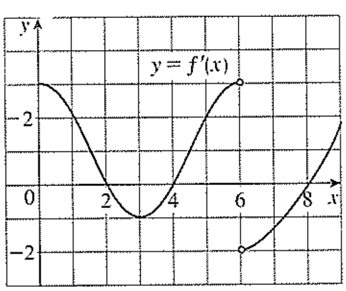
28. $f'(x) > 0$ si $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ si $|x| > 2$,
$f'(2) = 0$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ si $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ si $x > 3$

29. $f'(x) < 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x

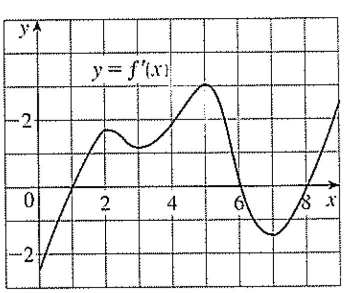
30. Considere $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$, y $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para toda x
(a) Dibuje una gráfica posible para f.
(b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = 0$ ¿Por qué?
(c) ¿Es posible que $f'(2) = \frac{1}{3}$ ¿Por qué?

31–32 Se proporciona la gráfica de la derivada f' de una función continua f.
(a) ¿En qué intervalos la función f es creciente o decreciente?
(b) ¿En qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?
(c) ¿En qué intervalos f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo?
(d) Establezca la(s) coordenada(s) x del punto o de los puntos de inflexión.
(e) Suponga que $f(0) = 0$, y grafique f.

31.



32.



33–44
(a) Halle los intervalos de crecimiento o decremento.
(b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales.
(c) Encuentre los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(d) Use la información de los incisos (a), (b) y (c) para dibujar f. Compruebe su respuesta con un aparato graficador si cuenta con uno.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ **34.** $f(x) = 2 + 3x - x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$ **36.** $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = (x + 1)^5 - 5x - 2$ **38.** $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

39. $A(x) = x\sqrt{x + 3}$ **40.** $B(x) = 3x^{2/3} - x$

41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$ **42.** $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

44. $f(t) = t + \cos t$, $-2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

45–52
(a) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales.
(b) Halle los intervalos donde crece o decrece.
(c) Encuentre los valores máximos y mínimos locales.
(d) Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.
(e) Use la información de los incisos (a) y (d) para dibujar f.

45. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ **46.** $f(x) = \dfrac{x^2}{(x - 2)^2}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = x \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$

49. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$ **50.** $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

51. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$ **52.** $f(x) = e^{\arctan x}$

53. Considere que la derivada de una función $f'(x) = (x - 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. ¿En qué intervalo se incrementa f?

54. Aplique los métodos de esta sección para bosquejar la curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$ donde a es una constante positiva. ¿Qué tienen de común los miembros de esta familia de curvas? ¿Cómo difieren entre sí?

55–56
(a) Utilice una gráfica de f para estimar los valores máximos y mínimos. Enseguida encuentre los valores exactos.
(b) Estime el valor de x con el cual f se incrementa más rápidamente. Después encuentre el valor exacto.

55. $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **56.** $f(x) = x^2e^{-x}$

57–58
(a) Use una gráfica de f para dar un estimado aproximado de los intervalos de concavidad y las coordenadas de los puntos de inflexión.
(b) Use una gráfica de f'' para ofrecer estimaciones mejores.

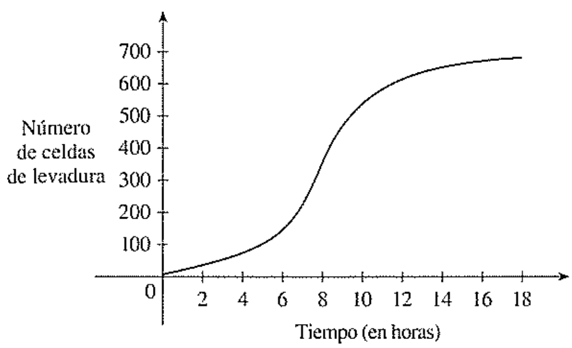
57. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

58. $f(x) = x^3(x-2)^4$

CAS **59–60** Estime los intervalos de concavidad hasta una cifra decimal con un sistema algebraico para computadora con el fin de calcular y trazar la gráfica de f''.

59. $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ **60.** $f(x) = \dfrac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^3}$

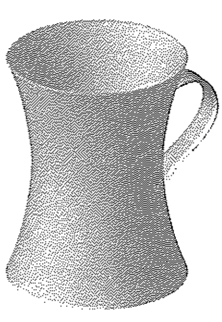
61. Se conoce una gráfica de la población de células de levadura en un cultivo de laboratorio reciente como una función del tiempo
(a) Describa cómo varía la rápidez de incremento de población.
(b) ¿Cuándo es más alta la rápidez?
(c) ¿En qué intervalos la función población es cóncava hacia arriba o hacia abajo?
(d) Estimar las coordenadas del punto de inflexión



62. Sea $f(t)$ la temperatura en el tiempo t donde habita y considera que en el tiempo $t = 3$ se siente incomodo por lo caluroso. ¿Cómo se sente con respecto a la información que se proporciona en cada caso?
(a) $f'(3) = 2,\ f''(3) = 4$ (b) $f'(3) = 2,\ f''(3) = -4$
(c) $f'(3) = -2,\ f''(3) = 4$ (d) $f'(3) = -2,\ f''(3) = -4$

63. Sea $K(t)$ una medida de los conocimientos que obtiene usted al estudiar para un examen durante t horas. ¿Cuál opina usted que es más grande, $K(8) - K(7)$ o $K(3) - K(2)$? ¿La gráfica de K es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo? ¿Por qué?

64. Se vierte café en la jarrita que se ilustra en la figura a una rapidez constante (medida en volumen por unidad de tiempo). Trace una gráfica aproximada del espacio ocupado por el café como función del tiempo. Explique la forma de la gráfica en términos de la concavidad. ¿Cuál es el significado del punto de inflexión?



65. Una *curva de respuesta a un medicamento* describe los niveles de dosificación en el torrente sanguíneo después de que se ha administrado un medicamento. Con frecuencia se aplica una función de onda de impulso $S(t) = At^p e^{-kt}$ para representar la curva de respuesta, revelando una oleada inicial en el nivel de medicamento y a continuación una declinación gradual. Si, para un medicamento particular, $A = 0.01$, $p = 4$, $k = 0.07$, y t se mide en minutos, estimar el tiempo correspondiente a los puntos de inflexión y explique su significado. Si tiene un dispositivo graficador, utilícelo para dibujar la curva de respuesta.

66. La familia de curvas acampanadas

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

se presenta en probabilidad y estadística donde se llaman *función de densidad normal*. La constante μ se conoce como media y la constante positiva σ es la *desviación estándar*. Por sencillez, cambie la escala de la función de modo que se elimine el factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ y analice el caso especial donde $\mu = 0$. Por lo tanto, estudie la función

$$f(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}$$

(a) Encuentre la asíntota, el valor máximo y los puntos de inflexión de f.
(b) ¿Qué función desempeña σ en la forma de la curva?
(c) Ilustre lo anterior trazando la gráfica de cuatro miembros de esta familia en la misma pantalla.

67. Encuentre una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tenga un valor máximo local de 3 en -2 y un valor mínimo local de 0 en 1.

68. ¿Para cuáles valores de los números a y b la función

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

tiene el valor máximo $f(2) = 1$?

69. Demuestre que la curva *insertar formula* tiene tres puntos de inflexión y se encuentran en una línea recta.

70. Demuestre que las curvas $y = e^{-x}$ y $y = -e^{-x}$ toca la curva $y = e^{-x}$ sen x en sus puntos de inflexión.

71. Suponga que f es derivable en un intervalo I y $f'(x) > 0$ para todos los números x en I, excepto para un número c. Demuestre que f es creciente en el intervalo completo I.

72–74 Suponga que todas las funciones son derivables dos veces y que la segunda derivada nunca es 0.

72. (a) Si f y g son cóncavas hacia arriba en I, demuestre que $f + g$ es cóncava hacia arriba en I.
(b) Si f es positiva y cóncava hacia arriba en I, demuestre que la función $g(x) = [f(x)]^2$ es cóncava hacia arriba en I.

73. (a) Si f y g son funciones positivas, crecientes, cóncavas hacia arriba en I, demuestre que la función producto fg es cóncava hacia arriba en I.
(b) Demuestre que el inciso (a) sigue siendo verdadero si f y g son decrecientes.

(c) Suponga que f es creciente y que g es decreciente. Demuestre mediante tres ejemplos que fg podría ser cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo o lineal. ¿Por qué no se aplica el razonamiento de los incisos (a) y (b) en este caso?

74. Suponga que f y g son cóncavas hacia arriba en $(-\infty, \infty)$. ¿En qué condiciones de f la función compuesta $h(x) = f(g(x))$ será cóncava hacia arriba?

---

75. Demuestre que $\tan x > x$ para $0 < x < \pi/2$. [*Sugerencia:* Demuestre que $f(x) = \tan x - x$ es creciente en $(0, \pi/2)$.]

76. (a) Demuestre que $e^x \geqslant 1 + x$ para $x \geqslant 0$.
(b) Infiera que $e^x \geqslant 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ para $x \geqslant 0$.
(c) Aplique la inducción matemática para probar que para $x \geqslant 0$ y cualquier entero positivo n,

$$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

77. Demuestre que una función cúbica (un polinomio de tercer grado) siempre tiene con exactitud un punto de inflexión.
Si su gráfica tiene tres intersecciones x_1, x_2 y x_3, demuestre que la coordenada x del punto de inflexión es $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.

78. ¿Para cuáles valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ tiene dos puntos de inflexión diferentes? ¿Acaso ninguno? Ilustre dibujando P para diversos valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica a medida que c decrece?

79. Demuestre que si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica f y f'' existe en un intervalo abierto que contiene c, entonces $f''(c) = 0$. [*Sugerencia*: aplique la prueba de la primera derivada y el teorema de Fermat a la función $g = f'$.]

80. Demuestre que si $f(x) = x^4$, entonces $f''(0) = 0$, pero $(0, 0)$ no es un punto de inflexión de la gráfica de f.

81. Demuestre que la función $g(x) = x|x|$ posee un punto de inflexión en $(0, 0)$ pero $g''(0)$ no existe.

82. Suponga que f''' es continua y $f'(c) = f''(c) = 0$, pero $f'''(c) > 0$. ¿La función f tiene un máximo relativo o un mínimo relativo en c? ¿Tiene f un punto de inflexión en c?

83. Los tres casos en la prueba de la primera derivada cubren las situaciones que por lo general uno se encuentra, pero sin extraer todas las posibilidades. Considere las funciones f, g y h cuyos valores en 0 todos son 0 y, para $x \neq 0$,

$$f(x) = x^4 \operatorname{sen} \frac{1}{4} \qquad g(x) = x^4 \left(2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x^4 \left(-2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

(a) Demuestre que 0 es un número crítico de las tres funciones pero sus derivadas cambian de signo con frecuencia de manera infinita en ambos lados de acero.
(b) Demuestre que f no tiene un máximo local ni un mínimo local en 0, g tiene un mínimo local, y h tiene un máximo local.

4.4 FORMAS INDETERMINADAS Y LA REGLA DE L'HOSPITAL

Suponga que intenta analizar el comportamiento de la función

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

Aunque F no está definida cuando $x = 1$, necesita saber cómo se comporta F *cerca* de 1. En particular, le gustaría conocer el valor del límite

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

Pero no puede aplicar la ley 5 de los límites (el límite del cociente es el cociente de los límites, véase sección 2.3) porque el límite del denominador es 0. De hecho, aun cuando el límite en (1) existe, su valor no es obvio porque el numerador y el denominador tienden a 0 y $\frac{0}{0}$ no está definido.

En general, si tiene un límite de la forma

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$, en tal caso este límite puede existir o no y se conoce como **forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$**. En el capítulo 2 encontró algunos límites de este tipo. Para las funciones racionales, puede cancelar los factores comunes:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Aplique un argumento geométrico para demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

Pero estos métodos no funcionan para límites como el (1) de modo que, en esta sección, se presenta un método sistemático, conocido como *regla de l'Hospital,* para la evaluación de formas indeterminadas.

Se tiene otra situación en que un límite no es obvio cuando busca una asíntota horizontal de F y necesita evaluar el límite

$$\boxed{2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x-1}$$

No es evidente cómo evaluar este límite porque el numerador y el denominador se hacen grandes cuando $x \to \infty$. Hay una lucha entre el numerador y el denominador. Si gana el numerador, el límite será ∞; si gana el denominador, la respuesta será 0. O puede haber un término medio, en cuyo caso la respuesta puede ser algún número positivo finito.

En general, si tiene un límite de la forma

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x) \to \infty$ (o $-\infty$) y $g(x) \to \infty$ (o $-\infty$), en consecuencia el límite puede existir o no y se conoce como **forma indeterminada del tipo** ∞/∞. En la sección 2.6 vio que este tipo de límite se puede evaluar para ciertas funciones, incluso las racionales, al dividir el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que se presenta en el denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Este método no funciona para límites como el (2), pero también puede aplicarse la regla de l'Hospital a este tipo de forma indeterminada.

L'HOSPITAL

Se le nombre la regla de l'Hôspital en honor al Marqués de l'Hôspital (1661-1704) pero fue descubierta por un matemático suizo, John Bernoulli (1667-1748). Algunas veces podría ver l'Hôspital escrito como l'Hôspital, pero él escribió su propio nombre l'Hôspital como era común en el siglo XVII. Véase Redacción de un proyecto, pág. 307, para más detalles.

REGLA DE L'HOSPITAL Suponga que f y g son funciones derivables y que $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I que contiene a (excepto quizás en a). Suponga que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

o que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

(En otras palabras, tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o del ∞/∞.) Por lo tanto

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si el límite en el lado derecho existe (o es ∞ o es $-\infty$).

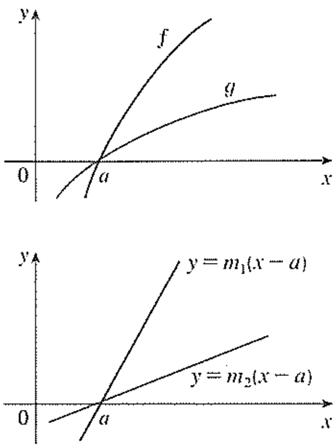


FIGURA 1

En la figura 1 se sugiere en forma visual por qué la regla de l'Hospital podría ser verdadera. En la primera gráfica se muestran dos funciones derivables f y g, cada una de las cuales tiende a 0 cuando $x \to a$. Con un acercamiento hacia el punto $(a, 0)$, las gráficas empezarán a verse casi lineales. Pero si las funciones *fueran* en realidad lineales, como en la segunda gráfica, después su gráfica sería

$$\frac{m_1(x - a)}{m_2(x - a)} = \frac{m_1}{m_2}$$

lo cual es la proporción entre sus derivadas. Esto sugiere que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Advierta que cuando se usa la regla de l'Hospital, deriva el numerador y el denominador por separado. No utiliza la regla del cociente.

NOTA 1 La regla de l'Hospital afirma que el límite de un cociente de funciones es igual al límite del cociente de sus derivadas, siempre que se satisfagan las condiciones dadas. Antes de aplicar la regla de l'Hospital es muy importante comprobar las condiciones referentes a los límites de f y g.

NOTA 2 La regla de l'Hospital también es válida para los límites laterales y los límites en el infinito o en el infinito negativo; es decir, "$x \to a$" se puede reemplazar con cualquiera de los símbolos siguientes $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

NOTA 3 Para el caso especial en que $f(a) = g(a) = 0$, f' y g' son continuas y $g'(a) \neq 0$, es fácil ver por qué la regla de l'Hospital es verdadera. En efecto, si se aplica la forma alternativa de la definición de derivada, tiene

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Es más difícil demostrar la versión general de la regla de l'Hospital. Véase el apéndice F.

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$$

puede aplicar la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$

□

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función del ejemplo 2. Con anterioridad ha visto ver que, con mucho, las funciones exponenciales crecen con más rapidez que las potencias, de modo que el resultado del ejemplo 2 no es inesperado. Véase también el ejercicio 69.

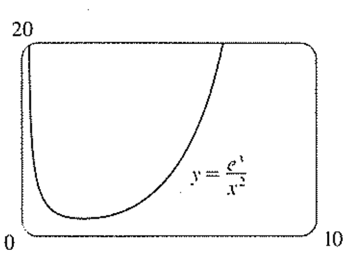


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Calcule $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Tiene que $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, de modo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{d}{dx}(e^x)}{\dfrac{d}{dx}(x^2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x}$$

Puesto que $e^x \to \infty$ y $2x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, el límite del segundo miembro también es indeterminado, pero una segunda aplicación de la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

□

En la figura 3 se muestra la gráfica de la función del ejemplo 3. Ya analizamos el crecimiento lento de los logaritmos, de suerte que no es sorprendente que esta proporción tienda a 0 cuando $x \to \infty$. Véase también el ejercicio 70.

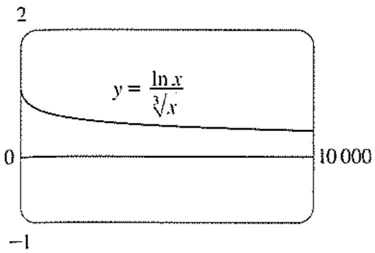


FIGURA 3

EJEMPLO 3 Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

SOLUCIÓN Dado que $\ln x \to \infty$ y $\sqrt[3]{x} \to \infty$ cuando $x \to \infty$, puede aplicarse la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Advierta que ahora el límite del segundo miembro es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$. Pero, en lugar de aplicar la regla de l'Hospital por segunda vez, como en el ejemplo 2, se simplifica la expresión y se ve que una segunda aplicación es innecesaria:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

□

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$. [Véase el ejercicio 38 de la sección 2.2.]

SOLUCIÓN Al observar que tanto $\tan x - x \to 0$ como $x^3 \to 0$ cuando $x \to 0$, aplique la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

La gráfica de la figura 4 da una confirmación visual del resultado del ejemplo 4. Sin embargo, si hiciera un acercamiento muy grande, obtendría una gráfica inexacta, porque $\tan x$ está cercana a x cuando este último es pequeño. Véase el ejercicio 38(d) de la sección 2.2.

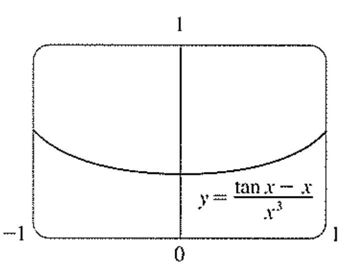


FIGURA 4

Como el límite del lado derecho todavía es indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$, aplique una vez más dicha regla:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x}$$

Puesto que $\lim_{x \to 0} \sec^2 x = 1$, simplifica el cálculo al escribir

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \sec^2 x \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Puede evaluar el último límite usando ya sea la regla de l'Hospital por tercera vez o escribiendo $\tan x$ como $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y utilizando su conocimiento de los límites trigonométricos. Al reunir todos los pasos, obtiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim\limits_{x \to \pi^-} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

SOLUCIÓN Si intenta aplicar la regla de l'Hospital a ciegas, obtendría

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$$

¡Esto es **erróneo**! Aun cuando el numerador $\operatorname{sen} x \to 0$ cuando $x \to \pi^-$, advierta que el denominador $(1 - \cos x)$ no tiende a 0, de modo que en este caso no se puede aplicar la regla de l'Hospital.

De hecho, el límite requerido es fácil de hallar porque la función es continua y el denominador es diferente de cero en:

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x} = \frac{\operatorname{sen} \pi}{1-\cos \pi} = \frac{0}{1-(-1)} = 0 \qquad \square$$

El ejemplo 5 hace ver hasta qué punto puede equivocarse si aplica la regla de l'Hospital sin pensar. Es *posible* hallar otros límites aplicando dicha regla, pero se encuentran con mayor facilidad con otros métodos. (Véanse los ejemplos 3 y 5 de la sección 2.3, el ejemplo 3 de la sección 2.6 y el análisis al principio de esta sección.) Por lo tanto, al evaluar cualquier límite, considere otros métodos antes de aplicar la regla de l'Hospital.

PRODUCTOS INDETERMINADOS

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (o bien $-\infty$), por lo tanto no resulta claro cuál es el valor de $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, si lo hay. Se tiene una lucha entre f y g. Si f gana, la respuesta es 0; si g gana, la respuesta será ∞ (o bien $-\infty$). O puede haber un término medio donde la respuesta es un número finito diferente de cero. Esta clase de límite se llama **forma indeterminada del tipo $0 \cdot \infty$**. Puede manejarla escribiendo el producto fg como un cociente:

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad \text{o} \qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

Esto convierte el límite dado en una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞ de modo que aplique la regla de l'Hospital.

En la figura 5 se ilustra la gráfica de la función en el ejemplo 6. Note que la función es indefinida en $x = 0$; la gráfica se aproxima al origen pero nunca lo alcanza.

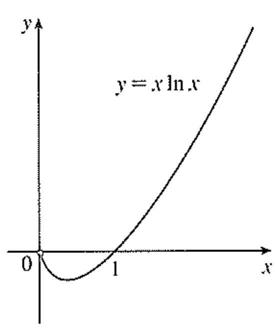


FIGURA 5

EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$.

SOLUCIÓN El límite dado es indeterminado porque, cuando $x \to 0^+$, el primer factor (x) tiende a 0, en tanto que el segundo ($\ln x$) lo hace a $-\infty$. Si se escribe $x = 1/(1/x)$, tiene $1/x \to \infty$ cuando $x \to 0^+$, de modo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0 \qquad \square$$

NOTA En la resolución del ejemplo 6 se podría escribir lo siguiente como otra posible opción:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Esto da una forma indeterminada del tipo 0/0, pero si aplica la regla de l'Hospital, obtiene una expresión más complicada que aquella con la que empezó. En general, cuando escribe de nuevo un producto indeterminado, trate de escoger la opción que conduzca al límite más sencillo.

DIFERENCIAS INDETERMINADAS

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, por lo tanto el límite

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$$

se conoce como **forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$**. Una vez más, existe una competencia entre f y g. ¿La respuesta es ∞ (f gana), o será $-\infty$ (g gana) o se tiene un término medio en un número finito? Para averiguarlo, intente convertir la diferencia en un cociente (por ejemplo, usando un denominador común o racionalización o factorizando un factor común) de modo que tenga una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

EJEMPLO 7 Calcule $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$.

SOLUCIÓN En primer lugar, advierta que $\sec x \to \infty$ y $\tan x \to \infty$ cuando $x \to (\pi/2)^-$, de modo que el límite es indeterminado. En este caso, use un denominador común:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right)$$
$$= \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0$$

Observe que se justifica el uso de la regla de l'Hospital porque $1 - \operatorname{sen} x \to 0$ y $\cos x \to 0$ cuando $x \to (\pi/2)^-$. □

POTENCIAS INDETERMINADAS

Varias formas indeterminadas surgen del límite

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ tipo 0^0
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ tipo ∞^0
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ tipo 1^∞

Cada uno de estos tres casos se puede tratar tomando el logaritmo natural:

$$\text{sea} \quad y = [f(x)]^{g(x)}, \quad \text{por lo tanto} \quad \ln y = g(x) \ln f(x)$$

o bien, al escribir la función como una exponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

(Recuerde que se usaron estos dos métodos al derivar esas funciones.) Cualquiera de los dos conduce al producto indeterminado $g(x) \ln f(x)$, que es del tipo $0 \cdot \infty$.

EJEMPLO 8 Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, advierta que cuando $x \to 0^+$, tiene $1 + \operatorname{sen} 4x \to 1$ y $\cot x \to \infty$, por lo que el límite es indeterminado. Sea

$$y = (1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}$$

Entonces $\qquad \ln y = \ln[(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \operatorname{sen} 4x)$

de modo que la regla de l'Hospital da

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 4x)}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \operatorname{sen} 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

Hasta ahora ha calculado el límite de $\ln y$, pero lo que desea es el límite de y.

Para hallarlo aplique $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{x\to 0^+}(1 + \operatorname{sen} 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$ □

En la figura 6 se muestra la gráfica de la función $y = x^x$, $x > 0$. Advierta que aun cuando 0^0 no está definido, los valores de la función tienden a 1 cuando $x \to 0^+$. Esto confirma el resultado del ejemplo 9.

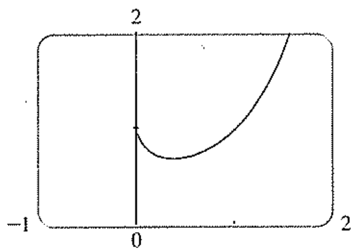


FIGURA 6

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

SOLUCIÓN Advierta que este límite es indeterminado puesto que $0^x = 0$ para cualquier $x > 0$ pero $x^0 = 1$ para cualquier $x \neq 0$. Podría proceder como en el ejemplo 8 o escribir la función como una exponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$$

En el ejemplo 6 aplique la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$$

Por lo tanto, $$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$ □

4.4 EJERCICIOS

1–4 Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

¿cuáles de los límites siguientes son formas indeterminadas? Para aquellos que no son una forma indeterminada, evalúe el límite donde sea posible hacerlo.

1. (a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$

(c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$

(e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim\limits_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim\limits_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

(c) $\lim\limits_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim\limits_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–64 Halle el límite. Aplique la regla de l'Hospital donde resulte apropiado. Si existe un método más elemental, considere la posibilidad de utilizarlo. Si no puede aplicar la regla de l'Hospital, explique por qué.

5. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - x}$

6. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^9 - 1}{x^5 - 1}$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\tan 5x}$

11. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t^3}$

12. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{3t} - 1}{t}$

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan px}{\tan qx}$

14. $\lim\limits_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\csc\theta}$

15. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x + x^2}{1 - 2x^2}$

17. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

18. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

19. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x^3}$

20. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} \pi x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$

23. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\tanh x}{\tan x}$

24. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x - \tan x}$

25. $\displaystyle \lim_{t \to 0} \frac{5^t - 3^t}{t}$

26. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$

27. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

28. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$

29. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

30. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

31. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

32. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

33. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

34. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

35. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

36. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

37. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

38. $\displaystyle \lim_{x \to a^+} \frac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

39. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

40. $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x$

41. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

42. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

43. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x^2}$

44. $\displaystyle \lim_{x \to \pi/4} (1 - \tan x) \sec x$

45. $\displaystyle \lim_{x \to 1^+} \ln x \tan(\pi x/2)$

46. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} x \tan(1/x)$

47. $\displaystyle \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

48. $\displaystyle \lim_{x \to 0} (\csc x - \cot x)$

49. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right)$

50. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right)$

51. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (x - \ln x)$

52. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (xe^{1/x} - x)$

53. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x^{x^2}$

54. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (\tan 2x)^x$

55. $\displaystyle \lim_{x \to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

56. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx}$

57. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)^x$

58. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

59. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} x^{1/x}$

60. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{1/x}$

61. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

62. $\displaystyle \lim_{x \to 1} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)}$

63. $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

64. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x + 5} \right)^{2x+1}$

65–66 Use una gráfica para estimar el valor del límite. Enseguida utilice la regla de l'Hospital para hallar el valor exacto.

65. $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$

66. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

67–68 Ilustre la regla de l'Hospital dibujando tanto $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ cerca de $x = 0$ con el fin de observar que estas relaciones tienen el mismo límite cuando $x \to 0$. Calcule, asimismo, el valor exacto del límite.

67. $f(x) = e^x - 1, \quad g(x) = x^3 + 4x$

68. $f(x) = 2x \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \sec x - 1$

---

69. Pruebe que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier entero positivo n. Esto demuestra que la función exponencial se acerca a infinito con mayor rapidez que cualquier potencia de x.

70. Compruebe que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para cualquier número $p > 0$. Esto demuestra que la función logarítmica tiende a ∞ más despacio que cualquier potencia de x.

71. ¿Qué sucesde si intente aplicar la regla del l'Hospital para evaluar

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Evalúe el límite aplicando otro método.

72. Si un objeto con masa m se deja caer desde el estado de reposo, un modelo para su rapidez v una vez que transcurren t segundos, tomando en cuenta la resistencia del aire, es

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y c es una constante positiva. (En el capítulo 9 podrá deducir esta ecuación a partir de la hipótesis de que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez del objeto; c es la constante de proporcionalidad.)

(a) Calcule $\lim_{t \to \infty} v$. ¿Cuál es el significado de este límite?

(b) Para t fijo, utilice la regla de l'Hospital para calcular $\lim_{m \to \infty} v$. ¿Qué puede concluir acerca de la velocidad de un objeto en caída dentro de vacío?

73. Si una cantidad inicial de dinero se invierte a una tasa de interés r compuesta n veces al año, el valor de la inversión después que transcurren t años es

$$A = A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

si hace que $n \to \infty$, lo denomina *capitalización continua* del interés. Aplique la regla de l'Hospital para demostrar que si el interés se capitaliza de manera continua, por lo tanto el monto después de n años es

$$A = A_0 e^{rt}$$

74. Si una bola de metal con masa m es arrojada dentro de agua y la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, en tal caso la distancia que recorre la bola en el tiempo t es

$$s(t) = \frac{m}{c} \ln cosh \sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

donde c es una constante positiva. Hallar el $\lim_{m \to \infty+} s(t)$

75. Si un campo electroestático E actúa en un dieléctrico líquido o un gas polar, el momento bipolar neto P por unidad de volumen es

$$P(E) = \frac{e^E + e^{-E}}{e^E - e^{-E}} - \frac{1}{E}$$

Demuestre que el $\lim_{E \to 0^+} P(E) = 0$.

76. Un cable metálico de radio r y cubierto por un aislante, de tal manera, que la distancia desde el centro del cable al exterior del aislante es R. La velocidad v de un impulso eléctrico en el cable es

$$v = -c\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

donde c es una constante positiva. Hallar los limites siguientes e interprete sus respuestas.

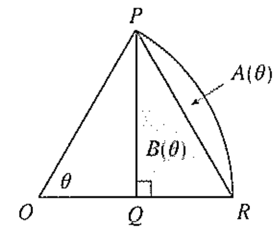
(a) $\lim_{R \to r^+} v$ (b) $\lim_{r \to 0^+} v$

77. La primera aparición impresa de la regla de l'Hospital fue en el libro *Analyse des Infiniment Petits*, publicado por el marqués de l'Hospital en 1696. Fue el primer libro de texto de cálculo alguna vez publicado y el ejemplo que allí utilizó el marqués para ilustrar su regla fue hallar el límite de la fución

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

cuando x tiende a a, donde $a > 0$. (En aquel tiempo era común escribir aa, en lugar de a^2.) Resuelva este problema.

78. En la figura se muestra un sector de un círculo, con ángulo central θ. Sea $A(\theta)$ el área del segmento entre la cuerda PR y el arco PR. Sea $B(\theta)$ el área del triángulo PQR. Encuentre $\lim_{\theta \to 0^+} A(\theta)/B(\theta)$.



79. Si f' es continua, $f(2) = 0$ y $f'(2) = 7$, evalúe

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2 + 3x) + f(2 + 5x)}{x}$$

80. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\text{sen } 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}\right) = 0$$

$\boxed{81.}$ Si f' es continua, use la regla de l'Hospital para demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h} = f'(x)$$

Con ayuda de un diagrama explique el significado de esta ecuación.

82. Si f'' es continua, demuestre que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2} = f''(x)$$

83. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Mediante la definición de derivada calcule $f'(0)$.
(b) Demuestre que f posee derivadas de todos los órdenes que están definidas en $\mathbb{R}$. [*Sugerencia*: primero demuestre por inducción que hay un polinomio $p_n(x)$ y un entero no negativo k_n tal que $f^{(n)}(x) = p_n(x)f(x)/x^{k_n}$ para $x \neq 0$.]

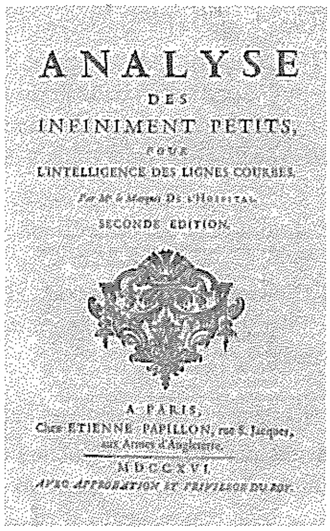
84. Sea

$$f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que f es continua en 0.
(b) Investigue en forma gráfica si f es derivable en 0 mediante varios acercamientos al punto (0, 1) de la gráfica de f.
(c) Demuestre que f no es derivable en 0. ¿Cómo puede conciliar este hecho con el aspecto de las gráficas del inciso (b)?

REDACCIÓN DE PROYECTO

LOS ORÍGENES DE LA REGLA DE L'HOSPITAL



Thomas Fisher Rare Book Library

www.stewartcalculus.com
La Internet es otra fuente de información para este proyecto. Visite el sitio y haga clic en History of Mathematics.

La regla de l'Hospital se publicó por primera vez en 1696, en el libro de texto del marqués de l'Hospital, *Analyse des Infiniment Petits*, pero la regla fue descubierta en 1694 por el matemático suizo Johann Bernoulli. La explicación es que ambos habían entrado en un curioso arreglo de negocios por medio del cual el marqués de l'Hospital compró los derechos de los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. Los detalles, incluso una traducción de la carta de l'Hospital a Bernoulli en la que propone el arreglo, se pueden hallar en el libro escrito por Eves [1].

Escriba un informe sobre los orígenes históricos y matemáticos de la regla de l'Hospital. Empiece por dar breves detalles biográficos de los dos hombres (el diccionario editado por Gillispie [2] es una buena fuente) y describa el trato de negocios entre ellos. A continuación, mencione el enunciado de l'Hospital de su regla, el cual se encuentra en el libro fuente de Struik [4] y, más sintético, en el libro de Katz [3]. Advierta que l'Hospital y Bernoulli formularon la regla geométricamente y dieron la respuesta en términos de diferenciales. Compare el enunciado de ellos con la versión de la regla de l'Hospital que se dio en la sección 4.4 y demuestre que, en esencia, los dos enunciados son los mismos.

1. Howard Eves, *In Mathematic al Circles* (*Volumen* 2: *Cuadrantes III y IV*) (Boston: Prindle, Weber and Schmidt, 1969), pp. 20-22.
2. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography* (Nueva York: Scribner's, 1974). Véase el artículo sobre Johann Bernoulli, por E. A. Fellman y J. O. Fleckenstein, en el volumen II y el artículo sobre el marqués de l'Hospital, por Abraham Robinson, en el volumen VIII.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (Nueva York: Harper Collins, 1993), pp. 484.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, 1200-1800 (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1969), pp. 315-316.

4.5 RESUMEN DE TRAZO DE CURVAS

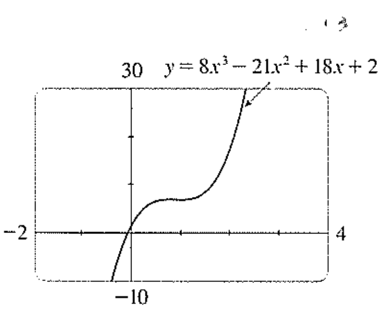


FIGURA 1

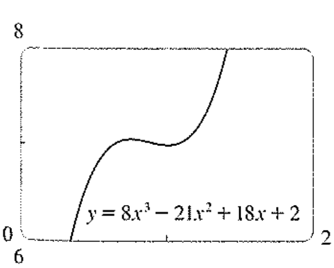


FIGURA 2

Hasta este momento sólo ha interesado en algunos aspectos particulares del trazo de curvas: dominio, intervalo y simetría en el capítulo 1; límites, continuidad y asíntotas en el capítulo 2; derivadas y tangentes en los capítulos 2 y 3, y valores extremos, intervalos de incremento y decremento, concavidad, puntos de inflexión y regla de l'Hospital en este capítulo. Pero ya es tiempo de reunir toda esta información relacionada con la elaboración de gráficas, que revela las características importantes de las funciones.

Usted podría preguntar: ¿por qué no usar sólo una calculadora o computadora para dibujar una curva ¿Por qué necesitamos aplicar el cálculo?.

Es cierto que los instrumentos modernos son capaces de generar gráficas muy exactas. Pero incluso el mejor instrumento para graficar tiene que ser utilizado en forma inteligente. Como se establece en la sección 1.4: es muy importante elegir un rectángulo de visión adecuado para evitar obtener una gráfica engañosa. Vea en particular los ejemplos 1, 3, 4 y 5 de dicha sección. La aplicación del cálculo permite descubrir los aspectos más interesantes de las gráficas y, en muchos casos, calcular *exactamente* los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión, y no sólo en forma aproximada.

Por ejemplo, en la figura 4 se presenta la gráfica de $f(x) = 8x^3 - 21x^2 + 18x + 2$. A primera vista parece razonable: tiene la misma forma que las curvas cúbicas como $y = x^3$, y parece no tener máximo ni mínimo. Pero si calcula la derivada, se dará cuenta de que hay un máximo cuando $x = 0.75$ y un mínimo cuando $x = 1$. En efecto, si efectúa un acercamiento a esta parte de la gráfica verá el comportamiento que se ilustra en la figura 2. Sin la herramienta del cálculo, sin dificultad podría pasarlas por alto.

En la sección siguiente se elabora la gráfica de funciones recurriendo a la interacción del cálculo y los instrumentos para graficar. En esta sección dibujará gráficas aplicando la información siguiente. No se supone que tenga instrumentos para graficar, pero si usted cuenta con uno, sólo utilícelo para comprobar su trabajo.

NORMAS PARA TRAZAR UNA CURVA

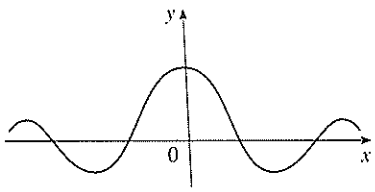
La lista siguiente es una guía para graficar una curva $y = f(x)$ a mano. Habrá algunas funciones en las que no se apliquen todos los puntos. (Por ejemplo, una curva dada podría no tener una asíntota o no ser simétrica.) Pero las normas proporcionan toda la información que se necesita para elaborar un diagrama que muestre los aspectos más importantes de la función.

A. Dominio Con frecuencia es muy útil para determinar el domino D de f, es decir, el conjunto de valores de x para el cual $f(x)$ está definida.

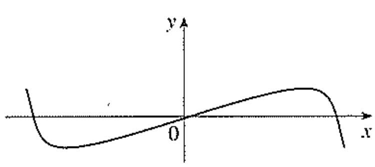
B. Intersecciones La intersección con el eje y es $f(0)$ lo cual señala dónde la curva corta al eje de las y. Para determinar las intersecciones con el eje de las x, hagá $y = 0$ y (determine x. Puede omitir este paso si la ecuación es difícil de resolver.)

C. Simetría

(i) Si $f(-x) = f(x)$ para toda x en D, es decir, la ecuación de la curva no cambia cuando x se reemplaza por $-x$, entonces f es una **función par** y la curva es simétrica con respecto al eje y. Esto significa que la tarea se reduce a la mitad. Si conoce lo que de la curva se parece a $x \geqslant 0$, por lo tanto sólo necesita reflejar con respecto al eje y para obtener la curva completa [véase figura 3(a)]. He aquí algunos ejemplos: $y = x^2$, $y = x^4$ $y = |x|$ y $y = \cos x$.



(a) Función par: simetría por reflexión



(b) Función impar: simetría por rotación

FIGURA 3

(ii) Si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en D, entonces f es una **función impar** y la curva es simétrica con respecto al origen. Una vez más, obtega la curva completa si conoce lo que de la curva se parece $x \geqslant 0$. Gire 180° con respecto al origen. Observe la figura 3(b). Algunos ejemplos sencillos de funciones impares son $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ y $y = \operatorname{sen} x$.

(iii) Si $f(x + p) = f(x)$ para toda x en D, donde p es una constante positiva, entonces f se llama **función periódica** y el número p más pequeño se llama **periodo**. Por ejemplo, $y = \operatorname{sen} x$ tiene un periodo 2π y $y = \tan x$ tiene un periodo π. Si sabe que la gráfica luce como en un intervalo de longitud p, entonces en seguida aplica una traslación para dibujar la gráfica completa (véase figura 7).

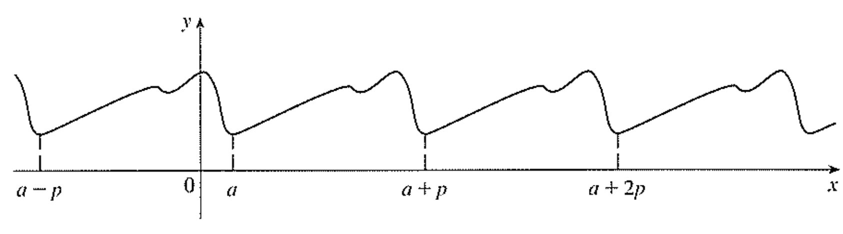


FIGURA 4
Función periódica: simetría por traslación

D. Asíntotas

(i) *Asíntotas horizontales*. Según la sección 2.6, si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, en tal caso la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$. Si resulta que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o $-\infty$), en tal caso no hay una asíntota a la derecha, sino que todavía es información útil para graficar la curva.

(ii) *Asíntotas verticales*. Recuerde que, según la sección 2.2, que la recta $x = a$ es una asíntota vertical si por lo menos una de las siguientes proposiciones se cumple:

$$\boxed{1} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

(En el caso de las funciones racionales, puede localizar las asíntotas verticales igualando el denominador a 0 después de anular los factores comunes. Este método no se aplica a otras funciones.) Además, al trazar la curva es muy útil conocer exactamente cuál de las proposiciones de (1) se cumple. Si $f(a)$ no está definida, pero a es un extremo del dominio de f, entonces es después calcular $\lim_{x \to a^-} f(x)$ o $\lim_{x \to a^+} f(x)$, sea este límite infinito o no.

(iii) *Asíntotas inclinadas.* Se tratan al final de la sección.

E. Intervalos de incremento o decremento Aplique la prueba I/D. Calcule $f'(x)$ y determine los intervalos en los cuales $f'(x)$ es positiva, es decir, donde (f sea creciente) y los intervalos en donde $f'(x)$ sea negativa, (f sea decreciente).

F. Valores de los máximos locales y de los mínimos locales Determine los números críticos de f [los números c donde $f'(c) = 0$ o bien, $f'(c)$ no existe]. Luego aplique la prueba de la primera derivada. Si f' pasa de positivo a negativo en un número crítico c, por lo tanto $f(c)$ es un máximo local. Si f' cambia de negativo a positivo en c, en consecuencia $f(c)$ es un mínimo local. Por lo regular se prefiere usar la prueba de la primera derivada, pero también se aplica la prueba de la segunda derivada si $f'(c) = 0$ y $f''(c) \neq 0$. Por lo tanto, $f''(c) > 0$ significa que $f(c)$ es un mínimo local, en tanto que $f''(c) < 0$ quiere decir que $f(c)$ es un máximo local.

G. Concavidad y puntos de inflexión Calcule $f''(x)$ y aplique la prueba de concavidad. La curva es cóncava hacia arriba donde $f''(x) > 0$ y cóncava hacia abajo donde $f''(x) < 0$. Los puntos de inflexión se encuentran donde cambia la dirección de la concavidad.

H. Trace la curva A partir de la información anterior dibuje la gráfica. Trace las asíntotas como líneas discontinuas. Localice las intersecciones, los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión. Luego haga que la curva pase por estos puntos, subiendo y bajando de acuerdo con E, la concavidad según G y aproxímela a las asíntotas. Si se necesita mayor precisión cerca de algún punto, calcule el valor de la derivada en dicho punto. La tangente indica la dirección en la cual progresa la curva.

EJEMPLO 1 Aplique las normas para graficar la curva $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

A. El dominio es

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

B. Tanto la intersección con el eje x como la intersección con el eje y es 0.

C. Puesto que $f(-x) = f(x)$, la función f es par. La curva es simétrica con respecto al eje de las y

D.
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$$

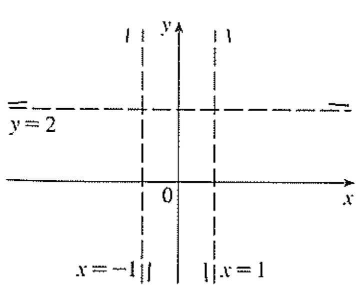


FIGURA 5
Trazos preliminares

Se muestra la curva que se acerca a su asíntota horizontal desde arriba en la figura 5. Esto se confirma mediante los intervalos de incremento y decremento.

Por lo tanto, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Puesto que el denominador es 0 cuando $x = \pm 1$, calcule los límites siguientes:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

Por lo tanto, las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales. Esta información relacionada con los límites y las asíntotas posibilita el dibujo de la gráfica preliminar en la figura 5, en la que se ilustran las partes de la curva cercanas a las asíntotas.

E.
$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

Puesto que $f'(x) > 0$ cuando $x < 0$ $(x \neq -1)$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 0$ $(x \neq 1)$, f es creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ y decreciente en $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Como f' pasa de positiva a negativa en 0, $f(0) = 0$ es un máximo local según la prueba de la primera derivada.

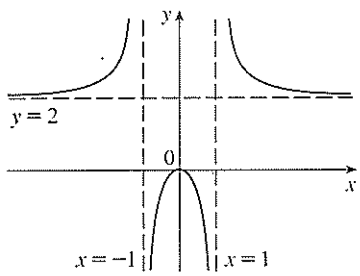


FIGURA 6
Gráfica terminada de $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$

G.
$$f''(x) = \frac{-4(x^2 - 1)^2 + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

Como $12x^2 + 4 > 0$ para toda x

$$f''(x) > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff |x| > 1$$

y $f''(x) < 0 \iff |x| < 1$. Por lo tanto, la curva es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$. Carece de punto de inflexión ya que 1 y -1 no están en el dominio de f.

H. A partir de la información reunida en E a G termine de trazar la gráfica en la figura 6. ◻

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x + 1}}$.

A. Dominio $= \{x \mid x + 1 > 0\} = \{x \mid x > -1\} = (-1, \infty)$

B. Las intersecciones con los ejes x y y son 0.

C. Simetría: ninguna

D. Puesto que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

no hay asíntota horizontal. Como $\sqrt{x + 1} \to 0$ cuando $x \to -1^+$ y $f(x)$ siempre es positiva y entonces

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

y de este modo la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

E.
$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x + 1} - x^2 \cdot 1/(2\sqrt{x + 1})}{x + 1} = \frac{x(3x + 4)}{2(x + 1)^{3/2}}$$

Se ve que $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. (Observe que $-\frac{4}{3}$ no está en el dominio de f), así, el único número crítico es 0. Puesto que $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 0$ y $f'(x) > 0$ cuando $x > 0$, f es decreciente en $(-1, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

F. Como $f'(0) = 0$ y f' cambia de negativa a positiva en 0, $f(0) = 0$ es un mínimo local, (y absoluto), según la prueba de la primera derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{2(x + 1)^{3/2}(6x + 4) - (3x^2 + 4x)3(x + 1)^{1/2}}{4(x + 1)^3} = \frac{3x^2 + 8x + 8}{4(x + 1)^{5/2}}$$

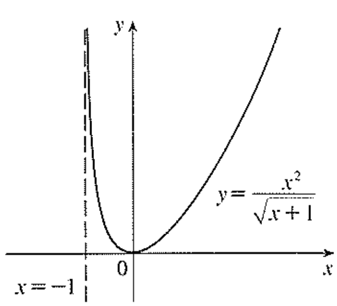


FIGURA 7

Observe que el denominador es siempre positivo. El numerador es el polinomio cuadrático $3x^2 + 8x + 8$, que siempre es positivo por que su discriminante es $b^2 - 4ac = -32$, el cual es negativo, y el coeficiente de x^2 es positivo. Por esto, $f''(x) > 0$ para toda x en el dominio de f, lo cual significa que f es cóncava hacia arriba en $(-1, \infty)$ y no hay punto de inflexión.

H. La curva se ilustra en la figura 7. ◻

EJEMPLO 3 Grafique $f(x) = xe^x$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. Las intersecciones con los ejes x y y son 0.

C. Simetría: ninguna

D. Puesto que x y e^x se vuelven grandes cuando $x \to \infty$, $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$. Como $x \to -\infty$, sin embargo, cuando $e^x \to 0$ y de igual manera tiene un producto indeterminado que requiere la aplicación de la regla de l'Hospital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Por lo tanto, el eje x es una asíntota horizontal.

E.
$$f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$$

Como e^x es siempre positiva, $f'(x) > 0$ cuando $x + 1 > 0$, y $f'(x) < 0$ cuando $x + 1 < 0$. De tal manera, f es creciente en $(-1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1)$.

F. Debido a que $f'(-1) = 0$ y f pasa de negativo a positivo en $x = -1$, $f(-1) = -e^{-1}$ es un mínimo local (y absoluto).

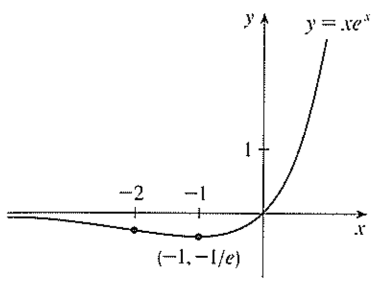


FIGURA 8

G.
$$f''(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$$

Como $f''(x) > 0$ si $x > -2$ y $f''(x) < 0$ si $x < -2$, f es cóncava hacia arriba en $(-2, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$. El punto de inflexión es $(-2, -2e^{-2})$.

H. Aproveche toda la información para graficar la curva en la figura 8. □

EJEMPLO 4 Dibuje la gráfica de $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$.

A. El dominio es $\mathbb{R}$.

B. El cruce con y es $f(0) = \frac{1}{2}$. El cruce con x sucede cuando $\cos x = 0$, esto es, $x = (2n+1)\pi/2$, donde n es un entero.

C. F no es par ni impar, pero $f(x + 2) = f(x)$ para toda x y de este modo f es periódica y tiene periodo 2π. En estos términos, y lo que sigue, necesita considerar únicamente $0 \le x \le 2\pi$ y por lo tanto extender la curva por translación en la parte H.

D. Asíntota: ninguna

E.
$$f'(x) = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) - \cos x\,(\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)} = \frac{2 \operatorname{sen} x + 1}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

Por esto $f'(x) > 0$ cuando $2 \operatorname{sen} x + 1 < 0 \iff \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2} \iff 7\pi/6 < x < 11\pi/6$. De esa manera f es creciente en $(7\pi/6, 11\pi/6)$ y decreciente en $(0, 7\pi/6)$ y $(11\pi/6, 2\pi)$.

F. De la parte E y la prueba de la primera derivada, resulta que el valor del mínimo local es $f(7\pi/6) = -1/\sqrt{3}$ y el valor del máximo local es $f(7\pi/6) = 1/\sqrt{3}$.

G. Si aplica la regla del cociente una vez más y simplifica, obtiene

$$f''(x) = -\frac{2 \cos x\,(1 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^3}$$

Ya que $(2 + \operatorname{sen} x)^3 > 0$ y $1 - \operatorname{sen} x \ge 0$ para toda x, sabe que $f'(x) > 0$ cuando $\cos x < 0$, es decir, $\pi/2 < x < 3\pi/2$. De esa manera f es cóncava hacia arriba en $(\pi/2, 3\pi/2)$ y cóncava hacia abajo $(0, \pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$. Los puntos de reflexión son $(\pi/2, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$.

H. La gráfica de la función restringida a $0 \le x \le 2\pi$ se muestra en la figura 9. Después la extenderá, aplicando periodicidad para completar la gráfica en la figura 10.

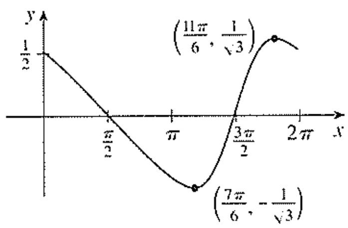


FIGURA 9

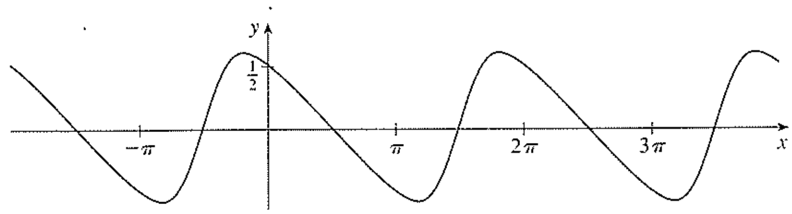


FIGURA 10

□

EJEMPLO 5 Grafique $y = \ln(4 - x^2)$.

A. El dominio es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\} = (-2, 2)$$

B. La intersección con el eje y es $f(0) = \ln 4$. Para determinar la intersección con el eje x hagá

$$y = \ln(4 - x^2) = 0$$

Sabe que $\ln 1 = 0$ y así $4 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$ y, por lo tanto, se corta al eje x en $\pm\sqrt{3}$.

C. Como $f(-x) = f(x)$, f es par y la curva es simétrica con respecto al eje de las y.

D. Busque asíntotas verticales en los extremos del dominio. Como $4 - x^2 \to 0^+$ cuando $x \to 2^-$ y también cuando $x \to -2^+$, tiene

$$\lim_{x \to 2^-} \ln(4 - x^2) = -\infty \qquad \lim_{x \to -2^+} \ln(4 - x^2) = -\infty$$

Por esto, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

E.
$$f'(x) = \frac{-2x}{4 - x^2}$$

Puesto que $f'(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 2$, f es creciente en $(-2, 0)$ y decreciente en $(0, 2)$.

F. El único número crítico es $x = 0$. Como f' cambia de positiva a negativa en 0, $f(0) = \ln 4$ es un máximo local de acuerdo con la prueba de la primera derivada.

G.
$$f''(x) = \frac{(4 - x^2)(-2) + 2x(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \frac{-8 - 2x^2}{(4 - x^2)^2}$$

Como $f''(x) < 0$ para toda x, la curva es cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$ y carece de punto de inflexión.

H. Por medio de esta información se traza la gráfica de la figura 11. □

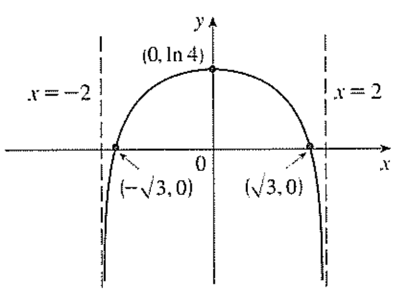


FIGURA 11
$y = \ln(4 - x^2)$

ASÍNTOTAS INCLINADAS

Algunas curvas poseen asíntotas que son *oblicuas*, es decir, ni horizontales ni verticales. Si

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

por lo tanto la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota inclinada** porque la distancia vertical entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a 0, como en la figura 12. Una situación

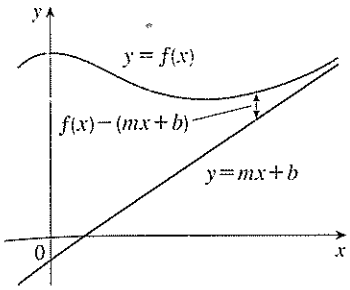


FIGURA 12

similar existe si $x \to -\infty$. Por lo que se refiere a las funciones racionales, las asíntotas inclinadas se presentan cuando el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. En tal caso, la ecuación de la asíntota inclinada se determina mediante la división larga como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6 Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

A. El dominio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

B. Las intersecciones con los ejes x y y son 0.

C. Puesto que $f(-x) = -f(x)$, f es impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen.

D. Puesto que $x^2 + 1$ nunca es 0, no hay asíntota vertical. Como $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$, no hay asíntota horizontal. Pero junto con la división da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1} = -\frac{\dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \pm\infty$$

Por lo que la recta $y = x$ es una asíntota inclinada.

E.
$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

Puesto que $f'(x) > 0$ para toda x, excepto para 0, f es creciente en $(-\infty, \infty)$.

F. Aunque $f'(0) = 0$, f' no cambia de signo en 0, de modo que no hay máximo local ni mínimo local

G.
$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2 + 1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Puesto que $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{3}$, resulta la tabla siguiente:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2 + 1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	−	−	+	+	CA en $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	−	+	+	−	CAB en $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	+	+	+	+	CA en $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	+	−	+	−	CAB en $(\sqrt{3}, \infty)$

Los puntos de inflexión son $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3}/4\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

H. La gráfica de f se ilustra en la figura 13. □

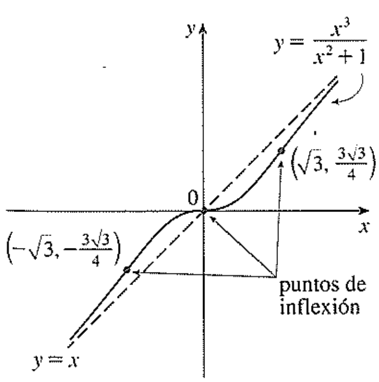


FIGURA 13

4.5 EJERCICIOS

1–52 Aplique las normas de esta sección para graficar la curva.

1. $y = x^3 + x$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x^4 + 4x^3$

6. $y = x(x + 2)^3$

7. $y = 2x^5 - 5x^2 + 1$

8. $y = (4 - x^2)^5$

9. $y = \dfrac{x}{x - 1}$

10. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

11. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

13. $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 9}$

15. $y = \dfrac{x - 1}{x^2}$

16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

17. $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

18. $y = \dfrac{x}{x^3 - 1}$

19. $y = x\sqrt{5 - x}$

20. $y = 2\sqrt{x} - x$

21. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

22. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$

23. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

24. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

25. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

26. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

27. $y = x - 3x^{1/3}$

28. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

29. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

30. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

31. $y = 3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$

32. $y = x + \cos x$

33. $y = x \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

34. $y = 2x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

35. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x, \quad 0 < x < 3\pi$

36. $y = \sec x + \tan x, \quad 0 < x < \pi/2$

37. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

38. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$

39. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

40. $y = e^{-x} \operatorname{sen} x \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

41. $y = 1/(1 + e^{-x})$

42. $y = e^{2x} - e^x$

43. $y = x - \ln x$

44. $y = e^x/x$

45. $y = (1 + e^x)^{-2}$

46. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

47. $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

48. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

49. $y = xe^{-x^2}$

50. $y = (x^2 - 3)e^{-x}$

51. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

52. $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x - 1}{x + 1}\right)$

---

53. En la teoría de la relatividad, la masa de la partícula es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula, m es la masa cuando la partícula se mueve con rapidez v con respecto al observador, y c es la rapidez de la luz. Dibuje la gráfica de m como una función v.

54. En la teoria de la relatividad, la energía de una partícula es

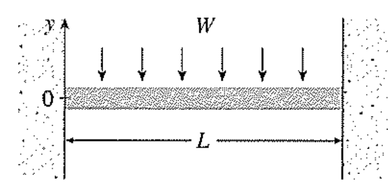
$$E = \sqrt{m_0^2c^4 + h^2c^2/\lambda^2}$$

Donde m_0 es la masa en reposo de la particula, λ es la longitud de onda, y h es la constante de Planck. Dibuje la gráfica de E como una función de λ. ¿Qué le dice la gráfica con respecto a la energia?

55. La figura ilustra una viga de longitud L empotrada en paredes de concreto. Si una carga constante W se distribuye proporcionalmente a lo largo de su longitud, la viga adopta la forma de la curva de deflexión

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

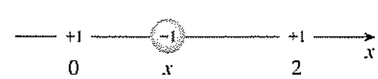
donde E e I son constantes positivas. (E es el módulo de elasticidad de Young e I es el momento de inercia de una sección transversal de la viga.) Trace la gráfica de la curva de deflexión.



56. La ley de Coulomb establece que la fuerza de atracción entre dos partículas cargadas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La figura muestra partículas con carga 1 ubicadas en las posiciones 0 y 2 sobre una recta de coordenadas y una partícula con carga -1 en una posición x entre ellas. De la ley de Coulomb se infiere que la fuerza neta que actúa sobre la partícula ubicada en el centro es

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x - 2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

donde k es una constante positiva. Trace la gráfica de la función de la fuerza neta. ¿Qué indica la gráfica acerca de la fuerza?



57–60 Determine una ecuación de la asíntota inclinada. No grafique la curva.

57. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$ **58.** $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

59. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$ **60.** $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

61–66 Por medio de las normas de esta sección grafique la curva. En la norma D encuentre una ecuación de la asíntota inclinada.

61. $y = \dfrac{-2x^2 + 5x - 1}{2x - 1}$ **62.** $y = \dfrac{x^2 + 12}{x - 2}$

63. $xy = x^2 + 4$ **64.** $y = e^x - x$

65. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$ **66.** $y = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$

67. Demuestre que la curva $y = x - \tan^{-1}x$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + \pi/2$ y $y = x - \pi/2$. Aproveche este hecho para graficar la curva.

68. Demuestre que la curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tiene dos asíntotas inclinadas: $y = x + 2$ y $y = -x - 2$. Aproveche este hecho para graficar la curva.

69. Demuestre que las rectas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ son asíntotas inclinadas de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

70. Sea $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Demuestre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Esto muestra que la gráfica de f tiende a la gráfica de $y = x^2$, y decimos que la curva $y = f(x)$ es *asintótica* a la parábola $y = x^2$. A partir de este hecho trace la gráfica de f.

71. Analice el comportamiento asintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ de la misma manera que en el ejercicio 70. Utilice después sus resultados para trazar la gráfica de f.

72. A partir del comportamiento asintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ trace la gráfica sin recurrir al procedimiento de graficación de curvas que se estudia en esta sección.

4.6 TRAZADO DE GRÁFICAS CON CÁLCULO Y CALCULADORAS

Si no ha leído la sección 1.4, debe hacerlo ahora. En particular, en esa sección se explica cómo evitar algunas de las trampas que se encuentran al usar los aparatos graficadores, si se eligen rectángulos de visualización apropiadas.

El método empleado en la sección anterior para trazar curvas fue la culminación de gran parte del estudio del cálculo diferencial que llevó a cabo. La gráfica fue el objeto final que se genera. En esta sección el punto de vista es totalmente distinto. En este caso *empieza* con una gráfica generada por una calculadora graficadora o una computadora y después la afina. Usará el cálculo con objeto de asegurarse que revela todos los aspecto importantes de la curva. Y con el uso de aparatos graficadores abordará curvas que serían demasiado complicadas de considerar sin la tecnología. El tema es la *interacción* entre el cálculo y las calculadoras.

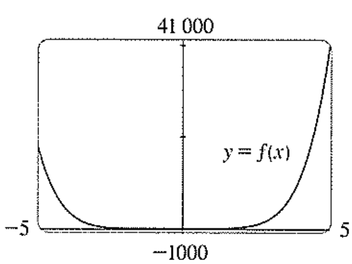


FIGURA 1

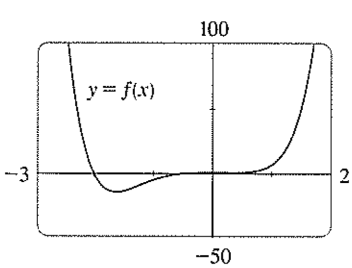


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Dibuje el polinomio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use las gráficas de f' y f'' para estimar todos los puntos máximos y mínimos así como los intervalos de concavidad.

SOLUCIÓN Si especifica un dominio pero no un intervalo, muchos dispositivos graficadores deducirán un intervalo apropiado a partir de los valores que se calculan. La figura 1 muestra el trazo de uno de esos aparatos si especifica que $-5 \leq x \leq 5$. Si bien este rectangulo de visualización resulta útil para demostrar que el comportamiento asintótico (o comportamiento en los extremos) es el mismo para $y = 2x^6$, es evidente que oculta algunos detalles más finos. De manera que cambie el rectángulo de visualización $[-3, 2]$ por $[-50, 100]$ que se ilustra en la figura 2.

A partir de esta gráfica, parece que hay un valor mínimo absoluto de más o menos -15.33 cuando $x \approx -1.62$ (mediante el uso del cursor) y que f es decreciente sobre $(-\infty, -1.62)$ y creciente sobre $(-1.62, \infty)$. Parece, asimismo, que hay una tangente horizontal en el origen y puntos de inflexión cuando $x = 0$ y cuando x está en alguna parte entre -2 y -1.

Ahora intente confirmar estas impresiones mediante el cálculo. Derive y obtenga

$$f'(x) = 12x^5 + 15x^4 + 9x^2 - 4x$$
$$f''(x) = 60x^4 + 60x^3 + 18x - 4$$

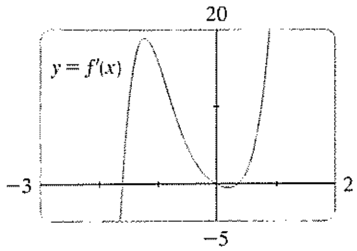


FIGURA 3

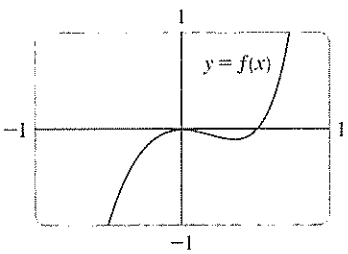


FIGURA 4

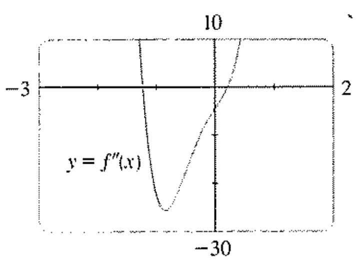


FIGURA 5

Cuando trace la gráfica de f' de la figura 3, verá que $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando $x \approx -1.62$; esto confirma (por la prueba de la primera derivada) el valor mínimo encontrado al principio. Pero, quizá para sorpresa, advierta también que $f'(x)$ cambia de positiva a negativa cuando $x = 0$, y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.35$. Esto significa que f tiene un máximo local en 0 y un mínimo local cuando $x \approx 0.35$, pero éstos se encontraban escondidos en la figura 2. En efecto, si ahora se acerca al origen en la figura 4, verá lo que no había percibido antes: un valor máximo relativo de 0 cuando $x = 0$ y un valor mínimo local de casi -0.1 cuando $x \approx 0.35$.

¿Qué decir acerca de la concavidad y los puntos de inflexión? Por las figuras 2 y 4 parece haber puntos de inflexión cuando x está un poco a la izquierda de -1 y cuando x está un poco a la derecha de 0. Pero es difícil determinar los puntos de inflexión a partir de la gráfica de f, de modo que dibuje la segunda derivada de f'' en la figura 5. f'' cambia de positiva a negativa cuando $x \approx -1.23$ y de negativa a positiva cuando $x \approx 0.19$. Así, correcto hasta dos cifras decimales, f es cóncava hacia arriba sobre $(-\infty, -1.23)$ y $(0.19, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $(-1.23, 0.19)$. Los puntos de inflexión son $(-1.23, -10.18)$ y $(0.19, -0.05)$.

Ha descubierto que ninguna gráfica por sí sola revela todas las características importantes de este polinomio. Pero las figuras 2 y 4, tomadas en conjunto, proporcionan una imagen exacta. □

EJEMPLO 2 Dibuje la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

en un rectángulo de visualización que contenga todas las características importantes de la función. Estime los valores máximos y mínimos y los intervalos de concavidad. A continuación, aplique el cálculo para determinar estas cantidades exactas.

SOLUCIÓN La figura 6, producida por una computadora con establecimiento automático de escala, es un desastre. Algunas calculadoras graficadoras usan $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$ como rectángulos de visualización predeterminada, de modo que inténtelo. Obtendra la gráfica que se muestra en la figura 7, una mejora importante.

El eje y parece ser una asíntota vertical y lo es porque

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \infty$$

La figura 7 también permite estimar las intersecciones con el eje x: alrededor de -0.5 y -6.5. Los valores exactos se obtienen con la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 + 7x + 3 = 0$; obtiene $x = (-7 \pm \sqrt{37})/2$.

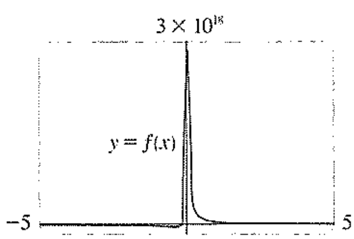


FIGURA 6

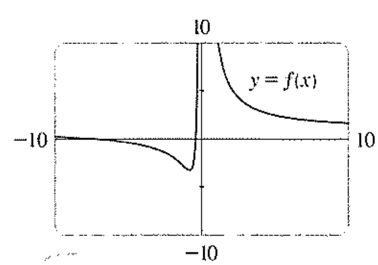


FIGURA 7

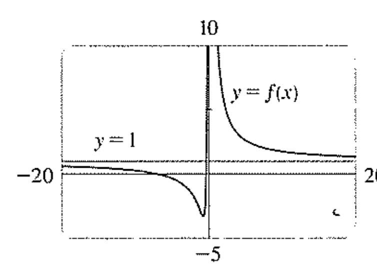


FIGURA 8

Para mirar mejor las asíntotas horizontales, cambie el rectángulo de visualización $[-20, 20]$ por $[-5, 10]$ de la figura 8. Parece que $y = 1$ es la asíntota horizontal y esto se confirma con facilidad:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 1$$

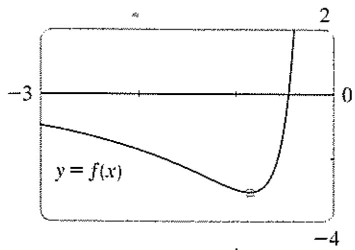


FIGURA 9

Para estimar el valor mínimo, acerque el rectángulo de visualización $[-3, 0]$ por $[-4, 2]$ de la figura 9. El cursor indica que el valor mínimo absoluto es alrededor de -3.1, cuando $x \approx -0.9$, y que la función decrece en $(-\infty, -0.9)$ y $(0, \infty)$, mientras que crece sobre $(-0.9, 0)$. Los valores exactos se obtienen al derivar:

$$f'(x) = -\frac{7}{x^2} - \frac{6}{x^3} = -\frac{7x + 6}{x^3}$$

Esto hace ver que $f'(x) > 0$ cuando $-\frac{6}{7} < x < 0$ y $f'(x) < 0$ cuando $x < -\frac{6}{7}$ cuando $x > 0$. El valor mínimo exacto es $f\left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{37}{12} \approx -3.08$.

La figura 9 también muestra que se presenta un punto de inflexión en alguna parte entre $x = -1$ y $x = -2$. Podrá estimarlos con mucho más exactitud si usa la gráfica de la segunda derivada, pero en este caso es igual de fácil hallar los valores exactos. Puesto que

$$f''(x) = \frac{14}{x^3} + \frac{18}{x^4} = \frac{2(7x + 9)}{x^4}$$

resulta que $f''(x) > 0$ cuando $x > -\frac{9}{7}$ $(x \neq 0)$. De modo que f es cóncava hacia arriba sobre $\left(-\frac{9}{7}, 0\right)$ y $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo sobre $\left(-\infty, -\frac{9}{7}\right)$. El punto de inflexión es $\left(-\frac{9}{7}, -\frac{71}{27}\right)$.

El análisis que usa las dos primeras derivadas hace ver que las figuras 7 y 8 exhiben todos los aspectos importantes de la curva.

EJEMPLO 3 Dibuje la función $f(x) = \dfrac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4}$.

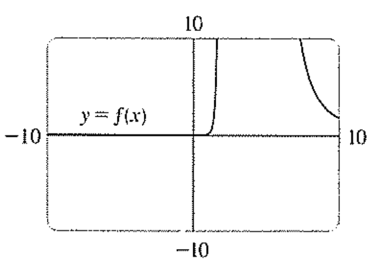


FIGURA 10

SOLUCIÓN Si recurre a su experiencia con una función racional del ejemplo 2, empiece por dibujar f en el rectángulo de visualización $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$. Con base en la figura 10, parece que necesita acercar para ver un detalle más fino y alejarse para ver la imagen más grande. Pero, como guía para realizar acercamientos o alejamientos inteligentes, primero observe con más cuidado la expresión de $f(x)$. Debido a la existencia de los factores $(x - 2)^2$ y $(x - 4)^4$ en el denominador, espere que $x = 2$ y $x = 4$ sean las asíntotas verticales. En efecto

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4} = \infty$$

Para hallar las asíntotas horizontales, divida numerador y denominador entre x^6:

$$\frac{x^2(x + 1)^3}{(x - 2)^2(x - 4)^4} = \frac{\dfrac{x^2}{x^3} \cdot \dfrac{(x + 1)^3}{x^3}}{\dfrac{(x - 2)^2}{x^2} \cdot \dfrac{(x - 4)^4}{x^4}} = \frac{\dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^3}{\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^2\left(1 - \dfrac{4}{x}\right)^4}$$

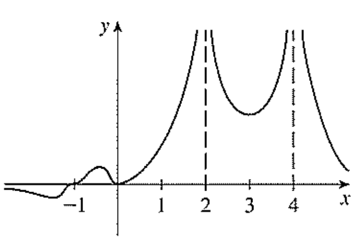


FIGURA 11

Muestra que $f(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$ de modo que el eje de las x es la asíntota horizontal.

Asimismo, es muy útil considerar el comportamiento de la gráfica cerca de la intersección con el eje de las x recurriendo a un análisis como el del ejemplo 11 en la sección 2.6. Como x^2 es positivo, $f(x)$ no cambia de signo en 0 y, de este modo, su gráfica no cruza el eje x en 0. Pero en virtud del factor $(x + 1)^3$, la gráfica cruza el eje x en -1 y tiene una tangente horizontal allí. Si reúne toda esta información sin usar las derivadas, la curva tiene que parecerse a la figura 11.

Ahora que sabe qué buscar, acérquese varias veces para producir las gráficas de las figuras 12 y 13; también aléjese varias veces para lograr la figura 14.

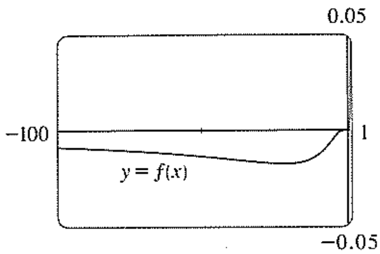


FIGURA 12

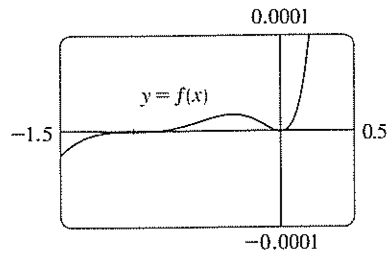


FIGURA 13

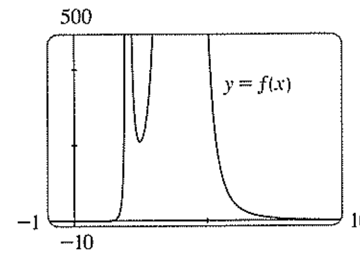


FIGURA 14

A partir de estas gráficas lea que el mínimo absoluto es alrededor de -0.02 y se tiene cuando $x \approx -20$. También hay un máximo local ≈ 0.00002 cuando $x \approx -0.3$ y un mínimo local ≈ 211 cuando $x \approx 2.5$. Asimismo, estas gráficas muestran puntos de inflexión cerca de -35, -5 y -1, y dos entre -1 y 0. Para estimar mejor los puntos de inflexión, necesita dibujar f'', pero calcular esta segunda derivada a mano es una tarea irrazonable. Si cuenta con un sistema de cómputo algebraico es fácil (véase el ejercicio 15).

Queda claro que para esta función en particular, se necesitan *tres* gráficas (figuras 12, 13 y 14) a fin de reunir toda la información útil. La única manera de exhibir todas estas características de la función en una gráfica es dibujarla a mano. A pesar de las exageraciones y las distorsiones, la figura 11 es útil para resumir la naturaleza esencial de la función. □

La familia de funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$$

donde c es una constante, se encuentra en aplicaciones a la síntesis de modulación de frecuencia (FM). Una onda senoidal se modula por medio de una onda con frecuencia diferente ($\operatorname{sen} cx$). En el ejemplo 4 se estudia el caso en que $c = 2$. En el ejercicio 25 se examina otro caso especial.

EJEMPLO 4 Dibuje la función $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$. Para $0 \leqslant x \leqslant \pi$, estime todos los valores máximos y mínimos, los intervalos de incremento y decremento, y los puntos de inflexión, correctos a una cifra decimal.

SOLUCIÓN En primer lugar, observe que f es periódica con periodo 2π. Además, f es impar y $|f(x)| \leqslant 1$ para todo x. De modo que la selección de un rectángulo de visualización no es un problema para esta función: empiece con $[0, \pi]$ por $[-1.1, 1.1]$. (Véase la figura 15.)

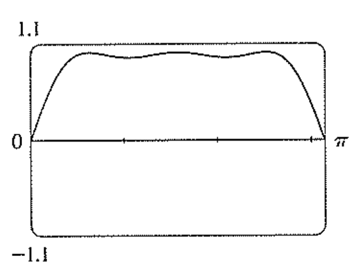


FIGURA 15

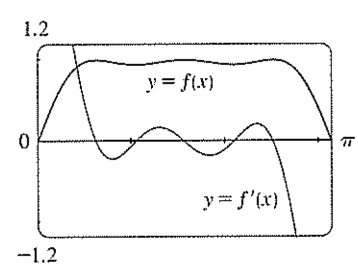


FIGURA 16

Parece que existen tres valores máximos locales y dos valores mínimos locales en esa ventana. Para confirmar esto y localizarlos con más exactitud, calcule que

$$f'(x) = \cos(x + \operatorname{sen} 2x) \cdot (1 + 2 \cos 2x)$$

y dibuje f y f' en la figura 16.

Con el acercamiento y la prueba de la primera derivada, resultan los valores aproximados siguientes hasta una cifra decimal.

Intervalos de incremento:	$(0, 0.6)$, $(1.0, 1.6)$, $(2.1, 2.5)$
Intervalos de decremento:	$(0.6, 1.0)$, $(1.6, 2.1)$, $(2.5, \pi)$
Valores máximos locales:	$f(0.6) \approx 1$, $f(1.6) \approx 1$, $f(2.5) \approx 1$
Valores mínimos locales:	$f(1.0) \approx 0.94$, $f(2.1) \approx 0.94$

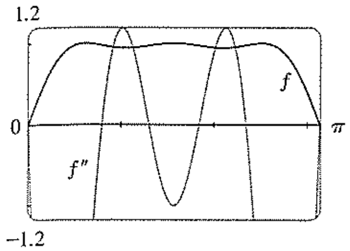


FIGURA 17

La segunda derivada es

$$f''(x) = -(1 + 2\cos 2x)^2 \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x) - 4 \operatorname{sen} 2x \cos(x + \operatorname{sen} 2x)$$

Si dibuja f y f' en la figura 17, obtiene los valores aproximados siguientes:

Cóncava hacia arriba sobre:	$(0.8, 1.3)$, $(1.8, 2.3)$
Cóncava hacia abajo sobre:	$(0, 0.8)$, $(1.3, 1.8)$, $(2.3, \pi)$
Puntos de inflexión:	$(0, 0)$, $(0.8, 0.97)$, $(1.3, 0.97)$, $(1.8, 0.97)$, $(2.3, 0.97)$

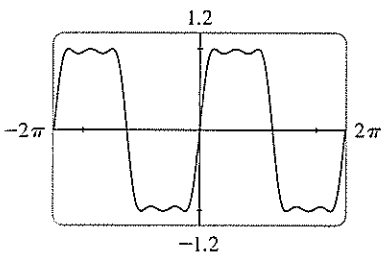


FIGURA 18

Luego de comprobar que la figura 15 representa f con exactitud en $0 \leqslant x \leqslant \pi$, puede decir que la gráfica extendida de la figura 18 representa f con exactitud en $-2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$. □

El ejemplo final se relaciona con las *familias* de funciones. De acuerdo con la sección 1.4, esto quiere decir que las funciones de la familia se relacionan entre sí mediante una fórmula que contiene una o más constantes arbitrarias. Cada valor de la constante impulsa a un miembro de la familia, y la idea es ver cómo la gráfica de la función cambia cuando la constante se modifica.

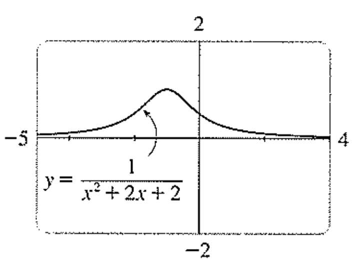


FIGURA 19
$c = 2$

EJEMPLO 5 ¿Cómo varía la gráfica de $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$ al cambiar c?

SOLUCIÓN Las gráficas de las figuras 19 y 20 (los casos especiales $c = 2$ y $c = -2$) muestran dos curvas muy distintas. Antes de dibujar más gráficas, vea qué tienen en común los miembros de esta familia. Puesto que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + c} = 0$$

para cualquier valor c, todos tienen el eje x como asíntota horizontal. Se tendrá una asíntota vertical cuando $x^2 + 2x + c = 0$. Si se resuelve esta ecuación cuadrática, se obtiene $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$. Cuando $c > 1$, no hay asíntota vertical (como en la figura 19). Cuando $c = 1$, la gráfica tiene una sola asíntota vertical $x = -1$ porque

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x + 1)^2} = \infty$$

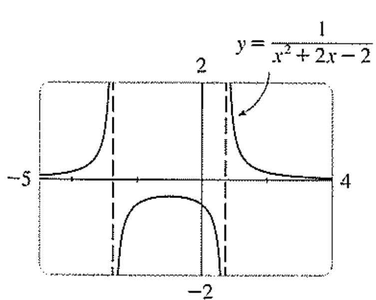


FIGURA 20
$c = -2$

Cuando $c < 1$, se tienen dos asíntotas verticales: $x = -1 \pm \sqrt{1 - c}$ (como en la figura 20).

Ahora, calcule la derivada:

$$f'(x) = -\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + c)^2}$$

Esto hace ver que $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$ (si $c \neq 1$), $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$, y $f'(x) < 0$ cuando $x > -1$. Para $c \geqslant 1$, esto significa que f crece sobre $(-\infty, -1)$ y decrece sobre $(-1, \infty)$. Para $c > 1$ hay un valor máximo absoluto $f(-1) = 1/(c-1)$. Para $c < 1$, $f(-1) = 1/(c-1)$ es un valor máximo local y los intervalos de incremento y de decremento se interrumpen en las asíntotas verticales.

La figura 21 es una "presentación de transparencias" en que se exhiben cinco miembros de la familia, todos con sus gráficas en el rectángulo de visualización $[-5, 4]$ por $[-2, 2]$. Como se predijo, $c = 1$ es el valor en que ocurre la transición de dos asíntotas verticales a una y, a continuación, a ninguna. A medida que c crece a partir de 1, el punto máximo se vuelve más bajo; esto se explica por el hecho que $1/(c-1) \to 0$ cuando $c \to \infty$. Cuando c decrece a partir de 1, las asíntotas verticales se separan cada vez más porque la distancia entre ellas es $2\sqrt{1-c}$, la cual aumenta a medida que $c \to -\infty$. Una vez más, el punto máximo se aproxima al eje x porque $1/(c-1) \to 0$ cuando $c \to -\infty$.

TEC Vea la animación de la figura 21 en Visual 4.6.

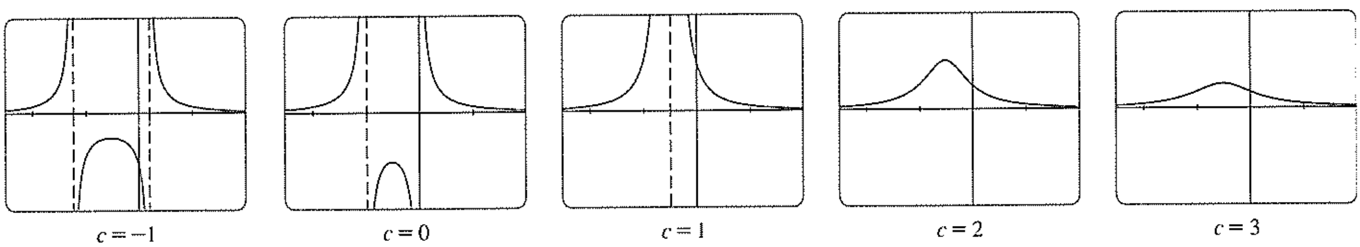


FIGURA 21 La familia de funciones $f(x) = 1/(x^2 + 2x + c)$

Es evidente que no hay punto de inflexión cuando $c \leqslant 1$. Para $c > 1$ calcule que

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 + 6x + 4 - c)}{(x^2 + 2x + c)^3}$$

y deduce que se tienen punto de inflexión cuando $x = -1 \pm \sqrt{3(c-1)}/3$. De modo que los puntos de inflexión se extienden al crecer c y esto parece plausible por lo que se ve en las dos últimas partes de la figura 21. □

4.6 EJERCICIOS

1–8 Trace gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. En particular, use gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos de incremento y de decremento, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

1. $f(x) = 4x^4 - 32x^3 + 89x^2 - 95x + 29$

2. $f(x) = x^6 - 15x^5 + 75x^4 - 125x^3 - x$

3. $f(x) = x^6 - 10x^5 - 400x^4 + 2500x^3$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{40x^3 + x + 1}$

5. $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 1}$

6. $f(x) = \tan x + 5\cos x$

7. $f(x) = x^2 - 4x + 7\cos x, \quad -4 \leqslant x \leqslant 4$

8. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 9}$

9–10 Elabore gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. Estime los intervalos de incremento y de decremento, los intervalos de concavidad y aplique el cálculo para hallar con exactitud estos intervalos.

9. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{8}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^8} - \dfrac{2 \times 10^8}{x^4}$

11–12

(a) Grafique la función.

(b) Aplique la regla de l'Hospital para explicar el comportamiento cuando $x \to 0$.

(c) Estime el valor mínimo y los intervalos de concavidad. Luego, mediante cálculo determine los valores exactos.

11. $f(x) = x^2 \ln x$

12. $f(x) = xe^{1/x}$

13–14 Dibuje a mano la gráfica utilizando las asíntotas y las intersecciones, pero no las derivadas. Enseguida use su dibujo como guía para producir gráficas (con un aparato graficador) que exhiba las características importantes de la curva. Utilice estas gráficas para estimar los valores máximos y mínimos.

13. $f(x) = \dfrac{(x + 4)(x - 3)^2}{x^4(x - 1)}$

14. $f(x) = \dfrac{(2x + 3)^2(x - 2)^5}{x^3(x - 5)^2}$

CAS **15.** Si f es la función considerada en el ejemplo 3, use un sistema algebraico para computadora para calcular f' y dibújela para confirmar que todos los valores máximos y mínimos son como los que se dan en el ejemplo. Calcule f'' y úsela para estimar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión.

CAS **16.** Si f es la función del ejercicio 14 encuentre f' y f'' y use sus gráficas para estimar los intervalos de incremento y decremento y la concavidad de f.

CAS **17–22** Use un sistema algebraico para computadora para dibujar f y hallar f' y f''. Utilice las gráficas de estas derivadas para estimar los intervalos de incremento y decremento, los valores máximos, los valores extremos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de f.

17. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + x + 1}$

18. $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1 + x + x^4}$

19. $f(x) = \sqrt{x + 5 \operatorname{sen} x}, \quad x \leqslant 20$

20. $f(x) = (x^2 - 1)e^{\arctan x}$

21. $f(x) = \dfrac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\tan x}}$

CAS **23–24**

(a) Grafique la función.

(b) Explique la forma de la gráfica mediante el cálculo del límite cuando $x \to 0^+$ o cuando $x \to \infty$.

(c) Estime los valores máximo y mínimo, y luego, mediante cálculo, determine los valores exactos.

(d) Utilice una gráfica de f'' para estimar las coordenadas x de los puntos de inflexión.

23. $f(x) = x^{1/x}$

24. $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

---

25. En el ejemplo 4 se consideró un miembro de la familia de funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} cx)$ que se presentan en la síntesis de frecuencia modulada (FM). En este ejercicio investigue la función para $c = 3$. Empiece por dibujar f en el rectángulo de visualización $[0, \pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ ¿Cuántos puntos máximos locales observa? La gráfica tiene más que son visibles a simple vista. Para descubrir los puntos máximos y mínimos ocultos necesitará analizar con mucho cuidado la gráfica de f'. De hecho, ayuda mirar al mismo tiempo la gráfica de f''. Encuentre todos los valores máximos y mínimos así como los puntos de inflexión. A continuación trace la gráfica de f en el rectángulo de visualización $[-2\pi, 2\pi]$ por $[-1.2, 1.2]$ y haga comentarios en cuanto a la simetría.

26–33 Describa cómo cambia la gráfica de f conforme varía c. Trace la gráfica de varios miembros de la familia para ilustrar las tendencias que descubra. En particular, deberá investigar cómo se mueven los puntos máximos y mínimos y los puntos de inflexión cuando cambia c. Debe, asimismo, identificar cualesquiera valores de transición de c en los cuales cambie la forma básica de la curva.

26. $f(x) = x^3 + cx$

27. $f(x) = x^4 + cx^2$

28. $f(x) = x^2\sqrt{c^2 - x^2}$

29. $f(x) = e^{-c/x^2}$

30. $f(x) = \ln(x^2 + c)$

31. $f(x) = \dfrac{cx}{1 + c^2x^2}$

32. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2 + cx^2}$

33. $f(x) = cx + \operatorname{sen} x$

---

34. La familia de funciones $f(t) = C(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y C son números positivos y $b > a$, se ha utilizado para modelar la concentración de un medicamento administrado por vía intravenosa en el instante $t = 0$. Trace la gráfica de varios miembros de esta familia. ¿Qué tienen en común? Para valores fijos de C y a, descubra en forma gráfica qué sucede a medida que b crece. Enseguida aplique el cálculo para probar lo que ha descubierto.

35. Investigue la familia de curvas dada por $f(x) = xe^{-cx}$, donde c es un número real. Empiece por calcular los límites de $x \to \pm\infty$. Identifique los valores de la transición de c donde cambia la forma básica. ¿Qué sucede con los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión cuando se modifica c? Ilustre mediante gráficas de varios miembros de la familia.

36. Investigue la familia de curvas dadas por la ecuación $f(x) = x^4 + cx^2 + x$. Empiece por determinar el valor de transición de c en los cuales cambia el número de los puntos de inflexión. Luego trace la gráfica de varios miembros de la familia con el fin de observar cuáles formas son posibles. Existe otro valor de transición de c en el cual cambia la cantidad de números críticos. Trate de descubrirlo en forma gráfica. En seguida, demuestre lo que descubrió.

37. (a) Investigue la familia de polinomios dada por la ecuación $f(x) = cx^4 - 2x^2 + 1$. ¿Para qué valores de c tiene puntos mínimos la curva?

(b) Demuestre que los puntos mínimo y máximo de cada curva de la familia se encuentran sobre la parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre trazando la gráfica de esta parábola y de varios miembros de la familia.

38. (a) Investigue la familia de polinomios dada por la ecuación $f(x) = 2x^3 + cx^2 + 2x$. ¿Para qué valores de c la curva tiene puntos máximos y mínimos?

(b) Demuestre que los puntos mínimo y máximo de cada curva de la familia se encuentran sobre la curva $y = x - x^3$. Ilustre dibujando esta curva y varios miembros de la familia.

4.7 PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Los métodos para hallar valores extremos aprendidos en este capítulo tienen aplicaciones prácticas en muchas áreas de la vida. Una persona de negocios quiere minimizar los costos y maximizar las utilidades. El principio de Fermat, en óptica, afirma que la luz sigue la trayectoria que le toma menos tiempo. En esta sección y en la siguiente resolverá problemas como los de maximizar áreas, volúmenes y utilidades, y minimizar distancias, tiempos y costos.

En la solución de esos problemas prácticos, el desafío más grande suele ser convertir el problema en palabras en un problema matemático de optimización, establecer la función que debe maximizarse o minimizarse. Recuerde los principios de solución de problemas que se analizaron en la página 76 y adaptelos a esta situación:

PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1. **Comprenda el problema** El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. **Dibuje un diagrama** En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
3. **Introduzca notación** Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llámela Q por ahora). Asimismo, seleccione símbolos $(a, b, c, \ldots, x, y)$ para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos sugerentes; por ejemplo, A para el área, h para altura y t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si en el paso 4 Q se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar correspondencias (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. Enseguida, use estas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una, en la expresión para Q. De esta suerte, Q se expresará como función de *una* variable x, por ejemplo, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Aplique los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para hallar el valor máximo o el mínimo absolutos de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, después se puede utilizar el método del intervalo cerrado de la sección 4.1.

EJEMPLO 1 Un granjero tiene 2400 pies de cerca y desea cercar un campo rectangular que limita con un río recto. No necesita cercar a lo largo del río. ¿Cuáles son las dimensiones del campo que tiene el área más grande?

- Comprenda el problema
- Analogía. Intente casos especiales
- Dibuje diagramas

SOLUCIÓN Para tener idea de lo que ocurre en este problema, experimente con algunos casos especiales. En la figura 1 se muestran (no a escala) tres maneras posibles de emplear los 2400 pies de cerca.

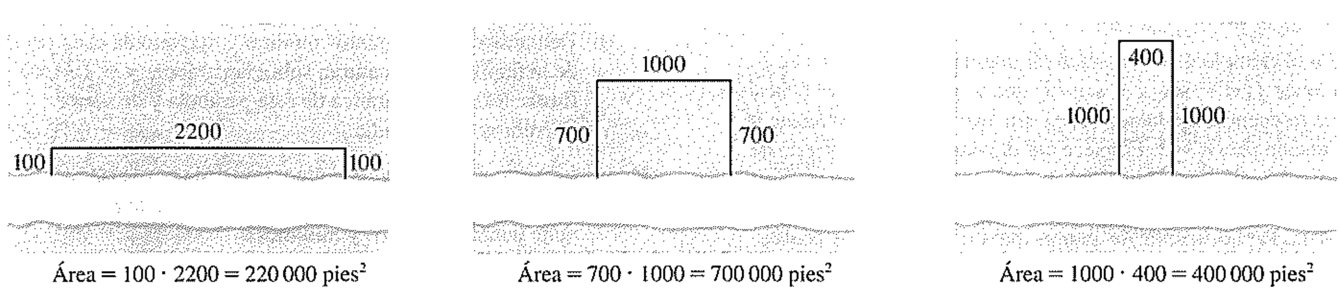


FIGURA 1

Cuando intenta cercar campos poco profundos y anchos, o profundos y anchos, obtiene áreas más o menos pequeñas. Parece que existe alguna configuración intermedia que produce al área más grande.

En la figura 2 se ilustra el caso general. Desea maximizar el área A del rectángulo. Sean x y y la profundidad y el ancho del campo (en pies). Enseguida exprese A en términos de x y y:

▩ Introduzca notación

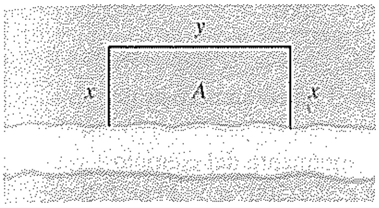


FIGURA 2

$$A = xy$$

Quiere expresar A como expresión sólo de una variable, de modo que elimina y al expresarla en términos de x. Para llevar a cabo esto, usa la información dada de que la longitud total de la cerca es 2 400 pies. Por esto.

$$2x + y = 2400$$

A partir de esta ecuación $y = 2400 - 2x$, lo cual da

$$A = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Observe que $x \geqslant 0$ y $x \leqslant 1\,200$ (de lo contrario $A < 0$). De manera que la función que desea maximizar es

$$A(x) = 2400x - 2x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1200$$

La derivada es $A'(x) = 2\,400 - 4x$, de suerte que para encontrar los números críticos resuelve la ecuación

$$2400 - 4x = 0$$

lo cual da $x = 600$. El valor máximo de A debe ocurrir en este número o en uno de los puntos extremos del intervalo. Como $A(0) = 0$, $A(600) = 720\,000$ y $A(1\,200) = 0$, el método del intervalo cerrado da el valor máximo como $A(600) = 720\,000$.

[De modo alternativo, podría ver que $A''(x) = -4 < 0$ para todo x, de modo que A siempre es cóncava hacia abajo y el máximo local en $x = 600$ debe ser un máximo absoluto.]

En estos términos, el campo rectangular debe tener 600 pies de profundidad y 1 200 pies de ancho. □

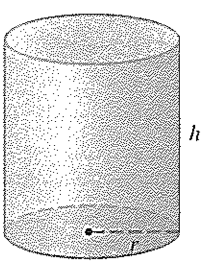


FIGURA 3

V EJEMPLO 2 Se va a fabricar una lata para que contenga 1 L de aceite. Halle las dimensiones que minimizarán el costo del metal para fabricar la lata.

SOLUCIÓN Dibuje el diagrama como el de la figura 3, donde r es el radio y h la altura (ambos en cm). Para minimizar el costo del metal, minimice el área superficial total del cilindro (tapa, fondo y lados). A partir de la figura 4, observe que los lados se fabrican de una lámina rectangular con dimensiones $2\pi r$, y h de manera que el área superficial es

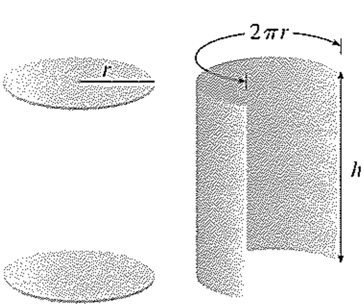
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Para eliminar h, aplique el hecho de que se da el volumen como de 1 L, lo cual tomamos como $1\,000\ \text{cm}^3$. Por lo tanto

$$\pi r^2 h = 1000$$

lo cual da $h = 1\,000/(\pi r^2)$. Si se sustituye esto en la ecuación para A, se tiene

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$



Área $2(\pi r^2)$ Área $(2\pi r)h$

FIGURA 4

Por lo tanto, la función que desea minimizar es

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \qquad r > 0$$

Para hallar los números críticos derive

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

En tal caso, $A'(r) = 0$ cuando $\pi r^3 = 500$, de modo que el único número crítico es $r = \sqrt[3]{500/\pi}$.

Como el dominio de A es $(0, \infty)$, no puede aplicar el argumento del ejemplo 1 relativo a los puntos extremos; pero observe que $A'(r) < 0$ para $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ y $A'(r) > 0$ para $r > \sqrt[3]{500/\pi}$, por lo que A es decreciente para todo r a la izquierda del número crítico y creciente para todo r a la derecha. De este modo, $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ debe dar lugar a un mínimo *absoluto*.

[Como otra posibilidad podría argumentar que $A(r) \to \infty$ cuando $r \to 0^+$ y $A(r) \to \infty$ cuando $r \to \infty$, de manera que debe haber un valor mínimo de $A(r)$, el cual tiene que ocurrir en el número crítico. Véase la figura 5.]

El valor de h correspondiente a $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ es

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

En estos términos, a fin de minimizar el costo de la lata, el radio debe ser $\sqrt[3]{500/\pi}$ cm, y la altura debe ser igual al doble del radio; a saber, el diámetro

▩ En el proyecto de aplicación que se presenta en la página 333 se investiga la forma más económica para una lata tomando en cuenta otros costos de fabricación.

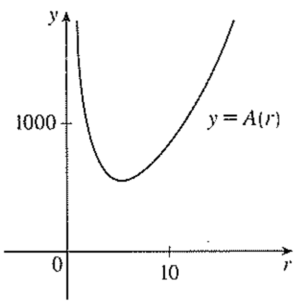


FIGURA 5

NOTA 1 El argumento que se usó en el ejemplo 2 para justificar el mínimo absoluto es una variante de la prueba de la primera derivada (la cual sólo se aplica a los valores máximos o mínimos *locales*) y se enuncia a continuación para referencia futura:

TEC En Module 4.7 podrá ver seis problemas de optimización adicionales, incluyendo animaciones de las situaciones físicas.

PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA PARA VALORES EXTREMOS ABSOLUTOS Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.

(a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.

(b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

NOTA 2 Otro método para resolver problemas de optimización consiste en usar la derivación implícita. Vea el ejemplo 2 una vez más para ilustrar el método. Trabaje con las mismas ecuaciones

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad \pi r^2 h = 100$$

Pero en vez de eliminar h, derive las dos ecuaciones implícitamente con respecto a r

$$A' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \qquad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

El mínimo se presenta en un número crítico, de tal suerte que $A' = 0$, simplifique y lleque a las ecuaciones

$$2r + h + rh' = 0 \qquad 2h + rh' = 0$$

y al restar, da $2r - h = 0$, o bien $h = 2r$.

EJEMPLO 3 Encuentre el punto sobre la parábola $y^2 = 2x$ más cercano al punto $(1, 4)$.

SOLUCIÓN La distancia entre el punto $(1, 4)$ y el punto (x, y) es

$$d = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

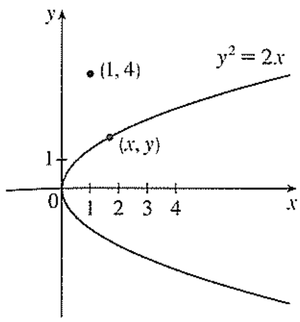


FIGURA 6

(Véase la figura 6.) Pero si (x, y) se encuentra sobre la parábola, por lo tanto $x = \frac{1}{2} y^2$, de modo que la expresión para d se convierte en

$$d = \sqrt{(\tfrac{1}{2} y^2 - 1)^2 + (y - 4)^2}$$

(Como otra opción pudo sustituir $y = \sqrt{2x}$ para obtener d en términos de sólo x.) En lugar de minimizar d, minimice su cuadrado:

$$d^2 = f(y) = (\tfrac{1}{2} y^2 - 1)^2 + (y - 4)^2$$

(Convénzase por usted mismo que el mínimo de d se tiene en el mismo punto que el mínimo de d^2, pero es más fácil trabajar con este último.) Al derivar, obtiene

$$f'(y) = 2(\tfrac{1}{2} y^2 - 1)y + 2(y - 4) = y^3 - 8$$

de modo que $f'(y) = 0$ cuando $y = 2$. Observe que $f'(y) < 0$ cuando $y < 2$ y $f'(y) > 0$ cuando $y > 2$, de suerte que por la prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos, se presenta el mínimo absoluto cuando $y = 2$. (O podría decir que, debido a la naturaleza geométrica del problema, es obvio que existe un punto lo más próximo, pero no un punto que esté lo más alejado.) El valor correspondiente de $x = \frac{1}{2} y^2 = 2$. Por esto, el punto de $y^2 = 2x$ más cercano a $(1, 4)$ es $(2, 2)$. □

EJEMPLO 4 Un hombre está en un punto A sobre una de las riberas de un río recto que tiene 3 km de ancho y desea llegar hasta el punto B, 8 km corriente abajo en la ribera opuesta, tan rápido como le sea posible (véase la figura 7). Podría remar en su bote, cruzar directamente el río hasta el punto C y correr hasta B, o podría remar hasta B o, en última instancia, remar hasta algún punto D, entre C y B, y luego correr hasta B. Si puede remar a 6 km/h y correr a 8 km/h, ¿dónde debe desembarcar para llegar a B tan pronto como sea posible? (Suponga que la rapidez del agua es insignificante comparada con la rapidez a la que rema el hombre.)

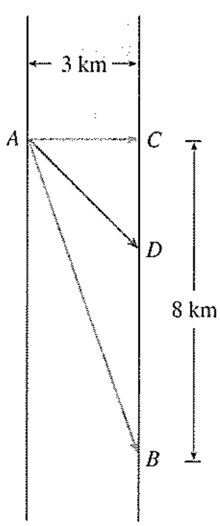


FIGURA 7

SOLUCIÓN Sea x la distancia de C hasta D, después la distancia por correr es $|DB| = 8 - x$; el teorema de Pitágoras da la distancia por remar como $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Utilice la ecuación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Por lo tanto el tiempo que tiene que remar es $\sqrt{x^2 + 9}/6$ y el que debe correr es $(8 - x)/8$, de modo que el tiempo total T, como función de x, es

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

El dominio de esta función t es $[0, 8]$. Advierta que si $x = 0$, el hombre rema hacia C y si $x = 8$ rema directamente hacia B. La derivada de T es

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$$

De este modo, si se aplica el hecho de que $x \geqslant 0$

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2+9}$$

$$\iff 16x^2 = 9(x^2+9) \iff 7x^2 = 81$$

$$\iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

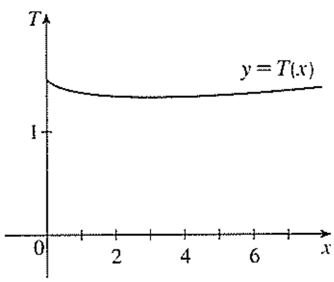


FIGURA 8

El único número crítico es $x = 9/\sqrt{7}$. Para ver si el mínimo se presenta en este número crítico o en uno de los puntos extremos del dominio $[0, 8]$, evalúe T en los tres puntos:

$$T(0) = 1.5 \qquad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

Dado que el valor menor de estos valores de T se tiene cuando $x = 9/\sqrt{7}$, el valor mínimo absoluto de T debe tenerse allí. En la figura 8 se ilustra este cálculo con la gráfica de T.

Por esto el hombre debe atracar en un punto $9/\sqrt{7}$ km ($\approx$3.4 km) corriente abajo del punto de partida. □

EJEMPLO 5 Encuentre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en un semicírculo de radio r.

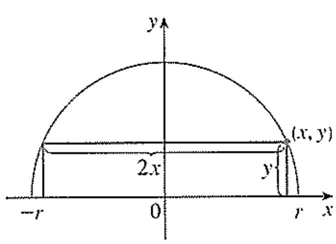


FIGURA 9

SOLUCIÓN 1 Tome el semicírculo como la mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ con centro en el origen. Luego la palabra *inscrito* significa que el rectángulo tiene dos de sus vértices sobre el semicírculo y los otros dos sobre el eje x, como se muestra en la figura 9.

Sea (x, y) el vértice que se encuentra en el primer cuadrante. En tal caso el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y y, de manera que su área es

$$A = 2xy$$

Para eliminar y, aproveche que (x, y) se encuentra sobre el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ por consiguiente $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De esta forma

$$A = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

El dominio de esta función es $0 \leqslant x \leqslant r$. Su derivada es

$$A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

la cual es 0 cuando $2x^2 = r^2$; es decir $x = r/\sqrt{2}$ (ya que $x \geqslant 0$). Este valor de x da un valor máximo de A, porque $A(0) = 0$ y $A(r) = 0$. Por lo tanto, el área del rectángulo inscrito más grande es

$$A\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

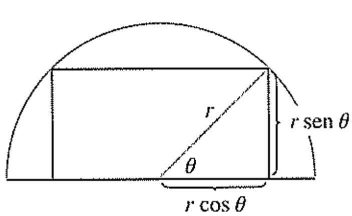


FIGURA 10

SOLUCIÓN 2 Es posible una solución más sencilla si usa un ángulo como variable. Sea θ el ángulo que se ilustra en la figura 10. Despues el área del rectángulo es

$$A(\theta) = (2r\cos\theta)(r\,\mathrm{sen}\,\theta) = r^2(2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos\theta) = r^2\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

Sabe que sen 2θ tiene un valor máximo de 1 y se alcanza cuando $2\theta = \pi/2$. De modo que $A(\theta)$ tiene un valor máximo de r^2 y se presenta cuando $\theta = \pi/4$.

Advierta que esta solución trigonométrica no comprende la derivación. De hecho, no necesita aplicar el cálculo en absoluto. □

APLICACIONES A LOS NEGOCIOS Y LA ECONOMÍA

En la sección 3.7 se introdujo la idea de costo marginal. Recuerde que si $C(x)$, la **función de costo**, es el costo de producir x unidades de cierto producto, por lo tanto el **costo marginal** es la relación de cambio de C respecto de x. En otras palabras, la función de costo marginal es la derivada $C'(x)$ de la función de costo.

Considere ahora el mercadeo. Sea $p(x)$ el precio por unidad que la compañía carga si vende x unidades. En tal caso p se llama **función de demanda** (o **función de precio**) y cabe esperar que sea una función decreciente de x. Si se venden x unidades y el precio por unidad es $p(x)$, en consecuencia el ingreso total es

$$R(x) = xp(x)$$

y R se llama **función de ingreso** (o **función de ventas**). La derivada R' de la función de ingreso se denomina **función de ingreso marginal** y es la relación de cambio del ingreso con respecto al número de unidades vendidas.

Si se venden x unidades, después la utilidad total es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

y P es la **función de utilidad**. La **función de utilidad marginal** es P', la derivada de la función de utilidad. En los ejercicios 53-58 se le pide aplicar las funciones del costo marginal, el ingreso, y la de utilidad para minimizar costos y maximizar el ingreso y la utilidad.

EJEMPLO 6 Una tienda ha vendido 200 quemadores de DVD a la semana, a \$350 cada uno. Una investigación de mercado indica que por cada \$10 de descuento que se ofrezca a los compradores, el número de aparatos vendidos se incrementará en 20 a la semana. Encuentre las funciones de demanda y de ingreso ¿Qué tan grande debe ser la rebaja para maximizar el ingreso?

SOLUCIÓN Si x denota los reproductores vendidos a la semana, por lo tanto, el incremento semanal en las ventas es $x - 200$. Por cada incremento de 20 reproductores vendidos, el precio disminuye \$10. De manera que por cada reproductor adicional vendido, la disminución en el precio es $\frac{1}{20} \times 10$ y la función de demanda es

$$p(x) = 350 - \tfrac{10}{20}(x - 200) = 450 - \tfrac{1}{2}x$$

La función de ingreso es

$$R(x) = xp(x) = 450x - \tfrac{1}{2}x^2$$

Como $R'(x) = 450 - x$, $R'(x) = 0$ cuando $x = 450$. Por la prueba de la primera derivada (o sencillamente al observar que la gráfica de R es una parábola que se abre hacia abajo), este valor de x da un máximo absoluto. El precio correspondiente es

$$p(450) = 450 - \tfrac{1}{2}(450) = 225$$

y el descuento es de $350 - 225 = 125$. Por consiguiente, para maximizar el ingreso la tienda debe ofrecer un descuento de \$125. □

4.7 EJERCICIOS

1. Considere el problema siguiente. Encuentre dos números cuya suma es 23 y cuyo producto es un máximo.
   (a) Formule una tabla de valores, como la que aparece a continuación, de tal suerte que la suma de los números en las primeras dos columnas sea siempre 23. Con base en la evidencia de su tabla, estime la respuesta al problema

Primer número	Segundo número	Producto
1	22	22
2	21	42
3	20	60
.	.	.
.	.	.
.	.	.

   (b) Aplique el cálculo para resolver el problema y compárelo con su respuesta al inciso (a).

2. Encuentre dos números cuya diferencia sea 100 y cuyo producto sea un mínimo.

3. Encuentre dos números positivos cuyo producto sea 100 y cuya suma sea un mínimo.

4. Halle un número positivo tal que la suma del número y su recíproco sean lo más pequeños posible.

5. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 100 m cuya área sea lo más grande posible.

6. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un área de $1000\ m^2$ cuyo perímetro sea lo más pequeño posible.

7. Un modelo aplicado para el rendimiento Y de un cultivo agrícola como una función del nivel de nitrógeno N en el suelo (que se mide en unidades apropiadas) es

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

   donde k es una constante positiva. ¿Qué nivel de nitrógeneo proporciona el mejor rendimiento?

8. La cantidad (en mg de carbón/m^3/h) en que se lleva a cabo la fotosíntesis de un especie de fitoplancton se diseña mediante la función

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

   donde I es la intensidad de luz (que se mide en millares de bujía-pie). ¿Para qué intensidad de luz P es máxima?

9. Considere el problema siguiente: un granjero que dispone de 750 pies de cerca desea cercar un área rectangular y luego dividirla en cuatro corrales con un cercado paralelo a un lado del rectángulo. ¿Cuál es el área total más grande posible de los cuatro corrales?
   (a) Dibuje varios diagramas que ilustren la situación, algunos con corrales poco profundos y anchos y algunos con corrales profundos y estrechos. Halle el área total de estas configuraciones. ¿Parece existir un área máxima? De ser así, estímela.
   (b) Dibuje un diagrama que ilustre la situación en general. Introduzca notaciones e identifique el diagrama con sus símbolos.
   (c) Escriba una expresión para el área total.
   (d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
   (e) Utilice el inciso (d) para escribir el área total como función de una variable.
   (f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con la estimación que hizo en el inciso (a).

10. Considere el problema que se enuncia enseguida: se va a construir una caja con la parte superior abierta a partir de un trozo cuadrado de cartón que tiene 3 pies de ancho, al recortar un cuadrado de cada una de las cuatro esquinas y doblar los lados hacia arriba. Encuentre el volumen más grande que puede tener una caja semejante.
   (a) Dibuje varios diagramas para ilustrar la situación; algunas cajas cortas con bases grandes y otras con bases pequeñas. Encuentre el volumen de varias de esas cajas. ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo.
   (b) Dibuje un diagrama en que ilustre la situación general. Introduzca la notación y marque el diagrama con sus símbolos.
   (c) Escriba una expresión para el volumen.
   (d) Use la información dada para escribir una ecuación que relacione las variables.
   (e) Utilice el inciso (d) para escribir el volumen como función de una variable.
   (f) Termine de resolver el problema y compare la respuesta con la estimación que hizo en el inciso (a).

11. Un granjero quiere cercar un área de 1.5 millones de pies cuadrados de un campo rectangular, y luego dividirla a la mitad mediante una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿De qué manera debe hacerlo para que los costos de la cerca sean mínimos?

12. Una caja con base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de $32\,000\ cm^3$. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.

$\boxed{13.}$ Si se cuenta con $1\,200\ cm^2$ de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

14. Un recipiente rectangular de almacenaje con la parte superior abierta debe tener un volumen de $10\ m^3$. El largo de su base es el doble del ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado. El material para los costados, \$6 por metro cuadrado. Encuentre el costo de los materiales para tener el más barato de esos recipientes.

15. Resuelva el ejercicio 14 suponiendo que el recipiente tiene una tapa que se fabrica del mismo material que los lados.

$\boxed{16.}$ (a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el perímetro menor es un cuadrado.
   (b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene el área máxima es un cuadrado.

$\boxed{17.}$ Encuentre el punto en la recta $y = 4x + 7$ que está más cerca al origen.

18. Determine el punto en la recta $6x + y = 9$ que está más cerca al punto $(-3, 1)$.

19. Halle los puntos sobre la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que se encuentran más lejos del punto $(1, 0)$.

20. Encuentre, correctas hasta dos cifras decimales, las coordenadas del punto sobre la curva $y = \tan x$ que estén más próximas al punto $(1, 1)$.

21. Determine las dimensiones del rectángulo con el área más grande que se puede inscribir en un círculo de radio r.

22. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

23. Halle las dimensiones del rectángulo de área más grande que se pueda inscribir en un triángulo equilátero de lado L si un lado del rectángulo se encuentra en la base del triángulo.

24. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área más grande que tenga su base sobre el eje x y sus otros dos vértices por arriba del eje x sobre la parábola $y = 8 - x^2$.

25. Calcule las dimensiones del triángulo isósceles de mayor área que se puede inscribir en el círculo de radio r.

26. Calcule el área del rectángulo más grande que se puede inscribir en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 cm, si dos lados del rectángulo coinciden con los catetos.

27. Se inscribe un cilindro circular recto en una esfera de radio r. Encuentre el volumen más grande posible de ese cilindro.

28. Se inscribe un cilindro circular recto en un cono con una altura h y radio de la base r. Halle el volumen más grande posible de semejante cilindro.

29. Un cilindro circular recto está inscrito en una esfera de radio r. Determine el área superficial más grande posible de dicho cilindro.

30. Una ventana normanda tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo. (Por esto, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Véase el ejercicio 56 de la página 23.) Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que entre la cantidad más grande de luz.

31. Los márgenes superior e inferior de un *poster* miden 6 cm, y los márgenes laterales miden 4 cm. Si el área impresa del *poster* se fija en 384 cm^2, determine las dimensiones del *poster* cuya área sea la mínima.

32. El área de un *poster* tiene que ser de 180 pulg^2, y los márgenes laterales e inferior deben medir 1 pulg y el margen superior debe ser de 2 pulg. ¿Qué dimensiones darán el área impresa máxima?

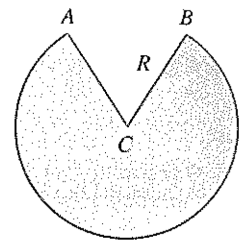
33. Un trozo de alambre de 10 m de largo se corta en dos partes. Una se dobla para formar un cuadrado y la otra para formar un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total encerrada sea (a) máxima, y (b) mínima.

34. Resuelva el ejercicio 33 si un trozo se dobla para formar un cuadrado y el otro forma un círculo.

35. Se fabrica una lata cilíndrica sin tapa de tal modo que contenga V cm^3 de líquido. Calcule las dimensiones que minimizarán el costo del metal para hacer la lata.

36. Una cerca de 8 pies de altura corre paralela a un edificio alto, a una distancia de 4 pies de este último. ¿Cuál es la longitud de la escalera más corta que llegará desde el suelo pasando por encima de la cerca, hasta la pared del edificio?

37. Se elabora un cono para beber a partir de un trozo circular de papel de radio R, al recortar un sector y unir los bordes CA y CB. Encuentre la capacidad máxima del cono.



38. Se va a fabricar un cono de papel para beber que debe contener 27 cm^3 de agua. Encuentre la altura y el radio del cono que usará la menor cantidad de papel.

39. Se inscribe un cono con altura h dentro de un cono más grande con altura H de modo que su vértice se encuentra en el centro de la base del cono más grande. Demuestre que el cono interno tiene un volumen máximo cuando $h = \frac{1}{3}H$.

40. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de una superficie horizontal mediante una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda unida al objeto. Si la cuerda hace un ángulo θ con un plano, en tal caso la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada el coeficiente de fricción. ¿Para que valor de θ, F es la más pequeña?

41. Si un resistor de R ohms se conecta a los bornes de una batería de E volts con resistencia interna r, en tal caso la potencia (en watts) en el resistor externo es

$$P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$$

Si E y r son constantes pero R varía, ¿cuál es el valor máximo de la potencia?

42. Para un pez que nada con una rapidez v con relación al agua, el consumo de energía por unidad de tiempo es proporcional a v^3. Se cree que el pez migratorio trata de minimizar la energía total requerida para nadar una distancia fija. Si nada contra una corriente $u(u < v)$, el tiempo requerido para nadar una distancia L es $L/(v - u)$ y la energía total E necesaria para nadar la distancia se expresa por medio de

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v - u}$$

donde a es la constante de proporcionalidad.
(a) Determine el valor de v que minimice E.
(b) Dibuje la gráfica de E.

Nota: Este resultado se ha comprobado de manera experimental; el pez migratorio nada contra corriente con una rapidez 50% mayor que la rapidez de esa corriente.

43. En una colmena cada celda es un prisma hexagonal regular, abierto en uno de sus extremos y con un ángulo triedro en el otro como en la figura. Se cree que las abejas forman sus celdas de manera que se minimice el área superficial para un volumen dado, usando de esta forma la menor cantidad de cera en la construcción de las mismas. El examen de estas celdas ha hecho ver que la medida del ángulo θ es sorprendentemente coherente. Con base en la geometría de la celda, se puede demostrar que el área superficial S se expresa con

$$S = 6sh - \tfrac{3}{2}s^2 \cot\theta + \left(3s^2\sqrt{3}/2\right)\csc\theta$$

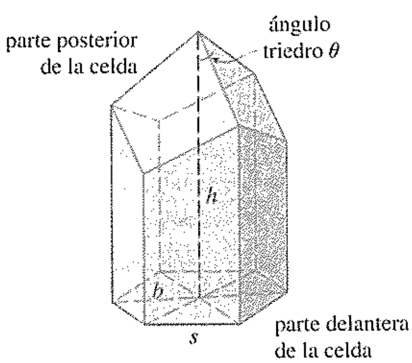
donde s, la longitud de los lados del hexágono, y h la altura, son constantes.

(a) Calcule $dS/d\theta$.

(b) ¿Cuál ángulo deben preferir las abejas?

(c) Determine el área superficial mínima de la celda (en términos de s y h).

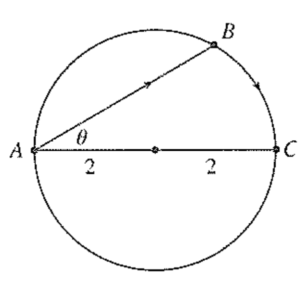
Nota: Se han hecho medidas reales del ángulo θ en las colmenas y las medidas de estos ángulos rara vez difieren del valor calculado más de 2°.



44. Un barco sale de un muelle a las 2:00 P.M. y viaja con rumbo al sur con una rapidez de 20 km/h. Otro buque ha estado navegando con rumbo al este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 3:00 P.M. ¿A qué hora estuvieron más cerca entre sí los dos navíos?

45. Resuelva el problema del ejemplo 4 si el río mide 5 km de anchura y el punto B está a sólo 5 km corriente abajo de A.

46. Una mujer que se encuentra en un punto A sobre la playa de un lago circular con radio de 2 mi desea llegar al punto C, opuesto al A sobre el otro lado del lago, en el tiempo más corto posible. Puede caminar a razón de 4 mi/h y remar en un bote a 2 mi/h. ¿En qué ángulo en relación con el diámetro debe remar?



47. Una refinería se localiza al norte de la orilla de un río recto que es de 2 km de ancho. Se debe construir una tubería desde la refinería hasta un tanque de almacenamiento que se localiza al sur de la orilla del río 6 km al este de la refinería. El costo de instalación de la tubería es 400 000 dólares/km en tierra hasta el punto P al norte de la orilla y 800 000 dólares/km bajo el río hasta el tanque. Con la finalidad de minimizar el costo de la tubería, ¿dónde se localiza P?

48. Considere que la refinería en el ejercicio 47 se localiza a 1 km al norte del río. ¿Dónde se localiza P?

49. La iluminación de un objeto por una fuente luminosa es directamente proporcional a la intensidad de la fuente e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a esa fuente. Si se colocan dos fuentes luminosas, una tres veces más fuerte que la otra, separadas una distancia de 10 pies, ¿dónde debe colocarse un objeto sobre la recta entre las dos fuentes de modo que reciba la iluminación mínima?

50. Encuentre una ecuación de la recta que pasa por el punto (3, 5) que elimine el área mínima del primer cuadrante.

51. Sean a y b números positivos. Encuentre la longitud más corta del segmento rectilíneo que sea cortado por el primer cuadrante y pase por el punto (a, b).

52. ¿En qué puntos de la curva $y = 1 + 40x^3 - 3x^5$ la recta tangente tiene la pendiente más grande?

53. (a) Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de una mercancía, en tal caso el **costo promedio** por cada unidad es $c(x) = C(x)/x$. Demueste que si el costo promedio es un mínimo, en tal caso el costo marginal es igual al costo promedio.

(b) Si $C(x) = 16\,000 + 200x + 4x^{3/2}$, en dólares, hallar (i) el costo, costo promedio, y costo marginal en un nivel de producción de 1 000 unidades; (ii) el nivel de producción que minimizará el costo promedio; y (iii) el costo promedio mínimo.

54. (a) Demuestre que si la utilidad $P(x)$ es un máximo, por lo tanto el ingreso marginal es igual al costo marginal.

(b) Si $C(x) = 16\,000 + 500x - 1.6\,x^2 + 0.004x^3$ es la función costo y $p(x) = 1700 - 7x$ es la función demanda, hallar el nivel de producción que maximice la utilidad.

55. Un equipo de béisbol juega en un estadio con una capacidad de 55 000 espectadores. Con precios de los boletos en \$10, la asistencia promedio fue de 27 000 espectadores. Cuando el precio bajó hasta \$8, la asistencia promedio subió hasta 33 000.

(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.

(b) ¿A qué precio deben fijarse los boletos para maximizar el ingreso?

56. Durante los meses de verano, Andrés hace y vende collares en la playa. El verano anterior los vendió a \$10 cada uno y sus ventas promediaron 20 unidades por día. Cuando aumentó el precio \$1, encontró que perdió dos ventas diarias.

(a) Encuentre la función de demanda, suponiendo que es lineal.

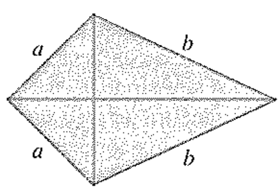
(b) Si el material para cada collar le cuesta \$6 a Andrés, ¿cuál debe ser el precio de venta para que maximice su utilidad?

57. Un fabricante ha vendido 100 aparatos de televisión por semana a \$450 cada uno. Una investigación de mercado indica que por cada \$10 de descuento que ofrezca, el número de aparatos se incrementará en 1 000 por semana.
(a) Encuentre la función de demanda.
(b) ¿Cuán grande debe ser el descuento que ofrezca la compañía para maximizar su ingreso?
(c) Si la función de costo semanal es $C(x) = 68\,000 + 150x$, ¿cuál tiene que ser la magnitud del descuento para maximizar la utilidad?

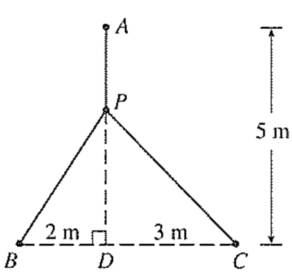
58. Por experiencia, el gerente de un complejo de apartamentos de 100 unidades sabe que se ocuparán todas si la renta es de \$800 al mes. Una investigación del mercado sugiere que, en promedio, quedará una unidad vacía por cada incremento de \$10 en la renta. ¿Cuánto debe cobrar el gerente por renta para maximizar el ingreso?

59. Demuestre que de todos los triángulos isósceles con un perímetro dado el que posee el área más grande es equilátero.

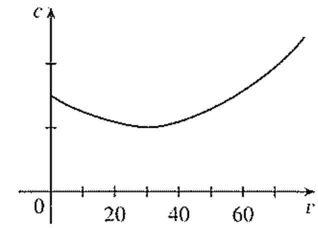
CAS **60.** Se va a construir el armazón de una cometa a partir de seis trozos de madera. Se han cortado los cuatro trozos exteriores con las longitudes que se indican en la figura. Para maximizar el área de la cometa, ¿qué longitud deben tener los trozos diagonales?



61. Un punto P necesita ser ubicado en algún lugar de la recta AD de modo que la longitud total L de cables que unen P con los puntos A, B y C sea mínima (véase figura). Exprese L en función de $x = |AP|$ y mediante las gráficas de L y dL/dx para estimar el valor mínimo.



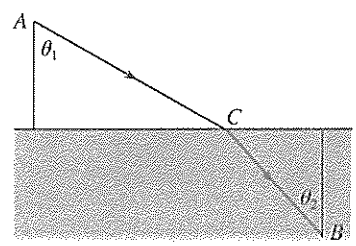
62. En la gráfica se muestra el consumo c de combustible de un automóvil (medido en galones por hora) como función de la rapidez v del mismo. Con rapidez muy bajas, el motor funciona de manera ineficiente; de modo que, inicialmente, c decrece a medida que la rapidez aumenta. Pero con rapidez, se incrementa el consumo de combustible. Usted puede ver que para este automóvil, $c(v)$ se minimiza cuando $v \approx 30$ mi/h. Sin embargo, para lograr la eficiencia respecto al combustible, lo que debe minimizarse no es el consumo de galones por hora sino de galones *por milla*. Denote este consumo con G. Use la gráfica para estimar la rapidez la cual G tiene el valor mínimo.



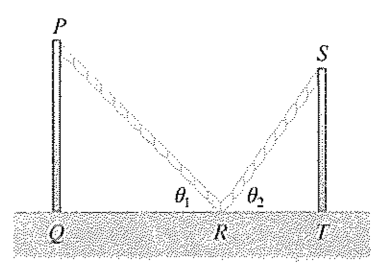
63. Sean v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. Según el principio de Fermat, un rayo de luz viaja de un punto A en el aire a un punto B en el agua por una trayectoria ACB que minimiza el tiempo para hacer el recorrido. Demuestre que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

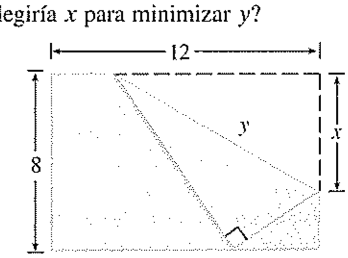
donde θ_1 (el ángulo de incidencia) y θ_2 (el ángulo de refracción) son como se muestra en la figura. Esta ecuación se conoce como ley de Snell.



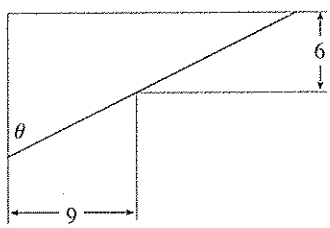
64. Dos postes verticales, PQ y ST, se aseguran por medio de un cable PRS extendido desde el extremo superior del primer poste hasta un punto R sobre el piso y, a continuación, hasta el extremo superior del segundo poste, como se ve en la figura. Demuestre que se tiene la longitud más corta de ese cable cuando $\theta_1 = \theta_2$



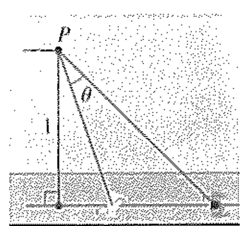
65. Se dobla la esquina superior izquierda de un trozo de papel de 8 pulgadas de ancho por 12 pulgadas de largo para llevarla hasta el borde de la derecha, como en la figura. ¿Cómo la doblaría de modo que se minimice la longitud del doblez? En otras palabras, ¿cómo elegiría x para minimizar y?



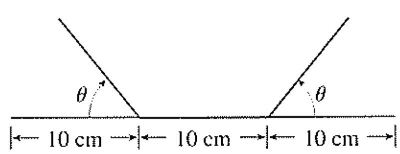
66. Se está transportando un tubo de acero por un pasillo de 9 pies de ancho. Al final de éste existe una vuelta a ángulo recto hacia otro pasillo más angosto de 6 pies de ancho. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que se puede hacer pasar horizontalmente por la esquina?



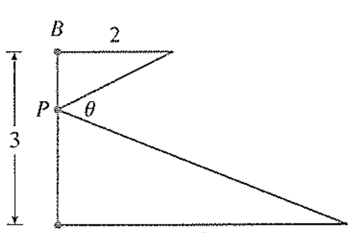
67. Un observador está de pie en el punto P, una unidad alejado de la pista. Dos corredores parten del punto S en la figura y corren a lo largo de la pista. Un corredor corre tres veces más rápido que el otro. Determine el valor máximo del ángulo de visión θ del observador entre los corredores. [*Sugerencia*: maximice tan θ.]



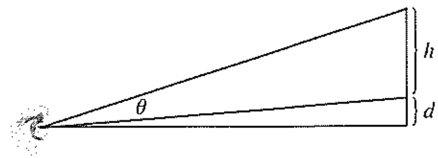
68. Se va a construir un canal para el agua de lluvia a partir de una lámina de metal de 30 cm de ancho doblando hacia arriba una tercera parte de la lámina en cada lado a través de un ángulo θ. ¿Cómo debe elegirse θ de manera que el canal conduzca la mayor cantidad de agua?



69. ¿Dónde debe elegirse el punto P sobre el segmento rectilíneo AB de modo que se maximice el ángulo θ?



70. En una galería de arte, una pintura tiene la altura h y está colgado de modo que su borde inferior queda a una distancia d arriba del ojo del observador (como se muestra en la figura). ¿Qué tan lejos de la pared debe pararse un observador para tener la mejor vista? (En otras palabras ¿dónde debe situarse el observador a fin de que se maximice el ángulo θ subtendido en su ojo por la pintura?

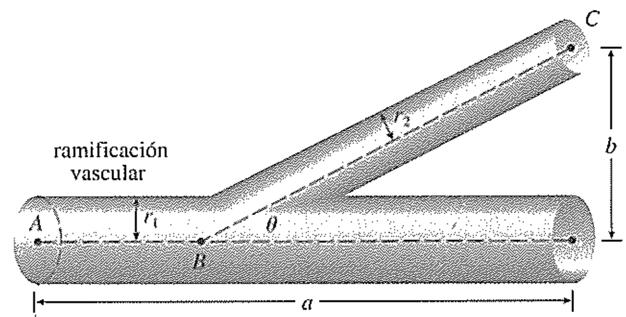


71. Halle el área máxima de un rectángulo que pueda circunscribirse con respecto a un rectángulo dado con longitud L y ancho W. [*Sugerencia:* Exprese el área como una función de un ángulo θ.]

72. El sistema vascular consta de vasos (arterias, arteriolas, capilares y venas) que llevan la sangre desde el corazón hasta los órganos y de regreso a aquél. Este sistema tiene que trabajar de manera que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre. En particular, esta energía se reduce cuando se baja la resistencia de la sangre. Una de las leyes de Poiseuille da la resistencia R de la sangre como

$$R = C\frac{L}{r^4}$$

donde L es la longitud del vaso sanguíneo, r es el radio y C es una constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre. (Poiseuille estableció esta ley a nivel experimental, pero también se deduce a partir de la ecuación 2 de la sección 8.4.2.) En la figura se muestra un vaso sanguíneo principal con radio r_1, el cual se ramifica formando un ángulo θ hacia un vaso más pequeño, con radio r_2.



(a) Aplique la ley de Poiseuille para demostrar que la resistencia total de la sangre a lo largo de la trayectoria en ABC es

$$R = C\left(\frac{a - b\cot\theta}{r_1^4} + \frac{b\csc\theta}{r_2^4}\right)$$

donde a y b son las distancias que se ven en la figura.

(b) Pruebe que esta resistencia se minimiza cuando

$$\cos\theta = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

(c) Encuentre el ángulo óptimo de ramificación (correcto hasta el grado más cercano) cuando el radio del vaso sanguíneo menor es dos tercios el radio del mayor.

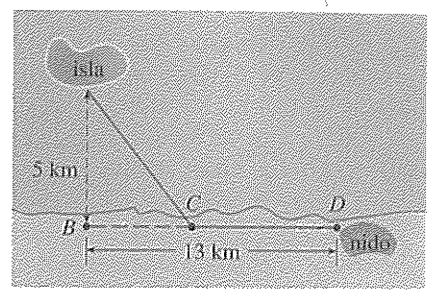
73. Los ornitólogos han determinado que algunas especies de pájaros tienden a evitar vuelos sobre grandes masas de agua durante las horas diurnas. Se cree que se requiere más energía para volar sobre al agua que sobre la tierra porque, en general, el aire se eleva sobre la tierra y cae sobre el agua durante el día. Se libera un pájaro con estas tendencias desde una isla que está a 5 km del punto más cercano B de una costa recta, vuela hasta un punto C de la costa y luego a lo largo de ésta hasta la zona D en que se encuentra su nido. Suponga que el pájaro busca de manera instintiva una trayectoria que minimice su consumo de energía. Los puntos B y D están separados 13 km.

(a) En general, si consume 1.4 veces más energía para volar sobre el agua que sobre la tierra, ¿hasta cuál punto C debe volar el pájaro para minimizar el consumo total de energía de regreso a la zona donde está su nido?

(b) Denote con W y L la energía (en joules) por kilómetro volado sobre el agua y sobre la tierra, respectivamente. ¿Qué significaría un valor grande de la proporción W/L en términos del vuelo del pájaro? ¿Qué significado tendría un valor pequeño? Determine la proporción W/L correspondiente al consumo mínimo de energía.

(c) ¿Cuál debe ser el valor de W/L para que el ave vuele directamente hasta la zona D donde está su nido? ¿Cuál tiene que ser el valor de W/L para que vuele hasta B y, a continuación, a lo largo de la costa hasta D?

(d) Si los ornitólogos observan que los pájaros de ciertas especies alcanzan la costa en un punto a 4 km de B, ¿cuántas veces más energía consume un ave para volar sobre el agua que sobre la tierra?



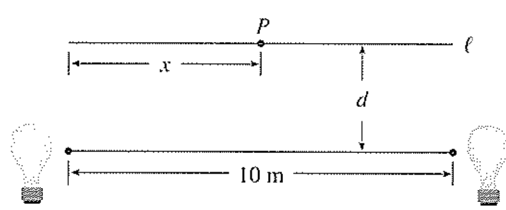
74. Se colocan dos fuentes luminosas de intensidad idéntica separadas 10 m. Un objeto está en un punto P, sobre una recta ℓ paralela a la recta que une las fuentes luminosas y a una distancia de d metros de esta línea (véase la figura). Desea localizar P sobre ℓ de manera que se minimice la intensidad de la iluminación. Necesita aplicar el hecho de que la intensidad de la iluminación de una sola fuente es directamente proporcional a la intensidad de ésta e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a ella.

(a) Encuentre una expresión para la intensidad $I(x)$ en el punto P.

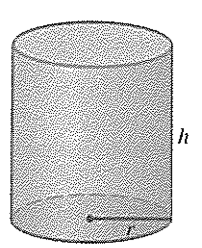
(b) Si $d = 5$ m, use las gráficas de $I(x)$ e $I'(x)$ para demostrar que la intensidad se minimiza cuando $x = 5$ m, es decir, cuando P está en el punto medio de ℓ.

(c) Si $d = 10$ m, demuestre que la intensidad (quizás de modo sorprendente) no se minimiza en el punto medio.

(d) En algún lugar entre $d = 5$ m y $d = 10$ m se tiene un valor de transición de d en el cual el punto de iluminación mínima cambia de manera abrupta. Estime este valor de d mediante métodos gráficos. Enseguida, encuentre el valor exacto de d.

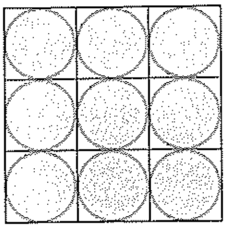


PROYECTO DE APLICACIÓN — LA FORMA DE UNA LATA

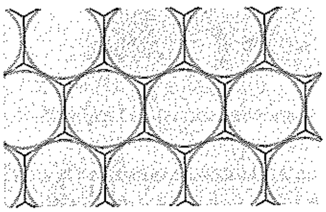


En este proyecto se investiga el modo más económico de formar una lata. En primer lugar, esto significa que se da el volumen V de una lata cilíndrica y necesita hallar la altura h y el radio r que minimice el costo del metal para fabricarla (véase la figura). Si hace caso omiso de cualquier desecho de metal en el proceso de fabricación, el problema es minimizar el área superficial del cilindro. En el ejemplo 2 de la sección 4.7, resolvió este problema y halló que $h = 2r$; es decir, la altura debe ser igual al diámetro. Pero si usted va a su alacena o al supermercado con una regla, descubrirá que la altura suele ser mayor que el diámetro y que la relación h/r varía desde 2 hasta alrededor de 3.8. Vea si puede explicar este fenómeno.

1. El material para las latas se corta de láminas metálicas. Los costados cilíndricos se forman al doblar rectángulos; estos rectángulos se cortan de la hoja con poco o ningún desperdicio. Pero



Discos cortados de cuadrados



Discos cortados de hexágonos

si los discos superior y del fondo se cortan a partir de cuadrados de lado $2r$ (como en la figura), esto genera una cantidad de metal de desecho considerable, el cual puede reciclarse pero que tiene poco o ningún valor para quienes fabrican latas. Si éste es el caso, demuestre que se minimiza la cantidad de metal usado cuando

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2.55$$

2. Se obtiene un apiñamiento más eficiente de los discos dividiendo la hoja metálica en hexágonos y luego cortar las tapas y bases circulares a partir de ellos (véase la figura). Demuestre que, si se adopta esta estrategia, en tal caso

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2.21$$

3. Los valores de h/r que se encontraron en los problemas 1 y 2 están un poco más cercanos a los que se encuentran en los anaqueles del supermercado, pero todavía no toman en cuenta todo. Si mira con más atención algunas latas reales, la tapa y la base se forman a partir de discos con radios más grandes que r, los cuales se doblan sobre los extremos de la lata. Si toma en cuenta esto, incrementa h/r. Lo que es más significativo, además del costo del metal, necesita incorporar la fabricación de la lata al costo. Suponga que se incurre en la mayor parte del desembolso al unir los costados a los bordes de las latas. Si corta los discos a partir de hexágonos, como en el problema 2, después el costo es proporcional a

$$4\sqrt{3}\,r^2 + 2\pi rh + k(4\pi r + h)$$

donde k es el recíproco de la longitud que se puede unir para el costo de una unidad de área de metal. Demuestre que esta expresión se minimiza cuando

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\frac{\pi h}{r}} \cdot \frac{2\pi - h/r}{\pi h/r - 4\sqrt{3}}$$

4. Trace la gráfica de $\sqrt[3]{V}/k$ como función de $x = h/r$ y úsela para argumentar que cuando una lata es grande o realizar la unión es barato, debe hacer que h/r sea aproximadamente igual a 2.21 (como en el problema 2). Pero cuando la lata es pequeña o unir resulta costoso, h/r tiene que ser apreciablemente mayor.

5. El análisis hace ver que las latas grandes deben ser casi cuadradas y las pequeñas altas y delgadas. Eche una mirada a las formas relativas de las latas en un supermercado. ¿La conclusión suele ser cierta en la práctica? ¿Hay excepciones? ¿Puede sugerir las razones por las que las latas pequeñas no siempre son altas y delgadas?

4.8 MÉTODO DE NEWTON

Suponga que un distribuidor de automóviles le ofrece uno en \$18 000 al contado o en pagos de \$375 al mes durante cinco años. A usted le gustaría saber qué tasa de interés le está cargando el distribuidor. Para hallar la respuesta, tiene que resolver la ecuación

$$\boxed{1} \qquad 48x(1 + x)^{60} - (1 + x)^{60} + 1 = 0$$

(Los detalles se explican en el ejercicio 41.) ¿Cómo podría resolver una ecuación de este tipo?

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, existe una fórmula bien conocida para las raíces. Para las ecuaciones de tercer y cuarto grados también existen fórmulas para las raíces, pero son en extremo complicadas. Si f es un polinomio de grado 5 o superior, no existe

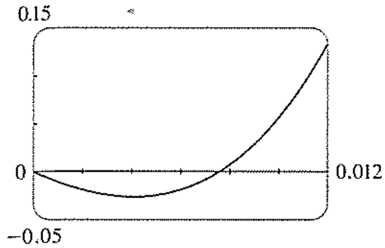


FIGURA 1

Intente resolver la ecuación 1 con el buscador numérico de raíces de su calculadora o computadora. Algunas máquinas no pueden resolverla. Otras tienen éxito, pero requieren que se les especifique un punto de partida para la búsqueda.

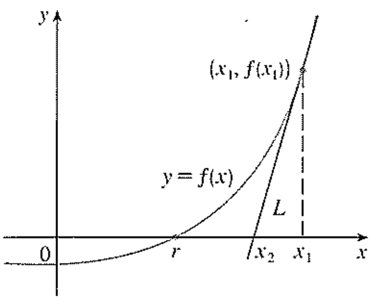


FIGURA 2

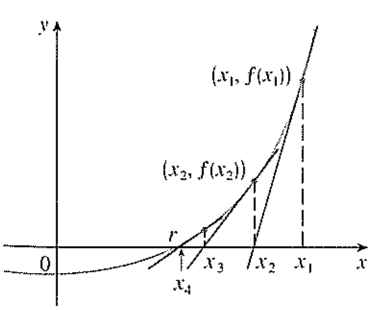


FIGURA 3

una fórmula de este tipo (véase la nota de la página 210). Del mismo modo, no hay una fórmula que permita hallar las raíces exactas de una ecuación trascendente como $\cos x = x$.

Puede hallar una solución *aproximada* para la ecuación 1 dibujando el lado izquierdo de la misma. La gráfica de la figura 1 se produjo con un aparato graficador y después de experimentar con los rectángulos de visualización.

Además de la solución $x = 0$ que no interesa, hay una solución entre 0.007 y 0.008. Un acercamiento muestra que la raíz es más o menos 0.0076. Si necesita más exactitud, haga varios acercamientos, pero esto se vuelve tedioso. Una opción más rápida es usar un buscador numérico de raíces en una calculadora o en un sistema algebraico para computadora. Si así lo hace, encuentra que la raíz, correcta hasta nueve cifras decimales, es 0.007628603.

¿Cómo funcionan estos buscadores numéricos de raíces? Se aplican diversos métodos pero en la mayor parte se usa el **método de Newton**, que también se conoce como **método de Newton-Raphson**. Se explica cómo trabaja este método, en parte para mostrar qué sucede en el interior de la calculadora o computadora y, en parte, como una aplicación de la idea de aproximación lineal.

En la figura 2 se muestra la geometría que se encuentra detrás del método de Newton, donde se ha asociado una r a la raíz que intenta hallar. Empiece con una primera aproximación x_1, la cual se obtiene por tanteos, o de un esquema aproximado de la gráfica de f a partir de la gráfica de f generada por una computadora. Considere la recta tangente L a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_1, f(x_1))$ y vea la intersección de L con el eje x, marcada como x_2. La idea tras el método de Newton es que la recta tangente está cercana a la curva y, por consiguiente, su intersección con el eje x, x_2, está cerca de la intersección de la curva con el eje x (a saber, la raíz r que busca). Debido a que la tangente es una recta, puede hallar con facilidad su intersección con el eje x.

Para encontrar una fórmula para x_2 en términos de x_1, usa el hecho de que la pendiente de L es $f'(x_1)$, de modo que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Como la intersección x de L es x_2, se establece $y = 0$ y se obtiene

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, puede resolver esta ecuación para x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Use x_2 como una aproximación para r.

En seguida repita este procedimiento con x_1 reemplazada por x_2, usando la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Ésta da una tercera aproximación:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Si sigue repitiendo este proceso, obtendrá una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$, como se observa en la figura 3. En general, si la n-ésima aproximación es x_n y $f'(x_n) \neq 0$, por lo tanto la siguiente aproximación se expresa con

2
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Las sucesiones se presentaron de manera breve en *Presentación preliminar del cálculo* en la página 6. En la sección 11.1 se inicia un análisis más detallado.

Si los números x_n se aproximan cada vez más a r cuando n se hace grande, en tal caso la sucesión *converge* a r y se escribe

$$\lim_{n \to \infty} x_n = r$$

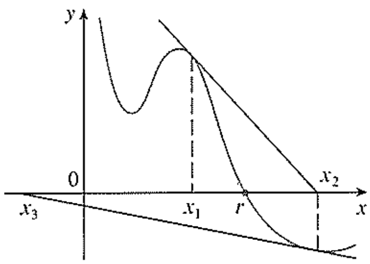


FIGURA 4

Aun cuando la sucesión de aproximaciones sucesivas converge a la raíz deseada, para funciones del tipo que se ilustra en la figura 3, en ciertas circunstancias la sucesión puede no converger. Por ejemplo, considere la situación que se ilustra en la figura 4. Puede ver que x_2 es una aproximación más deficiente que x_1. Quizás éste sea el caso cuando $f'(x_1)$ este cercana a 0. Incluso podría suceder que una aproximación (como la de x_3 de la figura 4) caiga fuera del dominio de f. Por lo tanto el método de Newton falla y debe elegirse una mejor aproximación inicial x_1. Véanse los ejercicios 31 a 34 en relación con ejemplos específicos en que el método de Newton funciona con mucha lentitud o no funciona en absoluto.

EJEMPLO 1 Empiece con $x_1 = 2$, y encuentre la tercera aproximación x_3 para la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$.

SOLUCIÓN Aplique el método de Newton con

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \qquad \text{y} \qquad f'(x) = 3x^2 - 2$$

TEC En Module 4.8 puede investigar cómo funciona el método de Newton para diferentes funciones cuando cambie x_1

El propio Newton utilizó esta ecuación para ilustrar su método y eligió $x_1 = 2$ después de experimentar un tanto porque $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ y $f(3) = 16$. La ecuación 2 se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

Con $n = 1$, tiene

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

En la figura 5 se muestra la geometría detrás del primer paso del método de Newton del ejemplo 1. Como $f'(2) = 10$, la recta tangente $y = x^3 - 2x - 5$ en $(2, -1)$ tiene una ecuación $y = 10x - 21$ de manera que su intersección x es $x_2 = 2.1$.

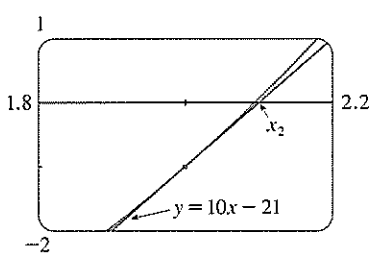


FIGURA 5

En seguida con $n = 2$ obtiene

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2}$$

$$= 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

Resulta que esta tercera aproximación $x_3 \approx 2.0946$ es exacta hasta cuatro cifras decimales. □

Suponga que quiere lograr una exactitud dada, hasta ocho cifras decimales, aplicando el método de Newton. ¿Cómo sabrá cuándo detenerse? La regla empírica que se usa en general es parar cuando las aproximaciones sucesivas x_n y x_{n+1} concuerdan hasta las ocho cifras decimales. (En el ejercicio 37 de la sección 11-11 se dará un enunciado más preciso referente a la exactitud del método de Newton.)

Advierta que el procedimiento al ir de n hacia $n + 1$ es el mismo para todos los valores de n (se llama proceso *iterativo*). Esto significa que el método de Newton es en particular conveniente para una calculadora programable o una computadora.

EJEMPLO 2 Aplique el método de Newton para hallar $\sqrt[6]{2}$ correcto hasta ocho cifras decimales.

SOLUCIÓN En primer lugar, observe que encontrar $\sqrt[6]{2}$ equivale a hallar la raíz positiva de la ecuación

$$x^6 - 2 = 0$$

Por consiguiente, tome $f(x) = x^6 - 2$. Después $f'(x) = 6x^5$ y la fórmula 2 (método de Newton) se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Si elige $x_1 = 1$ como la aproximación inicial, obtiene

$$x_2 \approx 1.16666667$$
$$x_3 \approx 1.12644368$$
$$x_4 \approx 1.12249707$$
$$x_5 \approx 1.12246205$$
$$x_6 \approx 1.12246205$$

Dado que x_5 y x_6 concuerdan hasta las ocho cifras decimales, concluye que

$$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$$

hasta ocho cifras decimales. □

EJEMPLO 3 Encuentre, correcta hasta seis cifras decimales, la raíz de la ecuación $\cos x = x$.

SOLUCIÓN Primero escriba de nuevo la ecuación en la forma estándar:

$$\cos x - x = 0$$

Por lo tanto, $f(x) = \cos x - x$. En tal caso $f'(x) = -\text{sen } x - 1$, de modo que la fórmula 2 se convierte en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\text{sen } x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\text{sen } x_n + 1}$$

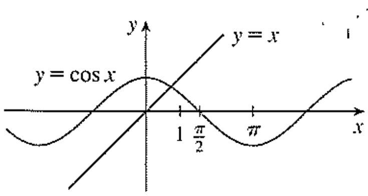


FIGURA 6

Con el fin de estimar un valor apropiado para x_1, en la figura 6 trace las gráficas de $y = \cos x$ y $y = x$. Parece que se cruzan en un punto cuya coordenada x es algo menor que 1, de modo que tome $x_1 = 1$ como una aproximación inicial conveniente. Luego, al poner su calculadora en modo de radianes, obtiene

$$x_2 \approx 0.75036387$$
$$x_3 \approx 0.73911289$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$
$$x_5 \approx 0.73908513$$

Dado que x_4 y x_5 concuerdan hasta seis cifras decimales (ocho, de hecho), se concluye que la raíz de la ecuación correcta hasta seis cifras decimales es 0.739085. □

En vez de usar el esquema aproximado de la figura 6 para obtener una aproximación de partida para el método de Newton del ejemplo 3, puede usar la gráfica más exacta que

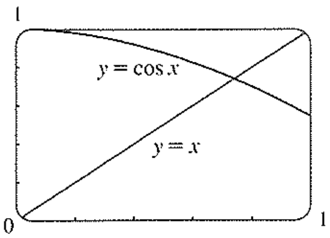


FIGURA 7

proporciona una calculadora o una computadora. La figura 7 sugiere que utilice $x_1 = 0.75$ como la aproximación inicial. En tal caso el método de Newton da

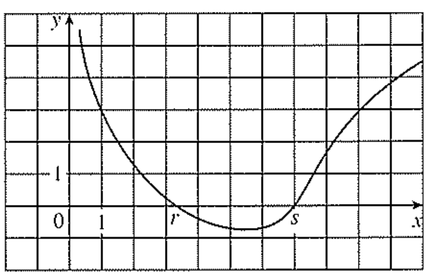
$$x_2 \approx 0.73911114 \qquad x_3 \approx 0.73908513 \qquad x_4 \approx 0.73908513$$

y así obtiene la misma respuesta de antes, pero con unos cuantos pasos menos.

Tal vez se pregunte por qué molestarse con el método de Newton si se tiene disponible un dispositivo graficador. ¿Verdad que es más fácil hacer acercamientos repetidamente y encontrar las raíces como en la sección 1.4? Si sólo se requieren una o dos cifras decimales de exactitud, después el método de Newton es inapropiado y basta con cualquier graficador. Pero si es necesario llegar a las seis u ocho cifras decimales, los acercamientos continuos se vuelven molestos. En general, a menudo conviene usar una computadora y el método de Newton uno tras otro: el aparato graficador para arrancar y el método de Newton para terminar.

4.8 EJERCICIOS

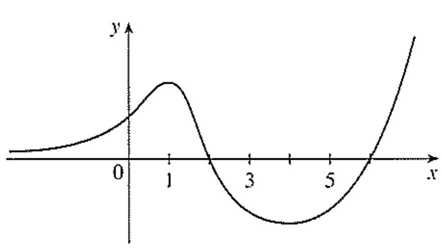
1. En la figura se muestra la gráfica de una función f. Suponga que se usa el método de Newton para obtener una aproximación de la raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, con aproximación lineal $x_1 = 1$.
   (a) Dibuje las rectas tangentes que se usan para hallar x_2 y x_3, y estime los valores numéricos de estas dos.
   (b) ¿Sería $x_1 = 5$ una mejor aproximación inicial? Explique.



2. Siga las instrucciones que se dieron para el inciso (a) del ejercicio 1, pero use $x_1 = 9$ como la aproximación de arranque para hallar la raíz s.

3. Suponga que la recta $y = 5x - 4$ es tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = 3$. Con el método de Newton para localizar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ y una aproximación inicial de $x_1 = 3$, encuentre la segunda aproximación x_2.

4. Para cada aproximación inicial, determine gráficamente qué sucede si se aplica el método de Newton para la función cuya gráfica se muestra.
   (a) $x_1 = 0$ (b) $x_1 = 1$ (c) $x_1 = 3$
   (d) $x_1 = 4$ (e) $x_1 = 5$



5–8 Use el método de Newton con la aproximación inicial dada x_1 para hallar x_3, la tercera aproximación para la raíz de la ecuación dada. (Dé sus respuestas hasta cuatro cifras decimales.)

5. $x^3 + 2x - 4 = 0, \quad x_1 = 1$
6. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3 = 0, \quad x_1 = -3$
7. $x^5 - x - 1 = 0, \quad x_1 = 1$
8. $x^5 + 2 = 0, \quad x_1 = -1$

9. Use el método de Newton con la aproximación inicial $x_1 = -1$ para hallar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^3 + x + 3 = 0$. Explique cómo funciona el método dibujando en primer lugar la función y su recta tangente en $(-1, 1)$.

10. Use el método de Newton con la aproximación inicial $x_1 = 1$ para encontrar x_2, la segunda aproximación a la raíz de la ecuación $x^4 - x - 1 = 0$. Explique cómo funciona el método dibujando en primer lugar la función y su recta tangente en $(1, -1)$.

11–12 Aplique el método de Newton para aproximar el número dado correcto hasta ocho cifras decimales.

11. $\sqrt[5]{30}$ 12. $\sqrt[100]{1000}$

13–16 Aplique el método de Newton para aproximar la raíz indicada de la ecuación correcta hasta seis cifras decimales.

13. La raíz de $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$
14. La raíz de $2.2x^5 - 4.4x^3 + 1.3x^2 - 0.9x - 4.0 = 0$ en el intervalo $[-2, -1]$
15. La raíz positiva de sen $x = x^2$
16. La raíz positiva de $2 \cos x = x^4$

17–22 Mediante el método de Newton determine todas las raíces de la ecuación con seis cifras decimales.

17. $x^4 = 1 + x$ 18. $e^x = 3 - 2x$

19. $(x-2)^2 = \ln x$

20. $\dfrac{1}{x} = 1 + x^3$

21. $\cos x = \sqrt{x}$

22. $\tan x = \sqrt{1 - x^2}$

23–28 Use el método de Newton para hallar todas las raíces de las ecuaciones correctas hasta ocho cifras decimales. Empiece por dibujar una gráfica para hallar aproximaciones iniciales.

23. $x^6 - x^5 - 6x^4 - x^3 + x + 10 = 0$

24. $x^2(4 - x^2) = \dfrac{4}{x^2+1}$

25. $x^2\sqrt{2 - x - x^2} = 1$

26. $3\,\text{sen}(x^2) = 2x$

27. $4e^{-x^2}\,\text{sen}\,x = x^2 - x + 1$

28. $e^{\arctan x} = \sqrt{x^3 + 1}$

29. (a) Aplique el método de Newton a la ecuación $x^2 - a = 0$ para deducir el siguiente algoritmo de raíz cuadrada (que usaron los antiguos babilonios para calcular $\sqrt{a}$):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

(b) Utilice el inciso (a) para calcular $\sqrt{1\,000}$ correcta hasta seis cifras decimales.

30. (a) Aplique el método de Newton a la ecuación $1/x - a = 0$ para deducir el algoritmo siguiente del recíproco:

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$$

(Este algoritmo permite que una computadora encuentre recíprocos sin dividir en realidad.)

(b) Use el resultado del inciso (a) para calcular $1/1.6984$ correcto hasta seis cifras decimales.

31. Explique por qué el método de Newton no funciona para hallar la raíz de la ecuación $x^3 - 3x + 6 = 0$ si se elige que la aproximación inicial sea $x_1 = 1$.

32. (a) Use el método de Newton con $x_1 = 1$ para hallar la raíz de la ecuación $x^3 - x = 1$ correcta hasta seis cifras decimales.

(b) Resuelva la ecuación del inciso (a) con $x_1 = 0.57$ como la aproximación inicial.

(c) Resuelva la ecuación del inciso (a) con $x_1 = 0.57$. (Necesita una calculadora programable para esta parte.)

(d) Trace la gráfica de $f(x) = x^3 - x - 1$ y de sus rectas tangentes en $x_1 = 1$, 0.6 y 0.57 para explicar por qué el método de Newton es muy sensible al valor de la aproximación inicial.

33. Explique por qué falla el método de Newton cuando se aplica a la ecuación $\sqrt[3]{x} = 0$ con cualquier aproximación inicial $x_1 \neq 0$. Ilustre su explicación con un esquema.

34. Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

por lo tanto la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ es $x = 0$. Explique por qué el método de Newton falla para determina la raíz sin importar cuál aproximación inicial $x_1 \neq 0$ se use. Ilustre la explicación con un diagrama.

35. (a) Aplique el método de Newton para calcular los números críticos de la función $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x$ con tres cifras decimales.

(b) Calcule el valor mínimo absoluto de f correcta con cuatro cifras decimales.

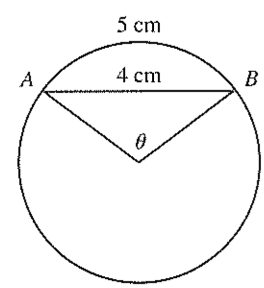
36. Utilice el método de Newton para encontrar el valor mínimo absoluto de la función $f(x) = x\cos x$, $0 \leq x \leq \pi$ sen x correcto hasta seis cifras decimales.

37. Con el método de Newton halle las coordenadas del punto de inflexión de la curva $y = e^{\cos x}$, $0 \leq x \leq \pi$, correcto hasta seis cifras decimales.

38. De la infinidad de rectas que son tangentes a la curva $y = -\text{sen}\,x$ y pasan por el origen, una tiene la pendiente más grande. Use el método de Newton para hallar la pendiente de esa recta correcta hasta seis cifras decimales.

39. Aplique el método de Newton para hallar las coordenadas, correctas hasta seis cifras decimales, del punto en la parábola $y = (x-1)^2$ que esté lo más cercano al origen.

40. En la figura, la longitud de la cuerda AB es 4 cm y la del arco AB es 5 cm. Encuentre el ángulo central θ, en radianes, correcto hasta cuatro cifras decimales. A continuación dé la respuesta hasta el grado más cercano.



41. Un distribuidor de automóviles vende uno nuevo en \$18 000. También ofrece venderlo en pagos de \$375 al mes durante cinco años. ¿Qué tasa de interés mensual está cargando este distribuidor?

Para resolver este problema necesitará usar la fórmula para el valor actual A de un anualidad que consta de n pagos iguales de tamaño R con la tasa de interés i durante el periodo

$$A = \frac{R}{i}[1 - (1+i)^{-n}]$$

Demuestre, sustituyendo i por x, que

$$48x(1+x)^{60} - (1+x)^{60} + 1 = 0$$

Utilice el método de Newton para resolver esta ecuación.

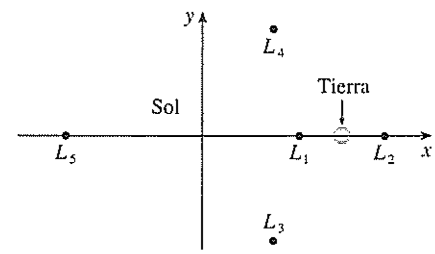
42. En la figura se muestra el Sol ubicado en el origen y la Tierra en el punto $(1, 0)$. (La unidad, en este caso, es la distancia entre los centros de la Tierra y el Sol, llamada *unidad astronómica*: 1 AU $\approx 1.496 \times 10^8$ km.) Existen cinco lugares L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 en este plano de rotación de la Tierra alrededor del Sol donde un satélite permanece estático con aquélla, debido a que las fuerzas que actúan sobre el satélite (incluyendo las atracciones gravitacionales de la Tierra y el Sol) se equilibran entre sí. Estos lugares se conocen como *puntos de libración.* (En uno de estos puntos de libramiento se ha colocado un satélite de investigación solar.) Si m_1 es la masa del Sol, m_2 es la masa de la Tierra, y $r = m_2/(m_1 + m_2)$, resulta que la coordenada x de L_1 es la raíz única de la ecuación de quinto grado

$$p(x) = x^5 - (2 + r)x^4 + (1 + 2r)x^3 - (1 - r)x^2$$
$$+ 2(1 - r)x + r - 1 = 0$$

y la coordenada x de L_2 es la raíz de la ecuación

$$p(x) - 2rx^2 = 0$$

Utilizando el valor $r \approx 3.04042 \times 10^{-6}$, encuentre las ubicaciones de los puntos de libramiento (a) L_1 y (b) L_2.



4.9 ANTIDERIVADAS

Un físico que conoce la velocidad de una partícula podría desear conocer su posición en un instante dado. Un ingeniero que puede medir la cantidad variable a la cual se fuga el agua de un tanque quiere conocer la cantidad que se ha fugado durante cierto periodo. Un biólogo que conoce la rapidez a la que crece una población de bacterias puede interesarse en deducir el tamaño de la población en algún momento futuro. En cada caso, el problema es hallar una función F cuya derivada es una función conocida. Si tal función F existe, se llama antiderivada de f.

DEFINICIÓN Una función F recibe el nombre de **antiderivada** de f sobre un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

Por ejemplo, sea $f(x) = x^2$. No es difícil descubrir una antiderivada de f si utiliza la regla de la potencia. En efecto, si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, después $F'(x) = x^2 = f(x)$. Pero la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ también satisface $G'(x) = x^2$. Por lo tanto, F y G son antiderivadas de f. De hecho, cualquier función de la forma $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, donde C es una constante, es una antiderivada de f. Surge la pregunta: ¿hay otras?

Para contestar la pregunta, refiérase a la sección 4.2 donde se aplicó el teorema del valor medio para demostrar que si dos funciones tienen derivadas idénticas en un intervalo, en tal caso deben diferir por una constante (corolario 4.2.7). Por esto, si F y G son dos antiderivadas cualquiera de f, entonces

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

de modo que $G(x) - F(x) = C$, donde C es una constante. Puede escribir esto como $G(x) = F(x) + C$, de modo que tiene el resultado siguiente.

$\boxed{1}$ **TEOREMA** Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f sobre I es

$$F(x) + C$$

donde C es una constante arbitraria.

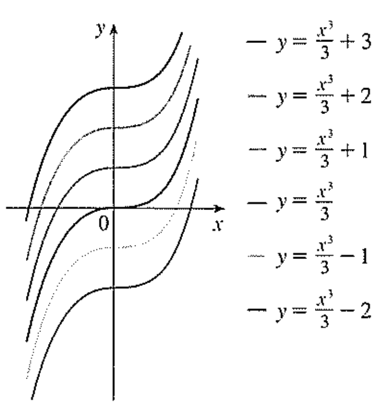


FIGURA 1
Miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = x^2$

De nuevo con la función $f(x) = x^2$, se ve que la antiderivada general de f es $\frac{1}{3}x^3 + C$ Al asignar valores específicos a la constante C, obtiene una familia de funciones cuyas gráficas son traslaciones verticales de una a otra (véase la figura 1). Esto tiene sentido porque cada curva debe tener la misma pendiente en cualquier valor conocido de x.

EJEMPLO 1 Encuentre la antiderivada más general de cada una de las funciones siguientes.
(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ (b) $f(x) = 1/x$ (c) $f(x) = x^n$, $n \neq -1$

SOLUCIÓN

(a) Si $F(x) = -\cos x$, por lo tanto $F'(x) = \operatorname{sen} x$, de manera que una antiderivada de sen x es $-\cos x$. Por el teorema 1, la antiderivada más general es $G(x) = -\cos x + C$.

(b) Con base en lo que se vio en la sección 3.6, recuerde que

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Por consiguiente, en el intervalo $(0, \infty)$ la antiderivada general de $1/x$ es $\ln x + C$. Asimismo,

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

para todo $x \neq 0$. El teorema 1 en tal caso afirma que la antiderivada general de $f(x) = 1/x$ es $\ln |x| + C$ sobre cualquier intervalo que no contenga 0. En particular, esto es verdadero sobre cada uno de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. Por consiguiente, la antiderivada general de f es

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(c) Use la regla de la potencia para descubrir una antiderivada de x^n. De hecho, si $n \neq -1$, después

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

Así, la antiderivada general de $f(x) = x^n$ es

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Esto es válido para $n \geqslant 0$ ya que después $f(x) = x^n$ está definida sobre el intervalo. Si n es negativo (pero $n \neq -1$), sólo es válida sobre cualquier intervalo que no contenga a 0. □

Como en el ejemplo 1, toda fórmula de derivación leída de derecha a izquierda da lugar a una fórmula de antiderivación. En la tabla 2 se enumeran algunas antiderivadas. Cada fórmula de la tabla es verdadera, puesto que la derivada de la función de la columna de la derecha aparece en la columna izquierda. En particular, en la primera fórmula se afirma que la antiderivada de una constante multiplicada por una función es una constante multiplicada por la antiderivada de la función. En la segunda se expresa que la antiderivada de una suma es la suma de las antiderivadas. (Se usa la notación $F' = f$, $G' = g$.)

2 TABLA DE FÓRMULAS DE ANTIDERIVACIÓN

Función	Antiderivada particular	Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$		

■ Para obtener la antiderivada más general, sobre un intervalo, a partir de las particulares de la tabla 2, sume una constante, como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Encuentre todas las funciones g tales que

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

SOLUCIÓN Primero, escriba de nuevo la función dada en la forma siguiente:

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

De esta manera, desea hallar una antiderivada de

$$g'(x) = 4 \operatorname{sen} x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Al usar las fórmulas de la tabla 2 con el teorema 1, obtiene

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -4 \cos x + \tfrac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$ □

En las aplicaciones del cálculo es muy común tener una situación como la del ejemplo 2, donde se requiere hallar una función, dado el conocimiento acerca de sus derivadas. Una ecuación que comprende las derivadas de una función se llama **ecuación diferencial**. Éstas se estudian con cierto detalle en el capítulo 9 pero, por el momento, es posible resolver algunas ecuaciones diferenciales elementales. La solución general de una ecuación diferencial contiene una constante arbitraria (o varias constantes arbitrarias), como en el ejemplo 2. Sin embargo, pueden haber algunas condiciones adicionales que determinan las constantes y, por lo tanto, especifican de manera única la solución.

■ En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f' del ejemplo 3 y de su antiderivada f. Advierta que $f'(x) > 0$, de manera que f siempre es creciente. Observe asimismo que, cuando f' tiene un máximo o un mínimo, f parece que tiene un punto de inflexión. De modo que la gráfica sirve como una comprobación de dicho cálculo.

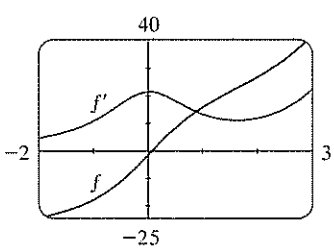


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Encuentre f si $f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$ y $f(0) = -2$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

es
$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1} x + C$$

Para determinar C, use el hecho de que $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \tan^{-1} 0 + C = -2$$

En estos términos, tiene $C = -2 - 1 = -3$, de modo que la solución particular es

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1} x - 3$$ □

V EJEMPLO 4 Encuentre f si $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$, $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$.

SOLUCIÓN La antiderivada general de $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ es

$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$

Si usa una vez más las reglas de antiderivación encuentra que

$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$

Para determinar C y D, utilice las condiciones dadas de que $f(0) = 4$ y $f(1) = 1$. Como $f(0) = 0 + D = 4$, tiene $D = 4$. Puesto que

$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$

tiene $C = -3$. Debido a eso, la función requerida es

$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$ □

Si conoce la gráfica de una función f, sería razonable que fuera capaz de dibujar la gráfica de una antiderivada F. Por ejemplo, suponga que sabe que $F(0) = 1$. Entonces, hay un punto de donde partir, el punto $(0, 1)$, y la dirección en la cual tiene que desplazar su lápiz la proporciona, en cada etapa, la derivada $F'(x) = f(x)$. En el ejemplo siguiente aplique los principios de este capítulo para mostrar cómo graficar F aun cuando no tiene una fórmula para f. Éste sería el caso cuando datos experimentales determinan $f(x)$.

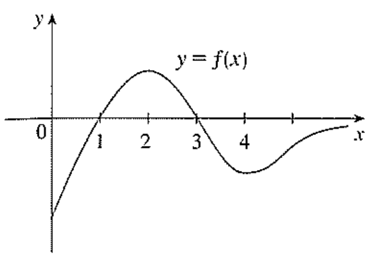


FIGURA 3

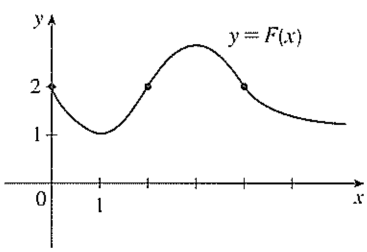


FIGURA 4

EJEMPLO 5 La gráfica de una función f se ilustra en la figura 3. Trace un croquis de una antiderivada F, dado que $F(0) = 2$.

SOLUCIÓN Le guía el hecho de que la pendiente de $y = F(x)$ es $f(x)$. Parta del punto $(0, 2)$ y dibuje F como una función inicialmente decreciente ya que $f(x)$ es negativa cuando $0 < x < 1$. Observe que $f(1) = f(3) = 0$, de modo que F tiene tangentes horizontales cuando $x = 1$ y $x = 3$. En el caso de $1 < x < 3$, $f(x)$ es positiva y de este modo F es creciente. Observe que F tiene un mínimo local cuando $x = 1$ y un máximo local cuando $x = 3$. Para $x > 3$, $f(x)$ es negativa y F es decreciente en $(3, \infty)$. Como $f(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$, la gráfica de F se vuelve más plana cuando $x \to \infty$. También note que $F''(x) = f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $x = 2$, y de negativa a positiva en $x = 4$; así F tiene puntos de inflexión cuando $x = 2$ y $x = 4$. Se aprovecha esta información para trazar la gráfica de la antiderivada en la figura 4. □

MOVIMIENTO RECTILÍNEO

La antiderivación es en particular útil al analizar el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. Recuerde que si el objeto tiene la función de posición $s = f(t)$, en tal caso la función de velocidad es $v(t) = s'(t)$. Esto significa que la función de posición es una antiderivada de la función de velocidad. Del mismo modo, la función de aceleración es $a(t) = v'(t)$, de suerte que la función de velocidad es una antiderivada de la aceleración. Si se conocen la aceleración y los valores iniciales $s(0)$ y $v(0)$, por lo tanto se puede hallar la función de posición al antiderivar dos veces.

EJEMPLO 6 Una partícula se mueve en línea recta y tiene la aceleración dada por $a(t) = 6t + 4$. Su velocidad inicial es $v(0) = -6$ cm/s y su desplazamiento inicial es $s(0) = 9$ cm. Encuentre su función de posición $s(t)$.

SOLUCIÓN Dado que $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, la antiderivada da

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Observe que $v(0) = C$, pero $v(0) = -6$, de tal suerte que $C = -6$ y

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Como $v(t) = s'(t)$, s es la antiderivada de v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Esto da $s(0) = D$. Si $s(0) = 9$, de modo que $D = 9$ y la función de posición requerida es

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$ □

Un objeto cerca de la superficie de la tierra está sujeto a una fuerza gravitacional que produce una aceleración hacia abajo denotada con g. Para el movimiento cercano a la tierra supone que g es constante y su valor es de unos 9.8 m/s^2 (o 32 pies/s^2).

EJEMPLO 7 Se lanza una pelota hacia arriba a una rapidez de 48 pies/s desde el borde de un acantilado a 432 pies por arriba del nivel de la tierra. Encuentre su altura sobre el nivel de la tierra t segundos más tarde. ¿Cuándo alcanza su altura máxima? ¿Cuándo choca contra el nivel de la tierra?

SOLUCIÓN El movimiento es vertical y se elige la dirección positiva como la correspondiente hacia arriba. En un instante t, la distancia arriba del nivel de la tierra $s(t)$ y la velocidad $v(t)$ es decreciente. Por consiguiente, la aceleración debe ser negativa y

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -32$$

Con antiderivadas

$$v(t) = -32t + C$$

Para determinar C, use la información dada de que $v(0) = 48$. Esto da $48 = 0 + C$, de manera que

$$v(t) = -32t + 48$$

La altura máxima se alcanza cuando $v(t) = 0$; es decir, después de 1.5 s. Como $s'(t) = v(t)$, antiderive una vez más y obtiene

$$s(t) = -16t^2 + 48t + D$$

Aplique $s(0) = 432$ y tiene $432 = 0 + D$; por consiguiente

$$s(t) = -16t^2 + 48t + 432$$

La expresión para $s(t)$ es válida hasta que la pelota choca contra el nivel de la tierra. Esto sucede cuando $s(t) = 0$; o sea cuando

$$-16t^2 + 48t + 432 = 0$$

o, equivalentemente, $$t^2 - 3t - 27 = 0$$

Con la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación obtiene

$$t = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

Rechace la solución con signo menos, ya que da un valor negativo para t. En consecuencia, la pelota choca contra el nivel de la tierra después de $3(1 + \sqrt{13})/2 \approx 6.9$ s. □

En la figura 5, se muestra la función de posición de la pelota del ejemplo 7. La gráfica corrobora la conclusión obtenida: la pelota alcanza su altura máxima después de 1.5 s y choca contra el suelo luego de 6.9 s.

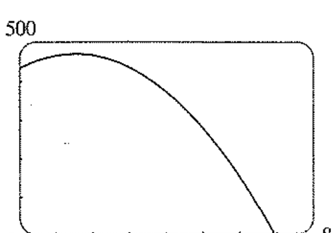


FIGURA 5

4.9 EJERCICIOS

1–20 Encuentre la antiderivada más general de la función. (Compruebe su respuesta mediante la derivación.)

1. $f(x) = x - 3$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$

4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$

5. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$

6. $f(x) = x(2 - x)^2$

7. $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

8. $f(x) = 2x + 3x^{1.7}$

9. $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}$

10. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$

11. $f(x) = \dfrac{10}{x^9}$

12. $g(x) = \dfrac{5 - 4x^3 + 2x^6}{x^6}$

13. $f(u) = \dfrac{u^4 + 3\sqrt{u}}{u^2}$

14. $f(x) = 3e^x + 7\sec^2 x$

15. $g(\theta) = \cos\theta - 5\operatorname{sen}\theta$

16. $f(x) = \operatorname{sen} t + 2\operatorname{senh} t$

17. $f(x) = 5e^x - 3\cosh x$

18. $f(x) = 2\sqrt{x} + 6\cos x$

19. $f(x) = \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{x^4}$

20. $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

21–22 Encuentre la antiderivada F de f que satisfaga la condición dada. Compruebe su respuesta comparando las gráficas de F y f.

21. $f(x) = 5x^4 - 2x^5, \quad F(0) = 4$

22. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}, \quad F(1) = 0$

23–46 Halle f.

23. $f''(x) = 6x + 12x^2$

24. $f''(x) = 2 + x^3 + x^6$

25. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$

26. $f''(x) = 6x + \operatorname{sen} x$

27. $f'''(t) = e^t$

28. $f'''(t) = t - \sqrt{t}$

29. $f'(x) = 1 - 6x, \quad f(0) = 8$

30. $f'(x) = 8x^3 + 12x + 3, \quad f(1) = 6$

31. $f'(x) = \sqrt{x}(6 + 5x), \quad f(1) = 10$

32. $f'(x) = 2x - 3/x^4, \quad x > 0, \quad f(1) = 3$

33. $f'(t) = 2\cos t + \sec^2 t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2, \quad f(\pi/3) = 4$

34. $f'(x) = (x^2 - 1)/x, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(-1) = 0$

35. $f'(x) = x^{-1/3}, \quad f(1) = 1, \quad f(-1) = -1$

36. $f'(x) = 4/\sqrt{1 - x^2}, \quad f(\frac{1}{2}) = 1$

37. $f''(x) = 24x^2 + 2x + 10, \quad f(1) = 5, \quad f'(1) = -3$

38. $f''(x) = 4 - 6x - 40x^3, \quad f(0) = 2, \quad f'(0) = 1$

39. $f''(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta, \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = 4$

40. $f''(t) = 3/\sqrt{t}, \quad f(4) = 20, \quad f'(4) = 7$

41. $f''(x) = 2 - 12x, \quad f(0) = 9, \quad f(2) = 15$

42. $f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 4, \quad f(0) = 8, \quad f(1) = 5$

43. $f''(x) = 2 + \cos x, \quad f(0) = -1, \quad f(\pi/2) = 0$

44. $f''(t) = 2e^t + 3\operatorname{sen} t, \quad f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0$

45. $f''(x) = x^{-2}, \quad x > 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0$

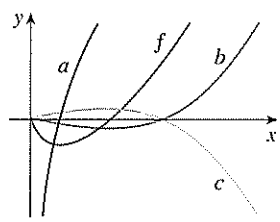
46. $f'''(x) = \cos x, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2, \quad f''(0) = 3$

47. Dado que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 6)$ y que la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ es $2x + 1$, encuentre $f(2)$.

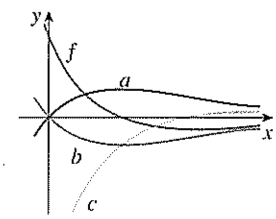
48. Encuentre una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la gráfica de f.

49–50 Se proporciona la gráfica de una función f. ¿Qué gráfica es una antiderivada de f y por qué?

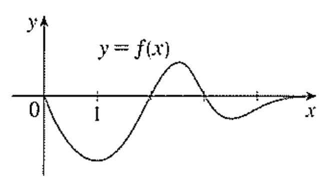
49.



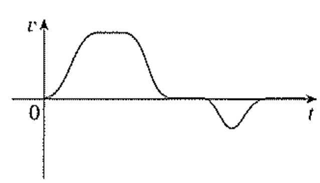
50.



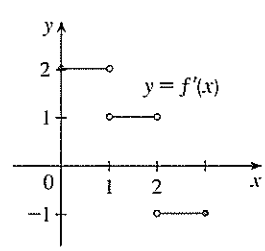
51. Se presenta la gráfica de una función en la figura. Trace un croquis de una antiderivada F, dado que $F(0) = 1$.



52. La gráfica de la función velocidad de un automóvil se ilustra en la figura. Elabore la gráfica de la función posición.



53. Se muestra la gráfica de f'. Dibuje la gráfica de f si ésta es continua y $f(0) = -1$.



54. (a) Use un aparato graficador para dibujar $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}$.
(b) A partir de la gráfica del inciso (a), dibuje una gráfica aproximada de la antiderivada F que satisfaga $F(0) = 1$.
(c) Aplique las reglas de esta sección a fin de hallar una expresión para $F(x)$.
(d) Dibuje F usando la expresión del inciso (c). Compare con su esquema del inciso (b).

55–56 Dibuje una gráfica de f y mediante ella elabore un croquis de la antiderivada que pasa por el origen.

55. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}, \quad -2\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$

56. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2} - 1, \quad -1.5 \leqslant x \leqslant 1.5$

57–62 Una partícula se desplaza de acuerdo con la información dada. Determine la posición de la partícula.

57. $v(t) = \operatorname{sen} t - \cos t, \quad s(0) = 0$

58. $v(t) = 1.5\sqrt{t}, \quad s(4) = 10$

59. $a(t) = t - 2, \quad s(0) = 1, \quad v(0) = 3$

60. $a(t) = \cos t + \operatorname{sen} t, \quad s(0) = 0, \quad v(0) = 5$

61. $a(t) = 10 \operatorname{sen} t + 3 \cos t, \quad s(0) = 0, \quad s(2\pi) = 12$

62. $a(t) = t^2 - 4t + 6,, \quad s(0) = 0, \quad s(1) = 20$

63. Se deja caer una piedra desde la plataforma superior de observación (la plataforma espacial) de la Torre CN, 450 m arriba del nivel de la tierra.
(a) Encuentre la distancia de la piedra arriba del nivel de la tierra en el instante t.
(b) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al nivel de la tierra?
(c) ¿Con qué velocidad choca contra el nivel de la tierra?
(d) Si la piedra se lanza hacia arriba a una rapidez de 5 m/s, ¿cuánto tarda en llegar el nivel de la tierra?

64. Demuestre que para el movimiento en línea recta con aceleración constante a, velocidad inicial v_0 y desplazamiento inicial s_0, el desplazamiento después del tiempo t es.

$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

65. Se proyecta un objeto hacia arriba con velocidad inicial v_0 metros por segundo, desde un punto a s_0 metros arriba del nivel de la tierra. Demuestre que

$$[v(t)]^2 = v_0^2 - 19.6[s(t) - s_0]$$

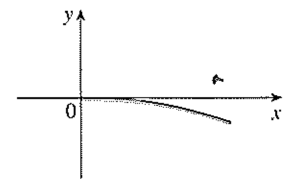
66. Se lanzan dos pelotas hacia arriba desde el borde del acantilado del ejemplo 7. La primera con una rapidez de 48 pies/s y la segunda se arroja 1 s más tarde con una rapidez de 24 pies/s. ¿En algún momento rebasa una a la otra?

67. Se dejó caer una piedra de un desfiladero y chocó contra el nivel de la tierra con una rapidez de 120 pies/s. ¿Cuál es la altura del desfiladero?

68. Si un clavadista con masa m está en el borde de una plataforma de clavados con longitud L y densidad lineal ρ, después la plataforma adopta la forma de una curva $y = f(x)$, donde

$$EIy'' = mg(L - x) + \tfrac{1}{2}\rho g(L - x)^2$$

E e I son constantes positivas que dependen del material con que está hecha la plataforma y g (< 0) es la aceleración debido a la gravedad.
(a) Halle una expresión para la forma de la curva.
(b) Use $f(L)$ para estimar la distancia debajo de la horizontal al borde de la plataforma.



69. Una compañía estima que el costo marginal (en dólares por artículo) de producir x artículos es de $1.92 - 0.002x$. Si el costo de producción de un artículo es de \$562, encuentre el costo de producir 100 artículos.

70. La densidad lineal de una varilla con una longitud de 1 m se expresa por medio de $\rho(x) = 1/\sqrt{x}$ en gramos por centímetro, donde x se mide en centímetros desde uno de los extremos de la varilla. Encuentre la masa de esta última.

71. Dado que las gotas de lluvia crecen a medida que caen, su área superficial aumenta y, por lo tanto, se incrementa la resistencia a su caída. Una gota de lluvia tiene una velocidad inicial hacia abajo de 10 m/s y su aceleración hacia abajo es

$$a = \begin{cases} 9 - 0.9t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

Si al inicio la gota de lluvia está a 500 m arriba de la superficie de la tierra, ¿cuánto tarda en caer?

72. Un vehículo se desplaza a 50 millas/h cuando aplica los frenos, lo que produce una desaceleración constante de 22 pies/s^2. ¿Cuál es la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse?

73. ¿Que aceleración constante se requiere para incrementar la rapidez de un vehículo desde 30 millas/h hasta 50 millas/h en 5 s?

74. Un automóvil frenó con una desaceleración constante de 16 pies/s^2, lo que genera antes de detenerse unas marcas de deslizamiento que miden 200 pies. ¿Qué tan rápido se desplazaba el vehículo cuando se aplicaron los frenos?

75. Un automóvil se desplaza a 100 km/h cuando el conductor ve un accidente 80 m más adelante y aplica los frenos apresuradamente. ¿Qué desaceleración constante se requiere para detener el vehículo a tiempo de evitar chocar con los vehículos accidentados?

76. Un modelo de cohete se dispara verticalmente hacia arriba desde el reposo. Su aceleración durante los primeros tres segundos es $a(t) = 60t$, momento en que se agota el combustible y se convierte en un cuerpo en "caída libre". Después de 14 segundos, se abre el paracaídas del cohete y la velocidad (hacia abajo) disminuye linealmente hasta -18 pies/s en 5 s. Entonces el cohete "flota" hasta el piso a esa velocidad.
(a) Determine la función de posición s y la función de velocidad v (para todos los tiempos t). Dibuje s y v.

(b) ¿En qué momento el cohete alcanza su altura máxima y cuál es esa altura?
(c) ¿En qué momento aterriza?

77. Un tren "bala" de magnitud de velocidad alta acelera y desacelera a una proporción de 4 pies/s^2. Su rapidez de crucero máxima es de 90 mi/h.
(a) ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer el tren si se acelera desde el reposo hasta que alcanza su rapidez de crucero y, a continuación, corre a esa rapidez durante 15 minutos?
(b) Suponga que el tren parte del reposo y debe detenerse por completo en 15 minutos. ¿Cuál es la distancia máxima que puede recorrer en estas condiciones?
(c) Encuentre el tiempo mínimo que tarda el tren en viajar entre dos estaciones consecutivas que se encuentran a 45 millas de distancia.
(d) El viaje de una estación a la siguiente dura 37.5 minutos. ¿Cuál es la distancia entre las estaciones?

4 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Explique la diferencia entre máximo absoluto y máximo local. Ilustre por medio de un esquema.

2. (a) ¿Qué dice el teorema del valor extremo?
(b) Explique cómo funciona el método del intervalo cerrado.

3. (a) Enuncie el teorema de Fermat.
(b) Defina un número crítico de f.

4. (a) Enuncie el teorema de Rolle.
(b) Enuncie el teorema del valor medio y proporcione una interpretación geométrica.

5. (a) Enuncie la prueba de creciente/decreciente.
(b) ¿Que significa que f es cóncava hacia arriba en un intervalo I?
(c) Enuncie la prueba de la concavidad.
(d) ¿Qué son los puntos de inflexión? o Cómo puede hallar los?

6. (a) Enuncie la prueba de la primera derivada.
(b) Enuncie la prueba de la segunda derivada.
(c) ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas relativas de estas pruebas?

7. (a) ¿Qué dice la regla de l'Hospital?
(b) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene un producto $f(x)g(x)$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$?
(c) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene una diferencia $f(x) - g(x)$ donde $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$ cuando $x \to a$?
(d) ¿Cómo puede usar la regla de l'Hospital si tiene una potencia $[f(x)]^{g(x)}$ donde $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$?

8. Si tiene una calculadora graficadora o una computadora, ¿por qué necesita el cálculo para dibujar una función?

9. (a) Dada una aproximación inicial x_1 a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, explique geométricamente, mediante un diagrama, ¿cómo se obtiene la segunda aproximación x_2 en el método de Newton?
(b) Escriba una expresión para x_2 en términos de x_1, $f(x_1)$ y $f'(x_1)$.
(c) Escriba una expresión para x_{n+1} en términos de x_n, $f(x_n)$ y $f'(x_n)$.
(d) ¿Bajo qué circunstancias es probable que el método de Newton falle o funcione muy despacio?

10. (a) ¿Qué es una antiderivada de una función f?
(b) Suponga que F_1 y F_2 son antiderivadas de f sobre un intervalo I. ¿Cómo se relacionan F_1 y F_2?

PREGUNTAS DE VERDADERO O FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si $f'(c) = 0$ después f tiene un máximo o un mínimo locales en c.

2. Si f tiene un valor mínimo absoluto en c, en tal caso $f'(c) = 0$.

3. Si f es continua sobre (a, b) en seguida f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y k en (a, b).

4. Si f es derivable y $f(-1) = f(1)$, por lo tanto existe un número c tal que $|c| < 1$ y $f'(c) = 0$.

5. Si $f'(x) < 0$ para $1 < x < 6$, en consecuencia f es decreciente sobre $(1, 6)$.

6. Si $f''(2) = 0$, luego $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$.

7. Si $f'(x) = g'(x)$ para $0 < x < 1$, a continuación $f(x) = g(x)$ para $0 < x < 1$.

8. Existe una función f tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) > 1$ para todo x.

9. Existe una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para todo x.

10. Existe una función f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para todo x.

11. Si f y g son crecientes en un intervalo I, entonces $f + g$ es creciente en I.

12. Si f y g son crecientes en un intervalo I, por consiguiente $f - g$ es creciente en I.

13. Si f y g son crecientes en un intervalo I, por lo tanto fg es creciente en I.

14. Si f y g son funciones crecientes positivas en un intervalo I, después fg es creciente en I.

15. Si f es creciente y $f(x) > 0$ en I, después $g(x) = 1/f(x)$ es decreciente en I.

16. Si f es par, en consecuencia f' es par.

17. Si f es periódico, después f' es periódica.

18. La antiderivada más general de $f(x) = x^{-2}$ es

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

19. Si $f'(x)$ existe y es diferente de cero para todo x, en tal caso $f(1) \neq f(0)$.

20. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x} = 1$

EJERCICIOS

1–6 Encuentre los valores extremos locales y absolutos de la función sobre el intervalo dado.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, \quad [2, 4]$

2. $f(x) = x\sqrt{1 - x}, \quad [-1, 1]$

3. $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 + 1}, \quad [-2, 2]$

4. $f(x) = (x^2 + 2x)^3, \quad [-2, 1]$

5. $f(x) = x + \operatorname{sen} 2x, \quad [0, \pi]$

6. $f(x) = (\ln x)/x^2, \quad [1, 3]$

7–14 Obtenga el límite.

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan \pi x}{\ln(1 + x)}$

8. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 + x}$

9. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

10. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{4x} - 1 - 4x}{x^2}$

11. $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-x}$

12. $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$

13. $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

14. $\lim_{x \to (\pi/2)^-} (\tan x)^{\cos x}$

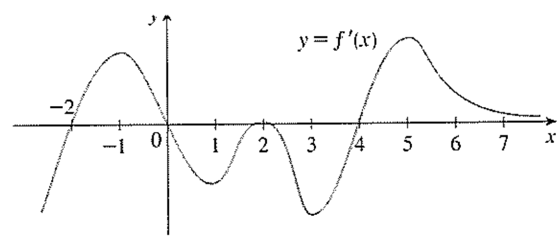
15–17 Trace la gráfica de una función que cumple con las condiciones dada.

15. $f(0) = 0, \quad f'(-2) = f'(1) = f'(9) = 0,$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 6} f(x) = -\infty,$
$f'(x) < 0$ en $(-\infty, -2)$, $(1, 6)$ y $(9, \infty)$,
$f'(x) > 0$ en $(-2, 1)$ y $(6, 9)$,
$f''(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y $(12, \infty)$,
$f''(x) < 0$ en $(0, 6)$ y $(6, 12)$

16. $f(0) = 0, \quad f$ es continua y par
$f'(x) = 2x$ si $0 < x < 1, \quad f'(x) = -1$ si $1 < x < 3,$
$f'(x) = 1$ si $x > 3$

17. f es impar $\quad f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$,
$f'(x) > 0$ para $x > 2, \quad f''(x) > 0$ para $0 < x < 3$,
$f''(x) < 0$ para $x > 3, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = -2$

18. En la figura se ilustra la gráfica de la *derivada* f' de una función f.
(a) ¿En qué intervalos f es creciente o decreciente?
(b) ¿Para qué valores de x la función f tiene un máximo local o un mínimo local?
(c) Trace la gráfica de f''.
(d) Trace la gráfica posible de f.



19–34 Mediante los criterios de la sección 4.5 trace la curva.

19. $y = 2 - 2x - x^3$

20. $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$

21. $y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$

22. $y = \frac{1}{1 - x^2}$

23. $y = \frac{1}{x(x - 3)^2}$

24. $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x + 2)^2}$

25. $y = x^2/(x + 8)$

26. $y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}$

27. $y = x\sqrt{2 + x}$

28. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$

29. $y = \operatorname{sen}^2 x - 2 \cos x$

30. $y = 4x - \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

31. $y = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$

32. $y = e^{2x - x^2}$

33. $y = xe^{-2x}$

34. $y = x + \ln(x^2 + 1)$

35–38 Produzca gráficas de f que revelen todos los aspectos importantes de la curva. Use las gráficas de f' y f'' para estimar los intervalos de incremento y decremento, los valores extremos los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión. En el ejercicio 35 aplique el cálculo para determinar estas cantidades con exactitud.

35. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

36. $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + x + 3}$

37. $f(x) = 3x^6 - 5x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 2$

38. $f(x) = x^2 + 6.5 \operatorname{sen} x, \quad -5 \leq x \leq 5$

39. Trace la gráfica de $f(x) = e^{-1/x^2}$ en un rectángulo de visualización en que aparezcan todos los aspectos principales de la función. Estime los puntos de inflexión. En seguida, aplique el cálculo para determinarlos con exactitud.

40. (a) Dibuje la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$.
(b) Explique la forma de la gráfica calculando los límites de $f(x)$ cuando x tiende a ∞, $-\infty$, 0^+ y 0^-.
(c) Use la gráfica de f para estimar las coordenadas de los puntos de inflexión.
(d) Utilice su CAS para calcular y trazar la gráfica de f''.
(e) Con la gráfica del inciso (d) estime el punto de inflexión con más exactitud.

41–42 Utilice las gráficas de f, f' y f'' para estimar la coordenada x de los puntos máximo y mínimo y los puntos de inflexión de f.

41. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

42. $f(x) = e^{-0.1x} \ln(x^2 - 1)$

43. Investigue la familia de funciones de $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x + C)$. ¿Cuáles características tienen los miembros de esta familia en común? ¿En qué difieren? ¿Para cuáles valores de C es f continua sobre $(-\infty, \infty)$? ¿Para cuáles valores de C f no tiene gráfica? ¿Qué sucede cuando $C \to \infty$?

44. Investigue la familia de funciones $f(x) = cxe^{-cx^2}$. ¿Qué le ocurre a los puntos máximos y mínimos y a los puntos de inflexión al cambiar c? Ilustre sus conclusiones dibujando varios miembros de la familia.

45. Demuestre que la ecuación $3x + 2\cos x + 5 = 0$ posee exactamente una raíz real.

46. Suponga que f es continua en $[0, 4]$, $f(0) = 1$, y $2 \leq f'(x) \leq 5$ para toda x en $(0, 4)$. Demuestre que $9 \leq f(4) \leq 21$.

47. Por medio del teorema del valor medio a la función $f(x) = x^{1/5}$ en el intervalo $[32, 33]$, demuestre que

$$2 < \sqrt[5]{33} < 2.0125$$

48. ¿Para cuáles valores de las constantes a y b se tiene que $(1, 6)$ es un punto de inflexión de la curva $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$?

49. Sea $g(x) = f(x^2)$ donde f es doblemente derivable para todo x, $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$ y f es cóncava hacia abajo sobre $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba sobre $(0, \infty)$.
(a) ¿En cuáles números g tiene un valor extremo?
(b) Discuta la concavidad de g.

50. Halle dos números enteros positivos tales que la suma del primer número y cuatro veces el segundo sea 1 000 y el producto de los números sea lo más grande posible.

51. Demuestre que la distancia más corta desde el punto (x_1, y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

52. Encuentre el punto sobre la hipérbola $xy = 8$ que está más cercano al punto $(3, 0)$.

53. Halle el área más pequeña posible de un triángulo isósceles que está circunscrito a un círculo de radio r.

54. Encuentre el volumen del cono circular más grande que puede inscribirse en una esfera de radio r.

55. En ΔABC, D queda en AB, $CD \perp AB$, $|AD| = |BD| = 4$ cm y $|CD| = 5$ cm. ¿Dónde se debe situar un punto P sobre CD de tal modo que la suma $|PA| + |PB| + |PC|$ sea mínima?

56. Resuelva el ejercicio 55 cuando $|CD| = 2$ cm.

57. La velocidad de una ola de longitud L en agua profunda es

$$v = K\sqrt{\frac{L}{C} + \frac{C}{L}}$$

donde K y C son constantes positivas conocidas. ¿Cuál es la longitud de la ola que da la velocidad mínima?

58. Se va a construir un tanque metálico de almacenamiento con volumen V, en forma de un cilindro circular recto rematado por un hemisferio. ¿Cuáles dimensiones requerirán la cantidad mínima de metal?

59. Un equipo de hockey juega en una arena con una capacidad de 15 000 espectadores. Con el precio del boleto fijado en \$12, la asistencia promedio en un juego es de 11 000 espectadores. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que disminuya el precio del boleto, la asistencia promedio aumentará 1 000. ¿Cómo deben de fijar los propietarios del equipo el precio del boleto para maximizar sus ingresos provenientes de la venta de boletos?

60. Un fabricante determina que el costo de fabricar x unidades de un artículo es $C(x) = 1\,800 + 25x - 0.2x^2 + 0.001x^3$ y la función de demanda es $p(x) = 48.2 - 0.03x$.
(a) Dibuje las funciones de costo y de ingreso y úselas para estimar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.
(b) Aplique el cálculo a fin de hallar el nivel de producción para obtener la utilidad máxima.
(c) Estime el nivel de producción que minimice el costo promedio.

61. Aplique el método de Newton para calcular la raíz de la ecuación $x^5 - x^4 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ con seis cifras decimales.

62. Aplique el método de Newton para hallar todas las raíces de la ecuación $\operatorname{sen} x = x^2 - 3x + 1$ corrija hasta seis cifras decimales.

63. Aplique el método de Newton para hallar el valor máximo absoluto de la función $f(x) = \cos t + t - t^2$, correcto hasta ocho cifras decimales.

64. Aplique las normas de la sección 4.5 para trazar la curva $y = x \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Recurra al método de Newton si es necesario.

65–72 Determine f.

65. $f'(x) = \cos x - (1 - x^2)^{-1/2}$

66. $f'(x) = 2e^x + \sec x \tan x$

67. $f'(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

68. $f'(x) = \operatorname{senh} x + 2 \cosh x$, $f(0) = 2$

69. $f'(t) = 2t - 3 \operatorname{sen} t$, $f(0) = 5$

70. $f'(u) = \dfrac{u^2 + \sqrt{u}}{u}$, $f(1) = 3$

71. $f''(x) = 1 - 6x + 48x^2$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$

72. $f''(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$, $f(0) = 2$, $f(1) = 0$

73–74 Se está moviendo una partícula con la información que se proporciona. Halle la posición de la partícula.

73. $v(t) = 2t - 1/(1 + t^2)$, $s(0) = 1$

74. $a(t) = \operatorname{sen} t + 3 \cos t$, $s(0) = 0$, $v(0) = 2$

---

75. (a) Si $f(x) = 0.1e^x + \operatorname{sen} x$, $-4 \leq x \leq 4$, use una gráfica de f para dibujar una gráfica aproximada de la antiderivada F de f que satisfaga $F(0) = 0$.
(b) Encuentre una expresión para $F(x)$.
(c) Dibuje F con la expresión del inciso (b). Compare con su esquema del inciso (a).

76. Investigue la familia de curvas dada por

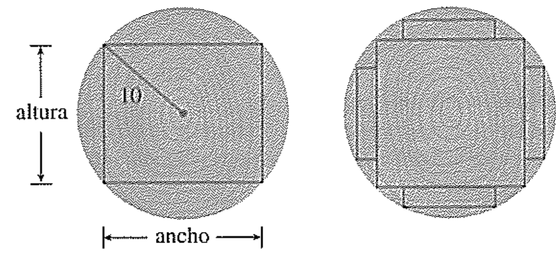
$$f(x) = x^4 + x^3 + cx^2$$

En particular, determine el valor de transición de c en que cambia la cantidad de números críticos y el valor de transición en que varía el número de puntos de inflexión. Ilustre las formas posibles con gráficas.

77. Se deja caer un recipiente metálico desde un helicóptero a 500 m arriba de la superficie de la tierra. Su paracaídas no se abre, pero el recipiente ha sido diseñado para soportar una velocidad de impacto de 100 m/s. ¿Se reventará o no?

78. En una carrera de automóviles a lo largo de una pista recta, el auto A deja atrás dos veces al vehículo B. Demuestre que en algún momento en la carrera las aceleraciones de los automóviles fueron iguales. Plantee las suposiciones que haga.

79. Se va a cortar una viga rectangular a partir de un tronco cilíndrico que tiene un radio de 10 pulgadas.
(a) Demuestre que la viga de área máxima de sección transversal es cuadrada.
(b) Se van a cortar cuatro tablones rectangulares de las cuatro secciones del tronco que quedan después de cortar la viga cuadrada. Determine las dimensiones de los tablones que tendrán el área máxima de la sección transversal.
(c) Suponga que la resistencia de la viga rectangular es proporcional al producto de su ancho y al cuadrado de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga más fuerte que se puede cortar a partir del tronco cilíndrico



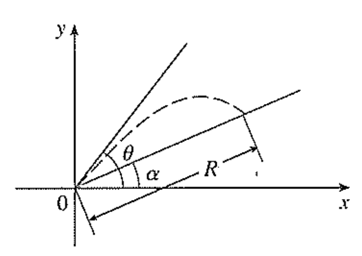
80. Si se dispara un proyectil a una velocidad inicial v a un ángulo de inclinación θ a partir de la horizontal, por lo tanto su trayectoria, despreciando la resistencia del aire, es la parábola

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v^2\cos^2\theta}x^2 \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(a) Suponga que el proyectil se dispara desde la base de un plano inclinado que forman un ángulo α, $\alpha > 0$, respecto de la horizontal, como se muestra en la figura. Demuestre que el alcance del proyectil, medido hacia arriba de la pendiente, se expresa mediante

$$R(\theta) = \frac{2v^2\cos\theta\ \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

(b) Determine θ de modo que R sea un máximo.
(c) Suponga que el plano forma un ángulo α hacia *abajo* de la horizontal. Determine el alcance R en este caso y el ángulo al cual debe dispararse el proyectil para maximizar R.



81. Demuestre que, para $x > 0$,

$$\frac{x}{1 + x^2} < \tan^{-1}x < x$$

82. Trace la gráfica de una función f tal que $f'(x) < 0$ para toda x, $f''(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f''(x) < 0$ para $|x| < 1$ y $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) + x] = 0$.

Uno de los principios más importantes en la solución de los problemas es la *analogía* (véase la página 76). Si tiene dificultades para comenzar un problema, conviene resolver un problema semejante más sencillo. En el ejemplo siguiente se ilustra el principio. Cubra la sulución e intente solucionarlo primero.

EJEMPLO 1 Si x, y y z son números positivos pruebe que

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} \geqslant 8$$

SOLUCIÓN Puede resultar difícil empezar con este problema. (Algunos estudiantes lo han atacado multiplicando el numerador, pero eso sólo genera un lío.) Intente pensar en un problema similar, más sencillo. Cuando intervienen varias variables, a menudo resulta útil pensar en un problema análogo con menos variables. En el presente caso, puede reducir el número de variables de tres a una y probar la desigualdad análoga

$$\boxed{1} \qquad \frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \quad \text{para} \quad x > 0$$

De hecho, si puede probar (1), entonces se deduce la desigualdad deseada porque

$$\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz} = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)\left(\frac{y^2+1}{y}\right)\left(\frac{z^2+1}{z}\right) \geqslant 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

La clave para probar (1) es reconocer que es una versión disfrazada de un problema de mínimo. Si hace

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x} \qquad x > 0$$

entonces $f'(x) = 1 - (1/x^2)$, de tal suerte que $f'(x) = 0$ cuando $x = 1$. Asimismo, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 1$, y $f'(x) > 0$ para $x > 1$. Por consiguiente, el valor mínimo absoluto de f es $f(1) = 2$. Esto significa que

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \qquad \text{para todos los valores positivos de } x$$

y, como se mencionó con anterioridad, por multiplicación se infiere la desigualdad dada.

La desigualdad (1) pudo probarse sin cálculo. De hecho, si $x > 0$

$$\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2 \iff x^2 + 1 \geqslant 2x \iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$$

$$\iff (x-1)^2 \geqslant 0$$

Debido a que la última desigualdad obviamente es verdadera, la primera también lo es. □

Retome el concepto

¿Qué ha aprendido a partir de la solución de este ejemplo?

- Para resolver un problema que comprende varias variables, podría ayudar resolver un problema semejante con una variable
- Cuando intente probar una desigualdad, podría ayudar si piensa en ella como en un problema de máximo y mínimo.

PROBLEMAS ADICIONALES

PROBLEMAS

1. Si un rectángulo tiene su base sobre el eje x y dos vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$, demuestre que el rectángulo tiene el área más grande posible cuando los dos vértices están en los puntos de inflexión de la curva.
2. Demuestre que $|\operatorname{sen} x - \cos x| \leqslant \sqrt{2}$ para todo x.
3. Demuestre que para todos los valores positivos de x y y,

$$\frac{e^{x+y}}{xy} \geqslant e^2$$

4. Demuestre que $x^2y^2(4 - x^2)(4 - y^2) \leqslant 16$ para todos los números x y y tales que $|x| \leqslant 2$ y $|y| \leqslant 2$.
5. Si a, b, c y d son constantes tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax^2 + \operatorname{sen} bx + \operatorname{sen} cx + \operatorname{sen} dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

halle el valor de la suma $a + b + c + d$.

6. Encuentre el punto sobre la parábola $y = 1 - x^2$ en el cual la recta tangente corta del primer cuadrante el triángulo con el área más pequeña.
7. Encuentre los puntos más altos y más bajos sobre la curva $x^2 + xy + y^2 = 12$.
8. Esquematice el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $|x + y| \leqslant e^x$.

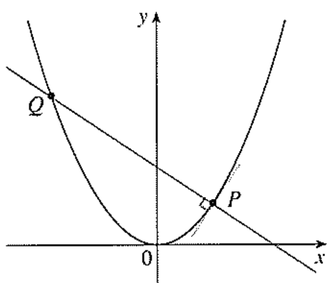


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

9. Si $P(a, a^2)$ es cualquier punto en la parabola $y = x^2$, excepto en el origen, sea Q el punto donde la línea normal cruza la parábola una vez más. Demuestre que el segmento de línea PQ tiene la longitud más corta posible cuando $a = 1/\sqrt{2}$
10. ¿Para que valores de c la curva $y = cx^3 + e^x$ tiene puntos de inflexión?
11. Determine los valores del número a para los cuales la función f no tiene números críticos.

$$f(x) = (a^2 + a - 6) \cos 2x + (a - 2)x + \cos 1$$

12. Trace la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que

$$2xy \leqslant |x - y| \leqslant x^2 + y^2$$

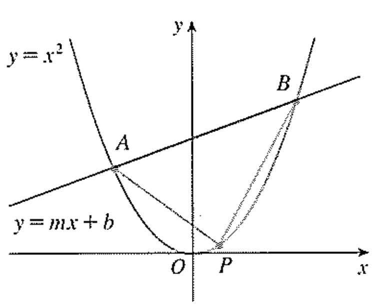


FIGURA PARA EL PROBLEMA 13

13. La recta $y = mx + b$ corta a la parábola $y = x^2$ en los puntos A y B (véase la figura). Determine el punto P en el arco AOB de la parábola que maximiza el área del triángulo PAB.
14. $ABCD$ es un trozo cuadrado de papel con lados de longitud 1 m. Se dibuja un cuarto de círculo desde B hasta D, con centro en A. El trozo de papel se dobla a lo largo de EF con E sobre AB y F sobre AD, de suerte que A cae sobre el cuarto de círculo. Determine las áreas máxima y mínima que podría tener el triángulo AEF.
15. ¿Para qué números positivos a la curva $y = a^x$ corta a la recta $y = x$?
16 ¿Para qué valores de a es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + a}{x - a}\right)^x = e$$

17. Sea $f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_n \operatorname{sen} nx$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales y n es un entero positivo. Si sabe que $|f(x)| \leqslant |\operatorname{sen} x|$ para toda x, demuestre que

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$$

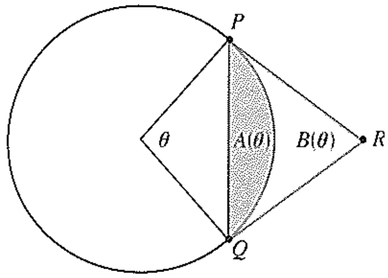


FIGURA PARA EL PROBLEMA 18

18. Un arco PQ de un círculo subtiende un ángulo central θ, como en la figura. Sea $A(\theta)$ el área entre la cuerda PQ y el arco PQ. Sea $B(\theta)$ el área entre las rectas tangentes PR, QR y el arco. Encuentre

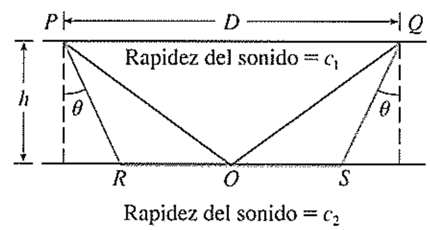
$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$

19. La velocidad del sonido c_1 en una capa superior y c_2 en una capa inferior de roca y el espesor h de la capa superior se pueden calcular mediante la exploración sísmica si la velocidad del sonido en la capa inferior es mayor que la velocidad en la capa superior. Se hace detonar una carga de dinamita en el punto P y las señales transmitidas se registran en el punto Q, el cual está a una distancia D de P. La primera señal que llega a Q viaja por la superficie y tarda T_1 segundos. La siguiente señal viaja desde el punto P al punto R, desde R a S en la capa inferior y luego a Q, lo cual le lleva T_2 segundos. La tercera señal es reflejada por la capa inferior en el punto medio O de RS y tarda T_3 segundos en llegar a Q.

(a) Exprese T_1, T_2 y T_3 en función de D, h, c_1, c_2 y θ.

(b) Demuestre que T_2 es un mínimo cuando sen $\theta = c_1/c_2$.

(c) Suponga que $D = 1$ km, $T_1 = 0.26$ s, $T_2 = 0.32$ s, $T_3 = 0.34$ s. Calcule c_1, c_2 y h.



Nota: Los geofísicos usan esta técnica cuando estudian la estructura de la corteza terrestre, ya sea con fines de detectar petróleo o enormes grietas en las rocas.

20. ¿Para qué valores de c existe una recta que cruce la curva $y = x^4 + cx^3 + 12x^2 - 5x + 2$ en cuatro puntos diferentes?

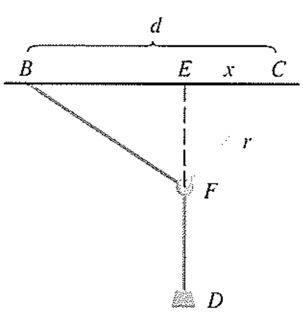


FIGURA PARA EL PROBLEMA 21

21. Uno de los problemas que planteó el marqués de l'Hospital en su libro de texto *Analyse des Infiniment Petits* concierne a una polea conectada al techo de una habitación en un punto C mediante una cuerda de longitud r. En otro punto B sobre el techo, a una distancia d de C (donde $d > r$), una cuerda de longitud ℓ se conecta a la polea y pasa por ésta en F y se conecta a un peso W. El peso se libera y alcanza el reposo en su posición de equilibrio D. Tal y como argumentó l'Hospital, esto sucede cuando la distancia $|ED|$ se maximiza. Demuestre que cuando el sistema alcanza el punto de equilibrio, el valor de x es

$$\frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)$$

observe que esta expresión es independiente tanto de W como de ℓ.

22. Dada una esfera con radio r, encuentre la altura de una pirámide de volumen mínimo cuya base es un cuadrado y cuyas caras base y triangular son tangentes a la esfera. ¿Qué sucede si la base de la pirámide es un n-gono regular? (Un n-gono regular es un polígono con n lados y ángulos iguales.) (Use el hecho de que el volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}Ah$, donde A es el área de la base.)

23. Suponga que una bola de nieve se funde de tal modo que su volumen disminuye en proporción directa a su área superficial. Si tarda tres horas en que la bola disminuya a la mitad de su volumen original, ¿cuánto tardará la bola en fundirse totalmente?

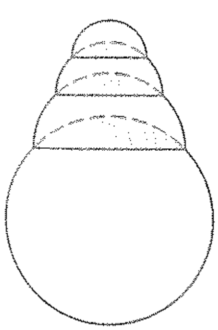
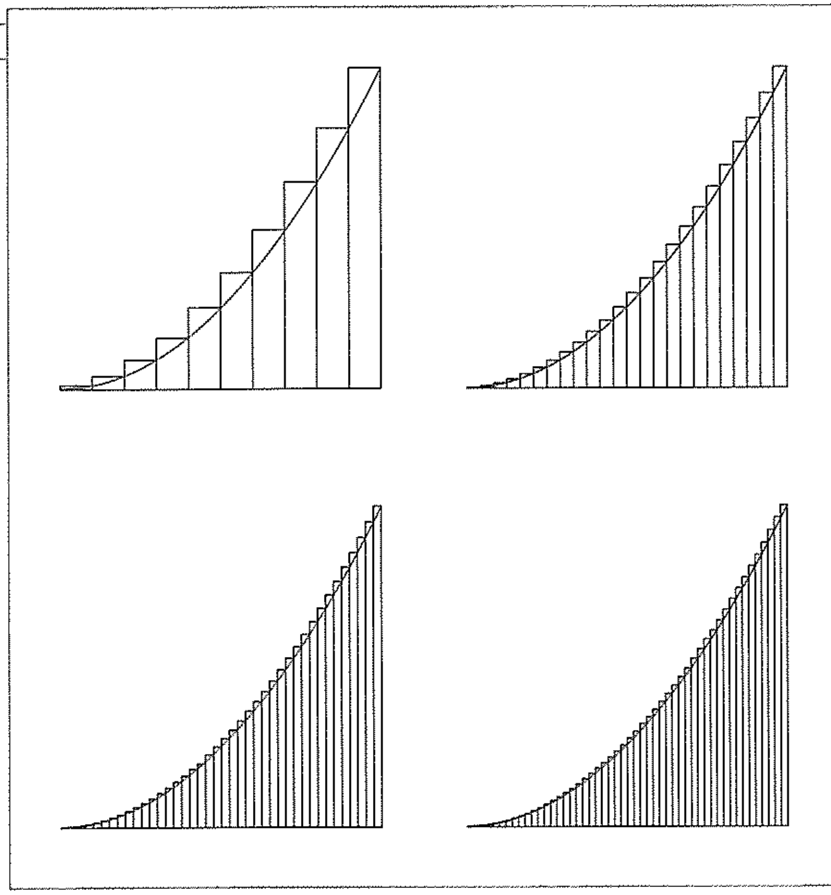


FIGURA PARA EL PROBLEMA 24

24. Una burbuja hemiesférica se coloca sobre una burbuja esférica de radio 1. Después, una burbuja hemisférica más pequeña se coloca sobre la primera. Este proceso prosigue hasta que se forman n cámaras, incluso la esfera. (La figura muestra el caso $n = 4$.) Utilice la inducción matemática para probar que la altura máxima de cualquier torre de burbujas con n cámaras es $1 + \sqrt{n}$.

5

INTEGRALES



Para calcular un área aproxime una región mediante una gran cantidad de rectángulos. El área exacta es el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos.

En el capítulo 2 utilizó los problemas de la tangente y de la velocidad para introducir la derivada, la cual constituye la idea central del cálculo diferencial. De manera muy semejante, en este capítulo se empieza con los problemas del área y de la distancia y se utilizan para formular la idea de integral definida, la cual representa el concepto básico del cálculo integral. En los capítulos 6 y 8 verá cómo usar la integral para resolver problemas referentes a volúmenes, longitudes de curvas, predicciones sobre población, gasto cardiaco, fuerzas sobre la cortina de una presa, trabajo, superávit del consumidor y béisbol, entre muchos otros.

Existe una conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con la derivada y, en este capítulo, verá que simplifica en gran parte la solución de muchos problemas.

5.1 ÁREAS Y DISTANCIAS

Ahora es un buen momento para leer (o volver a leer) *Presentación preliminar del cálculo* (véase la página 2), que analiza las ideas unificadoras del cálculo y le ayuda a situarse en la perspectiva de dónde está y hacia dónde va.

En esta sección se descubre que al intentar hallar el área debajo de una curva o la distancia recorrida por un automóvil, se finaliza con el mismo tipo especial de límite.

EL PROBLEMA DEL ÁREA

Empiece por intentar resolver el *problema del área*: hallar el área de la región S que está debajo de la curva $y = f(x)$, desde a hasta b. Esto significa que S (figura 1) está limitada por la gráfica de una función continua f [donde $f(x) \geqslant 0$], las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y el eje x.

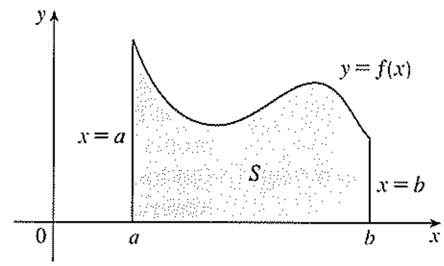


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Al intentar resolver el problema del área, debe preguntarse: ¿cuál es el significado de la palabra *área*? Esta cuestión es fácil de responder para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, se define como el producto del largo y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base multiplicada por la altura. El área de un polígono se encuentra al dividirlo en triángulos (figura 2) y sumar las áreas de esos triángulos.

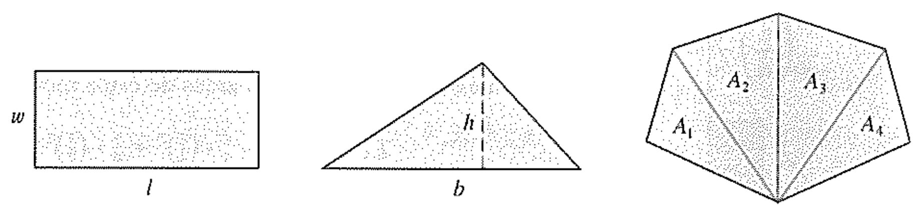


FIGURA 2 $A = lw$ $\quad A = \frac{1}{2}bh \quad$ $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tiene una idea intuitiva de lo que es el área de una región. Pero parte del problema del área es hacer que esta idea sea precisa dando una definición exacta de área.

Recuerde que al definir una tangente, primero se obtuvo una aproximación de la pendiente de la recta tangente por las pendientes de rectas secantes y, a continuación tomó el límite de estas aproximaciones. Siga una idea similar para las áreas. En primer lugar obtenga una aproximación de la región S por medio de rectángulos y después tome el límite de las áreas de estos rectángulos, como el incremento del número de rectángulos En el ejemplo siguiente se ilustra el procedimiento.

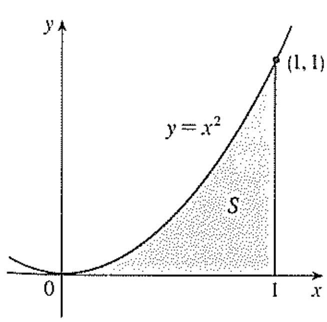


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Use rectángulos para estimar el área debajo de la parábola $y = x^2$, desde 0 hasta 1 (la región parabólica S se ilustra en la figura 3).

SOLUCIÓN En primer lugar, el área de S debe encontrarse en alguna parte entre 0 y 1, porque S está contenida en un cuadrado cuya longitud del lado es 1 pero, en verdad, puede lograr algo mejor que eso. Suponga que divide S en cuatro franjas S_1, S_2, S_3 y S_4, al trazar las rectas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$ como en la figura 4(a).

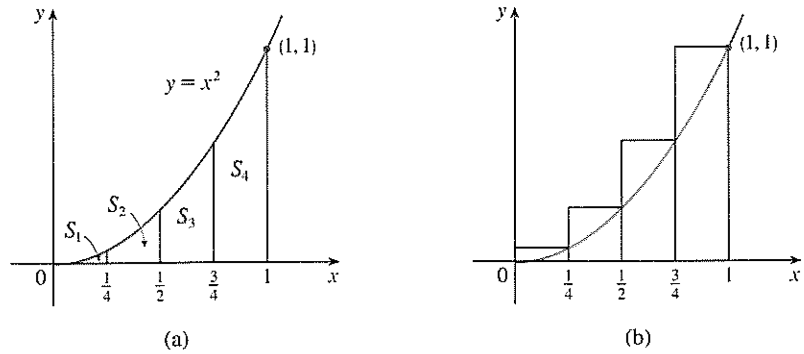


FIGURA 4

Puede obtener una aproximación de cada franja por medio de un rectángulo cuya base sea la misma que la de la franja y cuya altura sea la misma que la del lado derecho de la propia franja [véase la figura 4(b)]. En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos de la derecha de los subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$.

Cada rectángulo tiene un ancho de $\frac{1}{4}$ y las alturas son $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$ y 1^2. Si denota con R_4 la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtiene

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0.46875$$

A partir de la figura 4(b) se ve que el área A de S es menor que R_4, de modo que

$$A < 0.46875$$

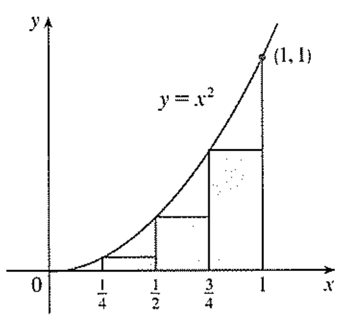


FIGURA 5

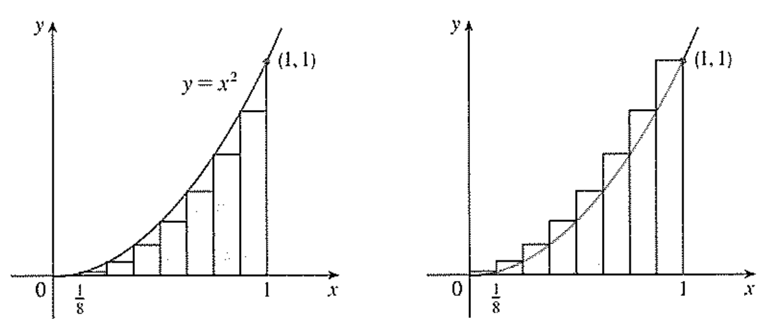
En lugar de usar los rectángulos de la figura 4(b), es posible optar por los más pequeños de la figura 5, cuyas alturas son los valores de f en los puntos extremos de la izquierda de los subintervalos. (El rectángulo de la extrema izquierda se ha aplastado, debido a que su altura es 0.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{7}{32} = 0.21875$$

El área de S es mayor que L_4, de modo que se tiene estimaciones superior e inferior para A:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Es posible repetir este procedimiento con un número mayor de franjas. En la figura 6 se muestra lo que sucede cuando divide la región S en ocho franjas de anchos iguales.



(a) Usando los puntos extremos de la izquierda

(b) Usando los puntos extremos de la derecha

FIGURA 6 Aproximación de S con ocho rectángulos

Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8), obtiene mejores estimaciones inferior y superior para A:

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

De modo que una respuesta posible para la pregunta es decir que el área verdadera de S se encuentra en alguna parte entre 0.2734375 y 0.3984375.

Podría obtener estimaciones mejores al incrementar el número de franjas. En la tabla que aparece a la izquierda se muestran los resultados de cálculos semejantes (con una computadora), usando n rectángulos cuyas alturas se encontraron con los puntos extremos de la izquierda (L_n) o con los puntos extremos de la derecha (R_n). En particular, al usar 50 franjas, el área se encuentra entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 franjas, lo estrecha incluso más: A se halla entre 0.3328335 y 0.3338335. Se obtiene una buena aproximación, promediando estos números: $A \approx 0.3333335$. □

Con base en los valores de la tabla en el ejemplo 1, parece que R_n tiende a $\frac{1}{3}$ conforme n crece. Se confirma esto en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Para la región S del ejemplo 1, demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos superiores de aproximación tiende a $\frac{1}{3}$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

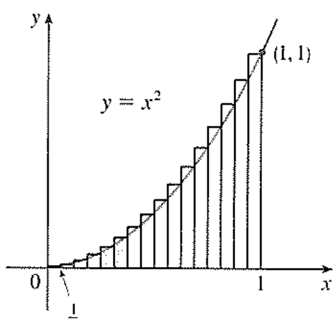


FIGURA 7

SOLUCIÓN R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos de la figura 7. Cada rectángulo tiene un ancho de $1/n$ y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$; es decir, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. De este modo,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

En este punto necesita la fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos:

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es posible que ya haya visto esta fórmula. Se prueba en el ejemplo 5 del apéndice E.

Al agregar la fórmula 1 a la expresión para R_n, obtiene

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$ □

En este caso se calcula el límite de la sucesión $\{R_n\}$. En *Presentación preliminar del cálculo* se analizaron las sucesiones y en el capítulo 11 se estudian con detalle. Sus límites se calculan de la misma manera que los límites en el infinito (sección 2.6). En particular, sabe que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Se puede demostrar que las sumas inferiores de aproximación también tienden a $\frac{1}{3}$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

Con base en las figuras 8 y 9 parece que conforme n crece, tanto L_n como R_n se vuelven cada vez mejores aproximaciones para el área de S. Por tanto, se *define* el área A como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación; esto es,

TEC En Visual 5.1 puede crear figuras como la 8 y 9 para otros valores de n.

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

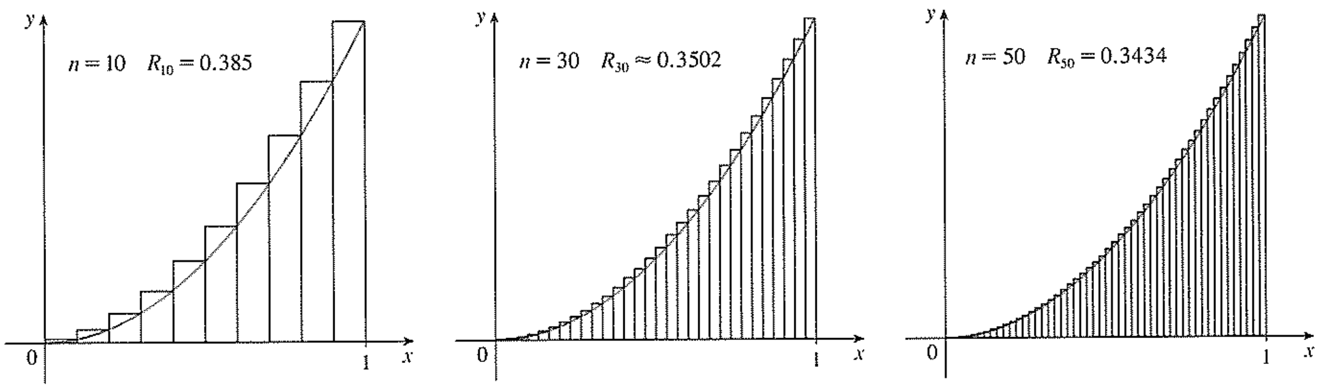


FIGURA 8

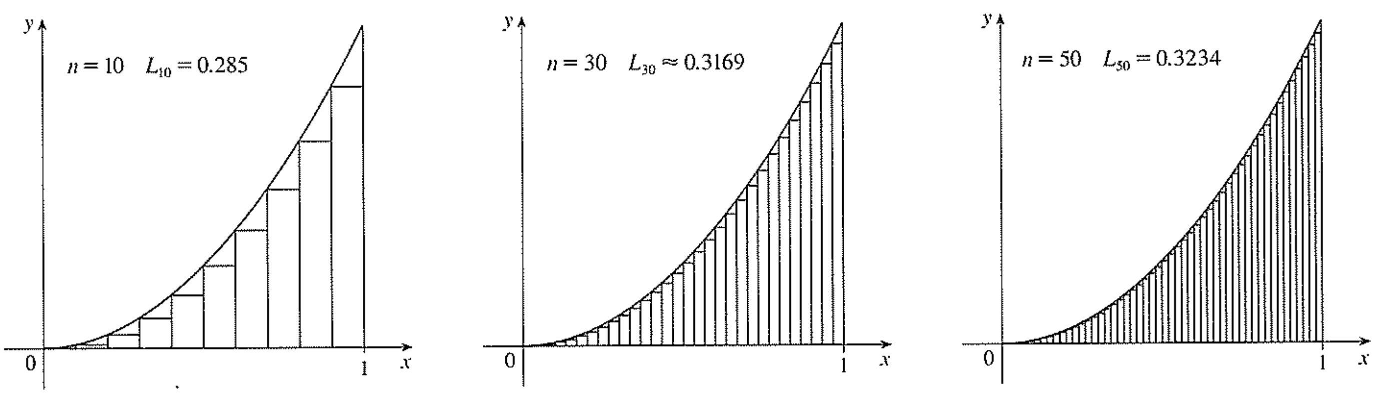


FIGURA 9
El área es aquel número que es menor que todas las sumas superiores y mayor que todas las sumas inferiores

Aplique la idea de los ejemplos 1 y 2 a la región más general S de la figura 1. Empiece por subdividir S en n franjas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de anchos iguales, como en la figura 10.

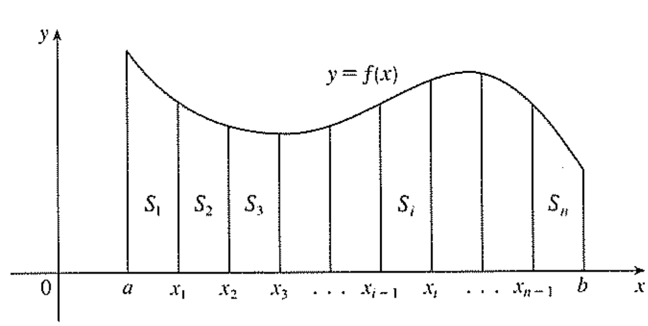


FIGURA 10

El ancho del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, de modo que el ancho de cada una de las n franjas es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Estas franjas dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los puntos extremos de la derecha de los subintervalos son

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \Delta x, \\ x_2 &= a + 2\,\Delta x, \\ x_3 &= a + 3\,\Delta x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obtenga una aproximación de la i-ésima franja, S_i, con un rectángulo con ancho Δx y altura $f(x_i)$, que es el valor de f en el punto extremo de la derecha (véase la figura 11). Después, el área del i-ésimo rectángulo es $f(x_i)\,\Delta x$. Lo que concebió de manera intuitiva como el área de S que se aproxima con la suma de las áreas de estos rectángulos, la cual es:

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

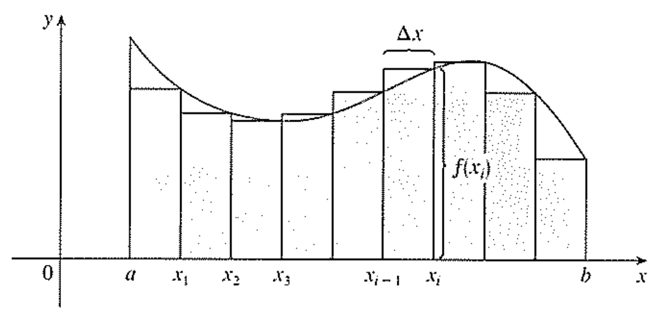
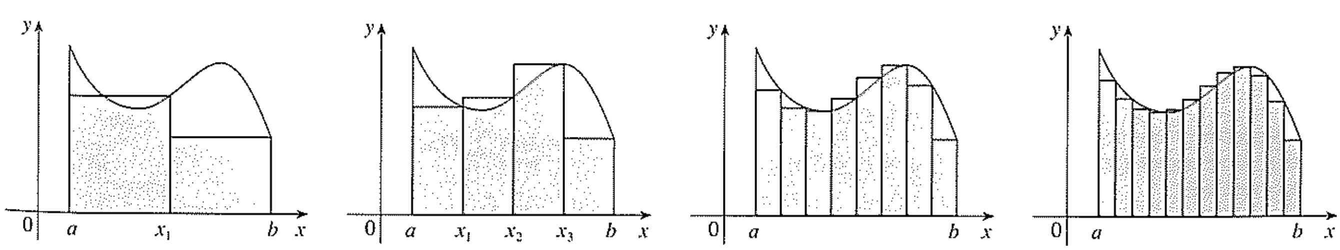


FIGURA 11

En la figura 12 se muestra esta aproximación para $n = 2$, 4, 8 y 12. Advierta que esta aproximación parece mejorarse a medida que se incrementa la cantidad de franjas; es decir, cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, se define el área A de la región S de la manera siguiente:



(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

FIGURA 12

2 DEFINICIÓN El **área** A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Se puede probar que el límite de la definición 2 siempre existe, porque se supone que f es continua. También es posible demostrar que se obtiene el mismo valor con los puntos extremos de la izquierda:

$$\boxed{3} \qquad A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De hecho, en lugar de usar los puntos extremos de la izquierda o los de la derecha, podría tomar la altura del i-ésimo rectángulo como el valor de f en *cualquier* número x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A estos números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ se les llaman **puntos muestras**. En la figura 13 se presentan los rectángulos de aproximación cuando se eligen puntos muestras diferentes de los puntos extremos. De suerte que una expresión más general para el área de S es

$$\boxed{4} \qquad A = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

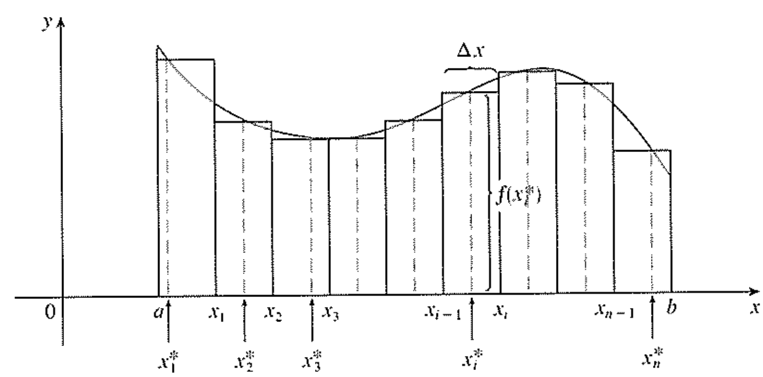


FIGURA 13

Esto indica que termine con $i = n$.

Esto indica que hay que sumar. $\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

Esto indica que hay que emprezar con $i = m$.

A menudo se usa la **notación sigma** para escribir de manera más compacta las sumas con muchos términos. Por ejemplo

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Con lo cual las expresiones para el área, que se dan en las ecuaciones 2, 3 y 4, se pueden escribir como:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Si necesita practicar la notación sigma vea los ejemplos e intente resolver algunos de los ejemplos del apéndice E.

También podría volver a escribir la fórmula 1 de esta manera:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EJEMPLO 3 Sea A el área de la región que está debajo de la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = 2$.

(a) Con los puntos extremos de la derecha, encuentre una expresión para A como un límite. No evalúe ese límite.

(b) Estime el área al tomar los puntos muestras como los puntos medios y con cuatro subintervalos; luego con diez subintervalos.

SOLUCIÓN

(a) Como $a = 0$ y $b = 2$, el ancho de un subintervalo es

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Por lo tanto, $x_1 = 2/n, x_2 = 4/n, x_3 = 6/n, x_i = 2i/n$ y $x_n = 2n/n$. La suma de las áreas de los rectángulos de aproximación es

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición 2, el área es

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Si se usa la notación sigma, se podría escribir

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

Es difícil evaluar este límite directamente a mano, no así con la ayuda de un sistema algebraico para computadora (véase el ejercicio 24). En la sección 5.3 halla A con más facilidad, aplicando un método diferente.

(b) Con $n = 4$, los subintervalos de ancho igual, $\Delta x = 0.5$, son $[0, 0.5]$, $[0.5, 1]$, $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$. Los puntos medios de estos subintervalos son $x_1^* = 0.25$, $x_2^* = 0.75$, $x_3^* = 1.25$ y $x_4^* = 1.75$, y la suma de las áreas de los cuatro rectángulos de aproximación (véase la figura 14) es

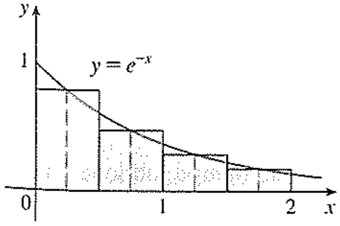


FIGURA 14

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\ &= f(0.25)\,\Delta x + f(0.75)\,\Delta x + f(1.25)\,\Delta x + f(1.75)\,\Delta x \\ &= e^{-0.25}(0.5) + e^{-0.75}(0.5) + e^{-1.25}(0.5) + e^{-1.75}(0.5) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}\right) \approx 0.8557 \end{aligned}$$

De este modo, una estimación para el área es

$$A \approx 0.8557$$

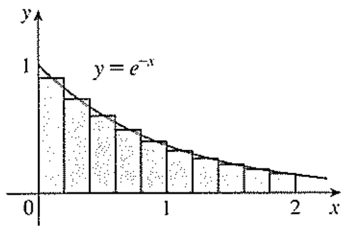


FIGURA 15

Con $n = 10$, los subintervalos son $[0, 0.2], [0.2, 0.4], \ldots, [1.8, 2]$ y los puntos medios son $x_1^* = 0.1, x_2^* = 0.3, x_3^* = 0.5, \ldots, x_{10}^* = 1.9$. Por consiguiente,

$$A \approx M_{10} = f(0.1)\,\Delta x + f(0.3)\,\Delta x + f(0.5)\,\Delta x + \cdots + f(1.9)\,\Delta x$$

$$= 0.2(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + \cdots + e^{-1.9}) \approx 0.8632$$

Con base en la figura 15, parece que esta estimación es mejor que la que se hizo con $n = 4$. □

EL PROBLEMA DE LA DISTANCIA

Considere ahora el *problema de la distancia:* hallar la distancia recorrida por un objeto durante cierto periodo, si se conoce la velocidad del objeto en todos los momentos. (En cierto sentido, éste es el problema inverso del que se analizó en la sección 2.1.) Si la velocidad permanece constante, entonces el problema de la distancia es fácil de resolver por medio de la fórmula:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

Pero si la velocidad varía, no es fácil hallar la distancia recorrida. Investigue el problema en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Suponga que el odómetro del automóvil está averiado y que desea estimar la distancia que ha recorrido en 30 segundos. Las lecturas del velocímetro cada cinco segundos están registradas en la tabla siguiente:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (mi/h)	17	21	24	29	32	31	28

Para tener el tiempo y la velocidad en unidades coherentes, convierta las lecturas de velocidad a pies por segundo (1 mi/h = 5 280/3 600 pies/s):

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (pies/s)	25	31	35	43	47	46	41

Durante los primeros cinco segundos, la velocidad no cambia mucho, de modo que puede estimar la distancia recorrida durante ese tiempo al suponer que la velocidad es constante. Si la considera igual a la velocidad inicial (25 pies/s), por lo tanto obtiene la distancia aproximada recorrida durante los primeros cinco segundos:

$$25 \text{ pies/s} \times 5 \text{ s} = 125 \text{ pies}$$

De manera análoga, durante el segundo intervalo, la velocidad es aproximadamente constante y se toma como la velocidad correspondiente a $t = 5$ s. De modo que la estimación para la distancia recorrida desde $t = 5$ s hasta $t = 10$ s es

$$31 \text{ pies/s} \times 5 \text{ s} = 155 \text{ pies}$$

Si suma las estimaciones semejantes para los otros intervalos de tiempo, obtiene una estimación para la distancia total recorrida:

$$(25 \times 5) + (31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) = 1\,135 \text{ pies}$$

Con igual propiedad podría haber usado la velocidad correspondiente al *final* de cada periodo, en lugar de la velocidad al principio de los mismos, como la supuesta velocidad constante. En tal caso las estimaciones quedarían

$$(31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) + (41 \times 5) = 1\,215 \text{ pies}$$

Si buscara una estimación más exacta, habría tomado las lecturas de la velocidad cada dos segundos o cada segundo. □

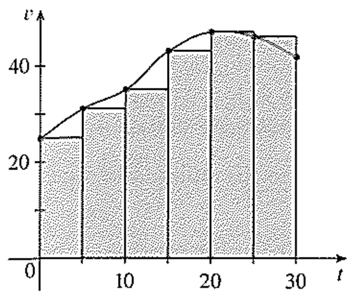


FIGURA 16

Tal vez los cálculos del ejemplo 4 le recuerden las sumas usadas al principio para estimar las áreas. La semejanza se explica cuando dibuja una gráfica de la función de velocidad del automóvil de la figura 16 y dibuja ractángulos cuyas alturas son las velocidaes iniciales de cada intervalo. El área del primer rectángulo es $25 \times 5 = 125$, lo que también es su estimación de la distancia recorrida en los primeros cinco segundos. De hecho, el área de cada rectángulo se puede interpretar como una distancia, porque la altura representa velocidad y el ancho al tiempo. La suma de las áreas de los rectángulos de la figura 16 es $L_6 = 1\,135$, lo cual es la estimación inicial de la distancia total recorrida.

En general, suponga que un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$, en donde $a \leqslant t \leqslant b$ y $f(t) \geqslant 0$ (de modo que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva). Tome las lecturas de la velocidad en los instantes $t_0 \ (= a), t_1, t_2, \ldots, t_n \ (= b)$, de forma que la velocidad sea aproximadamente constante en cada subintervalo. Si estos instantes están igualmente espaciados, después el tiempo entre lecturas consecutivas es $\Delta t = (b - a)/n$. Durante el primer intervalo, la velocidad es más o menos $f(t_0)$ y, por consiguiente, la distancia recorrida es alrededor de $f(t_0)\,\Delta t$. De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo es alrededor de $f(t_1)\,\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es poco más o menos

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

Si usa la velocidad en los puntos extremos de la derecha, en lugar de los puntos extremos de la izquierda, su estimación para la distancia total se convierte en

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Entre mayor sea la frecuencia con que se mide la velocidad, más exactas se vuelven las estimaciones, de modo que parece plausible que la distancia *exacta d* recorrida sea el *límite* de esas expresiones:

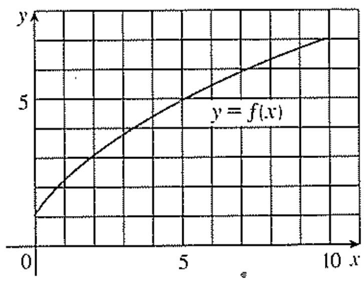
$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

En la sección 5.4 verá que, en efecto, esto es verdadero.

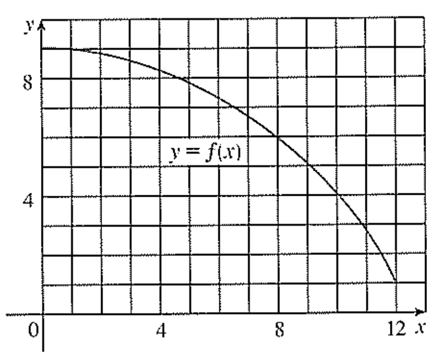
En virtud de que la ecuación 5 tiene la misma forma que las expresiones para el área, dadas en las ecuaciones 2 y 3, se concluye que la distancia recorrida es igual al área debajo de la gráfica de la función de velocidad. En los capítulos 6 y 8 verá que otras cantidades de interés en las ciencias naturales y sociales como el trabajo realizado por una fuerza variable o el gasto cardiaco también pueden interpretarse como el área debajo de la curva. De modo que cuando calcule áreas en este capítulo, tenga presente que pueden interpretarse de diversas maneras prácticas.

5.1 EJERCICIOS

1. (a) Lea los valores a partir de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para hallar una estimación inferior y una superior para el área debajo de esa gráfica dada de f, desde $x = 0$ hasta $x = 10$. En cada caso, dibuje los rectángulos que use.
(b) Encuentre nuevas estimaciones usando diez rectángulos en cada caso.



2. (a) Use seis rectángulos para encontrar estimaciones de cada tipo para el área debajo de la gráfica de f desde $x = 0$ hasta $x = 12$.
(i) L_6 (los puntos muestras son los puntos extremos de la izquierda)
(ii) R_6 (los puntos muestras son los puntos extremos de la derecha)
(iii) M_6 (los puntos muestras son los puntos medios)
(b) ¿L_6 sobreestima o subestima el área verdadera?
(c) ¿R_6 sobreestima o subestima el área verdadera?
(d) ¿Cuál de los números L_6, R_6 o M_6 da la mejor estimación? Explique la respuesta.



3. (a) Estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$, usando cuatro rectángulos de aproximación y los puntos extremos de la derecha. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación. ¿Su estimación es una subestimación o una sobrestimación?
(b) Repita el inciso (a), con los puntos extremos de la izquierda.

4. (a) Estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una sobrestimación o una subestimación?
(b) Repita el inciso (a) con los puntos extremos de la izquierda.

5. (a) Estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ hasta $x = 2$ con tres rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Enseguida mejore su estimación usando seis rectángulos. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación.
(b) Repita el inciso (a) usando los puntos extremos de la izquierda.
(c) Repita el inciso (a) usando los puntos medios.
(d) Con base en sus dibujos de los incisos (a) a (c), ¿cuál parece ser la mejor estimación?

6. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = e^{-x^2}$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
(b) Estime el área debajo de la gráfica de f con cuatro rectángulos de aproximación y considerando que los puntos muestras son (i) los puntos extremos de la derecha y (ii) los puntos medios. En cada caso, trace la curva y los rectángulos.
(c) Mejore sus estimados del inciso (b) utilizando 8 rectángulos.

7–8 Con una calculadora programable (o una computadora) es posible evaluar las expresiones para las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, incluso para valores grandes de n, con el uso de lazos. (En una TI, use el comando Is> o un rizo *For-EndFor*, en una Casio, use Isz, en una HP o en BASIC, use un lazo FOR-NEXT.) Calcule la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación; use subintervalos iguales y los puntos extremos de la derecha, para $n = 10, 30, 50$ y 100. Luego, infiera el valor del área exacta.

7. La región debajo de $y = \operatorname{sen} x^4$ desde 0 hasta 1.

8. La región debajo de $y = \cos x$ desde 1 hasta $\pi/2$.

CAS **9.** Algunos sistemas algebraicos para computadora tienen comandos que dibujan los rectángulos de aproximación y evalúan las sumas de sus áreas, por lo menos si x_i^* es un punto extremo de la izquierda o de la derecha. (Por ejemplo, en Maple, use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum`, y `rightsum`.)
(a) Si $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, encuentre las sumas izquierda y derecha para $n = 10, 30$ y 50.
(b) Ilustre mediante el trazado de las gráficas de los rectángulos del inciso (a).
(c) Demuestre que el área exacta debajo de f se encuentra entre 0.780 y 0.791

CAS **10.** (a) Si $f(x) = \ln x$, $0.791 \leqslant x \leqslant 4$, use los comandos que se analizaron en el ejercicio 9 con el fin de hallar las sumas izquierda y derecha, para $n = 10, 30$ y 50.
(b) Ilustre trazando las gráficas de los rectángulos del inciso (a).
(c) Demuestre que el área exacta debajo de f se encuentra entre 2.50 y 2.59.

11. La rapidez de una competidora aumentó de manera constante durante los tres primeros segundos de una carrera. En la tabla se da su rapidez a intervalos de medio segundo. Encuentre las estimaciones inferior y superior para la distancia que recorrió durante estos tres segundos.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v (pies/s)	0	6.2	10.8	14.9	18.1	19.4	20.2

12. En la tabla se proporcionan las lecturas del velocímetro de una motocicleta a intervalos de 12 segundos.
(a) Estime la distancia recorrida por la motocicleta durante este periodo usando las velocidades al principio de los intervalos.
(b) Dé otra estimación usando las velocidaddes al final de los periodos.
(c) ¿Sus estimaciones de los incisos (a) y (b) son estimaciones superiores e inferiores? Explique su respuesta.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (pies/s)	30	28	25	22	24	27

13. Se fugó aceite de un tanque en una cantidad de $r(t)$ litros por hora. La proporción disminuyó conforme transcurrió el tiempo y los valores de la cantidad en intervalos de dos horas se muestran en la tabla. Halle estimaciones inferiores y superiores para la cantidad total de aceite que se fugó.

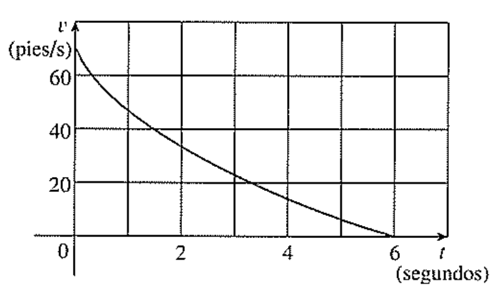
t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (l/h)	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

14. Cuando estima distancias a partir de datos de la velocidad, a veces es necesario usar instantes $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$, que no están igualmente espaciados. Aún así, puede estimar las distancias usando los periodos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por ejemplo, el 7 de mayo de 1992, el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad era instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla, proporcionada por la NASA, se dan los datos de la velocidad del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

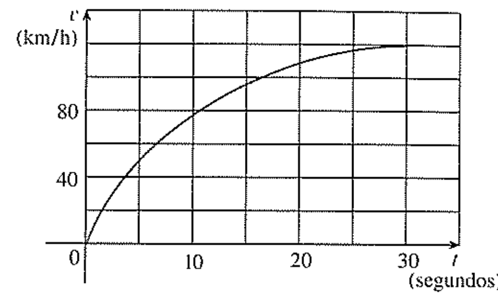
Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro	10	185
Fin de la maniobra de giro	15	319
Válvula de estrangulación al 89%	20	447
Válvula de estrangulación al 67%	32	742
Válvula de estrangulación al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4151

Utilice estos datos con objeto de estimar la altura por arriba de la superficie de la Tierra a la que se encontró el *Endeavour*, 62 segundos después del lanzamiento.

15. Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil al frenar. Úsela para estimar la distancia que recorre mientras se aplican los frenos.



16. Se muestra la gráfica de velocidad de un automóvil que acelera del estado de reposo hasta una velocidad de 120 km/h durante un periodo de 30 segundos. Estime la distancia recorrida durante este periodo.



17–19 Recurra a la definción 2 para hallar una expresión para el área debajo de la gráfica de f como límite. No evalúe el límite.

17. $f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad 1 \leq x \leq 16$

18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad 3 \leq x \leq 10$

19. $f(x) = x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2$

20–21 Determine una región cuya área sea igual al límite dado. No evalúe el límite.

20. $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10}$

21. $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n}$

22. (a) Aplique la definición 2 para encontrar una expresión para el área debajo de la curva $y = x^3$ desde 0 hasta 1 como límite.
(b) La fórmula siguiente para la suma de los cubos de los primeros n enteros se prueba en el apéndice E. Úsela para evaluar el límite del inciso (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

CAS **23.** (a) Exprese el área debajo de la curva $y = x^5$ desde 0 hasta 2 como límite.
(b) Utilice un sistema algebraico para computadora a fin de encontrar la suma de su expresión del inciso (a).
(c) Evalúe el límite del inciso (a).

CAS **24.** Halle el área exacta de la región debajo de la gráfica de $y = e^{-x}$ desde 0 hasta 2 utilizando un sistema algebraico para computadora con objeto de evaluar la suma y enseguida el límite del ejemplo 3(a). Compare su respuesta con la estimación obtenida en el ejemplo 3(b).

CAS **25.** Encuentre el área exacta debajo de la curva $y = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = b$, en donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use un sistema algebraico para computadora para evaluar la suma y calcular el límite.) En particular, ¿cuál es el área si $b = \pi/2$?

26. (a) Sea A_n el área de un polígono con n lados iguales, inscrito en un círculo con radio r. Al dividir el polígono en n triángulos congruentes con ángulo central $2\pi/n$, demuestre que

$$A_n = \tfrac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugerencia:* use la ecuación 2 de la sección 3.4.]

5.2 LA INTEGRAL DEFINIDA

En la sección 5.1 vio que surge un límite de la forma

$$\boxed{1} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

cuando se calcula un área. También vio que aparece cuando intenta hallar la distancia recorrida por un objeto. Resulta que este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. En los capítulos 6 y 8 verá que también surgen límites de la forma (1) al hallar longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, centros de masa, la fuerza debida a la presión del agua y el trabajo, así como otras cantidades. De modo que tienen un nombre y una notación especiales.

$\boxed{2}$ **DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA** Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Haga que $x_0\ (= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\ (= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ como los **puntos muestras** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de *f*, desde *a* hasta *b*,** es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$.

El significado exacto del límite que define a las integrales como sigue:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \right| < \varepsilon$$

para cualquier entero $n > N$ y para cualquier selección de x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$.

NOTA 1 Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama **signo de integral**. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ se llama **integrando**, y a y b se conocen como los **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. El símbolo dx no tiene significado en sí; todo $\int_a^b f(x)\,dx$ es un símbolo. La dx indica simplemente que la variable independiente es x. El procedimiento para calcular una integral se llama **integración**.

NOTA 2 La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, es un número; que no depende de x. De hecho, podría utilizar cualquier letra en lugar de x, sin cambiar el valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

NOTA 3 La suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que se presenta en la definición 2 se llama **suma de Riemann**, en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). De tal manera que la definición 2 menciona que la integral definida de una función integrable pueda aproximarse dentro de cualquier grado de exactitud mediante la suma de Riemann.

Sabe que si f es positiva, luego la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación (véase la figura 1). Al comparar la definición 2 con la definición de área de la sección 5.1, tiene que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede interpretar como el área debajo de la curva $y = f(x)$, desde a hasta b (véase la figura 2).

RIEMANN

Bernhard Riemann recibió su doctorado en Filosofía bajo la dirección del legendario Gauss, en la Universidad de Göttingen, y permaneció allí para enseñar. Gauss, quien no tenía el hábito de elogiar a otros matemáticos, habló de "la mente creativa, activa, en verdad matemática y la gloriosamente fértil originalidad" de Riemann. La definición (2) de integral se debe a Riemann. También hizo colaboraciones importantes a la teoría de funciones de una variable compleja, a la fisicomatemática, a la teoría de números y a los fundamentos de la geometría. El amplio concepto de Riemann del espacio y de la geometría resultó ser, 50 años más tarde, el apoyo correcto para la teoría general de la relatividad de Einstein. La salud de Riemann fue mala durante toda su vida y murió de tuberculosis a los 39 años.

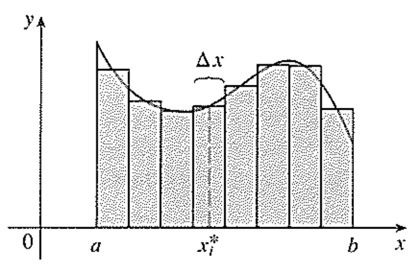


FIGURA 1
Si $f(x) \geq 0$, la suma de Riemann $\Sigma f(x_i^*)\,\Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos

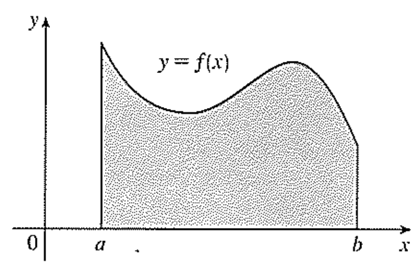


FIGURA 2
Si $f(x) \geq 0$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área debajo de la curva $y = f(x)$ desde a hasta b

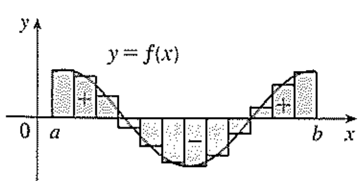


FIGURA 3
$\Sigma f(x_i^*)\,\Delta x$ es una aproximación al área neta

Si f toma valores tanto positivos como negativos, como en la figura 3, después la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y las *negativas* de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x (las áreas de los rectángulos en oro *menos* las áreas de los rectángulos en azul). Cuando toma el límite de esas sumas de Riemann, obtiene la situación que se ilustra en la figura 4. Una integral definida puede interpretarse como un área neta, es decir, una diferencia de áreas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f y A_2 corresponde a la región debajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

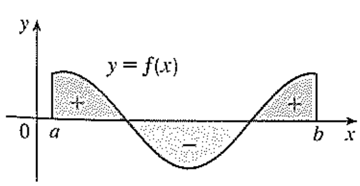


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ es el área neta

NOTA 4 Aunque ha definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividiendo $[a, b]$ en subintervalos del mismo ancho, hay situaciones en las que resulta ventajoso trabajar con intervalos de ancho desigual. Por ejemplo, en el ejercicio 14 de la sección 5.1, la NASA proporcionó datos de velocidad en tiempos que no estaban igualmente espaciados, pero aun así fue capaz de estimar la distancia recorrida. Y existen métodos parà la integración numérica que aprovechan los subintervalos desiguales.

Si los anchos del subintervalo son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, debe asegurarse de que todos estos anchos tiendan a 0 en el proceso de detrerminación de límites. Esto sucede si el ancho más grande, máx Δx_i tiende a 0. De manera que en este caso la definición de una integral definida se convierte en

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx } \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

NOTA 5 Ha definido la integral definida para una función integrable, pero no todas las funciones son ntegrables (véase ejercicios 67-68). El teorema que sigue muestra que la mayor parte de las funciones que usualmente acontecen en realidad son integrables. Esto se comprueba en cursos más avanzados.

3 TEOREMA Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene únicamente un número finito de saltos discontinuos, en tal caso f es integrable en $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Si f es integrable en $[a, b]$, después el límite en la definición 2 existe y proporciona el mismo valor, no importa cómo seleccione el punto muestra x_i^*. Para simplificar los cálculos de la integral con frecuencia tomamos los puntos muestra los extremos de la derecha. Por lo tanto $x_i^* = x_i$ y la definición de una integral se simplifica como sigue.

4 TEOREMA Si f es integrable en $[a, b]$, por lo tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde $\qquad \Delta x = \dfrac{b-a}{n} \qquad$ y $\qquad x_i = a + i\,\Delta x$

EJEMPLO 1 Exprese

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x$$

como una integral en el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN Al comparar el límite dado con el límite en el teorema 4, será idéntico si elige $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. Puesto que $a = 0$ y $b = \pi$. Por consiguiente, mediante el teorema 4

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx$$ □

Más adelante, cuando aplique la integral definida a situaciones físicas, será importante reconocer los límites de sumas como integrales, como en el ejemplo 1. Cuando Leibniz eligió la notación para una integral, escogió los ingredientes para recordar el proceso de tomar el límite. En general, cuando escribe

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

reemplaza lím Σ con $\int$, x_i^* con x y Δx con dx.

EVALUACIÓN DE INTEGRALES

Cuando aplica la definición para evaluar una integral definida, necesita saber cómo trabajar con sumas. Las tres ecuaciones siguientes dan las fórmulas para las sumas de potencias de enteros positivos. Es posible que conozca la ecuación 5 desde un curso de álgebra. Las ecuaciones 6 y 7 se analizaron en la sección 5.1 y se prueban en el apéndice E.

$$\boxed{5} \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\boxed{7} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Las fórmulas restantes son reglas sencillas para trabajar con la notación sigma:

$$\boxed{8} \qquad \sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\boxed{9} \qquad \sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\boxed{10} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\boxed{11} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Las fórmulas 8 a 11 se prueban escribiendo cada uno de los miembros en forma desarrollada. El lado izquierdo de la ecuación 9 es

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

El lado derecho es

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por la propiedad distributiva, éstas son iguales. Las otras fórmulas se analizan en el apéndice E.

EJEMPLO 2

(a) Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando los puntos muestras de los puntos extremos de la derecha y $a = 0$, $b = 3$ y $n = 6$.

(b) Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 6$ el ancho del intervalo es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

y los puntos extremos de la derecha son $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$ y $x_6 = 3.0$. De modo que la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0.5)\,\Delta x + f(1.0)\,\Delta x + f(1.5)\,\Delta x + f(2.0)\,\Delta x + f(2.5)\,\Delta x + f(3.0)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) \\ &= -3.9375 \end{aligned}$$

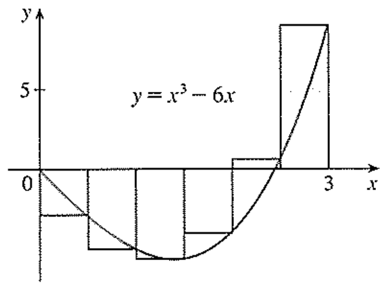


FIGURA 5

Advierta que f no es una función positiva, por lo que la suma de Riemann no representa una suma de áreas de rectángulos. Pero sí representa la suma de las áreas de los rectángulos de color oro (que están arriba del eje x) menos la suma de las áreas de los rectángulos de color azul (que están abajo del eje x) de la figura 5.

(b) Con n subintervalos, tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Por consiguiente, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$, y, en general, $x_i = 3i/n$. Dado que usa los puntos extremos de la derecha, puede utilizar el teorema 4:

■ En la suma, n es una constante (diferente de i), por eso puede mover $3/n$ enfrente del signo Σ.

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(La ecuación 9 con } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad \text{(Ecuaciones 11 y 9)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right\} \qquad \text{(Ecuaciones 7 y 5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75$$

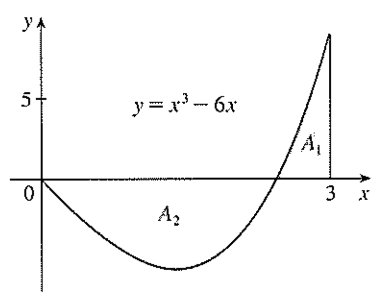


FIGURA 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

Esta integral no se puede interpretar como un área porque f toma tanto valores positivos como negativos; pero puede interpretarse como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$, donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 6.

En la figura 7 se ilustra el cálculo al mostrar los términos positivos y negativos en la suma de Riemann R_n de la derecha, para $n = 40$. Los valores que aparecen en la tabla hacen ver que las sumas de Riemann tienden al valor exacto de la integral, -6.75, cuando $n \to \infty$.

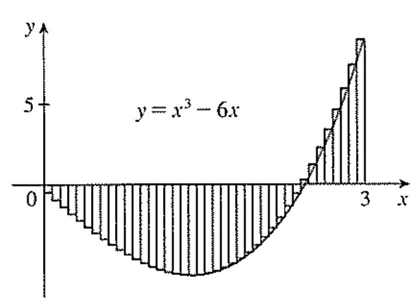


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	−6.3998
100	−6.6130
500	−6.7229
1000	−6.7365
5000	−6.7473

□

Ahora un método mucho más sencillo para evaluar la integral del ejemplo 2.

■ Como $f(x) = e^x$ es positiva, la integral del ejemplo 3 representa el área que se muestra en la figura 8.

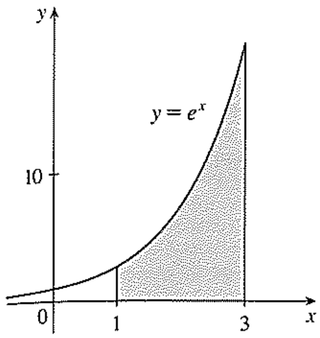


FIGURA 8

EJEMPLO 3
(a) Plantee una expresión para $\int_1^3 e^x\,dx$ como un límite de sumas.
(b) Use un sistema algebraico por computadora para evaluar la expresión.

SOLUCIÓN
(a) En este caso, tiene $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$, y

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2}{n}$$

De modo que $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$, y

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

A partir del teorema 4, obtiene

$$\begin{aligned} \int_1^3 e^x\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} \end{aligned}$$

(b) Si le pide a un sistema algebraico para computadora que evalúe la suma y simplifique, obtiene

■ Un sistema algebraico por computadora es capaz de hallar una expresión explícita para esta suma porque es una serie geométrica. El límite podría encontrarse usando la regla de l'Hospital.

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Ahora le pide al sistema algebraico por computadora que evalúe el límite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

En la siguiente sección se estudia un método más sencillo para la evolución de integrales. □

EJEMPLO 4 Evalúe las integrales siguientes interpretando cada una en términos de áreas.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ (b) $\int_0^3 (x - 1)\,dx$

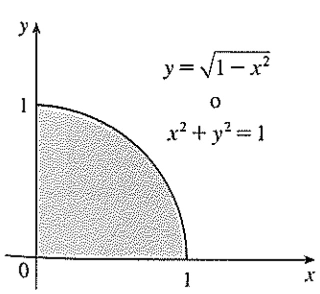


FIGURA 9

SOLUCIÓN
(a) Dado que $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$, puede interpretar esta integral como el área debajo de la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ desde 0 hasta 1. Pero, como $y^2 = 1 - x^2$, obtiene $x^2 + y^2 = 1$, lo cual muestra que la gráfica de f es el cuarto de círculo, con radio de 1, que aparece en la figura 9. Por lo tanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(En la sección 7.3 usted será capaz de *demostrar* que el área de un círculo con radio r es πr^2.)

(b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se presenta en la figura 10. Calcule la integral como la diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x-1)\,dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2 \cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1 \cdot 1) = 1.5$$

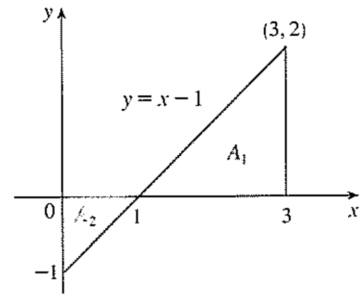


FIGURA 10

LA REGLA DEL PUNTO MEDIO

A menudo se elige el punto muestra x_i^* como el extremo de la derecha del i-ésimo intervalo como el punto muestra porque resulta conveniente para calcular el límite. Pero si la finalidad es hallar una *aproximación* para una integral, conviene escoger x_i^* como el punto medio del intervalo, el cual se denota con $\bar{x}_i$. Cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, pero si usa los puntos medios, obtiene la aproximación siguiente:

TEC En Module 5.2/7.7 se muestra cómo la regla del punto medio mejora cuando n se incrementa.

REGLA DEL PUNTO MEDIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

y $\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$

EJEMPLO 5 Use la regla del punto medio con $n = 5$ para hallar una aproximación de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Los puntos extremos de los cinco subintervalos son 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0. de modo que los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9. El ancho de los subintervalos es $\Delta x = (2-1)/5 = \frac{1}{5}$, de suerte que la regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

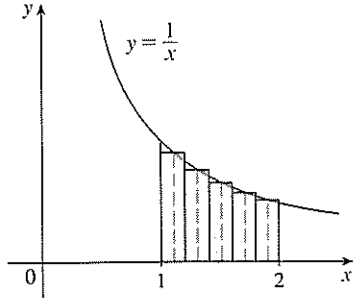


FIGURA 11

Puesto que $f(x) = 1/x > 0$, para $1 \leqslant x \leqslant 2$, la integral representa un área y la aproximación dada por la regla del punto medio es la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura 11. □

Hasta el momento no sabe qué tan exacta es la aproximación del ejemplo 5; pero en la sección 7.7 aprenderá un método para estimar el error relacionado con el uso de la regla del punto medio. En ese momento, se exponen otros métodos para hallar aproximaciones de integrales definidas.

Si aplica la regla del punto medio a la integral del ejemplo 2, obtiene la imagen que aparece en la figura 12. La aproximación $M_{40} \approx -6.7563$ está mucho más cerca del valor verdadero de -6.75 que la aproximación con el punto extremo de la derecha, $R_{40} \approx -6.3998$, que se muestra en la figura 7.

TEC En Visual 5.2 puede comparar las aproximaciones, izquierda, derecha y del punto medio para la integral del ejemplo 2 para diferentes valores de n.

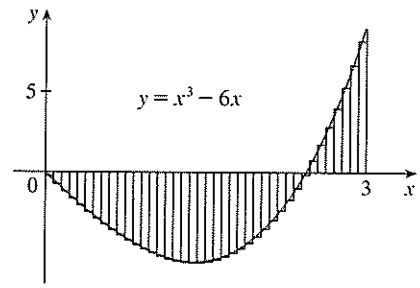


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6.7563$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita se hizo la suposición de que $a < b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a > b$. Advierta que si invierte a y b, en tal caso Δx cambia de $(b - a)/n$ a $(a - b)/n$. En consecuencia

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Si $a = b$, luego $\Delta x = 0$ y así

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Ahora aparecen algunas propiedades básicas de las integrales que le ayudarán a evaluarlas con mayor facilidad. Suponga que f y g son funciones continuas.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, donde c es cualquier constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

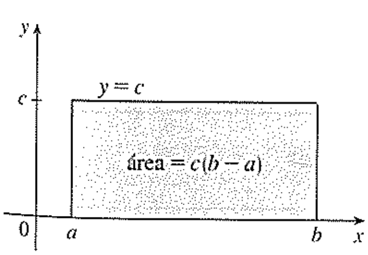


FIGURA 13
$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$

En la propiedad 1 se expresa que la integral de una función constante $f(x) = c$ es la constante multiplicada por la longitud del intervalo. Si $c > 0$ y $a < b$, esto es de esperarse porque $c(b - a)$ es el área del rectángulo de la figura 13.

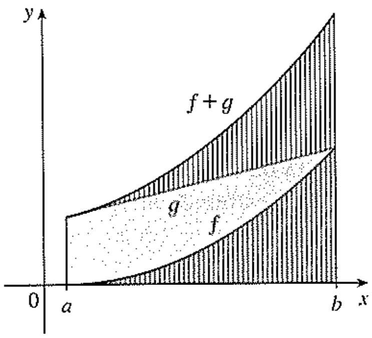


FIGURA 14

$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx =$
$\int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$

En la propiedad 2 se afirma que la integral de una suma es la suma de las integrales. Para funciones positivas, esto quiere decir que el área debajo de $f + g$ es el área debajo de f más el área debajo de g. La figura 14 ayuda a comprender por qué esto es cierto: en vista de la manera en que funciona la adición gráfica, los segmentos rectilíneos verticales correspondientes tienen alturas iguales.

En general, la propiedad 2 se deduce del teorema 4 y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\, \Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, \Delta x \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, \Delta x \\
&= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx
\end{aligned}$$

■ La propiedad 3 parece intuitivamente razonable porque si se multiplica una función por un número positivo c, su gráfica se alarga o contrae en el sentido vertical un factor de c. De modo que alarga o contrae cada rectángulo de aproximación un factor de c y, por consecuencia, tiene el efecto de multiplicar el área por c.

La propiedad 3 se puede probar de manera semejante y en ella se expresa que la integral de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la integral de la función. En otras palabras, una constante (pero *sólo* una constante) se puede llevar hacia afuera de un signo de integral. La propiedad 4 se prueba al escribir $f - g = f + (-g)$ y aplicar las propiedades 2 y 3 con $c = -1$.

EJEMPLO 6 Use las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx$.

SOLUCIÓN Si se aplican las propiedades 2 y 3 de las integrales, se tiene

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx = \int_0^1 4\, dx + \int_0^1 3x^2\, dx = \int_0^1 4\, dx + 3\int_0^1 x^2\, dx$$

Por la propiedad 1, sabe que

$$\int_0^1 4\, dx = 4(1 - 0) = 4$$

y, en el ejemplo 2 de la sección 5.1 encuentra que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. De igual manera,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (4 + 3x^2)\, dx &= \int_0^1 4\, dx + 3\int_0^1 x^2\, dx \\
&= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5
\end{aligned}$$

□

En la propiedad que sigue se dice cómo combinar las integrales de la misma función sobre intervalos adyacentes:

5. $$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$$

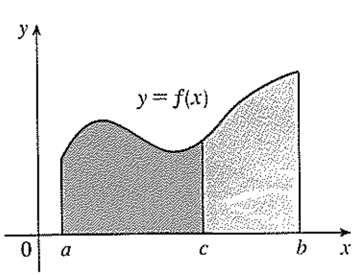


FIGURA 15

Esto no es fácil de probar en general pero, para el caso donde $f(x) \geq 0$ y $a < c < b$, se puede ver la propiedad 5 a partir de la interpretación geométrica de la figura 15: el área debajo de $y = f(x)$, desde a hasta c, más el área desde c hasta b es igual al área total desde a hasta b.

EJEMPLO 7 Si se sabe que $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ y $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, encuentre $\int_8^{10} f(x)\,dx$

SOLUCIÓN Por la propiedad 5

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

de modo que $\displaystyle\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$ □

Advierta que las propiedades 1 a 5 son verdaderas ya sea que $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Las propiedades que se enuncian a continuación, en las que se comparan tamaños de funciones y tamaños de integrales, son verdaderas sólo si $a \leqslant b$.

PROPIEDADES DE COMPARACIÓN DE LA INTEGRAL

6. Si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Si $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

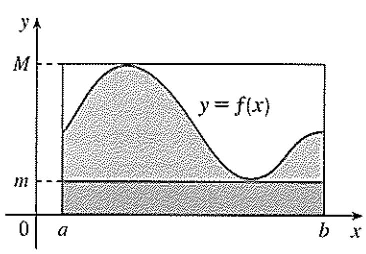


FIGURA 16

Si $f(x) \geqslant 0$, luego $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área debajo de la gráfica de f, de manera que la interpretación geométrica de la propiedad 6 es simplemente que las áreas son positivas. Pero se puede demostrar la propiedad a partir de la definición de una integral (ejercicio 64). La propiedad 7 expresa que una función más grande tiene una integral más grande. Se infiere de las propiedades 6 y 4 porque $f - g \geqslant 0$.

La propiedad 8 se ilustra mediante la figura 16 para el caso en que $f(x) \geqslant 0$. Si f es continua podría considerar m y M como los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre el intervalo $[a, b]$. En este caso, la propiedad 8 expresa que el área debajo de la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 8 Puesto que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, la propiedad 7 plantea

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Si aplica la propiedad 1 para evaluar las integrales en el primero y el segundo miembros obtiene

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$ □

La propiedad 8 es útil si lo que quiere se reduce a una estimación general del tamaño de una integral sin las dificultades que representa el uso de la regla del punto medio.

EJEMPLO 8 Use la propiedad 8 para estimar $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Debido a que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente sobre $[0, 1]$, su valor máximo absoluto es $M = f(0) = 1$ y su valor mínimo absoluto es $m = f(1) = e^{-1}$.

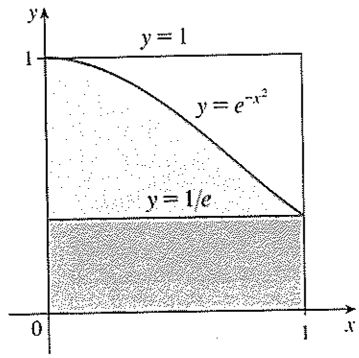


FIGURA 17

De esta manera, por la propiedad 8,

$$e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1-0)$$

o

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Como $e^{-1} \approx 0.3679$, puede escribir

$$0.367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1 \qquad \square$$

El resultado del ejemplo 8 se ilustra en la figura 17. La integral es mayor que el área del rectángulo inferior y menor que el área del cuadrado.

5.2 EJERCICIOS

1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $z \leqslant x \leqslant 4$, con seis subintervalos; tome los puntos extremos de la izquierda como los puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique, qué representa la suma de Riemann.

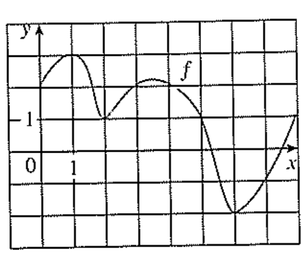
2. Si $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, valore la suma de Riemann con $n = 6$ tome los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra, dé su respuesta correcta hasta seis cifras decimales. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.

3. Si $f(x) = e^x - 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, encuentre la suma de Riemann con $n = 4$ correcta hasta seis cifras decimales, considerando los puntos medios como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

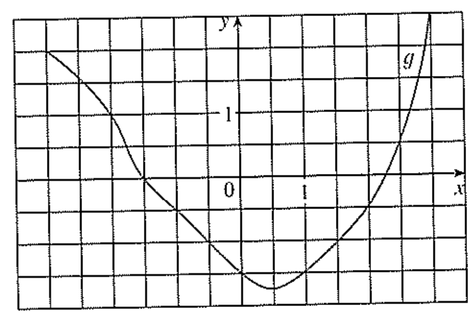
4. (a) Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, con seis términos, considerando los puntos muestra como los puntos extremos de la derecha (Dé su respuesta correcta hasta seis cifras decimales.) Explique, con ayuda de un diagrama, qué representa la suma de Riemann.

(b) Repita el inciso (a) con los puntos medios como los puntos muestra.

5. Se da la gráfica de una función. Estime $\int_0^8 f(x)\,dx$ usando cuatro subintervalos con (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios.



6. Se muestra la gráfica de g. Estime $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$ con seis subintervalos usando (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios.



7. Se muestra una tabla de valores de una función creciente f. Utilícela para hallar estimaciones inferiores y superiores para $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	-42	-37	-25	-6	15	36

8. En la tabla se dan los valores de una función obtenida a partir de un experimento. Con ellos estime $\int_3^9 f(x)\,dx$ usando tres subintervalos iguales con (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios. Si se sabe que la función es decreciente, ¿puede decir si sus estimaciones son menores o mayores que el valor exacto de la integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	-3.4	-2.1	-0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

9–12 Use la regla del punto medio, con el valor dado de n, para hallar una aproximación de cada integral. Redondee cada respuesta hasta cuatro cifras decimales.

9. $\int_2^{10} \sqrt{x^3 + 1}\, dx$, $n = 4$ 10. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx$, $n = 4$

11. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx$, $n = 5$ 12. $\int_1^5 x^2 e^{-x}\, dx$, $n = 4$

CAS 13. Si tiene un CAS que evalúe las aproximaciones con los puntos medios y trace los rectángulos correspondientes (en Maple, use los comandos de `middlesum` y `middlebox`), compruebe la respuesta para el ejercicio 11 e ilustre con una gráfica. Enseguida, repita con $n = 10$ y $n = 20$.

14. Con una calculadora programable o una computadora (vea las instrucciones para el ejercicio 7 de la sección 5.1), calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha para la función $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ sobre el intervalo $[0, 1]$, con $n = 100$. Explique por qué estas estimaciones demuestran que

$$0.306 < \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx < 0.315$$

Deduzca que la aproximación con el uso de la regla del punto de en medio, con $n = 5$, del ejercicio 11 es exacta hasta dos cifras decimales.

15. Use una calculadora o una computadora para hacer una tabla de valores de sumas de la derecha de Riemann R_n para la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿A qué valor parecen tender estos números?

16. Use una calculadora o una sumadora para hacer una tabla de valores de las sumas de la izquierda y de la derecha de Riemann L_n y R_n, para la integral $\int_0^2 e^{-x^2}\, dx$ con $n = 5, 10, 50$ y 100. ¿Entre qué valores tiene que encontrarse el valor de la integral? ¿Puede hacer un enunciado similar para la integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\, dx$? Explique su respuesta.

17–20 Exprese el límite como una integral definida sobre el intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1 + x_i^2)\Delta x$, $[2, 6]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos x_i}{x_i} \Delta x$, $[\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\,\Delta x$, $[1, 8]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [4 - 3(x_i^*)^2 + 6(x_i^*)^5]\,\Delta x$, $[0, 2]$

21–25 Use la forma de la definición de integral que se dio en el teorema 4 para evaluar la integral.

21. $\int_{-1}^5 (1 + 3x)\, dx$ 22. $\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)\, dx$

23. $\int_0^2 (2 - x^2)\, dx$ 24. $\int_0^5 (1 + 2x^3)\, dx$

25. $\int_1^2 x^3\, dx$

26. (a) Halle una aproximación a la integral $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$ usando una suma de la derecha de Riemann con puntos extremos de la derecha y $n = 8$.
(b) Dibuje un diagrama como el de la figura 3 para ilustrar la aproximación del inciso (a).
(c) Aplique el teorema 4 para evaluar $\int_0^4 (x^2 - 3x)\, dx$.
(d) Interprete la integral del inciso (c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama como el de la figura 4.

27. Demuestre que $\int_a^b x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

28. Demuestre que $\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$.

29–30 Exprese la integral como un límite de sumas de Riemann. No evalúe el límite.

29. $\int_2^6 \frac{x}{1 + x^5}\, dx$ 30. $\int_1^{10} (x - 4 \ln x)\, dx$

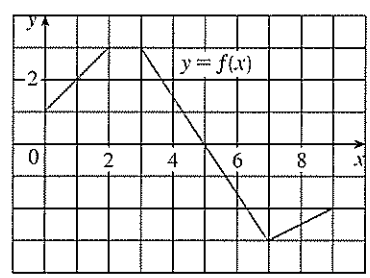
CAS 31–32 Exprese la integral como un límite de sumas. Enseguida evalúe utilizando un sistema algebraico para computadora para encontrar tanto la suma como el límite.

31. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 5x\, dx$ 32. $\int_2^{10} x^6\, dx$

33. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

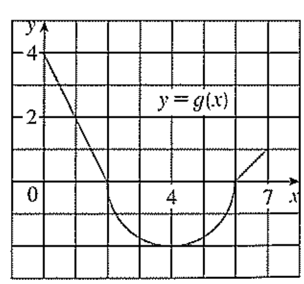
(a) $\int_0^2 f(x)\, dx$ (b) $\int_0^5 f(x)\, dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\, dx$ (d) $\int_0^9 f(x)\, dx$



34. La gráfica de g consta de dos rectas y un semicírculo. Úsela para evaluar cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\, dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\, dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\, dx$



35–40 Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

35. $\int_0^3 (\frac{1}{2}x - 1)\, dx$

36. $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

$\boxed{37.}$ $\int_{-3}^0 (1 + \sqrt{9 - x^2})\, dx$

38. $\int_{-1}^3 (3 - 2x)\, dx$

39. $\int_{-1}^2 |x|\, dx$

40. $\int_0^{10} |x - 5|\, dx$

41. Valorar $\int_\pi^\pi \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx$.

42. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\, dx = 5\sqrt{5} - 8$, ¿cuánto es $\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\, du$?

43. En el ejemplo 2 de la sección 5.1, demostró que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. Aplique este hecho y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (5 - 6x^2)\, dx$.

44. Aplique las propiedades de las integrales y el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 (2e^x - 1)\, dx$.

45. Utilice el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 e^{x+2}\, dx$.

46. A partir de los resultados del ejercicio 27 y del hecho de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 1$ (según el ejercicio 25 de la sección 5.1), junto con las propiedades de las integrales, evalúe $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\, dx$.

$\boxed{47.}$ Escriba como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x)\, dx$:

$$\int_{-2}^2 f(x)\, dx + \int_2^5 f(x)\, dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\, dx$$

48. Si $\int_1^5 f(x)\, dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)\, dx = 3.6$, encuentre $\int_1^4 f(x)\, dx$.

$\boxed{49.}$ Si $\int_0^9 f(x)\, dx = 37$ y $\int_0^9 g(x)\, dx = 16$, encuentre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\, dx$.

50. Halle $\int_0^5 f(x)\, dx$ si

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$

51. Considere que f tiene el valor mínimo absoluto m y el valor máximo absoluto M. ¿Entre que valores se encuentra $\int_0^2 f(x)\, dx$? ¿Qué propiedad de las integrales le permite elaborar su conclusión?

52–54 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin evaluar las integrales.

52. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$

$\boxed{53.}$ $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$

54. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leq \dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}$

55–60 Aplique la propiedad 8 para estimar el valor de la integral.

55. $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

56. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx$

57. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\, dx$

58. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\, dx$

59. $\int_0^2 xe^{-x}\, dx$

60. $\int_\pi^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\, dx$

61–62 Mediante las propiedades de las integrales, junto con los ejercicios 27 y 28, demuestre la desigualdad.

61. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\, dx \geq \dfrac{26}{3}$

62. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\, dx \leq \dfrac{\pi^2}{8}$

63. Demuestre la propiedad 3 de las integrales.

64. Demuestre la propiedad 6 de las integrales.

65. Si f es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

[*Sugerencia:* $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.]

66. Utilice el resultado del ejercicio 65 para demostrar que

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} 2x\, dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$$

67. Sea $f(x) = 0$ si x es cualquier número racional y $f(x) = 1$ si x es cualquier número irracional. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$.

68. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = 1$ si $0 < x \leq 1$. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$. [*Sugerencia*: demuestre que el primer término en la suma de Riemann, $f(x_i^*)\Delta x$ puede hacerse de manera arbitraria muy grande.]

69–70 Exprese el límite como una integral definida.

69. $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n \dfrac{i^4}{n^5}$ [*Sugerencia:* considere $f(x) = x^4$.]

70. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{1 + (i/n)^2}$

71. Determine $\int_1^2 x^{-2}\, dx$. *Sugerencia:* elija x_i^* como la media geométrica de x_{i-1} y x_i (es decir, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) y use la identidad

$$\frac{1}{m(m + 1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m + 1}$$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

FUNCIONES DE ÁREA

1. (a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y aplique la geometría para hallar el área debajo de esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.

(b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra debajo de la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría con el fin de hallar una expresión para $A(x)$.

(c) Derive la función de área $A(x)$. ¿Qué advierte?

2. (a) Si $x \geqslant -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

$A(x)$ representa el área de una región. Grafique la región.

(b) A partir de los resultados del ejercicio 28 de la sección 5.2 encuentre una expresión para $A(x)$.

(c) Determine $A'(x)$. ¿Qué se puede observar?

(d) Si $x \geqslant -1$ y h es un número positivo pequeño, por lo tanto $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y grafique la región.

(e) Dibuje un rectángulo que sea una aproximación de la región del inciso (d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones demuestre que

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Mediante el inciso (e) ofrezca una explicación intuitiva del resultado del inciso (c).

3. (a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ el rentángulo de visualización $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.

(b) Si define una nueva función g por medio de

$$g(x) = \int_{0}^{x} \cos(t^2)\, dt$$

en tal caso $g(x)$ es el área debajo de la gráfica de f, desde 0 hasta x [hasta que $f(x)$ se vuelve negativa, en cuyo punto $g(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso (a) para determinar el valor de x en el cual $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia de la integral del problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]

(c) Utilice el comando de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6)$, . . . , $g(1.8)$, $g(2)$. En seguida, con estos valores dibuje una gráfica de g.

(d) Use la gráfica de g del inciso (c) para dibujar la gráfica de g'; use la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Qué relación existe entre la gráfica de g' y la de f?

4. Suponga que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y se define una nueva función g por la ecuación

$$g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

Tomando como base sus resultados en los problemas 1–3 deduzca una expresión para $g'(x)$.

5.3 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El primero surgió del problema de la tangente, el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que estos dos problemas en realidad estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo da la correspondencia inversa inequívoca entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta correspondencia y la aplicaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático. En particular, ellos advirtieron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas como en las secciones 5.1 y 5.2.

La primera parte del teorema fundamental trata funciones definidas por una ecuación de la forma

$$\boxed{1} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

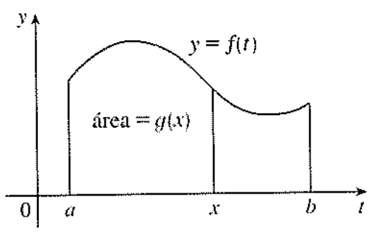


FIGURA 1

donde f es una función continua sobre $[a, b]$ y x varía entre a y b. Observe que g depende sólo de x, que aparece como el límite superior variable en la integral. Si x es un número fijo, por lo tanto la integral $\int_a^x f(t)\, dt$ es un número definido. Si después hace variar x, el número $\int_a^x f(t)\, dt$ también varía y define una función de x que se denota mediante $g(x)$.

Si f es una función positiva, después $g(x)$ puede interpretarse como el área debajo de la gráfica de f de a a x, donde x puede cambiar de a a b. (Considere a g como la función "área tan lejana"; véase la figura 1.)

EJEMPLO 1 Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

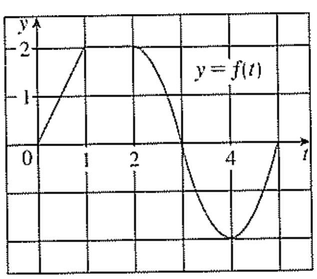


FIGURA 2

SOLUCIÓN En primer lugar observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\, dt = 0$. A partir de la figura 3 se ve que $g(1)$ es el área de un triángulo:

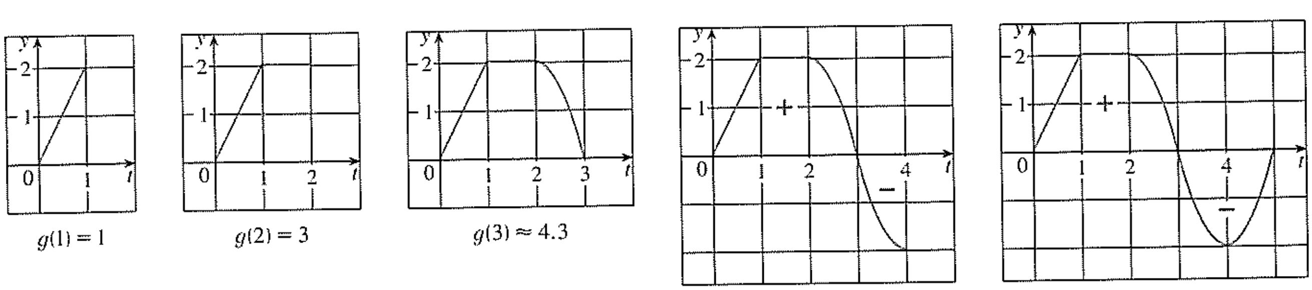
$$g(1) = \int_0^1 f(t)\, dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para hallar $g(2)$ le agrega a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^2 f(t)\, dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estime que el área debajo de f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, de manera que

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\, dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$



$g(1) = 1$ $\quad g(2) = 3$ $\quad g(3) \approx 4.3$ $\quad g(4) \approx 3$ $\quad g(5) \approx 1.7$

FIGURA 3

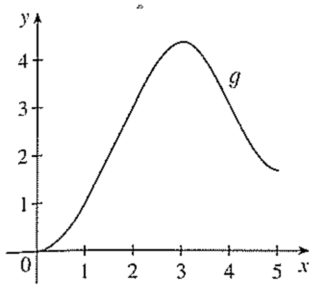


FIGURA 4
$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y por tanto empiece a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

Use estos valores para trazar la gráfica de g en la figura 4. Advierta que, debido a que $f(t)$ es positiva para $t < 3$, se sigue sumando área para $t < 3$ y por lo tanto g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, g decrece porque $f(t)$ es negativa. □

Si hace $f(t) = t$ y $a = 0$, después, aprovechando el ejercicio 27 de la sección 5.2, tiene

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$, es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f mediante la ecuación 1, por lo tanto g resulta ser, cuando menos en este caso, una antiderivada de f. Y si traza la gráfica de la derivada de la función g que se ilustra en la figura 4 al estimar las pendientes de las tangentes, obtiene una gráfica como la de f en la figura 2. Por eso, sospeche que en el ejemplo 1 también $g' = f$.

Con objeto de observar por qué esto puede ser verdadero en general considere cualquier función continua f con $f(x) \geqslant 0$. Pues $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ puede interpretarse como el área debajo de la gráfica de f de a a x, como en la figura 1.

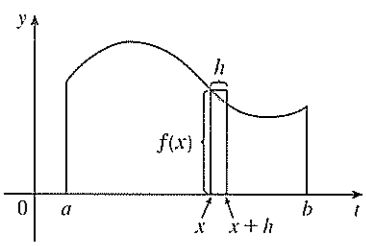


FIGURA 5

Con el fin de calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada, en primer lugar observe que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ se obtiene restando áreas, por lo tanto es el área debajo de la gráfica de f de x a $x + h$ (el área sombreada de la figura 5). Para h pequeñas, a partir de la figura puede ver que esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

por eso
$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

En consecuencia, por intuición, espere que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que esto sea verdadero, aun cuando f no sea necesariamente positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

▪ El nombre de este teorema se abrevia como TFC1: expresa que la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado sobre el límite superior.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 1. Si f es continua en $[a, b]$, luego la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), por lo tanto

$$g(x+h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(por la propiedad 5)}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

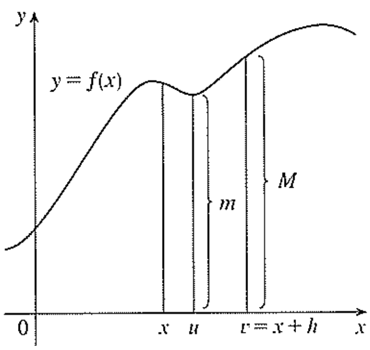


FIGURA 6

Por ahora suponga que $h > 0$. Puesto que f es continua en $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tal que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores máximo y mínimo absolutos de f en $[x, x + h]$. Véase figura 6.

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, tiene

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

es decir,
$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)h$$

Como $h > 0$, puede dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Enseguida use la ecuación 2 para reemplazar la parte media de esta desigualdad:

$$\boxed{3} \qquad f(u) \leqslant \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

Se puede demostrar la desigualdad 3 de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. Véase ejercicio 67.

TEC En Module 5.3 se proporciona evidencia visual para TFC1.

Ahora deje que $h \to 0$. Después $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

y

$$\lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con (3) y el teorema de la compresión que

$$\boxed{4} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o b, después la ecuación 4 se puede interpretar como un límite unilateral. Entonces el teorema 2.8.4 (modificado para límites unilaterales), muestra que g es continua en $[a, b]$. □

De acuerdo con la notación de Leibniz para las derivadas, puede expresar al TFC1 como

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

cuando f es continua. En términos generales, la ecuación 5 establece que si primero integra f y luego obtiene la derivada del resultado, regresa a la función original f.

EJEMPLO 2 Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$ □

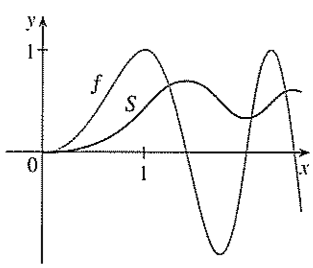


FIGURA 7
$f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

EJEMPLO 3 Si bien una fórmula de la forma $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ puede parecer una forma extraña de definir una función, los libros de física, química y estadística están llenos de funciones semejantes. Por ejemplo, la **función de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

recibe ese nombre en honor del físico francés Augustin Fresnel (1788-1827), quien es famoso por su trabajo en la óptica. Esta función apareció por primera vez en la teoría de Fresnel de la difracción de la luz, pero a últimas fechas se ha aplicado al diseño de autopistas.

La parte 1 del teorema fundamental indica cómo derivar la función de Fresnel:

$$S'(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$$

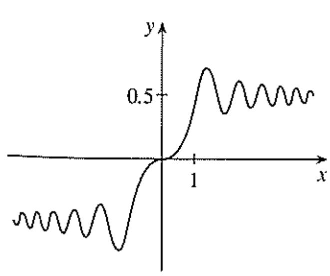


FIGURA 8
La función de Fresnel
$S(x) = \int_0^x \text{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

Esto significa que puede aplicar todos los métodos del cálculo diferencial para analizar S (véase el ejercicio 61).

En la figura 7 se muestran las gráficas de $f(x) = \text{sen}(\pi x^2/2)$ y de la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Se usó una computadora para dibujar S por medio de calcular el valor de esta integral para muchos valores de x. Evidentemente parece que $S(x)$ es el área debajo de la gráfica de f de 0 hasta x [hasta que $x \approx 1.4$ cuando $S(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. La figura 8 muestra una gran parte más grande de la gráfica de S.

Si ahora empieza por la gráfica de S de la figura 7 y piensa en qué aspecto debe tener su derivada, parece razonable que $S'(x) = f(x)$. [Por ejemplo, S es creciente cuando $f(x) > 0$ y decreciente cuando $f(x) < 0$.] De modo que esto da una confirmación visual de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo. □

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\,dt$.

SOLUCIÓN En este caso debe que ser cuidadoso al usar la regla de la cadena junto con FTC1. Sea $u = x^4$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt \\ &= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\,dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(por la regla de la cadena)} \\ &= \sec u\,\frac{du}{dx} && \text{(por TFC1)} \\ &= \sec(x^4)\cdot 4x^3 \end{aligned}$$

□

En la sección 5.2 calculó integrales a partir de la definición como un límite de las sumas de Riemann, y vio que ese procedimiento es a veces largo y difícil. La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, la cual se infiere con facilidad de la primera parte, representa un método mucho más simple para evaluar integrales.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$.

▧ Se representa a este teorema mediante las siglas TFC2.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. De acuerdo con la parte 1, sabe que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f en $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$\boxed{6} \qquad F(x) = g(x) + C$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas en $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$, esto también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtiene

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, llega a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

□

La parte 2 del teorema fundamental establece que si conoce una antiderivada F de f, en tal caso puede evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo $[a, b]$. Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)\,dx$, que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, se pueda determinar conociendo los valores de $F(x)$ en sólo dos puntos, a y b.

El teorema sorprende a primera vista, esto es posible cuando se le interpreta en términos físicos. Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto y $s(t)$ es su posición en el tiempo t, por lo tanto $v(t) = s'(t)$, y s es una antiderivada de v. En la sección 5.1 se estudia un objeto que siempre se mueve en la dirección positiva y plantea una conjetura de que el área bajo la curva de la velocidad es igual a la distancia recorrida. Si lo expresa mediante símbolos, es lo siguiente:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Eso es exactamente lo que el TFC2 establece en este contexto.

EJEMPLO 5 Evalúe la integral $\int_1^3 e^x\,dx$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = e^x$ es continua en todas sus partes y sabe que una antiderivada es $F(x) = e^x$, de modo que la parte 2 del teorema fundamental da

Compare el cálculo en el ejemplo 5 con el mucho más difícil del ejemplo 3 de la sección 5.2.

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Observe que el TFC2 establece que puede utilizar *cualquier* antiderivada F de f. De este modo podría usar la más sencilla, a saber $F(x) = e^x$, en lugar de $e^x + 7$ o de $e^x + C$. □

A menudo se recurre a la notación

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

También la ecuación del TFC2 se puede expresar como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{donde} \qquad F' = f$$

Otras notaciones comunes son $F(x)\,\big|_a^b$ y $[F(x)]_a^b$.

EJEMPLO 6 Determinar el área bajo la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1.

SOLUCIÓN Una antiderivada de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. El área requerida A se calcula aplicando la parte 2 del teorema fundamental:

Al aplicar el teorema fundamental se usa una antiderivada particular F de f. No es necesario usar la antiderivada más general.

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$ □

Si compara el cálculo del ejemplo 6 con el del ejemplo 2 de la sección 5.1, verá que el teorema fundamental proporciona un método *mucho* más corto.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUCIÓN La integral dada es una forma abreviada de

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\, dx$$

Una antiderivada de $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln |x|$ y, como $3 \leqslant x \leqslant 6$, puede escribir $F(x) = \ln x$. De tal manera,

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\, dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln \frac{6}{3} = \ln 2$$

□

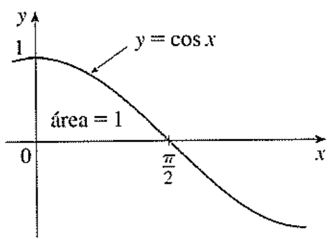


FIGURA 9

EJEMPLO 8 Calcule el área bajo la curva coseno desde 0 hasta b, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$

$$A = \int_0^b \cos x\, dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

En particular, al hacer $b = \pi/2$, ha comprobado que el área bajo la curva coseno desde 0 hasta $\pi/2$ es $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Véase figura 9. □

Cuando el matemático francés Gilles de Roberval calculó por vez primera el área bajo las curvas seno y coseno en 1635, era una empresa que requería aplicar todo el ingenio del que fuera uno capaz. Si no tuviera la ventaja del teorema fundamental tendría que calcular un difícil límite de sumas mediante identidades trigonométricas abstrusas, o bien, un sistema algebraico computacional como en el ejercicio 25 de la sección 5.1. Fue mucho más difícil para Roberval puesto que el artificio de los límites no se había inventado aún en 1635. Pero ya después de los años de 1660 y 1670, cuando Barrow descubrió el teorema fundamental y Newton y Leibniz lo explotaron, este problema se volvió muy fácil, como lo puede ver por el ejemplo 8.

EJEMPLO 9 ¿Qué es lo erróneo en el cálculo siguiente?

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^3 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN Para empezar, observe que este cálculo es erróneo porque la respuesta es negativa, pero $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ y la propiedad 6 de las integrales establecen que $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$ cuando $f \geqslant 0$. El teorema fundamental del cálculo se aplica en las funciones continuas. En este caso no se puede aplicar porque $f(x) = 1/x^2$ no es continua en $[-1, 3]$. En efecto, f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, de modo que

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \text{no existe.}$$

□

LA DERIVACIÓN Y LA INTEGRACIÓN COMO PROCESOS INVERSOS

Esta sección finaliza conjuntando las dos partes del teorema fundamental.

> **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO** Suponga que f es continua sobre $[a, b]$.
>
> **1.** Si $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, por lo tanto $g'(x) = f(x)$.
>
> **2.** $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$

La parte 1 se puede volver a escribir como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

en la cual se afirma que si integra f y, a continuación, deriva el resultado, regresa a la función original f. Como $F'(x) = f(x)$, la parte 2 puede reescribirse así

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

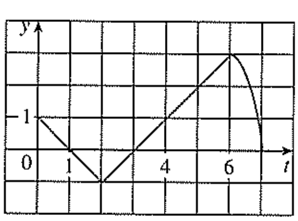
En esta versión se afirma que si toma una función F, la deriva y luego integra el resultado, vuelve a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el teorema más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz desarrollaron como el teorema fundamental, en los próximos capítulos verá que estos estimulantes problemas son accesibles para todos.

5.3 EJERCICIOS

1. Explique con exactitud qué se quiere decir con la proposición de que "la derivación y la integración son procesos inversos".

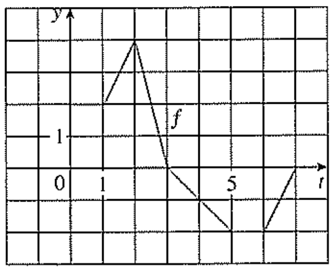
2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.



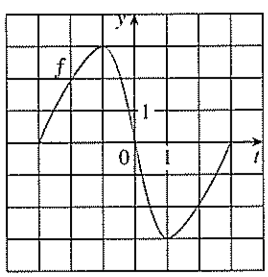
(a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) ¿Dónde tiene un valor máximo g? ¿Dónde tiene un valor mínimo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.

3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(6)$.
(b) ¿En qué intervalo es creciente g?

(c) ¿Dónde tiene un valor máximo g?
(d) Trace una gráfica aproximada de g?



4. Sea $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\, dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
   (a) Evalúe $g(-3)$ y $g(3)$.
   (b) Estime $g(-2)$, $g(-1)$ y $g(0)$.
   (c) ¿En qué intervalo es creciente g?
   (d) ¿Dónde tiene un valor máximo g?
   (e) Trace una gráfica aproximada de g.
   (f) Utilice la gráfica del inciso (e) para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compárela con la gráfica de f.



5–6 Trace el área representada por $g(x)$. A continuación halle $g'(x)$ de dos maneras: (a) aplicando la parte 1 del teorema fundamental y (b) evaluando la integral utilizando la parte 2 y después derivar.

5. $g(x) = \int_{1}^{x} t^2\, dt$ 6. $g(x) = \int_{0}^{x} (1 + \sqrt{t})\, dt$

7–18 Use la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de la función.

7. $g(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3 + 1}\, dt$ 8. $g(x) = \int_{3}^{x} e^{t^2 - t}\, dt$

$\boxed{9.}$ $g(y) = \int_{2}^{y} t^2 \operatorname{sen} t\, dt$ 10. $g(r) = \int_{0}^{r} \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

11. $F(x) = \int_{x}^{\pi} \sqrt{1 + \sec t}\, dt$

$\left[\textit{Sugerencia: } \int_{x}^{\pi} \sqrt{1 + \sec t}\, dt = -\int_{\pi}^{x} \sqrt{1 + \sec t}\, dt \right]$

12. $G(x) = \int_{x}^{1} \cos \sqrt{t}\, dt$

$\boxed{13.}$ $h(x) = \int_{2}^{1/x} \arctan t\, dt$ 14. $h(x) = \int_{0}^{x^2} \sqrt{1 + r^3}\, dr$

15. $y = \int_{0}^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\, dt$ 16. $y = \int_{1}^{\cos x} (1 + v^2)^{10}\, dv$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2}\, du$ 18. $y = \int_{e^x}^{0} \operatorname{sen}^3 t\, dt$

19–42 Evalúe la integral.

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$ 20. $\int_{-2}^{5} 6\, dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\, dt$ 22. $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_{0}^{1} x^{4/5}\, dx$ 24. $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx$

25. $\int_{1}^{2} \frac{3}{t^4}\, dt$ 26. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\, d\theta$

27. $\int_{0}^{2} x(2 + x^5)\, dx$ 28. $\int_{0}^{1} (3 + x\sqrt{x})\, dx$

29. $\int_{1}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$ 30. $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\, dy$

31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$ 32. $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

33. $\int_{1}^{2} (1 + 2y)^2\, dy$ 34. $\int_{0}^{1} \cosh t\, dt$

35. $\int_{1}^{9} \frac{1}{2x}\, dx$ 36. $\int_{0}^{1} 10^x\, dx$

37. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt$ 38. $\int_{0}^{1} \frac{4}{t^2 + 1}\, dt$

39. $\int_{-1}^{1} e^{u+1}\, du$ 40. $\int_{1}^{2} \frac{4 + u^2}{u^3}\, du$

41. $\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

42. $\int_{-2}^{2} f(x)\, dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

43–46 ¿Con la ecuación, qué es incorrecto?

43. $\int_{-2}^{1} x^{-4}\, dx = \left.\frac{x^{-3}}{3}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

44. $\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}\, dx = -\left.\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

45. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec\theta \tan\theta\, d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

46. $\int_{0}^{\pi} \sec^2 x\, dx = \tan x\Big]_{0}^{\pi} = 0$

47–50 Mediante una gráfica dé una estimación del área de la región que se localiza abajo de la curva dada. Después calcule el área exacta

47. $y = \sqrt[3]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 27$ **48.** $y = x^{-4}$, $1 \leqslant x \leqslant 6$

49. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ **50.** $y = \sec^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

51–52 Evalúe la integral e interprétela como una diferencia de áreas. Ilustre mediante un croquis.

51. $\displaystyle\int_{-1}^{2} x^3\,dx$ **52.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

53–56 Determine la derivada de la función.

53. $\displaystyle g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\,du$

$$\left[\textit{Sugerencia:} \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{3x} f(u)\,du\right]$$

54. $\displaystyle g(x) = \int_{\tan x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2 + t^4}}\,dt$

55. $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\,\operatorname{sen} t\,dt$

56. $\displaystyle y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\,du$

57. Si $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, donde $f(t) = \displaystyle\int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1 + u^4}}{u}\,du$, halle $F''(2)$.

58. Encuentre el intervalo sobre el cual la curva

$$y = \int_0^x \frac{1}{1 + t + t^2}\,dt$$

es cóncava hacia arriba.

59. Si $f(1) = 12$, f' es continua y $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, ¿cuál es el valor de $f(4)$?

60. La **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

se usa en probabilidad, estadística e ingeniería.

(a) Demuestre que $\int_a^b e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

61. La función de Fresnel S se definió en el ejemplo 3 y en las figuras 7 y 8 se trazaron sus gráficas.

(a) ¿Sobre qué valores de x tiene valores máximos locales esta función?

(b) ¿Sobre qué valores esta función es cóncava hacia arriba?

CAS (c) Utilice una gráfica para resolver la ecuación siguiente correcta hasta dos cifras decimales.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt = 0.2$$

CAS **62.** La **función integral sinusoidal**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

es importante en la ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$, pero sabe que su límite es 1 cuando $t \to 0$. De modo que defina $f(0) = 1$ y esto convierte a f en una función continua en todas partes.]

(a) Dibuje la gráfica de Si.

(b) ¿En qué valores de x tiene esta función valores máximos locales?

(c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.

(d) ¿Esta función tiene asíntotas horizontales?

(e) Resuelva la ecuación siguiente correcta hasta una cifra decimal.

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = 1$$

63–64 Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

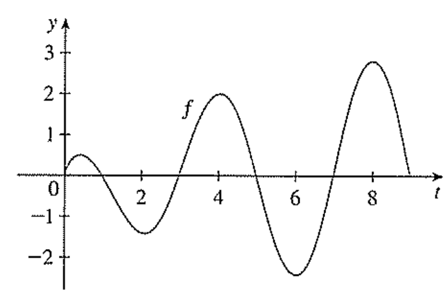
(a) ¿En qué valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g?

(b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?

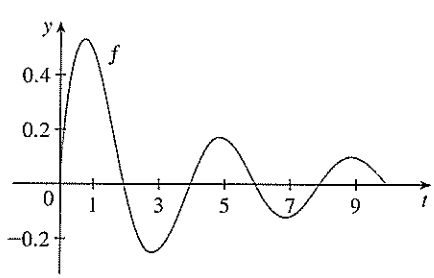
(c) ¿En qué intervalos g es cóncava hacia abajo?

(d) Trace la gráfica de g.

63.



64.



65–66 Evalúe el límite reconociendo primero la suma como una suma de Riemann para una función definida en [0, 1].

61. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

62. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

67. Justifique (3) para el caso $h < 0$.

68. Si f es continua y g y h son funciones derivables, determine una fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$$

69. (a) Demuestre que $1 \leqslant \sqrt{1+x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

(b) Demuestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leqslant 1.25$.

70. (a) Demuestre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Deduce que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geqslant \frac{1}{2}$.

71. Demostrar

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \leqslant 0.1$$

comparando el integrando a una función de lo más simple.

72. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y $$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

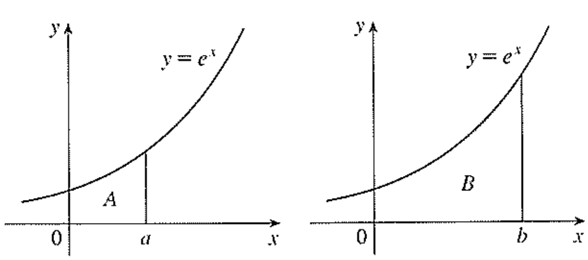
(a) Encuentre una expresión para $g(x)$ similar a la correspondiente a $f(x)$.
(b) Trace las gráficas de f y g.
(c) ¿En dónde es derivable f? ¿Dónde es derivable g?

73. Halle una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

para toda $x > 0$.

74. El área B es tres veces el área A. Exprese b en términos de a.



75. Una empresa de fabricación tiene una pieza importante de un equipo que se deprecia a la tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que se le sometió a su más reciente reparación. Como cada vez que la máquina se somete a una reparación mayor se incurre en un costo fijo, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre las reparaciones mayores.

(a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\,ds$ representa la pérdida en valor de la máquina a lo largo del tiempo t a partir de la última reparación mayor.

(b) Haga que $C = C(t)$ esté dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right]$$

¿Qué representa C y por qué desearía la empresa minimizar C?

(c) Demuestre que C tiene un valor mínimo sobre los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

76. Una compañía de alta tecnología compra un sistema de cómputo nuevo cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará con una rapidez $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento en una proporción $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía desea determinar el tiempo óptimo para reemplazar el sistema.

(a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$$

Demuestre que los números críticos de C se presentan en los números t donde $C(t) = f(t) + g(t)$.

(b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y $$g(t) = \frac{Vt^2}{12\,900} \qquad t > 0$$

Determine la duración del tiempo T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ equivalga al valor inicial V.

(c) Determine el valor mínimo absoluto de C sobre $(0, T]$.

(d) Trace las gráficas de C y $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas y compruebe el resultado del inciso (a) en este caso.

5.4 INTEGRALES INDEFINIDAS Y EL TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL

Ya vio en la sección 5.3 que mediante la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se obtiene un método muy eficaz para evaluar la integral definida de una función, si supone que puede encontrar una antiderivada de la función. En esta sección se presenta una notación para la antiderivada, se repasan las fórmulas de las antiderivadas y se usan para evaluar integrales definidas. Asimismo, replantea el FTC2, de una manera que facilita más aplicarlo a problemas relacionados con las ciencias y la ingeniería.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Ambas partes del teorema fundamental establecen relaciones entre antiderivadas e integrales definidas. La parte 1 establece que si f es continua, por lo tanto $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 plantea que $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede determinar evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

Necesita una notación conveniente para las antiderivadas que facilite trabajar con ellas. Debido a la relación dada por el teorema fundamental entre las antiderivadas y las integrales, por tradición se usa la notación $\int f(x)\,dx$ para una antiderivada de f y se llama **integral indefinida**. Por esto,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)}$$

Por ejemplo, puede escribir

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

De este modo, considere una integral indefinida como la representante de una *familia* entera de funciones, (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

Distinga con cuidado entre las integrales definidas y las indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, en tanto que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* (o una familia de funciones). La relación entre ellas la proporciona la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx \bigg]_a^b$$

La eficacia del teorema fundamental depende de que se cuente con un suministro de antiderivadas de funciones. Por lo tanto, se presenta de nuevo la tabla de fórmulas de antiderivación de la sección 4.9, más otras cuantas, en la notación de las integrales indefinidas. Cualquiera de las fórmulas se puede comprobar al derivar la función del lado derecho y obtener el integrando. Por ejemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

$\boxed{1}$ TABLA DE INTEGRALES INDEFINIDAS

$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$	$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int k\,dx = kx + C$	
$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
$\int \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$

De acuerdo con el teorema 4.9.1, la antiderivada más general *en un intervalo dado* se obtiene por la adición de una constante a una antiderivada particular. **Adopte la convención de que cuando se proporciona una fórmula para una integral indefinida general es válida sólo en un intervalo.** Así, escriba

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

con el entendimiento de que es válida en el intervalo $(0, \infty)$ o en el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se cumple a pesar del hecho de que la antiderivada general de la función $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, es

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

▨ En la figura 1 se tiene la gráfica de la integral indefinida del ejemplo 1 para varios valores de C. El valor de C es la intersección con el eje y.

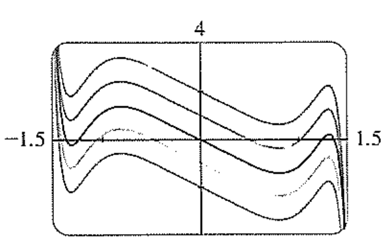


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Encuentre la integral indefinida general

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUCIÓN Si usa la convención y la tabla 1, tiene

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$$

$$= 10\,\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C = 2x^5 - 2\tan x + C$$

Debe comprobar esta respuesta derivándola. □

EJEMPLO 2 Evalúe $\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUCIÓN Esta integral indefinida no es evidente de inmediato en la tabla 1, por lo que se aplican las identidades trigonométricas para reescribir la función antes de integrar:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta &= \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta\\ &= \int \csc\theta\cot\theta\,d\theta = -\csc\theta + C\end{aligned}$$ □

EJEMPLO 3 Calcule $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN Al aplicar el TFC2 y la tabla 1, tiene

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx &= \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\Big]_0^3\\ &= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)\\ &= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75\end{aligned}$$

Compare este cálculo con el del ejemplo 2(b) de la sección 5.2. □

La figura 2 es la gráfica del integrando del ejemplo 4. Sabe por la sección 5.2 que el valor de la integral se puede interpretar como la suma de las áreas marcadas con un signo más menos el área marcada con un signo menos.

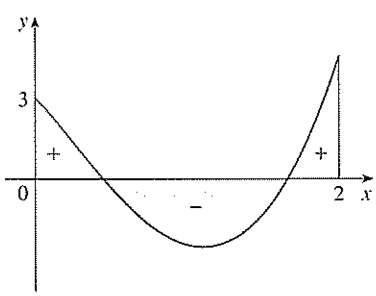


FIGURA 2

EJEMPLO 4 Determine $\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ e interprete el resultado en función de áreas.

SOLUCIÓN El teorema fundamental da

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx &= 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2\\ &= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2\\ &= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0\\ &= -4 + 3\tan^{-1}2\end{aligned}$$

Éste es el valor exacto de la integral. Si desea una aproximación decimal, utilice una calculadora para obtener un valor aproximado de $\tan^{-1}2$. Al hacerlo tiene

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0.67855$$ □

EJEMPLO 5 Evalúe $\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUCIÓN En primer lugar, necesita escribir el integrando en una forma más sencilla, al llevar a cabo la división:

$$\begin{aligned}\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt &= \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt\\ &= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9\\ &= \left[2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}(9)^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right] - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)\\ &= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}\end{aligned}$$

APLICACIONES

La parte 2 del teorema fundamental establece que si f es continua en $[a, b]$, por lo tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f. Esto significa que $F' = f$, de forma que se puede volver a escribir la ecuación como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabe que $F'(x)$ representa la relación de cambio de $y = F(x)$ con respecto a x y $F(b) - F(a)$ es el cambio en y cuando x cambia de a hacia b. [Advierta que y podría, por ejemplo, incrementarse y luego decrecer de nuevo. Si bien y podría cambiar en ambas direcciones, $F(b) - F(a)$ representa el cambio *total* en y.] De manera que puede volver a plantear verbalmente FTC2 en los términos siguientes:

TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL La integral de una relación de cambio es el cambio total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Este principio se puede aplicar a todas las relaciones de cambio en las ciencias naturales y sociales que se analizaron en la sección 3.7. Enseguida se dan unos cuantos ejemplos de esta idea:

- Si $V(t)$ es el volumen de agua en un depósito, en el instante t, entonces su derivada $V'(t)$ es la proporción a la cual fluye el agua hacia el depósito en el instante t. Por eso,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

  es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.
- Si $[C](t)$ es la concentración del producto de una reacción química en el instante t, entonces la velocidad de reacción es la derivada $d[C]/dt$. De tal manera,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[C]}{dt}\,dt = [C](t_2) - [C](t_1)$$

  es el cambio en la concentración de C, desde el instante t_1 hasta el t_2.
- Si la masa de una varilla, medida desde el extremo izquierdo hasta un punto x, es $m(x)$, entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. Por consiguiente,

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

  es la masa del segmento de la varilla entre $x = a$ y $x = b$.
- Si la rapidez de crecimiento de una población es dn/dt, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

  es el cambio total en la población durante el periodo desde t_1 hasta t_2. (La población aumenta cuando ocurren nacimientos y disminuye cuando se suscitan muertes. El cambio total toma en cuenta tanto nacimientos como decesos.)

- Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada $C'(x)$. De esa manera

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

es el incremento en el costo cuando la producción aumenta de x_1 unidades hasta x_2 unidades.

- Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con función de posición $s(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = s'(t)$, de modo que

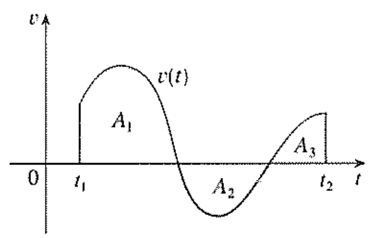
$$\boxed{2} \qquad \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

es el cambio de la posición, o *desplazamiento*, de la partícula durante el periodo desde t_1 hasta t_2. En la sección 5.1 se infirió que esto era verdadero para el caso en que el objeto se mueve en la dirección positiva, pero ahora ha probado que siempre es verdadero.

- Si quiere calcular la distancia recorrida durante el intervalo, tiene que considerar los intervalos cuando $v(t) \geqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la derecha) y también los intervalos cuando $v(t) \leqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la izquierda). En ambos casos la distancia se calcula al integrar $|v(t)|$, la magnitud de la rapidez. Por consiguiente

$$\boxed{3} \qquad \int_{t_1}^{t_2} |\,v(t)\,|\,dt = \text{distancia total recorrida}$$

En la figura 3 se muestra cómo interpretar el desplazamiento y la distancia recorrida en términos de las áreas debajo de una curva de velocidad.



$$\text{desplazamiento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{distancia} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$$

FIGURA 3

- La aceleración del objeto es $a(t) = v'(t)$, por eso

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

es el cambio en la velocidad, desde el instante t_1 hasta el t_2.

EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida en metros por segundo).
(a) Encuentre el desplazamiento de la partícula durante el periodo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
(b) Halle la distancia recorrida durante este periodo.

SOLUCIÓN
(a) Por la ecuación 2, el desplazamiento es

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Esto significa que la partícula se desplaza 4.5 m hacia la izquierda.

(b) Advierta que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$ y, por eso, $v(t) \leqslant 0$ en el intervalo $[1, 3]$ y $v(t) \geqslant 0$ en $[3, 4]$. Por esto, a partir de la ecuación 3 la distancia recorrida es

■ Para integrar el valor absoluto de $v(t)$, use la propiedad 5 de las integrales de la sección 5.2 para dividir la integral en dos partes, una donde $v(t) \leqslant 0$ y otra donde $v(t) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 |v(t)|\,dt &= \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt \\ &= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 \\ &= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 7 En la figura 4 se muestra el consumo de energía eléctrica (potencia) en la ciudad de San Francisco un día del mes de septiembre (P se mide en megawatts y t en horas, a partir de la medianoche). Estime la energía que se utilizó ese día.

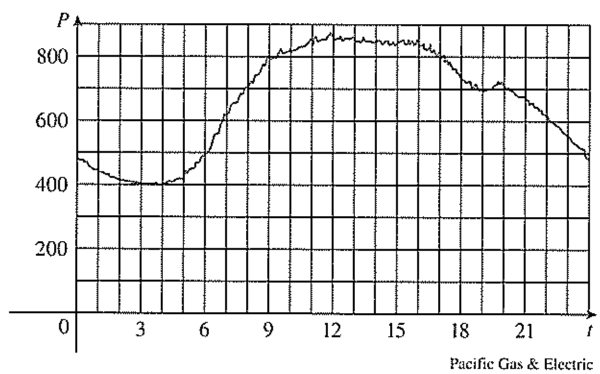


FIGURA 4

SOLUCIÓN La potencia es la relación de cambio de la energía: $P(t) = E'(t)$. De modo que, por el teorema del cambio neto,

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_0^{24} E'(t)\,dt = E(24) - E(0)$$

es la cantidad total de energía que se usó ese día. Haga una aproximación de la integral con la regla del punto de en Medio con 12 subintervalos y $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}\int_0^{24} P(t)\,dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\,\Delta t \\ &\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850 \\ &\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2) \\ &= 15\,840\end{aligned}$$

La energía usada fue de unos 15 840 megawatt-horas. □

■ Una nota acerca de unidades

¿Cómo sabe qué unidades usar para la energía en el ejemplo 7? La integral $\int_0^{24} P(t)\,dt$ se define como el límite de las sumas de términos de la forma $P(t_i^*)\,\Delta t$. Ahora bien, $P(t_i^*)$ se mide en megawatts y Δt en horas, de modo que su producto se mide en megawatt-horas. Lo mismo es verdadero para el límite. En general, la unidad de medida para $\int_a^b f(x)\,dx$ es el producto de la unidad para $f(x)$ y la unidad para x.

5.4 EJERCICIOS

1–4 Compruebe mediante derivación que la fórmula es correcta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \mathrm{sen}\,x - \tfrac{1}{3}\mathrm{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx} + C$

5–18 Determine una integral indefinida general.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})dx$

6. $\displaystyle\int (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2})\,dx$

7. $\displaystyle\int (x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x - 2)\,dx$

8. $\displaystyle\int (y^3 + 1.8y^2 - 2.4y)\,dy$

9. $\displaystyle\int (1-t)(2+t^2)\,dt$

10. $\displaystyle\int v(v^2+2)^2 dv$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$

13. $\displaystyle\int (\mathrm{sen}\,x + \mathrm{senh}\,x)\,dx$

14. $\displaystyle\int (\csc^2 t - 2e^t)\,dt$

15. $\displaystyle\int (\theta - \csc\theta\cot\theta)\,d\theta$

16. $\displaystyle\int \sec t(\sec t + \tan t)\,dt$

17. $\displaystyle\int (1 + \tan^2\alpha)\,d\alpha$

18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{\mathrm{sen}\,x}\,dx$

19–20 Determine la integral indefinida general. Ilustre mediante una gráfica varios miembros de la familia en la misma pantalla.

19. $\displaystyle\int (\cos x + \tfrac{1}{2}x)\,dx$

20. $\displaystyle\int (e^x - 2x^2)\,dx$

21–44 Evalúe la integral.

21. $\displaystyle\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x - e^x)\,dx$

24. $\displaystyle\int_{-2}^0 (u^5 - u^3 + u^2)\,du$

25. $\displaystyle\int_{-2}^2 (3u+1)^2\,du$

26. $\displaystyle\int_0^4 (2v+5)(3v-1)\,dv$

27. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)\,dt$

28. $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{2t}\,dt$

29. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left(4y^3 + \frac{2}{y^3}\right)dy$

30. $\displaystyle\int_1^2 \frac{y + 5y^7}{y^3}\,dy$

31. $\displaystyle\int_0^1 x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^5 (2e^x + 4\cos x)\,dx$

33. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{5}{x}}\,dx$

34. $\displaystyle\int_1^9 \frac{3x-2}{\sqrt{x}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^{\pi} (4\,\mathrm{sen}\,\theta - 3\cos\theta)\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$

39. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\mathrm{senh}\,x + \cosh x}\,dx$

41. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{t^4-1}\,dt$

42. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{x^2}\,dx$

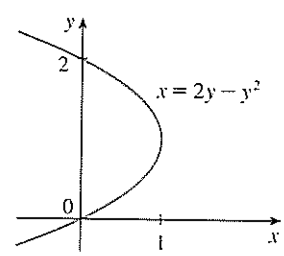
43. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |\mathrm{sen}\,x|\,dx$

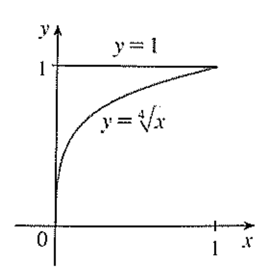
45. Use una gráfica para estimar las intersecciones con el eje x de la curva $y = x + x^2 - x^4$. Luego utilice esta información para estimar el área de la región que se encuentra debajo de la curva y arriba del eje x.

46. Repita el ejercicio 45 para la curva $y = 2x + 3x^4 - 2x^6$.

47. El área de la región que se encuentra a la derecha del eje y y a la izquierda de la parábola $x = 2y - y^2$ (el área sombreada de la figura) se expresa con la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$. (Gire su cabeza en sentido de las manecillas del reloj y considere que la región se encuentra debajo de la curva $x = 2y - y^2$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$.) Encuentre el área de la región.



48. Las fronteras de la región sombreada son el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encuentre el área de esta región al escribir x como función de y e integrar con respecto a esta última (como en el ejercicio 47).



49. Si $w'(t)$ es la rapidez de crecimiento de un niño en libras por año, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t)\,dt$?

50. La corriente en un alambre se define como la derivada de la carga: $I(t) = Q'(t)$. (Véase el ejemplo 3 de la sección 3.7.) ¿Qué representa $\int_a^b I(t)\,dt$?

51. Si se fuga aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ galones por minuto en el instante t, ¿qué representa $\int_0^{120} r(t)\,dt$?

52. Una población de abejas se inicia con 100 ejemplares y se incrementa en una proporción de $n'(t)$ especímenes por semana. ¿Qué representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

53. En la sección 4.7 se definió la función de ingreso marginal $R'(x)$ como la derivada de la función de ingreso $R(x)$, donde x es el número de unidades vendidas. ¿Qué representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

54. Si $f(x)$ es la pendiente de un sendero a una distancia de x millas del principio del mismo, ¿qué representa $\int_3^5 f(x)\,dx$?

55. ¿Si x se mide en metros y $f(x)$ en newtons, ¿cuáles son las unidades para $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

56. Si las unidades para x son pies y las unidades para $a(x)$ son libras por pie, ¿cuáles son las unidades para da/dx? ¿Qué unidades tiene $\int_2^8 a(x)\,dx$?

57–58 Se da la función de velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encuentre (a) el desplazamiento, y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo dado.

57. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

58. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

59–60 Se dan la función de aceleración (en m/s²) y la velocidad inicial para una partícula que se desplaza a lo largo de una recta. Encuentre (a) la velocidad en el instante t y (b) la distancia recorrida durante el intervalo dado.

59. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

60. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

---

61. Se da la densidad lineal de una varilla de longitud 4 m mediante $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida en kilogramos por metro, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Encuentre la masa total de esta última.

62. Del fondo de un tanque de almacenamiento fluye agua en una cantidad de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encuentre la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.

63. La velocidad de un automóvil se leyó en su velocímetro a intervalos de diez segundos y se registró en una tabla. Use la regla del punto medio para estimar la distancia recorrida por el vehículo.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

64. Suponga que un volcán hace erupción y en la tabla se proporcionan las lecturas de la cantidad a la que se expelen materiales sólidos hacia la atmósfera. El tiempo t se mide en segundos y las unidades para $r(t)$ son toneladas métricas por segundo.

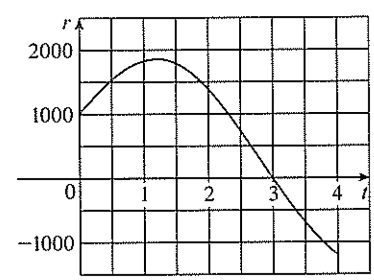
t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dé estimaciones superiores e inferiores para la cantidad $Q(6)$ de materiales expelidos una vez que transcurren 6 segundos.

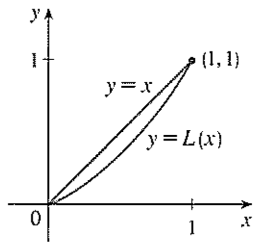
(b) Use la regla del punto medio para estimar $Q(6)$.

65. El costo marginal de fabricar x yardas de cierta tela es $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ (en dólares por yarda). Encuentre el incremento en el costo si el nivel de producción aumenta de 2000 a 4000 yardas.

66. Fluye agua hacia adentro y afuera de un tanque de almacenamiento. Se muestra una gráfica de la relación de cambio $r(t)$ del volumen de agua que hay en el tanque, en litros por día. Si la cantidad de agua que contiene el tanque en el instante $t = 0$ es 25 000 L, use la regla del punto medio para estimar la cantidad de agua cuatro días después.



67. Los economistas usan una distribución acumulada, llamada *curva de Lorenz*, para describir la distribución del ingreso entre las familias en un país dado. Típicamente, una curva de Lorenz se define en $[0, 1]$, con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ y es continua, creciente y cóncava hacia arriba. Los puntos de esta curva se determinan ordenando todas las familias según sus ingresos y calculando el porcentaje de ellas cuyos ingresos son menores que, o iguales a, un porcentaje dado del ingreso total del país. Por ejemplo, el punto $(a/100, b/100)$ está sobre la curva de Lorenz, si el $a\%$ inferior de las familias recibe menos del $b\%$ del ingreso total o un porcentaje igual a éste. Se tendría la *igualdad absoluta* de la distribución del ingreso si el $a\%$ inferior de las familias recibe el $a\%$ del ingreso, en cuyo caso la curva de Lorenz sería la recta $y = x$. El área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ mide en cuánto difiere la distribución del ingreso de la igualdad absoluta. El *coeficiente de desigualdad* es la relación del área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ al área debajo de $y = x$.



(a) Demuestre que el coeficiente de desigualdad es el doble del área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$; es decir, demuestre que

$$\text{coeficiente de desigualdad} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(b) La distribución del ingreso para cierto país se representa mediante la curva de Lorenz definida por la ecuación

$$L(x) = \tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{7}{12}x$$

¿Cuál es el porcentaje del ingreso total recibido por el 50% inferior de las familias? Encuentre el coeficiente de desigualdad.

68. El 7 de mayo de 1992, el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla se dan los datos de la velocidad del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	319
Estrangulación al 89%	20	447
Estrangulación al 67%	32	742
Estrangulación al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4151

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de tercer grado.

(b) Use el modelo del inciso (a) para estimar la altura alcanzada por el *Endeavour*, 125 segundos después del despegue.

REDACCIÓN DE PROYECTO

NEWTON, LEIBNIZ Y LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO

Los inventores del cálculo fueron sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pero las ideas básicas detrás de la integración fueron investigadas hace 2500 años por los antiguos griegos, como Eudoxo y Arquímedes, y que Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow (1630-1677) y otros fueron los pioneros en hallar tangentes. Barrow, el profesor de Newton en Cambridge, fue el primero en comprender la relación inversa entre la derivación y la integración. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue usar esta relación, en la forma del teorema fundamental del cálculo, para convertir este último en una disciplina matemática sistemática. En este sentido es que se da a Newton y Leibniz el crédito por la invención del cálculo.

Lea acerca de las colaboraciones de estos hombres en una o más de las referencias que se proporcionan en la bibliografía y escriba un informe sobre uno de los tres temas siguientes. Puede incluir detalles biográficos, pero el reporte debe concentrarse en una descripción, con cierto detalle, de los métodos y notaciones. En particular, consulte uno de los libros fuente, en los cuales se dan extractos de las publicaciones originales de Newton y Leibniz, traducidas del latín al inglés.

- El papel de Newton en el desarrollo del cálculo.
- El papel de Leibniz en el desarrollo del cálculo.
- La controversia entre los seguidores de Newton y los de Leibniz sobre la prioridad en la invención del cálculo.

Bibliografía

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics*, Nueva York: John Wiley, 1987, capítulo 19.

2. Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Nueva York: Dover, 1959, capítulo V.
3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, capítulos 8 y 9.
4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed., Nueva York: Saunders, 1990, Capítulo 11.
5. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, Nueva York: Scribner's, 1974. Véase el artículo sobre Leibniz escrito por Joseph Hofmann, en el volumen VIII, y el artículo sobre Newton escrito por I. B. Cohen, en el volumen X.
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: Harper-Collins, 1993, capítulo 12.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York: Oxford University Press, 1972, capítulo 17.

Libros fuente

1. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Londres: MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, Londres, MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1969, capítulo V.

5.5 LA REGLA DE LA SUSTITUCIÓN

En virtud del teorema fundamental, es importante poder hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no indican cómo evaluar integrales como

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx$$

Para hallar esta integral, aplique la estrategia para la solución de problemas de *introducir algo adicional*. En este caso, el "algo adicional" es una nueva variable; cambie de una variable x a una variable u. Suponga que hace que u sea la cantidad debajo del signo integral de (1), $u = 1 + x^2$. En tal caso la diferencial de u es $du = 2x\,dx$. Advierta que si la dx en la notación para una integral se interpretara como una diferencial, después en (1) se tendría la diferencial $2x\,dx$ y, por consiguiente, desde un punto de vista formal y sin justificar este cálculo, podría escribir

En la sección 3.10 se definieron las diferenciales. Si $u = f(x)$, por lo tanto

$$du = f'(x)\,dx$$

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1 + x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, 2x\, dx = \int \sqrt{u}\, du$$
$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C$$

Pero ahora podría comprobar que tiene la respuesta correcta aplicando la regla de la cadena para derivar la función final de la ecuación (2):

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{2}(x^2 + 1)^{1/2} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

En general, este método funciona siempre que tiene una integral que pueda escribir en la forma $\int f(g(x))g'(x)\, dx$. Observe que si $F' = f$, en consecuencia

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

porque, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Si hace el "cambio de variable" o la "sustitución" $u = g(x)$, en seguida, a partir de la ecuación (3) tiene

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

o bien, si se escribe $F' = f$ se obtiene

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Por lo tanto, ha probado la regla siguiente:

$\boxed{4}$ **REGLA DE SUSTITUCIÓN** Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo I, y f es continua sobre I, en tal caso

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Advierta que se probó la regla de sustitución para la integración aplicando la regla de la cadena para la derivación. Asimismo, observe que, si $u = g(x)$, por lo tanto $du = g'(x)\,dx$, de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du de (4) como diferenciales.

Así pues, la regla de sustitución expresa: **es permitido operar con dx y du después de los signos de integral como si fueran diferenciales.**

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\,dx$.

SOLUCIÓN Haga la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\,dx$, la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. De este modo, con $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ y la regla de sustitución, tiene

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

Compruebe la respuesta al derivarla.

Advierta que en la etapa final tuvo que regresar a la variable original x. □

La idea detrás de la regla de sustitución es reemplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que sea función de x. Así, en el ejemplo 1 reemplace la integral $\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx$ con la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

El reto principal en la aplicación de la regla de sustitución es pensar en una sustitución apropiada. Intente elegir u como alguna función en el integrando cuya diferencial también se presente (excepto para un factor constante). Este fue el caso en el ejemplo 1. Si no es posible, escoja u como alguna parte complicada del integrando (tal vez la función interna de una función compuesta). Encontrar la sustitución correcta conlleva algo de arte. No es raro que la conjetura sea errónea; si su primera suposición no funciona, intente con otra.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int \sqrt{2x+1}\, dx$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = 2x + 1$. Por lo tanto $du = 2\,dx$, de modo que $dx = du/2$. De esta forma, la regla de sustitución da

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C$$

$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

SOLUCIÓN 2 Otra sustitución posible es $u = \sqrt{2x+1}$. En tal caso

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{de suerte que} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\, du = u\, du$$

(O bien, observe que $u^2 = 2x + 1$, de suerte que $2u\,du = 2\,dx$.) En consecuencia,

$$\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int u \cdot u\, du = \int u^2\, du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

□

EJEMPLO 3 Encuentre $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1 - 4x^2$. Después $du = -8x\,dx$, de manera que $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx = -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\, du$$

$$= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

□

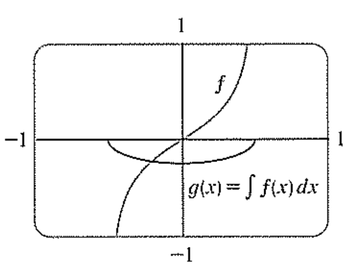


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

La respuesta para el problema 3 puede comprobarse por derivación pero, en lugar de ello, hágalo de manera visual con una gráfica. En la figura 1 se usa una computadora para trazar las gráficas del integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ y de su integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (tome el caso $C = 0$). Advierta que $g(x)$ decrece cuando $f(x)$ es negativa, crece cuando $f(x)$ es positiva y tiene su valor mínimo cuando $f(x) = 0$. De modo que parece razonable, a partir de la evidencia gráfica, que g sea una antiderivada de f.

EJEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\, dx$.

SOLUCIÓN Si hace $u = 5x$, en seguida $du = 5\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{5}\,du$. Por consiguiente

$$\int e^{5x}\, dx = \tfrac{1}{5}\int e^u\, du = \tfrac{1}{5}e^u + C = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

□

EJEMPLO 5 Calcule $\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx$.

SOLUCIÓN Una sustitución aceptable es más obvia si factoriza x^5 como $x^4 \cdot x$. Sea $u = 1 + x^2$. A continuación $du = 2x\,dx$, de modo que $x\,dx = du/2$. También, $x^2 = u - 1$, de modo que $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, x^4 \cdot x\, dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u - 1)^2 \frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2 \cdot \tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C \qquad \square$$

V EJEMPLO 6 Calcule $\int \tan x\, dx$.

SOLUCIÓN En primer lugar, escriba la tangente en términos de seno y coseno:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

Esto sugiere que debe sustituir $u = \cos x$, dado que entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y, como consecuencia, $\operatorname{sen} x\, dx = -du$:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du$$

$$= -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C \qquad \square$$

Puesto que $-\ln |\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln |\sec x|$, el resultado del ejemplo 6 también puede escribirse como

5
$$\boxed{\int \tan x\, dx = \ln |\sec x| + C}$$

INTEGRALES DEFINIDAS

Cuando se evalúa una integral *definida* por sustitución, se pueden aplicar dos métodos. Uno consiste en evaluar primero la integral indefinida y, enseguida, aplicar el teorema fundamental. Por ejemplo, si se usa el resultado del ejemplo 2, se tiene

$$\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx = \int \sqrt{2x + 1}\, dx \Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2}\Big]_0^4$$

$$= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27 - 1) = \tfrac{26}{3}$$

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

En esta regla se afirma que cuando se usa una sustitución en una integral definida, debe poner todo en términos de la nueva variable u, no sólo x y dx, sino también los límites de integración. Los nuevos límites de integración son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

6 REGLA DE SUSTITUCIÓN PARA INTEGRALES DEFINIDAS Si g' es continua en $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f. En consecuencia, por (3), $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, de modo que de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica TFC2 una segunda vez, también resulta

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

□

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando (6).

SOLUCIÓN Si se aplica la sustitución a partir de la solución 1 del ejemplo 2, se tiene $u = 2x + 1$ y $dx = du/2$. Para encontrar los nuevos límites de integración, advierta que

cuando $x = 0$, $u = 2(0) + 1 = 1$ y cuando $x = 4$, $u = 2(4) + 1 = 9$

Por lo tanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$

$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que al usar (6) *no* se regresa a la variable x después de integrar. Sencillamente evaluó la expresión en u entre los valores apropiados de u. □

En la figura 2 se muestra la interpretación geométrica del ejemplo 7. La sustitución $u = 2x + 1$ alarga el intervalo $[0, 4]$ con un factor de 2 y lo traslada hacia la derecha una unidad. La Regla de Sustitución hace ver que las dos áreas son iguales.

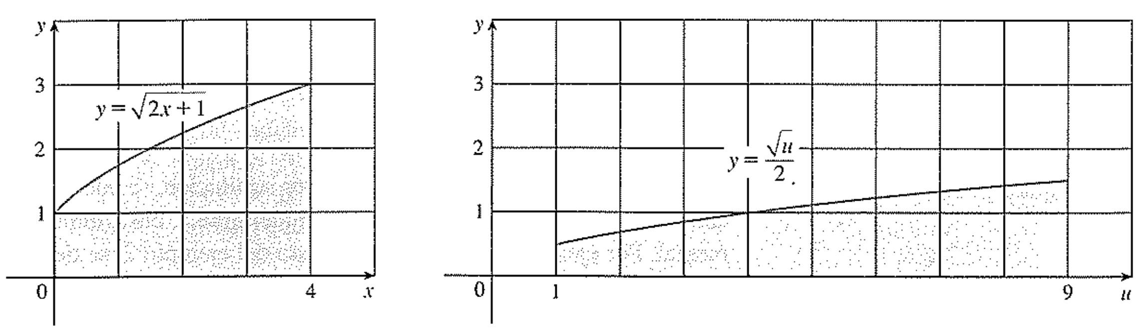


FIGURA 2

La integral dada en el ejemplo 8 es una abreviatura para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_1^2 \dfrac{dx}{(3-5x)^2}$.

SOLUCIÓN Sea $u = 3 - 5x$. A continuación $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -du/5$.

Cuando $x = 1$, $u = -2$ y cuando $x = 2$, $u = -7$. Por esto

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\bigg]_{-2}^{-7}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$

□

EJEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Haga $u = \ln x$ porque su diferencial $du = dx/x$ se presenta en la integral. Cuando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; cuando $x = e$, $u = \ln e = 1$. De modo que

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$

□

Como la función $f(x) = (\ln x)/x$ en el ejemplo 9 es positiva para $x > 1$, la integral representa el área de la región sombreada en la figura 3.

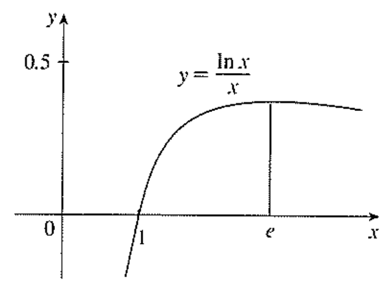


FIGURA 3

SIMETRÍA

En el teorema siguiente se usa la regla de sustitución para las integrales definidas, (6), con el fin de simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

> $\boxed{7}$ **INTEGRALES DE FUNCIONES SIMÉTRICAS** Suponga que f es continua sobre $[-a, a]$.
>
> (a) Si f es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
>
> (b) Si f es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN Separe la integral en dos:

$$\boxed{8}\quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

En la primera integral de la extrema derecha haga la sustitución $u = -x$. Después $du = -dx$ y, cuando $x = -a$, $u = a$. Por consiguiente,

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

con lo cual, la ecuación 8 se convierte en

$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

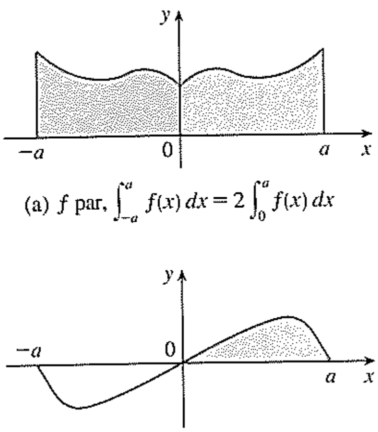
(a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$, de esa manera la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

(b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$ y la ecuación 9 da

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$ □

La figura 4 ilustra el teorema 7. Para el caso en que f es positiva y par, en el inciso (a) se hace ver que el área debajo de $y = f(x)$ desde $-a$ hasta a es el doble del área desde 0 hasta a, en virtud de la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede expresar como el área arriba del eje x y debajo de $y = f(x)$ menos el área debajo del eje x y arriba de la curva. Por esto, en el inciso (b) se hace ver que el área es 0 porque las áreas se cancelan.



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

(b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

EJEMPLO 10 Dado que $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y, por consiguiente,

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_{0}^{2} (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$ □

EJEMPLO 11 Como $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es impar y, de este modo,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$ □

5.5 EJERCICIOS

1–6 Evalúe la integral efectuando la sustitución dada.

1. $\int e^{-x}\,dx,\ u = -x$

2. $\int x^3(2 + x^4)^5\,dx, \quad u = 2 + x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx, \quad u = x^3 + 1$

4. $\int \dfrac{dt}{(1 - 6t)^4}, \quad u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta,\ u = \cos\theta$

6. $\int \dfrac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx,\ u - 1/x$

7–46 Evalúe la integral indefinida.

7. $\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

13. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$

15. $\int \operatorname{sen} \pi t\,dt$

16. $\int \dfrac{x}{x^2 + 1}\,dx$

17. $\int \dfrac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

18. $\int \sec 2\theta \tan 2\theta\,d\theta$

$\boxed{19.}$ $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

20. $\int \frac{dx}{ax+b}\ (a \neq 0)$

21. $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}(1+x^{3/2})\,dx$

23. $\int \cos\theta\,\operatorname{sen}^6\theta\,d\theta$

24. $\int (1+\tan\theta)^5\sec^2\theta\,d\theta$

$\boxed{25.}$ $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

26. $\int e^{\cos t}\operatorname{sen} t\,dt$

27. $\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}}\,dz$

28. $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

29. $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

30. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

32. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

$\boxed{33.}$ $\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$

34. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

36. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

37. $\int \cot x\,dx$

38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan t}}$

39. $\int \sec^3 x\tan x\,dx$

40. $\int \operatorname{sen} t\,\sec^2(\cos t)\,dt$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{sen}^{-1}x}$

42. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

$\boxed{43.}$ $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$

45. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

46. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

47–50 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, dibujando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

47. $\int x(x^2-1)^3\,dx$

48. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$

50. $\int \tan^2\theta\,\sec^2\theta\,d\theta$

51–70 Evalúe la integral definida.

51. $\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

52. $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

53. $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$

54. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

55. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\,dt$

56. $\int_{1/6}^{1/2} \csc\pi t\,\cot\pi t\,dt$

57. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \tan^3\theta\,d\theta$

58. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

$\boxed{59.}$ $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\operatorname{sen} x}{1+x^6}\,dx$

61. $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\,dx$

63. $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx\ (a>0)$

$\boxed{64.}$ $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

65. $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

66. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

67. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

68. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

70. $\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T-\alpha)\,dt$

71–72 Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra debajo de la curva dada. Enseguida encuentre el área exacta.

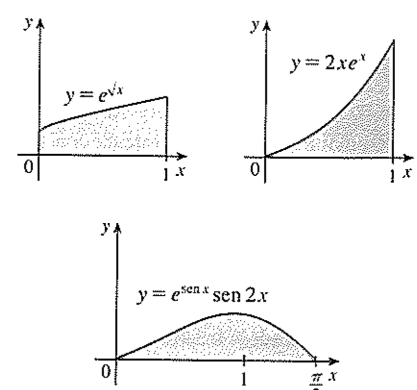
71. $y = \sqrt{2x+1},\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

72. $y = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x,\quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

73. Evalúe $\int_{-2}^{2}(x+3)\sqrt{4-x^2}\,dx$ al escribirla como una suma de dos integrales e interpretar una de ellas en términos de un área.

74. Evalúe $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$ al efectuar una sustitución e interpretar la integral resultante en términos de un área.

$\boxed{75.}$ ¿Cuáles de las áreas siguientes son iguales? ¿Por qué?



76. Un modelo de rapidez de metabolismo fundamental, en kcal/h de un hombre joven es $R(t) = 85 - 0.18\cos(\pi t/12)$, donde t es el tiempo en horas a partir de las 5:00 AM. ¿Cuál es el metabolismo fundamenta total de este hombre, $\int_0^{24} R(t)dt$, en un periodo de 24 horas?

77. Un tanque de almacenamiento de petróleo se rompe en $t = 0$ y el petróleo se fuga del tanque en una proporción de $r(t) = 100^{e^{-0.01t}}$ litros por cada minuto. ¿Cuánto petróleo se escapa durante la primera hora?

78. Una población de bacterias se inicia con 400 ejemplares y crece con una rapidez de $r(t) = (450.268)e^{1.12567t}$ bacterias por hora. ¿Cuántos especímenes habrá después de tres horas?

79. La respiración es cíclica y un ciclo respiratorio completo —desde el principio de la inhalación hasta el final de la exhalación— requiere alrededor de 5 s. El gasto máximo de aire que entra en los pulmones es de más o menos 0.5 L/s. Esto explica en parte por qué a menudo se ha usado la función $f(t) = \frac{1}{2}\,\text{sen}(2\pi t/5)$ para modelar el gasto de aire hacia los pulmones. Úselo para hallar el volumen de aire inhalado en los pulmones en el tiempo t.

80. Alabama Instruments Company ha montado una línea de producción para fabricar una calculadora nueva. El índice de producción de estas calculadoras, después de t semanas es

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Advierta que la producción tiende a 5 000 por semana a medida que avanza el tiempo, pero que la producción inicial es más baja debido a que los trabajadores no están familiarizados con las técnicas nuevas.) Encuentre la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta.

81. Si f es continua y $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, encuentre $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

82. Si f es continua y $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, encuentre $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

83. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $0 < a < b$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

84. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

85. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

86. Si f es continua en $[0, \pi]$, utilice la sustitución $u = \pi - x$ para demostrar que

$$\int_0^\pi xf(\text{sen } x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\text{sen } x)\,dx$$

87. Mediante el ejercicio 86 calcule la integral

$$\int_0^\pi \frac{x \text{ sen } x}{1 + \cos^2 x}\,dx$$

88. (a) Si f es continua, comprobar que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\text{sen} x)\,dx$$

(b) Aplique el inciso (a) para valorar

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \text{ y } \int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 x\,dx$$

5 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación que use.
(b) Si $f(x) \geqslant 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.
(c) Si $f(x)$ toma tanto valores positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.

2. (a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua, desde a hasta b.
(b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x) \geqslant 0$?
(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos? Ilustre la respuesta con un diagrama.

3. Enuncie las dos partes del teorema fundamental del cálculo.

4. (a) Enuncie el teorema del cambio total.
(b) Si $r(t)$ es la proporción a la cual el agua fluye hacia un depósito, ¿qué representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponga que una partícula se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una recta con una velocidad $v(t)$, medida en pies por segundo, y una aceleración $a(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
(b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
(c) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. (a) Explique el significado de la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
(b) ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ y la integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique con exactitud qué significa la proposición de que "la derivación y la integración son procesos inversos".

8. Enuncie la regla de sustitución. En la práctica, ¿cómo puede usarla?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

3. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$ entonces

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Si f' es continua sobre $[1, 3]$, entonces $\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$.

7. Si f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

8. Si f y g son derivables y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, entonces $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right)dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5}(ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx$

11. $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$

12. La expresión $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = x - x^3$ de 0 a 2.

13. Todas las funciones continuas tienen derivadas.

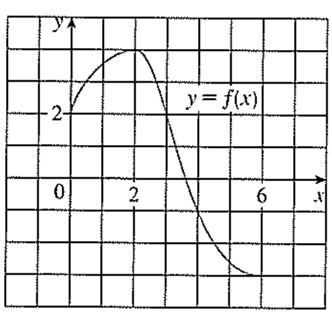
14. Todas las funciones continuas tienen antiderivadas.

15. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x)$$

EJERCICIOS

1. Use la gráfica dada de f para hallar la suma de Riemann con seis subintervalos. Tome los puntos muestra como (a) los puntos extremos de la izquierda y (b) los puntos medios. En cada caso, dibuje un diagrama y explique qué representa la suma de Riemann.



2. (a) Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

con cuatro subintervalos; tome los puntos extremos de la derecha como puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique qué representa la suma de Riemann.

(b) Use la definición de integral definida (con los puntos extremos de la derecha) para calcular el valor de la integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx$$

(c) Aplique el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso (b).

(d) Dibuje un diagrama para explicar el significado geométrico de la integral del inciso (b).

3. Evalúe

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)dx$$

interpretándola en términos de áreas.

4. Exprese

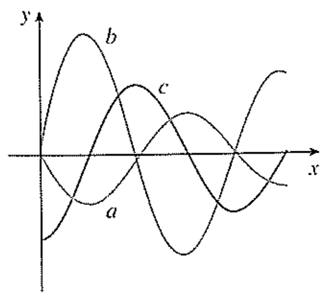
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i\,\Delta x$$

como una integral definida sobre el intervalo $[0, \pi]$ y, a continuación, evalúe la integral.

5. Si $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encuentre $\int_4^6 f(x)\,dx$.

CAS 6. (a) Escriba $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como un límite de sumas de Riemann, tomando los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. Utilice un sistema algebraico para computadora para evaluar la suma y calcular el límite.
(b) Aplique el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso (a).

7. En la figura se muestran las gráficas de f, f' y $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfica y explique sus selecciones



8. Evalúe:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}\right) dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}\,dx$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\,dt$

9–38 Evalúe la integral cuando exista.

9. $\displaystyle\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$

14. $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\displaystyle\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$

16. $\displaystyle\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{(t-4)^2}$

18. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\displaystyle\int_0^1 v^2\cos(v^3)\,dv$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \tan t}{2 + \cos t}\,dt$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

24. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{1 + \cot x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \pi t\, \cos \pi t\,dt$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, \cos(\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \tan x \ln(\cos x)\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$

34. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta\,\tan\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + \tan t)^3 \sec^2 t\,dt$

37. $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable trazando las gráficas de la función y de su antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra debajo de la curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$. Enseguida, encuentre el área exacta.

42. Dibuje la función $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x$ y use esa gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. A continuación evalúe la integral para confirmar su conjetura.

43–48 Encuentre la derivada de la función.

43. $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t^3}\,dt$

44. $\displaystyle F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\,dt$

45. $\displaystyle g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\,dt$

46. $\displaystyle g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1 - t^2}{1 + t^4}\,dt$

47. $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t}\,dt$

48. $\displaystyle y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49–50 Mediante la propiedad 8 de las integrales estime el valor de la integral.

49. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx$

50. $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\,dx$

51–54 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad.

51. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos x\,dx \leqslant \frac{1}{3}$

52. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\displaystyle\int_0^1 e^x \cos x\,dx \leqslant e - 1$

54. $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx \leqslant \pi/4$

55. Use la regla del punto medio $n = 6$ para obtener un valor aproximado de $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\,dx$.

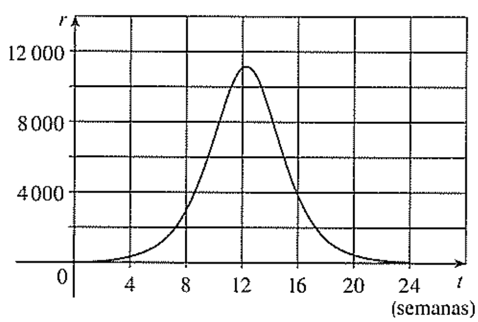
56. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con la función de velocidad $v(t) = t^2 - t$, donde v se mide en metros por segundo. Encuentre (a) el desplazamiento y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo $[0, 5]$.

57. Sea $r(t)$ la rapidez a la cual el petróleo del mundo es consumido, donde t se mide en años y empieza en $t = 0$ el primero de enero de 2000, y $r(t)$ se mide en barriles por año. ¿Qué representa $\int_0^8 r(t)\,dt$?

58. Se utiliza una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor en los tiempos que se listan en la tabla siguiente. Aplique la regla del punto medio para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

59. Una población de abejas aumentó en una proporción de $r(t)$ insectos por semana, donde la gráfica de r es como se ilustra. Use la regla del punto medio junto con seis subintervalos para estimar el aumento en la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



60. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Evalúe $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$ mediante la interpretación de la integral como una diferencia de áreas.

61. Si f es continua y $\int_0^2 f(x)\,dx = 6$, valore $\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta \, d\theta$.

62. En la sección 5.3 se introdujo la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$. En su teoría de la difracción de las ondas luminosas, Fresnel también usó la función

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\,dt$$

(a) ¿Sobre cuáles intervalos C es creciente?

(b) ¿Sobre cuáles intervalos C es cóncava hacia arriba?

CAS (c) Use una gráfica para resolver la ecuación siguiente, correcta hasta dos cifras decimales:

$$\int_0^x \cos(\pi t^2/2)\,dt = 0.7$$

CAS (d) Dibuje C y S en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

63. Estime el valor del número c tal que el área bajo la curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es igual a 1.

64. Suponga que en un inicio la temperatura en una varilla larga y delgada que se encuentra colocada a lo largo del eje x es $C/(2a)$, si $|x| \leq a$, y 0, si $|x| > a$. Se puede demostrar que si la difusividad calorífica de la varilla es k, por lo tanto la temperatura de esa varilla en el punto x, en el instante t, es

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\,du$$

Para hallar la distribución de temperaturas que se produce a partir de un punto caliente inicial concentrado en el origen, necesita calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use la regla de l'Hospital para hallar este límite.

65. Si f es una función continua tal que

$$\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

para toda x, encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponga que h es una función tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ y h'' dondequiera es continua. Evalúe $\int_1^2 h''(u)\,du$.

67. Si f' es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$2\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Determine $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\,dt$.

69. Si f es continua en $[0, 1]$, demuestre que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1 - x)\,dx$$

70. Evalúe

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9 \right]$$

71. Considere que f es continua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Hallar el valor de la integral $\int_0^1 f^{-1}(y)dx$.

PROBLEMAS ADICIONALES

Antes de ver la solución del ejemplo siguiente, cúbrala e intente resolver el problema por usted mismo.

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle \lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \right)$.

SOLUCIÓN Empiece por tener un panorama preliminar de los ingredientes de la función. ¿Qué sucede al primer factor, $x/(x-3)$, cuando x tiende a 3? El numerador tiende a 3 y el denominador tiende a 0, de modo que

$$\frac{x}{x-3} \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^+ \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{x-3} \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 3^-$$

El segundo factor tiende a $\int_3^3 (\operatorname{sen} t)/t\, dt$, lo cual es 0. No resulta claro qué sucede a la función como un todo. (Uno de los factores aumenta y el otro disminuye.) De modo que, ¿cómo proceder?

En la página 76 se analizan los principios de solución de problemas.

Uno de los principios de solución de problemas es *reconocer algo familiar*. ¿Existe una parte de la función que recuerde algo que ya ha visto? Bien, la integral

$$\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

tiene a x como su límite superior de integración y ese tipo de integral se presenta en la parte 1 del teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Esto sugiere que podría relacionarse con la derivación.

Una vez que empiece a pensar en la derivación, el denominador $(x-3)$ le recuerda algo más que debe de ser familiar: una de las formas de la definición de la derivada en el capítulo 2 es

$$F'(a) = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

y con $a = 3$ esto se convierte en

$$F'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3}$$

De modo que, ¿cuál es la función F en esta situación? Advierta que si define

$$F(x) = \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

por lo tanto $F(3) = 0$. ¿Qué se puede decir acerca del factor x en el numerador? Esto es una situación irregular, de modo que sáquelo como factor y conjunte el cálculo:

Otro enfoque consiste en usar la regla de l'Hospital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \right) &= \left(\lim_{x \to 3} x \right) \cdot \lim_{x \to 3} \frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt}{x - 3} \\
&= 3 \lim_{x \to 3} \frac{F(x) - F(3)}{x - 3} \\
&= 3F'(3) \\
&= 3\, \frac{\operatorname{sen} 3}{3} \qquad \text{(TFC1)} \\
&= \operatorname{sen} 3
\end{aligned}$$

□

PROBLEMAS

1. Si $x \operatorname{sen} \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\, dt$, donde f es una función continua, encuentre $f(4)$.

2. Encuentre el valor mínimo del área bajo la curva $y = x + 1/x$ desde $x = a$ hasta $x = a + 1.5$ para toda $a > 0$.

3. Si f es una función derivable tal que $f(x)$ nunca es 0 y $\int_0^x f(t)\, dt = [f(x)]^2$ para toda x, encuentre f.

4. (a) Trace la gráfica de varios miembros de la familia de funciones $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ y vea las regiones limitadas por estas curvas y el eje x. Haga una conjetura en cuanto a cómo se relacionan las áreas de estas regiones.
(b) Pruebe su conjetura del inciso (a).
(c) Vea de nuevo las gráficas del inciso (a) y úselas para trazar la curva descrita por vértices (los puntos más altos) de la familia de funciones. ¿Puede conjeturar qué tipo de curva es ésta?
(d) Halle una ecuación para la curva que trazó en el inciso (c).

5. Si $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\, dt$, donde $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\, dt$, encuentre $f'(\pi/2)$.

6. Si $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\, dt$, halle $f'(x)$.

7. Evalúe $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\, dt$.

8. En la figura se pueden ver dos regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ desde 0 hasta t, y $B(t)$ es el área del triángulo con vértices O, P y $(t, 0)$. Calcule $\lim_{t \to 0^+} A(t)/B(t)$.

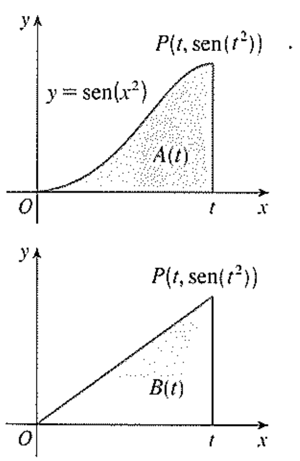


FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

9. Encuentre el intervalo $[a, b]$ para el cual el valor de la integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\, dx$ es un máximo.

10. Utilice una integral para estimar la suma $\sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i}$.

11. (a) Evalúe $\int_0^n [\![x]\!]\, dx$, donde n es un entero positivo.
(b) Calcule $\int_a^b [\![x]\!]\, dx$, donde a y b son números reales con $0 \leqslant a < b$.

12. Encuentre $\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1 + u^4}\, du \right) dt$.

13. Suponga que los coeficientes del polinomío cúbico $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ satisfacen la ecuación.

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$

Demuestre que la ecuación $P(x) = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1. ¿Puede generalizar este resultado para un polinomio de grado násimo?

14. En un evaporador se usa un disco circular y se hace girar en un plano vertical. Si debe estar parcialmente sumergido en el líquido de modo que se maximice el área humedecida expuesta del disco, demuestre que el centro de éste debe hallarse a una altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ arriba de la superficie del líquido.

15. Demuestre que si f es continua, en tal caso $\int_0^x f(u)(x - u)\, du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du$.

16. En la figura se muestra una región que consta de todos los puntos dentro de un cuadrado que están más cerca del centro que de los lados del cuadrado. Encuentre el área de la región.

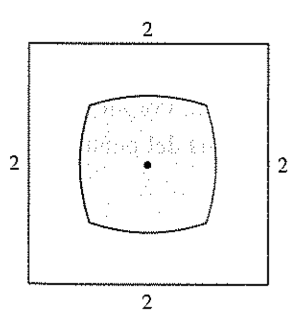


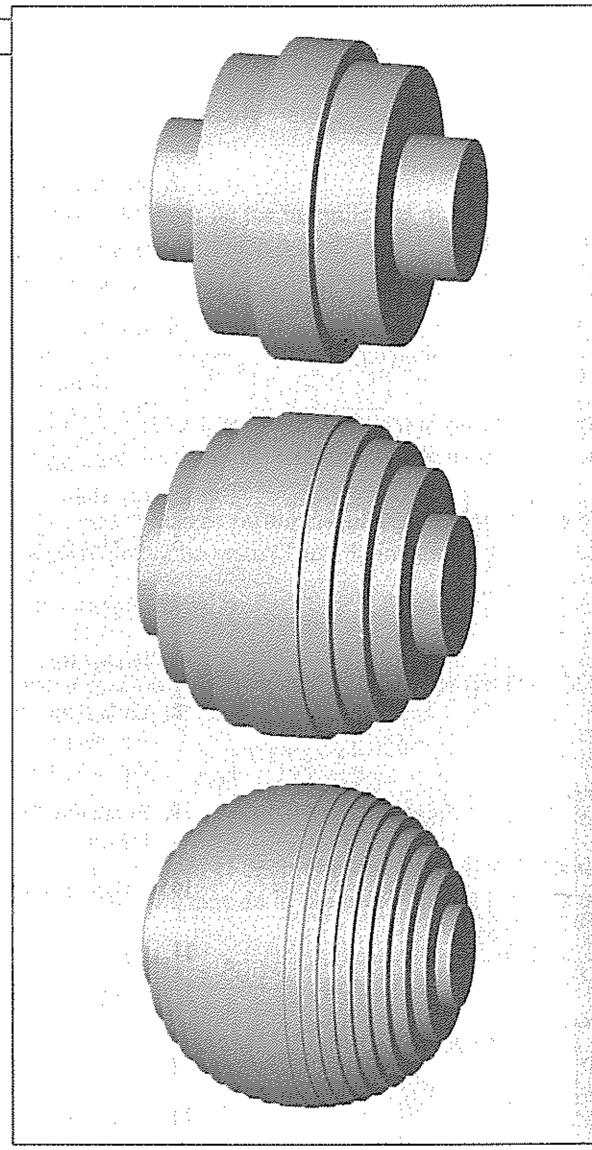
FIGURA PARA EL PROBLEMA 16

17. Evalúe $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + n}} \right)$.

18. Para cualquier número c, permita que $f_c(x)$ sea el más pequeño de los dos números $(x - c)^2$ y $(x - c - 2)^2$. En tal caso, defina $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\, dx$. Hallar los valores máximo y mínimo de $g(c)$ si $-2 \leqslant c \leqslant 2$.

6

APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN



El volumen de una esfera es el límite de la suma de volúmenes de los cilindros que se aproximan a una esfera.

En este capítulo ~~se~~ exploran algunas de las aplicaciones de la integral definida como calcular áreas entre curvas, volúmenes de sólidos y el trabajo que efectúa una fuerza variable. El tema común es el método general siguiente, que es similar al usado para determinar áreas bajo curvas: divida una cantidad Q en un gran número de partes pequeñas. Luego obtenga el valor aproximado de cada parte pequeña mediante una cantidad de la forma $f(x_i^*)\,\Delta x$ y en seguida aproxime a Q mediante una suma de Riemann. Después obtenga el límite y exprese Q como una integral. Por último, evalúe la integral usando el teorema fundamental del cálculo o la regla del punto medio.

6.1 ÁREAS ENTRE CURVAS

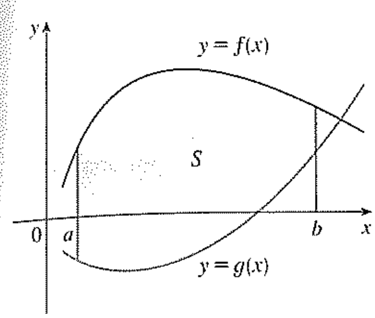


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

En el capítulo 5 se define y se calculan áreas de regiones que están bajo las gráficas de funciones. En este caso se usan integrales para calcular las áreas de regiones que quedan entre las gráficas de dos funciones.

Considere la región S que se ubica entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$. (Véase figura 1.)

De la misma manera como se señala para áreas bajo curvas de la sección 5.1, divida S en n franjas con igual anchura, y luego calcule el valor aproximado de la i-ésima franja mediante un rectángulo con base Δx y altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Véase figura 2. Si lo desea, podría tomar todos los puntos de muestra como extremos derechos, en cuyo caso $x_i^* = x_i$.) Por lo tanto, la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

es una aproximación a lo que se intuyo que es el área de S.

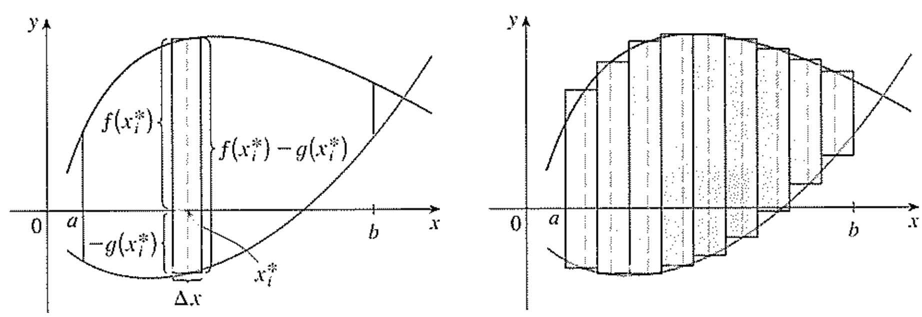


FIGURA 2 (a) Rectángulo representativo (b) Rectángulo de aproximación

Al parecer, esta aproximación es mejor cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, defina **área** A de S como el valor límite de la suma de áreas de estos rectángulos de aproximación.

$$\boxed{1} \qquad \boxed{A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x}$$

Identifique el límite en (1) como la integral definida de $f - g$. Por lo tanto, tiene la fórmula siguiente para el área.

> $\boxed{2}$ El área A de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$ es
>
> $$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Observe que en el caso especial donde $g(x) = 0$, S es la región bajo la gráfica de f y la definición general del área (1) se reduce a la definición anterior (definición 2 de la sección 5.1).

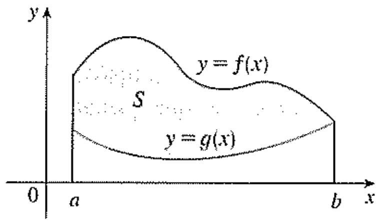


FIGURA 3
$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

En el caso donde tanto f y g son positivas, puede ver en la figura 3 por qué (2) es cierta:

$$A = [\text{área bajo } y = f(x)] - [\text{área bajo } y = g(x)]$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área de la región acotada por arriba con $y = e^x$, por abajo mediante $y = x$ y a los lados por $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 4. La curva del límite superior es $y = e^x$ y la curva del límite inferior es $y = x$. De este modo use la fórmula del área (2) con $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ y $b = 1$:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$

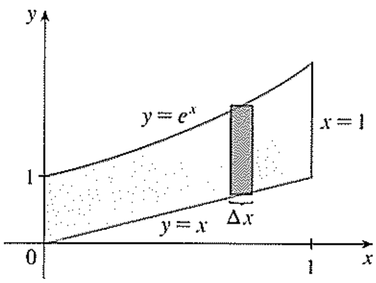


FIGURA 4

En la figura 4 se toma un rectángulo de aproximación representativo cuya anchura es Δx como recordatorio del procedimiento por medio del cual se define el área (1). En general, cuando plantee una integral para determinar un área, es útil elaborar un croquis de la región para identificar la curva superior y_T, la curva inferior y_B y el rectángulo de aproximación representativo como en la figura 5. Por consiguiente, el área de un rectángulo característico es $(y_T - y_B)\,\Delta x$ y la ecuación

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\,\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)\,dx$$

resume el procedimiento al añadir, en el sentido limitante, las áreas de todos los rectángulos representativos.

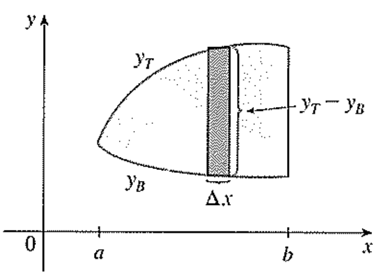


FIGURA 5

Observe que, en la figura 5, el límite o frontera izquierda se reduce a un punto, en tanto que en la figura 3, la frontera derecha se reduce a un punto. En el ejemplo siguiente, ambos límites se reducen a un punto, de modo que el primer paso es determinar a y b.

EJEMPLO 2 Calcule el área de la región definida por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN Primero determine los puntos de intersección de las parábolas resolviendo en forma simultánea sus ecuaciones. El resultado es $x^2 = 2x - x^2$, o $2x^2 - 2x = 0$. Por eso, $2x(x - 1) = 0$, de modo que $x = 0$ o 1. Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Según la figura 6, los límites superior e inferior son

$$y_T = 2x - x^2 \qquad \text{y} \qquad y_B = x^2$$

El área de un rectángulo representativo es

$$(y_T - y_B)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x$$

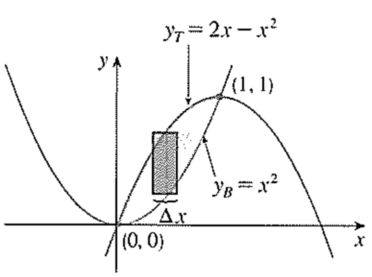


FIGURA 6

por lo que la región se sitúa entre $x = 0$ y $x = 1$. De modo que el área total es

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Algunas veces es difícil, o hasta imposible, determinar los puntos donde se cortan exactamente las dos curvas. Como se muestra en el ejemplo siguiente, con la ayuda de una calculadora para graficar o de una computadora, puede encontrar valores aproximados de los puntos de intersección, y luego proceder como antes.

EJEMPLO 3 Calcular el área aproximada de la región acotada por las curvas $y = x/\sqrt{x^2 + 1}$ y $y = x^4 - x$.

SOLUCIÓN Si tratara de determinar los puntos de intersección exactos, habría de resolver la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x^4 - x$$

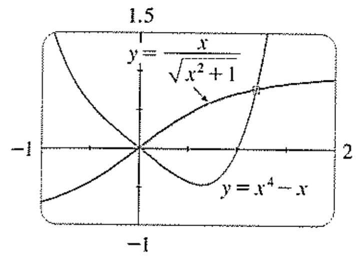


FIGURA 7

Esta ecuación luce muy difícil como para resolverla de manera exacta (de hecho, es imposible), de modo que recurra a una calculadora para graficar o a una computadora para trazar las gráficas de las dos curvas de la figura 7. Un punto de intersección es el origen. Haga un acercamiento en el otro punto de intersección y halle que $x \approx 1.18$. (Si se requiere mayor precisión, se podría aplicar el método de Newton o un buscador de raíces, si se cuenta con un instrumento para graficar.) En estos terminos, una aproximación al área entre las curvas es

$$A \approx \int_0^{1.18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - (x^4 - x) \right] dx$$

Para integrar el primer término aplique la sustitución $u = x^2 + 1$. Después, $du = 2x\,dx$, y cuando $x = 1.18$, $u \approx 2.39$. Así,

$$\begin{aligned} A &\approx \tfrac{1}{2}\int_1^{2.39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1.18} (x^4 - x)\,dx \\ &= \sqrt{u}\Big]_1^{2.39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{1.18} \\ &= \sqrt{2.39} - 1 - \frac{(1.18)^5}{5} + \frac{(1.18)^2}{2} \\ &\approx 0.785 \end{aligned}$$

□

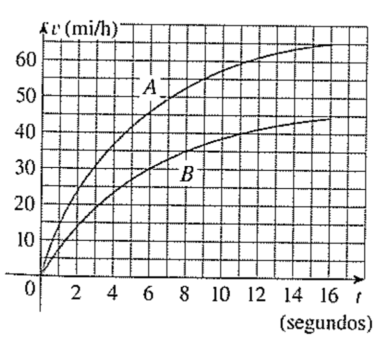


FIGURA 8

EJEMPLO 4 En la figura 8 se ilustran las curvas de velocidad para dos automóviles, A y B, parten juntos y se desplazan a lo largo de la misma carretera. ¿Qué representa el área entre las curvas? Aplique la regla del punto medio para estimarla.

SOLUCIÓN De acuerdo con la sección 5.4, el área bajo la curva A de la velocidad representa la distancia que recorre el vehículo A durante los primeros 16 segundos. En forma similar, el área bajo la curva B es la distancia que recorre el automóvil B durante ese tiempo. De este modo, el área entre estas curvas, que es la diferencia de las áreas bajo las curvas, es la distancia entre los vehículos después de 16 segundos. Tome las velocidades de la gráfica y conviértalas en pies por segundo (1 mi/h $= \frac{5280}{3600}$ pies/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

Aplique la regla del punto medio con $n = 4$ intervalos, de modo que $\Delta t = 4$. Los puntos medios de los intervalos son $\bar{t}_1 = 2$, $\bar{t}_2 = 6$, $\bar{t}_3 = 10$ y $\bar{t}_4 = 14$. Estime la distancia entre los automóviles después de 16 segundos, como se indica a continuación:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\, dt \approx \Delta t\,[13 + 23 + 28 + 29]$$

$$= 4(93) = 372 \text{ pies}$$

□

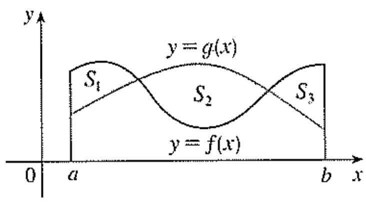


FIGURA 9

Si se pide determinar el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ donde $f(x) \geqslant g(x)$ para algunos valores de x pero $g(x) \geqslant f(x)$ para otros valores de x, por lo tanto divida la región dada S en varias regiones $S_1, S_2, \ldots$ con áreas $A_1, A_2, \ldots$ como se ilustra en la figura 9. Después defina el área de la región S como la suma de las áreas de las regiones más pequeñas $S_1, S_2, \ldots$, es decir, $A = A_1 + A_2 + \cdots$. Puesto que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{cuando } f(x) \geqslant g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{cuando } g(x) \geqslant f(x) \end{cases}$$

tiene la expresión siguiente para A.

> $\boxed{3}$ El área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre $x = a$ y $x = b$ es
>
> $$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Al evaluar la integral en (3), aún puede dividir en integrales que corresponderían a $A_1, A_2, \ldots$.

EJEMPLO 5 Calcular el área de la región acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Los puntos de intersección se presentan cuando $\operatorname{sen} x = \cos x$, es decir, cuando $x = \pi/4$ (puesto que $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$). La región se ilustra en la figura 10. Observe que $\cos x \geqslant \operatorname{sen} x$ cuando $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ pero $\operatorname{sen} x \geqslant \cos x$ cuando $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Por lo tanto, el área requerida es

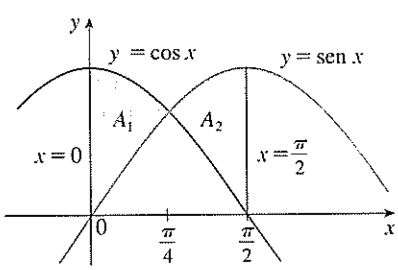


FIGURA 10

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \operatorname{sen} x|\, dx = A_1 + A_2 \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx \\ &= \Big[\operatorname{sen} x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \operatorname{sen} x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

En este ejemplo en particular podría haber ahorrado algún trabajo observando que la región es simétrica con respecto a $x = \pi/4$ y así

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx$$

□

Algunas regiones se manejan mejor si se considera a x en función de y. Si una región está limitada con curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (véase figura 11), en seguida su área es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

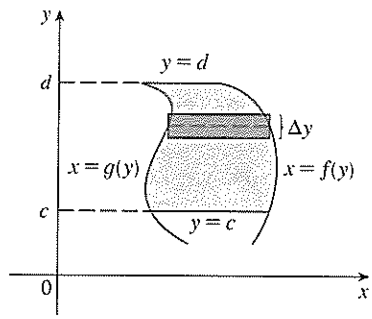


FIGURA 11

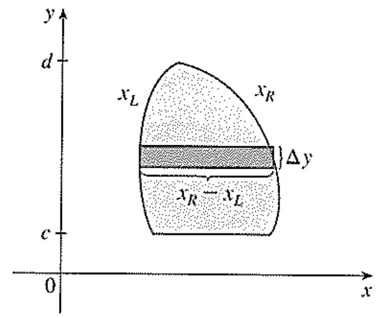


FIGURA 12

Si escribe x_R para el límite derecho y x_L para el límite izquierdo, en tal caso, según la figura 12, tiene

$$A = \int_c^d (x_R - x_L)\,dy$$

He aquí un rectángulo de aproximación característico con dimensiones $x_R - x_L$ y Δy.

EJEMPLO 6 Calcular el área definida mediante la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN Al resolver las dos ecuaciones los puntos de intersección son $(-1, -2)$ y $(5, 4)$. Al resolver la ecuación de la parábola y determinan x; observa que, según la figura 13, las curvas de los límites a la izquierda y a la derecha son

$$x_L = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad x_R = y + 1$$

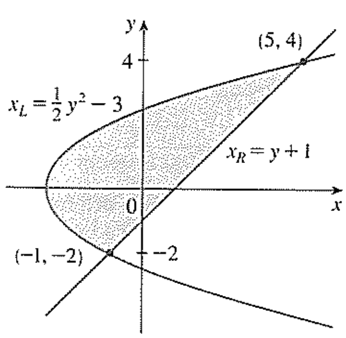


FIGURA 13

Es necesario integrar entre los valores de y adecuados, $y = -2$ y $y = 4$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\,dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y\,\Bigg]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$

□

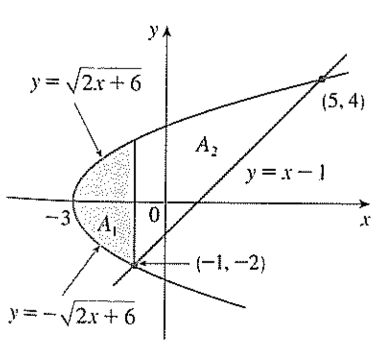


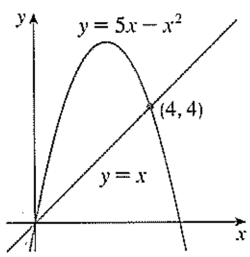
FIGURA 14

Pudo haber calculado el área del ejemplo 6 integrando con respecto a x en lugar de y, pero el cálculo es más complicado. Podría haber significado dividir la región en dos y determinar las áreas A_1 y A_2 de la figura 14. El método aplicado en el ejemplo 6 es mucho más fácil.

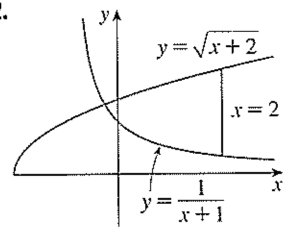
6.1 EJERCICIOS

1–4 Determinar el área de la región sombreada.

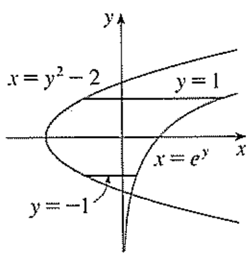
1.



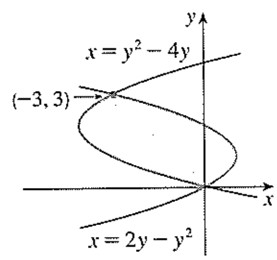
2.



3.



4.



5–28 Dibuje las regiones definidas por las curvas dadas. Decida si integra con respecto a x o y. Trace un rectángulo de aproximación representativo e indique su altura y su anchura. Luego determine el área de la región.

5. $y = x + 1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$

6. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

7. $y = x, \quad y = x^2$

8. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

9. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

10. $y = 1 + \sqrt{x}, \quad y = (3 + x)/3$

11. $y = x^2, \quad y^2 = x$

12. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

14. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $y = \tan x, \quad y = 2 \operatorname{sen} x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

16. $y = x^3 - x, \quad y = 3x$

17. $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x = 9$

18. $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -3, \quad x = 3$

19. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

20. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

21. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

22. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2), \quad y = x$

23. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

24. $y = \cos x, \quad y = 1 - \cos x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$

25. $y = x^2, \quad y = 2/(x^2 + 1)$

26. $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$

27. $y = 1/x, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$

28. $y = 3x^2, \quad y = 8x^2, \quad 4x + y = 4, \quad x \geqslant 0$

29–30 Mediante el cálculo determine el área del triángulo con los vértices dados.

29. $(0, 0), \quad (2, 1), \quad (-1, 6)$

30. $(0, 5), \quad (2, -2), \quad (5, 1)$

31–32 Evalúe la integral e interprétela como el área de una región. Dibuje la región.

31. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos 2x|\, dx$

32. $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x+2} - x|\, dx$

33–34 Aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para determinar un valor aproximado del área de la región limitada por las curvas dadas.

33. $y = \operatorname{sen}^2(\pi x/4), \quad y = \cos^2(\pi x/4), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

34. $y = \sqrt[3]{16 - x^3}, \quad y = x, \quad x = 0$

35–38 Por medio de una gráfica encuentre un valor aproximado de las coordenadas x de los puntos de corte entre las curvas dadas. Luego estime en (forma aproximada) el área de la región definida por las curvas.

35. $y = x \operatorname{sen}(x^2), \; y = x^4$

36. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

37. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

38. $y = x \cos x, \quad y = x^{10}$

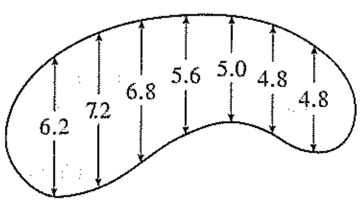
CAS **39.** Con ayuda de un sistema algebraico computacional, determine el área exacta definida por las curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ y $y = x$.

40. Trace la región en el plano xy definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ y determine su área.

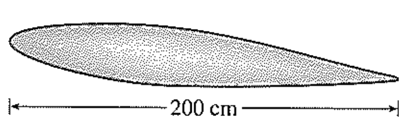
41. Los automóviles de carreras de Chris y Kelly están lado a lado al inicio de la carrera. En la tabla se proporcionan las velocidades de cada vehículo, (en millas por hora) durante los primeros 10 segundos de la competencia. Aplique la regla del punto medio para estimar cuánto se adelanta Kelly durante los 10 primeros segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	69	80
1	20	22	7	75	86
2	32	37	8	81	93
3	46	52	9	86	98
4	54	61	10	90	102
5	62	71			

42. Las anchuras, en metros, de una piscina en forma arriñonada se midieron a intervalos de 2 metros, como se indica en la figura. Mediante la regla del punto medio, estime el área de la piscina.



43. Se muestra la sección transversal de un ala de avión. Las mediciones de la altura del ala, en centímetros, en intervalos de 20 centímetros son 5.8, 20.3, 26.7, 29.0, 27.6, 27.6, 27.3, 23.8, 20.5, 15.1, 8.7, 7 y 2.8. Aplique la regla del punto medio para estimar el área de la sección transversal del área.



44. Si la proporción de nacimientos de una población es $b(t) = 2\,200e^{0.024t}$ personas por cada año y la de decesos es $d(t) = 1\,460e^{0.018t}$ personas por cada año. Hallar el área entre estas curvas para $0 \leq t \leq 10$. ¿Qué representa el área?

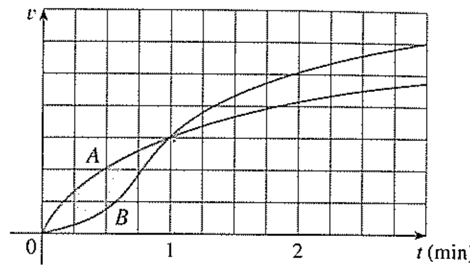
45. Dos automóviles, A y B, se encuentran lado a lado al inicio de la carrera, y aceleran desde el reposo. En la figura se muestran las gráficas de sus funciones de velocidad.

(a) ¿Cuál vehículo se adelanta después de un minuto? Explique.

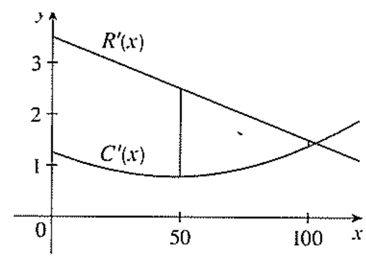
(b) ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?

(c) ¿Cuál es el automóvil que se adelanta después de dos minutos? Explique.

(d) Estime el tiempo al cual los vehículos van de nuevo lado a lado



46. En la figura se muestran las gráficas de la función del ingreso marginal R' y la función del costo marginal C' de un fabricante. [Refiérase a la sección 4.8 en la que $R(x)$ y $C(x)$ representan los ingresos y el costo cuando se fabrican x unidades. Suponga que R y C se miden en miles de dólares.] ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada? Estime el valor de esta cantidad mediante la regla del punto medio.



47. La curva cuya ecuación en $y^2 = x^2(x + 3)$ se denomina curva **cúbica de Tschirnhausen**. Si traza la gráfica de esta curva, podrá ver que una parte de la curva forma un bucle. Encuentre el área definida por este bucle.

48. Encuentre el área de la región definida por la parábola $y = x^2$, la tangente a esta parábola en $(1, 1)$ y el eje x.

49. Determine el número b tal que la recta $y = b$ divida a la región delimitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de igual área.

50. (a) Calcule el número a tal que la recta $x = a$ biseque el área bajo la curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

(b) Determine el número b tal que la recta $y = b$ biseque el área del inciso (a).

51. Calcule los valores de c tal que el área de la región delimitada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.

52. Suponga que $0 < c < \pi/2$. ¿Para qué valor de c el área de la región que definen las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$, y $x = 0$ es igual al área de la región delimitada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ y $y = 0$?

53. ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ definen una región? Calcule el área de la región.

6.2 VOLÚMENES

Cuando trata de calcular el volumen de un sólido enfrenta el mismo tipo de problema que al determinar áreas. Intuitivamente sabe lo que significa un volumen, pero es necesario aclarar la idea usando el cálculo con el fin de dar una definición exacta de volumen.

Empiece con un tipo simple de sólido llamado **cilindro**, (o mejor dicho) un *cilindro recto*. Según se ilustra en la figura 1(a), un cilindro está limitado por una región plana B_1, que se llama **base**, y una región congruente B_2 en un plano paralelo. El cilindro consta de todos los puntos en los segmentos rectilíneos que son perpendiculares a la base y unen a B_1 con B_2. Si el área de la base es A y la altura del cilindro, es decir, (la distancia desde B_1 hasta B_2) es h, por lo tanto el volumen V del cilindro se define como

$$V = Ah$$

En particular, si la base es una circunferencia de radio r, después el cilindro es un cilindro circular cuyo volumen es $V = \pi r^2 h$ [véase figura 1(b)], y si la base es un rectángulo de largo l y ancho w, en seguida el cilindro es una caja rectangular (también se le llama *paralelepípedo rectangular*) cuyo volumen es $V = lwh$ [véase figura 1(c)].

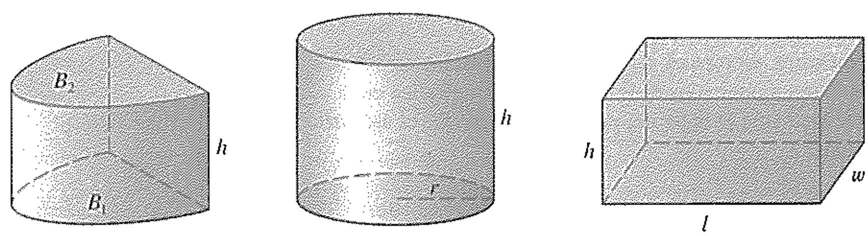


FIGURA 1

(a) Cilindro $V = Ah$ (b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$ (c) Caja rectangular $V = lwh$

En el caso de un sólido S que no es un cilindro, primero "corte" a S en trozos y haga que cada trozo se aproxime a un cilindro. Estime el volumen de S sumando los volúmenes de los cilindros. Obtiene el valor del volumen exacto de S a través de limitar un proceso en el cual el número de trozos se vuelve grande.

Inicie cortando a S con un plano, y obtenga una región plana que se denomina **sección transversal** de S. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal de S en un plano P_x perpendicular al eje x y que pasa por el punto x, donde $a \leqslant x \leqslant b$. (Véase figura 2. Imagine que corta a S con un cuchillo a través de x y calcule el área de esta rebanada.) El área de la sección transversal $A(x)$ variará cuando x se incrementa desde a hasta b.

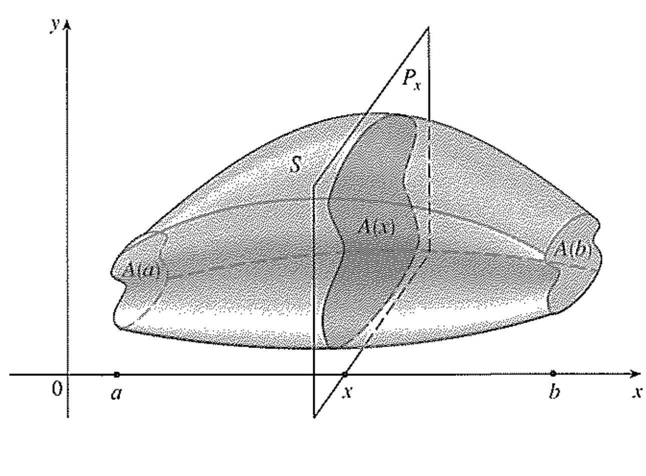


FIGURA 2

Divida S en n "rebanadas" del mismo ancho Δx mediante los planos P_{x_1}, $P_{x_2}, \ldots$ (Para rebanar el sólido imagine que está rebanando una hogaza de pan.) Si elige puntos muestrales x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$, puede tener un valor aproximado de la i-ésima rebanada S_i (la parte de S que queda entre los planos $P_{x_{i-1}}$ y P_{x_i}) con un cilindro cuya base tiene un área $A(x_i^*)$ y "altura" Δx. (Véase figura 3.)

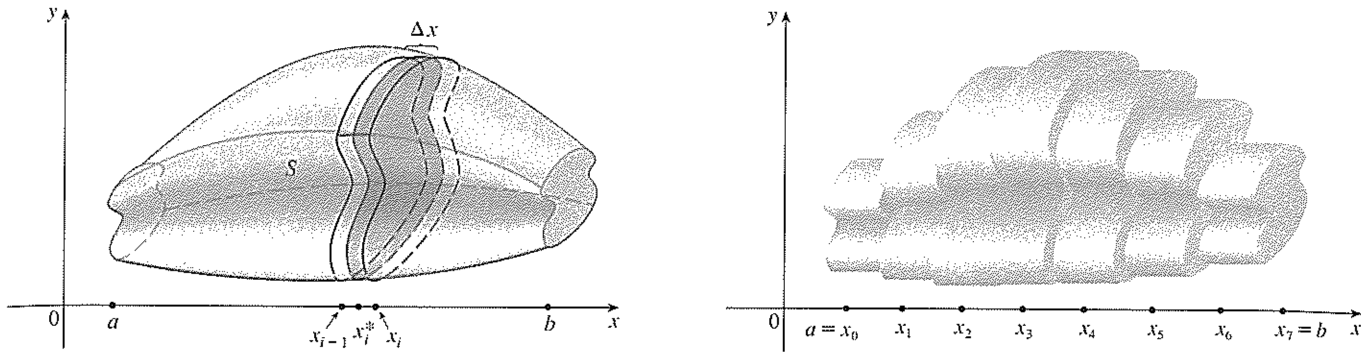


FIGURA 3

El volumen de este cilindro es $A(x_i^*)\,\Delta x$ de modo que una aproximación a la concepción intuitiva del volumen de la i-ésima rebanada S_i es.

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Al sumar los volúmenes de las rebanadas, llega a un valor aproximado del volumen total, es decir, a lo que piensa intuitivamente que es un volumen:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Esta aproximación parece ser cada vez mejor cuando $n \to \infty$. (Considere que las rebanadas cada vez son más delgadas.) Por lo tanto, *defina* al volumen como el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$. Pero debe reconoce el límite de las sumas de Riemann como una integral definida y por eso tiene la definición siguiente.

Se puede comprobar que esta definición es independiente de donde S se ubica con respecto al eje x. En otras palabras, no importa cómo corte las rebanadas mediante planos paralelos, siempre obtendrá la misma respuesta para V.

DEFINICIÓN DE VOLUMEN Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x, a través de x y es perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, por lo tanto el **volumen** de S es

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

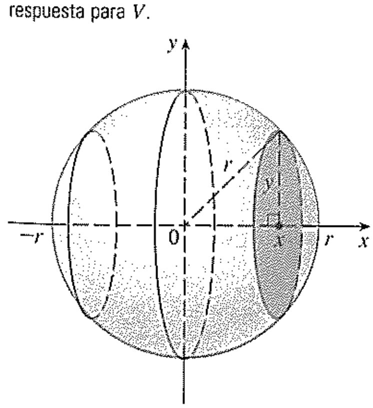


FIGURA 4

Cuando aplica la fórmula del volumen $V = \int_a^b A(x)\,dx$ es importante recordar que $A(x)$ es el área de una sección transversal móvil que se obtiene al cortar a través de x con un plano perpendicular al eje x.

Observe que, en el caso de un cilindro, el área de la sección transversal es constante: $A(x) = A$ para toda x. De este modo, la definición de volumen da $V = \int_a^b A\,dx = A(b - a)$; esto concuerda con la fórmula $V = Ah$.

EJEMPLO 1 Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

SOLUCIÓN Si coloca la esfera de modo que su centro está en el origen (véase figura 4), después el plano P_x corta la esfera en un círculo cuyo radio (según el teorema de Pitágoras, es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De este modo el área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Si aplica la definición del volumen con $a = -r$ y $b = r$, tiene

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(El integrando es una función par.)} \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

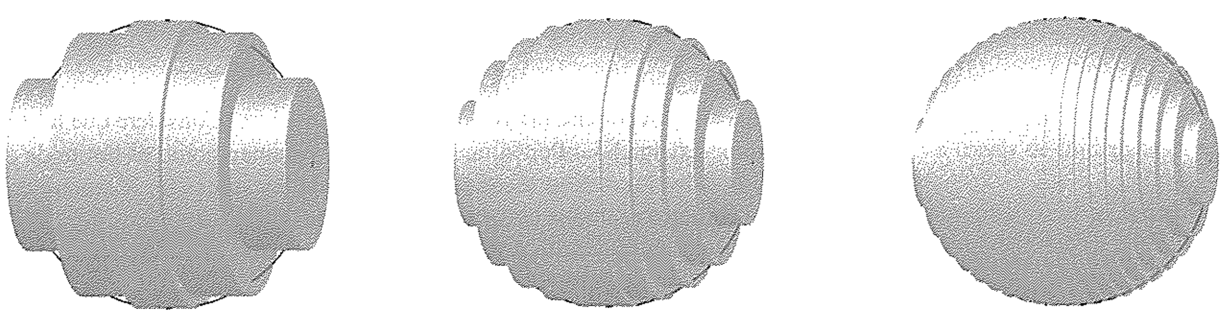
□

En la figura 5 se ilustra la definición de volumen cuando el sólido es una esfera de radio $r = 1$. De acuerdo con el resultado del ejemplo 1, sabe que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi \approx 4.18879$. En este caso, las rebanadas son cilindros circulares, o discos, y las tres partes de la figura 5 muestran las interpretaciones geométricas de las sumas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

cuando $n = 5$, 10 y 20 si escoge los puntos muestrales x_i^* como los puntos medios $\bar{x}_i$. Observe que cuando incrementa la cantidad de cilindros de aproximación, las sumas correspondientes de Riemannn se vuelven más cercanas al volumen verdadero.

TEC En Visual 6.2A se muestra una animación de la figura 5.



(a) Mediante 5 discos, $V \approx 4.2726$ (b) Mediante 10 discos, $V \approx 4.2097$ (c) Mediante 20 discos, $V \approx 4.1940$

FIGURA 5 Aproximaciones del volumen de una esfera con radio 1

V EJEMPLO 2 Determine el volumen de un sólido que se obtiene al girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ con respecto al eje x desde 0 hasta 1. Ilustre la definición de volumen dibujando un cilindro de aproximación representativo.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 6(a). Si gira alrededor del eje x, obtiene el sólido que se ilustra en la figura 6(b). Cuando corta a través de punto x obtiene un disco de radio $\sqrt{x}$. El área de esta sección transversal es

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

y el volumen del cilindro de aproximación, un disco cuyo espesor es Δx, es

$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

¿Obtuvo una respuesta razonable en el ejemplo 2? Como verificación del trabajo, reemplace la región dada por un cuadrado de base [0, 1] y altura 1. Si gira el cuadrado obtendrá un cilindro de radio 1, y volumen $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Ya calculamos que el sólido dado tiene la mitad de este volumen. Eso parece casi correcto.

El sólido está entre $x = 0$ y $x = 1$, de modo que el volumen es

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

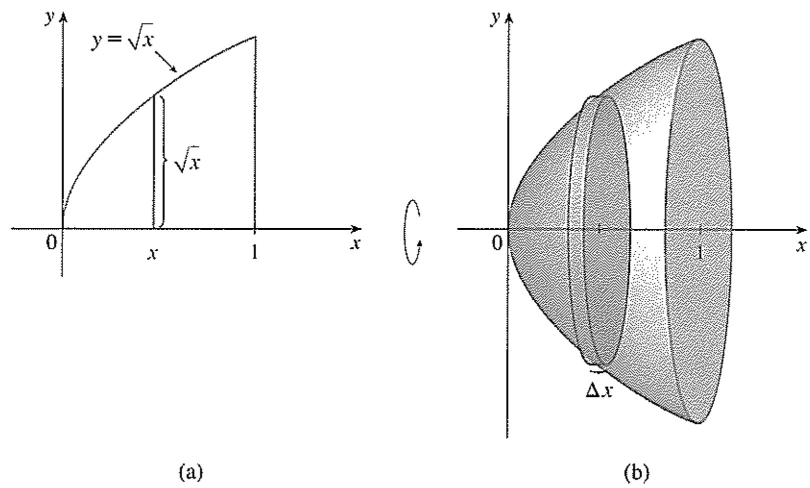


FIGURA 6

EJEMPLO 3 Calcule el volumen del sólido generado al rotar la región definida por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$ con respecto al eje y.

SOLUCIÓN La región se ilustra en la figura 7(a) y el sólido resultante se muestrea en la figura 7(b). Puesto que la región gira alrededor del eje y, tiene sentido "rebanar" el sólido en forma perpendicular al eje y, y, por lo tanto, integrar con respecto a y. Si corta a una altura y, obtiene un disco de radio x, donde $x = \sqrt[3]{y}$. De tal manera, el área de una sección transversal a través de y es

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}$$

y el volumen del cilindro de aproximación ilustrado en la figura 7(b) es

$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Puesto que el sólido está entre $y = 0$ y $y = 8$, su volumen es

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

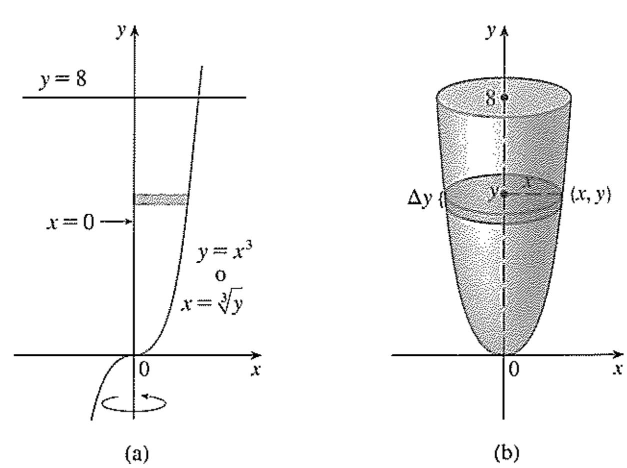


FIGURA 7

EJEMPLO 4 La región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido que resulta.

SOLUCIÓN Las curvas $y = x$ y $y = x^2$ se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. La región entre ellas, el sólido de rotación y una sección transversal perpendicular al eje x se muestran en la figura 8. Una sección transversal en el plano P_x tiene la forma de una *rondana* (un aro anular) de radio interior x^2 y radio exterior x, de modo que determina el área de la sección transversal restando el área del círculo interno del área del círculo externo:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Por lo tanto, tiene

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

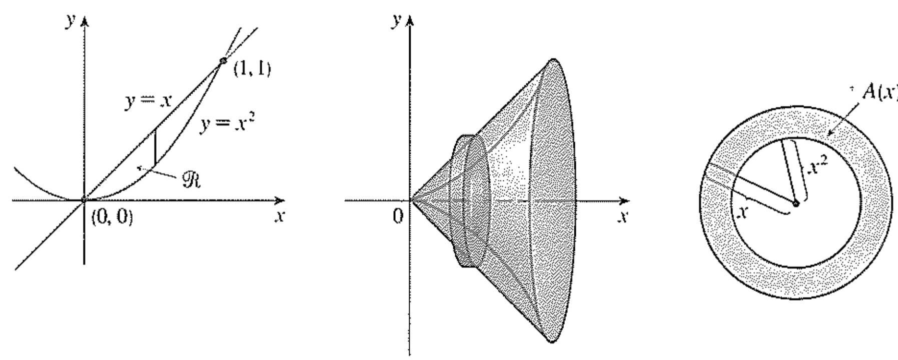


FIGURA 8 (a) (b) (c) □

EJEMPLO 5 Calcule el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $y = 2$.

SOLUCIÓN El sólido y la sección transversal se muestran en la figura 9. Una vez más la sección transversal es una rondana, pero ahora el radio interior es $2 - x$ y el radio externo es $2 - x^2$.

TEC Visual 6.2B muestra cómo se forman los sólidos de rotación.

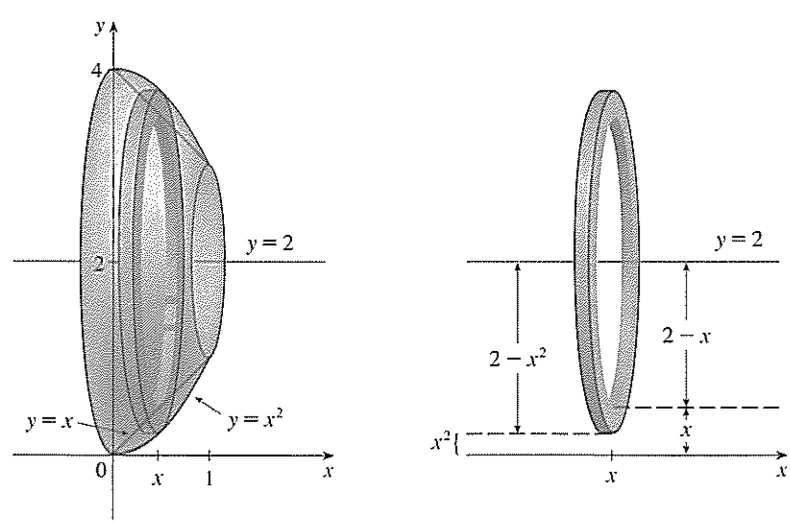


FIGURA 9

El área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

y tanbién el volumen de S es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

□

Los sólidos de los ejemplos 1 a 5 reciben el nombre de **sólidos de rotación**, porque se generan haciendo girar una región alrededor de una recta. En general, determine el volumen de un sólido de revolución usando la fórmula básica de definición

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

y calcule el área de la sección transversal $A(x)$ o $A(y)$ mediante uno de los métodos siguientes:

- Si la sección transversal es un disco (como en los ejemplos 1 a 3) determine el radio del disco (en términos de x o y) y use

$$A = \pi(\text{radio})^2$$

- Si la sección transversal es una rondana, como en los ejemplos 4 y 5, determine el radio interior r_{int} y el r_{ext} a partir de un dibujo (como en las figuras 9 y 10) y calcule el área de la rondana efectuando la diferencia entre el área del disco interno y el área del disco externo:

$$A = \pi(\text{radio exerior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$

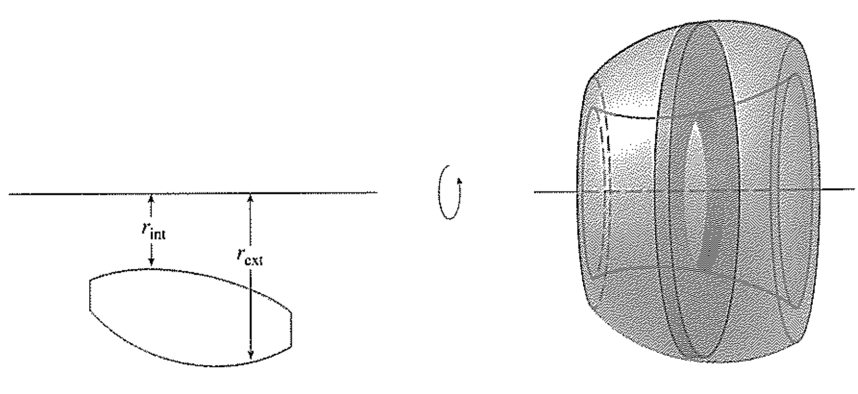


FIGURA 10

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 6 Calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $x = -1$.

SOLUCIÓN En la figura 11 se ilustra una sección transversal horizontal. Es una rondana con radio interior $1 + y$ y radio exterior $1 + \sqrt{y}$, por lo que el área de la sección transversal es

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2 \\ &= \pi\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - \pi(1 + y)^2 \end{aligned}$$

El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{y}\right)^2 - (1 + y)^2\right] dy \\ &= \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - y - y^2\right) dy = \pi \left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

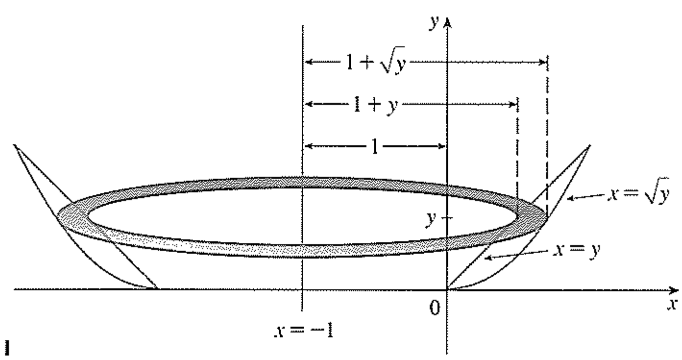


FIGURA 11

□

En seguida se determinan los volúmenes de tres sólidos que *no* son sólidos de revolución.

EJEMPLO 7 En la figura 12 se muestra un sólido con una base circular de radio 1. Las secciones transversales paralelas pero perpendiculares a la base son triángulos equiláteros. Determine el volumen del sólido.

TEC En Visual 6.2C se muestra una animación de la figura 12.

SOLUCIÓN Sea el círculo $x^2 + y^2 = 1$. El sólido, su base y una sección transversal representativa a una distancia x desde el origen se ilustran en la figura 13.

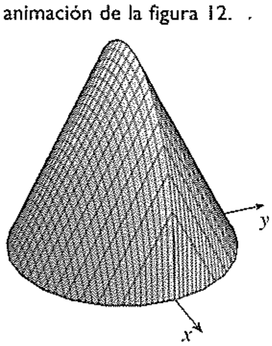
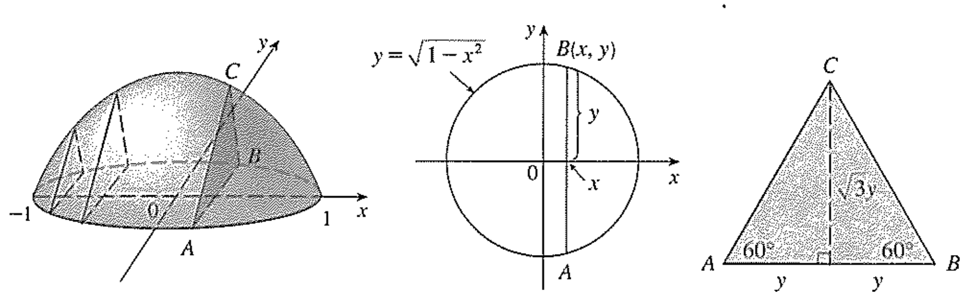


FIGURA 12
Imagen generada mediante computadora del sólido del ejemplo 7



(a) El sólido (b) Su base (c) Una sección transversal

FIGURA 13

Puesto que B está en el círculo, $y = \sqrt{1 - x^2}$, y, de esa manera, la base del triángulo ABC es $|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$. Como el triángulo es equilátero, según la figura 13(c), su altura es $\sqrt{3}\, y = \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$. Por lo tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,(1 - x^2)$$

y el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$ □

V EJEMPLO 8 Calcule el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado L y cuya altura es h.

SOLUCIÓN Coloque el origen O en el vértice de la pirámide y el eje x a lo largo de su eje central, como se ilustra en la figura 14. Se dice que cualquier plano P_x que pase por x y sea perpendicular al eje x corta a la pirámide en un cuadrado de lado s. Puede expresar s en función de x observando por triángulos semejantes de la figura 15 que

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

y, de este modo, $s = Lx/h$. [Otro método es observar que la recta OP tiene pendiente $L/(2h)$ y, de este modo, su ecuación es $y = Lx/(2h)$.] Por eso, el área de la sección transversal es

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

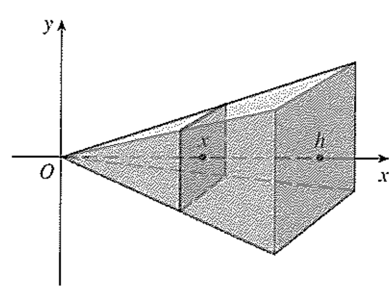


FIGURA 14

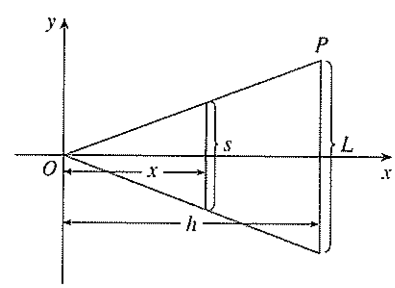


FIGURA 15

La pirámide se ubica entre $x = 0$ y $x = h$, por lo que su volumen es

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$ □

NOTA No era necesario colocar el vértice de la pirámide en el origen en el ejemplo 8. Se hizo así para que las ecuaciones resultaran más sencillas. Si en lugar de eso se hubiera colocado el centro de la base en el origen y el vértice en el eje y positivo, como en

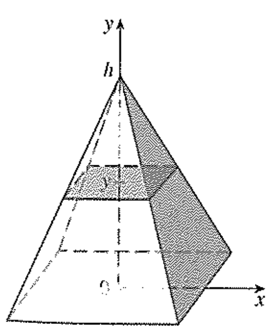


FIGURA 16

la figura 16, usted podría comprobar que habría obtenido la integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\,dy = \frac{L^2h}{3}$$

EJEMPLO 9 Se corta una cuña de un cilindro circular de radio 4 definida mediante dos planos. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro corta al primero en un ángulo de 30° a lo largo del diámetro del cilindro. Determine el volumen de la cuña.

SOLUCIÓN Si hace coincidir el eje x con el diámetro en el lugar donde se encuentran los planos, después la base del sólido es un semicírculo con ecuación $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leq x \leq 4$. Una sección transversal que es perpendicular al eje x a una distancia x del origen es un triángulo ABC, según se muestra en la figura 17, cuya base es $y = \sqrt{16 - x^2}$ y cuya altura es $|BC| = y \tan 30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Por lo tanto, el área de la sección transversal es

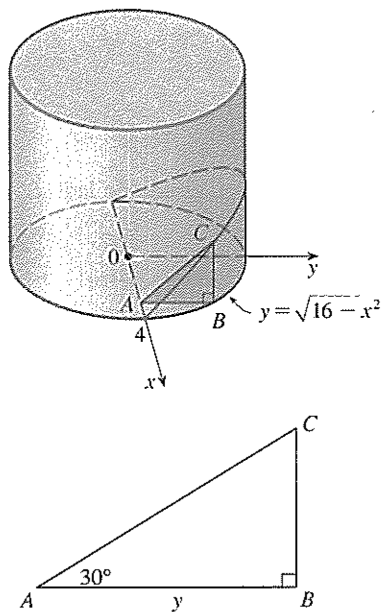


FIGURA 17

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

y el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^4 (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\ &= \frac{128}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

En el ejercicio 64 se proporciona otro método. □

6.2 EJERCICIOS

1–18 Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. Grafique la región, el sólido y un disco o arandela representativos.

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$; alrededor del eje x

2. $y = 1 - x^2,\ y = 0$; alrededor del eje x

3. $y = 1/x,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$; alrededor del eje x

4. $y = \sqrt{25 - x^2},\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$; alrededor del eje x

5. $x = 2\sqrt{y},\ x = 0,\ y = 9$; alrededor del eje y

6. $y = \ln x,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0$; alrededor del eje y

7. $y = x^3,\ y = x,\ x \geq 0$; alrededor del eje x

8. $y = \frac{1}{4}x^2,\ y = 5 - x^2$; alrededor del eje x

9. $y^2 = x,\ x = 2y$; alrededor del eje y

10. $y = \frac{1}{4}x^2,\ x = 2,\ y = 0$; alrededor del eje y

11. $y = x,\ y = \sqrt{x}$; alrededor de $y = 1$

12. $y = e^{-x},\ y = 1,\ x = 2$; alrededor de $y = 2$

13. $y = 1 + \sec x,\ y = 3$; alrededor de $y = 1$

14. $y = 1/x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$; alrededor de $y = -1$

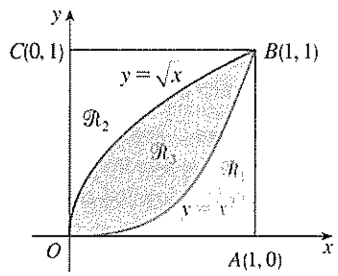
15. $x = y^2,\ x = 1$; alrededor de $x = 1$

16. $y = x,\ y = \sqrt{x}$; alrededor de $x = 2$

17. $y = x^2,\ x = y^2$; alrededor de $x = -1$

18. $y = x,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$; alrededor de $x = 1$

19–30 Refiérase a la figura y calcule el volumen generado al hacer girar la región dada alrededor de la recta especificada.



19. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OA
20. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OC
21. $\mathcal{R}_1$ alrededor de AB
22. $\mathcal{R}_1$ alrededor de BC
23. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OA
24. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OC
25. $\mathcal{R}_2$ alrededor de AB
26. $\mathcal{R}_2$ alrededor de BC
27. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OA
28. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OC
29. $\mathcal{R}_3$ alrededor de AB
30. $\mathcal{R}_3$ alrededor de BC

31–36 Plantee una integral, pero no la evalúe, para el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor de la recta especificada la región delimitada por las curvas dadas.

31. $y = \tan^3 x,\ y = 1,\ x = 0$; alrededor de $y = 1$

32. $y = (x - 2)^4,\ 8x - y = 16$; alrededor de $x = 10$

33. $y = 0,\ y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $y = 1$

34. $y = 0,\ y = \operatorname{sen} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $y = -2$

35. $x^2 - y^2 = 1,\ x = 3$; alrededor de $x = -2$

36. $y = \cos x, y = 2 - \cos x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; alrededor de $y = 4$

37–38 Utilice una gráfica para encontrar coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas especificadas. Luego estime (en forma aproximada) el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la región definida por las curvas.

37. $y = 2 + x^2 \cos x, \quad y = x^4 + x + 1$

38. $y = 3\operatorname{sen}(x^2), \quad y = e^{x/2} + e^{-2x}$

CAS **39–40** Mediante un sistema algebraico computacional, calcule el volumen exacto del sólido obtenido al rotar alrededor de la recta especificada la región delimitada por las curvas.

39. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $y = -1$

40. $y = x,\ y = xe^{1-x/2}$; alrededor de $y = 3$

41–44 Cada integral representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

41. $\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

42. $\pi \int_2^5 y\, dy$

43. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8)\, dy$

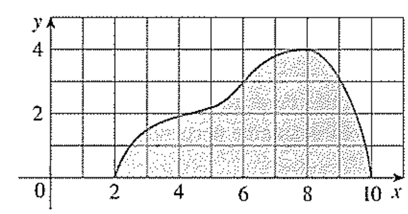
44. $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2]\, dx$

45. El estudio de tomografía por medio de computadora proporciona vistas transversales separadas a distancias iguales de un órgano del cuerpo humano, las cuales dan información que, de no ser por este medio, sólo se obtendría mediante una intervención quirúrgica. Suponga que este estudio de tomografía en un hígado humano muestra secciones transversales separadas 1.5 cm. El hígado mide 15 cm de largo y las áreas de las secciones transversales, en centímetros cuadrados, son 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 y 0. Aplique la regla del punto medio para estimar el volumen del hígado.

46. Se corta un tronco de árbol de 10 m de largo a intervalos de 1 m y las áreas de las secciones transversales A (a una distancia x del extremo del tronco) se proporcionan en la tabla. Mediante la regla del punto medio $n = 5$ estime el volumen del tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0.68	6	0.53
1	0.65	7	0.55
2	0.64	8	0.52
3	0.61	9	0.50
4	0.58	10	0.48
5	0.59		

47. (a) Si la región que se muestra en la figura se gira con respecto al eje x para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para estimar el volumen del sólido.



(b) Estimar el volumen si se gira la región con respecto al eje y. Una vez más aplique la regla del punto medio con $n = 4$

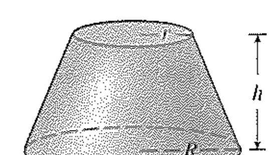
CAS **48.** (a) Se obtiene un modelo para la forma de un huevo de un ave mediante el giro, con respecto al eje x, de la región bajo la gráfica de

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

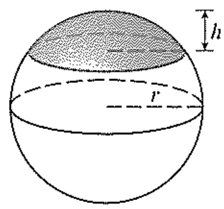
49–61 Calcule el volumen del sólido descrito S.

49. Un cono circular recto cuya altura es h el radio de la base es r.

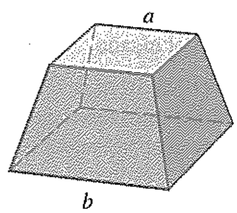
50. Un tronco de un cono circular recto cuya altura es h, base inferior de radio R, y radio de la parte superior r.



51. La tapa de una esfera con radio h y altura .



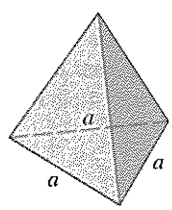
52. Un tronco de pirámide con base cuadrada de lado b, parte superior de lado a y altura h.



¿Qué sucede si $a = b$? ¿Qué sucede si $a = 0$?

53. Una pirámide de altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.

54. Una pirámide de altura h base en forma de triángulo equilátero con lado a (tetraedro).



55. Un tetraedro con tres caras recíprocamente perpendiculares y tres aristas recíprocamente perpendiculares con distancias 3, 4 y 5 cm.

56. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales perpendiculares a la base son cuadradas.

57. La base de S es una región elíptica con curva límite $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales son perpendiculares al eje x y son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa en la base.

58. La base de S es la región triangular con vértices (0, 0), (1, 0) y (0, 1). Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

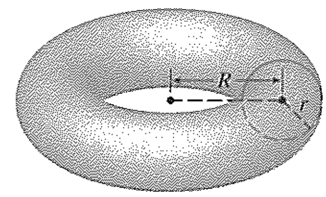
59. S tiene la misma base que en el ejercicio 58, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadradas.

60. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares el eje y son cuadrados

61. S tiene la misma base que la del ejercicio 60, pero las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos isósceles con altura igual a la base.

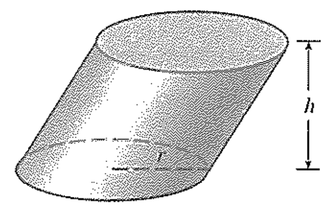
62. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulos isósceles de altura h y el lado desigual es la base.
   (a) Plantee una integral para el volumen de S.
   (b) De acuerdo con la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen de S.

63. (a) Plantee una integral para el volumen de un sólido *toro* (el sólido en forma de dona mostrado en la figura) de radio r y R.
   (b) Por la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen del toro.

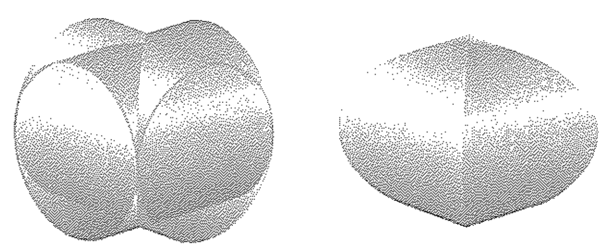


64. Resuelva el ejemplo 9 tomando secciones transversales paralelas a la línea de intersección de los dos planos.

65. (a) El principio de Cavalieri establece que si una familia de planos paralelos da áreas iguales de secciones transversales para dos sólidos S_1 y S_2, en tal caso los volúmenes de S_1 y S_2 son iguales. Demuestre este principio.
   (b) Mediante el principio de Cavalieri determine el volumen del cilindro oblicuo que se muestra en la figura.



66. Determine el volumen común a dos cilindros circulares, ambos de radio r, si los ejes de los cilindros se cortan en ángulos rectos.



67. Calcule el volumen común a dos esferas, cada una de radio r, si el centro de cada esfera está en la superficie de la otra esfera.

68. Un cuenco tiene la forma de un hemisferio con diámetro igual a 30 cm. Una pelota de 10 cm de diámetro se coloca dentro del recipiente, y se vierte agua en éste hasta que alcanza una altura de h centímetros. Calcule el volumen de agua que hay en el recipiente.

69. Se abre un agujero de radio r en un cilindro de radio $R > r$ en ángulos rectos al eje del cilindro. Plantee una integral, pero no la evalúe, para determinar el volumen cortado.

70. Un agujero de radio r se taladra en el centro de una esfera de radio $R > r$. Calcule el volumen de la parte restante de la esfera.

71. Algunos de los iniciadores del cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Stereometria doliorum* en 1715, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de los barriles.) A menudo se aproximan la forma de sus lados mediante parábolas.

(a) Se genera un barril de altura h y radio máximo R al girar alrededor del eje x la parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leq x \leq h/2$, donde c es una constante positiva. Demuestre que el radio de cada extremo del barril es $r = R - d$, donde $d = ch^2/4$.

(b) Demuestre que el volumen encerrado por el barril es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

72. Suponga que una región $\mathcal{R}$ tiene un área A que se localiza por arriba del eje x. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x, genera un sólido de volumen V_1. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor de la recta $y = -k$, donde k es un número positivo, genera un sólido de volumen V_2. Exprese V_2 en función de V_1, k y A.

6.3 VOLÚMENES MEDIANTE CASCARONES CILÍNDRICOS

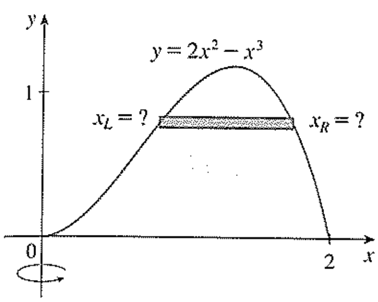


FIGURA 1

Algunos problemas relacionados con volúmenes son muy difíciles de manejar con los métodos de las secciones anteriores. Por ejemplo, considere el problema de determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región definida por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$ alrededor del eje y. (Véase figura 1.) Si corta en forma perpendicular al eje y, obtendrá una rondana. Pero para calcular los radios interior y exterior de la rondana, tendría que resolver la ecuación cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para encontrar x en función de y. Eso no es fácil.

Por fortuna, hay un sistema llamado **método de los cascarones cilíndricos**, que es más fácil de usar en tal caso. En la figura 2 se ilustra un cascarón cilíndrico de radio interior r_1, radio exterior r_2 y altura h. Su volumen V se calcula restando el volumen V_1 del cilindro interior del volumen V_2 que corresponde al cilindro exterior:

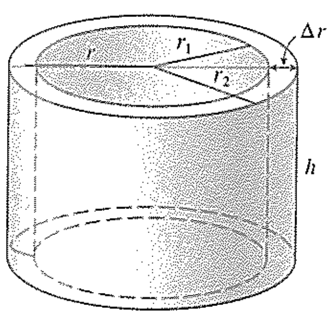


FIGURA 2

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Si hace $\Delta r = r_2 - r_1$ (el espesor del cascarón) y $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (el radio promedio del cascarón) por lo tanto esta fórmula del volumen de un cascarón cilíndrico se transforma en

1 $$\boxed{V = 2\pi rh\,\Delta r}$$

que se puede recordar como

$$V = [\text{circunferencia}][\text{altura}][\text{espesor}]$$

Ahora, sea S el sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y a la región limitada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geq 0$], $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, donde $b > a \geq 0$. (Véase figura 3.)

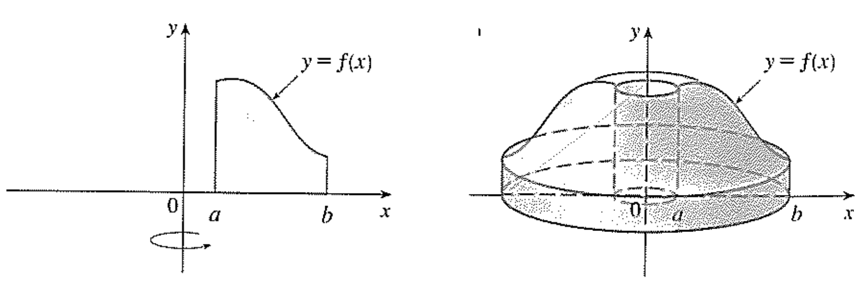


FIGURA 3

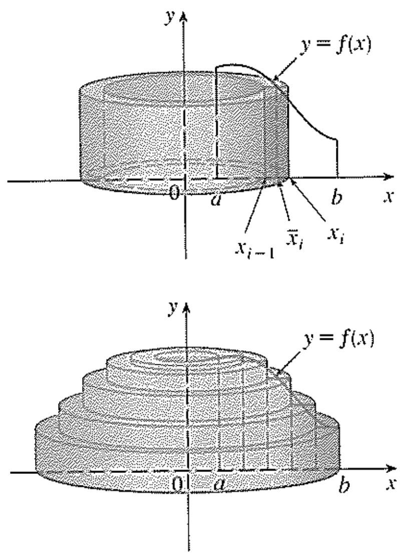


FIGURA 4

Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual anchura Δx y sea $\bar{x}_i$ el punto medio del i-ésimo subintervalo. Si el rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\bar{x}_i)$ se hace girar alrededor del eje y, después el resultado es un cascarón cilíndrico cuyo radio promedio es $\bar{x}_i$, altura $f(\bar{x}_i)$ y espesor Δx (véase figura 4), de modo que por la fórmula 1 su volumen es

$$V_i = (2\pi\bar{x}_i)[f(\bar{x}_i)]\,\Delta x$$

Por lo tanto, un volumen aproximado V de S se obtiene mediante la suma de los volúmenes de estos cascarones:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Esta aproximación mejora cuando $n \to \infty$. Pero, de acuerdo con la definición de una integral, sabe que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Por eso, lo siguiente es posible:

2 El volumen del sólido de la figura 3, que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b, es

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \qquad \text{donde } 0 \leqslant a < b$$

El argumento de usar cascarones cilíndricos hace que la fórmula 2 parezca razonable, pero posteriormente será capaces de comprobarlo (véase ejercicio 67 de la sección 7.1).

La mejor manera de recordar la fórmula 2 es pensar en el cascarón característico, cortado y aplanado como en la figura 5, con radio x, circunferencia $2\pi x$, altura $f(x)$ y espesor Δx o dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferencia}}\ \underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}}\ \underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

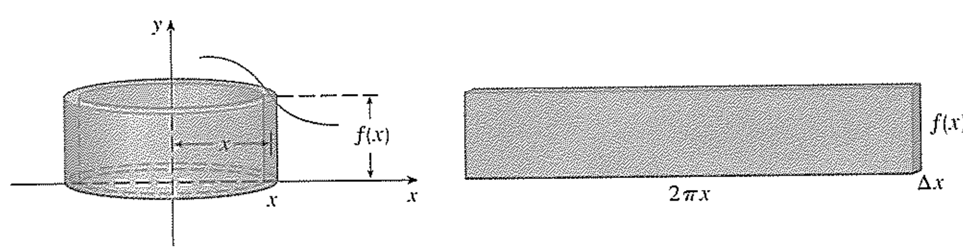


FIGURA 5

Este tipo de razonamiento es útil en otras situaciones, como cuando hace girar alrededor de rectas distintas al eje y.

EJEMPLO 1 Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$ alrededor del eje y.

SOLUCIÓN En el dibujo de la figura 6, puede ver que un cascarón característico tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $f(x) = 2x^2 - x^3$. También, según el método del cascarón, el volumen es

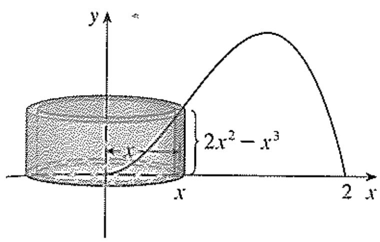


FIGURA 6

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$
$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

Se puede comprobar que el método del cascarón cilíndrico proporciona la misma respuesta que las "rebanadas". □

■ En la figura 7 se observa una imagen generada mediante computadora del sólido cuyo volumen se calcula en el ejemplo 1.

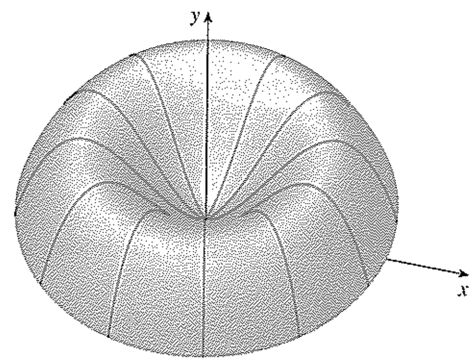


FIGURA 7

NOTA Al comparar la solución del ejemplo 1 con las observaciones del comienzo de esta sección, es claro que el método de los cascarones cilíndricos es mucho más sencillo que el método en el que se utilizan rondanas para este problema. No es necesario encontrar las coordenadas del máximo local y no se tiene que resolver la ecuación de la curva, ni dar x en función de y. Sin embargo, en otros ejemplos, pueden ser más sencillos los métodos de la sección anterior.

EJEMPLO 2 Calcular el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región entre $y = x$ y $y = x^2$ alrededor del eje y.

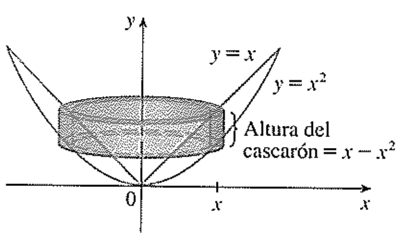


FIGURA 8

SOLUCIÓN La región y un cascarón característico se ilustran en la figura 8. El cascarón tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $x - x^2$. También, el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$
$$= 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$ □

Como se muestra en el ejemplo siguiente, el método del cascarón cilíndrico funciona muy bien si hace girar alrededor del eje x. Simplemente dibuje un croquis para identificar el radio y la altura del cascarón.

EJEMPLO 3 Mediante un cascarón cilíndrico calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ desde 0 hasta 1 alrededor del eje x.

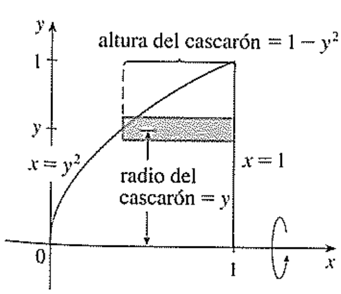


FIGURA 9

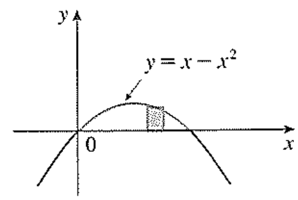
SOLUCIÓN Este problema se resolvió usando discos en el ejemplo 2 de la sección 6.2. Para usar cascarones, llame a la curva $y = \sqrt{x}$ (en la figura de ese ejemplo) $x = y^2$ en la figura 9. Por lo que toca a la rotación alrededor del eje x, un cascarón característico tiene radio y, circunferencia $2\pi y$ y altura $1 - y^2$. Así, el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\,dy = 2\pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

En este problema, el método del disco fue más simple. □

EJEMPLO 4 Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = 2$ la región definida por $y = x - x^2$ y $y = 0$.

SOLUCIÓN En la figura 10 se ilustra la región y un cascarón cilíndrico formado por la rotación alrededor de la recta $x = 2$. El radio es $2 - x$, circunferencia $2\pi(2 - x)$ y altura $x - x^2$.



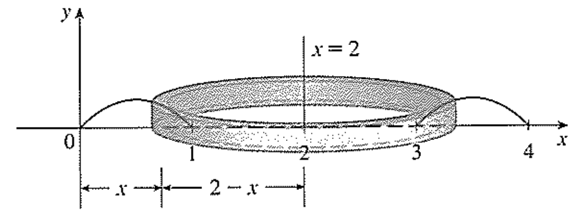


FIGURA 10

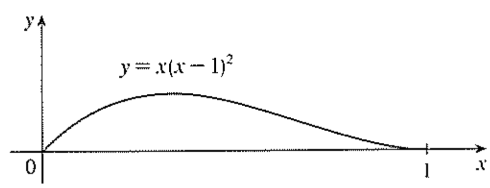
El volumen del sólido es

$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

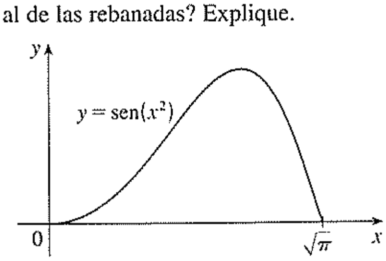
$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

6.3 EJERCICIOS

1. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se ilustra en la figura. Explique por qué es inconveniente usar los cortes por rebanadas para determinar el volumen V de S. Dibuje un cascarón de aproximación representativo. ¿Cuáles son la circunferencia y la altura? Mediante cascarones encuentre V.



2. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se ilustra en la figura. Dibuje un cascarón cilíndrico representativo y determine su circunferencia y altura. Mediante cascarones calcule el volumen de S. ¿Cree usted que este método es mejor al de las rebanadas? Explique.



3–7 Mediante el método de los cascarones cilíndricos, determine el volumen que se genera al hacer girar alrededor del eje y la región definida por las curvas dadas. Dibuje la región y un cascarón representativo.

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

4. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = 3 + 2x - x^2, \quad x + y = 3$

7. $y = 4(x - 2)^2, \quad y = x^2 - 4x + 7$

8. Sea V el volumen del sólido que se obtiene cuando la región definida por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje y. Calcule V cortando rebanadas y formando cascarones cilíndricos. En ambos casos elabore un diagrama para explicar el método.

9–14 Mediante el método de los cascarones cilíndricos determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la región que delimitan las curvas dadas. Grafique la región y un cascarón cilíndrico.

9. $x = 1 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$

10. $x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

11. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

12. $x = 4y^2 - y^3, \quad x = 0$

13. $x = 1 + (y - 2)^2, x = 2$

14. $x + y = 3, \quad x = 4 - (y - 1)^2$

15–20 Mediante el método de los cascarones cilíndricos, determine el volumen generado cuando gira la región que definen las curvas dadas alrededor del eje especificado. Grafique la región y un cascarón cilíndrico.

15. $y = x^4, y = 0, x = 1$; alrededor de $x = 2$

16. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1$; alrededor $x = -1$

17. $y = 4x - x^2, y = 3$; alrededor de $x = 1$

18. $y = x^2, y = 2 - x^2$; alrededor de $x = 1$

19. $y = x^3, y = 0, x = 1$; alrededor de $y = 1$

20. $y = x^2,\ x = y^2$; alrededor de $y = -1$

21–26 Plantee pero no evalúe una integral para el volumen del sólido que se genera al hacer rotar la región que definen las curvas dadas alrededor del eje especificado.

21. $y = \ln x,\ y = 0,\ x = 2$; alrededor del eje y

22. $y = x,\ y = 4x - x^2$; alrededor de $x = 7$

23. $y = x^4,\ y = \text{sen}(\pi x/2)$; alrededor de $x = -1$

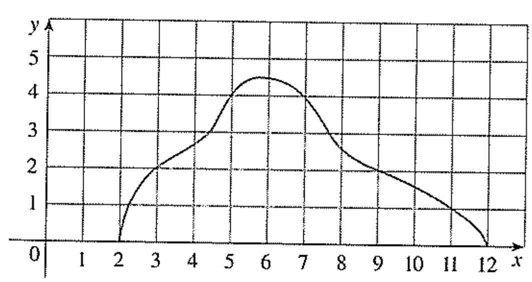
24. $y = 1/(1 + x^2),\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$; alrededor de $x = 2$

25. $x = \sqrt{\text{sen}\, y},\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ x = 0$; alrededor de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7,\ x = 4$; alrededor de $y = 5$

27. Aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen obtenido cuando la región bajo la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ gira alrededor del eje y.

28. Si la región que se ilustra en la figura gira alrededor del eje y para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen del sólido.



29–32 Cada una de las integrales representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

29. $\int_0^3 2\pi x^5\, dx$

30. $2\pi \int_0^2 \frac{y}{1 + y^2}\, dy$

31. $\int_0^1 2\pi(3 - y)(1 - y^2)\, dy$

32. $\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \text{sen}\, x)\, dx$

33–34 Por medio de una gráfica, estime las coordenadas x de los puntos donde se cortan las curvas dadas. Luego con esa información estime el volumen del sólido obtenido cuando giran alrededor del eje y la región delimitada por estas curvas.

33. $y = e^x, y = \sqrt{x} + 1$

34. $y = x^3 - x + 1,\ y = -x^4 + 4x - 1$

CAS **35–36** Use un sistema algebraico computacional para calcular el volumen exacto del sólido obtenido al girar la región que definen las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

35. $y = \text{sen}^2 x,\ y = \text{sen}^4 x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $x = \pi/2$

36. $y = x^3\, \text{sen}\, x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $x = -1$

37–42 La región delimitada por las curvas dadas gira alrededor del eje especificado. Determine el volumen del sólido que resulta por medio de cualquier método.

37. $y = -x^2 + 6x - 8, y = 0$; alrededor del eje y

38. $y = -x^2 + 6x - 8, y = 0$; alrededor del eje x

39. $y = 5,\ y = x + (4/x)$; alrededor de $x = -1$

40. $x = 1 - y^4,\ x = 0$; alrededor de $x = 2$

41. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; alrededor del eje y

42. $x = (y - 3)^2, x = 4$; alrededor de $y = 1$

43–45 Mediante cascarones cilíndricos, calcule el volumen del sólido.

43. Una esfera de radio r.

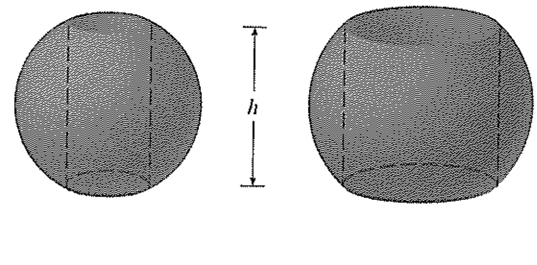
44. El sólido toro del ejercicio 63 de la sección 6.2.

45. Un cono circular recto de altura h y base de radio r.

46. Suponga que usted fabrica anillos para servilletas perforando agujeros de diferentes diámetros en dos bolas de madera (las cuales también tienen diámetros distintos). Usted descubre que ambos anillos para las servilletas tienen la misma altura h, como se muestra en la figura.

(a) Adivine cuál anillo contiene más madera.

(b) Verifique su conjetura: mediante cascarones cilíndricos calcule el volumen de un anillo para servilleta generado al perforar un agujero con radio r a través del centro de una esfera de radio R y exprese la respuesta en función de h.



6.4 TRABAJO

El término *trabajo* se utiliza en el habla de todos los días para dar a entender la cantidad total de esfuerzo que se requiere para ejecutar una tarea. En física tiene significado técnico que depende de la idea de una *fuerza*. De manera intuitiva usted puede pensar en una fuerza que describa un impulso o un jalón de un objeto, por ejemplo, el empuje horizontal de un libro hacia el otro lado de la mesa, o bien, el jalón hacia abajo que ejerce la gravedad de la Tierra en una pelota. En general, si un objeto se desplaza en línea recta con función de posición $s(t)$, por lo tanto la **fuerza** F sobre el objeto (en la misma dirección) está definida por la segunda ley de Newton del movimiento. Es el producto de su masa m por su aceleración, es decir:

$$\boxed{1} \qquad F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

En el sistema métrico SI, la masa se mide en kilogramos (kg), el desplazamiento en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la fuerza en newtons (N = kg·m/s^2). Por eso, una fuerza de 1 N que actúa en una masa de 1 kg produce una aceleración de 1 m/s^2. En el sistema usual de Estados Unidos, la unidad fundamental que se ha elegido como la unidad de fuerza es la libra.

En el caso de aceleración constante la fuerza F también es constante y el trabajo realizado está definido como el producto de la fuerza F por la distancia d que el objeto recorre:

$$\boxed{2} \qquad W = Fd \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Si F se mide en newtons y d en metros, enseguida la unidad de W es un newton-metro, que se llama joule (J). Si F se mide en libras y d en pies, en tal caso la unidad de W es libra-pie (lb-pie), que es de casi 1.36 J.

EJEMPLO 1

(a) ¿Qué tanto trabajo se realiza al levantar un libro de 1.2 kg desde el suelo y colocarlo en un escritorio que tiene 0.7 m de altura? Recuerde que la aceleración de la gravedad es $g = 9.8$ m/s^2.

(b) ¿Cuánto trabajo se efectúa al levantar desde el suelo un peso de 20 lb a una altura de 6 pies?

SOLUCIÓN

(a) La fuerza ejercida es igual y opuesta a la que ejerce la gravedad, de modo que con la ecuación 1 se obtiene

$$F = mg = (1.2)(9.8) = 11.76 \text{ N}$$

y luego la ecuación 2 proporciona el trabajo efectuado

$$W = Fd = (11.76)(0.7) \approx 8.2 \text{ J}$$

(b) En este caso, la fuerza es $F = 20$ lb, de modo que el trabajo realizado es

$$W = Fd = 20 \cdot 6 = 120 \text{ lb-pie}$$

Observe que en el inciso (b), a diferencia del inciso (a), no tuvo que multiplicar por g porque ya conocía el *peso*, que es una fuerza y no la masa del objeto. □

La ecuación 2 define el trabajo siempre y cuando la fuerza sea constante, pero ¿qué sucede si la fuerza es variable? Suponga que el objeto se desplaza a lo largo del eje x en la dirección positiva, desde $x = a$ hasta $x = b$, y en cada punto x entre a y b una fuerza $f(x)$ actúa sobre el objeto, donde f es una función continua. Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual ancho Δx. Eliga un punto muestral x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Después la fuerza en el punto es $f(x_i^*)$. Si n es grande, luego Δx es pequeña, y puesto que f es continua, los valores de f no cambian mucho en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En otras palabras, f es casi constante en el intervalo, por lo que el trabajo W_i que se realiza al desplazar la partícula desde x_{i-1} hasta x_i se obtiene aproximadamente mediante la ecuación 2:

$$W_i \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

Por eso, puede dar un valor aproximado del trabajo total con

$$\boxed{3} \qquad W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Parece que esta aproximación es mejor a medida que incrementa n. Por lo tanto, defina al **trabajo efectuado al mover el objeto desde a hasta b** como el límite de esta cantidad cuando $n \to \infty$. Puesto que el lado derecho de (3) es una suma de Riemann, su límite es una integral definida y de este modo

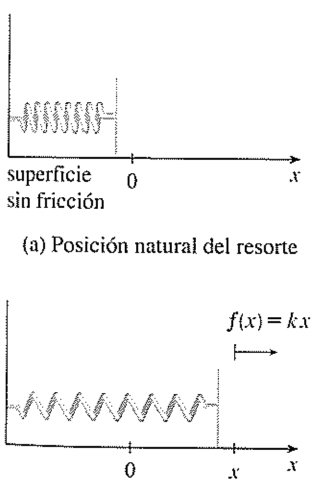
$$\boxed{4} \qquad \boxed{W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx}$$

EJEMPLO 2 Cuando una partícula se ubica a una distancia x pies del origen, una fuerza de $x^2 + 2x$ libras actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla desde $x = 1$ hasta $x = 3$?

SOLUCIÓN

$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_1^3 = \frac{50}{3}$$

El trabajo realizado es $16\frac{2}{3}$ lb-pie. □



(a) Posición natural del resorte

(b) Resorte estirado

FIGURA 1
Ley de Hooke

En el ejemplo siguiente aplique una ley de la física: la **ley de Hooke** establece que la fuerza requerida para mantener un resorte estirado x unidades más de su longitud natural es proporcional a x:

$$f(x) = kx$$

donde k es una constante positiva (que se denomina **constante del resorte**). La ley de Hooke se cumple siempre que x no sea demasiado grande (véase figura 1).

EJEMPLO 3 Una fuerza de 40 N se requiere para detener un resorte que está estirado desde su longitud natural de 10 cm a una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se hace al estirar el resorte de 15 a 18 cm?

SOLUCIÓN De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza que se requiere para mantener el resorte estirado x metros más allá de su longitud natural es $f(x) = kx$. Cuando el resorte se pasa de 10 a 15 cm, la cantidad estirada es 5 cm = 0.05 m. Esto quiere decir que $f(0.05) = 40$, de modo que

$$0.05k = 40 \qquad k = \tfrac{40}{0.05} = 800$$

Por eso, $f(x) = 800x$ y el trabajo hecho para estirar el resorte de 15 a 18 cm es

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x\,dx = 800\,\frac{x^2}{2}\Big]_{0.05}^{0.08}$$

$$= 400[(0.08)^2 - (0.05)^2] = 1.56\ \text{J}$$

□

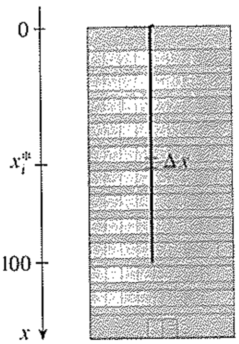


FIGURA 2

EJEMPLO 4 Un cable de 200 lb mide 100 pies de largo y cuelga verticalmente desde lo alto de un edificio. ¿Cuánto trabajo se requiere para subir el cable hasta la parte superior del edificio?

SOLUCIÓN En este caso no hay una fórmula para la función fuerza, pero puede aplicar un razonamiento similar al que originó la definición 4.

Coloque el origen en lo alto del edificio y el eje x señalando hacia abajo como se ilustra en la figura 2. Divida el cable en pequeños segmentos de longitud Δx. Si x_i^* es un punto en el i-ésimo intervalo, por lo tanto todos los puntos del intervalo se levantan casi la misma cantidad, a saber, x_i^*. El cable pesa 2 libras por cada pie, de modo que el peso del i-ésimo segmento es $2\Delta x$. Así, el trabajo hecho en el i-ésimo segmento, en lb-pie, es

$$\underbrace{(2\Delta x)}_{\text{fuerza}} \quad \underbrace{x_i^*}_{\text{distancia}} = 2x_i^* \Delta x$$

Obtenga el trabajo total que se realizó sumando todas las aproximaciones y dejando que la cantidad de segmentos sea grande (de este modo $\Delta x \to 0$):

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_i^* \Delta x = \int_0^{100} 2x\,dx$$

$$= x^2\Big]_0^{100} = 10\,000 \text{ lb-pie}$$

□

Si hubiera colocado el origen en la parte inferior del cable y el eje x hacia arriba habría obtenido

$$W = \int_0^{100} 2(100 - x)\,dx$$

lo cual genera la misma respuesta.

EJEMPLO 5 Un depósito tiene la forma de un cono circular invertido de altura igual a 10 m y radio de la base de 4 m. Se llena con agua hasta alcanzar una altura de 8 m. Calcule el trabajo que se requiere para vaciar el agua mediante bombeo por la parte superior del depósito. (La densidad del agua es 1 000 kg/m.)

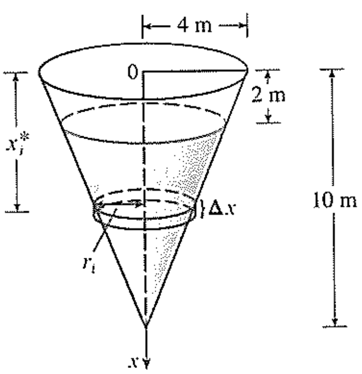


FIGURA 3

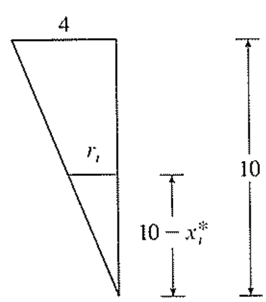


FIGURA 4

SOLUCIÓN Mida profundidades desde la parte superior del recipiente introduciendo una recta vertical de coordenadas como en la figura 3. Hay agua desde una profundidad de 2 m hasta una profundidad de 10 m y, también, divida el intervalo $[2, 10]$ en n subintervalos con extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y elija x_i^* en el i-ésimo subintervalo. De este modo el agua se divide en n capas. La i-ésima capa es aproximadamente un cilindro de radio r_i y altura Δx. Puede calcular r_i a partir de triángulos semejantes y con ayuda de la figura 4 como se indica a continuación:

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \tfrac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

Por eso, un volumen aproximado de la i-ésima capa es

$$V_i \approx \pi r_i^2 \Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \Delta x$$

de modo que su masa es

$$m_i = \text{densidad} \times \text{volumen}$$

$$\approx 1000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2 \Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta x$$

La fuerza necesaria para subir esta capa debe superar a la fuerza de gravedad y de este modo

$$F_i = m_i g \approx (9.8)160\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta x$$
$$\approx 1570\pi(10 - x_i^*)^2 \Delta x$$

Cada partícula de la capa debe viajar una distancia de aproximadamente x_i^*. El trabajo W_i realizado para subir esta capa hasta lo alto del depósito es casi el producto de la fuerza F_i por la distancia x_i^*:

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \Delta x$$

Para encontrar el trabajo total en el vaciado del tanque, sume las contribuciones de cada una de las n capas y tome el límite como $n \to \infty$:

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 1570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \,\Delta x = \int_2^{10} 1570\pi x(10 - x)^2 \, dx$$

$$= 1570\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\, dx = 1570\pi \left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_2^{10}$$

$$= 1570\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3.4 \times 10^6 \text{ J}$$

6.4 EJERCICIOS

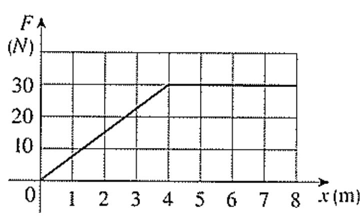
1. ¿Cuánto trabajo se invierte en levantar una bolsa de arena de 40 kg hasta una altura de 1.5 m?

2. Hallar el trabajo gastado si se aplica una fuerza constante de 100 lb para jalar una carreta una distancia de 200 pies

3. Una partícula se desplaza a lo largo del eje x impulsada por una fuerza que mide $10/(1 + x)^2$ libras en un punto a x pies del origen. Calcule el trabajo realizado al mover la partícula desde el origen a una distancia de 9 pies.

4. Cuando una partícula se localiza a una distancia de x metros desde el origen, una fuerza de $\cos(\pi x/3)$ newtons actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover la partícula desde $x = 1$ hasta $x = 2$? Interprete su respuesta considerando que el trabajo se hace desde $x = 1$ hasta $x = 1.5$ y desde $x = 1.5$ hasta $x = 2$.

5. Se ilustra la gráfica de una función fuerza (en newtons) que se incrementa a su máximo valor y luego permanece constante. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza al mover un objeto a una distancia de 8 m?



6. La tabla muestra los valores de una función fuerza $f(x)$, donde x se mide en metros y $f(x)$ en newtons. Aplique la regla del punto medio para estimar el trabajo que realiza la fuerza al mover un objeto desde $x = 4$ hasta $x = 20$.

x	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(x)$	5	5.8	7.0	8.8	9.6	8.2	6.7	5.2	4.1

7. Se requiere una fuerza de 10 lb para mantener estirado un resorte 4 pulg más de su longitud natural. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta 6 pulg más de su longitud natural?

8. Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Si se requiere una fuerza de 25 N para mantenerlo estirado a una longitud de 30 cm, ¿cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde 20 hasta 25 cm?

9. Suponga que se necesitan 2 J de trabajo para estirar un resorte desde su longitud natural de 30 cm hasta una longitud de 42 cm.
   (a) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde 35 hasta 40 cm?
   (b) ¿Cuánto más allá de su longitud natural una fuerza de 30 N mantendrá el resorte estirado?

10. Si el trabajo que se requiere para estirar un resorte 1 pie más de su longitud natural es 12 lb-pie, ¿cuánto trabajo se requiere para estirar al resorte 9 pulg más de su longitud natural?

11. Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Compare el trabajo W_1 invertido en alargar un resorte desde 20 cm hasta 30 cm con el trabajo W_2 gastado en estirarlo desde 30 cm hasta 40 cm. ¿Cómo se relacionan W_1 y W_2?

12. Si se necesitan 6 J de trabajo para estirar un resorte de 10 cm a 12 cm y otros 10 J para estirarlo de 12 hasta 14, ¿cuál es la longitud natural del resorte?

13–20 Demuestre cómo obtener un valor aproximado del trabajo requerido mediante una suma de Riemann. Luego exprese el trabajo como una integral, y evalúela.

13. Una pesada soga de 50 pies de largo pesa 0.5 lb/pie y está colgando por un lado de un edificio de 120 pies de alto.
    (a) ¿Cuánto trabajo se efectúa al jalar la soga por la parte superior del edificio?
    (b) ¿Cuánto trabajo se efectúa al jalar la mitad de la soga por la parte superior del edificio?

14. Una cadena está en el suelo y mide 10 m de largo y su masa es de 80 kg. ¿Cuánto trabajo se efectúa para subir un extremo de la cadena a una altura de 6 m?

15. Un cable que pesa 2 lb/pie se usa para subir 800 lb de carbón por el tiro de la mina de 500 m de profundidad. Calcule el trabajo realizado.

16. Un cubo que pesa 4 lb y una soga de peso insignificante se usan para extraer agua de un pozo de 80 pies de profundidad. El cubo se llena con 40 lb de agua y se jala hacia arriba con una rapidez de 2 pies/s, pero el agua se sale por un agujero que tiene el cubo con una rapidez de 0.2 lb/s. Calcule el trabajo hecho al jalar el cubo hasta la boca del pozo.

17. Un cubo de 10 kg pero con un agujero, se sube desde el suelo hasta una altura de 12 m con rapidez constante por medio de una soga que pesa 0.8 kg/m. Al principio, el cubo contiene 36 kg de agua, pero el agua se sale con rapidez constante y

termina de salirse justo cuando el cubo llega a los 12 metros de altura. ¿Cuánto trabajo se realizó?

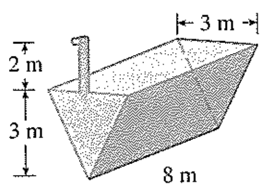
18. Una cadena de 10 pies de largo pesa 25 lb y cuelga de un techo. Calcule el trabajo hecho al subir el extremo inferior de la cadena al techo de modo que esté al mismo nivel que el extremo superior.

19. Un acuario que mide 2 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de profundidad está lleno con agua. Determine el trabajo que se requiere para extraer por bombeo la mitad del agua de dicho acuario. (Recuerde que la densidad del agua es de 1 000 kg/m^3.)

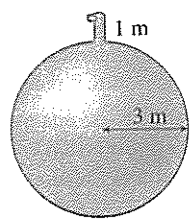
20. Una piscina circular tiene un diámetro de 24 pies, los lados miden 5 pies de altura y la profundidad del agua es de 4 pies. ¿Cuánto trabajo se requiere para extraer por bombeo toda el agua por uno de los lados? (Recuerde que el peso del agua es de 62.5 lb/pie^3.)

21–24 Un tanque está lleno con agua. Determine el trabajo necesario para que, mediante bombeo, el agua salga por el tubo de descarga. En los ejercicios 23 y 24 recuerde que el peso del agua es de 62.5 lb/pie^3.

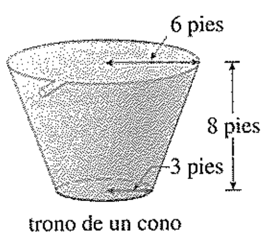
21.



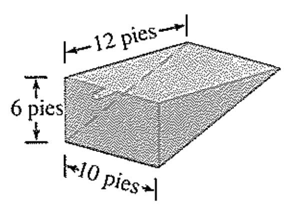
22.



23.



24.

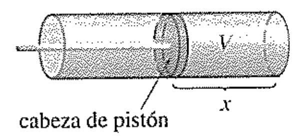


25. Suponga que en el caso del depósito del ejercicio 21, la bomba se descompone después de que se ha realizado un trabajo de 4.7×10^5 J. ¿Cuál es la profundidad del agua que queda en el depósito?

26. Resuelva el ejercicio 22 suponiendo que el tanque está lleno a la mitad de aceite con densidad de 920 kg/m^3.

27. Cuando el gas se expande en un cilindro de radio r, la presión en cualquier tiempo dado es una función del volumen: $P = P(V)$. La fuerza que ejerce el gas en el émbolo (véase la figura) es el producto de la presión por el área: $F = \pi r^2 P$. Demuestre que el trabajo que realiza el gas cuando el volumen se expande desde el volumen V_1 al volumen V_2 es

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$



28. En un motor de vapor, la presión P y el volumen V del vapor cumple con la ecuación $PV^{1.4} = k$, donde k es una constante. (Esto es válido en el caso de la expansión adiabática, es decir, la expansión en la cual no hay transferencia de calor entre el cilindro y sus alrededores.) Refiérase al ejercicio 27 para calcular el trabajo realizado por el motor durante un ciclo cuando el vapor inicia a una presión de 160 lb/pulg^2 y un volumen de 100 pulg^3 y se expande a un volumen de 800 pulg^3.

29. La ley de Newton de la gravitación establece que dos cuerpos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los cuerpos y G es la constante gravitacional. Si uno de los cuerpos está fijo, determine el trabajo necesario para llevar al otro desde $r = a$ hasta $r = b$.

30. Mediante la ley de Newton de la gravitación, calcule el trabajo que se requiere para lanzar un satélite de 1 000 kg en dirección vertical hasta una órbita a 1 000 km de altura. Puede suponer que la masa de la Tierra es de 5.98×10^{24} kg y está concentrada en el centro. Tome el radio de la Tierra como 6.37×10^6 m y $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2.

6.5 VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

Es fácil calcular el valor promedio de una cantidad finita de números $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_{\text{prom}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

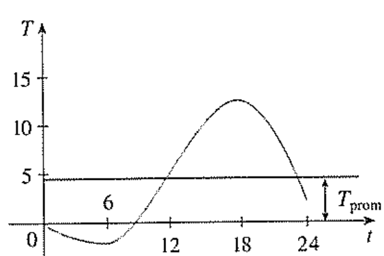


FIGURA 1

Pero ¿de qué manera calcular la temperatura promedio durante un día, si hay una cantidad infinita de lecturas de temperatura? En la figura 1 se ilustra la gráfica de una función de temperatura $T(t)$, donde t se mide en horas y T en °C, y una conjetura a la temperatura promedio, T_{prom}.

En general, trate de calcular el valor promedio de una función $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. Empiece por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de ellos de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Luego escoja los puntos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en subintervalos sucesivos y calcule el promedio de los números $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

(Por ejemplo, si f representa una función de temperatura y $n = 24$, esto quiere decir que tome lecturas de la temperatura cada hora y luego promédielos.) Puesto que $\Delta x = (b - a)/n$, puede escribir $n = (b - a)/\Delta x$ y el promedio de los valores es

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}[f(x_1^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Si deja que n se incremente, calcularía el valor promedio de un gran número de valores muy poco separados. (Por ejemplo, promediaría lecturas de temperatura tomadas cada minuto o hasta cada segundo.) El valor límite es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

por la definición de una integral definida.

Por lo tanto, defina el **valor promedio de f** en el intervalo $[a, b]$ como

Para una función positiva, considere a esta definición como

$$\frac{\text{área}}{\text{ancho}} = \text{altura promedio}$$

$$\boxed{f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

EJEMPLO 1 Determine el valor promedio de la función $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$.

SOLUCIÓN Con $a = -1$ y $b = 2$

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(1 + x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2 \qquad \square$$

Si $T(t)$ es la temperatura en el tiempo t, es posible maravillarse si existe un tiempo específico cuando la temperatura es la misma que la temperatura promedio. Para la función temperatura dibujada en la figura 1, existen dos tiempos; justo antes del mediodía y antes de la medianoche. En general ¿hay un número c al cual el valor de f es exactamente igual al valor promedio de la función, es decir, $f(c) = f_{\text{prom}}$? El teorema siguiente dice que esto es válido para funciones continuas.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

El teorema del valor medio para integrales es una consecuencia del teorema del valor medio para las derivadas y el teorema fundamental del cálculo. La demostración se esboza en el ejercicio 23.

La interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales es que, para funciones positivas f, hay un número c tal que el rectángulo con base $[a, b]$ y altura $f(c)$ tiene la misma área que la región bajo la gráfica de f desde a hasta b. (Véase figura 2 y la interpretación más clara en la nota al margen.)

▣ Siempre se puede cortar una parte de lo alto de una (dos dimensiones) montaña hasta una cierta altura, y usarla para rellenar con eso los valles de tal modo que la montaña se vuelva completamente plana.

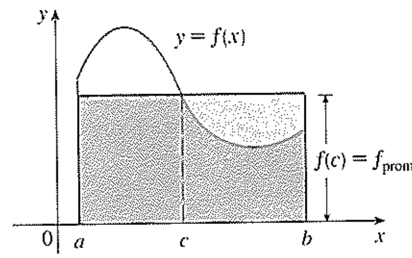


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Puesto que $f(x) = 1 + x^2$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$, el teorema del valor medio para integrales establece que hay un número c en $[-1, 2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\, dx = f(c)[2 - (-1)]$$

En este caso particular puede hallar c, en forma explícita. Según el ejemplo 1, sabe que $f_{\text{prom}} = 2$, de modo que el valor de c cumple con

$$f(c) = f_{\text{prom}} = 2$$

Por lo tanto $\quad 1 + c^2 = 2 \quad$ de modo que $\quad c^2 = 1$

Por consiguiente, sucede en este caso que hay dos números $c = \pm 1$ en el intervalo $[-1, 2]$ que funciona en el teorema del valor medio para las integrales. □

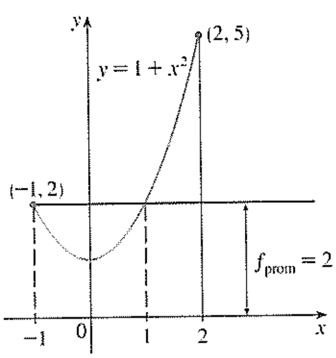


FIGURA 3

Los ejemplos 1 y 2 se ilustran mediante la figura 3.

EJEMPLO 3 Demuestre que la velocidad promedio de un automóvil en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es la misma que el promedio de sus velocidades durante el viaje.

SOLUCIÓN Si $s(t)$ es el desplazamiento del automóvil en el tiempo t, entonces, por definición, la velocidad promedio del automóvil en el intervalo es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por otro lado, el valor promedio de la función de velocidad en el intervalo es

$$v_{\text{prom}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} [s(t_2) - s(t_1)] \qquad \text{(según el teorema del cambio total)}$$

$$= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{velocidad promedio}$$

□

6.5 EJERCICIOS

1–8 Determine el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = 4x - x^2$, $[0, 4]$
2. $f(x) = \text{sen } 4x$, $[-\pi, \pi]$
3. $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $[1, 8]$
4. $g(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}$, $[0, 2]$
5. $f(t) = te^{-t^2}$, $[0, 5]$
6. $f(\theta) = \sec^2(\theta/2)$, $[0, \pi/2]$
7. $h(x) = \cos^4 x \text{ sen } x$, $[0, \pi]$
8. $h(u) = (3 - 2u)^{-1}$, $[-1, 1]$

9–12
(a) Calcule el valor promedio de f en el intervalo dado.
(b) Encuentre c tal que $f_{\text{prom}} = f(c)$.
(c) Grafique f y el rectángulo cuya área es la misma que el área bajo la gráfica de f.

9. $f(x) = (x - 3)^2$, $[2, 5]$
10. $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 4]$
11. $f(x) = 2 \text{ sen } x - \text{sen } 2x$, $[0, \pi]$
12. $f(x) = 2x/(1 + x^2)^2$, $[0, 2]$

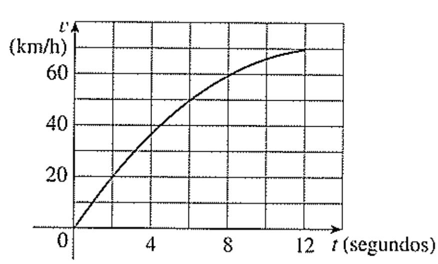
13. Si f es continua y $\int_1^3 f(x)\, dx = 8$, demuestre que f toma el valor de 4 por lo menos una vez en el intervalo $[1, 3]$.

14. Determine los números b tales que el valor promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ es igual a 3.

15. La tabla da valores de una función continua. Mediante la regla del punto medio estime el valor promedio de f en $[20, 50]$.

x	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	42	38	31	29	35	48	60

16. Se muestra la gráfica de velocidad de un automóvil que acelera.
(a) Estime la velocidad promedio del automóvil durante los primeros 12 segundos.
(b) ¿En qué momento la velocidad instantánea fue igual a la velocidad promedio?



17. En una cierta ciudad la temperatura (en °F) t horas después de las 9 A.M. se modeló mediante la función

$$T(t) = 50 + 14 \text{ sen } \frac{\pi t}{12}$$

Calcule la temperatura promedio durante el periodo de 9 AM hasta 9 P.M.

18. (a) Una taza de café tiene una temperatura de 95°C y le toma 30 minutos enfriarse a 61°C en una habitación con una temperatura de 20°C. Utilice la ley del enfriamiento de Newton (sección 3.8) para demostrar que la temperatura del café después de t minutos es.

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}$$

donde $k \approx 0.02$.

(b) ¿Cuál es la temperatura promedio del café durante la primera media hora?

19. La densidad lineal de una varilla de 8 m de longitud es $12/\sqrt{x + 1}$ kg/m, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Determine la densidad promedio de la varilla.

20. Si un cuerpo en caída libre parte del reposo, después su desplazamiento está de acuerdo con $s = \frac{1}{2}gt^2$. Sea la velocidad v_T después del tiempo T. Demuestre que si calcula el promedio de las velocidades con respecto a t obtiene $v_{\text{prom}} = \frac{1}{2}v_T$,pero si calcula el promedio de las velocidades con respecto a s obtiene $v_{\text{prom}} = \frac{2}{3}v_T$.

21. Con el resultado del ejercicio 79 de la sección 5.5 calcule el volumen promedio de aire inhalado en los pulmones en un ciclo respiratorio.

22. La velocidad v de la sangre que fluye en un vaso sanguíneo de radio R y longitud l a una distancia r desde el eje central es

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre (véase ejemplo 7 de la sección 3.7). Determine la velocidad promedio (con respecto a r) en el intervalo $0 \leqslant r \leqslant R$. Compare la velocidad promedio con la velocidad máxima.

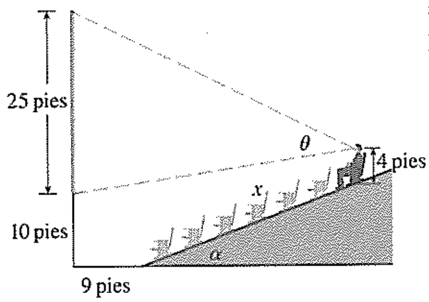
23. Demuestre el teorema del valor medio para integrales aplicando el teorema del valor medio para derivadas (véase sección 4.2) a la función $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

24. Si $f_{\text{prom}}[a, b]$ denota el valor promedio de f en el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$, demuestre que

$$f_{\text{prom}}[a, b] = \frac{c - a}{b - a} f_{\text{prom}}[a, c] + \frac{b - c}{b - a} f_{\text{prom}}[c, b]$$

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿DÓNDE SENTARSE EN LAS SALAS CINEMATOGRÁFICAS?

Un cinematógrafo tiene una pantalla que está colocada a 10 pies arriba del piso y mide 25 pies de altura. La primera fila de asientos está ubicada a 9 pies de la pantalla, y las filas están separadas 3 pies. El piso de la zona de asientos está inclinada un ángulo de $\alpha = 20°$ por arriba de la horizontal y la distancia inclinada hasta donde usted está sentado es x. La sala tiene 21 filas de asientos, de modo que $0 \leqslant x \leqslant 60$. Suponga que usted decide que el mejor lugar para sentarse es la fila donde el ángulo θ que subtiende la pantalla en sus ojos es un máximo. Suponga también que sus ojos están 4 pies por arriba del piso, según se ilustra en la figura. (En el ejercicio 70 de la sección 4.7 se estudia una versión más sencilla de este problema, en el que el piso es horizontal, pero este proyecto plantea una situación más complicada y requiere técnicas modernas.)



1. Demuestre que

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 625}{2ab}\right)$$

donde $\qquad a^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (31 - x\operatorname{sen}\alpha)^2$

y $\qquad b^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (x\operatorname{sen}\alpha - 6)^2$

2. Mediante una gráfica de θ como función de x estime el valor de x que maximiza θ. ¿En cuál fila debe sentarse? ¿Cuál es el ángulo de visión θ en esta fila?
3. Utilice un sistema algebraico computacional para derivar θ y calcular un valor numérico para la raíz de la ecuación $d\theta/dx = 0$. ¿Este valor confirma su resultado del problema 2?
4. Mediante una gráfica de θ estime el valor promedio de θ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 60$. Luego aplique su sistema algebraico computacional para calcular el valor promedio. Compare con los valores máximos y mínimos de θ.

6 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Trace dos curvas representativas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Muestre cómo aproximarse al área entre estas curvas mediante la suma de Riemann, y dibuje los rectángulos correspondientes de aproximación. Luego plantee una expresión del área exacta.
   (b) Explique cómo la situación cambia si las curvas tienen por ecuaciones a $x = f(y)$ y $x = g(y)$, donde $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$.
2. Suponga que Sue corre más rápido que Kathy en la competencia de los 1 500 m. ¿Cuál es el significado físico del área entre sus curvas de velocidad durante el primer minuto de la competencia?
3. (a) Suponga que S es un sólido con áreas de secciones transversales conocidas. Explique cómo obtener un valor aproximado del volumen de S mediante una suma de Riemann. Luego escriba una expresión para el volumen exacto.
   (b) Si S es un sólido de revolución, ¿cómo determina las áreas de las secciones transversales?
4. (a) ¿Cuál es el volumen de un cascarón cilíndrico?
   (b) Explique cómo utilizar los cascarones cilíndricos para calcular el volumen de un sólido de revolución.
   (c) ¿Por qué prefería usted usar el método de cálculo mediante cascarones en lugar del método de las rebanadas?
5. Suponga que empuja un libro al otro lado de una mesa de 6 m de largo ejerciendo una fuerza $f(x)$ en cada punto desde $x = 0$ hasta $x = 6$. ¿Qué representa $\int_0^6 f(x)\,dx$? Si $f(x)$ se mide en newtons, ¿cuáles son las unidades para la integral?
6. (a) ¿Cuál es el valor medio de una función f en un intervalo $[a, b]$?
   (b) ¿Qué establece el teorema del valor medio para integrales? ¿Cuál es su interpretación geométrica?

EJERCICIOS

1–6 Calcule el área de la región acotada por las curvas dadas.

1. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$
2. $y = 1/x\ y = x^2,\ y = 0,\ x = e$
3. $y = 1, -2x^2,\ y = |x|$
4. $x + y = 0, \quad x = y^2 + 3y$
5. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2), \quad y = x^2 - 2x$

6. $y = \sqrt{x}$; $y = x^2$, $x = 2$

7–11 Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región definida por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

7. $y = 2x$, $y = x^2$; alrededor del eje x

8. $x = 1 + y^2$, $y = x - 3$; alrededor del eje y

9. $x = 0$, $x = 9 - y^2$; alrededor de $x = -1$

10. $y = x^2 + 1$, $y = 9 - x^2$; alrededor de $y = -1$

11. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = a + h$ (donde $a > 0$, $h > 0$); alrededor del eje y

12–14 Plantee una integral, pero no la evalúe, para determinar el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región delimitada por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

12. $y = \tan x$, $y = x$, $x = \pi/3$; alrededor del eje y

13. $y = \cos^2 x$, $|x| \leqslant \pi/2$, $y = \frac{1}{4}$; alrededor de $x = \pi/2$

14. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$; alrededor de $y = 2$

15. Determine los volúmenes de los sólidos obtenidos al hacer girar la región delimitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de las rectas siguientes:
(a) El eje x (b) El eje y (c) $y = 2$

16. Sea $\mathcal{R}$ la región que se encuentra en el primer cuadrante y que está limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$. Calcule las cantidades siguientes.
(a) El área de $\mathcal{R}$
(b) El volumen obtenido al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x
(c) El volumen obtenido al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y

17. Sea $\mathcal{R}$ la región delimitada por las curvas $y = \tan(x^2)$, $x = 1$ y $y = 0$. Aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para estimar lo siguiente.
(a) El área de $\mathcal{R}$
(b) El volumen obtenido al hacer girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x

18. Sea $\mathcal{R}$ la región que definen las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = x^6 - x + 1$. Estime las cantidades siguientes.
(a) Las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas
(b) El área de $\mathcal{R}$
(c) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x
(d) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje y

19–22 Cada integral representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

19. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x\, dx$ 20. $\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x\, dx$

21. $\int_0^{\pi} \pi(2 - \operatorname{sen} x)^2\, dx$ 22. $\int_0^4 2\pi(6 - y)(4y - y^2)\, dy$

23. La base del sólido es un disco circular de radio 3. Calcule el volumen del sólido si las secciones transversales paralelas y perpendiculares a la base son triángulos rectángulos isósceles cuya hipotenusa se apoya en la base.

24. La base de un sólido es la región que definen las parábolas $y = x^2$ y $y = 2 - x^2$. Calcule el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados y uno de sus lados coincide con la base.

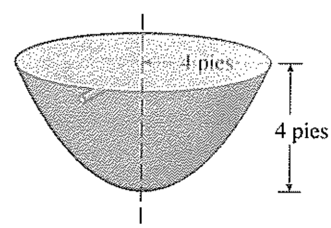
25. La altura de un monumento es de 20 m. Una sección transversal horizontal a una distancia de x metros desde la parte alta es un triángulo equilátero con $\frac{1}{4}x$ metros por lado. Calcule el volumen del monumento.

26. (a) La base de un sólido es un cuadrado cuyos vértices están ubicados en $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$. Todas las secciones transversales perpendiculares al eje x es un semicírculo. Determine el volumen del sólido.
(b) Demuestre que al cortar el sólido del inciso (a) lo puede reacomodar para formar un cono. Calcule por lo tanto su volumen con más facilidad.

27. Se requiere una fuerza de 30 N para mantener estirado un resorte desde su longitud natural de 12 cm hasta una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde 12 cm hasta 20 cm?

28. Un elevador de 1 600 lb está suspendido de un cable de 200 pies que pesa 10 lb/pie. ¿Cuánto trabajo se requiere para subir el elevador desde el sótano hasta el tercer piso, que es una distancia de 30 pies?

29. Un depósito lleno con agua tiene la forma de un paraboloide de revolución como se muestra en la figura, es decir, su forma se obtiene al hacer girar una parábola alrededor del eje vertical.
(a) Si su altura es de 4 pies, el radio en lo alto es de 4 pies, determine el trabajo requerido para extraer por bombeo el agua del tanque
(b) Después de 4 000 lb-pies de trabajo realizado, ¿cuál es la profundidad del agua que queda en el depósito?



30. Calcule el valor promedio de la función $f(t) = t \operatorname{sen}(t^2)$ en el intervalo $[0, 10]$.

31. Si f es una función continua, ¿cuál es el límite cuando $h \to 0$ del valor promedio de f en el intervalo $[x, x + h]$?

32. Sea $\mathcal{R}_1$ la región definida por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = b$, donde $b > 0$. Sea $\mathcal{R}_2$ la región delimitada por $y = x^2$, $x = 0$ y $y = b^2$.
(a) ¿Hay un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tengan la misma área?
(b) ¿Hay un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ abarca el mismo volumen cuando gira alrededor del eje x que alrededor del eje y?
(c) ¿Hay un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ abarcan el mismo volumen cuando gira alrededor del eje x?
(d) ¿Hay un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ abarcan el mismo volumen cuando gira alrededor del eje y?

PROBLEMAS ADICIONALES

1. (a) Encuentre una función f continua positiva tal que el área bajo la gráfica de f desde 0 hasta t es $A(t) = t^3$ para toda $t > 0$.
   (b) Se genera un sólido al hacer girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = f(x)$, donde f es una función positiva y $x \geqslant 0$. El volumen generado por la parte de la curva desde que $x = 0$ hasta $x = b$ es b^2 para toda $b > 0$. Determine la función f.

2. Hay una recta que pasa por el origen que divide la región definida por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x en dos regiones de área igual. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

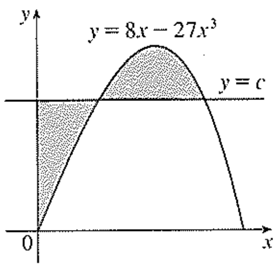
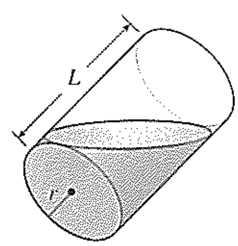
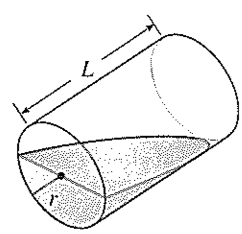


FIGURA PARA EL PROBLEMA 3

3. En la figura se ilustra una horizontal $y = c$ que corta a la curva $y = 8x - 27x^3$. Encuentre el número c tal que las áreas de las regiones sombreadas sean iguales.

4. Un recipiente de vidrio, cilíndrico, de radio r y altura L se llena con agua y luego se ladea hasta que el agua que queda en el recipiente cubra exactamente la base.
   (a) Determine una manera de "rebanar" el agua en secciones transversales, rectangulares y paralelas, y luego *plantee* una integral definida para determinar el volumen del agua en el recipiente.
   (b) Encuentre una manera de obtener "rebanadas" de agua que sean secciones transversales y paralelas, pero que sean trapezoides, y luego *plantee* una integral definida para obtener el volumen del agua.
   (c) Calcule el volumen de agua en el recipiente evaluando una de las integrales de los incisos (a) o (b).
   (d) Calcule el volumen del agua en el recipiente a partir de consideraciones puramente geométricas.
   (e) Suponga que el recipiente se ladea hasta que el agua cubre exactamente la mitad de la base. ¿En qué dirección puede "rebanar" el agua en secciones transversales triangulares? ¿Y en secciones transversales rectangulares? ¿En secciones transversales que son segmentos de círculos? Determine el volumen del agua en el recipiente.





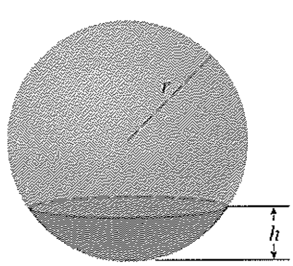


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

5. (a) Demuestre que el volumen de un segmento de altura h de una esfera de radio r es
$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$
   (b) Demuestre que si una esfera de radio 1 se corta mediante un plano a una distancia x desde el centro de tal manera que el volumen de un segmento es el doble del volumen del otro, por lo tanto x es una solución de la ecuación.
$$3x^3 - 9x + 2 = 0$$
   donde $0 < x < 1$. Aplique el método de Newton para determinar una x exacta con cuatro cifras decimales.
   (c) Utilice la fórmula del volumen de un segmento de una esfera para demostrar que la profundidad x a la cual una esfera flotante de radio r se hunde en el agua es una raíz de la ecuación
$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0$$
   donde s es la densidad relativa de la esfera. Suponga que una esfera de madera de radio igual a 0.5 m tiene densidad relativa de 0.75. Calcule la profundidad, con cuatro cifras decimales, a la cual la esfera se hunde.

(d) Un recipiente semiesférico tiene radio de 5 pulg y entra agua al recipiente a una cantidad de 0.2 pulg^3/s.
   (i) ¿Qué tan rápido sube el nivel de agua en el recipiente en el instante en que el agua tiene 3 pulg de profundidad?
   (ii) En un cierto momento, el agua tiene 4 pulg de profundidad. ¿Qué tanto tiempo se requiere para llenar con agua el recipiente?

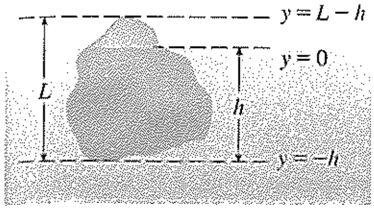


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

6. El principio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación de un objeto parcial o totalmente sumergido en un líquido es igual al peso del líquido que el objeto desaloja. Por lo tanto, en el caso de un objeto de densidad ρ_0, que flota parcialmente sumergido en un líquido de densidad ρ_0 la fuerza de flotación es $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)\,dy$, donde g es la aceleración debido a la gravedad y $A(y)$ es el área de una sección transversal representativa del objeto. El peso del objeto se representa mediante

$$W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy$$

(a) Demuestre que el porcentaje del volumen del objeto por arriba de la superficie del líquido es

$$100\,\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$$

(b) La densidad del hielo es 917 kg/m^3 y la densidad del agua de mar es 1 030 kg/m^3. ¿Qué porcentaje del volumen de un iceberg sobresale del agua?
(c) Un cubo de hielo flota en un vaso lleno hasta el borde con agua. ¿Se derramará el agua cuando se funda el cubo de hielo?
(d) Una esfera de radio 0.4 m y de peso insignificante flota en un lago enorme de agua dulce. ¿Qué tanto trabajo se requiere para sumergir del todo a la esfera? La densidad del agua es de 1 000 kg/m^3.

7. El agua que se encuentra en un recipiente se evapora con una rapidez proporcional al área de la superficie del agua. (Esto quiere decir que la rapidez de decremento del volumen es proporcional al área de la superficie.) Demuestre que la profundidad del agua disminuye a una rapidez constante, sin que importe la forma del recipiente.

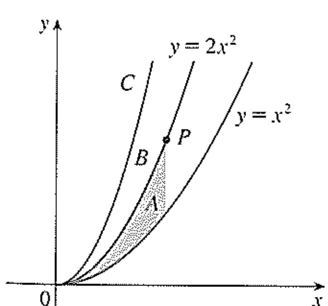
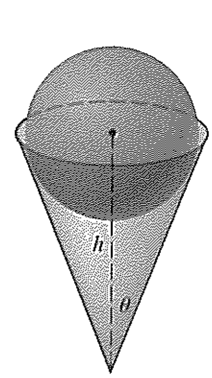


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

8. Una esfera de radio 1 se sobrepone a una esfera más pequeña de radio r de tal manera que su intersección es una circunferencia de radio r. (En otras palabras, cuando ambas se cortan, el resultado es el gran círculo de la esfera menor.) Determine r de modo que el volumen en el interior de la esfera pequeña y el volumen incluyendo el exterior de la esfera grande sea tan grande como sea posible.

9. En la figura se ilustra una curva C con la propiedad de que para todo punto P en la mitad de la curva $y = 2x^2$, las áreas A y B son iguales. Determine una ecuación de C.

10. Un vaso de papel lleno con agua tiene la forma de un cono de altura h y ángulo semivertical θ (véase la figura). Se coloca una pelota con todo cuidado en el vaso, con lo cual se desplaza una parte de agua y se derrama. ¿Cuál es el radio de la pelota que ocasiona que el volumen máximo de agua se derrame?



11. Una *clepsidra* o reloj de agua es un recipiente de vidrio con un pequeño agujero en el fondo a través del cual el agua puede salir. El reloj se calibra para que mida el tiempo; la calibración se efectúa colocando marcas en el recipiente que corresponden a los niveles de agua en tiempos con separación igual. Sea $x = f(y)$ continua en el intervalo $[0, b]$ y suponga que el recipiente se formó al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje y. Sea V el volumen de agua y h la altura del nivel de agua en el tiempo t.

(a) Determine V en función de h.

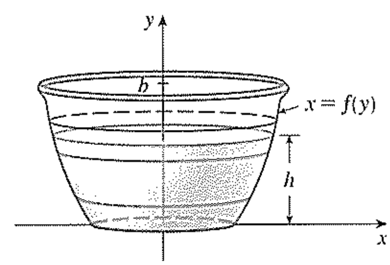
(b) Demuestre que

$$\frac{dV}{dt} = \pi[f(h)]^2 \frac{dh}{dt}$$

(c) Suponga que A es el área del agujero en el fondo del recipiente. Se infiere de la ley de Torricelli que la relación de cambio del volumen del agua es

$$\frac{dV}{dt} = kA\sqrt{h}$$

donde k es una constante negativa. Determine una fórmula para la función f tal que dh/dt es una constante C. ¿Cuál es la ventaja de tener $dh/dt = C$?



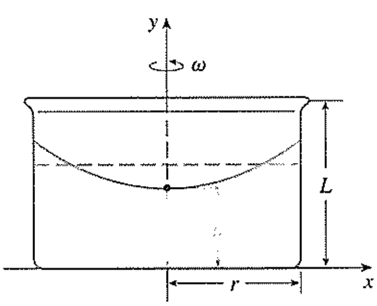


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

12. Un recipiente cilíndrico de radio r y altura L está lleno en parte con un líquido cuyo volumen es V. Si se hace girar el recipiente alrededor del eje de simetría con rapidez angular constante ω, por lo tanto el recipiente inducirá un movimiento rotatorio en el líquido alrededor del mismo eje. A la larga, el líquido estará girando a la misma rapidez angular que el recipiente. La superficie del líquido será convexa, como se señala en la figura, porque la fuerza centrífuga en las partículas de líquido aumenta con la distancia desde el eje del recipiente. Se puede demostrar que la superficie del líquido es un paraboloide de revolución generado al hacer girar la parábola

$$y = h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

alrededor del eje de las y, donde g es la aceleración de la gravedad.

(a) Determine h como una función de ω.

(b) ¿A qué rapidez angular la superficie del líquido tocará el fondo? ¿A qué rapidez se derramará el agua por el borde?

(c) Suponga que el radio del recipiente es 2 pies, la altura es 7 pies y que el recipiente y el líquido giran a la misma rapidez angular constante. La superficie del líquido está a 5 pies por abajo de la parte superior del depósito en el eje central y a 4 pies por abajo de la parte superior del recipiente a 1 pie del eje central.

(i) Determine la rapidez angular del recipiente y el volumen del líquido.

(ii) ¿Qué tanto por abajo de la parte superior el recipiente está el líquido en la pared del recipiente?

13. Considere la grafica de un polinomio cúbico que corta transversalmente la parábola $y = x^2$ cuando $x = 0$, $x = a$, y $x = b$, donde $0 < a < b$. Si las dos regiones entre las curvas tiene la misma área, ¿cómo se relaciona b con a?

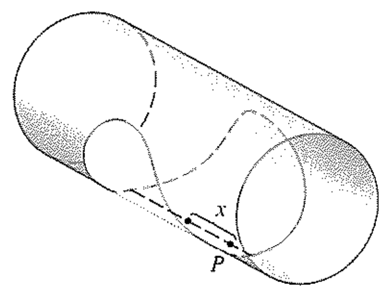
CAS **14.** Suponga que planea hacer un taco con una tortilla de 8 pulg de diámetro, de modo que la tortilla parezca que está rodeando en parte un cilindro circular. Llene la tortilla hasta la orilla, (y no más) con carne, queso y otros ingredientes. El problema es decidir cómo curvar la tortilla para maximizar el volumen de comida que pueda contener.

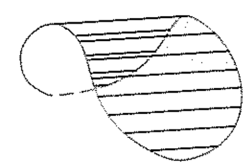
(a) Empiece por colocar un cilindro circular de radio r a lo largo del diámetro de la tortilla, y rodee con ésta el cilindro. Represente con x la distancia desde el centro de la tortilla hasta el punto P en el diámetro (véase la figura). Demuestre que el área de la sección transversal del taco lleno en el plano que pasa por P y que es perpendicular al eje del cilindro es

$$A(x) = r\sqrt{16 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{r}\sqrt{16 - x^2}\right)$$

y escriba una expresión para el volumen del taco lleno.

(b) Determine en forma aproximada el valor de r que maximiza el volumen del taco. (Recurra a un método gráfico con su CAS.)

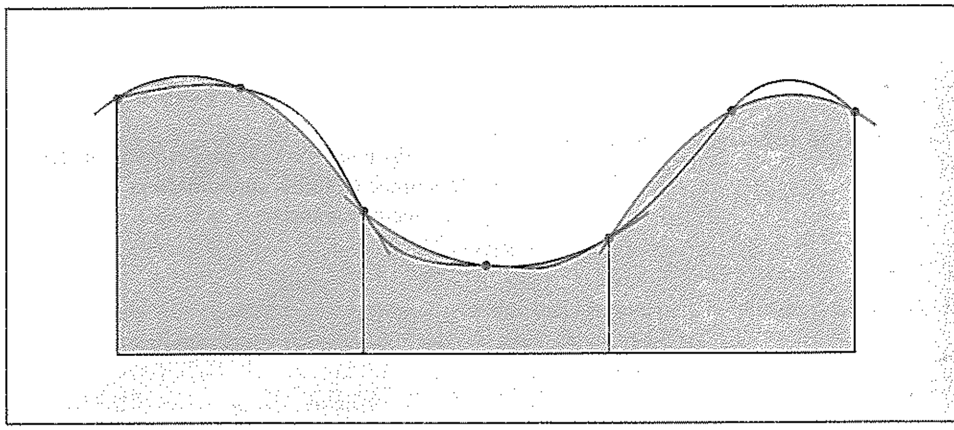




15. Si la tangente en un punto P en la curva $y = x^2$ corta transversalmente otra vez la curva en Q, sea A el área de la región limitada por la curva y el segmento de línea PQ. Sea B el área de la región definida de la misma manera iniciando con Q en lugar de P. ¿Cuál es la correspondencia entre A y B?

7

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN



Con la regla de Simpson se estiman integrales mediante la aproximación de gráficas con parábolas.

Como resultado del teorema fundamental del cálculo, se puede integrar una función si se conoce una antiderivada, es decir, una integral indefinida. Se resumen aquí las integrales más importantes que se han aprendido hasta el momento.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

En este capítulo se desarrollan técnicas para usar estas fórmulas de integración básicas a fin de obtener integrales indefinidas de funciones más complicadas. En la sección 5.5 se aprendió el método de integración más importante, la regla de sustitución. La otra técnica general, integración por partes, se presenta en la sección 7.1. Después se aprenden métodos que son especiales para clases particulares de funciones como las trigonométricas y racionales.

La integración no es tan directa como la derivación; no hay reglas que garanticen de manera absoluta obtener una integral indefinida de una función. Por lo tanto, en la sección 7.5 se describe una estrategia para integración.

7.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Toda regla de derivación tiene una regla de integración correspondiente. Por ejemplo, la regla de sustitución para integración corresponde a la regla de la cadena para derivación. La regla que corresponde a la regla del producto para derivación se llama regla para *integración por partes*.

La regla del producto establece que si f y g son funciones derivables, en tal caso

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación para integrales indefinidas, esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

o bien,

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Esta ecuación se puede reordenar como

1
$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx}$$

La fórmula 1 se llama **fórmula para integración por partes**. Quizás es más fácil recordarla en la siguiente notación. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Por lo tanto las diferenciales son $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$; por lo tanto, por la regla de sustitución, la fórmula para integración por partes se convierte en

2
$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN POR MEDIO DE LA FÓRMULA 1 Suponga que se elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. En tal caso $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. (Para g se puede elegir *cualquier* derivada de g'.) Así, con la fórmula 1, se tiene

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\
&= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\
&= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\
&= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$

Es aconsejable comprobar la respuesta mediante derivación. Si se hace así, se obtiene x sen x, como se esperaba.

SOLUCIÓN POR MEDIO DE LA FÓRMULA 2 Sea

■ Es útil usar el patrón:

$u = \square \qquad dv = \square$

$du = \square \qquad v = \square$

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

Entonces $\qquad du = dx \qquad v = -\cos x$

y, por lo tanto,

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \int \overbrace{x}^{u}\, \overbrace{\operatorname{sen} x\, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\, \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\, \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

$$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

□

NOTA El objetivo de usar la integración por partes es obtener una integral más simple que aquella con la que se inició. Así, en el ejemplo 1 se inició con $\int x \operatorname{sen} x\, dx$ y se expresó en términos de la integral más simple $\int \cos x\, dx$. Si se hubiera elegido $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\, dx$, en tal caso $du = \cos x\, dx$ y $v = x^2/2$, así que la integración por partes da

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = (\operatorname{sen} x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\, dx$$

Aunque esto es cierto, $\int x^2 \cos x\, dx$ es una integral más difícil que la inicial. En general, al decidir sobre una elección para u y dv, por lo común se intenta elegir $u = f(x)$ como una función que se vuelve más simple cuando se deriva (o por lo menos no más complicada) siempre y cuando $dv = g'(x)\, dx$ se pueda integrar fácilmente para dar v.

V EJEMPLO 2 Evaluar $\int \ln x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí no se tiene mucha elección para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

entonces $\qquad du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = x$

Al integrar por partes, se obtiene

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x}$$

■ Se acostumbra escribir $\int 1\, dx$ como $\int dx$.

$$= x \ln x - \int dx$$

■ Compruebe la respuesta mediante derivación.

$$= x \ln x - x + C$$

La integración por partes es efectiva en este ejemplo, porque la derivada de la función $f(x) = \ln x$ es más simple que f.

□

EJEMPLO 3 Determine $\int t^2 e^t \, dt$.

SOLUCIÓN Note que t^2 se vuelve más simple cuando se deriva (mientras que e^t no cambia cuando se deriva o integra), de modo que se elige

$$u = t^2 \qquad dv = e^t \, dt$$

A continuación $\qquad du = 2t \, dt \qquad v = e^t$

La integración por partes da

$$\boxed{3} \qquad \int t^2 e^t \, dt = t^2 e^t - 2 \int t e^t \, dt$$

La integral que se obtuvo, $\int te^t \, dt$, es más simple que la integral original, pero aún no es obvio. Por lo tanto, se usa una segunda vez la integración por partes, esta vez con $u = t$ y $dv = e^t \, dt$. Después $du = dt$, $v = e^t$, y

$$\int te^t \, dt = te^t - \int e^t \, dt = te^t - e^t + C$$

Al escribir esto en la ecuación 3, se obtiene

$$\begin{aligned} \int t^2 e^t \, dt &= t^2 e^t - 2 \int te^t \, dt \\ &= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{donde } C_1 = -2C \end{aligned}$$

■ Un método más fácil, con números complejos, se da en el ejercicio 50 en el apéndice H.

EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$.

SOLUCIÓN Ni e^x ni sen x se vuelven más simples cuando se derivan, pero de cualquier manera se prueba con $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x \, dx$. Por lo tanto $du = e^x \, dx$ y $v = -\cos x$, de modo que la integración por partes da

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

La integral que se ha obtenido, $\int e^x \cos x \, dx$, no es más simple que la original, pero por lo menos no es más difícil. Habiendo tenido éxito en el ejemplo precedente al integrar por partes dos veces, se persevera e integra de nuevo por partes. Esta vez se usa $u = e^x$ y $dv = \cos x \, dx$. En tal caso $du = e^x \, dx$, $v = \operatorname{sen} x$, y

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

A primera vista, parece como si no se hubiera hecho nada porque se llegó a $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$, que es donde se inició. Sin embargo, si coloca la expresión para $\int e^x \cos x \, dx$ de la ecuación 5 en la ecuación 4, se obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

▩ En la figura 1 se ilustra el ejemplo 4 mostrando las gráficas de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como una comprobación visual del trabajo, observe que $f(x) = 0$ cuando F tinene un máximo o un mínimo.

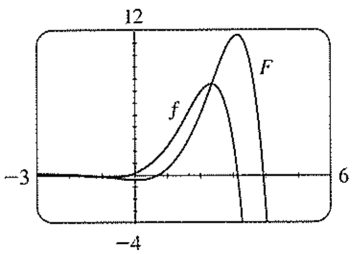


FIGURA 1

Esto se puede considerar como una ecuación que se resolverá para la integral desconocida. Al sumar $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$ a ambos lados, se obtiene

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividiendo entre 2 y sumando la constante de la integración, obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

□

Si se combina la fórmula para integración por partes con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, se puede evaluar por partes integrales definidas. Al evaluar ambos lados de la fórmula 1 entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, y usar el teorema fundamental, se obtiene

6
$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx}$$

EJEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$$

Entonces
$$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = x$$

Por consiguiente la fórmula 6 da

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx &= x\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx\\ &= 1\cdot\tan^{-1}1 - 0\cdot\tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

▩ Puesto que $\tan^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, la integral del ejemplo 5 se puede interpretar como el área de la región mostrada en la figura 2.

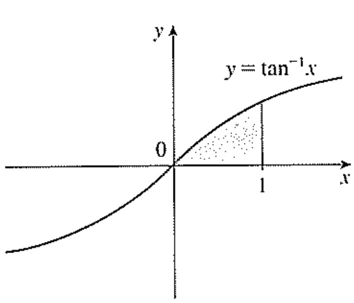


FIGURA 2

Para evaluar esta integral se usa la sustitución $t = 1 + x^2$ (puesto que u tiene otro significado en este ejemplo). Luego $dt = 2x\,dx$, de modo que $x dx = \frac{1}{2}\,dt$. Cuando $x = 0$, $t = 1$; cuando $x = 1$, $t = 2$; así que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2\\ &= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$\int_0^1 \tan^{-1}x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

□

EJEMPLO 6 Demuestre la fórmula de reducción

La ecuación 7 se llama *fórmula de reducción* porque el exponente n ha sido *reducido* a $n-1$ y $n-2$.

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

SOLUCIÓN Sea $\quad u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$

Entonces $\quad du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$

así que la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

Puesto que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Como en el ejemplo 4, se resuelve esta ecuación para la integral deseada, pasando el último término del lado derecho al lado izquierdo. Así, se tiene

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

o bien,
$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

□

La fórmula de reducción (7) es útil porque al usarla de manera repetida se podría expresar finalmente $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 EJERCICIOS

1–2 Evalúe la integral por medio de la integración por partes con las elecciones indicadas de u y dv.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $\quad u = \ln x,\ dv = x^2\,dx$
2. $\int \theta\cos\theta\,d\theta$; $\quad u = \theta,\ dv = \cos\theta\,d\theta$

3–32 Evalúe la integral.

3. $\int x\cos 5x\,dx$
4. $\int xe^{-x}\,dx$
5. $\int re^{r/2}\,dr$
6. $\int t\operatorname{sen} 2t\,dt$
7. $\int x^2\operatorname{sen}\pi x\,dx$
8. $\int x^2\cos mx\,dx$
9. $\int \ln(2x+1)\,dx$
10. $\int \operatorname{sen}^{-1}x\,dx$
11. $\int \arctan 4t\,dt$
12. $\int p^5\ln p\,dp$
13. $\int t\sec^2 2t\,dt$
14. $\int s\,2^s\,ds$
15. $\int (\ln x)^2\,dx$
16. $\int t\operatorname{senh} mt\,dt$
17. $\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$
18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$
19. $\int_0^{\pi} t\operatorname{sen} 3t\,dt$
20. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$
21. $\int_0^1 t\cosh t\,dt$
22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$
23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$
24. $\int_0^{\pi} x^3\cos x\,dx$

25. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\, dy$

26. $\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\, dx$

27. $\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\, dx$

28. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\, dx$

29. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\, dx$

30. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4 + r^2}}\, dr$

31. $\int_1^2 x^4(\ln x)^2\, dx$

32. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t - s)\, ds$

33–38 Primero realice una sustitución y luego use la integración por partes para evaluar la integral.

33. $\int \cos \sqrt{x}\, dx$

34. $\int t^3 e^{-t^2}\, dt$

35. $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$

36. $\int_0^{\pi} e^{\cos t} \operatorname{sen} 2t\, dt$

37. $\int x \ln(1 + x)\, dx$

38. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

39–42 Evalúe la integral indefinida. Ilustre, y compruebe que su respuesta es razonable, graficando tanto la función como su antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\int (2x + 3)e^x dx$

40. $\int x^{3/2} \ln x\, dx$

41. $\int x^3\sqrt{1 + x^2}\, dx$

42. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$

---

43. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use el inciso (a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

44. (a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\, dx$$

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int \cos^2 x\, dx$.
(c) Use los incisos (a) y (b) para evaluar $\int \cos^4 x\, dx$.

45. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\, dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\, dx$.
(c) Emplee el inciso (a) para mostrar que, para potencias impares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

46. Demuestre que, para potencias pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n}\frac{\pi}{2}$$

47–50 Use la integración por partes para demostrar la fórmula de reducción.

47. $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$

48. $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x dx$

49. $\tan^n x\, dx = \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx \quad (n \neq 1)$

50. $\int \sec^n x\, dx = \frac{\tan x \sec^{n-2}x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\, dx \quad (n \neq 1)$

---

51. Use el ejercicio 47 para determinar $\int (\ln x)^3 dx$.

52. Use el ejercicio 48 para encontrar $\int x^4 e^x dx$.

53–54 Determine el área de la región acotada por las curvas dadas.

53. $y = xe^{-0.4x}, \quad y = 0, \quad x = 5$

54. $y = 5 \ln x, \quad y = x \ln x$

55–56 Use una gráfica para hallar las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego encuentre (de manera aproximada) el área de la región acotada por las curvas.

55. $y = x \operatorname{sen} x, \quad y = (x - 2)^2$

56. $y = \arctan 3x, \quad y = \frac{1}{2}x$

57–60 Use el método de las envolventes cilíndricas para hallar el volumen generado al rotar la región acotada por las curvas dadas respecto al eje especificado.

57. $y = \cos(\pi x/2),\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$; respecto al eje y

58. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1$; respecto al eje y

59. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0$; respecto a $x = 1$

60. $y = e^x,\ x = 0,\ y = \pi$; respecto al eje x

61. Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^2 \ln x$ en el intervalo $[1, 3]$.

62. Un cohete acelera al quemar su combustible de a bordo, de modo que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial del cohete en el despegue (incluido su combustible) es m, el combustible se consume a una proporción r, y los gases de escape son expulsados con velocidad constante v_e (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t es el que se expresa mediante la ecuación

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande. Si $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s, y $v_e = 3\,000$ m/s, determine la altura del cohete un minuto después del despegue.

63. Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $v(t) = t^2 e^{-t}$ metros por segundo después de t segundos. ¿Qué tan lejos viajará durante los primeros t segundos?

64. Si $f(0) = g(0) = 0$ y f'' y g'' son continuas, muestre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx$$

65. Suponga que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$, y f'' es continua. Encuentre el valor de $\int_1^4 xf''(x)\,dx$.

66. (a) Use la integración por partes para mostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

(b) Si f y g son funciones inversas y f' es continua, demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugerencia:* use el inciso (a) y haga la sustitución $y = f(x)$.]

(c) En el caso donde f y g son funciones positivas y $b > a > 0$, dibuje un diagrama para dar una interprepretación geométrica del inciso (b).

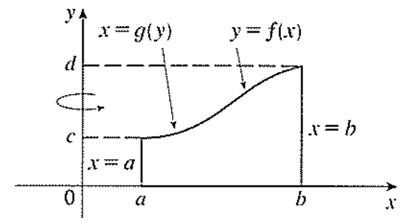
(d) Use el inciso (b) para evaluar $\int_1^e \ln x\,dx$.

67. Se llegó a la fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, por medio de envolventes cilíndricas, pero ahora se puede usar la integración por partes para demostrarla con el método de división de la sección 6.2, por lo menos para el caso donde f es uno a uno y, por lo tanto, tiene una función inversa g. Use la figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

Realice la sustitución $y = f(x)$ y después use la integración por partes en la integral resultante para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$



68. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Muestre que $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$.

(b) Use el ejercicio 46 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

(c) Use los incisos (a) y (b) para mostrar que

$$\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

y deducir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Emplee el inciso (c) y los ejercicios 45 y 46 para mostrar que

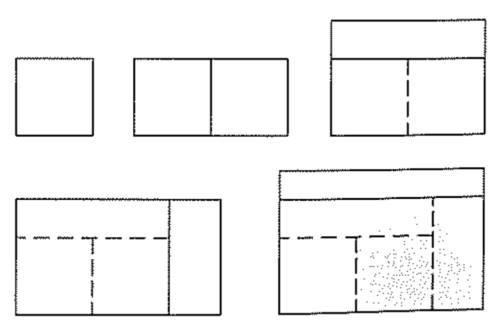
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Esta fórmula se escribe por lo general como un producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

y se llama *producto de Wallis.*

(e) Se construyen rectángulos como sigue. Empiece con un cuadrado de área 1 y una los rectángulos de área 1 de manera alterna al lado o arriba del rectángulo previo (véase la figura). Encuentre el límite de las relaciones de amplitud a altura de estos rectángulos.



7.2 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

En esta sección se usan identidades trigonométricas para integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas. Se empieza con potencias de seno y coseno.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int \cos^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Sustituir simplemente $u = \cos x$ no es útil, puesto que en seguida $du = -\operatorname{sen} x\,dx$. A fin de integrar potencias de coseno, sería necesario un factor $\operatorname{sen} x$ extra. De manera similar, una potencia de seno requeriría un factor $\cos x$ extra. Así, aquí se puede separar un factor coseno y convertir el factor $\cos^2 x$ restante a una expresión relacionada con el seno por medio de la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

Se puede evaluar la integral sustituyendo $u = \operatorname{sen} x$, de modo que $du = \cos x\,dx$ y

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\,dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx \\ &= \int (1 - u^2)\,du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\end{aligned}$$ □

En general, se intenta escribir un integrando en el que intervienen potencias de seno y coseno en una forma donde se tiene sólo un factor seno (y el resto de la expresión en términos de coseno) o sólo un factor coseno (y el resto de la expresión en términos de seno). La identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ permite convertir de una parte a otra entre potencias pares de seno y coseno.

EJEMPLO 2 Encuentre $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$

SOLUCIÓN Se convertiría $\cos^2 x$ a $1 - \operatorname{sen}^2 x$, pero se tendría una expresión en términos de $\operatorname{sen} x$ sin ningún factor $\cos x$ extra. En cambio, se separa un solo factor seno y se reescribe el factor $\operatorname{sen}^4 x$ restante en términos de $\cos x$:

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x$$

En la figura 1 se muestran las gráficas del integrando $\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x$ del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

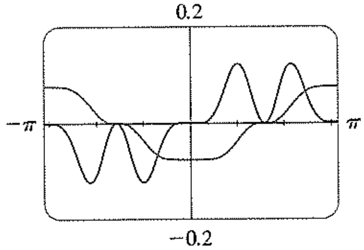


FIGURA 1

Sustituyendo $u = \cos x$, se tiene $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2(-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\,du \\ &= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\ &= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C\end{aligned}$$ □

En los ejemplos precedentes, una potencia impar de seno y coseno permitió separar un solo factor y convertir la potencia par restante. Si el integrando contiene potencias pares de seno y coseno, esta estrategia falla. En este caso, se puede sacar ventaja de las siguientes identidades de la mitad de un ángulo (véanse las ecuaciones 17b y 17a en el apéndice D):

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

En el ejemplo 3 se muestra que el área de la región mostrada en la figura 2 es $\pi/2$.

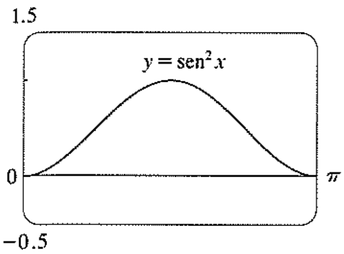


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si se escribe $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, no se simplifica la evaluación de la integral. Sin embargo, al usar la fórmula de la mitad de un ángulo para $\operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx = \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^\pi$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi$$

Observe que mentalmente se hizo la sustitución $u = 2x$ al integrar $\cos 2x$. Otro método para evaluar esta integral se dio en el ejercicio 43 en la sección 7.1. □

EJEMPLO 4 Determine $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Se podría evaluar esta integral por medio de la fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ (ecuación 7.1.7) junto con el ejemplo 3 (como en el ejercicio 43 de la sección 7.1), pero un mejor método es escribir $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$ y usar una fórmula de la mitad de un ángulo:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

Puesto que ocurre $\cos^2 2x$, se debe usar otra fórmula de la mitad de un ángulo

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Esto da

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \tfrac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C$$ □

Para resumir, se listan las directrices a seguir al evaluar integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, donde $m \geq 0$ y $n \geq 0$ son enteros.

ESTRATEGIA PARA EVALUAR $\int \text{sen}^m x \cos^n x\, dx$

(a) Si la potencia de coseno es impar ($n = 2k + 1$), ahorre un factor coseno y use $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ para expresar los demás factores en términos de seno:

$$\int \text{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \text{sen}^m x\, (\cos^2 x)^k \cos x\, dx$$

$$= \int \text{sen}^m x\, (1 - \text{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

Después sustituya $u = \text{sen}\, x$.

(b) Si la potencia de seno es impar ($m = 2k + 1$), ahorre un factor seno y use $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de coseno:

$$\int \text{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \int (\text{sen}^2 x)^k \cos^n x\, \text{sen}\, x\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x\, \text{sen}\, x\, dx$$

Después sustituya $u = \cos x$. [Note que si las potencias de seno y coseno son impares, se puede usar (a) o (b).]

(c) Si las potencias de seno y coseno son pares, use las identidades de la mitad de un ángulo

$$\text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algunas veces es útil usar la identidad

$$\text{sen}\, x \cos x = \tfrac{1}{2}\, \text{sen}\, 2x$$

Se puede usar una estrategia similar para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$. Puesto que $(d/dx) \tan x = \sec^2 x$, se puede separar un factor $\sec^2 x$ y convertir la potencia restante (par) de la secante en una expresión relacionada con la tangente por medio de la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. O bien, puesto que $(d/dx) \sec x = \sec x \tan x$, se puede separar un factor $\sec x \tan x$ y convertir la potencia restante (par) de tangente a secante.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si se separa un factor $\sec^2 x$, se puede expresar el factor restante $\sec^2 x$ en términos de la tangente por medio de la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Se puede evaluar la integral sustituyendo $u = \tan x$ con $du = \sec^2 x\, dx$:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^6 x\, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$

$$= \int u^6 (1 + u^2)\, du = \int (u^6 + u^8)\, du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \tfrac{1}{7} \tan^7 x + \tfrac{1}{9} \tan^9 x + C$$

□

EJEMPLO 6 Encuentre $\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta$.

SOLUCIÓN Si se separa un factor $\sec^2\theta$ como en el ejemplo precedente, queda un factor $\sec^5\theta$, que no se convierte con facilidad a tangente. Sin embargo, si se separa un factor $\sec\theta \tan\theta$, se puede convertir la potencia restante en una expresión que implica sólo la secante por medio de la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Por lo tanto se puede evaluar la integral sustituyendo $u = \sec\theta$, de modo que $du = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta &= \int \tan^4\theta \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C
\end{aligned}$$ □

En los ejemplos anteriores, se demuestran estrategias diferentes para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ para dos casos, que se resumen aquí.

ESTRATEGIA PARA EVALUAR $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

(a) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), ahorre un factor de $\sec^2 x$ y use $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar los demás factores en términos de $\tan x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \tan^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\
&= \int \tan^m x \, (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Luego sustituya $u = \tan x$.

(b) Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), guarde un factor de $\sec x \tan x$ y use $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los demás factores en términos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx
\end{aligned}$$

Después sustituya $u = \sec x$.

Para otros casos, las directrices no son tan claras. Podría ser necesario usar identidades, integración por partes y, ocasionalmente, un poco de inventiva. A veces será necesario poder integrar $\tan x$ por medio de la fórmula establecida en (5.5.5):

$$\boxed{\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C}$$

Se necesitará también la integral indefinida de la secante:

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C}$$

Se podría comprobar la fórmula 1 mediante la derivación de lado derecho, o como sigue. Primero se multiplican numerador y denominador por $\sec x + \tan x$:

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \sec x\, \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx\end{aligned}$$

Si se sustituye $u = \sec x + \tan x$, después $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx$, también, la integral se convierte en $\int (1/u)\, du = \ln|u| + C$. Así, se tiene

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

EJEMPLO 7 Encuentre $\displaystyle\int \tan^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí sólo ocurre $\tan x$, de modo que se emplea $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescribir un factor $\tan^2 x$ en términos de $\sec^2 x$:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\, dx &= \int \tan x \tan^2 x\, dx = \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \tan x \sec^2 x\, dx - \int \tan x\, dx \\ &= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

En la primera integral se sustituye mentalmente $u = \tan x$ de modo que $du = \sec^2 x\, dx$. □

Si aparece una potencia par de tangente con una potencia impar de secante, es útil expresar el integrando completamente en términos de $\sec x$. Las potencias de $\sec x$ podrían requerir integración por partes, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Encuentre $\displaystyle\int \sec^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN Aquí se integra por partes con

$$\begin{aligned}u &= \sec x \qquad & dv &= \sec^2 x\, dx \\ du &= \sec x \tan x\, dx \qquad & v &= \tan x\end{aligned}$$

En tal caso
$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

Si se emplea la fórmula 1 y se resuelve para la integral requerida, se obtiene

$$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right) + C$$ □

Integrales como la del ejemplo anterior podrían parecer muy especiales, pero ocurren con frecuencia en aplicaciones de integración, como se verá en el capítulo 8. Integrales de la forma $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$ se pueden determinar mediante métodos similares como resultado de la identidad $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

Por último, se puede hacer uso de otro conjunto de identidades trigonométricas:

Estas identidades de producto se analizan en el apéndice D.

2 Para evaluar las integrales (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx$, o (c) $\int \cos mx \cos nx\,dx$, use la identidad correspondiente:

(a) $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$

(b) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

(c) $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

EJEMPLO 9 Evalúe $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx$.

SOLUCIÓN Esta integral podría ser evaluada por medio de integración por partes, pero es más fácil usar la identidad de la ecuación 2(a) como sigue:

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx = \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x\right) + C$$ □

7.2 EJERCICIOS

1–49 Evalúe la integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$
2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\,dx$
3. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\,dx$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$
5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x)\cos^5(\pi x)\,dx$
6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$
8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\,d\theta$
9. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4(3t)\,dt$
10. $\int_0^{\pi} \cos^6\theta\,d\theta$
11. $\int (1 + \cos\theta)^2\,d\theta$
12. $\int x \cos^2 x\,dx$
13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$
14. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t\,dt$
15. $\int \dfrac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}\,dx$
16. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

17. $\int \cos^2 x \tan^3 x \, dx$

18. $\int \cot^5\theta \,\mathrm{sen}^4\theta \, d\theta$

19. $\int \dfrac{\cos x + \mathrm{sen}\, 2x}{\mathrm{sen}\, x} dx$

20. $\int \cos^2 x \,\mathrm{sen}\, 2x \, dx$

21. $\int \sec^2 x \tan x \, dx$

22. $\int_0^{\pi/2} \sec^4(t/2) \, dt$

23. $\int \tan^2 x \, dx$

24. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x) \, dx$

25. $\int \sec^6 t \, dt$

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \tan^4\theta \, d\theta$

27. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x \, dx$

28. $\int \tan^3(2x) \sec^5(2x) \, dx$

29. $\int \tan^3 x \sec x \, dx$

30. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^6 x \, dx$

31. $\int \tan^5 x \, dx$

32. $\int \tan^6(ay) \, dy$

33. $\int \dfrac{\tan^3\theta}{\cos^4\theta} d\theta$

34. $\int \tan^2 x \sec x \, dx$

35. $\int x \sec x \tan x \, dx$

36. $\int \dfrac{\mathrm{sen}\, \phi}{\cos^3 \phi} d\phi$

37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2 x \, dx$

38. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3 x \, dx$

39. $\int \cot^3\alpha \csc^3\alpha \, d\alpha$

40. $\int \csc^4 x \cot^6 x \, dx$

41. $\int \csc x \, dx$

42. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^3 x \, dx$

43. $\int \mathrm{sen}\, 8x \cos 5x \, dx$

44. $\int \cos \pi x \cos 4\pi x \, dx$

45. $\int \mathrm{sen}\, 5\theta \,\mathrm{sen}\, \theta \, d\theta$

46. $\int \dfrac{\cos x + \mathrm{sen}\, x}{\mathrm{sen}\, 2x} dx$

47. $\int \dfrac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x} dx$

48. $\int \dfrac{dx}{\cos x - 1}$

49. $\int t \sec^2(t^2) \tan^4(t^2) \, dt$

50. Si $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x \sec x \, dx = I$, exprese el valor de $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x \sec x \, dx$ en términos de I.

51–54 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, graficando el integrando y su antiderivada (con $C = 0$).

51. $\int x \,\mathrm{sen}^2(x^2) \, dx$

52. $\int \mathrm{sen}^4 x \cos^4 x \, dx$

53. $\int \mathrm{sen}\, 3x \,\mathrm{sen}\, 6x \, dx$

54. $\int \sec^4 \dfrac{x}{2} dx$

55. Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = \mathrm{sen}^2 x \cos^3 x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Evalúe $\int \mathrm{sen}\, x \cos x \, dx$ por cuatro métodos:
(a) la sustitución $u = \cos x$,
(b) la sustitución $u = \mathrm{sen}\, x$,
(c) la identidad $\mathrm{sen}\, 2x = 2 \,\mathrm{sen}\, x \cos x$, y
(d) integración por partes.
Explique las distintas apariencias de las respuestas.

57–58 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas.

57. $y = \mathrm{sen}^2 x, \quad y = \cos^2 x, \quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$

58. $y = \mathrm{sen}^3 x, \quad y = \cos^3 x, \quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$

59–60 Use una gráfica del integrando para inferir el valor de la integral. Después use los métodos de esta sección para demostrar que su conjetura es correcta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x \, dx$

60. $\int_0^2 \mathrm{sen}\, 2\pi x \cos 5\pi x \, dx$

61–64 Encuentre el volumen obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas respecto al eje especificado.

61. $y = \mathrm{sen}\, x, \; y = 0, \; \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi$; respecto al eje x

62. $y = \mathrm{sen}^2 x, \; y = 0, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi$; respecto al eje x

63. $y = \mathrm{sen}\, x, \; y = \cos x, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$; respecto a $y = 1$

64. $y = \mathrm{sen}\, x, \; y = \cos x, \; 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$; respecto a $y = 1$

65. Una partícula se mueve en una línea recta con función de velocidad $v(t) = \mathrm{sen}\, \omega t \cos^2 \omega t$. Encuentre su función de posición $s = f(t)$ si $f(0) = 0$.

66. La electricidad doméstica se suministra en la forma de corriente alterna que varía de 155 V a -155 V con una frecuencia de 60 ciclos por segundo (Hz). Así que el voltaje está dado por

$$E(t) = 155 \,\mathrm{sen}(120\pi t)$$

donde t es el tiempo en segundos. Los voltímetros leen el voltaje RMS (media cuadrática), que es la raíz cuadrada del valor promedio de $[E(t)]^2$ sobre un ciclo.
(a) Calcule el voltaje RMS de la corriente doméstica.
(b) Muchas estufas eléctricas requieren un voltaje RMS de 220 V. Encuentre la amplitud A correspondiente necesaria para el voltaje $E(t) = A \,\mathrm{sen}(120\pi t)$.

67–69 Demuestre la fórmula, donde m y n son enteros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

70. Una *serie de Fourier finita* está dada por la suma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx$$
$$= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx$$

Muestre que el m-ésimo coeficiente a_m está dado por la fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx$$

7.3 SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

En la determinación del área de un círculo o una elipse, surge una integral de la forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, donde $a > 0$. Si fuese $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, la sustitución $u = a^2 - x^2$ sería efectiva pero, tal y como aparece, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ es más difícil. Si se cambia la variable de x a θ por la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, en tal caso la identidad $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permite eliminar el signo de la raíz porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos\theta|$$

Observe la diferencia entre la sustitución $u = a^2 - x^2$ (en la que la nueva variable es una función de la variable previa) y la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$ (la variable previa es una función de la nueva).

En general se puede hacer una sustitución de la forma $x = g(t)$ al usar al revés la regla de sustitución. A fin de simplificar los cálculos, se supone que g tiene una función inversa; es decir, g es uno a uno. En este caso, si se reemplazan u por x y x por t en la regla de sustitución (ecuación 5.5.4), se obtiene

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Esta clase de sustitución se llama *sustitución inversa*.

Se puede hacer la sustitución inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ siempre que ésta defina una función uno a uno. Esto se puede llevar a cabo restringiendo θ a ubicarse en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

En la tabla siguiente se listan las sustituciones trigonométricas que son efectivas para las expresiones con radicales debido a las identidades trigonométricas especificadas. En cada caso la restricción sobre θ se impone para asegurar que la función que define la sustitución es uno a uno. (Éstos son los mismos intervalos empleados en la sección 1.6 al definir las funciones inversas.)

TABLA DE SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 3 \operatorname{sen} \theta$, donde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Después $dx = 3 \cos \theta \, d\theta$ y

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9 - 9 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{9 \cos^2\theta} = 3\,|\cos \theta| = 3 \cos \theta$$

(Note que $\cos \theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Así, la regla de sustitución inversa da

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\operatorname{sen}^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta \\
&= \int \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \cot^2\theta\,d\theta \\
&= \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta \\
&= -\cot\theta - \theta + C
\end{aligned}$$

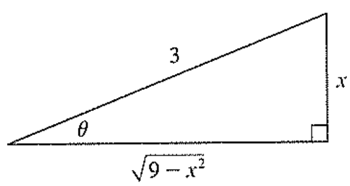


FIGURA 1

$\operatorname{sen} \theta = \dfrac{x}{3}$

Puesto que ésta es una integral indefinida, se debe volver a la variable original x. Esto se puede hacer ya sea por medio de identidades trigonométricas para expresar $\cot \theta$ en términos de $\operatorname{sen} \theta = x/3$ o dibujando un diagrama, como en la figura 1, donde θ se interpreta como un ángulo de un triángulo rectángulo. Puesto que $\operatorname{sen} \theta = x/3$, se marcan el cateto opuesto y la hipotenusa con longitudes x y 3. Después por el teorema de Pitágoras se obtiene la longitud del cateto adyacente como $\sqrt{9-x^2}$, así que se puede leer simplemente el valor de $\cot \theta$ en la figura:

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

(Aunque $\theta > 0$ en el diagrama, esta expresión para $\cot \theta$ es válida aun cuando $\theta < 0$.) Puesto que $\operatorname{sen} \theta = x/3$, se tiene $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(x/3)$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C \qquad \square$$

EJEMPLO 2 Determine el área encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUCIÓN Resolviendo la ecuación de la elipse en favor de y, se obtiene

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \qquad \text{o} \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

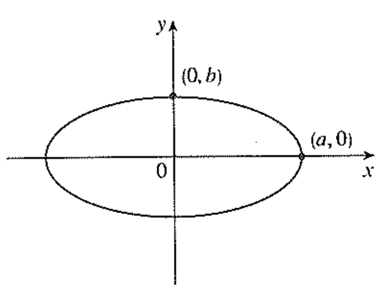


FIGURA 2

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Debido a que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes, el área total A es cuatro veces el área del primer cuadrante (véase figura 2). La parte de la elipse en el primer cuadrante está dada por la función

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

y, por eso,

$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Para evaluar esta integral se sustituye $x = a$ sen θ. Después $dx = a \cos\theta\, d\theta$. Para cambiar los límites de integración se nota que cuando $x = 0$, sen $\theta = 0$, cuando $\theta = 0$; de modo que $x = a$, sen $\theta = 1$, por lo tanto, $\theta = \pi/2$. También

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos\theta| = a \cos\theta$$

puesto que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Por lo tanto,

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a\cos\theta \cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 2ab\left[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab$$

Se ha mostrado que el área de una elipse con semiejes a y b es πab. En particular, tomando $a = b = r$, se ha demostrado la famosa fórmula de que el área de un círculo con radio r es πr^2. □

NOTA Puesto que la integral del ejemplo 2 fue una integral definida, se cambiaron los límites de integración y no fue necesario convertir de nuevo a la variable original x.

V EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 2\tan\theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Por lo tanto $dx = 2\sec^2\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4(\tan^2\theta + 1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2\,|\sec\theta| = 2\sec\theta$$

Por esto, se tiene

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{4\tan^2\theta \cdot 2\sec\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$$

Para evaluar esta integral trigonométrica se escribe todo en términos de sen θ y cos θ:

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Por lo tanto, al hacer la sustitución $u =$ sen θ, se tiene

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4\operatorname{sen}\theta} + C$$

$$= -\frac{\csc\theta}{4} + C$$

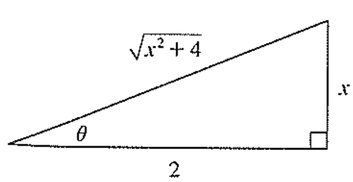


FIGURA 3

$\tan\theta = \dfrac{x}{2}$

Se usa la figura 3 para determinar que $\csc\theta = \sqrt{x^2 + 4}/x$ y, de este modo,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$$ □

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sería posible usar aquí la sustitución trigonométrica $x = 2\tan\theta$ (como en el ejemplo 3). Pero la sustitución directa $u = x^2 + 4$ es más simple, porque en seguida $du = 2x\,dx$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$ □

NOTA En el ejemplo 4 se ilustra el hecho de que aun cuando son posibles las sustituciones trigonométricas, es posible que no den la solución más fácil. Primero se debe buscar un método más simple.

EJEMPLO 5 Evalúe $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, donde $a > 0$.

SOLUCIÓN 1 Sea $x = a\sec\theta$, donde $0 < \theta < \pi/2$ o $\pi < \theta < 3\pi/2$. En tal caso $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a|\tan\theta| = a\tan\theta$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

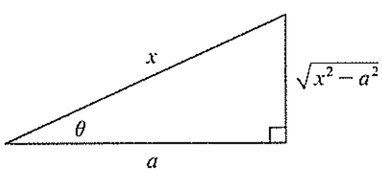


FIGURA 4

$\sec\theta = \frac{x}{a}$

El triángulo de la figura 4 da $\tan\theta = \sqrt{x^2-a^2}/a$, así que se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + C$$

Al escribir $C_1 = C - \ln a$, se tiene

1 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C_1$$

SOLUCIÓN 2 Para $x > 0$ se puede usar también la sustitución hiperbólica $x = a\cosh t$. Si se emplea la identidad $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, se tiene

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2\operatorname{senh}^2 t} = a\operatorname{senh} t$$

Puesto que $dx = a\operatorname{senh} t\,dt$, se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\operatorname{senh} t\,dt}{a\operatorname{senh} t} = \int dt = t + C$$

Puesto que $\cosh t = x/a$, se tiene $t = \cosh^{-1}(x/a)$ y

2 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aunque las fórmulas 1 y 2 se ven bastante diferentes, en realidad son equivalentes por la fórmula 3.11.4.

□

NOTA Como se ilustra en el ejemplo 5, las sustituciones hiperbólicas se pueden usar en lugar de las sustituciones trigonométricas y, algunas veces, conducen a respuestas más simples. Pero por lo general se usan sustituciones trigonométricas porque las identidades trigonométricas son más familiares que las identidades hiperbólicas.

EJEMPLO 6 Encuentre $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero se nota que $(4x^2+9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2+9})^3$, de modo que la sustitución trigonométrica es apropiada. Aunque $\sqrt{4x^2+9}$ no es realmente una de las expresiones de la tabla de sustituciones trigonométricas, se convierte en una de ellas si se realiza la sustitución preliminar $u = 2x$. Cuando se combina esto con la sustitución de la tangente, se tiene $x = \frac{3}{2}\tan\theta$, que da $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{9\tan^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Cuando $x = 0$, $\tan\theta = 0$, por lo tanto $\theta = 0$; cuando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, así que $\theta = \pi/3$.

$$\begin{aligned}\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta}\,\frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \frac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\operatorname{sen}\theta\,d\theta\end{aligned}$$

Ahora se sustituye $u = \cos\theta$ de modo que $du = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta$. Cuando $\theta = 0$, $u = 1$; cuando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx &= -\frac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}\,du = \frac{3}{16}\int_1^{1/2} (1-u^{-2})\,du \\ &= \frac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} = \frac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - (1+1)\right] = \frac{3}{32}\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 7 Evalúe $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Se puede transformar el integrando en una función para la cual la sustitución trigonométrica es apropiada, completando primero el cuadrado bajo el signo de la raíz:

$$\begin{aligned}3 - 2x - x^2 &= 3 - (x^2+2x) = 3 + 1 - (x^2+2x+1) \\ &= 4 - (x+1)^2\end{aligned}$$

Esto hace pensar en que se realice la sustitución $u = x + 1$. Después $du = dx$ y $x = u - 1$, de esa manera,

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$

En la figura 5 se muestran las gráficas del integrando del ejemplo 7 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

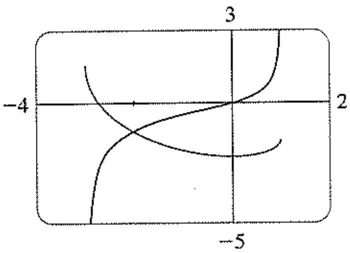


FIGURA 5

Ahora se sustituye $u = 2 \operatorname{sen} \theta$, y se obtiene $du = 2 \cos \theta \, d\theta$ y $\sqrt{4 - u^2} = 2 \cos \theta$, de tal manera,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} \, dx &= \int \frac{2 \operatorname{sen} \theta - 1}{2 \cos \theta} 2 \cos \theta \, d\theta \\
&= \int (2 \operatorname{sen} \theta - 1) \, d\theta \\
&= -2 \cos \theta - \theta + C \\
&= -\sqrt{4 - u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\
&= -\sqrt{3 - 2x - x^2} - \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C
\end{aligned}$$
□

7.3 EJERCICIOS

1–3 Evalúe la integral por medio de la sustitución trigonométrica indicada. Bosqueje y marque el triángulo rectángulo relacionado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 9}} \, dx; \quad x = 3 \sec \theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9 - x^2} \, dx; \quad x = 3 \operatorname{sen} \theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 9}} \, dx; \quad x = 3 \tan \theta$

4–30 Evalúe la integral.

4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}} \, dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3\sqrt{t^2 - 1}} \, dt$

6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25 - x^2}} \, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 100}} \, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2 + 2}} \, dt$

11. $\displaystyle\int \sqrt{1 - 4x^2} \, dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 4} \, dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^3} \, dx$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5 - u^2}}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2} \, dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^5\sqrt{9x^2 - 1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 7}} \, dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2 - b^2]^{3/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} \, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{25 - t^2}} \, dt$

21. $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9 - 25x^2}} \, dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} \, dx$

23. $\displaystyle\int \sqrt{5 + 4x - x^2} \, dx$

24. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6t + 13}}$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \, dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3 + 4x - 4x^2)^{3/2}} \, dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + 2x} \, dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 2x + 2)^2} \, dx$

29. $\displaystyle\int x\sqrt{1 - x^4} \, dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 t}} \, dt$

31. (a) Use la sustitución trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$$

(b) Use la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Estas fórmulas se relacionan mediante la fórmula 3.11.3.

32. Evalúe

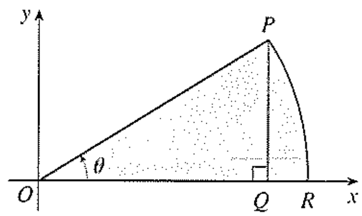
$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \, dx$$

(a) por sustitución trigonométrica.
(b) mediante la sustitución hiperbólica $x = a \operatorname{senh} t$.

33. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}/x$, $1 \leq x \leq 7$.

34. Determine el área de la región acotada por la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $x = 3$.

35. Demuestre la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para el área de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ. [*Sugerencia*: suponga que $0 < \theta < \pi/2$ y coloque el centro del círculo en el origen de modo que tenga la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Después A es la suma del área del triángulo POQ y el área de la región PQR en la figura.]



36. Evalúe la integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

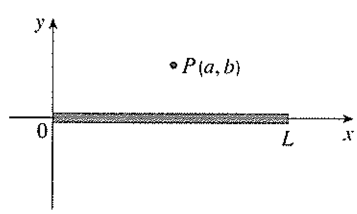
Grafique el integrando y su integral indefinida en la misma pantalla y compruebe que su respuesta es razonable.

37. Use una gráfica para aproximar las raíces de la ecuación $x^2\sqrt{4 - x^2} = 2 - x$. Luego aproxime el área acotada por la curva $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$ y la recta $y = 2 - x$.

38. Una varilla con carga de longitud L produce un campo eléctrico en el punto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\,dx$$

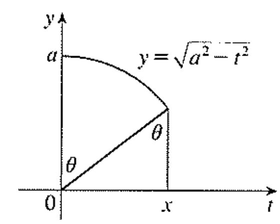
donde λ es la densidad de carga por longitud unitaria en la varilla y ε_0 es la permisividad del espacio libre (véase la figura). Evalúe la integral para determinar una expresión para el campo eléctrico $E(P)$.



39. (a) Aplique la sustitución trigonométrica para comprobar que

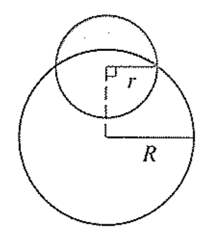
$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\,dt = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

(b) Aplique la figura para proporcionar interpretaciones trigonométricas de ambos términos en el lado derecho de la ecuación del inciso (a).



40. La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide en disco $x^2 + y^2 \leq 8$ en dos partes. Hallar el área de ambas partes.

41. Determine el área de la región sombreada creciente (llamada *luna*) acotada por los arcos de círculos con radios r y R. (Véase la figura.)



42. Un tanque de almacenamiento de agua tiene la forma de un cilindro circular con diámetro de 10 ft. Se monta de modo que las secciones transversales circulares sean verticales. Si la profundidad del agua es 7 ft, ¿qué porcentaje de la capacidad total se está utilizando?

43. Se genera un toroide al hacer girar el círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ respecto al eje x. Encuentre el volumen encerrado por el toroide.

7.4 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POR FRACCIONES PARCIALES

En esta sección se muestra cómo integrar cualquier función racional (una relación de polinomios) expresándola como una suma de fracciones más simples, llamadas *fracciones parciales*, que ya sabe cómo integrar. Para ilustrar el método, observe que tomando las fracciones $2/(x - 1)$ y $1/(x + 2)$ para un denominador común, se obtiene

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2+x-2}$$

Si ahora se invierte el procedimiento, se ve cómo integrar la función del lado derecho de esta ecuación:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para ver cómo funciona en general el método de fracciones parciales, considere una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. Es posible expresar f como una suma de fracciones más simples, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q. Esta clase de función racional se llama *propia.* Recuerde que si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, por lo tanto el grado de P es n y se escribe $\text{gra}(P) = n$.

Si f es impropia, es decir, $\text{gra}(P) \geqslant \text{gra}(Q)$, después se debe emprender el paso preliminar de dividir Q entre P (por división larga) hasta obtener un residuo $R(x)$ tal que $\text{gra}(R) < \text{gra}(Q)$. El enunciado de la división es

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde S y R son también polinomios.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, algunas veces este paso preliminar es todo lo que se requiere.

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x + 2 \\ \hline x-1 & x^3 + x \\ & x^3 - x^2 \\ \hline & x^2 + x \\ & x^2 - x \\ \hline & 2x \\ & 2x - 2 \\ \hline & 2 \end{array}$$

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero se efectúa la división larga. Esto permite escribir

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1} \right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

□

El siguiente paso es factorizar el denominador $Q(x)$ tanto como sea posible. Es posible demostrar que cualquier polinomio Q se puede factorizar como un producto de factores lineales (de la forma $ax + b$) y los factores cuadráticos irreducibles (de la forma $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$). Por ejemplo, si $Q(x) = x^4 - 16$, se podría factorizar como

$$Q(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

El tercer paso es expresar la función racional propia $R(x)/Q(x)$ (de la ecuación 1) como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \qquad \text{o} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Un teorema en álgebra garantiza que siempre es posible hacer esto. Se explican los detalles para los cuatro casos que ocurren.

CASO I ▪ El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.
Esto significa que se puede escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

donde ningún factor se repite (y ningún factor es un múltiplo constante de otro). En este caso, el teorema de fracciones parciales establece que existen constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tales que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Estas constantes se pueden determinar como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx.$

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador es menor que el del denominador, no es necesario dividir. El denominador se factoriza como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Puesto que el denominador tiene tres factores lineales distintos, la descomposición del integrando (2) en fracciones parciales tiene la forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

▪ Otro método para hallar A, B y C se da en la nota después de este ejemplo.

Para determinar los valores A, B y C, se multiplican ambos lados de esta ecuación por el producto de los denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$, y se obtiene

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación 4 y escribirlo en la forma estándar de polinomios, se obtiene

$$\boxed{5} \qquad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Los polinomios de la ecuación 5 son idénticos, de modo que sus coeficientes deben ser iguales. El coeficiente de x^2 en el lado derecho, $2A + B + 2C$, debe ser igual al coeficiente de x^2 en el lado izquierdo; a saber, 1. Del mismo modo, los coeficientes de x son iguales y los términos constantes son iguales. Esto da el siguiente sistema de ecuaciones para A, B y C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, y $C = -\frac{1}{10}$, y, por lo tanto,

Se podría comprobar el trabajo llevando los términos a un factor común y sumándolos.

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x + 2}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

En la figura 1 se muestran las gráficas del integrando del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $K = 0$). ¿Cuál es cuál?

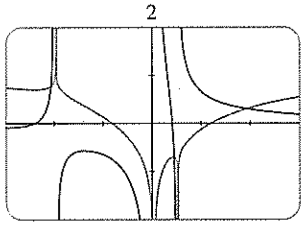


FIGURA 1

En la integración del término medio se ha hecho la sustitución mental $u = 2x - 1$, que da $du = 2\,dx$ y $dx = du/2$. □

NOTA Se puede usar otro método para hallar los coeficientes de A, B y C en el ejemplo 2. La ecuación cuatro es una identidad; se cumple para todo valor de x. Seleccione valores de x que simplifiquen la ecuación. Si $x = 0$ en la ecuación 4, entonces los términos segundo y tercero del lado derecho desaparecen y la ecuación se convierte en $-2A = -1$, o bien $A = \frac{1}{2}$. Del mismo modo, $x = \frac{1}{2}$ da $5B/4 = \frac{1}{4}$ y $x = -2$ da $10C = -1$, por lo tanto $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$. (Se podría objetar que la ecuación 3 no es válida para $x = 0$, $\frac{1}{2}$, o -2, de este modo ¿por qué la ecuación 4 debe ser válida para estos valores? De hecho, la ecuación 4 es cierta para todos los valores de x, incluso $x = 0$, $\frac{1}{2}$, y -2. Véase en el ejercicio 69 la razón).

EJEMPLO 3 Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, donde $a \neq 0$.

SOLUCIÓN El método de fracciones parciales da

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

y, por lo tanto

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Con el método de la nota precedente, se escribe $x = a$ en esta ecuación y se obtiene $A(2a) = 1$, así que $A = 1/(2a)$. Si se escribe $x = -a$, se obtiene $B(-2a) = 1$, por lo tanto, $B = -1/(2a)$. Así,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x - a| - \ln|x + a|\right) + C$$

Puesto que $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, se puede escribir la integral como

$$\boxed{6} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

Véase en los ejercicios 55-56 las formas de usar la fórmula 6. □

CASO II ▫ **$Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.** Suponga que el primer factor lineal $(a_1x + b_1)$ se repite r veces; es decir, $(a_1x + b_1)^r$ aparece en la factorización de $Q(x)$. Por lo tanto en lugar del término simple $A_1/(a_1x + b_1)$

en la ecuación 2, se usaría

$$\boxed{7} \qquad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

A modo de ilustración, se podría escribir

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

pero se prefiere resolver en detalle un ejemplo más simple.

EJEMPLO 4 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx.$

SOLUCIÓN El primer paso es dividir. El resultado de la división larga es

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

El segundo paso es factorizar el denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Puesto que $Q(1) = 0$, se sabe que $x - 1$ es un factor y se obtiene

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Puesto que el factor lineal $x - 1$ aparece dos veces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Al multiplicar el mínimo común denominador, $(x-1)^2(x+1)$, se obtiene

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

■ Otra forma de hallar los coeficientes:
Escriba $x = 1$ in (8): $B = 2$.
Escriba $x = -1$: $C = -1$.
Escriba $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Ahora se igualan los coeficientes:

$$\begin{aligned} A \qquad + C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + C &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene $A = 1$, $B = 2$ y $C = -1$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K \end{aligned}$$

□

CASO III ▪ **$Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles, ninguno de los cuales se repite.** Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$, por lo tanto, además de las fracciones parciales en las ecuaciones 2 y 7, la expresión para $R(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\boxed{9} \qquad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A y B son constantes por determinar. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x/[(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)]$ tiene una descomposición en fracciones parciales de la forma

$$\frac{x}{(x - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 + 4}$$

El término dado en (9) se puede integrar completando el cuadrado y con la fórmula

$$\boxed{10} \qquad \boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

V EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ no se puede factorizar más, se escribe

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, se tiene

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes, se obtiene

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Así, $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

A fin de integrar el segundo término, se divide en dos partes:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 4}\,dx = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx$$

Se hace la sustitución $u = x^2 + 4$ en la primera de estas integrales de modo que $du = 2x\,dx$. Se evalúa la segunda integral por medio de la fórmula 10 con $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 6 Evalúe $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador *no es menor que* el del denominador, se divide primero y se obtiene

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Observe que la ecuación cuadrática $4x^2 - 4x + 3$ es irreducible porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Esto significa que no se puede factorizar, de modo que no se necesita usar la técnica de fracciones parciales.

Para integrar la función dada se completa el cuadrado en el denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

Esto hace pensar en hacer la sustitución $u = 2x - 1$. En tal caso, $du = 2\,dx$ y $x = (u + 1)/2$, de tal manera que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx &= \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx \\
&= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u - 1}{u^2 + 2}\,du \\
&= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2 + 2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2 + 2}\,du \\
&= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

□

NOTA En el ejemplo 6 se ilustra el procedimiento general para integrar una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{donde } b^2 - 4ac < 0$$

Se completa el cuadrado en el denominador y luego se hace una sustitución que lleva la integral a la forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Después, la primera integral es un logaritmo, y la segunda se expresa en términos de $\tan^{-1}$.

CASO IV ■ *$Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible repetido.*

Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2 + bx + c)^r$, donde $b^2 - 4ac < 0$, luego en lugar de la única fracción parcial (9), la suma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocurre en la descomposición en fracciones parciales de $R(x)/Q(x)$. Cada uno de los términos en (11) se puede integrar completando primero el cuadrado.

Sería extremadamente tedioso determinar a mano los valores numéricos de los coeficientes en el ejemplo 7. Sin embargo, mediante la mayor parte de los sistemas algebraicos computacionales, se pueden hallar los valores numéricos de manera muy rápida. Por ejemplo, el comando de Maple

convert(f, parfrac, x)

o el comando de Mathematica

Apart[f]

da los siguientes valores:

$$A = -1, \quad B = \tfrac{1}{8}, \quad C = D = -1,$$
$$E = \tfrac{15}{8}, \quad F = -\tfrac{1}{8}, \quad G = H = \tfrac{3}{4},$$
$$I = -\tfrac{1}{2}, \quad J = \tfrac{1}{2}$$

EJEMPLO 7 Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^3} \qquad \square$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN La forma de la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Al multiplicar por $x(x^2+1)^2$, se tiene

$$\begin{aligned} -x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\ &= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\ &= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C+E)x + A \end{aligned}$$

Si se igualan los coeficientes, se obtiene el sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

que tiene la solución $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ y $E = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\ &= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K \qquad \square \end{aligned}$$

En los términos segundo y cuarto se hizo la sustitución mental $u = x^2 + 1$.

Se nota que a veces se pueden evitar las fracciones parciales cuando se integra una función racional. Por ejemplo, aunque la integral

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx$$

se podría evaluar por el método del caso III, es mucho más fácil observar que si $u = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, entonces $du = (3x^2 + 3)\,dx$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x^3 + 3x| + C$$

RACIONALIZACIÓN DE SUSTITUCIONES

Algunas funciones no racionales se pueden cambiar a funciones racionales por medio de sustituciones apropiadas. En particular, cuando un integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt[n]{g(x)}$, en tal caso la sustitución $u = \sqrt[n]{g(x)}$ puede ser efectiva. Otros ejemplos aparecen en los ejercicios.

EJEMPLO 9 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x+4}$. Después $u^2 = x + 4$, así que $x = u^2 - 4$ y $dx = 2u\,du$. Entonces,

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2 - 4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2 - 4}\,du$$
$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2 - 4}\right) du$$

Se puede evaluar esta integral, ya sea factorizando $u^2 - 4$ como $(u - 2)(u + 2)$ y por medio de las fracciones parciales o al usar la fórmula 6 con $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2 - 4}$$
$$= 2u + 8 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2}\ln\left|\frac{u - 2}{u + 2}\right| + C$$
$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sqrt{x+4} + 2}\right| + C$$

□

7.4 EJERCICIOS

1–6 Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función (como en el ejemplo 7). No determine los valores numéricos de los coeficientes.

1. (a) $\dfrac{2x}{(x + 3)(3x + 1)}$ (b) $\dfrac{1}{x^3 + 2x^2 + x}$

2. (a) $\dfrac{x}{x^2 + x - 2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2 + x + 2}$

3. (a) $\dfrac{x^4 + 1}{x^5 + 4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2 - 9)^2}$

4. (a) $\dfrac{x^3}{x^2 + 4x + 3}$ (b) $\dfrac{2x + 1}{(x + 1)^3(x^2 + 4)^2}$

5. (a) $\dfrac{x^4}{x^4 - 1}$ (b) $\dfrac{t^4 + t^2 + 1}{(t^2 + 1)(t^2 + 4)^2}$

6. (a) $\dfrac{x^4}{(x^3 + x)(x^2 - x + 3)}$ (b) $\dfrac{1}{x^6 - x^3}$

7–38 Evalúe la integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x - 6}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{r^2}{r + 4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x - 9}{(x + 5)(x - 2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t + 4)(t - 1)}\,dt$

11. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\displaystyle\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+6}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x^2+4}\,dx$

22. $\displaystyle\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\displaystyle\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

31. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

33. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}\,dx$

34. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

36. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

37. $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$

38. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

39–50 Haga una sustitución para expresar el integrando como una función racional y después evalúe la integral.

39. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

41. $\displaystyle\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

44. $\displaystyle\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

45. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Sugerencia*: sustituya $u=\sqrt[6]{x}$.]

46. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

47. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

48. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t+3\tan t+2}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}\,dx$

51–52 Use la integración por partes, junto con las técnicas de esta sección, para evaluar la integral.

51. $\displaystyle\int \ln(x^2-x+2)\,dx$

52. $\displaystyle\int x\tan^{-1}x\,dx$

53. Use una gráfica de $f(x)=1/(x^2-2x-3)$ para decidir si $\int_0^2 f(x)\,dx$ es positiva o negativa. Use la gráfica para dar una estimación aproximada del valor de la integral, y después use las fracciones parciales para encontrar el valor exacto.

54. Grafique $y=1/(x^3-2x^2)$ y una antiderivada en la misma pantalla.

55–56 Evalúe la integral completando el cuadrado y con la fórmula 6.

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x}$

56. $\displaystyle\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

57. El matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) observó que la sustitución $t=\tan(x/2)$ convierte cualquier función racional de sen x y cos x en una función racional ordinaria de t.

(a) Si $t=\tan(x/2)$, $-\pi<x<\pi$, bosqueje el triángulo rectángulo o use identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Muestre que

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Muestre que

$$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

58–61 Use la sustitución del ejercicio 57 para transformar el integrando en una función racional de t y luego evalúe la integral.

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{3-5\operatorname{sen} x}$

59. $\displaystyle\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x-4\cos x}\,dx$

60. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2 + \cos x}\, dx$

62–63 Determine el área de la región bajo la curva dada de 1 a 2.

62. $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$

63. $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - x^2}$

64. Encuentre el volumen del sólido resultante si la región bajo la curva $y = 1/(x^2 + 3x + 2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ se hace girar respecto a (a) el eje x y (b) el eje y.

65. Una manera de desacelerar el crecimiento de una población de insectos sin usar pesticidas es introducir en la población varios machos estériles que se aparean con hembras fértiles, pero no producen descendencia. Si P representa el número de insectos hembras en una población, S el número de machos estériles introducidos cada generación y r la rapidez de crecimiento natural de la población, en tal caso la población de hembras se relaciona con el tiempo t mediante

$$t = \int \frac{P + S}{P[(r - 1)P - S]}\, dP$$

Suponga que una población de insectos con 10 000 hembras crece con una proporción de $r = 0.10$ y se agregan 900 machos estériles. Evalúe la integral para obtener una ecuación que relacione la población de hembras con el tiempo. (Observe que la ecuación resultante no se puede resolver de manera explícita para P.)

66. Factorice $x^4 + 1$ como una diferencia de cuadrados sumando y restando primero la misma cantidad. Use esta factorización para evaluar $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$.

CAS 67. (a) Use un sistema algebraico computacional para hallar la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Use el inciso (a) para hallar $\int f(x)\, dx$ (a mano) y compare con el resultado de usar el CAS para integrar f de manera directa. Comente acerca de cualquier discrepancia.

CAS 68. (a) Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Use el inciso (a) para hallar $\int f(x)\, dx$ y grafique f y su integral indefinida en la misma pantalla.

(c) Use la gráfica de f para descubrir las características principales de la gráfica de $\int f(x)\, dx$.

69. Suponga que F, G, y Q son polinomios y

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para toda x excepto cuando $Q(x) = 0$. Demuestre que $F(x) = G(x)$ para toda x. [*Sugerencia:* use la continuidad.]

70. Si f es una función cuadrática tal que $f(0) = 1$ y

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x + 1)^3}\, dx$$

es una función racional, encuentre el valor de $f'(0)$.

7.5 ESTRATEGIA PARA INTEGRACIÓN

Como se ha visto, la integración es más desafiante que la derivación. Para hallar la derivada de una función, resulta evidente cuál fórmula de derivación se debe aplicar. Pero podría no ser obvio con la técnica que se debe usar para integrar una función dada.

Hasta ahora se han aplicado técnicas individuales en cada sección. Por ejemplo, normalmente se usó sustitución en los ejercicios 5.5, integración por partes en los ejercicios 7.1 y fracciones parciales en los ejercicios 7.4. Pero en esta sección se presenta una colección de diversas integrales en orden aleatorio y la dificultad principal es reconocer qué técnica o fórmula usar. Ninguna regla invariable se puede dar en cuanto a qué método se aplica en una determinada situación, pero se da cierta orientación sobre la estrategia que podría resultar útil.

Un prerrequisito para la selección de estrategia es conocer las fórmulas básicas de integración. En la siguiente tabla se han reunido las integrales de la lista previa junto con varias fórmulas adicionales que se han aprendido en este capítulo. La mayor parte se deben memorizar. Es útil conocer todas, pero las marcadas con un asterisco no necesitan ser memorizadas, puesto que se deducen con facilidad. La fórmula 19 se puede evitar si se emplean fracciones parciales, y en lugar de la fórmula 20, se pueden usar sustituciones trigonométricas.

TABLA DE FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN Se han omitido las constantes de integración.

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	**2.** $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$
3. $\int e^x\,dx = e^x$	**4.** $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$
5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$	**6.** $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$	**8.** $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$
9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$	**10.** $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x$
11. $\int \sec x\,dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert$	**12.** $\int \csc x\,dx = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert$
13. $\int \tan x\,dx = \ln\lvert\sec x\rvert$	**14.** $\int \cot x\,dx = \ln\lvert\operatorname{sen} x\rvert$
15. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$	**16.** $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
17. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	**18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
***19.** $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	***20.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert$

Una vez que se cuenta con estas fórmulas de integración básicas, si no se ve de inmediato cómo proceder a resolver una determinada integral, se podría probar la siguiente estrategia de cuatro pasos.

1. Simplifique el integrando si es posible A veces el uso de operaciones algebraicas o identidades trigonométricas simplifica el integrando y hace evidente el método de integración. A continuación se dan algunos ejemplos:

$$\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})\,dx = \int (\sqrt{x} + x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta &= \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta \\ &= \int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x)\,dx \\ &= \int (1 + 2\operatorname{sen} x\cos x)\,dx\end{aligned}$$

2. Busque una sustitución obvia Intente hallar alguna función $u = g(x)$ en el integrando cuya diferencial $du = g'(x)\,dx$ también aparece, además de un factor constante. Por ejemplo, en la integral

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$$

se observa que si $u = x^2 - 1$, en seguida $du = 2x\,dx$. Por lo tanto, se usa la sustitución $u = x^2 - 1$ en lugar del método de fracciones parciales.

3. Clasifique el integrando de acuerdo con su forma Si los pasos 1 y 2 no han llevado a la solución, en tal caso se echa un vistazo a la forma del integrando $f(x)$.

(a) *Funciones trigonométricas.* Si $f(x)$ es un producto de potencias de sen x y cos x, de tan x y sec x, o de cot x y csc x, después se usan las sustituciones recomendadas en la sección 7.2.

(b) *Funciones racionales.* Si f es una función racional, se usa el procedimiento de la sección 7.4 relacionado con fracciones parciales.

(c) *Integración por partes.* Si $f(x)$ es un producto de una potencia de x (o un polinomio) y una función trascendental (como una función trigonométrica, exponencial o logarítmica), por lo tanto se prueba la integración por partes, y se eligen u y dv de acuerdo con la recomendación dada en la sección 7.1. Si considera a las funciones de los ejercicios 7.1, se verá que la mayor parte de ellas son del tipo recién descrito.

(d) *Radicales.* Los tipos particulares de sustituciones se recomiendan cuando aparecen ciertos radicales.

(i) Si $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ se usa la sustitución trigonométrica de acuerdo con la tabla de la sección 7.3.

(ii) Si ocurre $\sqrt[n]{ax + b}$ se usa la sustitución de racionalización $u = \sqrt[n]{ax + b}$. De una manera más general, esto funciona a veces para $\sqrt[n]{g(x)}$.

4. Inténtelo una vez más Si los tres primeros pasos no producen respuesta, recuerde que hay básicamente sólo dos métodos de integración: sustitución y por partes.

(a) *Pruebe la sustitución.* Incluso si ninguna sustitución es obvia (paso 2), cierta inspiración o inventiva (o incluso desesperación) podría sugerir una sustitución apropiada.

(b) *Pruebe por partes.* Aunque la integración por partes emplea la mayor parte del tiempo en productos de la forma descrita en el paso 3(c), a veces es efectiva en funciones simples. En relación con la sección 7.1, se ve que funciona en $\tan^{-1}x$, $\text{sen}^{-1}x$, $\ln x$, y todas éstas son funciones inversas.

(c) *Realice algunas operaciones en el integrando.* Las operaciones algebraicas (quizá racionalizar el denominador o usar identidades trigonométricas) podrían ser útiles para transformar el integrando en una forma más fácil. Estas operaciones pueden ser más sustanciales que en el paso 1, y podrían implicar cierto ingenio. A continuación se da un ejemplo:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1 + \cos x}{\text{sen}^2 x}\,dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}\right) dx$$

(d) *Relacione el problema con problemas previos.* Cuando se ha acumulado cierta experiencia en la integración, hay la posibilidad de usar un método en una integral dada similar a uno que ya se ha empleado en una integral previa. O incluso se podría expresar la integral dada en términos de una previa. Por ejemplo, $\int \tan^2 x \sec x\,dx$

es una integral desafiante, pero si se emplea la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, se puede escribir

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

y si $\int \sec^3 x \, dx$ ha sido evaluada antes (véase el ejemplo 8 en la sección 7.2), después ese cálculo se puede usar en el problema actual.

(e) *Use varios métodos.* Algunas veces se requieren dos o tres métodos para evaluar una integral. La evaluación podría requerir varias sustituciones sucesivas de diferentes tipos, o podría ser necesario combinar la integración por partes con una o más sustituciones.

En los siguientes ejemplos se indica una manera de cómo enfrentar el problema, pero no resuelve por completo la integral.

EJEMPLO 1 $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} \, dx$

En el paso 1 se reescribe la integral:

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$$

La integral ahora es de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ con m impar, así que se puede usar la recomendación de la sección 7.2.

De manera alternativa, si en el paso 1 se hubiera escrito

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x} \, dx$$

por lo tanto se podría haber continuado como sigue con la sustitución $u = \cos x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x} \operatorname{sen} x \, dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6} (-du)$$

$$= \int \frac{u^2 - 1}{u^6} \, du = \int (u^{-4} - u^{-6}) \, du$$ □

V EJEMPLO 2 $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

De acuerdo con (ii) en el paso 3(d), se sustituye $u = \sqrt{x}$. Entonces $x = u^2$, por lo tanto, $dx = 2u \, du$ y

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int u e^u \, du$$

El integrando es ahora un producto de u y la función trascendental e^u de modo que se puede integrar por partes. □

EJEMPLO 3 $\displaystyle\int \frac{x^5 + 1}{x^3 - 3x^2 - 10x}\,dx$

Ninguna simplificación algebraica o sustitución es obvia, de modo que aquí no aplican los pasos 1 y 2. El integrando es una función racional, así que se aplica el procedimiento de la sección 7.4, sin olvidar que el primer paso es dividir. □

EJEMPLO 4 $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Aquí todo lo que se necesita es el paso 2. Se sustituye $u = \ln x$ porque su diferencial es $du = dx/x$, la cual aparece en la integral. □

EJEMPLO 5 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx$

Aunque aquí funciona la sustitución de racionalización

$$u = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

[(ii) paso 3(d)], conduce a una función de racionalización muy complicada. Un método más fácil es hacer algunas operaciones algebraicas [como en el paso 1 o el paso 4(c)]. Al multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{1 - x}$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\,dx &= \int \frac{1 - x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \\ &= \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned}$$ □

¿SE PUEDEN INTEGRAR TODAS LAS FUNCIONES CONTINUAS?

Surge la pregunta: ¿La estrategia de integración permitirá hallar la integral de toda función continua? Por ejemplo, ¿es posible emplearla para evaluar $\int e^{x^2}dx$? La respuesta es no, por lo menos no en términos de las funciones con las que se está familiarizado.

Las funciones con las que se ha estado tratando en este libro se llaman **funciones elementales.** Éstas son polinomios, funciones racionales, funciones de potencia (x^a), funciones exponenciales (a^x), funciones logarítmicas, funciones trigonométricas y trigonométricas inversas, funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas, y todas las funciones que se pueden obtener de éstas mediante las cinco operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x - 1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

es una función elemental.

Si f es una función elemental, entonces f' es una función elemental pero $\int f(x)\,dx$ no necesariamente es una función elemental. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Puesto que f es continua, su integral existe, y si se define la función F por

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$$

por lo tanto de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo se sabe que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Así, $f(x) = e^{x^2}$ tiene una antiderivada F, pero se ha demostrado que F no es una función elemental. Esto significa que sin importar el esfuerzo realizado, nunca se logrará evaluar $\int e^{x^2}\,dx$ en términos de las funciones conocidas. (No obstante, en el capítulo 11 se verá cómo expresar $\int e^{x^2}\,dx$ como una serie infinita.) Lo mismo se puede decir de las siguientes integrales:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De hecho, la mayoría de las funciones elementales no tienen antiderivadas elementales. Sin embargo, puede estar seguro de que todas las integrales de los siguientes ejercicios son funciones elementales.

7.5 EJERCICIOS

1–80 Evalúe la integral

1. $\int \cos x(1 + \operatorname{sen}^2 x)dx$
2. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$
3. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\tan x}\,dx$
4. $\int \tan^3\theta\,d\theta$
5. $\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2}\,dt$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{3-x^4}}\,dx$
7. $\int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan y}}{1+y^2}\,dy$
8. $\int x\csc x\cot x\,dx$
9. $\int_1^3 r^4 \ln r\,dr$
10. $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx$
11. $\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx$
12. $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\,dx$
13. $\int \operatorname{sen}^3\theta\,\cos^5\theta\,d\theta$
14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
15. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$
16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
17. $\int x\operatorname{sen}^2 x\,dx$
18. $\int \frac{e^{2t}}{1+e^{4t}}\,dt$
19. $\int e^{x+e^x}dx$
20. $\int e^2\,dx$
21. $\int \arctan\sqrt{x}\,dx$
22. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}\,dx$
23. $\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8\,dx$
24. $\int \ln(x^2-1)\,dx$
25. $\int \frac{3x^2-2}{x^2-2x-8}\,dx$
26. $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}\,dx$
27. $\int \frac{dx}{1+e^x}\,dx$
28. $\int \operatorname{sen}\sqrt{at}\,dt$
29. $\int_0^5 \frac{3w-1}{w+2}\,dw$
30. $\int_{-2}^2 |x^2-4x|\,dx$
31. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$
32. $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}\,dx$
33. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$
34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1+4\cot x}{4-\cot x}\,dx$
35. $\int_{-1}^1 x^8\operatorname{sen} x\,dx$
36. $\int \operatorname{sen} 4x\cos 3x\,dx$
37. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta\,\tan^2\theta\,d\theta$
38. $\int_0^{\pi/4} \tan^5\theta\,\sec^3\theta\,d\theta$
39. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta\tan\theta}{\sec^2\theta-\sec\theta}\,d\theta$
40. $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2-4y-3}}\,dy$
41. $\int \theta\tan^2\theta\,d\theta$
42. $\int \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$
43. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$
44. $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$
45. $\int x^5 e^{-x^3}dx$
46. $\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$
47. $\int x^3(x-1)^{-4}\,dx$
48. $\int \frac{x}{x^4-a^4}\,dx$

49. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

51. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

52. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

53. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$

54. $\displaystyle\int (x+\operatorname{sen} x)^2\,dx$

55. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+x\sqrt{x}}$

56. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

57. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx$

58. $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

59. $\displaystyle\int \cos x\cos^3(\operatorname{sen} x)\,dx$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$

61. $\displaystyle\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$

62. $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$

63. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^4 x}\,dx$

64. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$

65. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

66. $\displaystyle\int_2^3 \frac{u^3+1}{u^3-u^2}\,du$

67. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$

68. $\displaystyle\int \frac{1}{1+2e^x-e^{-x}}\,dx$

69. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

70. $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

71. $\displaystyle\int \frac{x+\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

72. $\displaystyle\int \frac{4^x+10^x}{2^x}\,dx$

73. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^4}$

75. $\displaystyle\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

76. $\displaystyle\int (x^2-bx)\operatorname{sen} 2x\,dx$

77. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$

78. $\displaystyle\int \frac{\sec x\cos 2x}{\operatorname{sen} x+\sec x}\,dx$

79. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

80. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}\,dx$

81. Las funciones $y=e^{x^2}$ y $y=x^2e^{x^2}$ no tienen antiderivadas elementales, pero $y=(2x^2+1)e^{x^2}$ sí. Evalúe $\int (2x^2+1)e^{x^2}\,dx$.

7.6 INTEGRACIÓN POR MEDIO DE TABLAS Y SISTEMAS ALGEBRAICOS

En esta sección se describe cómo usar las tablas y los sistemas algebraicos computacionales para integrar funciones que tienen antiderivadas elementales. No obstante, se debe tener en mente que incluso los sistemas algebraicos computacionales más poderosos, no pueden hallar fórmulas explícitas para las antiderivadas de funciones como e^{x^2} o las otras funciones descritas al final de la sección 7.5.

TABLAS DE INTEGRALES

Las tablas de integrales indefinidas son muy útiles cuando se afronta una integral que es difícil de evaluar a mano y no se tiene acceso a un sistema algebraico computacional. Una tabla relativamente breve de 120 integrales, clasificada por forma, se da en las páginas de referencia al final del libro. Tablas más extensas se encuentran en *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae,* 31a. ed. de Daniel Zwillinger (Boca Raton, FL: CRC Press, 2002) (709 elementos) o en Gradshteyn y Ryzhik's *Table of Integrals, Series, and Products,* 6e (New York: Academic Press, 2000), que contiene cientos de páginas de integrales. Se debe recordar, sin embargo, que las integrales no aparecen a menudo exactamente en la forma listada en una tabla. Por lo común, es necesario usar sustitución u operaciones algebraicas para transformar una determinada integral en una de las formas de la tabla.

EJEMPLO 1 La región limitada por las curvas $y=\arctan x$, $y=0$, y $x=1$ se hace girar respecto al eje y. Determine el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Con el método de cascarones cilíndricos, se ve que el volumen es

$$V=\int_0^1 2\pi x\arctan x\,dx$$

La tabla de integrales aparece en las páginas de referencia al final del libro.

En la sección de la tabla de integrales titulada *Formas tigonométricas inversas* se localiza la fórmula 92:

$$\int u \tan^{-1}u\, du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1}u - \frac{u}{2} + C$$

Así, el volumen es

$$V = 2\pi\int_0^1 x\tan^{-1}x\, dx = 2\pi\left[\frac{x^2+1}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2}\right]_0^1$$

$$= \pi[(x^2+1)\tan^{-1}x - x]_0^1 = \pi(2\tan^{-1}1 - 1)$$

$$= \pi[2(\pi/4) - 1] = \tfrac{1}{2}\pi^2 - \pi$$

□

EJEMPLO 2 Use la tabla de integrales para hallar $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Si se ve la sección de la tabla titulada *Formas relacionadas con* $\sqrt{a^2-u^2}$, se ve que el elemento más parecido es el número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Esto no es exactamente lo que se tiene, pero se podrá usar esto si primero se hace la sustitución $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5-u^2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du$$

Luego se emplea la fórmula 34 con $a^2 = 5$ (de modo que $a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du = \frac{1}{8}\left(-\frac{u}{2}\sqrt{5-u^2} + \frac{5}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= -\frac{x}{8}\sqrt{5-4x^2} + \frac{5}{16}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

□

EJEMPLO 3 Emplee la tabla de integrales para determinar $\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx$.

SOLUCIÓN Si se estudia la sección llamada *Formas trigonométricas*, se ve que ninguno de los elementos incluye de manera explícita un factor u^3 Sin embargo, se puede usar la fórmula de reducción del elemento 84 con $n = 3$:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x\, dx$$

85. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\, du$

Ahora se necesita evaluar $\int x^2\cos x\, dx$. Se puede usar la fórmula de reducción número 85 con $n = 2$, seguida de la integral 82:

$$\int x^2\cos x\, dx = x^2\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\, dx$$

$$= x^2\operatorname{sen} x - 2(\operatorname{sen} x - x\cos x) + K$$

Al combinar estos cálculos, se obtiene

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C$$

donde $C = 3K$. □

EJEMPLO 4 Use la tabla de integrales para hallar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx$.

SOLUCIÓN Puesto que la tabla da formas relacionadas con $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, y $\sqrt{x^2 - a^2}$, pero no $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, primero se completa el cuadrado:

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$$

Si se hace la sustitución $u = x + 1$ (de modo que $x = u - 1$), el integrando se relacionará con el patrón $\sqrt{a^2 + u^2}$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx &= \int (u - 1)\sqrt{u^2 + 3}\, du \\ &= \int u\sqrt{u^2 + 3}\, du - \int \sqrt{u^2 + 3}\, du\end{aligned}$$

La primera integral se evalúa por medio de la sustitución $t = u^2 + 3$:

$$\int u\sqrt{u^2 + 3}\, du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} t^{3/2} = \tfrac{1}{3}(u^2 + 3)^{3/2}$$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

Para la segunda integral se usa la fórmula 21 con $a = \sqrt{3}$:

$$\int \sqrt{u^2 + 3}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 3} + \tfrac{3}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 + 3}\right)$$

En estos términos,

$$\begin{aligned}&\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\, dx \\ &\quad = \tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \frac{x + 1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \tfrac{3}{2}\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right) + C\end{aligned}$$

□

SISTEMAS ALGEBRAICOS COMPUTACIONALES

Se ha visto que el uso de tablas requiere comparar la forma del integrando dado con las formas de los integrandos en las tablas. Las computadoras son particularmente buenas para comparar patrones. Y, así como se emplearon sustituciones junto con las tablas, un CAS puede llevar a cabo sustituciones que transforman una integral dada en una que aparece en sus fórmulas almacenadas. Así, no es sorprendente que los sistemas algebraicos computacionales sobresalgan en la integración. Eso no significa que la integración a mano sea una habilidad obsoleta. Se verá que un cálculo manual produce a veces una integral indefinida en una forma que es más conveniente que la respuesta dada por una máquina.

Para empezar, se verá lo que sucede cuando se pide a la máquina integrar la función relativamente simple $y = 1/(3x - 2)$. Con la sustitución $u = 3x - 2$, un cálculo fácil a mano da

$$\int \frac{1}{3x - 2}\, dx = \tfrac{1}{3}\ln|3x - 2| + C$$

mientras que Derive, Mathematica y Maple producen la respuesta

$$\tfrac{1}{3}\ln(3x - 2)$$

Lo primero que hay que observar es que los sistemas algebraicos computacionales omiten la constante de integración. En otras palabras, producen una antiderivada *particular*, no la más general. Por lo tanto, al hacer uso de una integración de máquina, se tendría que añadir una constante. Segundo, los signos de valor absoluto se omiten en la respuesta de máquina. Eso está bien si el problema tiene que ver sólo con valores de x mayores que $\frac{2}{3}$. Pero si se está interesado en otros valores de x, en tal caso es necesario insertar el símbolo de valor absoluto.

En el ejemplo siguiente se reconsidera la integral del ejemplo 4, pero esta vez se pide la respuesta a la máquina.

EJEMPLO 5 Use un sistema algebraico computacional para determinar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx$.

SOLUCIÓN Maple responde con la respuesta

$$\tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \tfrac{1}{4}(2x + 2)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x)$$

Esto se ve diferente a la respuesta encontrada en el ejemplo 4, pero es equivalente porque el tercer término se puede reescribir por medio de la identidad

Ésta es la ecuación 3.11.3.

$$\operatorname{arcsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Así,

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) &= \ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(1 + x) + \sqrt{\tfrac{1}{3}(1 + x)^2 + 1}\right]\\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 + x + \sqrt{(1 + x)^2 + 3}\right]\\ &= \ln\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right)\end{aligned}$$

El término extra resultante $-\frac{3}{2}\ln\left(1/\sqrt{3}\right)$ se puede absorber en la constante de integración.

Mathematica da la respuesta

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1 + x}{\sqrt{3}}\right)$$

Mathematica combinó los dos primeros términos del ejemplo 4 (y el resultado de Maple) en un término simple mediante factorización.

Derive da la respuesta

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,(2x^2 + x + 5) - \tfrac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x + 1\right)$$

El primer término es parecido al primer término en la respuesta de Mathematica, y el segundo término es idéntico al último término del ejemplo 4. □

EJEMPLO 6 Use un CAS para evaluar $\int x(x^2 + 5)^8\,dx$.

SOLUCIÓN Maple y Mathematica dan la misma respuesta:

$$\tfrac{1}{18}x^{18} + \tfrac{5}{2}x^{16} + 50x^{14} + \tfrac{1750}{3}x^{12} + 4375x^{10} + 21\,875x^8 + \tfrac{218\,750}{3}x^6 + 156\,250x^4 + \tfrac{390\,625}{2}x^2$$

Es claro que ambos sistemas desarrollaron $(x^2 + 5)^8$ mediante el teorema del binomio, y después integraron cada término.

Si se integra a mano, con la sustitución $u = x^2 + 5$, se obtiene

$$\int x(x^2 + 5)^8\,dx = \tfrac{1}{18}(x^2 + 5)^9 + C$$

Para la mayor parte de los propósitos, ésta es una forma más conveniente de la respuesta. □

EJEMPLO 7 Use un CAS para determinar $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 de la sección 7.2 se encontró que

$$\boxed{1} \qquad \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Derive y Maple dan la respuesta

$$-\tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^4 x \cos^3 x - \tfrac{4}{35}\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x - \tfrac{8}{105}\cos^3 x$$

Mientras que Mathematica produce

$$-\tfrac{5}{64}\cos x - \tfrac{1}{192}\cos 3x + \tfrac{3}{320}\cos 5x - \tfrac{1}{448}\cos 7x$$

Se sospecha que hay identidades trigonométricas que muestran que estas tres respuestas son equivalentes. De hecho, si se pide a Derive, Maple y Mathematica que simplifiquen sus expresiones por medio de identidades trigonométricas, en última instancia producen la misma forma de respuesta que en la ecuación 1. □

7.6 EJERCICIOS

1–4 Use el elemento indicado de la tabla de integrales en las páginas de referencia para evaluar la integral.

1. $\int \dfrac{\sqrt{7 - 2x^2}}{x^2}\,dx$; entrada 33

2. $\int \dfrac{3x}{\sqrt{3 - 2x}}\,dx$; entrada 55

3. $\int \sec^3(\pi x)\,dx$; entrada 71

4. $\int e^{2\theta} \operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$; entrada 98

5–30 Use la tabla de integrales de las páginas de referencia para evaluar la integral.

5. $\int_0^1 2x \cos^{-1} x\,dx$

6. $\int_2^3 \dfrac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 7}}\,dx$

7. $\int \tan^3(\pi x)\,dx$

8. $\int \dfrac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

9. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 + 9}}$

$\boxed{10.}$ $\int \dfrac{\sqrt{2y^2 - 3}}{y^2}\,dy$

11. $\int_{-1}^0 t^2 e^{-t}\,dt$

12. $\int x^2 \operatorname{csch}(x^3 + 1)\,dx$

13. $\int \dfrac{\tan^3(1/z)}{z^2}\,dz$

14. $\int \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{x}\,dx$

15. $\int e^{2x} \arctan(e^x)\,dx$

16. $\int x \operatorname{sen}(x^2) \cos(3x^2)\,dx$

$\boxed{17.}$ $\int y\sqrt{6 + 4y - 4y^2}\,dy$

18. $\int \dfrac{dx}{2x^3 - 3x^2}$

$\boxed{19.}$ $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

20. $\int \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{5 - \operatorname{sen}\theta}}\,d\theta$

21. $\int \dfrac{e^x}{3 - e^{2x}}\,dx$

22. $\int_0^2 x^3\sqrt{4x^2 - x^4}\,dx$

23. $\int \sec^5 x\,dx$

24. $\int \operatorname{sen}^6 2x\,dx$

25. $\int \dfrac{\sqrt{4 + (\ln x)^2}}{x}\,dx$

$\boxed{26.}$ $\int_0^1 x^4 e^{-x}\,dx$

27. $\int \sqrt{e^{2x} - 1}\, dx$

28. $\int e^t \operatorname{sen}(\alpha t - 3)\, dt$

29. $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$

30. $\int \frac{\sec^2\theta \tan^2\theta}{\sqrt{9 - \tan^2\theta}}\, d\theta$

31. Encuentre el volumen del sólido obtenido cuando la región bajo la curva $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, se hace girar respecto al eje y.

32. La región bajo la curva $y = \tan^2 x$ de 0 a $\pi/4$ se hace girar respecto al eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

33. Compruebe la fórmula 53 de la tabla de integrales (a) por derivación y (b) por medio de la sustitución $t = a + bu$.

34. Compruebe la fórmula 31 (a) por derivación y (b) sustituyendo $u = a \operatorname{sen} \theta$.

CAS **35–42** Use un sistema algebraico computacional para evaluar la integral. Compare la respuesta con el resultado de usar tablas. Si las respuestas no son las mismas, muestre que son equivalentes.

35. $\int \sec^4 x\, dx$

36. $\int \csc^5 x\, dx$

37. $\int x^2\sqrt{x^2 + 4}\, dx$

38. $\int \frac{dx}{e^x(3e^x + 2)}$

39. $\int x\sqrt{1 + 2x}\, dx$

40. $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

41. $\int \tan^5 x\, dx$

42. $\int \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}\, dx$

CAS **43.** (a) Utilice la tabla de integrales para evaluar $F(x) = \int f(x)\, dx$, donde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

¿Cuál es el dominio de f y F?

(b) Aplique un CAS para evaluar $F(x)$. ¿Cuál es el dominio de la función F que produce el CAS? ¿Existe diferencia entre este dominio y el que encontró en el inciso (a) para la función F?

CAS **44.** Los sistemas algebraicos computacionales necesitan a veces una mano auxiliadora de los seres humanos. Intente evaluar

$$\int (1 + \ln x)\sqrt{1 + (x \ln x)^2}\, dx$$

con un sistema algebraico computacional. Si no obtiene respuesta, haga una sustitución que cambie la integral en una que el CAS *pueda* evaluar.

CAS **45–48** Use un CAS para hallar una antiderivada F de f tal que $F(0) = 0$. Grafique f y F y localice de manera aproximada las coordenadas x de los puntos extremos y los puntos de inflexión de F.

45. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$

46. $f(x) = xe^{-x} \operatorname{sen} x, \quad -5 \leqslant x \leqslant 5$

47. $f(x) = \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi$

48. $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^6 + 1}$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

CAS PATRONES DE INTEGRALES

En este proyecto se emplea un sistema algebraico computacional para investigar integrales indefinidas de familias de funciones. Al observar los patrones que aparecen en las integrales de varios miembros de la familia, primero se inferirá, y luego se probará, una fórmula general para la integral de cualquier miembro de la familia.

1. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int \frac{1}{(x + 2)(x + 3)}\, dx$ (ii) $\int \frac{1}{(x + 1)(x + 5)}\, dx$

(iii) $\int \frac{1}{(x + 2)(x - 5)}\, dx$ (iv) $\int \frac{1}{(x + 2)^2}\, dx$

(b) Con respecto al patrón de sus respuestas del inciso (a), suponga el valor de la integral

$$\int \frac{1}{(x + a)(x + b)}\, dx$$

si $a \neq b$. ¿Qué pasa si $a = b$?

(c) Compruebe su conjetura pidiendo al CAS que evalúe la integral del inciso (b). Después demuéstrela por medio de fracciones parciales.

2. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int \operatorname{sen} x \cos 2x\, dx$ (ii) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x\, dx$ (iii) $\int \operatorname{sen} 8x \cos 3x\, dx$

(b) En función del patrón de sus respuestas del inciso (a), suponga el valor de la integral

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx$$

(c) Compruebe su conjetura con un CAS. Después demuéstrela por medio de las técnicas de la sección 7.2. ¿Para qué valores de a y b es válida?

3. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int \ln x\, dx$ (ii) $\int x \ln x\, dx$ (iii) $\int x^2 \ln x\, dx$

(iv) $\int x^3 \ln x\, dx$ (v) $\int x^7 \ln x\, dx$

(b) De acuerdo al patrón de sus respuestas del inciso (a), suponga el valor de

$$\int x^n \ln x\, dx$$

(c) Use la integración por partes para demostrar la conjetura que hizo en el inciso (b). ¿Para qué valores de n es válida?

4. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int xe^x\, dx$ (ii) $\int x^2e^x\, dx$ (iii) $\int x^3e^x\, dx$

(iv) $\int x^4e^x\, dx$ (v) $\int x^5e^x\, dx$

(b) Con base en el patrón de sus respuestas del inciso (a), infiera el valor de $\int x^6e^x\, dx$. Después utilice su CAS para comprobar su conjetura.

(c) Con base en los patrones de los incisos (a) y (b), haga una conjetura en cuanto al valor de la integral

$$\int x^ne^x\, dx$$

cuando n es un entero positivo.

(d) Use la función matemática para demostrar la conjetura que hizo en el inciso (c).

7.7 INTEGRACIÓN APROXIMADA

Hay dos situaciones en las que es imposible encontrar el valor exacto de una integral definida.

La primera situación surge del hecho de que a fin de evaluar $\int_a^b f(x)\, dx$ por medio del teorema fundamental del cálculo, se necesita conocer una antiderivada de f. Sin embargo, algunas veces es difícil, o incluso imposible, hallar una antiderivada (véase la sección 7.5). Por ejemplo, es imposible evaluar de manera exacta las siguientes integrales:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx$$

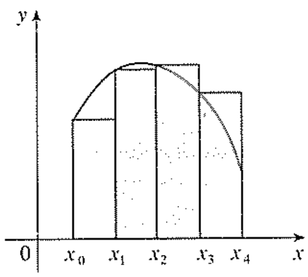
La segunda situación surge cuando la función se determina a partir de un experimento científico a través de lecturas de instrumento o datos reunidos. Podría no haber fórmula para la función (véase ejemplo 5).

En ambos casos se necesita hallar valores aproximados de integrales definidas. Ya se conoce un método. Recuerde que la integral definida se define como un límite de sumas de Riemann, así que cualquier suma de Riemann se podría usar como una aproximación a la integral: Si se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = (b - a)/n$, por lo tanto se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

donde x_i^* es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si se elige que x_i^* sea el punto final izquierdo del subintervalo, después $x_i^* = x_{i-1}$ y se tiene

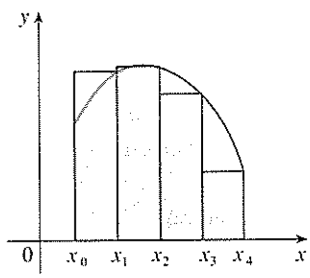
$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$



(a) Aproximación de punto final izquierdo

Si $f(x) \geqslant 0$, en tal caso la integral representa un área y (1) representa una aproximación de esta área mediante los rectángulos mostrados en la figura 1(a). Si se elige que x_i^* sea el punto final derecho, en seguida $x_i^* = x_i$ y se tiene

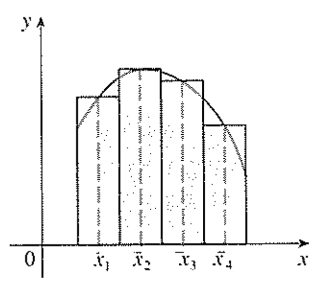
$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$



(b) Aproximación de punto final derecho

[Véase la figura 1(b)]. Las aproximaciones L_n y R_n definidas por las ecuaciones 1 y 2 se llaman **aproximación de punto final izquierdo** y **aproximación de punto final derecho**, respectivamente.

En la sección 5.2 se consideró también el caso donde x_i^* se elige como el punto medio $\bar{x}_i$ del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En la figura 1(c) se muestra la aproximación de punto medio M_n, que parece ser mejor que L_n o R_n.



(c) Aproximación de punto medio

FIGURA 1

REGLA DEL PUNTO MEDIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\quad \Delta x = \dfrac{b - a}{n}$

y bien $\quad \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$

Otra aproximación, llamada regla del trapecio, resulta de promediar las aproximaciones de las ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\right]\\ &= \frac{\Delta x}{2}\left[(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))\right]\\ &= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]\end{aligned}$$

REGLA DEL TRAPECIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $x_i = a + i\,\Delta x$.

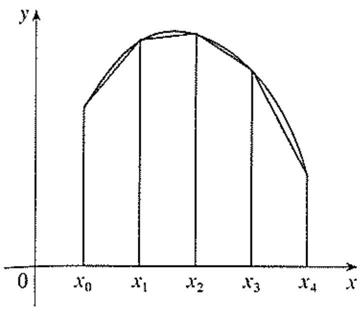


FIGURA 2
Aproximación trapezoidal

La razón para el nombre regla del trapecio se puede ver de la figura 2, que ilustra el caso $f(x) \geqslant 0$. El área del trapecio que yace arriba del i-ésimo subintervalo es

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

y si se suman las áreas de estos trapecios, se obtiene el lado derecho de la regla del trapecio.

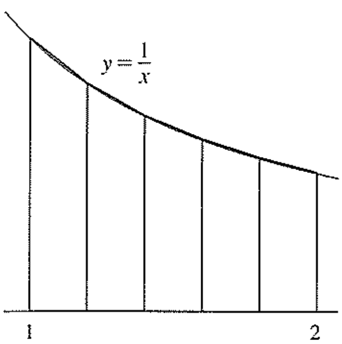


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Use (a) la regla del trapecio y (b) la regla del punto medio con $n = 5$ para aproximar la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 5$, $a = 1$, y $b = 2$, se tiene $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0.2$, y así, la regla del trapecio da

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 &= \frac{0.2}{2}[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)] \\ &= 0.1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right) \\ &\approx 0.695635\end{aligned}$$

Esta aproximación se ilustra en la figura 3.

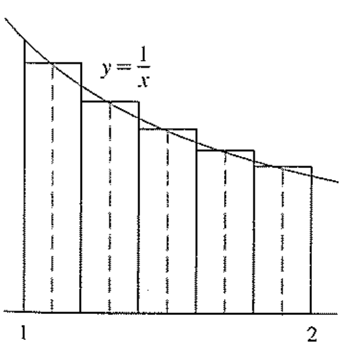


FIGURA 4

(b) Los puntos medios de los cinco subintervalos son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, y 1.9, así que la regla del punto medio da

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx &\approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)] \\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right) \\ &\approx 0.691908\end{aligned}$$

Esta aproximación se ilustra en la figura 4. □

En el ejemplo 1 se eligió de manera deliberada una integral cuyo valor se puede calcular explícitamente, de modo que se puede ver cuán precisas son las reglas del trapecio y del punto medio. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0.693147\ldots$$

$\int_a^b f(x)\,dx =$ aproximación + error

El **error** al usar una aproximación se define como la cantidad que debe ser sumada a la aproximación para hacerla exacta. De los valores del ejemplo 1, se ve que los errores en las aproximaciones de la regla del trapecio y del punto medio para $n = 5$ son

$$E_T \approx -0.002488 \qquad \text{y} \qquad E_M \approx 0.001239$$

En general, se tiene

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{y} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

TEC Module 5.2/7.7 permite comparar métodos de aproximación.

En las tablas siguientes se muestran los resultados de cálculos similares a los del ejemplo 1, pero para $n = 5$, 10, y 20 y para las aproximaciones de punto final izquierdo y derecho, así como las reglas del trapecio y del punto medio.

Aproximaciones a $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.745635	0.645635	0.695635	0.691908
10	0.718771	0.668771	0.693771	0.692835
20	0.705803	0.680803	0.693303	0.693069

Errores correspondientes

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	−0.052488	0.047512	−0.002488	0.001239
10	−0.025624	0.024376	−0.000624	0.000312
20	−0.012656	0.012344	−0.000156	0.000078

Se pueden hacer varias observaciones a partir de estas tablas:

1. En todos los métodos se obtienen aproximaciones más exactas cuando se incrementa el valor de n. (Pero valores muy grandes de n producen tantas operaciones aritméticas, que se tiene que estar consciente del error de redondeo acumulado.)
2. Los errores en las aproximaciones de punto final izquierdo y derecho son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de aproximadamente 2 cuando se duplica el valor de n.
3. Las reglas del trapecio y del punto medio son mucho más exactas que las aproximaciones de punto final.
4. Los errores en las reglas del trapecio y del punto medio son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de alrededor de 4 cuando se duplica el valor de n.
5. El tamaño del error en la regla del punto medio es casi la mitad del tamaño del error en la regla del trapecio.

Resulta que estas observaciones son verdaderas en la mayor parte de los casos.

En la figura 5 se muestra por qué normalmente se puede esperar que la regla del punto medio sea más exacta que la regla del trapecio. El área de un rectángulo representativo en la regla del punto medio, es la misma que el trapecio $ABCD$ cuyo lado superior es tangente a la gráfica de P. El área de este trapecio es más próxima al área bajo la gráfica de lo que es el área del trapecio $AQRD$ empleado en la regla del trapecio. [El error del punto medio (sombreado rojo) es más pequeño que el error trapezoidal (sombreado azul).]

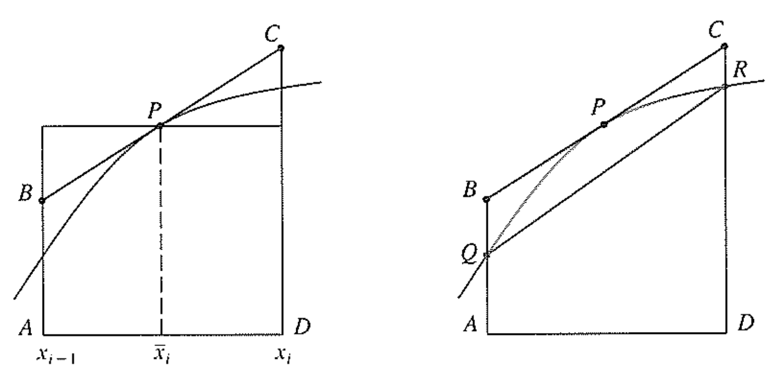


FIGURA 5

Estas observaciones se corroboran en las siguientes estimaciones de error, que se demuestran en libros de análisis numérico. Note que la observación 4 corresponde a n^2 en cada denominador porque $(2n)^2 = 4n^2$. El hecho de que las estimaciones dependan del tamaño de la segunda derivada no es sorprendente si se considera la figura 5, porque $f''(x)$ mide cuánto se curva la gráfica. [Recuerde que $f''(x)$ mide cuán rápido cambia la pendiente de $y = f(x)$.]

3 COTAS DE ERROR Considere que $|f''(x)| \leqslant K$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Si E_T y E_M son los errores en las reglas del trapecio y del punto medio, por lo tanto

$$|E_T| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{y} \qquad |E_M| \leqslant \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Se aplicará esta estimación del error a la aproximación de la regla del trapecio en el ejemplo 1. Si $f(x) = 1/x$, después $f'(x) = -1/x^2$ y $f''(x) = 2/x^3$. Puesto que $1 \leqslant x \leqslant 2$, se tiene $1/x \leqslant 1$, así que

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Por lo tanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$, y $n = 5$ en la estimación del error (3), se ve que

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0.006667$$

■ K puede ser cualquier número más grande que todos los valores de $|f''(x)|$, pero valores más pequeños de K dan mejores cotas de error.

Al comparar esta estimación del error de 0.006667 con el error real de casi 0.002488, se ve que puede suceder que el error real sea sustancialmente menor que la cota superior para el error dado por (3).

V EJEMPLO 2 ¿Cuán grande se debe tomar n a fin de garantizar que las aproximaciones de las reglas del trapecio y del punto medio para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ sean exactas hasta dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN Se vio en el cálculo anterior que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, de modo que se puede tomar $K = 2$, $a = 1$, y $b = 2$ en (3). La exactitud hasta dentro de 0.0001 significa que el tamaño del error debe ser menor que 0.0001. Por lo tanto, se elige n de modo que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.0001$$

Resolviendo la desigualdad para n, se obtiene

$$n^2 > \frac{2}{12(0.0001)}$$

o bien

$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0006}} \approx 40.8$$

Así, $n = 41$ asegurará la exactitud deseada.

■ Es bastante posible que un valor menor para n sea suficiente, pero 41 es el valor más pequeño para el cual la fórmula de la cota del error puede *garantizar* exactitud hasta dentro de 0.0001.

Para la misma exactitud con la regla del punto medio se elige n de modo que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.0001$$

que da $$n > \frac{1}{\sqrt{0.0012}} \approx 29$$ □

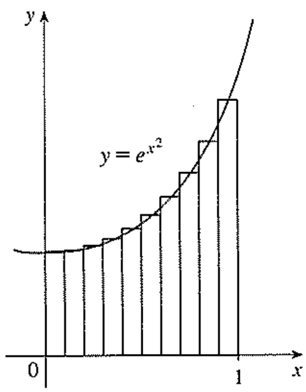


FIGURA 6

EJEMPLO 3

(a) Use la regla del punto medio con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$.
(b) Dé una cota superior para el error relacionado con esta aproximación.

SOLUCIÓN

(a) Puesto que $a = 0$, $b = 1$, y $n = 10$, la regla del punto medio da

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2} dx &\approx \Delta x\,[f(0.05) + f(0.15) + \cdots + f(0.85) + f(0.95)] \\ &= 0.1[e^{0.0025} + e^{0.0225} + e^{0.0625} + e^{0.1225} + e^{0.2025} + e^{0.3025} \\ &\quad + e^{0.4225} + e^{0.5625} + e^{0.7225} + e^{0.9025}] \\ &\approx 1.460393\end{aligned}$$

En la figura 6 se muestra esta aproximación.

(b) Puesto que $f(x) = e^{x^2}$, se tiene $f'(x) = 2xe^{x^2}$ y $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. También, puesto que $0 \leq x \leq 1$, se tiene $x^2 \leq 1$ y, por lo tanto,

$$0 \leq f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leq 6e$$

Las estimaciones del error son cotas para el error. Producen escenarios teóricos del peor de los casos. El error real en este caso resulta ser aproximadamente 0.0023.

Si se toma $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$, y $n = 10$ en la estimación del error (3), se ve que una cota superior para el error es

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0.007$$ □

REGLA DE SIMPSON

Otra regla para integración aproximada resulta de usar parábolas en lugar de segmentos de recta para aproximar una curva. Como antes, se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \Delta x = (b - a)/n$, pero esta vez se supone que n es un número *par*. Por lo tanto en cada par consecutivo de intervalos la curva $y = f(x) \geq 0$ se aproxima mediante una parábola como se muestra en la figura 7. Si $y_i = f(x_i)$, después $P_i(x_i, y_i)$ es el punto sobre la curva que yace arriba de x_i. Una parábola representativa pasa por tres puntos consecutivos P_i, P_{i+1}, y P_{i+2}.

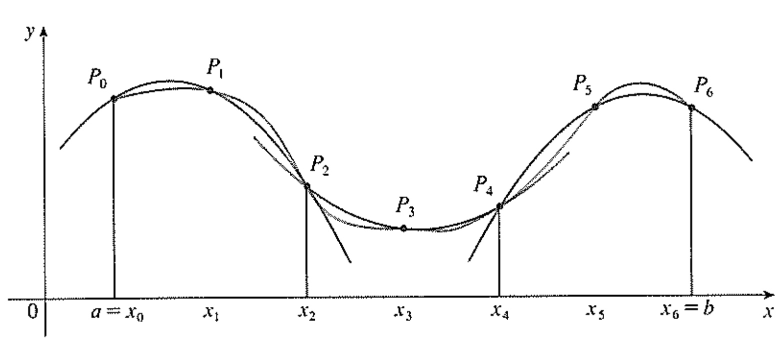


FIGURA 7

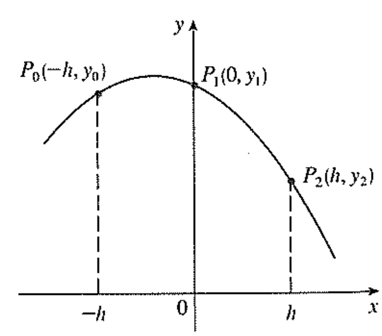


FIGURA 8

Para simplificar los cálculos, se considera primero el caso donde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x_2 = h$. (Véase la figura 8.) Se sabe que la ecuación de la parábola a través de P_0, P_1 y P_2 es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ y, por lo tanto, el área bajo la parábola de $x = -h$ a $x = h$ es

▨ Aquí se ha empleado el teorema 5.5.7. Observe que $Ax^2 + C$ es par y Bx es impar.

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx &= 2\int_0^h (Ax^2 + C)\,dx \\ &= 2\left[A\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h \\ &= 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)\end{aligned}$$

Pero, puesto que la parábola pasa por $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$, y $P_2(h, y_2)$, se tiene

$$\begin{aligned} y_0 &= A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C \end{aligned}$$

y, por lo tanto, $$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Así, se puede reescribir el área de la parábola como

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Ahora, si esta parábola se desplaza horizontalmente, no se cambia el área bajo ésta. Esto significa que el área bajo la parábola que pasa por P_0, P_1 y P_2 de $x = x_0$ a $x = x_2$ en la figura 7 es aún

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

De manera similar, el área bajo la parábola por P_2, P_3 y P_4 de $x = x_2$ a $x = x_4$ es

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Si se calculan de este modo las áreas debajo de todas las parábolas y se suman los resultados, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &\quad + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\end{aligned}$$

Aunque se ha derivado esta aproximación para el caso en el que $f(x) \geqslant 0$, es una aproximación razonable para cualquier función continua f y se llama regla de Simpson en honor al matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761). Note el patrón de coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 4, 1.

SIMPSON

Thomas Simpson fue un tejedor autodidacta en matemáticas que llegó a ser uno de los mejores matemáticos ingleses del siglo XVIII. Lo que se llama regla de Simpson ya la conocían Cavalieri y Gregory en el siglo XVII, pero Simpson la popularizó en su libro de cálculo de mayor venta titulado *A New Treatise of Fluxions.*

REGLA DE SIMPSON

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde n es par y $\Delta x = (b - a)/n$.

EJEMPLO 4 Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN Si se escribe $f(x) = 1/x$, $n = 10$, y $\Delta x = 0.1$ en la regla de Simpson, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx &\approx S_{10}\\ &= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)]\\ &= \frac{0.1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right)\\ &\approx 0.693150\end{aligned}$$

□

Observe que, en el ejemplo 4, la regla de Simpson da una aproximación *mucho* mejor ($S_{10} \approx 0.693150$) al valor verdadero de la integral ($\ln 2 \approx 0.693147\ldots$) que la regla del trapecio ($T_{10} \approx 0.693771$) o la regla del punto medio ($M_{10} \approx 0.692835$). Resulta (véase ejercicio 48) que las aproximaciones en la regla de Simpson son promedios ponderados de los de las reglas del trapecio y del punto medio:

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Recuerde que E_T y E_M tienen por lo general signos opuestos y $|E_M|$ es casi la mitad del tamaño de $|E_T|$.)

En muchas aplicaciones de cálculo se necesita evaluar una integral aun cuando no se conoce ninguna fórmula explícita para y como función de x. Una función se puede dar en forma gráfica o como una tabla de valores de datos reunidos. Si hay evidencia de que los valores no cambian con rapidez, en tal caso todavía se puede usar la regla del trapecio o la regla de Simpson para hallar un valor aproximado de $\int_a^b y\,dx$, la integral de y con respecto a x.

V EJEMPLO 5 En la figura 9 se muestra el tránsito de datos en el vínculo de Estados Unidos a SWITCH, la red suiza académica y de investigación, el 10 de febrero de 1998. $D(t)$ es el caudal de datos, medido en megabits por segundo (Mb/s). Use la Regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos en el vínculo hasta mediodía en ese día.

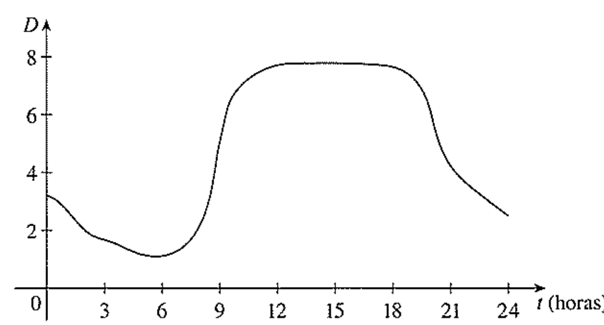


FIGURA 9

SOLUCIÓN Ya que se desea que las unidades sean congruentes y $D(t)$ se mide en megabits por segundo, se convierten las unidades para t de horas a segundos. Si $A(t)$ es la cantidad de datos (en megabits) transmitida en el instante t, donde t se mide en segundos, después $A'(t) = D(t)$. Así, por el teorema del cambio neto (véase la sección 5.4), la cantidad total de datos transmitidos a mediodía $t = 12 \times 60^2 = 43\,200$) es

$$A(43\,200) = \int_0^{43\,200} D(t)\,dt$$

Se estiman los valores de $D(t)$ a intervalos de cada hora a partir de la gráfica y se compilan en la tabla.

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$	t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	0	3.2	7	25 200	1.3
1	3 600	2.7	8	28 800	2.8
2	7 200	1.9	9	32 400	5.7
3	10 800	1.7	10	36 000	7.1
4	14 400	1.3	11	39 600	7.7
5	18 000	1.0	12	43 200	7.9
6	21 600	1.1			

En tal caso se usa la regla de Simpson con $n = 12$ y $\Delta t = 3\,600$ para estimar la integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{43\,200} A(t)\,dt &\approx \frac{\Delta t}{3}[D(0) + 4D(3600) + 2D(7200) + \cdots + 4D(39\,600) + D(43\,200)] \\ &\approx \frac{3600}{3}[3.2 + 4(2.7) + 2(1.9) + 4(1.7) + 2(1.3) + 4(1.0) \\ &\qquad + 2(1.1) + 4(1.3) + 2(2.8) + 4(5.7) + 2(7.1) + 4(7.7) + 7.9] \\ &= 143\,880\end{aligned}$$

Así, la cantidad total de datos transmitida hasta mediodía es de alrededor de 144 000 megabits, o 144 gigabits. □

n	M_n	S_n
4	0.69121989	0.69315453
8	0.69266055	0.69314765
16	0.69302521	0.69314721

n	E_M	E_S
4	0.00192729	−0.00000735
8	0.00048663	−0.00000047
16	0.00012197	−0.00000003

La tabla en el margen como se compara la regla de Simpson con la regla del punto medio para la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$ cuyo valor verdadero es casi 0.69314718. La segunda tabla muestra que el error E_s en la regla de Simpson disminuye por un factor de casi 16 donde n se duplica. (En los ejercicios 27 y 28 se pide demostrar esto por dos integrales adicionales). Eso es compatible con la presencia de n^4 en el denominador de la siguiente estimación de error para la regla de Simpson. Es similar a las estimaciones dadas en (3) para las reglas del trapecio y del punto medio, pero emplea la cuarta derivada de f.

4 COTA DE ERROR PARA LA REGLA DE SIMPSON Suponga que $|f^{(4)}(x)| \leq K$ para $a \leq x \leq b$. Si E_S es el error relacionado con la regla de Simpson, en tal caso

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

EJEMPLO 6 ¿Qué tan grande se toma n a fin de garantizar que la aproximación de la regla de Simpson para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ es exacta hasta dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN Si $f(x) = 1/x$, entonces $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Puesto que $x \geqslant 1$, se tiene $1/x \leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

■ Muchas calculadoras y sistemas algebraicos computacionales tienen un algoritmo integrado que calcula una aproximación de una integral definida. Algunas de estas máquinas usan la regla de Simpson; otras usan técnicas más complejas como la integración numérica *adaptable*. Esto significa que si una función fluctúa mucho más en cierta parte del intervalo que en cualquier otra parte, después esa parte se divide en más subintervalos. Esta estrategia reduce el número de cálculos requeridos para lograr la exactitud prescrita.

Así, se puede tomar $K = 24$ en (4). Entonces, para un error menor que 0.0001 se debe elegir n de modo que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0.0001$$

Esto da
$$n^4 > \frac{24}{180(0.0001)}$$

o bien,
$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0.00075}} \approx 6.04$$

Por lo tanto, $n = 8$ (n debe ser par) da la exactitud deseada. (Compare esto con el ejemplo 2, donde se obtuvo $n = 41$ para la regla del trapecio y $n = 29$ para la regla del punto medio.) □

EJEMPLO 7
(a) Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.
(b) Estime el error relacionado con esta aproximación.

SOLUCIÓN
(a) Si $n = 10$, entonces $\Delta x = 0.1$ y la regla de Simpson da

■ En la figura 10 se muestra el cálculo del ejemplo 7. Observe que los arcos parabólicos están tan próximos a la gráfica de $y = e^{x^2}$ que son prácticamente indistinguibles de ésta.

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + \cdots + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)]\\ &= \frac{0.1}{3}[e^0 + 4e^{0.01} + 2e^{0.04} + 4e^{0.09} + 2e^{0.16} + 4e^{0.25} + 2e^{0.36}\\ &\qquad + 4e^{0.49} + 2e^{0.64} + 4e^{0.81} + e^1]\\ &\approx 1.462681\end{aligned}$$

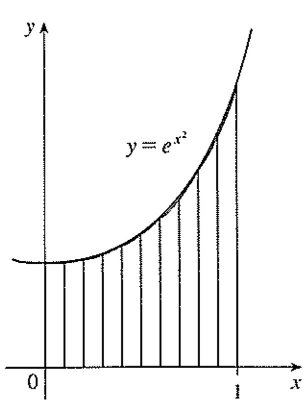


FIGURA 10

(b) La cuarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ es

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

y también, puesto que $0 \leqslant x \leqslant 1$, se tiene

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Por lo tanto, al escribir $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$ en (4), se ve que el error es a lo sumo

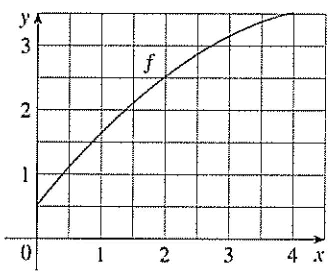
$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0.000115$$

(Compare esto con el ejemplo 3.) Así, correcta hasta tres decimales, se tiene

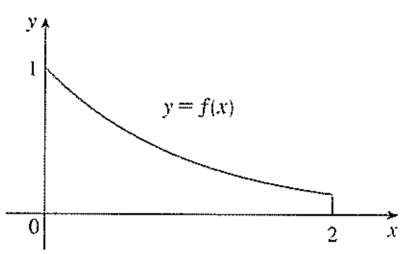
$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx 1.463$$ □

7.7 EJERCICIOS

1. Sea $I = \int_0^4 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se ilustra a continuación.
   (a) Emplee la gráfica para determinar L_2, R_2 y M_2.
   (b) ¿Éstas son sobreestimaciones o subestimaciones de I?
   (c) Use la gráfica para encontrar T_2. ¿Cómo se compara con I?
   (d) Para cualquier valor de n, liste los números L_n, R_n, M_n, T_n e I en orden creciente



2. Se usaron las aproximaciones, izquierda, derecha, de la regla del trapecio y la regla del punto medio para estimar $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra. Las estimaciones fueron, 0.7811, 0.8675, 0.8632 y 0.9540, y el mismo número de subintervalos se emplearon en cada caso.
   (a) ¿Cuál regla produce cuál estimación?
   (b) ¿Entre cuáles dos aproximaciones está el valor verdadero de $\int_0^2 f(x)\,dx$?



3. Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ con (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla del Punto Medio, cada una con $n = 4$. A partir de una gráfica del integrando, decida si sus respuestas son sobreestimaciones o subestimaciones. ¿Qué puede concluir acerca del valor verdadero de la integral?

4. Trace la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2/2)$ en el rectángulo de visión $[0, 1]$ por $[0, 0.5]$ y sea $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
   (a) Utilice la gráfica para decidir si L_2, R_2, M_2 y T_2 son sobreestimaciones o subestimaciones de I.
   (b) Para cualquier valor de n, liste los números L_n, R_n, M_n, T_n e I en orden creciente.
   (c) Calcule L_5, R_5, M_5 y T_5. De la gráfica, ¿cuál considera que da la mejor estimación de I?

5–6 Use (a) la regla del punto medio y (b) la regla de Simpson para aproximar la integral dada con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.) Compare sus reultados con el valor real para determinar el error en cada aproximación.

5. $\int_0^\pi x^2 \operatorname{sen} x\,dx, \quad n = 8$

6. $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx, \quad n = 6$

7–18 Use (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la Regla de Simpson para aproximar la integral con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.)

7. $\int_0^2 \sqrt[4]{1 + x^2}\,dx, \quad n = 8$

8. $\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx, \quad n = 4$

9. $\int_1^2 \frac{\ln x}{1 + x}\,dx, \quad n = 10$

10. $\int_0^3 \frac{dt}{1 + t^2 + t^4}, \quad n = 6$

11. $\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(e^{t/2})\,dt, \quad n = 8$

12. $\int_0^4 \sqrt{1 + \sqrt{x}}\,dx, \quad n = 8$

13. $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} t\,dt, \quad n = 8$

14. $\int_0^1 \sqrt{z}\,e^{-z}\,dz, \quad n = 10$

15. $\int_1^5 \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad n = 8$

16. $\int_4^6 \ln(x^3 + 2)\,dx, \quad n = 10$

17. $\int_0^3 \frac{1}{1 + y^5}\,dy, \quad n = 6$

18. $\int_0^4 \cos\sqrt{x}\,dx, \quad n = 10$

19. (a) Halle las aproximaciones T_8 y M_8 para la integral $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$.
    (b) Estime los errores relacionados con las aproximaciones del inciso (a).
    (c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n de modo que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) sean exactas hasta dentro de 0.0001?

20. (a) Halle las aproximaciones T_{10} y M_{10} para $\int_1^2 e^{1/x}\,dx$.
    (b) Estimar los errores en las aproximaciones del inciso (a).
    (c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n para que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) sean exactas hasta dentro de 0.0001?

21. (a) Encuentre las aproximaciones T_{10} M_{10} y S_{10} para $\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx$ y los errores correspondientes E_T E_M y E_S.
    (b) Compare los errores reales del inciso (a) con las estimaciones del error dadas por (3) y (4).
    (c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n para que las aproximaciones T_n, M_n, y S_n a la integral del inciso (a) sean exactas hasta dentro de 0.00001?

22. ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que la aproximación de la regla de Simpson a $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ sea exacta hasta dentro de 0.00001?

23. El problema con las estimaciones del error es que suele ser muy difícil calcular cuatro derivadas y obtener una buena cota superior K para $|f^{(4)}(x)|$ a mano. Pero los sistemas algebraicos computa-

cionales no tienen problema para calcular $f^{(4)}$ y graficarla, así que se puede hallar con facilidad un valor de K a partir de una gráfica de máquina. Este ejercicio trata con aproximaciones a la integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, donde $f(x) = e^{\cos x}$.

(a) Use una gráfica a fin de obtener una buena cota superior para $|f''(x)|$.
(b) Emplee M_{10} para aproximar I.
(c) Utilice el inciso (a) para estimar el error en el inciso (b).
(d) Use la capacidad de integración numérica integrada de su CAS para aproximar I.
(e) ¿Cómo se compara el error real con la estimación de error del inciso (c)?
(f) Use una gráfica para obtener una buena cota superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(g) Emplee S_{10} para aproximar I.
(h) Utilice el inciso (f) para estimar el error del inciso (g).
(i) ¿Cómo se compara el error real con la estimación del error del inciso (h)?
(j) ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el tamaño del error al usar S_n sea menor que 0.0001?

CAS **24.** Repita el ejercicio 23 para la integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^3}\,dx$.

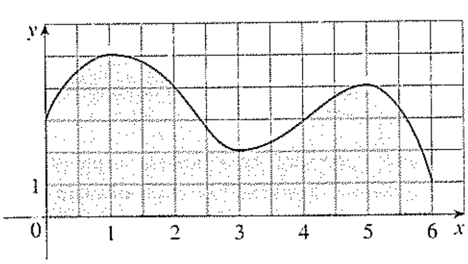
25–26 Encuentre las aproximaciones L_n, R_n, T_n y M_n para $n = 5$, 10, y 20. Después calcule los errores correspondientes E_L, E_R, E_T, y E_M. (Redondee sus respuestas hasta seis decimales. Es posible que desee usar el comando de suma en un sistema algebraico computacional.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué sucede con los errores cuando se duplica n?

25. $\int_0^1 xe^x\,dx$ **26.** $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

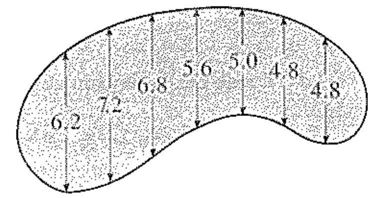
27–28 Determine las aproximaciones T_n, M_n, y S_n para $n = 6$ y 12. A continuación calcule los errores correspondientes E_T, E_M, y E_S. (Redondee sus respuestas a seis decimales. Quizá desee usar el comando de suma de un sistema algebraico computacional.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué sucede con los errores cuando se duplica n?

27. $\int_0^2 x^4\,dx$ **28.** $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

29. Estime el área bajo la gráfica en la figura usando (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la regla de Simpson, cada una con $n = 4$.



30. Las amplitudes (en metros) de una alberca en forma de riñón se midieron a intervalos de 2 metros como se indica en la figura. Use la regla de Simpson para estimar el área de la alberca.



31. (a) Emplee la regla del punto medio y los datos de la tabla para estimar el valor de la integral $\int_0^{3.2} f(x)\,dx$.

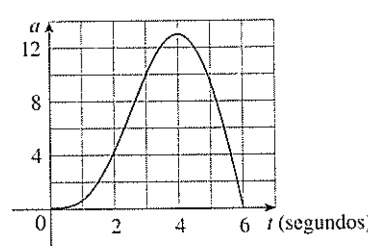
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	6.8	2.0	7.6
0.4	6.5	2.4	8.4
0.8	6.3	2.8	8.8
1.2	6.4	3.2	9.0
1.6	6.9		

(b) Si se sabe que $-4 \leqslant f''(x) \leqslant 1$ para toda x, estime el error relacionado con la aproximación del inciso (a).

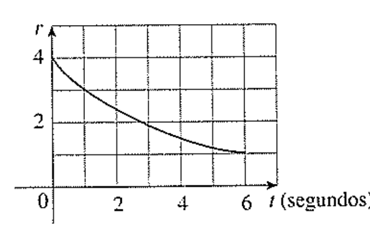
32. Se empleó una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor durante los primeros 5 segundos de una competencia (véase la tabla). Emplee la regla de Simpson para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

33. Se muestra la gráfica de la aceleración $a(t)$ de un automóvil medida en pies/s^2. Emplee la regla de Simpson para estimar el incremento de velocidad del automóvil durante el intervalo de tiempo de 6 segundos.



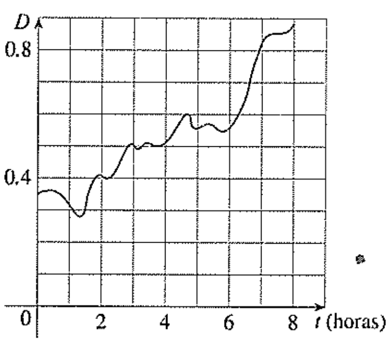
34. De un depósito se fuga agua a una rapidez de $r(t)$ litros por hora, donde la gráfica de r es como se muestra. Use la regla de Simpson para estimar la cantidad total de agua que se fuga durante las primeras seis horas.



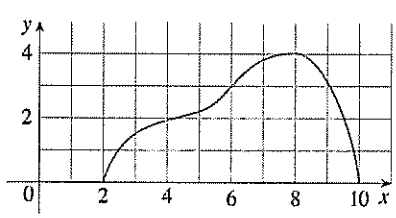
35. La tabla (suministrada por San Diego Gas and Electric) da el consumo de energía en megawatts en el condado de San Diego de la medianoche a las 6:00 A.M. el 8 de diciembre de 1999. Use la regla de Simpson para estimar la energía empleada durante ese periodo. (Use el hecho de que la potencia es la derivada de la energía.)

t	P	t	P
0:00	1814	3:30	1611
0:30	1735	4:00	1621
1:00	1686	4:30	1666
1:30	1646	5:00	1745
2:00	1637	5:30	1886
2:30	1609	6:00	2052
3:00	1604		

36. En la gráfica se muestra el tránsito de datos en una línea de datos T1 del proveedor de servicio de Internet de la medianoche a las 8:00 A.M. D es el caudal de datos, medido en megabits por segundo. Use la regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese periodo.



37. Si la región mostrada en la figura se hace girar respecto al eje y para formar un sólido, use la regla de Simpson con $n = 8$ para estimar el volumen del sólido.



38. En la tabla se muestran los valores de una función de fuerza $f(x)$ donde x se mide en metros y $f(x)$ en newtons. Use la regla de Simpson para estimar el trabajo hecho por la fuerza al mover un objeto una distancia de 18 m.

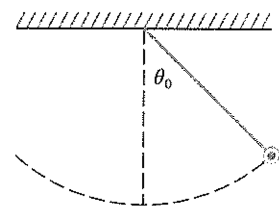
x	0	3	6	9	12	15	18
$f(x)$	9.8	9.1	8.5	8.0	7.7	7.5	7.4

39. La región acotada por las curvas $y = e^{-1/x}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 5$ se hace girar respecto al eje x. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar el volumen del sólido resultante.

CAS 40. En la figura se muestra un péndulo con longitud L que forma un ángulo máximo θ_0 con la vertical. Usando la segunda Ley de Newton, se puede mostrar que el periodo T (el tiempo para una oscilación completa) está dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2 x}}$$

donde $k = \text{sen}(\frac{1}{2}\theta_0)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. Si $L = 1$ m y $\theta_0 = 42°$, use la regla de Simpson con $n = 10$ para determinar el periodo.



41. La intensidad de la luz con longitud de onda λ que viaja por una rejilla de difracción con N ranuras a un ángulo θ está dada por $I(\theta) = N^2\,\text{sen}^2 k/k^2$, donde $k = (\pi N d\,\text{sen}\,\theta)/\lambda$ y d es la distancia entre ranuras adyacentes. Un láser de helio-neón con longitud de onda $\lambda = 632.8 \times 10^{-9}$ m emite una banda estrecha de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, por una rejilla con 10 000 ranuras espaciadas 10^{-4} m. Use la regla del punto medio con $n = 10$ para estimar la intensidad de luz total $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\,d\theta$ que emerge de la rejilla.

42. Use la regla del trapecio con $n = 10$ para aproximar $\int_0^{20}\cos(\pi x)\,dx$. Compare su resultado con el valor real. ¿Puede explicar la discrepancia?

43. Bosqueje la gráfica de una función continua en $[0, 2]$ para la cual la regla del trapecio con $n = 2$ es más exacta que la regla del punto medio.

44. Bosqueje la gráfica de una función continua en $[0, 2]$ para la cual la aproximación del punto final derecho con $n = 2$ es más exacta que la regla de Simpson.

45. Si f es una función positiva y $f''(x) < 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, muestre que

$$T_n < \int_a^b f(x)\,dx < M_n$$

46. Muestre que si f es un polinomio de grado 3 o menor, en tal caso la regla de Simpson da el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$.

47. Muestre que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

48. Muestre que $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n = S_{2n}$.

7.8 INTEGRALES IMPROPIAS

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se trató con una función f definida en un intervalo finito $[a, b]$ y se supuso que f no tiene una discontinuidad infinita (véase la sección 5.2). En esta sección se amplía el concepto de una integral definida para el caso donde el intervalo es infinito y también el caso donde f tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$. En cualquier caso, la integral se llama *impropia*. Una de las aplicaciones más importantes de esta idea, distribuciones de probabilidad, se estudia en la sección 8.5.

TIPO I: INTERVALOS INFINITOS

Considere la región infinita S que yace bajo la curva $y = 1/x^2$, arriba del eje x, y a la derecha de la recta $x = 1$. Se podría pensar, puesto que S es de grado infinito, que su área debe ser infinita, pero considérese más de cerca. El área de la parte de S que se localiza a la izquierda de la línea $x = t$ (sombreada en la figura 1) es

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Note que $A(t) < 1$ sin importar cuán grande se elija t.

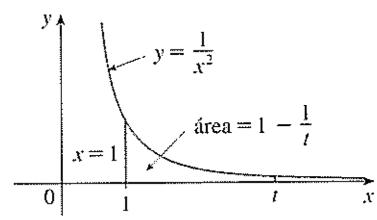


FIGURA 1

Se observa también que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región sombreada se aproxima a 1 cuando $t \to \infty$ (véase la figura 2), por lo tanto se puede decir que el área de la región infinita S es igual a 1 y se escribe.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

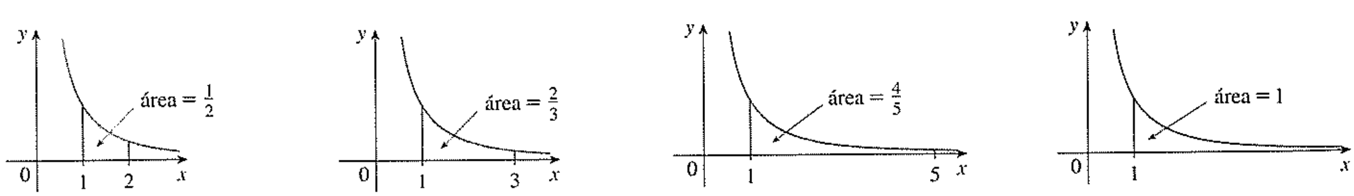


FIGURA 2

Con este ejemplo como guía, se define la integral de f (no necesariamente una función positiva) sobre un intervalo infinito como el límite de integrales en intervalos finitos.

1 DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL IMPROPIA DE TIPO 1

(a) Si la $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geqslant a$, por lo tanto

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

siempre que exista el límite (como un número finito).

(b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leqslant b$, después

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que exista el límite (como un número finito).

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se llaman **convergentes** si el límite correspondiente existe y **divergentes** si el límite no existe.

(c) Si tanto $\int_a^\infty f(x)\,dx$ como $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes, entonces se define

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

En el inciso (c) se puede usar cualquier número real a (véase el ejercicio 74).

Cualquiera de las integrales impropias de la definición 1 se puede interpretar como un área siempre que f sea una función positiva. Por ejemplo, en el caso (a) si $f(x) \geqslant 0$ y la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces se define el área de la región $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ en la figura 3 como

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Esto es apropiado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es el límite cuando $t \to \infty$ del área bajo la gráfica de f de a a t.

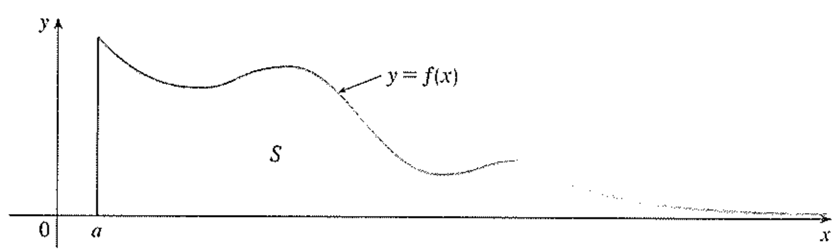


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Determine si la integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN De acuerdo con el inciso (a) de la definición 1, se tiene

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t \to \infty} \ln t = \infty$$

El límite no existe como un número finito y, por lo tanto, la integral impropia $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente.

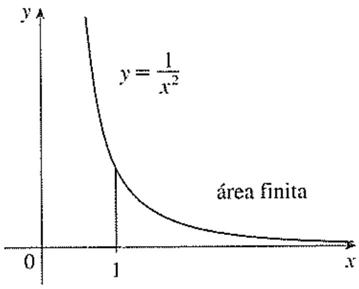


FIGURA 4

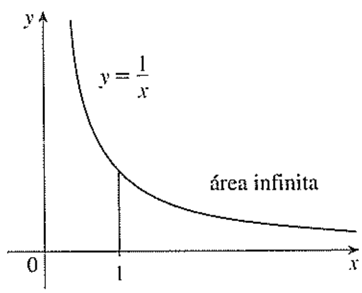


FIGURA 5

Compare el resultado del ejemplo 1 con el ejemplo dado al comienzo de esta sección:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

Geométricamente, esto dice que aunque las curvas $y = 1/x^2$ y $y = 1/x$ son muy similares para $x > 0$, la región bajo $y = 1/x^2$ a la derecha de $x = 1$ (la región sombreada en la figura 4) tiene área finita mientras que la región bajo $y = 1/x$ (en la figura 5) tiene área infinita. Note que tanto $1/x^2$ como $1/x$ tienden a 0 cuando $x \to \infty$ pero $1/x^2$ se aproxima a 0 más rápido que $1/x$. Los valores de $1/x$ no se reducen con la rapidez suficiente para que su integral tenga un valor finito.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN Usando el inciso (b) de la definición 1, se tiene

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 xe^x\,dx$$

Se integra por partes con $u = x$, $dv = e^x\,dx$ de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\,dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

Se sabe que $e^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$, y por la regla de l'Hospital se tiene

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} (-e^t) = 0$$

TEC En Module 7.8 puede investigar visual y numericamente si algunas integrales impropias son convergentes o divergentes.

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t)$$

$$= -0 - 1 + 0 = -1$$

□

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Es conveniente elegir $a = 0$ en la definición 1(c):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Ahora se deben resolver por separado las integrales del lado derecho:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\tan^{-1}t - \tan^{-1}0) = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}x\Big]_t^0$$
$$= \lim_{t\to-\infty} (\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t)$$
$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

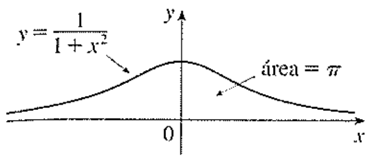


FIGURA 6

Puesto que ambas integrales son convergentes, la integral dada es convergente y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Puesto que $1/(1+x^2) > 0$, la integral impropia dada se puede interpretar como el área de la región infinita que yace bajo la curva $y = 1/(1+x^2)$ y arriba del eje x (véase la figura 6). □

EJEMPLO 4 ¿Para qué valores de p la integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

es convergente?

SOLUCIÓN Se sabe del ejemplo 1 que si $p = 1$, después la integral es divergente, por consiguiente se supondrá que $p \neq 1$. Por lo tanto

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{1}^{t} x^{-p}\,dx$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

Si $p > 1$, luego $p - 1 > 0$, de modo que $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ y $1/t^{p-1} \to 0$ entonces,

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{si } p > 1$$

y, por lo tanto, la integral converge. Pero si $p < 1$, en tal caso $p - 1 < 0$ y, de este modo

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{cuando } t \to \infty$$

y la integral diverge. □

Se resume el resultado del ejemplo 4 para referencia futura:

2	$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.

TIPO 2: INTEGRANDOS DISCONTINUOS

Suponga que f es una función continua positiva definida en un intervalo finito $[a, b)$ pero tiene una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y arriba del eje x entre a y b. (Para integrales del tipo I, las regiones se amplían de forma indefinida en

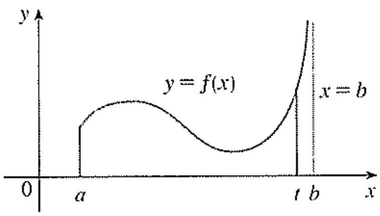


FIGURA 7

una dirección horizontal. Aquí la región es infinita en una dirección vertical.) El área de la parte S entre a y t (la región sombreada en la figura 7) es

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

Si sucede que $A(t)$ se aproxima a un número definido A cuando $t \to b^-$, entonces se dice que el área de la región S es A y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Se emplea esta ecuación para definir una integral impropia de tipo 2 aun cuando f no es una función positiva, sin importar qué tipo de discontinuidad tenga f en b.

$\boxed{3}$ **DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL IMPROPIA DE TIPO 2**

(a) Si f es continua en $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

(b) Si f es continua en $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama **convergente** si existe el límite correspondiente y **divergente** si no existe el límite.

(c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, como $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, después se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Los incisos (b) y (c) de la definición 3 se ilustran en las figuras 8 y 9 para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y f tiene asíntotas verticales en a y c, respectivamente.

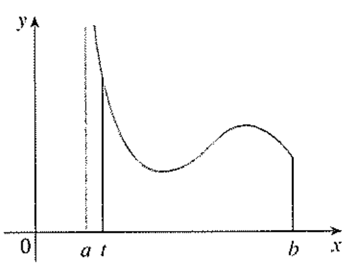


FIGURA 8

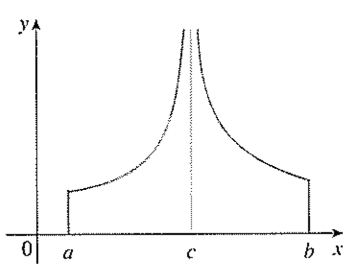


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Determine $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Se nota primero que la integral dada es impropia porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tiene la asíntota vertical $x = 2$. Puesto que la discontinuidad infinita aparece en el punto final izquierdo de $[2, 5]$, se usa el inciso (b) de la definición 3:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t \to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t \to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t \to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

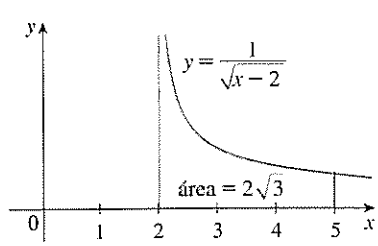


FIGURA 10

Así, la integral impropia dada es convergente y, puesto que el integrando es positivo, se puede interpretar el valor de la integral como el área de la región sombreada en la figura 10. □

EJEMPLO 6 Determine si $\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx$ converge o diverge.

SOLUCIÓN Note que la integral dada es impropia porque $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Si usa el inciso (a) de la definición 3 y la fórmula 14 de la tabla de integrales, se tiene

$$\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\, dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to(\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1] = \infty$$

porque $\sec t \to \infty$ y $\tan t \to \infty$ cuando $t \to (\pi/2)^-$. Así, la integral impropia dada es divergente.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^3 \dfrac{dx}{x-1}$ si es posible.

SOLUCIÓN Observe que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical del integrando. Puesto que aparece a la mitad del intervalo $[0, 3]$, se debe usar el inciso (c) de la definición 3 con $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

donde

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{t\to1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

debido a $1 - t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Así, $\int_0^1 dx/(x-1)$ es divergente. Esto significa que $\int_0^3 dx/(x-1)$ es divergente. [No es necesario evaluar $\int_1^3 dx/(x-1)$.]

ADVERTENCIA Si no se hubiera notado la asíntota $x = 1$ en el ejemplo 7 y se hubiera confundido la integral con una integral ordinaria, entonces se podría haber hecho el siguiente cálculo erróneo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esto es incorrecto porque la integral es impropia y se debe calcular en términos de límites.

De ahora en adelante, siempre que se encuentre el símbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ se debe decidir, observando la función f en $[a, b]$, si es una integral definida ordinaria o una integral impropia.

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_0^1 \ln x\, dx$.

SOLUCIÓN Se sabe que la función $f(x) = \ln x$ tiene una asíntota vertical en 0 puesto que $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$. Así, la integral dada es impropia y se tiene

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{t\to0^+} \int_t^1 \ln x\, dx$$

Ahora se integra por partes con $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$, y $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x\,dx = x \ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$
$$= 1 \ln 1 - t \ln t - (1 - t)$$
$$= -t \ln t - 1 + t$$

Para hallar el límite del primer término se usa la regla de l'Hospital:

$$\lim_{t \to 0^+} t \ln t = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t \to 0^+} (-t) = 0$$

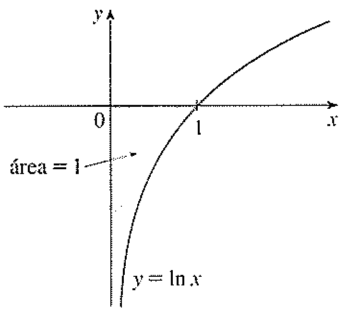


FIGURA 11

Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t \to 0^+} (-t \ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$

En la figura 11 se muestra la interpretación geométrica de este resultado. El área de la región sombreada arriba de $y = \ln x$ y abajo del eje x es 1. □

PRUEBA DE COMPARACIÓN PARA INTEGRALES IMPROPIAS

Algunas veces es imposible hallar el valor exacto de una integral impropia y, sin embargo, es importante saber si es convergente o divergente. En tales casos, es útil el siguiente teorema. Aunque se expresa para integrales de tipo 1, un teorema similar se cumple para integrales de tipo 2.

TEOREMA DE COMPARACIÓN Considere que f y g son funciones continuas con $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ para $x \geqslant a$.

(a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

(b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

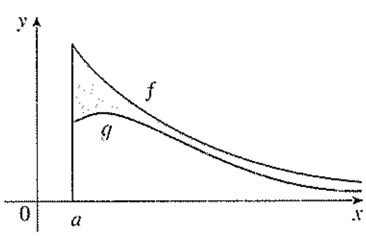


FIGURA 12

Se omite la demostración del teorema de comparación, pero la figura 12 hace que parezca plausible. Si el área bajo la curva superior $y = f(x)$ es finita, en tal caso también lo es el área bajo $y = g(x)$. Y si el área bajo $y = g(x)$ es infinita, por lo tanto también lo es el área bajo $y = f(x)$. [Note que lo contrario no necesariamente es cierto: si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ podría ser convergente, o no, y si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ podría ser divergente, o no.]

EJEMPLO 9 Muestre que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente.

SOLUCIÓN No se puede evaluar la integral de manera directa, porque la antiderivada de e^{-x^2} no es una función elemental (como se explicó en la sección 7.5). Se escribe

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

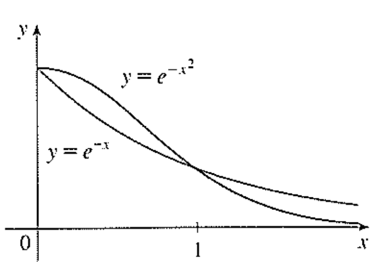


FIGURA 13

y observe que la primera integral del lado derecho es sólo una integral definida ordinaria. En la segunda integral se usa el hecho de que para $x \geqslant 1$ se tiene $x^2 \geqslant x$, así que $-x^2 \leqslant -x$ y, por lo tanto, $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$. (Véase la figura 13). La integral de e^{-x} es fácil de evaluar:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t \to \infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Así, si se toma $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el teorema de comparación, se ve que $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente. Se deduce que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente. □

TABLA 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0.7468241328
2	0.8820813908
3	0.8862073483
4	0.8862269118
5	0.8862269255
6	0.8862269255

En el ejemplo 9 se mostró que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente sin calcular su valor. En el ejercicio 70 se indica cómo mostrar que su valor es aproximadamente 0.8862. En teoría de probabilidad es importante conocer el valor exacto de esta integral impropia, como se verá en la sección 8.5; con los métodos del cálculo de varias variables se puede demostrar que el valor exacto es $\sqrt{\pi}/2$. En la tabla 1 se ilustra la definición de una integral impropia mostrando cómo los valores (generados con computadora) de $\int_0^t e^{-x^2}\,dx$ se aproximan a $\sqrt{\pi}/2$ cuando t se vuelve grande. De hecho, estos valores convergen con bastante rapidez porque $e^{-x^2} \to 0$ es muy rápido cuando $x \to \infty$.

TABLA 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]\,dx$
2	0.8636306042
5	1.8276735512
10	2.5219648704
100	4.8245541204
1 000	7.1271392134
10 000	9.4297243064

EJEMPLO 10 La integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente por el teorema de comparación porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

y $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente por el ejemplo 1 [o por (2) con $p = 1$]. □

En la tabla 2 se ilustra la divergencia de la integral del ejemplo 10. Al parecer los valores no se aproximan a ningún número fijo.

7.8 EJERCICIOS

1. Explique por qué cada una de las siguientes integrales es impropia.

   (a) $\displaystyle\int_1^\infty x^4 e^{-x^4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 5}\,dx$

2. ¿Cuáles de las siguientes integrales son impropias? ¿Por qué?

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x - 1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x - 1}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x - 1)\,dx$

3. Encuentre el área bajo la curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ y evalúela para $t = 10$, 100 y 1 000. Después encuentre el área total bajo esta curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Grafique las funciones $f(x) = 1/x^{1.1}$ y $g(x) = 1/x^{0.9}$ en los rectángulos de visión $[0, 10]$ por $[0, 1]$ y $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
   (b) Encuentre el área bajo las gráficas de f y g de $x = 1$ a $x = t$ y evalúe para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10}, y 10^{20}.
   (c) Encuentre el área total bajo cada curva para $x \geqslant 1$, si existe.

5–40 Determine si cada integral es convergente o divergente. Evalúe las que son convergentes.

5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(3x + 1)^2}\,dx$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x - 5}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2 - w}}\,dw$

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + 2)^2}\,dx$

9. $\displaystyle\int_4^\infty e^{-y/2}\,dy$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\,dt$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (2 - v^4)\,dv$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx$

14. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty \operatorname{sen} \theta\,d\theta$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t\,dt$

17. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\,dx$

18. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + 3z + 2}$

19. $\displaystyle\int_0^\infty s e^{-5s}\,ds$

20. $\displaystyle\int_{-\infty}^6 r e^{r/3}\,dr$

21. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$

22. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9 + x^6}\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 3}\,dx$

25. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{(1 + x^2)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$

28. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3 - x}}\,dx$

29. $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

30. $\int_{6}^{8} \frac{4}{(x-6)^3}\,dx$

31. $\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}\,dx$

32. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $\int_{0}^{33} (x-1)^{-1/5}\,dx$

34. $\int_{0}^{1} \frac{1}{4y-1}\,dy$

35. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-6x+5}$

36. $\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x\,dx$

37. $\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

38. $\int_{0}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx$

39. $\int_{0}^{2} z^2 \ln z\,dz$

40. $\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

41–46 Bosqueje la región y encuentre su área (si el área es finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \leq 1,\ 0 \leq y \leq e^x\}$

42. $S = \{(x, y) \mid x \geq -2,\ 0 \leq y \leq e^{-x/2}\}$

43. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2/(x^2+9)\}$

44. $S = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ 0 \leq y \leq x/(x^2+9)\}$

45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leq x < \pi/2,\ 0 \leq y \leq \sec^2 x\}$

46. $S = \{(x, y) \mid -2 < x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 1/\sqrt{x+2}\}$

47. (a) Si $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, use su calculadora o computadora para construir una tabla de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\,dx$ para $t = 2, 5, 10, 100, 1000$ y $10\,000$. ¿Al parecer $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente?
(b) Use el teorema de comparación con $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.
(c) Ilustre el inciso (b) graficando f y g en la misma pantalla para $1 \leq x \leq 10$. Use su gráfica para explicar de manera intuitiva por qué $\int_1^\infty g(x)\,dx$ es convergente.

48. (a) Si $g(x) = 1/(\sqrt{x}-1)$, use su calculadora o computadora para elaborar una tabla de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\,dx$ para $t = 5, 10, 100, 1000$ y $10\,000$. ¿Al parecer $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es convergente o divergente?
(b) Use el teorema de comparación con $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar que $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es divergente.
(c) Ilustre el inciso (b) graficando f y g en la misma pantalla para $2 \leq x \leq 20$. Use su gráfica para explicar de forma intuitiva por qué $\int_2^\infty g(x)\,dx$ es divergente.

49–54 Use el teorema de comparación para determinar si la integral es convergente o divergente.

49. $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\,dx$

50. $\int_{1}^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$

51. $\int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$

52. $\int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x}\,dx$

53. $\int_{0}^{1} \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\,dx$

54. $\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

55. La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

es impropia por dos razones: el intervalo $[0, \infty)$ es infinito y el integrando tiene una discontinuidad infinita en 0. Evalúela expresándola como una suma de integrales impropias de tipo 2 y tipo 1 como sigue:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$$

56. Evalúe

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

con el mismo método que empleó en el ejercicio 55.

57–59 Determine los valores de p para los cuales la integral converge, y evalúe la integral para esos valores de p.

57. $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^p}\,dx$

58. $\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$

59. $\int_{0}^{1} x^p \ln x\,dx$

60. (a) Evalúe la integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ para $n = 0, 1, 2$ y 3.
(b) Infiera el valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ cuando n es un entero positivo arbitrario.
(c) Demuestre su conjetura por inducción matemática.

61. (a) Muestre que $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx$ es divergente.
(b) Muestre que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} x\,dx = 0$$

Esto muestra que no se puede definir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

62. La *rapidez promedio* de las moléculas en un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\,dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante de los gases, T es la temperatura del gas y v es la rapidez molecular. Muestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Se sabe del ejemplo 1 que la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$ tiene área infinita. Demuestre que girando $\mathcal{R}$ respecto al eje x se obtiene un sólido con volumen finito.

64. Use la información y los datos en los ejercicios 29 y 30 de la sección 6.4 con la finalidad de determinar el trabajo requerido para propulsar un satélite de 1 000 kg fuera del campo gravitacional de la Tierra.

65. Determine la *velocidad de escape* v_0 que se requiere para propulsar un cohete de masa m fuera del campo gravitacional de un planeta con masa M y radio R. Use la ley de la gravitación de Newton (véase el ejercicio 29 en la sección 6.4) y el hecho de que la energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ suministra el trabajo necesario.

66. Los astrónomos usan una técnica llamada *estereografía estelar* para determinar la densidad de estrellas en un cúmulo estelar de la densidad observada (bidimensional) que se puede analizar a partir de una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio R la densidad de estrellas depende sólo de la distancia r desde el centro del cúmulo. Si la densidad estelar percibida está dada por $y(s)$, donde s es la distancia planar observada desde el centro del cúmulo, y $x(r)$ es la densidad real, se puede mostrar que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\, x(r)\, dr$$

Si la densidad real de estrellas en un cúmulo es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encuentre la densidad percibida $y(s)$.

67. Un fabricante quiere producir lámparas que duren cerca de 700 horas pero, por supuesto, algunas se queman más rápido que otras. Sea $F(t)$ la fracción de las lámparas de la compañía que se queman antes de t horas, así que $F(t)$ yace siempre entre 0 y 1.
   (a) Elabore una gráfica aproximada de lo que considera se podría parecer la gráfica de F.
   (b) ¿Cuál es el significado de la derivada $r(t) = F'(t)$?
   (c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^\infty r(t)\, dt$? ¿Por qué?

68. Como se verá en la sección 3.8, una sustancia radiactiva decae de manera exponencial: la masa en el tiempo t es $m(t) = m(0)e^{kt}$, donde $m(0)$ es la masa inicial y k es una constante negativa. El tiempo de *vida media* M de un átomo en la sustancia es

$$M = -k \int_0^\infty te^{kt}\, dt$$

Para el isótopo de carbono radiactivo, ^{14}C, emplee el fechado con radiocarbono, el valor de k is -0.000121. Determine el tiempo de vida media de un átomo de ^{14}C.

69. Determine cúan grande tiene que ser el número a para que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\, dx < 0.001$$

70. Estime el valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$ escribiéndolo como la suma de $\int_0^4 e^{-x^2}\, dx$ y $\int_4^\infty e^{-x^2}\, dx$. Aproxime la primera integral por medio de la regla de Simpson con $n = 8$ y muestre que la segunda integral es más pequeña que $\int_4^\infty e^{-4x}\, dx$, que es menor que 0.0000001.

71. Si $f(t)$ es continua para $t \geq 0$, la *transformada de Laplace de f* es la función de F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\, dt$$

y el dominio de F es el conjunto que consta de los números s para los que la integral converge. Encuentre las transformadas de Laplace de las siguientes funciones.
(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

72. Muestre que si $0 \leq f(t) \leq Me^{at}$ para $t \geq 0$, donde M y a son constantes, por lo tanto la transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

73. Suponga que $0 \leq f(t) \leq Me^{at}$ y $0 \leq f'(t) \leq Ke^{at}$ para $t \geq 0$, donde f' es continua. Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$ y la transformada de Laplace de $f'(t)$ es $G(s)$, muestre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

74. Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ es convergente y a y b son números reales, demuestre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx$$

75. Muestre que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx$.

76. Muestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\, dy$ interpretando las integrales como áreas

77. Determine el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

78. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

79. Considere que f es continua en $[0, \infty]$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. ¿Es posible que $\int_0^\infty f(x)\, dx$ sea convengente?

80. Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, en tal caso la integral siguiente es convergente

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^b}\, dx$$

7 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Enuncie la regla para la integración por partes. En la práctica, ¿cómo la emplea?

2. ¿Cómo evalúa $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ si m es impar? ¿Qué pasa si n es impar? ¿Qué pasa si tanto m como n son pares?

3. Si la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ ocurre en una integral, ¿qué sustitución se podría probar? ¿Qué pasa si ocurre $\sqrt{a^2 + x^2}$? ¿Qué pasa si aparece $\sqrt{x^2 - a^2}$?

4. ¿Cuál es la forma del desarrollo en fracciones parciales de una función racional $P(x)/Q(x)$ si el grado de P es menor que el grado de Q y $Q(x)$ sólo tiene factores lineales distintos? ¿Qué sucede si se repite un factor lineal? ¿Qué pasa si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible (no repetido)? ¿Qué sucede si se repite el factor cuadrático?

5. Enuncie las reglas para aproximar la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ con la regla del punto medio, la regla del trapecio y la regla de Simpson. ¿Qué esperaría que produjera la mejor estimación? ¿Cómo aproxima el error para cada regla?

6. Defina las siguientes integrales impropias.

   (a) $\int_a^\infty f(x)\, dx$ (b) $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ (c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$

7. Defina la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ para cada uno de los siguientes casos.
   (a) f tiene una discontinuidad infinita en a.
   (b) f tiene una discontinuidad infinita en b.
   (c) f tiene una discontinuidad infinita en c, donde $a < c < b$.

8. Enuncie el teorema de comparación para integrales impropias.

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute al enunciado.

1. $\dfrac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ se puede escribir en la forma $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$.

2. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ se puede escribir en la forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-2}$.

3. $\dfrac{x^2+4}{x^2(x-4)}$ se puede escribir en la forma $\dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x-4}$.

4. $\dfrac{x^2-4}{x(x^2+4)}$ se puede escribir en la forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2+4}$.

5. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2-1}\, dx = \tfrac{1}{2} \ln 15$

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\, dx$ es convergente.

7. Si f es continua, por lo tanto $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\, dx$.

8. La regla del punto medio es siempre más exacta que la regla del trapecio.

9. (a) Toda función elemental tiene una derivada elemental.
   (b) Toda función elemental tiene una antiderivada elemental.

10. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\int_1^\infty f(x)\, dx$ es convergente, en seguida $\int_0^\infty f(x)\, dx$ es convergente.

11. Si f es una función continua decreciente en $[1, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, después $\int_1^\infty f(x)\, dx$ es convergente.

12. Si $\int_a^\infty f(x)\, dx$ y $\int_a^\infty g(x)\, dx$ son convergentes, por lo tanto $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\, dx$ es convergente.

13. Si $\int_a^\infty f(x)\, dx$ y $\int_a^\infty g(x)\, dx$ son divergentes, luego $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\, dx$ es divergente.

14. Si $f(x) \leqslant g(x)$ y $\int_0^\infty g(x)\, dx$ diverge, en consecuencia $\int_0^\infty f(x)\, dx$ también diverge.

EJERCICIOS

Nota: En los ejercicios 7.5 se provee práctica adicional en técnicas de integración.

1–40 Evalúe la integral.

1. $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x+10}\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^5 ye^{-0.6y}\, dy$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$

4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{(2t+1)^3}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta \cos^2\theta\, d\theta$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{y^2-4y-12}\, dy$

7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\, dt$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

9. $\displaystyle\int_1^4 x^{3/2} \ln x\, dx$

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\, dx$

11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$ **12.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$

13. $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ **14.** $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+2}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$ **16.** $\displaystyle\int \frac{\sec^6\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$

17. $\displaystyle\int x\sec x\tan x\,dx$ **18.** $\displaystyle\int \frac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int \frac{x+1}{9x^2+6x+5}\,dx$ **20.** $\displaystyle\int \tan^5\theta\sec^3\theta\,d\theta$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$ **22.** $\displaystyle\int te^{\sqrt{t}}\,dt$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ **24.** $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+6x-4}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$ **26.** $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\operatorname{sen} 2x\,dx$ **28.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^5\sec x\,dx$ **30.** $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

31. $\displaystyle\int_0^{\ln 10}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8}\,dx$ **32.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$ **34.** $\displaystyle\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^{3/2}}}\,dx$ **36.** $\displaystyle\int \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\,d\theta$

37. $\displaystyle\int (\cos x+\operatorname{sen} x)^2\cos 2x\,dx$ **38.** $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$

39. $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$ **40.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\tan\theta}}{\operatorname{sen} 2\theta}\,d\theta$

41–50 Evalúe la integral o muestre que es divergente.

41. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$ **42.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

43. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$ **44.** $\displaystyle\int_2^6 \frac{y}{\sqrt{y-2}}\,dy$

45. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ **46.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2-3x}\,dx$

47. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ **48.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-2x}$

49. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ **50.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

51–52 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable graficando la función y su antiderivada (tome $C=0$).

51. $\displaystyle\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$ **52.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

53. Grafique la función $f(x)=\cos^2 x\operatorname{sen}^3 x$ y use la gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Después evalúe la integral para confirmar su conjetura.

CAS **54.** (a) ¿Cómo evaluaría a mano $\int x^5e^{-2x}\,dx$? (No realice la integración.)
(b) ¿Cómo evaluaría $\int x^5e^{-2x}\,dx$ por medio de tablas? (No realice la evaluación.)
(c) Emplee un CAS para evaluar $\int x^5e^{-2x}\,dx$.
(d) Grafique el integrando y la integral indefinida en la misma pantalla.

55–58 Use la tabla de integrales de las páginas de referencia para evaluar la integral.

55. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2-4x-3}\,dx$ **56.** $\displaystyle\int \csc^5 t\,dt$

57. $\displaystyle\int \cos x\sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$ **58.** $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}}\,dx$

59. Compruebe la fórmula 33 en la tabla de integrales (a) por derivación y (b) por medio de una sustitución trigonométrica.

60. Compruebe la fórmula 62 de la tabla de integrales.

61. ¿Es posible hallar un número n tal que $\int_0^\infty x^n\,dx$ es convergente?

62. ¿Para qué valores de a es $\int_0^\infty e^{ax}\cos x\,dx$ convergente? Evalúe la integral para esos valores de a.

63–64 Emplee (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la regla de Simpson con $n=10$ para aproximar la integral dada. Redondee sus respuestas a seis decimales.

63. $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx$ **64.** $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\cos x\,dx$

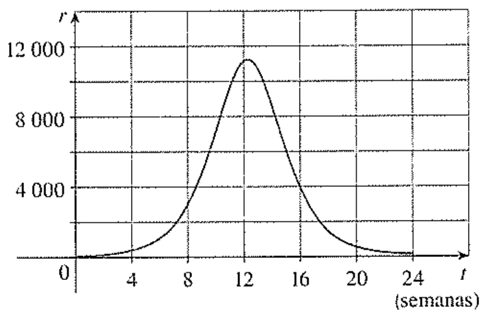
65. Estime los errores relacionados con el ejercicio 63, incisos (a) y (b). ¿Qué tan grande debe ser n en cada caso para garantizar un error menor que 0.00001?

66. Use la regla de Simpson con $n=6$ para estimar el área bajo la curva $y=e^x/x$ de $x=1$ a $x=4$.

67. La lectura del velocímetro (v) en un automóvil se observó a intervalos de 1 minuto y se registró en una tabla. Use la regla de Simpson para estimar la distancia que recorrió el automóvil.

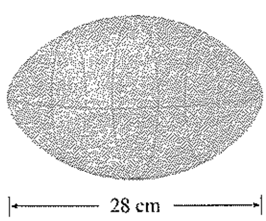
t (min)	v (mi/h)	t (min)	v (mi/h)
0	40	6	56
1	42	[illegible]	57
2	45	8	57
3	49	9	55
4	[illegible]	10	56
5	[illegible]		

68. Una población de abejas se incrementó en una proporción de $r(t)$ abejas por semana, donde la gráfica de r es como se muestra. Use la regla de Simpson con seis subintervalos para estimar el incremento en la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



69. (a) Si $f(x) = \text{sen}(\text{sen}\, x)$, emplee una gráfica para hallar una cota superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(b) Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ y emplee el inciso (a) para estimar el error.
(c) ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el tamaño del error al usar S_n sea menor que 0.00001?

70. Suponga que se pide estimar el volumen de un balón de futbol americano. Al hacer la medición encuentra que un balón de futbol mide 28 cm de largo. Con una cuerda determina que la circunferencia en su punto más amplio mide 53 cm. La circunferencia a 7 cm de cada extremo es 45 cm. Use la regla de Simpson para hacer su estimación.



71. Use el teorema de comparación para determinar si la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + 2}\,dx$$

es convergente o divergente.

72. Encuentre el área de la región acotada por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y la recta $y = 3$.

73. Encuentre el área acotada por las curvas $y = \cos x$ y $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.

74. Encuentre el área de la región acotada por las curvas $y = 1/(2 + \sqrt{x})$, $y = 1/(2 - \sqrt{x})$, y $x = 1$.

75. La región bajo la curva $y = \cos^2 x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, se hace girar respecto al eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

76. La región del ejercicio 75 se hace girar respecto al eje y. Determine el volumen del sólido resultante.

77. Si f' es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, muestre que

$$\int_0^{\infty} f'(x)\,dx = -f(0)$$

78. Se puede extender la definición de valor promedio de una función continua a un intervalo infinito definiendo el valor promedio de f en el intervalo $[a, \infty)$ como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t - a} \int_a^t f(x)\,dx$$

(a) Encuentre el valor promedio de $y = \tan^{-1} x$ en el intervalo $[0, \infty)$.
(b) Si $f(x) \geq 0$ y la $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, muestre que el valor promedio de f en el intervalo $[a, \infty)$ es $\lim_{x \to \infty} f(x)$, si existe este límite.
(c) Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, ¿cuál es el valor promedio de f en el intervalo $[a, \infty)$?
(d) Encuentre el valor promedio de $y = \text{sen}\, x$ en el intervalo $[0, \infty)$.

79. Use la sustitución $u = 1/x$ para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2}\,dx = 0$$

80. La magnitud de la fuerza repulsiva entre dos cargas puntuales con el mismo signo, una de tamaño 1 y la otra de tamaño q, es

$$F = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

donde r es la distancia entre las cargas y ε_0 es una constante. El *potencial* V en un punto P debido a la carga q se define como el trabajo invertido para llevar una carga unitaria a P desde el infinito a lo largo de la recta que une a q y P. Encuentre una fórmula para V.

PROBLEMAS ADICIONALES

Cubra la solución del ejemplo e intente resolverlo primero.

EJEMPLO 1

(a) Demuestre que si f es una función continua, en tal caso

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(b) Use el inciso (a) para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

para todos los números positivos n.

SOLUCIÓN

Los principios de la resolución de problemas se discuten en la página 76.

(a) A primera vista, la ecuación dada podría parecer un poco desconcertante. ¿Cómo es posible conectar el lado izquierdo con el lado derecho? Con frecuencia las conexiones se pueden hacer a través de uno de los principios de resolución de problemas: *introducir algo extra.* Aquí el ingrediente extra es una nueva variable. Es común pensar en introducir una nueva variable cuando se usa la regla de sustitución para integrar una función específica. Pero esa técnica aún es útil en la circunstancia actual en la que se tiene una función general f.

Una vez que se piensa hacer la sustitución, la forma del lado derecho hace pensar que debe ser $u = a - x$. Después $du = -dx$. Cuando $x = 0$, $u = a$; cuando $x = a$, $u = 0$. Así,

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

Pero esta integral del lado derecho es sólo otra forma de escribir $\int_0^a f(x)\,dx$. Por lo tanto, queda demostrada la ecuación dada.

(b) Si se permite que la integral dada sea I y se aplica el inciso (a) con $a = \pi/2$, se obtiene

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x)}{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}\,dx$$

Las gráficas de computadora de la figura 1 hacen que parezca plausible que todas las integrales del ejemplo tengan el mismo valor. La gráfica de cada integrando se identifica con el valor correspondiente de n.

Una identidad trigonométrica bien conocida indica que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$ y $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$, así que se obtiene

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx$$

Observe que las dos expresiones para I son muy similares. De hecho, los integrandos tienen el mismo denominador. Esto hace pensar que se deben sumar las dos expresiones. Si se procede de esta manera, se obtiene

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

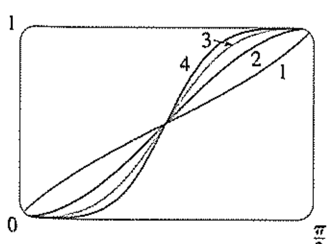
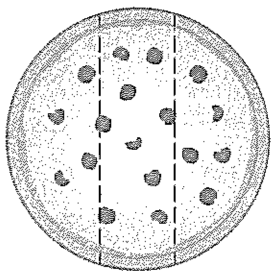


FIGURA 1

Por lo tanto, $I = \pi/4$. □

PROBLEMAS ADICIONALES

PROBLEMAS



14 pulg

FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

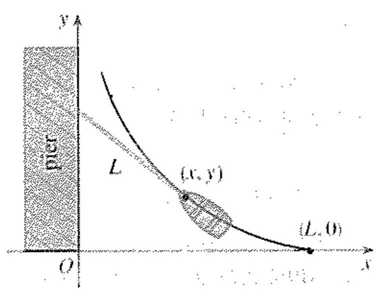


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

1. Tres estudiantes de matemáticas han ordenado una pizza de 14 pulgadas. En lugar de cortar en la forma tradicional, deciden hacer cortes paralelos, como se ilustra en la figura. Debido a sus conocimientos de matemáticas, pueden determinar dónde cortar de modo que cada uno obtenga la misma cantidad de pizza. ¿Dónde se hacen los cortes?

2. Evalúe $\int \frac{1}{x^7 - x}\, dx$.

   El método directo sería empezar con fracciones parciales, pero eso sería cruel. Pruebe con una sustitución.

3. Evalúe $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3}\right) dx$.

4. Los centros de dos discos de radio 1 son una unidad aparte. Encuentre el área de la unión de los dos discos.

5. Una elipse es cortado por un círculo de radio a. El eje mayor de la elipse coincide con el diámetro del círculo y el eje menor de la elipse tiene una longitud $2b$. Demuestre que el área del resto del círculo es igual al área de una elipse con semiejes a y $a - b$.

6. Una persona parada inicialmente en el punto O camina a lo largo de un muelle jalando un bote mediante una cuerda de longitud L. La persona mantiene la cuerda recta y tensa. La trayectoria que sigue el bote es una curva llamada *tractrix* y tiene la propiedad de que la cuerda es siempre tangente a la curva (véase la figura).
   (a) Muestre que si la trayectoria seguida por el bote es la gráfica de la función $y = f(x)$, en consecuencia

   $$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$$

   (b) Determine la función $y = f(x)$.

7. Una función f se define mediante

   $$f(x) = \int_0^{\pi} \cos t \cos(x - t)\, dt \qquad 0 \leq x \leq 2\pi$$

   Determine el valor mínimo de f.

8. Si n es un entero positivo, demuestre que

   $$\int_0^1 (\ln x)^n\, dx = (-1)^n n!$$

9. Muestre que

   $$\int_0^1 (1 - x^2)^n\, dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}$$

   Sugerencia: comience mostrando que si I_n denota la integral, en tal caso

   $$I_{k+1} = \frac{2k + 2}{2k + 3} I_k$$

10. Suponga que f es una función positiva tal que f' es continua.

(a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ sen nx con la gráfica de $y = f(x)$? ¿Qué sucede cuando $n \longrightarrow \infty$?

(b) Haga una conjetura en cuanto al valor del límite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

con respecto a las gráficas del integrando.

(c) Por medio de la integración por partes, confirme la suposición que hizo en el inciso (b). [Use el hecho de que, puesto que f' es continua, hay una constante M tal que $|f'(x)| \leq M$ para $0 \leq x \leq 1$.]

11. Si $0 < a < b$, encuentre $\lim_{t \to 0} \left\{ \int_0^1 [bx + a(1 - x)]^t \, dx \right\}^{1/t}$.

12. Grafique $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ y use la gráfica para estimar el valor de t tal que $\int_t^{t+1} f(x)\, dx$ es un máximo. Después encuentre el valor exacto de t que maximiza esta integral.

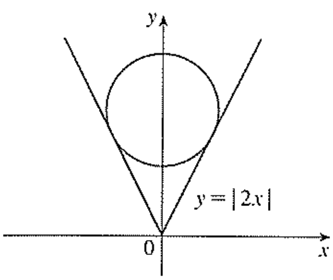


FIGURA PARA EL PROBLEMA 13

13. El círculo con radio 1 mostrado en la figura toca la curva $y = |2x|$ dos veces. Encuentre el área de la región que yace entre las dos curvas.

14. Se prende un cohete en posición recta, quemando combustible con una proporción constante de b kilogramos por segundo. Sea $v = v(t)$ la velocidad del cohete en el instante t y suponga que la velocidad u del gas de salida es constante. Sea $M = M(t)$ la masa del cohete en el instante t y note que M disminuye cuando se quema el combustible. Si se ignora la resistencia del aire, se deduce de la segunda ley de Newton que

$$F = M \frac{dv}{dt} - ub$$

donde la fuerza $F = -Mg$. Así,

$$\boxed{1} \qquad M \frac{dv}{dt} - ub = -Mg$$

Sea M_1 la masa del cohete sin combustible, M_2 la masa inicial del combustible y $M_0 = M_1 + M_2$. Por lo tanto, hasta que se agota el combustible en el tiempo $t = M_2 b$, la masa es $M = M_0 - bt$.

(a) Sustituya $M = M_0 - bt$ en la ecuación 1 y resuelva la ecuación resultante para v. Use la condición inicial $v(0) = 0$ para evaluar la constante.

(b) Determine la velocidad del cohete en el tiempo $t = M_2/b$. Ésta se llama *velocidad de combustible agotado.*

(c) Determine la altura del cohete $y = y(t)$ y el tiempo en que se quema todo el combustible.

(d) Encuentre la altura del cohete en cualquier tiempo t.

15. Use la integración por partes para mostrar que, para toda $x > 0$,

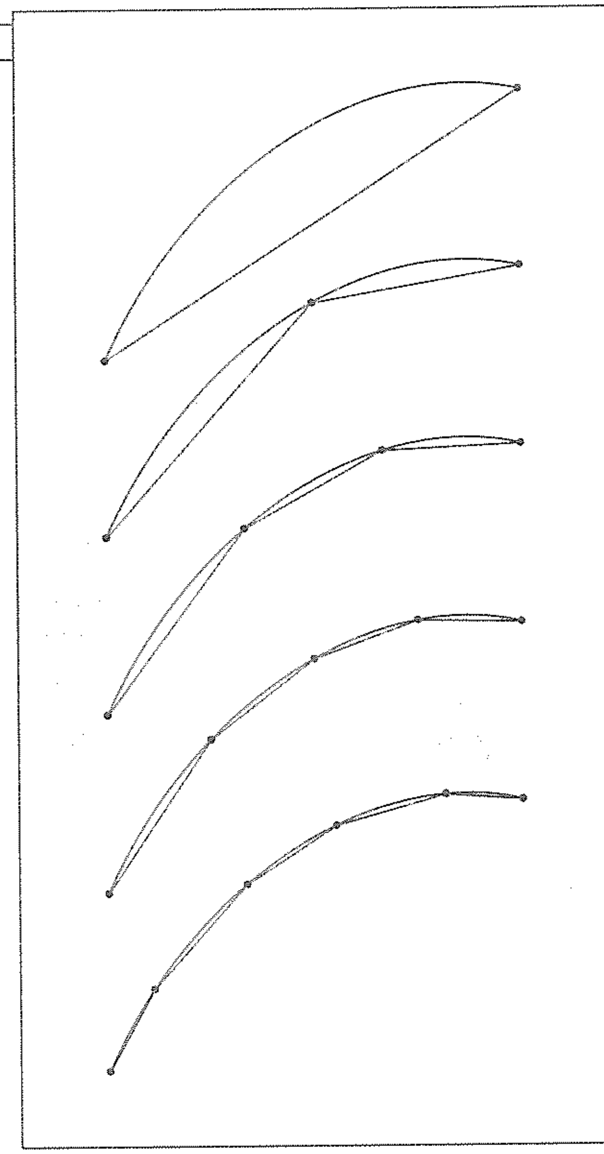
$$0 < \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{\ln(1 + x + t)} \, dt < \frac{2}{\ln(1 + x)}$$

16. Suponga que $f(1) = f'(1) = 0$, f'' es continua en $[0, 1]$ y $|f''(x)| \leq 3$ para toda x. Demuestre que

$$\left| \int_0^{\infty} f(x) \, dx \right| \leq \frac{1}{2}$$

8

MÁS APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN



La longitud de una curva es el límite de las extensiones de los polígonos inscritos.

Se han considerado algunas aplicaciones de integrales en el capítulo 6: áreas, volúmenes, trabajo y valores promedio. Aquí se exploran algunas de muchas otras aplicaciones geométricas de la integración: la longitud de una curva, el área de una superficie, así como cantidades de interés en física, ingeniería, biología, economía y estadística. Por ejemplo, se investigará el centro de gravedad de una placa, la fuerza ejercida por la presión del agua de una presa, el flujo de sangre desde el corazón humano y el tiempo promedio en espera durante una llamada telefónica.

8.1 LONGITUD DE ARCO

FIGURA 1

TEC Visual 8.1 exhibe una animación de la figura 2.

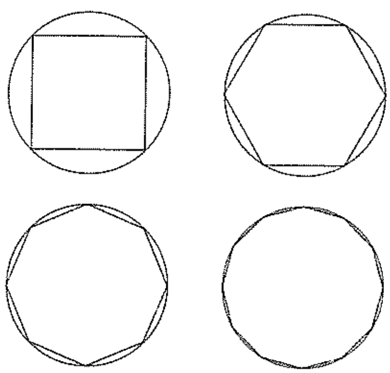


FIGURA 2

¿Qué se entiende por longitud de una curva? Se podría pensar en ajustar un trozo de cuerda a la curva de la figura 1, y después medir la cuerda contra una regla. Pero eso podría ser difícil de hacer con mucha exactitud si se tiene una curva complicada. Se necesita una definición precisa para la longitud de un arco de una curva, en el mismo sentido que las definiciones desarrolladas para los conceptos de área y volumen.

Si la curva es un polígono, se determina con facilidad su longitud: sólo se suman las longitudes de los segmentos de recta que forman el polígono. (Se puede usar la fórmula de la distancia para hallar la distancia entre los puntos extremos de cada segmento.) Se definirá la longitud de una curva general aproximándola primero mediante un polígono y luego tomando un límite cuando se incrementa el número de segmentos del polígono. Este proceso es familiar para el caso de un círculo, donde la circunferencia es el límite de longitudes de polígonos inscritos (véase la figura 2).

Ahora suponga que una curva C se define mediante la ecuación $y = f(x)$, donde f es continua y $a \leqslant x \leqslant b$. Se obtiene una aproximación poligonal a C dividiendo el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y de amplitud igual a Δx. Si $y_i = f(x_i)$, por lo tanto el punto $P_i(x_i, y_i)$ yace en C y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$, ilustrado en la figura 3, es una aproximación a C.

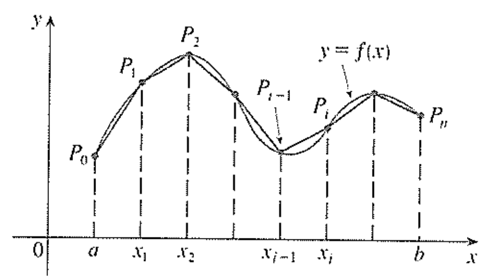


FIGURA 3

La longitud L de C es aproximadamente la longitud de este polígono y la aproximación es mejor cuando se incrementa n. (Véase la figura 4, donde se ha ampliado el arco de la curva entre P_{i-1} y P_i y se muestran las aproximaciones con valores sucesivamente más pequeños de Δx) Por lo tanto, se define la **longitud** L de la curva C con la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, cuando el límite de las longitudes de estos polígonos inscritos (si el límite existe):

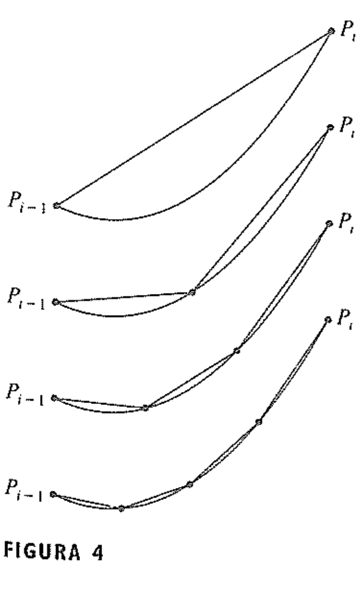


FIGURA 4

1
$$\boxed{L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|}$$

Observe que el procedimiento para definir la longitud de arco es muy similar al procedimiento empleado para definir área y volumen: se divide la curva en un gran número de partes pequeñas. Luego, se determinan las longitudes aproximadas de las partes pequeñas y se suman. Por último, se toma el límite cuando $n \to \infty$.

La definición de la longitud de arco expresada en la ecuación 1 no es muy conveniente para propósitos de cálculo, pero se puede deducir una fórmula integral para L en el caso donde f tiene una derivada continua. [Tal función f se denomina **uniforme** porque un cambio pequeño en x produce un cambio pequeño en $f'(x)$.]

Si $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, por lo tanto

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Al aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, se encuentra que hay un número x_i^* entre x_{i-1} y x_i tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

es decir,
$$\Delta y_i = f'(x_i^*)\,\Delta x$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned}|P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + [f'(x_i^*)\,\Delta x]^2} \\ &= \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x \qquad \text{(puesto que } \Delta x > 0\text{)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la definición 1,

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

Se reconoce que esta expresión es igual a

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

por la definición de una integral definida. Esta integral existe porque la función $g(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ es continua. Así, se ha demostrado el siguiente teorema:

2 FÓRMULA DE LA LONGITUD DE ARCO Si f' es continua en $[a, b]$, en tal caso la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Si se usa la notación de Leibniz para derivadas, se puede escribir la fórmula de la longitud de arco como sigue:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{3}$$

EJEMPLO 1 Halle la longitud de arco de la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ entre los puntos $(1, 1)$ y $(4, 8)$. (Véase figura 5).

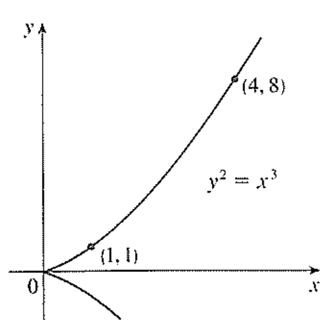


FIGURA 5

SOLUCIÓN Para la mitad superior de la curva se tiene

$$y = x^{3/2} \qquad \frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}x^{1/2}$$

y, por lo tanto, la fórmula de longitud de arco produce

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\,dx$$

Si se sustituye $u = 1 + \frac{9}{4}x$, después $du = \frac{9}{4}dx$. Cuando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$; cuando $x = 4$, $u = 10$.

Como comprobación de la respuesta al ejemplo 1, observe en la figura 5 que es necesario que la longitud de arco debe ser un poco más grande que la distancia de (1, 1) a (4, 8), que es

$$\sqrt{58} \approx 7.615773$$

De acuerdo con el cálculo del ejemplo 1, se tiene

$$L = \tfrac{1}{27}(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}) \approx 7.633705$$

Con certeza suficiente, ésta es un poco más grande que la longitud del segmento de recta.

Por lo tanto,

$$L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} \sqrt{u}\,du = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_{13/4}^{10}$$

$$= \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - \left(\tfrac{13}{4}\right)^{3/2}\right] = \frac{1}{27}\left(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\right)$$ □

Si una curva tiene la ecuación $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, y $g'(y)$ es continua, después al intercambiar los papeles de x y y en la fórmula 2 o la ecuación 3, se obtiene la fórmula siguiente para su longitud:

4 $$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

V EJEMPLO 2 Encuentre la longitud del arco de la parábola $y^2 = x$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

SOLUCIÓN Puesto que $x = y^2$, se tiene $dx/dy = 2y$, y la fórmula 4 produce

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1 + 4y^2}\,dy$$

Se hace la sustitución trigonométrica $y = \frac{1}{2}\tan\theta$, que da $dy = \frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta$ y $\sqrt{1 + 4y^2} = \sqrt{1 + \tan^2\theta} = \sec\theta$. Cuando $y = 0$, $\tan\theta = 0$, por lo tanto, $\theta = 0$; cuando $y = 1$, $\tan\theta = 2$, así que $\theta = \tan^{-1}2 = \alpha$, por ejemplo. Por eso,

$$L = \int_0^\alpha \sec\theta\cdot\tfrac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int_0^\alpha \sec^3\theta\,d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\right]_0^\alpha \qquad \text{(del ejemplo 8 de la sección 7.2)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\sec\alpha\tan\alpha + \ln|\sec\alpha + \tan\alpha|\right)$$

(Se podría haber usado la fórmula 21 de la tabla de integrales). Puesto que $\tan\alpha = 2$, se tiene $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 5$, de modo que $\sec\alpha = \sqrt{5}$ y

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4}$$ □

En la figura 6 se muestra el arco de la parábola cuya longitud se calculó en el ejemplo 2, junto con aproximaciones poligonales que tienen segmentos de recta $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente. Para $n = 1$ la longitud aproximada es $L_1 = \sqrt{2}$, la diagonal de un cuadrado. En la tabla se muestran las aproximaciones L_n que se obtienen al dividir $[0, 1]$ en n subintervalos iguales. Observe que cada vez que se duplica el número de lados de un polígono, se aproxima más a la longitud exacta, que es

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(\sqrt{5} + 2)}{4} \approx 1.478943$$

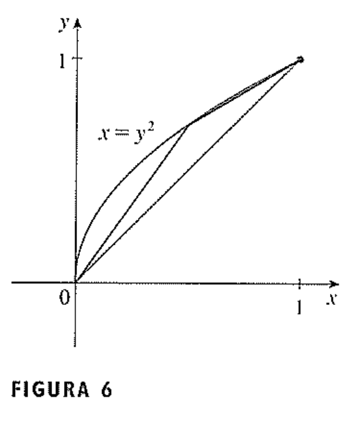


FIGURA 6

n	L_n
1	1.414
2	1.445
4	1.464
8	1.472
16	1.476
32	1.478
64	1.479

Debido a la presencia del signo de la raíz cuadrada en las fórmulas 2 y 4, el cálculo de una longitud de arco a menudo conduce a una integral que es muy difícil o incluso imposible de evaluar de manera explícita. Así, algunas veces se tiene que conformar con hallar una aproximación de la longitud de una curva como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3
(a) Establezca una integral para la longitud del arco de la hipérbola $xy = 1$ del punto $(1, 1)$ al punto $(2, \frac{1}{2})$.
(b) Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de arco.

SOLUCIÓN
(a) Se tiene

$$y = \frac{1}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

y, por lo tanto, la longitud de arco es

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2}\, dx$$

(b) Por medio de la regla de Simpson (véase la sección 7.7) con $a = 1$, $b = 2$, $n = 10$, $\Delta x = 0.1$, y $f(x) = \sqrt{1 + 1/x^4}$, se tiene

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)]$$

$$\approx 1.1321$$ □

Al comprobar el valor de la integral definida con una aproximación más exacta producida por un sistema algebraico computacional, se ve que la aproximación por medio de la regla de Simpson es exacta hasta cuatro decimales.

FUNCIÓN DE LA LONGITUD DE ARCO

Se encontrará útil tener una función que mida la longitud de arco de una curva de un determinado punto de partida a cualquier otro punto sobre la curva. Así, si una curva uniforme C tiene la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, sea $s(x)$ la distancia a lo largo de C del punto inicial $P_0(a, f(a))$ al punto $Q(x, f(x))$. Después s es una función, llamada la **función longitud de arco** y, por la fórmula 2,

$$\boxed{5} \qquad s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

(Se ha reemplazado la variable de integración por t para que x no tenga dos significados.) Se puede usar la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para derivar la ecuación 5 (puesto que el integrando es continuo):

$$\boxed{6} \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

En la ecuación 6 se muestra que la relación de cambio de s con respecto a x es siempre por lo menos 1 y es igual a 1 cuando $f'(x)$, la pendiente de la curva, es 0. La diferencial de la longitud de arco es

$$\boxed{7} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

y esta ecuación se escribe a veces en la forma simétrica

$$\boxed{8} \qquad (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

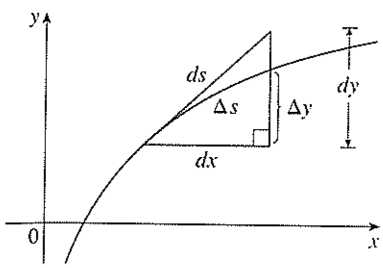


FIGURA 7

La interpretación geométrica de la ecuación 8 se muestra en la figura 7. Se puede usar como dispositivo mnemotécnico para recordar las fórmulas 3 y 4. Si se escribe $L = \int ds$, a continuación de la ecuación 8 se puede resolver para obtener (7), que da (3), o se puede resolver para obtener

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

que da (4).

EJEMPLO 4 Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$ tomando a $P_0(1, 1)$ como el punto de partida.

SOLUCIÓN Si $f(x) = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$, en tal caso

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{8x}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(2x - \frac{1}{8x}\right)^2 = 1 + 4x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2}$$

$$= 4x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{64x^2} = \left(2x + \frac{1}{8x}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 2x + \frac{1}{8x}$$

Así, la función longitud de arco está dada por

$$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt$$

$$= \int_1^x \left(2t - \frac{1}{8t}\right) dt = t^2 + \tfrac{1}{8}\ln t\Big]_1^x$$

$$= x^2 + \tfrac{1}{8}\ln x - 1$$

Por ejemplo, la longitud de arco a lo largo de la curva de $(1, 1)$ a $(3, f(3))$ es

$$s(3) = 3^2 + \tfrac{1}{8}\ln 3 - 1 = 8 + \frac{\ln 3}{8} \approx 8.1373$$

□

En la figura 8 se muestra la interpretación de la función longitud de arco del ejemplo 4. En la figura 9 se ilustra la gráfica de esta función de longitud de arco. ¿Por qué $s(x)$ es negativa cuando x es menor que 1?

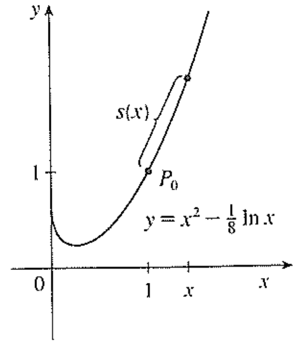


FIGURA 8

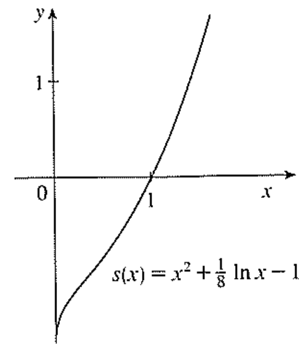


FIGURA 9

8.1 EJERCICIOS

1. Use la fórmula de longitud de arco (3) para hallar la longitud de la curva $y = 2x - 5$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$. Compruebe su respuesta notando que la curva es un segmento de recta y calculando su longitud mediante la fórmula de la distancia.

2. Use la fórmula de la longitud de arco para hallar la longitud de la curva $y = \sqrt{2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Compruebe su respuesta notando que la curva es parte de un círculo.

3–6 Establezca, sin evaluar, una integral para la longitud de la curva.

3. $y = \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

4. $y = xe^{-x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

5. $x = y + y^3, \quad 1 \leqslant y \leqslant 4$

6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

7–18 Determine la longitud de la curva.

7. $y = 1 + 6x^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

8. $y^2 = 4(x + 4)^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad y > 0$

9. $y = \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{1}{10x^3}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$

10. $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{1}{4y^2}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

11. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y - 3), \quad 1 \leqslant y \leqslant 9$

12. $y = \ln(\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

13. $y = \ln(\sec x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/4$

14. $y = 3 - \frac{1}{2}\cosh 2x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

15. $y = \ln(1 - x^2), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$

16. $y = \sqrt{x - x^2} + \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x})$

17. $y = e^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

18. $y = \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right), \quad a \leqslant x \leqslant b, \; a > 0$

19–20 Hallar la longitud del arco de la curva desde el punto P hasta el punto Q.

19. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad P(-1, \frac{1}{2}), \quad Q(1, \frac{1}{2})$,

20. $x^2 = (y - 4)^3 \; P(1,5), \; Q(8, 8)$

21–22 Grafique la curva y estime visualmente su longitud. Después halle su longitud exacta

21. $y = \frac{2}{3}(x^2 - 1)^{3/2}, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

22. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}, \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

23–26 Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de arco de la curva. Compare su respuesta con el valor de la integral que obtiene de su calculadora.

23. $y = xe^{-x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 5$

24. $x = y + \sqrt{y}, \quad 1 \leqslant y \leqslant 2$

25. $y = \sec x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

26. $y = x \ln x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3$

27. (a) Grafique la curva $y = x\sqrt[3]{4 - x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.
(b) Calcule las longitudes de polígonos inscritos con $n = 1, 2,$ y 4 lados. (Divida el intervalo en subintervalos iguales.) Ilustre bosquejando estos polígonos (como en la figura 6).
(d) Plantee una integral para la longitud de la curva.
(d) Use su calculadora para hallar la longitud de la curva hasta cuatro decimales. Compare con las aproximaciones del inciso (b).

28. Repitá el ejercicio 27 para la curva

$$y = x + \operatorname{sen} x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

29. Use un sistema algebraico computacional o una tabla de integrales para hallar la longitud *exacta* del arco de la curva $y = \ln x$ que yace entre los puntos $(1, 0)$ y $(2, \ln 2)$.

30. Emplee un sistema algebraico computacional o una tabla de integrales para hallar la longitud *exacta* del arco de la curva $y = x^{4/3}$ que yace entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Si CAS tiene problemas para evaluar la integral, haga la sustitución que cambia la integral en una que el CAS pueda evaluar.

31. Bosqueje la curva con ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y emplee la simetría para hallar su longitud.

32. (a) Bosqueje la curva $y^3 = x^2$.
(b) Use las fórmulas 3 y 4 a fin de plantear dos integrales para la longitud de arco de $(0, 0)$ a $(1, 1)$. Observe que una de éstas es una integral impropia y evalúe ambas.
(c) Determine la longitud de arco de esta curva de $(-1, 1)$ a $(8, 4)$.

33. Encuentre la función longitud de arco para la curva $y = 2x^{3/2}$ con punto inicial $P_0(1, 2)$.

34. (a) Grafique la curva $y = \frac{1}{3}x^3 + 1/(4x)$, $x > 0$.
(b) Encuentre la función de longitud de arco para esta curva con punto inicial $P_0\left(1, \frac{7}{12}\right)$.
(c) Grafique la función longitud de arco.

35. Halle la función longitud de arco para la curva $y = \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$ con punto de inicio $(0,1)$.

36. Un planeador que viene del oeste con vientos estables. La altura del planeador arriba de la superficie de la tierra desde la posición horizontal $x = 0$ hasta $x = 80$ pies se proporciona mediante *insertar* $y = 150 - \frac{1}{40}(x - 50)^2$. Halle la distancia recurrida por el planeador.

37. Un halcón que vuela a 15 m/s a una altitud de 180 m deja caer su presa accidentalmente. La trayectoria parabólica de la presa en descenso se describe mediante la ecuación

$$y = 180 - \frac{x^2}{45}$$

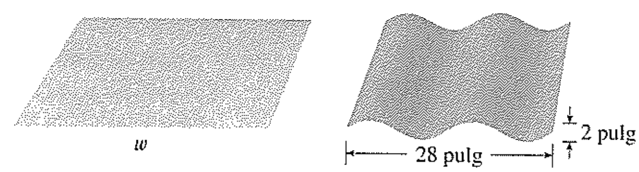
hasta que choca con el suelo, donde y es su altura sobre del suelo y x es la distancia horizontal recorrida en metros. Calcule la distancia que recorre la presa desde el momento en que es dejada caer hasta que choca con el suelo. Exprese su respuesta correcta hasta el décimo de metro más próximo.

38. Fue construido el arco Gateway en St. Louis (véase la foto en la página 256) aplicando la ecuación

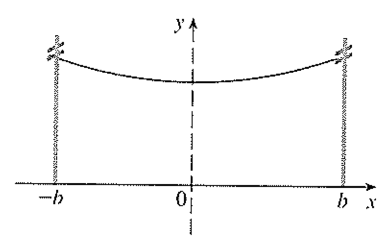
$$y = 211.49 - 20.96 \cosh 0.03291765x$$

Para la curva central del arco, donde x y y se miden en metros y $|x| \leqslant 91.20$. Establezca una integral para la longitud del arco y utilice su calculadora para estimar la longitud a la medida más cercana.

39. Un fabricante de techos de metal corrugado quiere producir paneles que miden 28 pulgadas de ancho y 2 pulgadas de espesor procesando láminas planas de metal como se ilustra en la figura. El perfil del techo toma la forma de una onda seno. Compruebe que la curva seno tiene ecuación $y = \operatorname{sen}(\pi x/7)$ y determine el ancho w de una lámina de metal plana requerida para construir un panel de 28 pulgadas. (Con su calculadora evalúe la integral correcta hasta cuatro dígitos significativos.)



40. (a) En la figura se muestra un alambre de teléfono que cuelga entre dos postes en $x = -b$ y $x = b$. El alambre toma la forma de una catenaria con ecuación $y = c + a \cosh(x/a)$ Hallar la longitud del alambre.
(b) Suponga que dos postes de teléfono se apartan entre sí 50 pies y que la longitud del alambre entre los postes es de 51 pies. Si el punto mínimo del alambre debe estar a 20 pies sobre el suelo, ¿a qué altura debe estar fijo el alambre en cada poste?



41. Encuentre la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt, \quad 1 \leqslant x \leqslant 4.$$

42. Las curvas con ecuaciones $x^n + y^n = 1$, $n = 4, 6, 8, \ldots$, se llaman **círculos gordos**. Grafique las curvas con $n = 2, 4, 6, 8,$ y 10 para ver por qué. Plantee una integral para la longitud L_{2k} del círculo gordo con $n = 2k$. Sin intentar evaluar esta integral, exprese el valor de $\lim_{k \to \infty} L_{2k}$

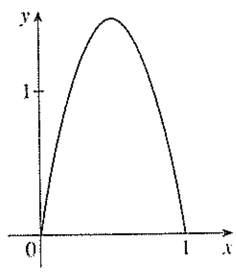
PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

CONCURSO DE LA LONGITUD DE ARCO

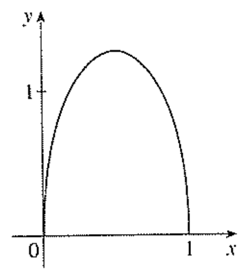
Las curvas mostradas son ejemplos de gráficas de funciones continuas f que tienen las siguientes propiedades.

1. $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$
2. $f(x) \geq 0$ para $0 \leq x \leq 1$
3. El área bajo la gráfica de f de 0 a 1 es igual a 1.

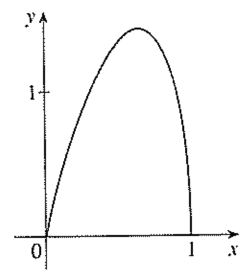
Sin embargo, las longitudes L de estas curvas son diferentes.



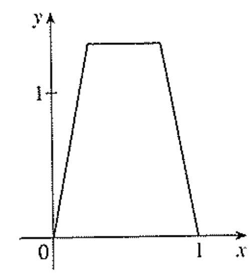
$L \approx 3.249$



$L \approx 2.919$



$L \approx 3.152$



$L \approx 3.213$

Intente descubrir las fórmulas para dos funciones que satisfacen las condiciones dadas 1, 2 y 3. (Sus gráficas podrían ser familiares a las mostradas o podrían parecer bastante diferentes.) Después calcule la longitud de arco de cada gráfica. El elemento ganador será el que tenga la longitud de arco más pequeña.

8.2 ÁREA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN

Una superficie de revolución se forma cuando se hace girar una curva respecto a una línea. Tal superficie es el límite lateral de un sólido de revolución del tipo analizado en las secciones 6.2 y 6.3.

Se desea definir el área de una superficie de revolución de tal manera que corresponda con la intuición. Si el área de superficie es A, se puede imaginar que pintar la superficie requeriría la misma cantidad de pintura que una región plana con área A.

Se comienza con algunas superficies simples. El área superficial lateral de un cilindro circular con radio r y altura h se toma como $A = 2\pi rh$ porque se puede imaginar cortar el cilindro y desenrollarlo (como en la figura 1) para obtener un rectángulo con dimensiones $2\pi r$ y h.

De igual manera, se puede tomar un cono circular con radio de base r y altura de inclinación l, cortarlo a lo largo de la línea discontinua en la figura 2, y aplanarlo para formar un sector de un círculo con radio l y ángulo central $\theta = 2\pi r/l$. Se sabe que, en general, el área de un sector de un círculo con radio l y ángulo θ es $\frac{1}{2}l^2\theta$ (véase el ejercicio 35 en la sección 7.3) y, por lo tanto, en este caso es

$$A = \tfrac{1}{2}l^2\theta = \tfrac{1}{2}l^2\left(\frac{2\pi r}{l}\right) = \pi rl$$

Por ende, se define el área de superficie lateral de un cono como $A = \pi rl$.

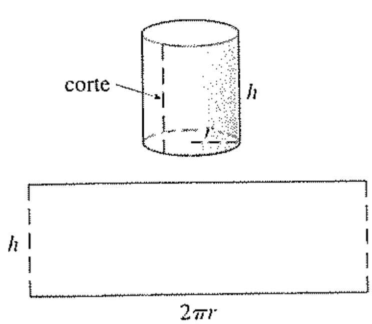


FIGURA 1

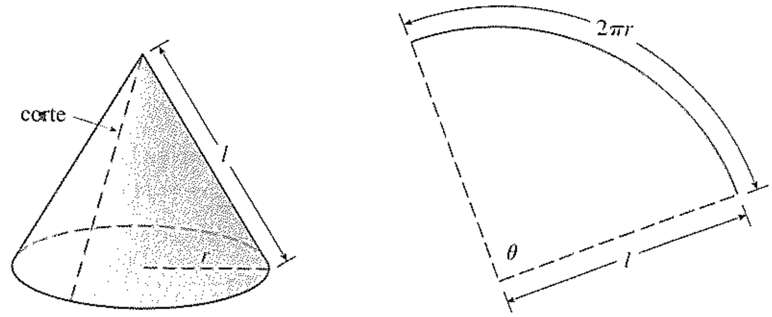


FIGURA 2

¿Qué hay acerca de superficies de revolución más complicadas? Si se sigue la estrategia que se usó con la longitud de arco, se puede aproximar la curva original mediante un polígono. Cuando este polígono se hace girar respecto a un eje, crea una superficie más simple cuya área superficial se aproxima al área superficial real. Si se toma un límite, se puede determinar el área superficial exacta.

En tal caso, la superficie de aproximación consta de varias *bandas*, cada una formada al hacer girar un segmento de recta respecto a un eje. Para hallar el área superficial, cada una de estas bandas puede ser considerada una porción de un cono circular, como se muestra en la figura 3. El área de la banda (o tronco de cono) con una altura inclinada l y radios superior e inferior r_1 y r_2 se encuentra al restar las áreas de dos conos:

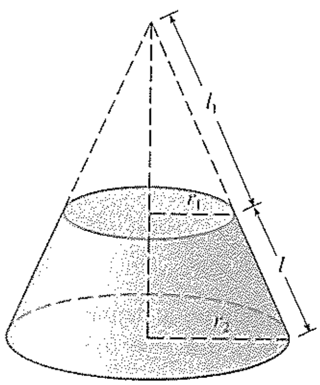


FIGURA 3

$$\boxed{1} \qquad A = \pi r_2(l_1 + l) - \pi r_1 l_1 = \pi[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l]$$

De triángulos similares se tiene

$$\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_1 + l}{r_2}$$

que da

$$r_2 l_1 = r_1 l_1 + r_1 l \qquad \text{o bien} \qquad (r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$$

Si se escribe esto en la ecuación 1, se obtiene

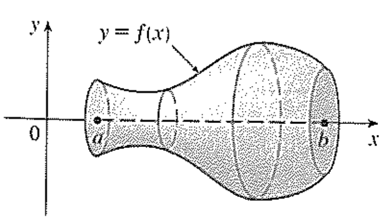
$$A = \pi(r_1 l + r_2 l)$$

o bien,

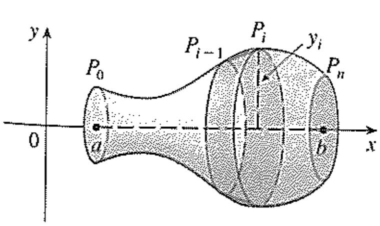
$$\boxed{2} \qquad \boxed{A = 2\pi r l}$$

donde $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ es el radio promedio de la banda.

Ahora se aplica esta fórmula a la estrategia. Considere la superficie mostrada en la figura 4, que se obtiene al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, respecto al eje x, donde f es positiva y tiene una derivada continua. A fin de definir su área superficial, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos finales $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual amplitud Δx, como se hizo para determinar la longitud de arco. Si $y_i = f(x_i)$, por lo tanto el punto $P_i(x_i, y_i)$ yace sobre la curva. La parte de la superficie entre x_{i-1} y x_i se aproxima al tomar el segmento de recta $P_{i-1}P_i$ y hacerlo girar respecto al eje x. El resultado es una banda con altura inclinada $l = |P_{i-1}P_i|$ y radio promedio $r = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ de modo que, por la fórmula 2, su área superficial es



(a) Superficie de revolución



(b) Banda de aproximación

FIGURA 4

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|$$

Como en la demostración del teorema 8.1.2, se tiene

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

donde x_i^* es algún número en $[x_{i-1}, x_i]$. Cuando Δx es pequeño, se tiene $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ y también $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$, puesto que f es continua. Por lo tanto,

$$2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i| \approx 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

y de este modo una aproximación a lo que se considera el área de la superficie de revolución completa es

$$\boxed{3} \qquad \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$$

Esta aproximación al parecer mejora cuando $n \to \infty$ y, reconociendo a (3) como una suma de Riemann para la función $g(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Por lo tanto, en el caso donde f es positiva y tiene una derivada continua, se define el **área superficial** de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, respecto al eje x como

$$\boxed{4} \qquad \boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}$$

Con la notación de Leibniz para derivadas, esta fórmula se convierte en

$$\boxed{5} \qquad \boxed{S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}$$

Si la curva se describe como $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, después la fórmula para el área superficial se transforma en

$$\boxed{6} \qquad \boxed{S = \int_c^d 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy}$$

y ambas fórmulas se pueden resumir de forma simbólica, por medio de la notación para la longitud de arco dada en la sección 8.1, como

$$\boxed{7} \qquad \boxed{S = \int 2\pi y\,ds}$$

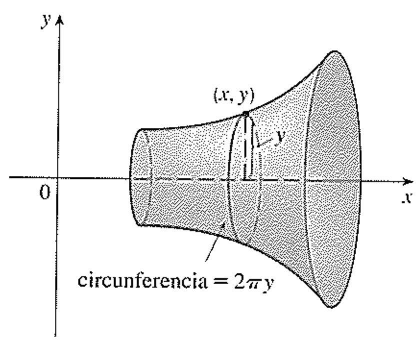
Para la rotación respecto al eje y, la fórmula del área superficial se convierte en

8 $$\boxed{S = \int 2\pi x \, ds}$$

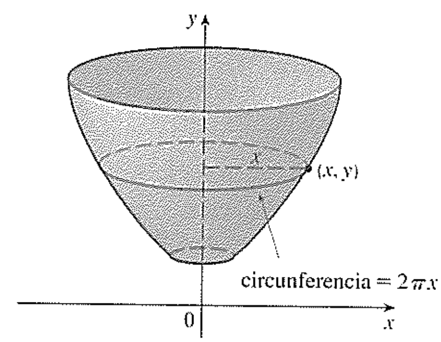
donde, como antes, se puede usar

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad \text{o bien} \qquad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Estas fórmulas se pueden recordar si se considera a $2\pi y$ or $2\pi x$ como la circunferencia de un círculo trazado por el punto (x, y) sobre la curva cuando se hace girar respecto al eje x o al eje y, respectivamente (véase figura 5).



(a) Rotación respecto al eje x: $S = \int 2\pi y\, ds$



(b) Rotación respecto al eje y: $S = \int 2\pi x\, ds$

FIGURA 5

EJEMPLO 1 La curva $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, es un arco del círculo $x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar este arco respecto al eje x. (La superficie es una porción de una esfera de radio 2. Véase figura 6.)

SOLUCIÓN Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

y, por lo tanto, por la fórmula 5, el área superficial es

$$S = \int_{-1}^{1} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \frac{2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi \int_{-1}^{1} 1\, dx = 4\pi(2) = 8\pi$$ □

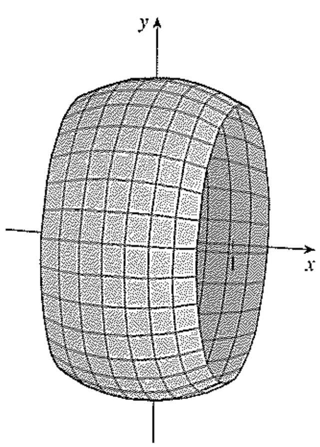


FIGURA 6

En la figura 6 se muestra la porción de la esfera cuya área superficial se calculó en el ejemplo 1.

En la figura 7 se muestra una superficie de revolución cuya área se calcula como en el ejemplo 2.

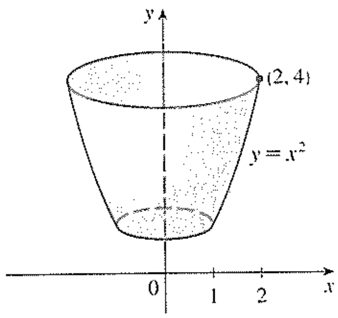


FIGURA 7

EJEMPLO 2 El arco de la parábola $y = x^2$ de $(1, 1)$ a $(2, 4)$ se hace girar respecto al eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.

SOLUCIÓN 1 Si se emplea

$$y = x^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = 2x$$

se tiene, de la fórmula 8,

$$S = \int 2\pi x\, ds$$

$$= \int_1^2 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 x\sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Al sustituir $u = 1 + 4x^2$, se tiene $du = 8x\, dx$. Sin olvidar cambiar los límites de integración, se tiene

$$S = \frac{\pi}{4}\int_5^{17} \sqrt{u}\, du = \frac{\pi}{4}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_5^{17}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$$

Para comprobar de la respuesta al ejemplo 2, observe en la figura 7 que el área superficial debe ser cercana a la de un cilindro circular con la misma altura y radio a la mitad entre el radio superior e inferior de la superficie: $2\pi(1.5)(3) \approx 28.27$. Se calculó que el área superficial era

$$\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \approx 30.85$$

que parece razonable. De manera alternativa, el área superficial debe ser un poco más grande que el área de un tronco de cono con la misma base y tapa. De la ecuación 2, esto es $2\pi(1.5)(\sqrt{10}) \approx 29.80$.

SOLUCIÓN 2 Si se emplea

$$x = \sqrt{y} \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

se tiene

$$S = \int 2\pi x\, ds = \int_1^4 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= 2\pi \int_1^4 \sqrt{y}\sqrt{1 + \frac{1}{4y}}\, dy = \pi \int_1^4 \sqrt{4y + 1}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_5^{17} \sqrt{u}\, du \qquad \text{(donde } u = 1 + 4y\text{)}$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$

□

EJEMPLO 3 Encuentre el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = e^x$, $0 \leq x \leq 1$, respecto al eje x.

SOLUCIÓN Al emplear la fórmula 5 con

Otro método: emplee la fórmula 6 con $x = \ln y$.

$$y = e^x \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

se tiene

$$S = \int_0^1 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \sqrt{1 + u^2}\, du \qquad \text{(donde } u = e^x\text{)}$$

$$= 2\pi \int_{\pi/4}^{\alpha} \sec^3\theta\, d\theta \qquad \text{(donde } u = \tan\theta \text{ y } \alpha = \tan^{-1}e\text{)}$$

O emplee la fórmula 21 de la tabla de integrales.

$$= 2\pi \cdot \tfrac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]_{\pi/4}^{\alpha} \qquad \text{(por ejemplo 8 de la sección 7.2)}$$

$$= \pi\left[\sec\alpha\tan\alpha + \ln(\sec\alpha + \tan\alpha) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

Puesto que $\tan\alpha = e$, se tiene $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 1 + e^2$ y

$$S = \pi\left[e\sqrt{1 + e^2} + \ln\left(e + \sqrt{1 + e^2}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$$

8.2 EJERCICIOS

1–4 Plantee, pero no evalúe, una integral para el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva respecto al (a) eje-x y (b) el eje-y.

1. $y = x^4$, $0 \leq x \leq 1$ **2.** $y = xe^{-x}$, $1 \leq x \leq 3$

3. $y = \tan^{-1}x$, $0 \leq x \leq 1$ **4.** $x = \sqrt{y - y^2}$

5–12 Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva respecto al eje x.

5. $y = x^3$, $0 \leq x \leq 2$

6. $9x = y^2 + 18$, $2 \leq x \leq 6$

7. $y = \sqrt{1 + 4x}$, $1 \leq x \leq 5$

8. $y = c + a\cosh(x/a)$, $0 \leq x \leq a$

9. $y = \operatorname{sen} \pi x$, $0 \leq x \leq 1$

10. $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

11. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$, $1 \leq y \leq 2$

12. $x = 1 + 2y^2$, $1 \leq y \leq 2$

13–16 La curva dada se hace girar respecto al eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.

13. $y = \sqrt[3]{x}$, $1 \leq y \leq 2$

14. $y = 1 - x^2$, $0 \leq x \leq 1$

15. $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, $0 \leq y \leq a/2$

16. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$, $1 \leq x \leq 2$

17–20 Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva respecto al eje x. Compare su respuesta con el valor de la integral producido por su calculadora.

17. $y = \ln x$, $1 \leq x \leq 3$ **18.** $y = x + \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 2$

19. $y = \sec x$, $0 \leq x \leq \pi/3$ **20.** $y = e^{-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$

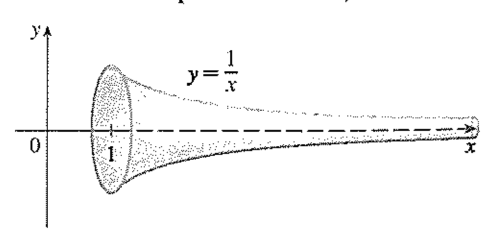
CAS **21–22** Use un CAS o una tabla de integrales para hallar el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada respecto al eje x.

21. $y = 1/x$, $1 \leq x \leq 2$ **22.** $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $0 \leq x \leq 3$

CAS **23–24** Use un CAS para hallar el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva respecto al eje y. Si su CAS tiene problema para evaluar la integral, exprese el área superficial como una integral en la otra variable.

23. $y = x^3$, $0 \leq y \leq 1$ **24.** $y = \ln(x + 1)$, $0 \leq x \leq 1$

25. Si la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$ se hace girar respecto al eje x, el volumen del sólido resultante es finito (véase el ejercicio 63 en la sección 7.8). Muestre que el área superficial es infinita. (La superficie se muestra en la figura y se conoce como **trompeta de Gabriel**.)



26. Si la curva infinita $y = e^{-x}$, $x \geq 0$, se hace girar respecto al eje x, encuentre el área de la superficie resultante.

27. (a) Si $a > 0$, encuentre el área de la superficie generada al hacer girar el bucle de la curva $3ay^2 = x(a - x)^2$ respecto al eje x.
(b) Determine el área superficial si el bucle se hace girar respecto al eje y.

28. Un grupo de ingenieros está construyendo un plato de satélite parabólico cuya forma se constituye al hacer girar la curva $y = ax^2$ respecto al eje y. Si el plato tendrá un diámetro de 10 pies y una profundidad máxima de 2 pies, encuentre el valor de a y el área superficial del plato.

29. (a) La elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b$$

se hace girar respecto al eje x para formar una superficie llamada *elipsoide, o prolato esferoidal*. Determine el área superficial de este elipsoide.
(b) Si la elipse del inciso (a) gira con respecto a su eje menor (el eje y), la elipsoide resultante se le conoce como *esferoide achatada*. Hallar el área de la superficie de esta elipsoide

30. Calcule el área superficial del toroide del ejercicio 63 en la sección 6.2.

31. Si la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, se hace girar respecto a la recta horizontal $y = c$, donde $f(x) \leq c$, encuentre una fórmula para el área de la superficie resultante.

CAS **32.** Use el resultado del ejercicio 31 para establecer una integral que permita hallar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, respecto a la recta $y = 4$. Después, use un CAS para evaluar la integral.

33. Encuentre el área de la superficie obtenida al hacer girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ respecto a la recta $y = r$.

34. Muestre que el área superficial de una zona de la esfera que yace entre dos planos paralelos es $S = \pi dh$, donde d es el diámetro de la esfera y h es la distancia entre los planos. (Observe que S sólo depende de la distancia entre los planos y no sobre su ubicación, siempre que ambos planos intersequen la esfera.)

35. La fórmula 4 es válida sólo cuando $f(x) \geq 0$. Muestre que cuando $f(x)$ no necesariamente es positiva, la fórmula para el área superficial se transforma en

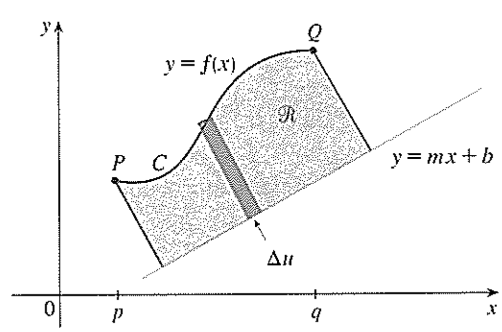
$$S = \int_a^b 2\pi |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

36. Sea L la longitud de la curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, donde f es positiva y tiene una derivada continua. Sea S_f el área superficial generada al hacer girar la curva respecto al eje x. Si c es una constante positiva, defina $g(x) = f(x) + c$ y sea S_g el área superficial correspondiente generada por la curva $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$. Exprese S_g en términos de S_f y L.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO — ROTACIÓN SOBRE UNA PENDIENTE

Se sabe cómo hallar el volumen de un sólido de revolución obtenido al hacer girar una región respecto a una recta horizontal o vertical (véase la sección 6.2). También se sabe cómo determinar el área de una superficie de revolución si se gira una curva respecto a una recta horizontal o vertical (véase la sección 8.2). Pero, ¿qué pasa si se hace girar una recta inclinada, es decir, una recta que no sea horizontal ni vertical? En este proyecto se pide descubrir fórmulas para el volumen de un sólido de revolución y para el área de una superficie de revolución cuando el eje de rotación es una recta inclinada.

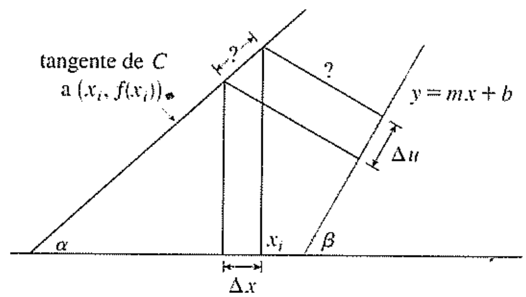
Sea C el arco de la curva $y = f(x)$ entre los puntos $P(p, f(p))$ y $Q(q, f(q))$ y sea $\mathcal{R}$ la región limitada por C, por la recta $y = mx + b$ (la cual está totalmente por debajo de C), y por las perpendiculares a la recta de P y Q.

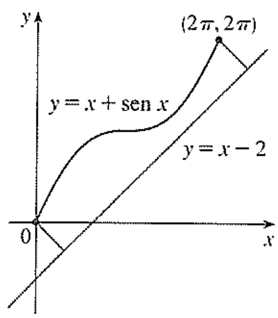


1. Muestre que el área de $\mathcal{R}$ es

$$\frac{1}{1+m^2}\int_p^q [f(x) - mx - b][1 + mf'(x)]\,dx$$

[*Sugerencia*: Esta fórmula se puede comprobar restando áreas, pero será útil en el proyecto derivarla aproximando primero el área por medio de rectángulos perpendiculares a la línea, como se muestra en la figura. Use la figura para ayudar a expresar Δu en términos de Δx.]





2. Determine el área de la región mostrada en la figura a la izquierda.

3. Encuentre una fórmula similar a la del problema 1 para el volumen del sólido obtenido al hacer girar $\mathcal{R}$ respecto a la recta $y = mx + b$.

4. Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región del problema 2 respecto a la recta $y = x - 2$.

5. Obtenga una fórmula para el área de la superficie obtenida al hacer girar C respecto a la recta $y = mx + b$.

CAS 6. Use un sistema algebraico computacional para hallar el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$, respecto a la recta $y = \frac{1}{2}x$. Luego aproxime su resultado a tres decimales.

8.3 APLICACIONES A LA FÍSICA Y A LA INGENIERÍA

Entre las muchas aplicaciones del cálculo integral a la física y a la ingeniería, se consideran dos aquí: la fuerza debida a la presión del agua y los centros de masa. Como con las aplicaciones previas a la geometría (áreas, volúmenes y longitudes) y el trabajo, la estrategia es descomponer la cantidad física en un gran número de partes pequeñas, aproximar cada parte pequeña, sumar los resultados, tomar el límite y después evaluar la integral resultante.

FUERZA Y PRESIÓN HIDROSTÁTICA

Los buceadores de aguas profundas comprenden que la presión del agua se incrementa a medida que bucean cada vez más profundo. Esto se debe a que se incrementa el peso del agua sobre ellos.

En general, suponga que una placa horizontal delgada con área A metros cuadrados se sumerge en un fluido de densidad ρ kilogramos por metro cúbico a una profundidad d metros debajo de la superficie del fluido como en la figura 1. El fluido directamente arriba de la placa tiene volumen $V = Ad$, de modo que su masa es $m = \rho V = \rho A d$. Así, la fuerza que ejerce la placa sobre el fluido es

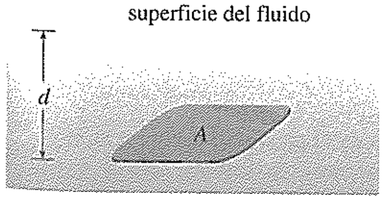


FIGURA 1

$$F = mg = \rho g A d$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. La **presión** P sobre la placa se define como la fuerza por unidad de área:

$$P = \frac{F}{A} = \rho g d$$

Al usar unidades inglesas, se escribe $P = \rho g d = \delta d$, donde $\delta = \rho g$ es el *peso específico* o bien *gravedad* específica (en oposición a ρ, que es la *densidad en masa*). Por ejemplo, el peso específico del agua es $\delta = 62.5 \text{ lb/ft}^3$.

La unidad SI para medir la presión es newtons por metro cuadrado, que se llama pascal (abreviatura: $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$). Puesto que ésta es una unidad pequeña, se emplea con frecuencia el kilopascal (kPa). Por ejemplo, debido a que la densidad del agua es $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$, la presión en el fondo de una alberca de 2 m de profundidad es

$$\begin{aligned} P = \rho g d &= 1\,000 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 2 \text{ m} \\ &= 19\,600 \text{ Pa} = 19.6 \text{ kPa} \end{aligned}$$

Un principio importante de la presión del fluido es el hecho comprobado en forma experimental de que en *cualquier punto en un líquido, la presión es la misma en todas direcciones.* (Un buzo siente la misma presión en la nariz y en ambos oídos.) Así, la presión en *cualquier* dirección a una profundidad d en un fluido con densidad de masa ρ está dada por

$$\boxed{1} \qquad P = \rho g d = \delta d$$

Esto ayuda a determinar la fuerza hidrostática contra una placa o pared *vertical* en un fluido. Éste no es un problema directo porque la presión no es constante, sino que crece a medida que aumenta la profundidad.

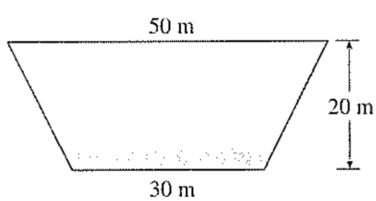


FIGURA 2

EJEMPLO 1 Una presa tiene la forma del trapecio mostrado en la figura 2. La altura es 20 m y el ancho es 50 m en la parte superior y 30 m en el fondo. Determine la fuerza sobre la presa debida a la presión hidrostática si el nivel del agua es 4 m desde la parte superior de la presa.

SOLUCIÓN Se elige un eje x vertical con origen en la superficie del agua como en la figura 3(a). La profundidad del agua es 16 m, así que se divide el intervalo $[0, 16]$ en subintervalos de igual longitud con puntos extremos x_i y se elige $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. La i-ésima tira horizontal de la presa se aproxima mediante un rectángulo con altura Δx y amplitud w_i, donde, de los triángulos similares de la figura 3(b),

$$\frac{a}{16 - x_i^*} = \frac{10}{20} \qquad \text{o bien} \qquad a = \frac{16 - x_i^*}{2} = 8 - \frac{x_i^*}{2}$$

y, por lo tanto, $\qquad w_i = 2(15 + a) = 2(15 + 8 - \frac{1}{2}x_i^*) = 46 - x_i^*$

Si A_i es el área de la i-ésima tira, entonces

$$A_i \approx w_i \, \Delta x = (46 - x_i^*)\, \Delta x$$

Si Δx es pequeña, en tal caso la presión P_i en la i-ésima tira es casi constante y se puede usar la ecuación 1 para escribir

$$P_i \approx 1\,000 g x_i^*$$

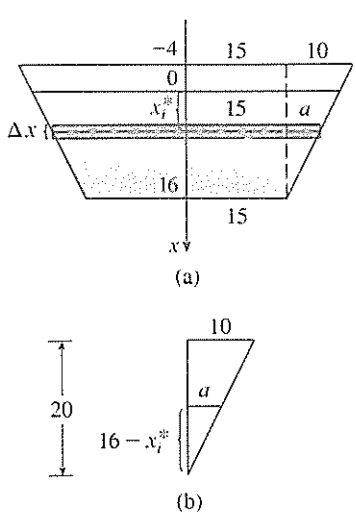


FIGURA 3

La fuerza hidrostática F_i que actúa sobre la i-ésima tira es el producto de la presión y el área:

$$F_i = P_i A_i \approx 1\,000 g x_i^* (46 - x_i^*)\, \Delta x$$

Si se suman estas fuerzas y se toma el límite cuando $n \to \infty$, se obtiene la fuerza hidrostática total sobre la presa:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1\,000gx_i^*(46 - x_i^*)\,\Delta x$$

$$= \int_0^{16} 1\,000gx(46 - x)\,dx$$

$$= 1\,000(9.8)\int_0^{16} (46x - x^2)\,dx$$

$$= 9\,800\left[23x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{16}$$

$$\approx 4.43 \times 10^7\ \mathrm{N}$$

EJEMPLO 2 Determine la fuerza hidrostática sobre un extremo de un tambor cilíndrico con radio 3 pies si el tambor es sumergido en agua 10 pies.

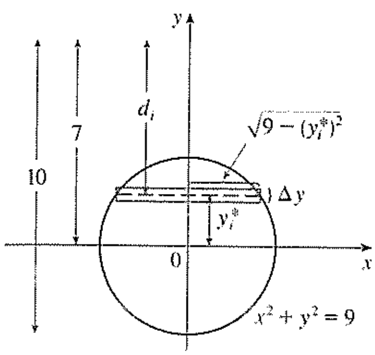


FIGURA 4

SOLUCIÓN En este ejemplo es conveniente elegir los ejes como en la figura 4 de modo que el origen esté colocado en el centro del tambor. Por lo tanto el círculo tiene una ecuación simple, $x^2 + y^2 = 9$. Como en el ejemplo 1, se divide la región circular en tiras horizontales de igual amplitud. De la ecuación de un círculo se ve que la longitud de la i-ésima tira es $2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}$ y, por lo tanto, su área es

$$A_i = 2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

La presión sobre esta tira es aproximadamente

$$\delta d_i = 62.5(7 - y_i^*)$$

y, por lo tanto, la fuerza aproximada sobre la tira es

$$\delta d_i A_i = 62.5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

La fuerza total se obtiene sumando las fuerzas sobre todas las tiras y tomando el límite:

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62.5(7 - y_i^*)2\sqrt{9 - (y_i^*)^2}\,\Delta y$$

$$= 125\int_{-3}^{3} (7 - y)\sqrt{9 - y^2}\,dy$$

$$= 125 \cdot 7\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy - 125\int_{-3}^{3} y\sqrt{9 - y^2}\,dy$$

La segunda integral es 0 porque el integrando es una función impar (véase el teorema 5.5.7). La primera integral se puede evaluar por medio de la sustitución trigonométrica $y = 3\ \mathrm{sen}\,\theta$, pero es más simple observar que es el área de un disco semicircular con radio 3. Así,

$$F = 875\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - y^2}\,dy = 875 \cdot \tfrac{1}{2}\pi(3)^2$$

$$= \frac{7875\pi}{2} \approx 12\,370\ \mathrm{lb}$$

MOMENTOS Y CENTROS DE MASA

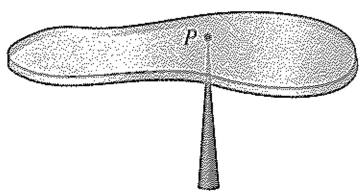


FIGURA 5

El objetivo principal aquí es hallar el punto P sobre el que una placa delgada de cualquier forma se balancea horizontalmente como en la figura 5. El punto se llama **centro de masa** (o centro de gravedad) de la placa.

Primero se considera la situación más simple ilustrada en la figura 6, donde dos masas m_1 y m_2 se fijan a una varilla de masa insignificante en lados opuestos de un fulcro (punto de apoyo) y a distancias d_1 y d_2 del fulcro. La varilla se balanceará si

$$\boxed{2} \qquad m_1 d_1 = m_2 d_2$$

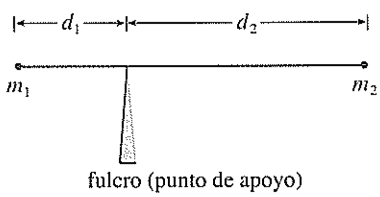


FIGURA 6

Éste es un hecho experimental que descubrió Arquímedes y se llama ley de la palanca. (Considere una persona de poco peso que tiene como contrapeso a una persona más pesada en un sube y baja sentada lejos del centro.)

Ahora suponga que la varilla yace a lo largo del eje x con m_1 en x_1 y m_2 en x_2 y el centro de masa en $\bar{x}$. Si se comparan las figuras 6 y 7, se ve que $d_1 = \bar{x} - x_1$ y $d_2 = x_2 - \bar{x}$ y, por lo tanto, la ecuación 2 produce

$$m_1(\bar{x} - x_1) = m_2(x_2 - \bar{x})$$

$$m_1\bar{x} + m_2\bar{x} = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$\boxed{3} \qquad \bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Los números $m_1 x_1$ y $m_2 x_2$ se llaman **momentos** de las masas m_1 y m_2 (con respecto al origen), y la ecuación 3 dice que el centro de masa $\bar{x}$ se obtiene al sumar los momentos de las masas y dividir entre la masa total $m = m_1 + m_2$.

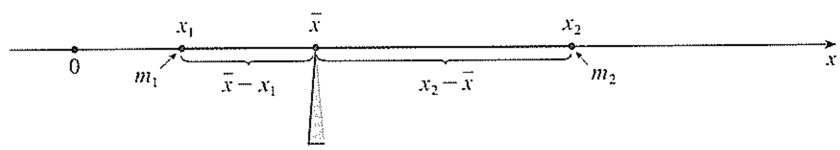


FIGURA 7

En general, si se tiene un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre el eje x, se puede demostrar de manera similar que el centro de masa del sistema se localiza en

$$\boxed{4} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}$$

donde $m = \sum m_i$ es la masa total del sistema, y la suma de los momentos individuales

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

se llama **momento del sistema respecto al origen**. La ecuación 4 se podría reescribir como $m\bar{x} = M$, que dice que si se considerara a la masa total como si estuviera concentrada en el centro de masa $\bar{x}$, en consecuencia su momento sería el mismo que el del sistema.

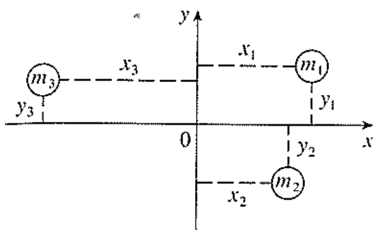


FIGURA 8

Ahora considere un sistema de n partículas con masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ localizadas en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ en el plano xy como se muestra en la figura 8. Por analogía con el caso unidimensional, se define el **momento del sistema respecto al eje y** como

$$\boxed{5} \qquad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

y el **momento del sistema respecto al eje x** como

$$\boxed{6} \qquad M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Después M_y mide la tendencia del sistema a girar respecto al eje y y M_x mide la tendencia a girar respecto al eje x.

Como en el caso unidimensional, las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa están dadas en términos de los momentos por las fórmulas

$$\boxed{7} \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{m} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde $m = \sum m_i$ es la masa total. Puesto que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$, el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ es el punto donde una sola partícula de masa m tendría los mismos momentos que el sistema.

EJEMPLO 3 Encuentre los momentos del centro de masa del sistema de objetos que tienen masas 3, 4 y 8 en los puntos $(-1, 1)$, $(2, -1)$, y $(3, 2)$, respectivamente.

SOLUCIÓN Se usan las ecuaciones 5 y 6 para calcular los momentos:

$$M_y = 3(-1) + 4(2) + 8(3) = 29$$

$$M_x = 3(1) + 4(-1) + 8(2) = 15$$

Puesto que $m = 3 + 4 + 8 = 15$, se usan las ecuaciones 7 para obtener

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{29}{15} \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15}{15} = 1$$

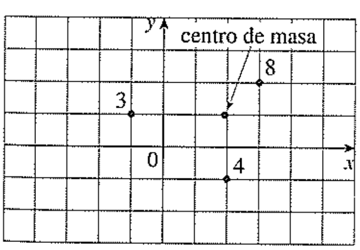


FIGURA 9

Así, el centro de masa es $\left(1\frac{14}{15}, 1\right)$. (Véase figura 9.) □

A continuación se considera una placa plana (llamada *lámina*) con densidad uniforme ρ que ocupa una región $\mathcal{R}$ del plano. Se desea localizar el centro de masa de la placa, que se llama **centroide** de $\mathcal{R}$. Para tal fin se emplean los siguientes principios: el **principio de simetría** dice que si $\mathcal{R}$ es simétrica respecto a la recta l, en tal caso el centroide de $\mathcal{R}$ yace sobre l. (Si $\mathcal{R}$ se refleja respecto a l, por lo tanto $\mathcal{R}$ no cambia y su centroide permanece fijo. Pero los únicos puntos fijos yacen sobre l). Así, el centroide del rectángulo es su centro. Los momentos se deben definir de modo que si toda la masa de una región se concentra en el centro de masa, después sus momentos permanecen sin cambio. Asimismo, el momento de la unión de dos regiones que no se traslapan, debe ser la suma de los momentos de cada una de las regiones.

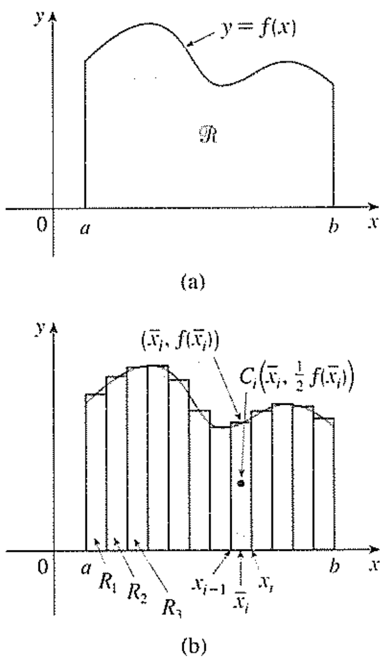


FIGURA 10

Suponga que la región $\mathcal{R}$ es del tipo mostrado en la figura 10(a): es decir, $\mathcal{R}$ se sitúa entre las líneas $x = a$ y $x = b$, arriba del eje x y debajo de la gráfica de f, donde f es una función continua. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual amplitud Δx. Se elige el mismo punto x_i^* como el punto medio $\bar{x}_i$ del i-ésimo subintervalo, es decir, $\bar{x}_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Esto determina la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$ mostrada en la figura 10(b). El centroide del i-ésimo rectángulo de aproximación R_i es su centro $C_i(\bar{x}_i, \frac{1}{2}f(\bar{x}_i))$. Su área es $f(\bar{x}_i)\,\Delta x$, de modo que su masa es

$$\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

El momento de R_i respecto al eje y es el producto de su masa y la distancia desde C_i al eje y, que es $\bar{x}_i$. Así,

$$M_y(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\bar{x}_i = \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x$$

Al sumar estos momentos, se obtiene el momento de la aproximación poligonal a $\mathcal{R}$, y luego tomando el límite cuando $n \to \infty$ se obtiene el momento de $\mathcal{R}$ respecto al eje y:

$$\boxed{M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\,dx}$$

En un modo similar se calcula el momento de R_i respecto al eje x como el producto de su masa y la distancia de C_i al eje x:

$$M_x(R_i) = [\rho f(\bar{x}_i)\,\Delta x]\,\tfrac{1}{2}f(\bar{x}_i) = \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x$$

De nuevo se suman estos momentos y se toma el límite para obtener el momento de $\mathcal{R}$ respecto al eje x:

$$\boxed{M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\,\Delta x = \rho \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}$$

Al igual que para sistemas de partículas, el centro de masa de la placa se define tal que $m\bar{x} = M_y$ y $m\bar{y} = M_x$. Pero la masa de la placa es el producto de su densidad y su área:

$$m = \rho A = \rho \int_a^b f(x)\,dx$$

y, por lo tanto,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x f(x)\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\rho \int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\rho \int_a^b f(x)\,dx} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Note la cancelación de las ρ. La ubicación del centro de masa es independiente de la densidad.

En resumen, el centro de masa de la placa (o el centroide de $\mathcal{R}$) se localiza en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, donde

$$\boxed{8} \qquad \overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)\,dx \qquad \overline{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx$$

EJEMPLO 4 Encuentre el centro de masa de una placa semicircular de radio r.

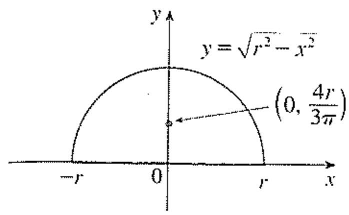


FIGURA 11

SOLUCIÓN A fin de usar (8) se coloca el semicírculo como en la figura 11 tal que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y $a = -r$, $b = r$. Aquí no es necesario usar la fórmula para calcular $\overline{x}$ porque, por el principio de simetría, el centro de masa debe estar sobre el eje y, por consiguiente, $\overline{x} = 0$. El área del semicírculo es $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, así que

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{A}\int_{-r}^{r} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx \\
&= \frac{1}{\pi r^2/2}\cdot\frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi r^2}\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r \\
&= \frac{2}{\pi r^2}\,\frac{2r^3}{3} = \frac{4r}{3\pi}
\end{aligned}$$

El centro de masa se localiza en el punto $(0, 4r/(3\pi))$. □

EJEMPLO 5 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN El área de la región es

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

así, con las fórmulas de 8, se obtiene

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} xf(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx \\
&= x\operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{(mediante integración por partes)} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\,dx \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{4}\left[x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

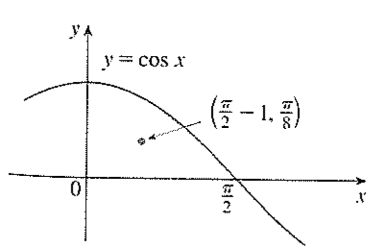


FIGURA 12

El centroide es $(\frac{1}{2}\pi - 1, \frac{1}{8}\pi)$ y se muestra en la figura 12. □

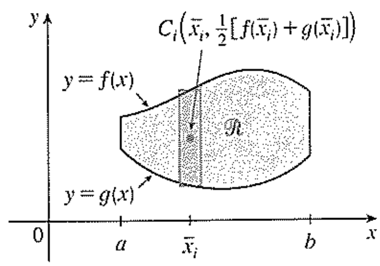


FIGURA 13

Si la región $\mathcal{R}$ se localiza entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$, como se ilustra en la figura 13, después se puede usar la misma clase de argumento que condujo a las fórmulas 8 para mostrar que el centroide de $\mathcal{R}$ es $(\bar{x}, \bar{y})$, donde

9
$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx$$
$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx$$

(Véase ejercicio 47.)

EJEMPLO 6 Encuentre el centroide de la región acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

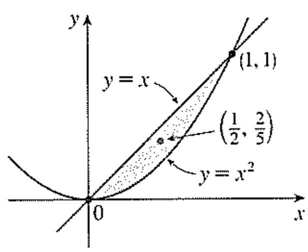


FIGURA 14

SOLUCIÓN La región se bosqueja en la figura 14. Se toma $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $a = 0$, y $b = 1$ en las fórmulas 9. Primero se nota que el área de la región es

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\bigg]_0^1 = \frac{1}{6}$$

En consecuencia,

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 x[f(x) - g(x)]\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 x(x - x^2)\,dx$$
$$= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^1 \tfrac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx = \frac{1}{\frac{1}{6}}\int_0^1 \tfrac{1}{2}(x^2 - x^4)\,dx$$
$$= 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

El centroide es $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$. □

Se concluye esta sección mostrando una conexión sorprendente entre centroides y volúmenes de revolución.

■ Este teorema lleva el nombre del matemático griego Pappus de Alejandría, quien vivió en el siglo IV d.C.

TEOREMA DE PAPPUS Sea $\mathcal{R}$ la región plana que yace por completo en un lado de una recta l en el plano. Si se hace girar a $\mathcal{R}$ respecto a l, entonces el volumen del sólido resultante es el producto del área A de $\mathcal{R}$ y la distancia d recorrida por el centroide de $\mathcal{R}$.

DEMOSTRACIÓN Se da la demostración para el caso especial en que la región yace entre $y = f(x)$ y $y = g(x)$ como se ilustra en la figura 13, y la recta l es el eje y. Con el método de las envolventes cilíndricas (véase la sección 6.3), se tiene

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx \\ &= 2\pi(\bar{x}A) \qquad \text{(por las fórmulas 9)} \\ &= (2\pi\bar{x})A = Ad \end{aligned}$$

donde $d = 2\pi\bar{x}$ es la distancia recorrida por el centroide durante una rotación respecto al eje y. □

EJEMPLO 7 Un toroide se forma al hacer girar un círculo de radio r respecto a una recta en el plano del círculo que es la distancia R ($> r$) desde el centro del círculo. Encuentre el volumen del toroide.

SOLUCIÓN El círculo tiene área $A = \pi r^2$. Por el principio de simetría, su centroide es su centro y, por lo tanto, la distancia recorrida por el centroide durante una rotación es $d = 2\pi R$. Así, por el teorema de Pappus, el volumen del toroide es

$$V = Ad = (2\pi R)(\pi r^2) = 2\pi^2 r^2 R$$ □

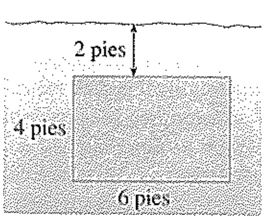
El método del ejemplo 7 se debe comparar con el método del ejercicio 63 en la sección 6.2.

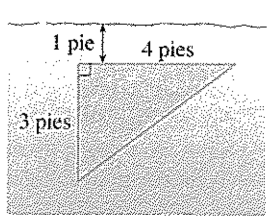
8.3 EJERCICIOS

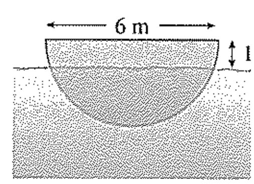
1. Un acuario de 5 pies de largo, 2 pies de ancho y 3 pies de profundidad, se llena de agua. Determine (a) la presión hidrostática en el fondo del acuario, (b) la fuerza hidrostática en el fondo y (c) la fuerza hidrostática en un extremo del acuario.

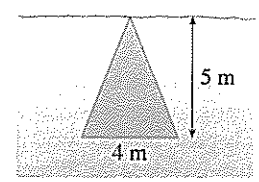
2. Una alberca de 4 m de ancho, 8 m de largo y 2 m de profundidad se llena con querosene de densidad 820 kg/m^3 hasta una profundidad de 1.5 m. Encuentre (a) la presión hidrostática en el fondo de la alberca, (b)la fuerza hidrostática en el fondo y (c) la fuerza hidrostática en un extremo de la alberca.

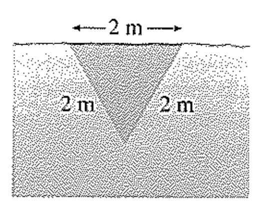
3–11 Una placa vertical se sumerge en agua (o parcialmente sumergida) y tiene la forma indicada. Explique cómo aproximar la fuerza hidrostática contra un extremo de la placa mediante una suma de Riemann. Luego exprese la fuerza como una integral, y evalúela.

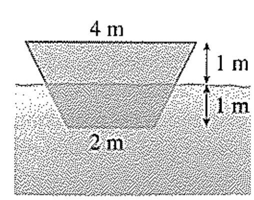
3.


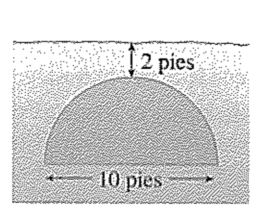
4.


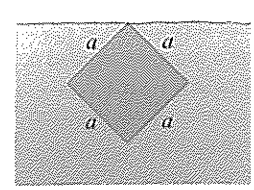
5.


6.


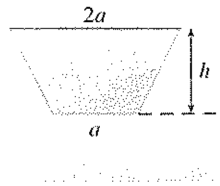
7.


8.


9.


10.


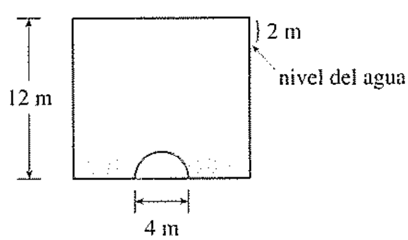
11.



12. Se diseña un gran recipiente con extremos en la forma de la región entre las curvas $y = \frac{1}{2}x^2$ y $y = 12$, medidos en pies. Encuentre la fuerza hidrostática en un extremo del recipiente si se llena hasta una profundidad de 8 pies con gasolina. (Considere que la densidad de la gasolina es 42.0 lb/pies^3.)

13. Una pileta se llena con un líquido de densidad 840 kg/m^3. Los extremos de la pileta son triángulos equiláteros con lados de 8 m de largo y vértice en el fondo. Determine la fuerza hidrostática en un extremo de la pileta.

14. Una presa vertical tiene una compuerta semicircular como se muestra en la figura. Encuentre la fuerza hidrostática que se ejerce contra la compuerta.



15. Un cubo con lados de 20 cm de largo está sentado sobre el fondo de un acuario en el que el agua tiene un metro de profundidad. Determine la fuerza hidrostática en (a) la parte superior del cubo y (b) uno de los lados del cubo.

16. Una presa está inclinada a un ángulo de 30° desde la vertical y tiene la forma de un trapecio isósceles de 100 pies de ancho en la parte superior y 50 pies de ancho en el fondo y con una altura inclinada de 70 pies. Encuentre la fuerza hidrostática sobre la presa cuando está llena de agua.

17. Una alberca mide 20 pies de ancho y 40 pies de largo, y su fondo es un plano inclinado. El extremo poco profundo tiene una profundidad de 3 pies y el extremo profundo 9 pies. Si la alberca se llena de agua, determine la fuerza hidrostática en (a) el extremo poco profundo, (b) el extremo profundo, (c) uno de los lados y (d) el fondo de la alberca.

18. Suponga que una placa se sumerge verticalmente en un fluido con densidad ρ y la amplitud de la placa es $w(x)$ a una profundidad de x metros debajo de la superficie del fluido. Si la parte superior de la placa está a una profundidad a y el fondo está a una profundidad b, muestre que la fuerza hidrostática en un lado de la placa es

$$F = \int_a^b \rho g x w(x)\, dx$$

19. Una placa vertical de forma irregular se sumerge en agua. En la tabla se muestran las medidas de su amplitud, tomadas a las profundidades indicadas. Use la regla de Simpson para estimar la fuerza del agua contra la placa.

Profundidad (m)	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
Ancho de la placa (m)	0	0.8	1.7	2.4	2.9	3.3	3.6

20. (a) Use la fórmula del ejercicio 18 para mostrar que

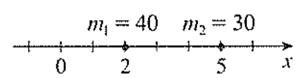
$$F = (\rho g \bar{x})A$$

donde $\bar{x}$ es la coordenada x del centroide de la placa y A es el área. Esta ecuación muestra que la fuerza hidrostática contra una región del plano vertical es la misma que si la región estuviera horizontal a la profundidad del centroide de la región.

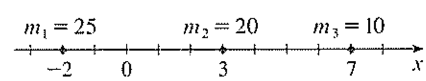
(b) Use el resultado del inciso (a) para dar otra solución al ejercicio 10.

21–22 Masas puntuales m_i se localizan sobre el eje x como se ilustra. Determine el momento M del sistema respecto al origen y el centro de masa $\bar{x}$.

21.



22.



23–24 Las masas m_i se localizan en los puntos P_i. Encuentre los momentos M_x y M_y y el centro de masa del sistema.

23. $m_1 = 6$, $m_2 = 5$, $m_3 = 10$;
$P_1(1, 5)$, $P_2(3, -2)$, $P_3(-2, -1)$

24. $m_1 = 6$, $m_2 = 5$, $m_3 = 1$, $m_4 = 4$;
$P_1(1, -2)$, $P_2(3, 4)$, $P_3(-3, -7)$, $P_4(6, -1)$

25–28 Bosqueje la región acotada por las curvas y estime en forma visual la ubicación del centroide. Después encuentre las coordenadas exactas del centroide.

25. $y = 4 - x^2$, $y = 0$

26. $3x + 2y = 6$, $y = 0$, $x = 0$

27. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

28. $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$

29-33 Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas dadas.

29. $y = x^2, \quad x = y^2$

30. $y = x + 2, \quad y = x^2$

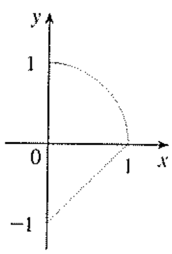
31. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos x, \quad x = 0, \quad x = \pi/4$

32. $y = x^3, \quad x + y = 2, \quad y = 0$

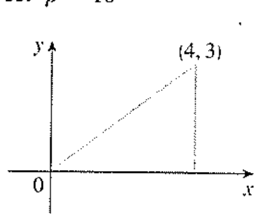
33. $x = 5 - y^2, \quad x = 0$

34-35 Calcule los momentos M_x y M_y y el centro de masa de una lámina con la densidad y forma dadas.

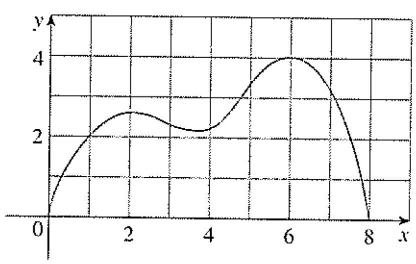
34. $\rho = 3$



35. $\rho = 10$



36. Aplique la regla de Simpson para estimar el centroide de la región que se muestra.



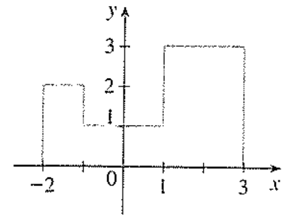
37. Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = 2^x$ y $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, hasta tres decimales. Bosqueje la región y grafique el centroide para ver si su respuesta es razonable.

38. Use una gráfica para hallar coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas $y = x + \ln x$ y $y = x^3 - x$. Después determine (de manera aproximada) el centroide de la región acotada por estas curvas.

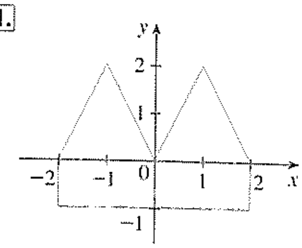
39. Pruebe que el centroide de cualquier triángulo se localiza en la intersección de las medianas. [*Sugerencias*: coloque los ejes de modo que los vértices sean $(a, 0)$, $(0, b)$ y $(c, 0)$. Recuerde que una mediana es un segmento de recta de un vértice al punto medio del lado opuesto. Recuerde que las medianas se intersecan en un punto a dos tercios del tramo de cada vértice (a lo largo de la mediana) al lado opuesto].

40-41 Encuentre el centroide de la región mostrada, no por integración, sino mediante la localización de los centroides de los rectángulos y triángulos (del ejercicio 39) y por medio de la aditividad de los momentos.

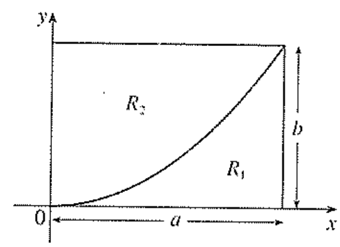
40.



$\boxed{\textbf{41.}}$



42. Un rectántulo R con lados a y b se divide en dos partes R_1 y R_2 mediante un arco de la parábola que tiene sus vértices en las esquinas de R y pasa a través de la esquina opuesta. Hallar el centroide de ambos R_1 y R_2.



43. Si $\bar{x}$ es la coordenada del centro de masa de la región que se encuentra bajo la gráfica de una función continua f, donde $a \leq x \leq b$. Demuestre que

$$\int_a^b (cx + d)f(x)\,dx = (c\bar{x} + d)\int_a^b f(x)\,dx$$

44-46 Use el teorema de Pappus para hallar el volumen del sólido.

44. Una esfera de radio r (Use el ejemplo 4.)

45. Un cono con altura h y radio de base r

46. El sólido obtenido al hacer girar el triángulo con vértices $(2, 3)$, $(2, 5)$ y $(5, 4)$ respecto al eje x

47. Demuestre las fórmulas 9.

48. Sea $\mathcal{R}$ la región localizada entre las curvas $y = x^m$ y $y = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, donde m y n son enteros con $0 \leq n < m$.

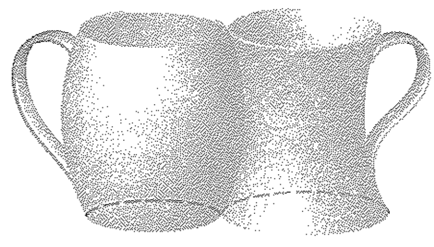
(a) Bosqueje la región $\mathcal{R}$.

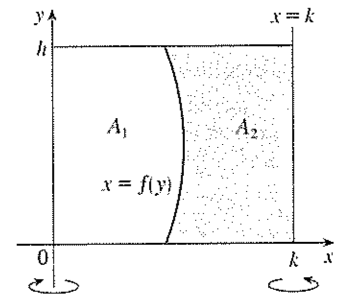
(b) Encuentre las coordenadas del centroide de $\mathcal{R}$.

(c) Trate de hallar los valores de m y n tal que el centroide está *fuera de* $\mathcal{R}$.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO — TAZAS DE CAFÉ COMPLEMENTARIAS

Considere que tiene que elegir de dos tazas de café del tipo que se muestra, una que se curva hacia fuera y una hacia dentro, y observe que tienen la misma altura y sus formas se ajustan cómodamente entre sí. Le sorprende que una taza contenga más café. Naturalmente podría llenar una taza con agua y vertería el contenido en la otra pero, como estudiante de cálculo, decide un planteamiento más matemático. Ignorando el asa de cada una, observe que ambas tazas son superficies de revolución, de esta manera puede pensar del café como un volumen de revolución.





1. Considere que las tazas tienen la altura h, la taza A se forma por la rotación de la curva $x = f(x)$ alrededor del eje y, y la taza B se forma por la rotación de la misma curva alrededor de la línea $x = k$. Hallar el valor de k tal que las dos tazas contengan la misma cantidad de café.
2. ¿Qué le expresa el resultado del problema 1 con respecto a las áreas A_1 y A_2 que se muestran en la figura?.
3. Aplique el teorema de Pappus para explicar su resultado en los problemas 1 y 2.
4. Con respecto a sus medidas y observaciones, sugiera un valor para h y una ecuación para $x = f(x)$ y calcule la cantidad de café que contiene cada una de las tazas.

8.4 APLICACIONES A LA ECONOMÍA Y A LA BIOLOGÍA

En esta sección se consideran algunas aplicaciones de la integración a la economía (superávit del consumidor) y la biología (flujo sanguíneo, rendimiento cardiaco). Otras se describen en los ejercicios.

SUPERÁVIT DE CONSUMO

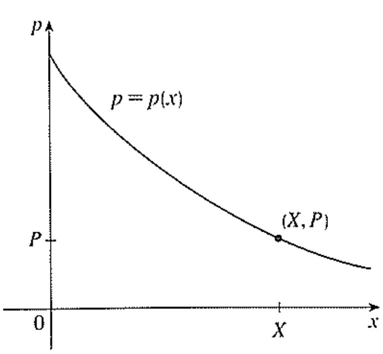


FIGURA 1
Una curva de demanda representativa

Recuerde de la sección 4.8 que la función de demanda $p(x)$ es el precio que una compañía tiene que cargar a fin de vender x unidades de un artículo. Por lo común, vender cantidades más grandes requiere bajar los precios, de modo que la función de demanda sea una función decreciente. La gráfica de una función de demanda representativa, llamada **curva de demanda**, se muestra en la figura 1. Si X es la cantidad del artículo que actualmente está disponible, en tal caso $P = p(X)$ es el precio de venta actual.

Se divide el intervalo $[0, X]$ en n subintervalos, cada uno de extensión $\Delta x = X/n$, y sea $x_i^* = x_i$ el punto final derecho del i-ésimo subintervalo, como en la figura 2. Si, después de que se vendieron las primeras x_{i-1} unidades, hubiera estado disponible un total de sólo x_i unidades y el precio por unidad se hubiera establecido en $p(x_i)$ dólares, en tal caso se podrían haber vendido Δx unidades adicionales (pero no más). Los consumidores que habrían pagado $p(x_i)$ dólares dieron un valor alto al producto; habrían pagado lo que valía para ellos. Así, al pagar sólo P dólares han ahorrado una cantidad de

$$(\text{ahorros por unidad})(\text{número de unidades}) = [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

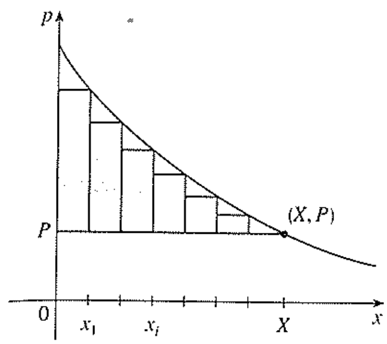


FIGURA 2

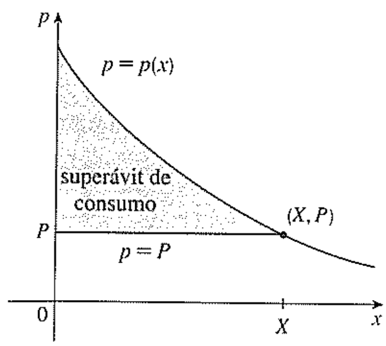


FIGURA 3

Al considerar grupos similares de consumidores dispuestos para cada uno de los subintervalos y sumar los ahorros, se obtiene el total de ahorros:

$$\sum_{i=1}^{n} [p(x_i) - P]\,\Delta x$$

(Esta suma corresponde al área encerrada por los rectángulos de la figura 2.) Si $n \to \infty$, esta suma de Riemann se aproxima a la integral

$$\boxed{1} \qquad \int_0^X [p(x) - P]\,dx$$

que los economistas llaman **superávit de consumo** para el artículo.

El superávit de consumo representa la cantidad de dinero que ahorran los consumidores al comprar el artículo a precio P, correspondiente a una cantidad demandada de X. En la figura 3 se muestra la interpretación del superávit de consumo como el área bajo la curva de demanda y arriba de la recta $p = P$.

V EJEMPLO 1 La demanda para un producto, en dólares, es

$$p = 1\,200 - 0.2x - 0.0001x^2$$

Determine el superávit de consumo cuando el nivel de ventas es 500.

SOLUCIÓN Puesto que la cantidad de productos vendida es $X = 500$, el precio correspondiente es

$$P = 1\,200 - (0.2)(500) - (0.0001)(500)^2 = 1\,075$$

Por lo tanto, de la definición 1, el superávit de consumo es

$$\int_0^{500} [p(x) - P]\,dx = \int_0^{500} (1\,200 - 0.2x - 0.0001x^2 - 1\,075)\,dx$$

$$= \int_0^{500} (125 - 0.2x - 0.0001x^2)\,dx$$

$$= 125x - 0.1x^2 - (0.0001)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{500}$$

$$= (125)(500) - (0.1)(500)^2 - \frac{(0.0001)(500)^3}{3}$$

$$= \$33\,333.33$$

□

FLUJO SANGUÍNEO

En el ejemplo 7 de la sección 3.3, se analizó la ley del flujo laminar:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

que da la velocidad v de la sangre que fluye a lo largo de un vaso sanguíneo con radio R y longitud l a una distancia r del eje central, donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre. Ahora, a fin de calcular el caudal sanguíneo (volumen por unidad de tiempo), se consideran radios más pequeños igualmente

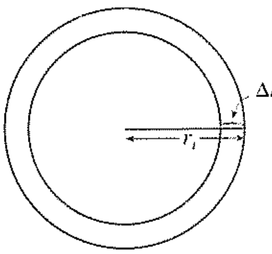


FIGURA 4

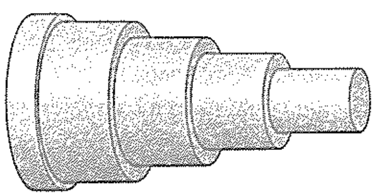


FIGURA 5

espaciados $r_1, r_2, \ldots$ El área aproximada del anillo (o arandela) con radio interno r_{i-1} y radio externo r_i es

$$2\pi r_i \,\Delta r \qquad \text{donde} \quad \Delta r = r_i - r_{i-1}$$

(Véase figura 4.) Si Δr es pequeña, entonces la velocidad es casi constante en este anillo, y se puede aproximar mediante $v(r_i)$. Así, el volumen de sangre por unidad de tiempo que fluye por el anillo es

$$(2\pi r_i \,\Delta r) v(r_i) = 2\pi r_i v(r_i)\,\Delta r$$

y el volumen total de sangre que fluye por una sección transversal por unidad de tiempo es

$$\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i)\,\Delta r$$

Esta aproximación se ilustra en la figura 5. Observe que la velocidad (y, por lo tanto, el volumen por unidad de tiempo) se incrementa hacia el centro del vaso sanguíneo. La aproximación es mejor cuando se incrementa n. Cuando se toma el límite se obtiene el valor exacto del **flujo** (o *descarga*), que es el volumen de sangre que pasa una sección transversal por unidad de tiempo:

$$\begin{aligned}
F &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i v(r_i)\,\Delta r = \int_0^R 2\pi r v(r)\,dr \\
&= \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)\,dr \\
&= \frac{\pi P}{2\eta l}\int_0^R (R^2 r - r^3)\,dr = \frac{\pi P}{2\eta l}\left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=R} \\
&= \frac{\pi P}{2\eta l}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}
\end{aligned}$$

La ecuación resultante

$$\boxed{2} \qquad F = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}$$

se llama **ley de Poiseuille**; ésta muestra que el flujo es proporcional a la cuarta potencia del radio del vaso sanguíneo.

RENDIMIENTO CARDIACO

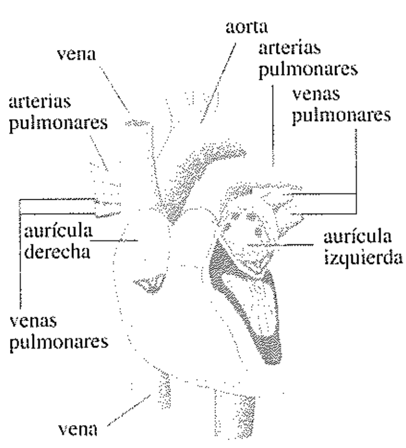


FIGURA 6

En la figura 6 se muestra el sistema cardiovascular humano. La sangre retorna del cuerpo por las venas, entra a la aurícula derecha del corazón y es bombeada a los pulmones por las arterias pulmonares para oxigenación. Después regresa a la aurícula izquierda por las venas pulmonares y sale hacia el resto del cuerpo por la aorta. El **rendimiento cardiaco** del corazón es el volumen de sangre que bombea el corazón por unidad de tiempo, es decir, el caudal hacia la aorta.

El *método de dilución de colorante* se emplea para medir el rendimiento cardiaco. Se inyecta colorante hacia la aurícula derecha y fluye por el corazón hacia la aorta. Una sonda insertada en la aorta mide la concentración del colorante que sale del corazón a tiempos igualmente espaciados en un intervalo de tiempo $[0, T]$ hasta que se ha eliminado el colorante. Sea $c(t)$ la concentración del colorante en el tiempo t. Si se divide $[0, T]$ en subintervalos de igual extensión Δt, después la cantidad de colorante que fluye más allá del punto de medición durante el subintervalo de $t = t_{i-1}$ a $t = t_i$ es aproximadamente

$$(\text{concentración})(\text{volumen}) = c(t_i)(F\,\Delta t)$$

Donde F es la razón de flujo que se trata de determinar. Así, el monto total de colorante es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} c(t_i)F\,\Delta t = F\sum_{i=1}^{n} c(t_i)\,\Delta t$$

y, si $n \to \infty$, se encuentra que la cantidad de colorante es

$$A = F\int_0^T c(t)\,dt$$

Por eso, el rendimiento cardiaco está dado por

$$\boxed{3} \qquad F = \frac{A}{\int_0^T c(t)\,dt}$$

donde se conoce la cantidad de colorante A y la integral se puede aproximar a partir de las lecturas de concentración.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	6	6.1
1	0.4	7	4.0
2	2.8	8	2.3
3	6.5	9	1.1
4	9.8	10	0
5	8.9		

EJEMPLO 2 Un bolo de colorante de 5 mg se inyecta hacia la aurícula derecha. La concentración del colorante (en miligramos por litro) se mide en la aorta a intervalos de un segundo, como se muestra en la tabla. Estime el rendimiento cardiaco.

SOLUCIÓN Aquí $A = 5$, $\Delta t = 1$, y $T = 10$. Use la regla de Simpson para aproximar la integral de la concentración:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} c(t)\,dt &\approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0.4) + 2(2.8) + 4(6.5) + 2(9.8) + 4(8.9) \\ &\quad + 2(6.1) + 4(4.0) + 2(2.3) + 4(1.1) + 0] \\ &\approx 41.87\end{aligned}$$

Así, la fórmula 3 da el rendimiento cardiaco como

$$F = \frac{A}{\int_0^{10} c(t)\,dt} \approx \frac{5}{41.87} \approx 0.12 \text{ L/s} = 7.2 \text{ L/min}$$

8.4 EJERCICIOS

1. La función de costo marginal $C'(x)$ se definió como la derivada de la función costo. (Véanse las secciones 3.7 y 4.7.) Si el costo marginal de fabricar x metros de una tela es $C'(x) = 5 - 0.008x + 0.000009x^2$ (medido en dólares por metro) y el costo de arranque fijo es $C(0) = \$20\,000$, use el teorema del cambio neto para hallar el costo de producir las primeras 2 000 unidades.

2. El ingreso marginal de la venta de x unidades de un producto es $12 - 0.0004x$. Si el ingreso de la venta de las primeras 1 000 unidades es \$12 400, determine el ingreso de la venta de las primeras 5 000 unidades.

3. El costo marginal de producir x unidades de cierto producto es $74 + 1.1x - 0.002x^2 + 0.00004x^3$ (en dólares por unidad). Encuentre el incremento en costo si el nivel de producción se eleva de 1 200 unidades a 1 600.

4. La función de demanda para cierto artículo es $p = 20 - 0.05x$. Determine el superávit de consumo cuando el nivel de ventas es 300. Ilustre dibujando la curva de demanda e identificando al superávit de consumo como un área.

5. Una curva de demanda está dada por $p = 450/(x + 8)$. Determine el superávit de consumo cuando el precio de venta es \$10.

6. La **función de suministro** $p_S(x)$ para un artículo da la relación entre el precio de venta y el número de unidades que los fabricantes producirán a ese precio. Para un precio más alto, los fabricantes producirán más unidades, así que p_S es una función creciente de x. Sea X la cantidad del artículo que se produce actualmente, y sea $P = p_S(X)$ el precio actual. Algunos productores estarían dispuestos a hacer y vender el artículo por un precio de venta menor y, por lo tanto, reciben más que su precio mínimo. Este exceso se llama **superávit**

de consumo. Un argumento similar a ése para el superávit de consumo, muestra que el excedente está dado por la integral

$$\int_0^X [P - p_S(x)]\,dx$$

Calcule el superávit de consumo para la función de suministro $p_S(x) = 3 + 0.01x^2$ al nivel de ventas $X = 10$. Ilustre dibujando la curva de suministro e identificando el excedente del productor como un área.

7. Si una curva de suministro se modela mediante la ecuación $p = 200 + 0.2x^{3/2}$, determine el superávit de consumo cuando el precio de venta es \$400.

8. Para un determinado artículo y competencia pura, el número de unidades producidas y el precio por unidad se determinan como las coordenadas del punto de intersección de las curvas de suministro y demanda. Dada la curva de demanda $p = 50 - \frac{1}{20}x$ y la curva de suministro $p = 20 + \frac{1}{10}x$, determine el superávit de consumo y el excedente del productor. Ilustre dibujando las curvas de suministro y demanda, e identifique los superávit como áreas.

9. Una compañía diseñó la curva de demanda para su producto (en dólares) mediante

$$p = \frac{800\,000e^{-x/5000}}{x + 20\,000}$$

Use una gráfica para estimar el nivel de ventas cuando el precio de venta es \$16. Después determine (de forma aproximada) el superávit de consumo para este nivel de ventas.

10. Un cine ha estado cobrando \$7.50 por persona y vendiendo alrededor de 400 boletos en la noche de sábado y domingo. Después de encuestar a sus clientes, los propietarios del cine estiman que por cada 50 centavos que bajen el precio, la cantidad de asistentes se incrementará en 35 por noche. Encuentre la función de demanda y calcule el superávit de consumo cuando los boletos se venden a \$6.00.

11. Si la cantidad de capital que una compañía tiene en el tiempo t es $f(t)$, por lo tanto la derivada, $f'(t)$, se llama el *flujo de inversión neto*. Suponga que el flujo de inversión neto es $\sqrt{t}$ millones de dólares por año (donde t se mide en años). Determine el incremento de capital (la *formación de capital*) del cuarto año al octavo.

12. El flujo de ingreso hacia adentro de una compañía es en una proporción de $f(t) = 9\,000\sqrt{1 + 2t}$, donde t se mide en años y $f(t)$ se mide en dólares por cada año, hallar el ingreso total obtenido en los primeros cuatro años.

13. La *ley de Pareto de la utilidad* establece establece que el número de personas con ingresos entre $x = a$ y $x = b$ es $N = \int_a^b Ax^{-k}\,dx$, donde a y k son constantes con $A > 0$ y $k > 1$. El ingreso promedio de estas personas es

$$N = \int_a^b Ax^{-k}\,dx$$

Calcular $\bar{x}$.

14. Un verano húmedo y cálido causa una explosión en la población de mosquitos en un área de descanso lacustre. El número de mosquitos se incrementa a una rapidez estimada de $2\,200 + 10e^{0.8t}$ por semana (donde t se mide en semanas). ¿En cuánto se incrementa la población de mosquitos entre las semanas quinta y novena del verano?

15. Use la ley de Poiseuille para calcular el caudal en una pequeña arteria humana donde se puede tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm, y $P = 4\,000$ dinas/cm^2.

16. La presión sanguínea alta resulta de la constricción de las arterias. Para mantener un flujo normal, el corazón tiene que bombear más fuerte, de modo que se incrementa la presión arterial. Use la ley de Poiseuille para mostrar que si R_0 y P_0 son valores normales del radio y la presión en una arteria, y los valores restringidos son R y P, por lo tanto para que el flujo permanezca constante, P y R se relacionan mediante la ecuación

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$$

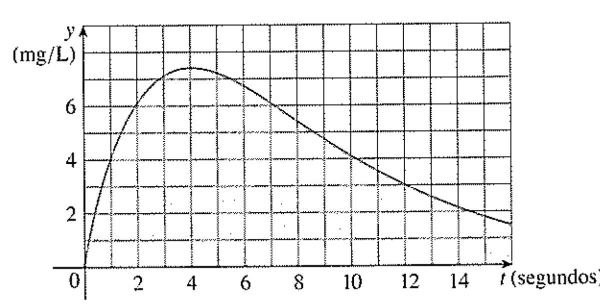
Deduzca que si el radio de una arteria se reduce a tres cuartos de su valor anterior, después la presión es más que el triple.

17. El método de dilución de colorante se emplea para medir el rendimiento cardiaco con 6 mg de colorante. Las concentraciones de colorante, en mg/L, se modelan mediante $c(t) = 20te^{-0.6t}$, $0 \leq t \leq 10$, donde t se mide en segundos. Determine el rendimiento cardiaco.

18. Después de una inyección de colorante de 8 mg, las lecturas de concentración de colorante a intervalos de dos segundos son como se muestra en la tabla. Use la regla de Simpson para estimar el rendimiento cardiaco.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	12	3.9
2	2.4	14	2.3
4	5.1	16	1.6
6	7.8	18	0.7
8	7.6	20	0
10	5.4		

19. Se muestra la gráfica de la función concentración $c(t)$ después de inyectar 7 mg de tintura dentro de un corazón. Aplique la regla de Simpson para estimar el rendimiento cardiaco.



8.5 PROBABILIDAD

El cálculo desempeña un papel en el análisis del comportamiento aleatorio. Suponga que se considera el nivel de colesterol de una persona elegida al azar de un cierto grupo de edad, o la estatura de una mujer adulta elegida al azar, o la duración de una batería de cierto tipo elegida en forma aleatoria. Tales cantidades se llaman **variables aleatorias continuas,** porque sus valores varían en realidad en un intervalo de números reales, aunque se podrían medir o registrar sólo hasta el entero más próximo. Quizá se desee conocer la probabilidad de que el nivel de colesterol sea mayor que 250, o la probabilidad de que la altura de una mujer adulta esté entre 60 y 70 pulgadas, o la probabilidad de que la duración de la batería que se está comprando sea de entre 100 y 200 horas. Si X representa la duración de ese tipo de batería, su probabilidad se denota como sigue:

$$P(100 \leqslant X \leqslant 200)$$

De acuerdo con la interpretación de frecuencia de probabilidad, este número es la proporción de largo plazo de las baterías del tipo especificado cuyos tiempos de vida están entre 100 y 200 horas. Puesto que representa una proporción, la probabilidad naturalmente cae entre 0 y 1.

Toda variable aleatoria continua X tiene una **función de densidad de probabilidad** f. Esto significa que la probabilidad de que X esté entre a y b se encuentra integrando f de a a b:

$$\boxed{1} \qquad P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Por ejemplo, en la figura 1 se muestra la gráfica de un modelo de la función de densidad de probabilidad f para una variable aleatoria X definida como la altura en pulgadas de una mujer adulta en Estados Unidos (de acuerdo con los datos de la *National Health Survey*). La probabilidad de que la altura de una mujer elegida al azar de esta población esté entre 60 y 70 pulgadas, es igual al área bajo la gráfica de f de 60 a 70.

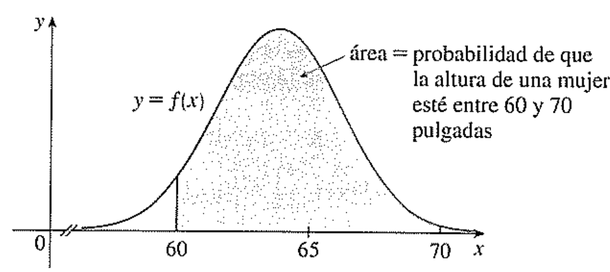


FIGURA 1
Función de densidad de probabilidad para la altura de una mujer adulta

En general, la función de densidad de probabilidad f de una variable aleatoria X satisface la condición $f(x) \geqslant 0$ para toda x. Debido a que las probabilidades se miden en una escala de 0 a 1, se deduce que

$$\boxed{2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 0.006x(10 - x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$ y $f(x) = 0$ para los otros valores de x.
(a) Compruebe que f es una función de densidad de probabilidad.
(b) Determine $P(4 \leqslant X \leqslant 8)$.

SOLUCIÓN
(a) Para $0 \leqslant x \leqslant 10$ se tiene $0.006x(10 - x) \geqslant 0$, por lo tanto, $f(x) \geqslant 0$ para toda x. Se necesita comprobar también que se satisface la ecuación 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{10} 0.006x(10 - x)\,dx = 0.006 \int_0^{10} (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{10} = 0.006\left(500 - \tfrac{1000}{3}\right) = 1$$

Por lo tanto, f es una función de densidad de probabilidad.

(b) La probabilidad de que X esté entre 4 y 8 es

$$P(4 \leqslant X \leqslant 8) = \int_4^8 f(x)\,dx = 0.006 \int_4^8 (10x - x^2)\,dx$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^8 = 0.544$$

□

EJEMPLO 2 Fenómenos como los tiempos de espera y los tiempos de falla de equipo, se modelan por lo común mediante funciones de densidad de probabilidad que decrecen en forma exponencial. Determine la forma exacta de tal función.

SOLUCIÓN Considere la variable aleatoria como el tiempo de espera en una llamada antes de que conteste un agente de una compañía a la que usted está llamando. Así que en lugar de x, se emplea t para representar el tiempo, en minutos. Si f es la función de densidad de probabilidad y usted llama en el tiempo $t = 0$, a continuación, de la definición 1, $\int_0^2 f(t)\,dt$ representa la probabilidad de que un agente conteste dentro de los primeros dos minutos y $\int_4^5 f(t)\,dt$ es la probabilidad de que la llamada sea contestada durante el minuto cinco.

Es claro que $f(t) = 0$ para $t < 0$ (el agente no puede contestar antes de que usted llame). Para $t > 0$ se indica usar una función que decrece en forma exponencial, es decir, una función de la forma $f(t) = Ae^{-ct}$, donde A y c son constantes positivas. Así,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ Ae^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Se usa la condición 2 para determinar el valor de A:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^{\infty} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} Ae^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x Ae^{-ct}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[-\frac{A}{c}e^{-ct}\right]_0^x = \lim_{x\to\infty} \frac{A}{c}(1 - e^{-cx})$$

$$= \frac{A}{c}$$

Por lo tanto, $A/c = 1$ y así $A = c$. En estos términos, toda función de densidad exponencial tiene la forma

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

En la figura 2 se ilustra una gráfica representativa.

□

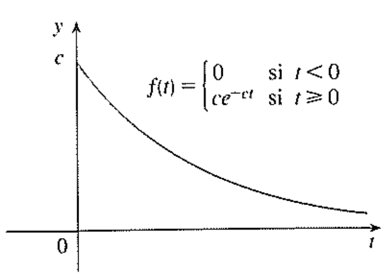


FIGURA 2
Una función de densidad exponencial

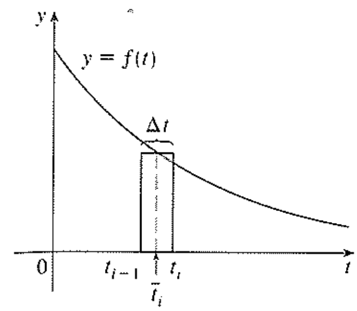


FIGURA 3

VALORES PROMEDIO

Suponga que está en espera de que una compañía conteste su llamada telefónica y se pregunta cuánto tiempo, en promedio, está dispuesto a esperar. Sea $f(t)$ la función de densidad correspondiente, donde t se mide en minutos, y considere una muestra de N personas que han llamado a esta compañía. Es muy probable que ninguno de ellos tuvo que esperar más de una hora, así que se restringe la atención al intervalo $0 \leqslant t \leqslant 60$. Divida ese intervalo en n intervalos de longitud Δt y puntos finales $0, t_1, t_2, \ldots$ (Considere que Δt dura un minuto, o medio minuto, o 10 segundos o incluso un segundo). La probabilidad de que la llamada de alguien sea contestada durante el periodo de t_{i-1} a t_i es el área bajo la curva $y = f(t)$ de t_{i-1} a t_i, que es aproximadamente igual a $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$. (Ésta es el área del rectángulo de aproximación en la figura 3, donde $\bar{t}_i$ es el punto medio del intervalo.)

Puesto que la proporción a largo plazo de llamadas que son contestadas en el periodo de t_{i-1} a t_i es $f(\bar{t}_i)\,\Delta t$, se espera que, de la muestra de N personas que llaman, la cantidad cuya llamada fue contestada en ese periodo es aproximadamente $Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t$ y el tiempo que cada uno esperó es de alrededor de $\bar{t}_i$. Por lo tanto, el tiempo total que esperaron es el producto de estos números: aproximadamente $\bar{t}_i[Nf(\bar{t}_i)\,\Delta t]$. Al sumar todos estos intervalos, se obtiene el total aproximado de los tiempos de espera de todos:

$$\sum_{i=1}^{n} N\bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Si ahora se divide entre el número de personas que llamaron N, se obtiene el tiempo de espera *promedio* aproximado:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{t}_i f(\bar{t}_i)\,\Delta t$$

Se reconoce a esto como una suma de Riemann para la función $tf(t)$. Cuando se acorta el intervalo (es decir, $\Delta t \to 0$ y $n \to \infty$), esta suma de Riemann se aproxima a la integral

$$\int_0^{60} tf(t)\,dt$$

Esta integral se llama *la media del tiempo de espera*.

▨ Es práctica común denotar la media por la letra griega μ (mu).

En general, la **media** de cualquier función de densidad de probabilidad f se define como

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

La media se puede interpretar como el valor promedio a largo plazo de la variable aleatoria X. Se puede interpretar también como una medida de la posición central de la función de densidad de probabilidad.

La expresión para la media se asemeja a una integral que se ha visto antes. Si $\mathcal{R}$ es la región que yace bajo la gráfica de f, se sabe de la fórmula 8.3.8 que la coordenada x del centroide de $\mathcal{R}$ es

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \mu$$

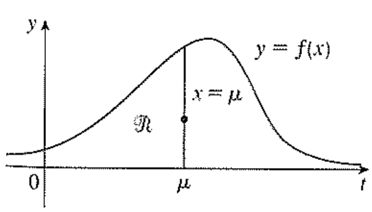


FIGURA 4
$\mathcal{R}$ se equilibra en un punto sobre la recta $x = \mu$

debido a la ecuación 2. De modo que una placa delgada en la forma de $\mathcal{R}$ se equilibra en un punto sobre la línea vertical $x = \mu$. (Véase figura 4).

EJEMPLO 3 Encuentre la media de la distribución exponencial del ejemplo 2:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ce^{-ct} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN De acuerdo con la definición de una media, se tiene

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{\infty} tce^{-ct}\,dt$$

Para evaluar esta integral se usa la integración por partes, con $u = t$ y $dv = ce^{-ct}\,dt$:

$$\int_0^{\infty} tce^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x tce^{-ct}\,dt = \lim_{x\to\infty} \left(-te^{-ct}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-ct}\,dt \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(-xe^{-cx} + \frac{1}{c} - \frac{e^{-cx}}{c} \right) = \frac{1}{c}$$

El límite del primer término es 0 por la regla de l'Hospital.

La media es $\mu = 1/c$, así que se puede reescribir la función de densidad de probabilidad como

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \mu^{-1}e^{-t/\mu} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

□

EJEMPLO 4 Suponga que el tiempo de espera promedio para que la llamada de un cliente sea contestada por un representante de la compañía es cinco minutos.
(a) Encuentre la probabilidad de que una llamada sea contestada durante el primer minuto.
(b) Determine la probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos a que sea contestada su llamada.

SOLUCIÓN
(a) Se tiene como dato que la media de la distribución exponencial es $\mu = 5$ min y, por lo tanto, del resultado del ejemplo 3, se sabe que la función de densidad de probabilidad es

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0.2e^{-t/5} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Por esto, la probabilidad de que una llamada sea contestada durante el primer minuto es

$$P(0 \leqslant T \leqslant 1) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 0.2e^{-t/5}\,dt = 0.2(-5)e^{-t/5}\Big]_0^1$$

$$= 1 - e^{-1/5} \approx 0.1813$$

Por consiguiente, cerca de 18% de las llamadas de los clientes, serán contestadas durante el primer minuto.

(b) La probabilidad de que un cliente espere más de cinco minutos, es

$$P(T > 5) = \int_5^{\infty} f(t)\,dt = \int_5^{\infty} 0.2e^{-t/5}\,dt$$

$$= \lim_{x\to\infty} \int_5^x 0.2e^{-t/5}\,dt = \lim_{x\to\infty} (e^{-1} - e^{-x/5})$$

$$= \frac{1}{e} \approx 0.368$$

Cerca de 37% de los clientes espera más de cinco minutos antes de que su llamada sea contestada. □

Observe el resultado del ejemplo 4(b): aun cuando el tiempo promedio de espera es 5 minutos, sólo 37% de las personas que llaman esperan más de 5 minutos. La razón es que algunas de las personas que llaman tienen que esperar mucho más tiempo (quizá 10 o 15 minutos), y esto hace subir el promedio.

Otra medida de centralidad de una función de densidad de probabilidad, es la *mediana*. Éste es un número m tal que la mitad de las personas que llaman tienen un tiempo de espera menor que m y la otra mitad tiene un tiempo de espera más largo que m. En general, la **mediana** de una función de densidad de probabilidad es el número m tal que

$$\int_m^\infty f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}$$

Esto significa que la mitad del área bajo la gráfica de f se localiza a la derecha de m. En el ejercicio 9 se pidió mostrar que el tiempo de espera promedio para la compañía descrita en el ejemplo 4 es aproximadamente 3.5 minutos.

DISTRIBUCIONES NORMALES

Muchos fenómenos aleatorios importantes, como las puntuaciones en pruebas de aptitud, estaturas y pesos de individuos de una población homogénea, precipitación pluvial anual en un determinado lugar, se modelan mediante una **distribución normal**. Esto significa que la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria X es un miembro de la familia de funciones

$$\boxed{3} \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

La desviación estándar se denota con la letra griega σ (sigma) minúscula.

Se puede comprobar que la media para esta función es μ. La constante positiva σ se llama **desviación estándar**; ésta mide cuán dispersos están los valores de X. De las gráficas en forma de campana de miembros de la familia de la figura 5, se ve que para valores pequeños de σ los valores de X están agrupados respecto a la media, mientras que para valores más grandes de σ los valores de X están más dispersos. Los estadísticos tienen métodos que les permiten usar conjuntos de datos para estimar μ y σ.

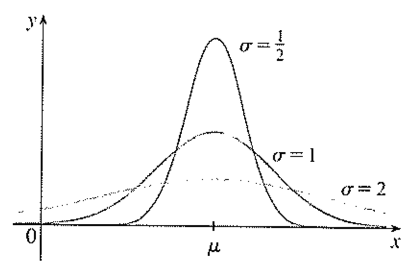


FIGURA 5
Distribuciones normales

El factor $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ es necesario para hacer de f una función de densidad de probabilidad. De hecho, se puede comprobar por medio de los métodos de cálculo de varias variables que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\,dx = 1$$

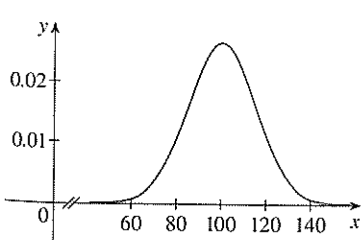


FIGURA 6
Distribución de puntuaciones de CI

EJEMPLO 5 Las puntuaciones del cociente intelectual (CI) tienen una distribución normal con media 100 y desviación estándar 15. (En la figura 6 se muestra la función de densidad de probabilidad correspondiente.)

(a) ¿Qué porcentaje de la población tiene una puntuación de CI entre 85 y 115?

(b) ¿Qué porcentaje de la población tiene un CI arriba de 140?

SOLUCIÓN

(a) Puesto que las puntuaciones CI tienen una distribución normal, se usa la función de densidad de probabilidad dada por la ecuación 3 con $\mu = 100$ y $\sigma = 15$:

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) = \int_{85}^{115} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/(2\cdot 15^2)}\, dx$$

Recuerde de la sección 7.5 que la función $y = e^{-x^2}$ no tiene una antiderivada elemental, así que no se puede evaluar la integral de manera exacta. Pero se puede usar la capacidad de integración numérica de una calculadora o computadora (o la regla del punto medio o la regla de Simpson) para estimar la integral. Al hacerlo se encuentra que

$$P(85 \leqslant X \leqslant 115) \approx 0.68$$

Por lo tanto, cerca de 68% de la población tiene un CI entre 85 y 115, es decir, dentro de una desviación estándar de la media.

(b) La probabilidad de que la puntuación del CI de una persona elegida al azar sea más de 140 es

$$P(X > 140) = \int_{140}^{\infty} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/450}\, dx$$

Para evitar la integral impropia, se podría aproximarla mediante la integral de 140 a 200. (Es bastante seguro decir que las personas con un CI de más de 200 son muy pocas.) En tal caso

$$P(X > 140) \approx \int_{140}^{200} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-100)^2/450}\, dx \approx 0.0038$$

Por lo tanto, cerca de 0.4% de la población tiene un CI de más de 140. □

8.5 EJERCICIOS

1. Sea $f(x)$ la función de densidad de probabilidad para la duración de la llanta de automóvil de la más alta calidad de un fabricante, donde x se mide en millas. Explique el significado de cada integral.

   (a) $\int_{30\,000}^{40\,000} f(x)\, dx$ (b) $\int_{25\,000}^{\infty} f(x)\, dx$

2. Sea $f(t)$ la función de densidad de probabilidades para el tiempo que le toma conducir a la escuela en la mañana, donde t se mide en minutos. Exprese las siguientes probabilidades como integrales.
   (a) La probabilidad de que llegue a la escuela en menos de 15 minutos
   (b) La probabilidad de que tarde más de media hora en llegar a la escuela.

3. Sea $f(x) = \frac{3}{64}x\sqrt{16 - x^2}$ para $0 \leqslant x \leqslant 4$ y $f(x) = 0$ para los otros valores de x.
   (a) Compruebe que f es una función de densidad de probabilidad.
   (b) Encuentre $P(X < 2)$.

4. Sea $f(t) = xe^{-x}$ si $x \geqslant 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$.
   (b) Compruebe que f es una función de densidad de probabilidad.
   (b) Hallar $P(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

5. Sea $f(x) = c/(1 + x^2)$.
   (a) ¿Para qué valor de c, f es una función de densidad de probabilidad?
   (b) Para ese valor de c, hallar $P(-1 < x < 1)$.

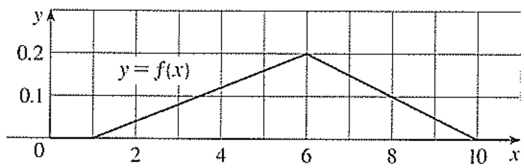
6. Sea $f(x) = kx^2(1 - x)$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$ o $x > 1$.
   (a) ¿Para qué valor de k es f una función de densidad de probabilidad?
   (b) Para ese valor de k, determine $P\left(X \geqslant \frac{1}{2}\right)$.
   (c) Encuentre la media.

7. Una perinola de un juego de mesa indica al azar un número real entre 0 y 10. La perinola es justa en el sentido de que indica un número en un intervalo dado con la misma probabilidad que indica un número en cualquier otro intervalo de la misma extensión.
   (a) Explique por qué la función

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 10 \end{cases}$$

   es la función de densidad de probabilidad para los valores de la perinola.
   (b) ¿Qué le indica su intuición acerca del valor de la media? Compruebe su inferencia evaluando la integral.

8. (a) Explique por qué la función cuya gráfica se muestra es una función de densidad de probabilidad.
(b) Use la gráfica para hallar las siguientes probabilidades:
(i) $P(X < 3)$ (ii) $P(3 \leqslant X \leqslant 8)$
(c) Calcule la media.



9. Muestre que el tiempo de espera promedio para una llamada telefónica a la compañía descrita en el ejemplo 4 sea de alrededor de 3.5 minutos.

10. (a) Cierta clase de lámpara lleva una marca que indica una duración promedio de 1 000 horas. Es razonable modelar la probabilidad de falla de estas lámpara mediante una función de densidad exponencial con media $\mu = 1\,000$. Use este modelo para hallar la probabilidad de que la lámpara
(i) falle dentro de las primeras 200 horas,
(ii) se quema para más de 800 horas.
(b) ¿Cuál es la duración promedio de estas lámpara?

11. El administrador de un restaurante de comida rápida determina que el tiempo promedio que sus clientes esperan a ser atendidos es 2.5 minutos.
(a) Encuentre la probabilidad de que un cliente tenga que esperar durante más de 4 minutos.
(b) Encuentre la probabilidad de que un cliente sea atendido dentro de los primeros dos minutos.
(c) El administrador quiere anunciar que cualquier persona que no sea atendida dentro de cierto número de minutos, tiene derecho a una hamburguesa gratis. Pero no quiere dar hamburguesas gratis a más de 2% de sus clientes. ¿Qué debe decir el anuncio?

12. De acuerdo con la *National Health Survey*, las alturas de varones adultos en Estados Unidos tienen una distribución normal con media de 69.0 pulgadas y desviación estándar de 2.8 pulgadas.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un varón adulto elegido al azar tenga una estatura de entre 65 y 73 pulgadas?
(b) ¿Qué porcentaje de la población de varones adultos tiene una estatura de más de 6 pies?

13. El "Proyecto basura" en la Universidad de Arizona informa que la cantidad de papel que se desecha en los hogares por semana tiene una distribución normal con media de 9.4 lb y desviación estándar de 4.2 lb. ¿Qué porcentaje de los hogares tira por lo menos 10 lb de papel a la semana?

14. El contenido de unas cajas de cereal indica 500 g. La máquina que llena las cajas produce pesos que tienen una distribución normal con desviación estándar 12 g.
(a) Si el peso objetivo es 500 g, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina produzca una caja con menos de 480 g de cereal?
(b) Suponga que una ley establece que no más de 5% de las cajas de cereal de un fabricante puede contener menos del peso establecido de 500 g. ¿En qué peso objetivo debe fijar el fabricante su máquina de llenado?

15. Las magnitudes de la rapidez de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 100 km/h usualmente están distribuidas con una media de 112 km/h y una desviación estándar de 8 km/h.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo elegido al azar esté viajando con una velocidad dispuesta por ley?
(b) Si los policías están instruidos para infraccionar a los automovilistas conduzcan a 125 km/h o más, que porcentaje de automovilistas están señalados.

16. Demuestre que la función de densidad de probabilidad para una variable usualmente distribuida tiene puntos de inflexión en $x = \mu \pm \sigma$.

17. Para cualquier distribución normal, encuentre la probabilidad de que la variable aleatoria se localice dentro de dos desviaciones estándar de la media.

18. La desviación estándar para una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad f y media μ se define por

$$\sigma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx\right]^{1/2}$$

Encuentre la desviación estándar para una función de densidad exponencial con media μ.

19. El átomo de hidrógeno se compone de un protón en el núcleo y un electrón, que se mueve respecto al núcleo. En la teoría cuántica de la estructura atómica, se supone que el electrón no se mueve en una órbita bien definida. En cambio, ocupa un estado conocido como *orbital*, que se puede considerar como una "nube" de carga negativa en torno al núcleo. En el estado de menor energía, llamado *estado basal*, u *orbital 1s*, la forma de esta nube se supone como una esfera centrada en el núcleo. Esta esfera se describe en términos de la función de densidad de probabilidad

$$p(r) = \frac{4}{a_0^3}\, r^2 e^{-2r/a_0} \qquad r \geqslant 0$$

donde a_0 es el *radio de Bohr* ($a_0 \approx 5.59 \times 10^{-11}$ m). La integral

$$P(r) = \int_0^r \frac{4}{a_0^3}\, s^2 e^{-2s/a_0}\, ds$$

da la probabilidad de que el electrón se encuentre dentro de la esfera de radio r metros centrada en el núcleo.
(a) Compruebe que $p(r)$ es una función de densidad de probabilidad.
(b) Determine el $\lim_{r \to \infty} p(r)$. ¿Para qué valor de r la expresión $p(r)$ tiene su valor máximo?
(c) Grafique la función de densidad.
(d) Encuentre la probabilidad de que el electrón esté dentro de la esfera de radio $4a_0$ centrada en el núcleo.
(e) Calcule la distancia media del electrón desde el núcleo en el estado basal del átomo de hidrógeno.

8 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Cómo se define la longitud de una curva?
   (b) Escriba una expresión para la longitud de una curva uniforme dada por $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$.
   (c) ¿Qué pasa si x se da como una función de y?
2. (a) Escriba una expresión para el área superficial de la superficie obtenida al hacer girar la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, respecto al eje x.
   (b) ¿Qué pasa si x se da como una función de y?
   (c) ¿Qué pasa si la curva se hace girar respecto al eje y?
3. Describa cómo se puede determinar la fuerza hidrostática contra una pared vertical sumergida en un fluido.
4. (a) ¿Cuál es el significado físico del centro de masa de una placa delgada?
   (b) Si la placa está entre $y = f(x)$ y $y = 0$, donde $a \leqslant x \leqslant b$, escriba expresiones para las coordenadas del centro de masa.
5. ¿Qué dice el teorema de Pappus?
6. Dada una función de demanda $p(x)$, explique lo que se entiende por el superávit de consumo cuando la cantidad de un artículo actualmente disponible es X y el precio de venta actual es P. Ilustre con un bosquejo.
7. (a) ¿Cuál es el rendimiento cardiaco del corazón?
   (b) Explique cómo se puede medir el rendimiento cardiaco por el método de dilución de colorante.
8. ¿Qué es la función de densidad de probabilidad? ¿Qué propiedades tiene tal función?
9. Suponga que $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad para el peso de una alumna universitaria, donde x se mide en libras.
   (a) ¿Cuál es el significado de la integral $\int_0^{130} f(x)\,dx$?
   (b) Escriba una expresión para la media de esta función de densidad.
   (c) ¿Cómo se puede hallar la mediana de esta función de densidad?
10. ¿Qué es una distribución normal? ¿Cuál es el significado de la desviación estándar?

EJERCICIOS

1–2 Encuentre la longitud de la curva.

1. $y = \frac{1}{6}(x^2 + 4)^{3/2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3$
2. $y = 2\ln(\operatorname{sen} \frac{1}{2}x), \quad \pi/3 \leqslant x \leqslant \pi$

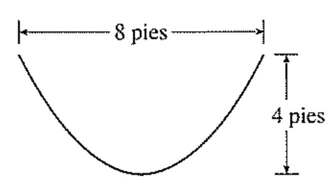
3. (a) Encuentre la longitud de la curva

$$y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2} \qquad 1 \leqslant x \leqslant 2$$

   (b) Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del inciso (a) respecto al eje y.
4. (a) La curva $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, se hace girar respecto al eje y. Encuentre el área de la superficie resultante.
   (b) Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del inciso (a) respecto al eje x.
5. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar la longitud de la curva $y = e^{-x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.
6. Emplee la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del ejercicio 5 respecto al eje x.
7. Encuentre la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t} - 1}\,dt \qquad 1 \leqslant x \leqslant 16$$

8. Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva del ejercicio 7 respecto al eje y.
9. Una compuerta en un canal de irrigación se construye en la forma de un trapecio de 3 ft de ancho en el fondo, 5 ft de ancho en la parte superior y 2 ft de alto. Se coloca verticalmente en el canal, con el agua que se extiende hasta su parte superior. Determine la fuerza hidrostática en un lado de la compuerta.
10. Un canal se llena con agua y sus extremos verticales tienen la forma de la región parabólica en la figura. Encuentre la fuerza hidrostática en un extremo del canal.



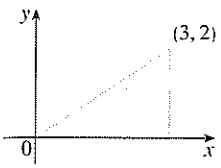
11–12 Determine el centroide de la región acotada por las curvas dadas.

11. $y = \frac{1}{2}x,\; y = \sqrt{x}$,

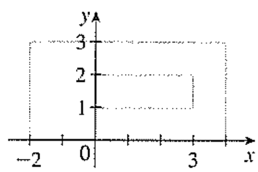
12. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = 0, \quad x = \pi/4, \quad x = 3\pi/4$

13–14 Encuentre el centroide de la región mostrada.

13.



14.



15. Encuentre el volumen obtenido cuando el círculo de radio 1 con centro (1, 0) se hace girar respecto al eje y.

16. Use el teorema de Pappus y el hecho de que el volumen de una esfera de radio r es $\frac{4}{3}\pi r^3$ para encontrar el centroide de la región semicircular acotada por la curva $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ y el eje x.

17. La función de demanda para un artículo se da por $p = 2000 - 0.1x - 0.01x^2$. Encuentre el superávit del consumo cuando el nivel de ventas es 100.

18. Después de una inyección de 6 mg de colorante al corazón, las lecturas de concentración de colorante a intervalos de dos segundos se muestran en la tabla. Use la regla de Simpson para estimar el rendimiento cardiaco.

t	$c(t)$	t	$c(t)$
0	0	14	4.7
2	1.9	16	3.3
4	3.3	18	2.1
6	5.1	20	1.1
8	7.6	22	0.5
10	7.1	24	0
12	5.8		

19. (a) Explique por qué la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{20}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{10}\right) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 10 \end{cases}$$

es una función de densidad de probabilidad.

(b) Encuentre $P(X < 4)$.

(c) Calcule la media. ¿Es el valor que esperaría?

20. Los lapsos de embarazos humanos tienen una distribución normal con media de 268 días y una desviación estándar de 15 días. ¿Qué porcentaje de embarazos dura entre 250 días y 280 días?

21. El tiempo gastado en la fila de espera de cierto banco se modela mediante una función de densidad exponencial con media de 8 minutos.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido en los primeros 3 minutos?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente tenga que esperar más de 10 minutos?

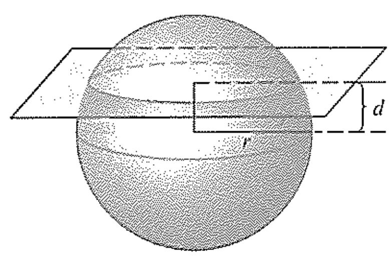
(c) ¿Cuál es la mediana del tiempo de espera?

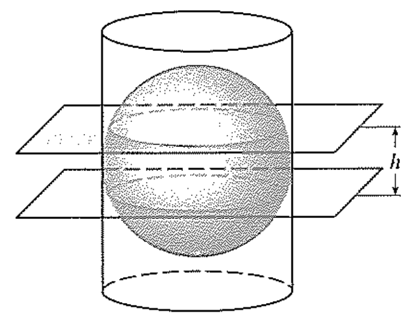
PROBLEMAS ADICIONALES

1. Encuentre el área de la región $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \leqslant 1,\ x^2 + y^2 \leqslant 4y\}$.

2. Encuentre el centroide de la región encerrada por el bucle de la curva $y^2 = x^3 - x^4$.

3. Si la esfera de radio r se corta mediante un plano cuya distancia desde el centro de la esfera es d, en tal caso la esfera se divide en dos piezas llamadas segmentos de una base. Las superficies correspondientes se llaman *zonas esféricas de una base*.
   (a) Determine las áreas superficiales de las dos zonas esféricas indicadas en la figura.
   (b) Determine el área aproximada del océano Ártico suponiendo que su forma es aproximadamente circular, con centro en el polo norte y "circunferencia" a 75° latitud norte. Use $r = 3\,960$ millas para el radio de la Tierra.
   (c) Una esfera de radio r se inscribe en un cilindro circular recto de radio r. Dos planos perpendiculares al eje central del cilindro y apartados una distancia h cortan una *zona esférica de dos bases* en la esfera. Muestre que el área superficial de la zona esférica es igual al área superficial de la región que los dos planos cortan en el cilindro.
   (d) La *zona tórrida* es la región sobre la superficie de la Tierra que está entre el trópico de Cáncer (23.45° latitud norte) y el trópico de Capricornio (23.45° latitud sur). ¿Cuál es el área de la zona tórrida?





4. (a) Muestre que un observador a la altura H arriba del polo norte de una esfera de radio r puede ver una parte de la esfera que tiene un área

$$\frac{2\pi r^2 H}{r + H}$$

   (b) Dos esferas con radios r y R se colocan de modo que la distancia entre sus centros es d, donde $d > r + R$. ¿Dónde se debe colocar una luz sobre la línea que une los centros de las esferas a fin de iluminar la superficie total más grande?

5. Suponga que la densidad del agua de mar, $\rho = \rho(z)$, varía con la profundidad z debajo de la superficie.
   (a) Muestre que la presión hidrostática está gobernada por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dz} = \rho(z)g$$

   donde g es la aceleración debida a la gravedad. Sea P_0 y ρ_0 la presión y la densidad en $z = 0$. Exprese la presión a profundidad z como una integral.
   (b) Suponga que la densidad del agua de mar a la profundidad z está dada por $\rho = \rho_0 e^{z/H}$, donde H es una constante positiva. Encuentre la fuerza total, expresada como una integral, ejercida sobre un orificio circular vertical de radio r cuyo centro se localiza a una distancia $L > r$ debajo de la superficie.

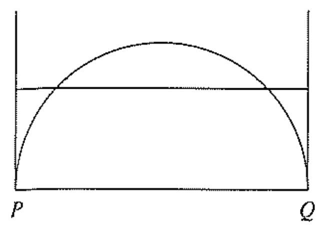


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

6. En la figura se muestra un semicírculo con radio 1, diámetro horizontal PQ, rectas tangentes en P y Q. ¿A qué altura arriba del diámetro se debe colocar la recta horizontal para minimizar el área sombreada?

7. Sea P una pirámide con una base cuadrada de lado $2b$ y suponga que S es una esfera con su centro en la base de P y S es tangente a los ocho lados de P. Determine la altura de P. Después calcule el volumen de la intersección de S y P.

8. Considere una placa metálica plana que se colocará verticalmente bajo el agua con la parte superior sumergida 2 m debajo de la superficie del agua. Determine una forma para la placa de modo que si ésta se divide en cierto número de tiras horizontales de igual altura, la fuerza hidrostática en cada tira es la misma.

9. Un disco uniforme con radio 1 se cortará mediante una línea de modo que el centro de masa de la pieza más pequeña se localice a la mitad a lo largo de un radio. ¿Qué tan cerca del centro del disco se debe hacer el corte? (Exprese su respuesta correcta hasta dos decimales.)

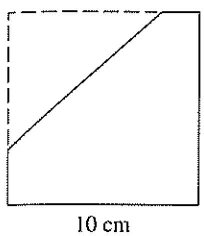
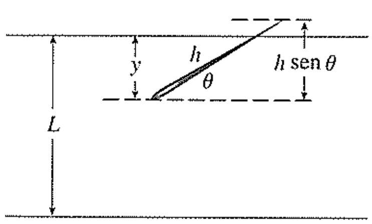


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

10. Un triángulo con área 30 cm^2 se corta desde una esquina de un cuadrado con lado 10 cm, como se ilustra en la figura. Si el centroide de la región restante es 4 cm desde el lado derecho del cuadrado, ¿qué tan lejos está del fondo del cuadrado?

11. En un problema famoso del siglo XVIII, conocido como *problema de la aguja del bufón*, se deja caer una aguja de longitud h sobre una superficie plana (por ejemplo, una mesa) en la que se han dibujado líneas paralelas apartadas L unidades, $L \geqslant h$, El problema es determinar la probabilidad de que la aguja llegue al reposo cortando una de las líneas. Suponga que las líneas van de este a oeste, paralelas al eje x en un sistema coordenado rectangular (como en la figura). Sea y la distancia del extremo sur de la aguja a la línea más próxima al norte. (Si el extremo sur de la aguja yace sobre una línea, sea $y = 0$. Si la aguja yace de este a oeste, sea el extremo "oeste" el extremo "sur".) Sea θ el ángulo que la aguja forma con un rayo que se extiende hacia el este desde el extremo "sur". Después $0 \leqslant y \leqslant L$ y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Note que la aguja interseca una de las líneas sólo cuando $y < h$ sen θ. Ahora, el conjunto total de posibilidades para la aguja se puede identificar con la región rectangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, y la proporción de veces que una aguja corta una línea es la relación

$$\frac{\text{área bajo } y = h \operatorname{sen} \theta}{\text{área del rectángulo.}}$$



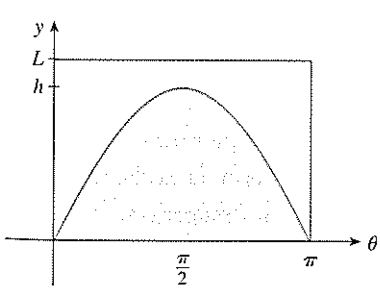


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

Esta relación es la probabilidad de que la aguja corte una línea. Determine la probabilidad de que la aguja corte una línea si $h = L$. ¿Qué pasa si $h = \frac{1}{2}L$?

12. Si la aguja del problema 11 tiene longitud $h > L$, es posible que la aguja corte más de una línea.

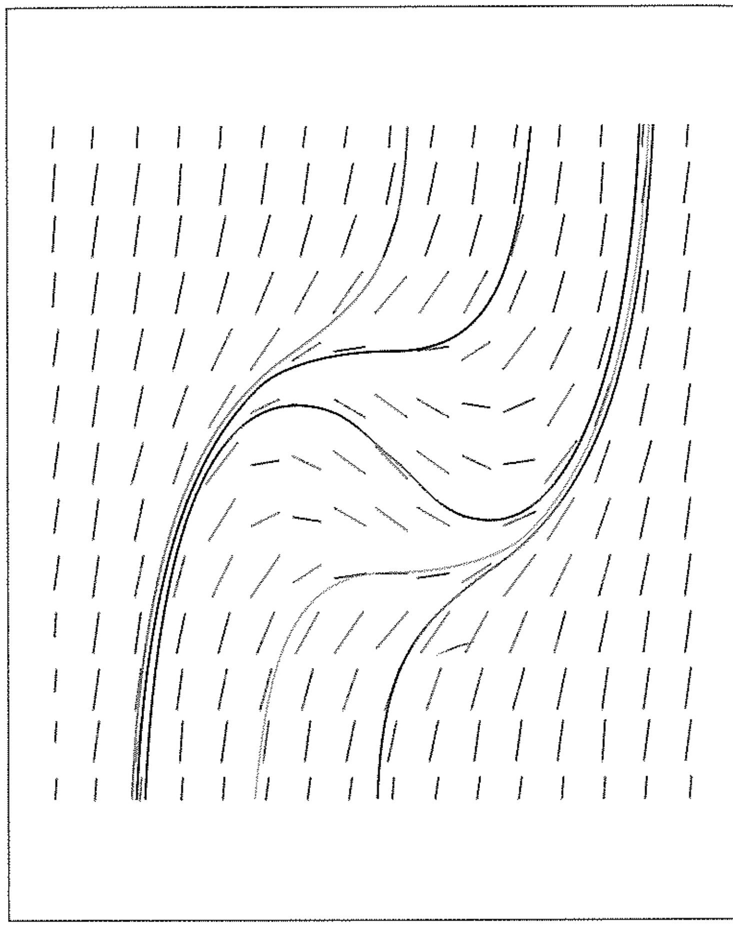
(a) Si $L = 4$, encuentre la probabilidad de que una aguja de longitud 7 corte por lo menos una línea. [*Sugerencia*: proceda como en el problema 11. Defina y como antes; en tal caso el conjunto total de posibilidades para la aguja se puede identificar con la misma región rectangular $0 \leqslant y \leqslant L$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. ¿Qué porción del rectángulo corresponde a la aguja que corte una línea?]

(b) Si $L = 4$, encuentre la probabilidad de que una aguja de longitud 7 corte *dos* líneas.

(c) Si $2L < h \leqslant 3L$, encuentre una fórmula general para la probabilidad de que la aguja corte tres líneas.

9

ECUACIONES DIFERENCIALES



Los campos de dirección permiten delinear soluciones de ecuaciones diferenciales con una fórmula explícita.

Quizá la más importante de todas las aplicaciones del cálculo es a las ecuaciones diferenciales. Cuando los científicos emplean el cálculo, muy a menudo es para analizar una ecuación diferencial que ha surgido en el proceso de modelar algún fenómeno que están estudiando. Aun cuando frecuentemente es imposible hallar una fórmula explícita para la solución de una ecuación diferencial, los planteamientos gráficos y numéricos proporcionan la información necesaria.

9.1 MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES

Ahora es un buen momento para leer (o volver a leer) la exposición de una representación matemático en la página 24.

Al describir el proceso de representación en la sección 1.2, se habló acerca de formular un modelo matemático de un problema del mundo real, ya sea por razonamiento intuitivo acerca del fenómeno o de una ley física en función de la evidencia de experimentos. El modelo matemático con frecuencia toma la forma de una *ecuación diferencial*, es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas. Esto no es sorprendente, porque en el problema del mundo real, es común observar que ocurran cambios y se desea predecir el comportamiento futuro con respecto a cómo cambian los valores actuales. Se comienza por examinar varios ejemplos de cómo surgen las ecuaciones diferenciales cuando se representan fenómenos físicos.

MODELOS DE CRECIMIENTO POBLACIONAL

Un modelo para el crecimiento de una población se basa en la suposición de que la población crece en una cantidad proporcional al tamaño de la población. Ésa es una suposición razonable para una población de bacterias o animales en condiciones ideales (ambiente ilimitado, nutrición adecuada, ausencia de predadores, inmunidad a enfermedad).

Se procede a identificar y nombrar las variables en este modelo:

t = tiempo (la variable independiente).

P = número de individuos en la población (la variable dependiente).

La rapidez de crecimiento de la población es la derivada dP/dt. Así que la suposición de que la rapidez de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población, se escribe como la ecuación

$$\boxed{1} \qquad \frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es la constante de proporcionalidad. La ecuación 1 es el primer modelo para el crecimiento poblacional; es una ecuación diferencial porque contiene una función desconocida P y su derivada dP/dt.

Una vez formulado un modelo, se consideran sus consecuencias. Si se descarta una población de 0, por lo tanto $P(t) > 0$ para toda t. Así, si $k > 0$, después la ecuación 1 muestra que $P'(t) > 0$ para toda t. Esto significa que la población siempre está creciendo. De hecho, cuando crece $P(t)$ la ecuación 1 muestra que dP/dt se vuelve más grande. En otras palabras, la rapidez de crecimiento se incrementa cuando crece la población.

La ecuación 1 pide hallar una función cuya derivada sea un múltiplo constante de sí mismo. Se sabe del capítulo 3 que las funciones exponenciales tienen esa propiedad. De hecho, si se establece $P(t) = Ce^{kt}$, en tal caso

$$P'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = kP(t)$$

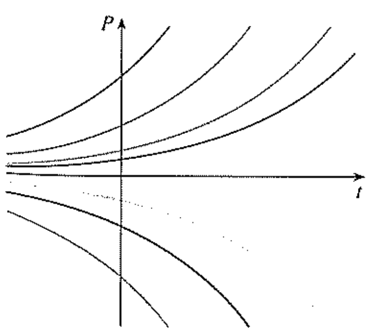


FIGURA 1
La familia de soluciones de $dP/dt = kP$

Así, cualquier función exponencial de la forma $P(t) = Ce^{kt}$ es una solución de la ecuación 1. Cuando se estudia esta ecuación en detalle en la sección 9.4, se verá que no hay otra solución.

Si se permite que C varíe por todos los números reales, se obtiene la *familia* de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ cuyas gráficas se muestran en la figura 1. Pero las poblaciones tienen sólo valores positivos y, por lo tanto, se está interesado sólo en soluciones con $C > 0$. Y probablemente se tiene interés sólo en valores de t mayores que el tiempo inicial $t = 0$. En la figura 2 se muestran las soluciones con significado físico. Si se escribe

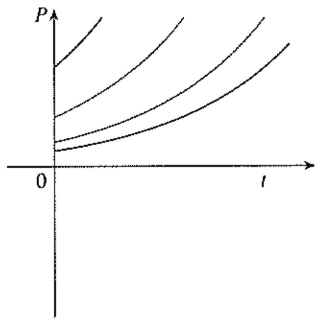


FIGURA 2
La familia de soluciones $P(t) = Ce^{kt}$ con $C > 0$ y $t \geqslant 0$

$t = 0$, se obtiene $P(0) = Ce^{k(0)} = C$, de modo que la constante C resulta ser la población inicial, $P(0)$.

La ecuación 1 es apropiada para representar el crecimiento poblacional en condiciones ideales, pero se tiene que reconocer que un modelo más real debe reflejar el hecho de que un determinado ambiente tiene recursos limitados. Muchas poblaciones comienzan incrementándose de manera exponencial, pero la población se estabiliza cuando se aproxima a su *capacidad de soporte* K (o disminuye hacia K si alguna vez excede a K). Para que un modelo tome en cuenta ambas tendencias, se hacen dos suposiciones:

- $\dfrac{dP}{dt} \approx kP$ si P es pequeña (al inicio, la rapidez de crecimiento es proporcional a P).

- $\dfrac{dP}{dt} < 0$ si $P > K$ (P disminuye si nunca excede a K).

Una expresión simple que incorpora ambas suposiciones, es la siguiente ecuación

$$\boxed{2} \qquad \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Observe que si P es pequeña en comparación con K, en seguida P/K se aproxima a 0 y, por lo tanto, $dP/dt \approx kP$. Si $P > K$, después $1 - P/K$ es negativa y, por lo tanto, $dP/dt < 0$.

La ecuación 2 se llama *ecuación diferencial logística,* y la propuso el biólogo matemático holandés Pierre-François Verhulst en la década de 1840 como un modelo para el crecimiento poblacional mundial. Se desarrollarán técnicas que permiten hallar soluciones explícitas de la ecuación logística en la sección 9.4, pero por ahora se pueden deducir características cualitativas de las soluciones directamente de la ecuación 2. Se observa primero que las funciones constantes $P(t) = 0$ y $P(t) = K$ son soluciones porque, en cualquier caso, uno de los factores del lado derecho de la ecuación 2 es cero. (Esto sin duda tiene sentido físico: si la población es alguna vez 0 o está a la capacidad de soporte, permanece así). Estas dos soluciones constantes se llaman *soluciones de equilibrio.*

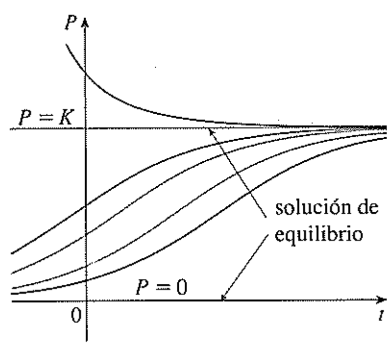


FIGURA 3
Soluciones de la ecuación logística

Si la población inicial $P(0)$ está entre 0 y K, después el lado derecho de la ecuación 2 es positivo, por lo tanto $dP/dt > 0$ y crece la población. Pero si la población rebasa la capacidad de soporte ($P > K$), en seguida $1 - P/K$ es negativa, así que $dP/dt < 0$ y la población disminuye. Observe que, en cualquier caso, si la población tiende a la capacidad de soporte ($P \to K$), en tal caso $dP/dt \to 0$, lo que significa que la población se estabiliza. Así que se espera que las soluciones de la ecuación diferencial logística tengan gráficas que se parecen a algo como las de la figura 3. Observe que las gráficas se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = K$.

MODELO PARA EL MOVIMIENTO DE UN RESORTE

Ahora se examina un ejemplo de un modelo de las ciencias físicas. Se considera el movimiento de un objeto con masa m en el extremo de un resorte vertical (como en la figura 4). En la sección 6.4 se analizó la ley de Hooke, la cual establece que si un resorte se estira (o comprime) x unidades desde su longitud natural, en tal caso ejerce una fuerza que es proporcional a x:

$$\text{fuerza de restauración} = -kx$$

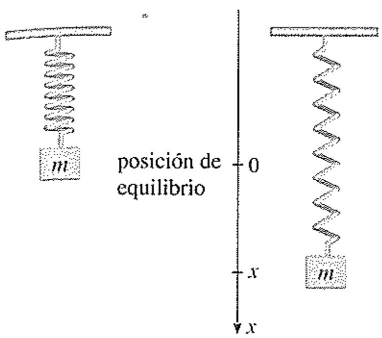


FIGURA 4

donde k es una constante positiva (llamada *constante del resorte*). Si se ignoran las fuerzas de resistencia externas (debidas a la resistencia del aire o la fricción) después, por la segunda ley de Newton (fuerza es igual a masa por aceleración), se tiene

$$\boxed{3} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Éste es un ejemplo de lo que se llama una *ecuación diferencial de segundo orden* porque tiene que ver con segundas derivadas. Se verá lo que se puede conjeturar acerca de la forma de la solución directamente de la ecuación. Se puede rescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

que dice que la segunda derivada de x es proporcional a x pero tiene signo opuesto. Se conocen dos funciones con esta propiedad, las funciones seno y coseno. De hecho, resulta que todas las soluciones de la ecuación 3 se pueden escribir como combinaciones de ciertas funciones seno y coseno (véase el ejercicio 4). Esto no es sorprendente; se espera que el resorte oscile respecto a su posición de equilibrio y, por lo tanto, es natural pensar que están involucradas las funciones trigonométricas.

ECUACIONES DIFERENCIALES GENERALES

En general, una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas. El **orden** de una ecuación diferencial, es de la derivada superior que aparece en la ecuación. Así, las ecuaciones 1 y 2 son de primer orden, y la ecuación 3 es de segundo. En las tres ecuaciones, la variable independiente se llama t y representa el tiempo, pero en general la variable independiente no tiene que representar tiempo. Por ejemplo, cuando se considera la ecuación diferencial

$$\boxed{4} \qquad y' = xy$$

se entiende que y es una función desconocida de x.

Una función f se llama **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando $y = f(x)$ y sus derivadas se sustituyen en la ecuación. Así, f es una solución de la ecuación 4 si

$$f'(x) = xf(x)$$

para todos los valores de x en algún intervalo.

Cuando se pide *resolver* una ecuación diferencial, se espera hallar las posibles soluciones de la ecuación. Ya se han resuelto algunas ecuaciones diferenciales particularmente simples, a saber, aquellas de la forma

$$y' = f(x)$$

Por ejemplo, se sabe que la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = x^3$$

está dada por

$$y = \frac{x^4}{4} + C$$

donde C es una constante arbitraria.

Pero, en general, resolver una ecuación diferencial no es un asunto fácil. No hay técnica sistemática que permita resolver todas las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en la sección 9.2 se verá cómo dibujar gráficas aproximadas de soluciones aun cuando no se tiene fórmula explícita. También se aprenderá cómo hallar aproximaciones numéricas a soluciones.

EJEMPLO 1 Muestre que cualquier integrante de la familia de funciones

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

es una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$.

SOLUCIÓN Se usa la regla del cociente para derivar la expresión para y:

$$y' = \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2}$$

$$= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

El lado derecho de la ecuación diferencial se convierte en

$$\tfrac{1}{2}(y^2 - 1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} = \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2}$$

Por lo tanto, para todo valor de c, la función dada es una solución de la ecuación diferencial. □

En la figura 5 se muestran las gráficas de siete integrantes de la familia del ejemplo 1. La ecuación diferencial muestra que si $y \approx \pm 1$, por lo tanto $y' \approx 0$. Esto se confirma por lo llano de las gráficas cerca de $y = 1$ y $y = -1$.

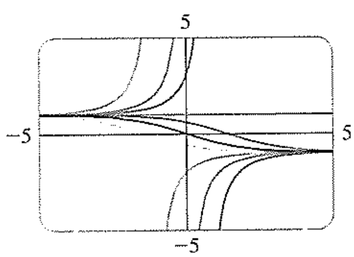


FIGURA 5

Al aplicar ecuaciones diferenciales, normalmente no se está tan interesado en hallar una familia de soluciones (la *solución general*) como en determinar una solución que satisfaga algún requerimiento adicional. En muchos problemas físicos se requiere hallar la solución particular que satisface una condición de la forma $y(t_0) = y_0$. Ésta se llama **condición inicial**, y el problema de hallar una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial se llama **problema de valor inicial**.

Desde el punto de vista geométrico, cuando se impone una condición inicial, se considera la familia de curvas solución y se elige una que pasa por el punto (t_0, y_0). Físicamente esto corresponde a medir el estado de un sistema en el tiempo t_0 y usar la solución del problema de valor inicial para predecir el comportamiento futuro del sistema.

EJEMPLO 2 Hallar una solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN Al sustituir los valores $t = 0$ y $y = 2$ en la fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

del ejemplo 1, se obtiene

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Si esta ecuación se resuelve para c, se obtiene $2 - 2c = 1 + c$, que da $c = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t} = \frac{3 + e^t}{3 - e^t}$$ □

9.1 EJERCICIOS

1. Muestre que $y = x - x^{-1}$ es una solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 2x$.

2. Compruebe que $y = \operatorname{sen} x \cos x - \cos x$ es una solución del problema de valor inicial

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x \qquad y(0) = -1$$

en el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$.

3. (a) ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial $2y'' + y' - y = 0$?

(b) Si r_1 y r_2 son los valores de r que halló en el inciso (a), demuestre que cualquier integrante de la familia de funciones $y = ae^{r_1 x} + be^{r_2 x}$ también es una solución.

4. (a) ¿Para qué valores de k la función $y = \cos kt$ satisface la ecuación diferencial $4y'' = -25y$?

(b) Para esos valores de k, verifique que cualquier integrante de la familia de las funciones $y = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$ también es una solución.

5. ¿Cuáles de las siguientes funciones son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{sen} x$?

(a) $y = \operatorname{sen} x$ (b) $y = \cos x$

(c) $y = \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$ (d) $y = -\frac{1}{2}x \cos x$

6. (a) Muestre que cualquier integrante de la familia de funciones $y = (\ln x + C)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.

(b) Ilustre el inciso (a) graficando diferentes integrantes de la familia de soluciones en una pantalla común.

(c) Encuentre una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(1) = 2$.

(d) Determine una solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial $y(2) = 1$.

7. (a) ¿Qué puede decir acerca de una solución de la ecuación $y' = -y^2$ observando sólo la ecuación diferencial?

(b) Compruebe que los integrantes de la familia $y = 1/(x + C)$ son soluciones de la ecuación del inciso (a).

(c) ¿Puede pensar en una solución de la ecuación diferencial $y' = -y^2$ que no sea un miembro de la familia del inciso (b)?

(d) Encuentre una solución del problema de valor inicial

$$y' = -y^2 \qquad y(0) = 0.5$$

8. (a) ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una solución de la ecuación $y' = xy^3$ cuando x es cercana a 0? ¿Qué pasa si x es grande?

(b) Compruebe que los integrantes de la familia $y = (c - x^2)^{-1/2}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' = xy^3$.

(c) Grafique diferentes integrantes de la familia de soluciones en una pantalla común. ¿Las gráficas confirman lo que predijo en el inciso (a)?

(d) Encuentre una solución del problema de valor inicial.

$$y' = xy^3 \qquad y(0) = 2$$

9. Una población se representa mediante una ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 1.2P\left(1 - \frac{P}{4200}\right)$$

(a) ¿Para qué valores de P la población es creciente?

(b) ¿Para qué valores de P la población es decreciente?

(c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?

10. Una función $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2$$

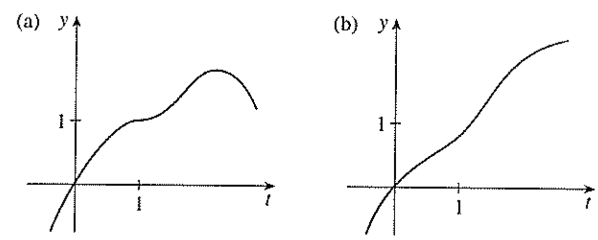
(a) ¿Cuáles son las soluciones constantes de la ecuación?

(b) ¿Para qué valores de y crece y?

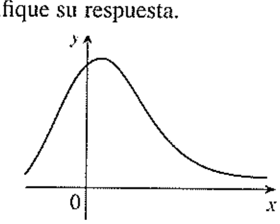
(c) ¿Para qué valores de y decrece y?

11. Explique por qué las funciones con las gráficas dadas *no pueden* ser soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = e^t(y - 1)^2$$



12. La función con la gráfica dada es una solución de una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Decida cuál es la ecuación correcta y justifique su respuesta.



A. $y' = 1 + xy$ **B.** $y' = -2xy$ **C.** $y' = 1 - 2xy$

13. Los psicólogos interesados en teoría de aprendizaje estudian **curvas de aprendizaje**. Una curva de aprendizaje es la gráfica de una función $P(t)$, el desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función del tiempo de capacitación t. La derivada dP/dt representa la rapidez a la que mejora el desempeño.

(a) ¿Cuándo considera que P se incrementa con más rapidez? ¿Qué sucede con dP/dt cuando t crece? Explique.

(b) Si M es el nivel máximo de desempeño del cual es capaz el alumno, explique por qué la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P) \qquad k \text{ es una constante positiva}$$

es un modelo razonable para aprender.

(c) Construya un bosquejo aproximado de una posible solución de esta ecuación diferencial.

14. Suponga que se sirve una taza de café recién preparado con temperatura de 95°C en una habitación donde la temperatura es de 20°C.

(a) ¿Cuándo considera que el café se enfría con más rapidez? ¿Qué sucede con la rapidez de enfriamiento a medida que pasa el tiempo? Explique.

(b) La ley de Newton del enfriamiento establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y sus alrededores, siempre que esta diferencia no sea muy grande. Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley de Newton del enfriamiento para esta situación particular. ¿Cuál es la condición inicial? En vista de su respuesta al inciso (a), ¿considera que esta ecuación diferencial es un modelo apropiado para el enfriamiento?

(c) Elabore un bosquejo aproximado de la gráfica de la solución del problema de valor inicial del inciso (b).

9.2 CAMPOS DIRECCIONALES Y MÉTODO DE EULER

Desafortunadamente, es imposible resolver la mayoría de las ecuaciones diferenciales en el sentido de obtener una fórmula explícita para la solución. En esta sección se muestra que, a pesar de la ausencia de una solución explícita, se puede aprender aún mucho acerca de la solución por un método gráfico (campos direccionales) o método numérico (método de Euler).

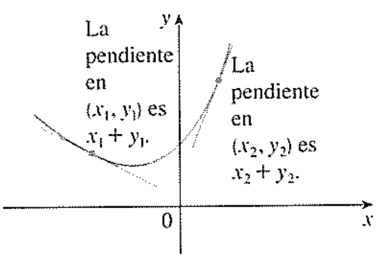


FIGURA 1
La solución de $y' = x + y$

CAMPOS DIRECCIONALES

Suponga que se pide bosquejar la gráfica de la solución del problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

No se conoce una fórmula para la solución, así que ¿cómo puede bosquejar su gráfica? Considere lo que significa la ecuación diferencial. La ecuación $y' = x + y$ indica que la pendiente en cualquier punto (x, y) sobre la gráfica (llamada *curva solución*) es igual a la suma de las coordenadas x y y del punto (véase figura 1). En particular, debido a que la curva pasa por el punto $(0, 1)$, su pendiente ahí debe ser $0 + 1 = 1$. Así, una pequeña porción de la curva solución cerca del punto $(0, 1)$ tiene la apariencia de un segmento de recta corto que pasa por $(0, 1)$ con pendiente 1 (véase figura 2).

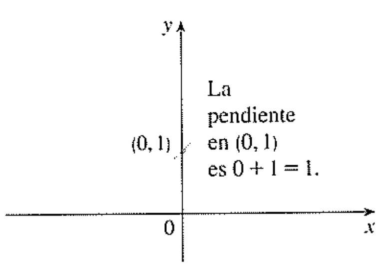


FIGURA 2
Comienzo de la curva solución que pasa por $(0, 1)$

Como guía para bosquejar el resto de la curva, se dibujan segmentos de recta cortos en varios puntos (x, y) con pendiente $x + y$. El resultado se llama *campo direccional* y se muestra en la figura 3. Por ejemplo, el segmento en el punto $(1, 2)$ tiene pendiente $1 + 2 = 3$. El campo direccional permite ver la forma general de las curvas solución indicando la dirección en la que proceden las curvas en cada punto.

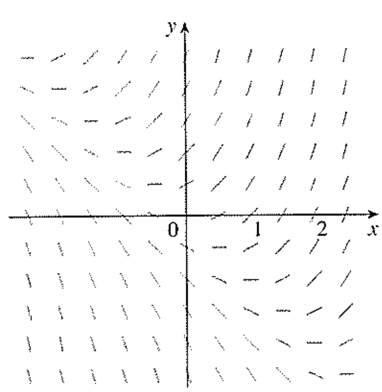


FIGURA 3
Campo direccional para $y' = x + y$

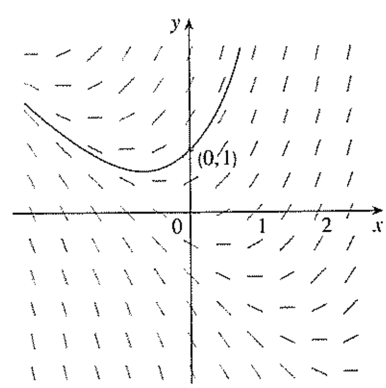


FIGURA 4
Curva solución a través de $(0, 1)$

Ahora se puede bosquejar la curva solución a través del punto (0, 1) siguiendo el campo direccional como en la figura 4. Observe que se ha dibujado la curva para que sea paralela a segmentos de recta cercanos.

En general, suponga que se tiene una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$y' = F(x, y)$$

donde $F(x, y)$ es alguna expresión en x y y. La ecuación diferencial dice que la pendiente de una curva solución en un punto (x, y) sobre la curva es $F(x, y)$. Si se dibujan segmentos de recta cortos con pendiente $F(x, y)$ en varios puntos (x, y), el resultado se llama **campo direccional** (o **campo de pendientes**). Estos segmentos de recta indican la dirección en la que apunta una curva solución, así que el campo direccional ayuda a ver la forma general de estas curvas.

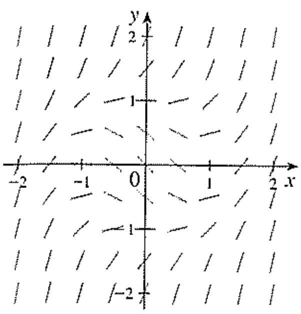


FIGURA 5

EJEMPLO 1

(a) Bosqueje el campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$.

(b) Use el inciso (a) para bosquejar la curva solución que pasa por el origen.

SOLUCIÓN

(a) Se empieza por calcular la pendiente en varios puntos en la tabla siguiente:

x	-2	-1	0	1	2	-2	-1	0	1	2	...
y	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	...
$y' = x^2 + y^2 - 1$	3	0	-1	0	3	4	1	0	1	4	...

Ahora se dibujan segmentos de recta cortos con estas pendientes en estos puntos. El resultado es el campo direccional de la figura 5.

(b) Se empieza en el origen y se va a la derecha en la dirección del segmento de recta (que tiene pendiente -1). Se continúa con el trazo de la curva solución de modo que se mueve paralela a los segmentos de recta cercanos. La curva solución resultante se muestra en la figura 6. Volviendo al origen, se dibuja también la curva solución a la izquierda.

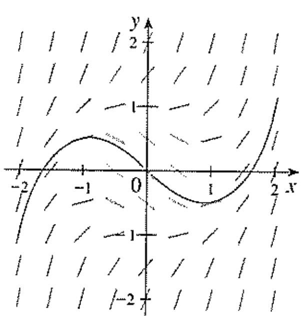


FIGURA 6

Mientras más segmentos de recta se dibujen en un campo direccional, más clara se vuelve la ilustración. Por supuesto, es tedioso calcular pendientes y dibujar segmentos de recta para un enorme número de puntos a mano, pero las calculadoras son muy adecuadas para esta tarea. En la figura 7 se muestra un campo direccional más detallado dibujado por computadora para la ecuación diferencial del ejemplo 1. Permite dibujar, con razonable exactitud, las curvas solución mostradas en la figura 8 con intersecciones -2, -1, 0, 1 y 2.

TEC Module 9.2A muestra los campos direccionales y las curvas solución para varias ecuaciones diferenciales.

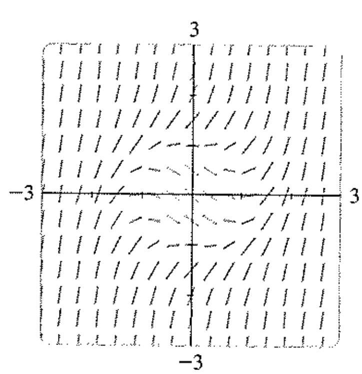


FIGURA 7

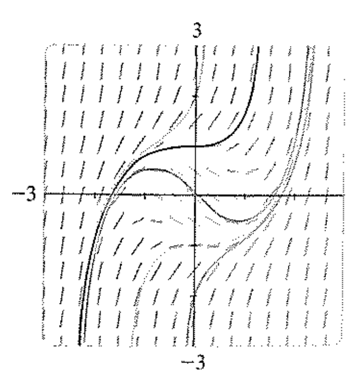


FIGURA 8

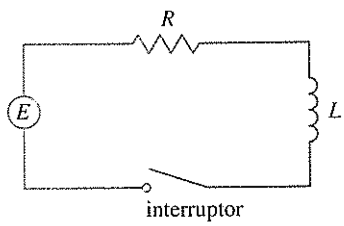


FIGURA 9

Ahora se verá cómo los campos de dirección dan una idea de las situaciones físicas. El circuito eléctrico simple mostrado en la figura 9 contiene una fuerza electromotriz (por lo común una batería o generador) que produce un voltaje de $E(t)$ volts (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henries (h).

La ley de Ohm da la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Así, se tiene

$$\boxed{1} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que es una ecuación diferencial de primer orden que modela la corriente I en el tiempo t.

V EJEMPLO 2 Considere que en el circuito simple de la figura 9 la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H y la batería da un voltaje constante de 60 V.
(a) Dibuje un campo direccional para la ecuación 1 con estos valores.
(b) ¿Qué se puede decir acerca del valor límite de la corriente?
(c) Identifique las soluciones de equilibrio.
(d) Si el interruptor está cerrado cuando $t = 0$ de modo que la corriente empieza con $I(0) = 0$, use el campo direccional para bosquejar la curva solución.

SOLUCIÓN
(a) Si se escribe $L = 4$, $R = 12$, y $E(t) = 60$ en la ecuación 1, se obtiene

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

El campo direccional para esta ecuación diferencial se muestra en la figura 10.

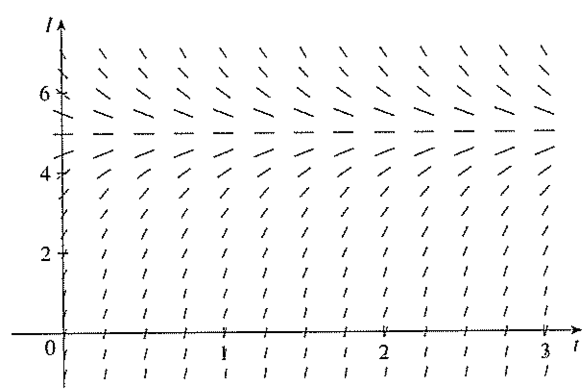


FIGURA 10

(b) Parece del campo de dirección que las soluciones se aproximan al valor 5 A, es decir,

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 5$$

(c) Parece que la función constante $I(t) = 5$ es una solución de equilibrio. De hecho, se puede comprobar esto de manera directa a partir de la ecuación diferencial $dI/dt = 5 - 3I$. Si $I(t) = 5$, en tal caso el lado izquierdo es $dI/dt = 0$ y el lado derecho es $15 - 3(5) = 0$.

(d) Se usa el campo direccional para bosquejar la curva solución que pasa por (0, 0), como se muestra en color rojo en la figura 11.

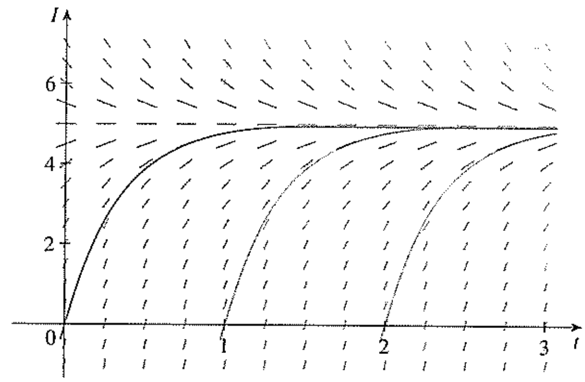


FIGURA 11

Observe en la figura 10 que los segmentos de línea a lo largo de cualquier línea horizontal son paralelos. Eso es porque la variable independiente t no aparece del lado derecho de la ecuación $I' = 15 - 3I$. En general, una ecuación diferencial de la forma

$$y' = f(y)$$

en la que falta la variable independiente en el lado derecho, se llama **autónoma**. Para tal ecuación, las pendientes correspondientes a dos puntos distintos con la misma coordenada y deben ser iguales. Esto significa que si se conoce una solución para una ecuación diferencial autónoma, en tal caso se puede obtener infinitamente muchas otras desplazando sólo la gráfica de la ecuación conocida a la derecha o a la izquierda. En la figura 11 se han mostrado las soluciones que resultan de desplazar la curva solución del ejemplo 2 una o dos unidades de tiempo (a saber, segundos) a la derecha. Corresponden a cerrar el interruptor cuando $t = 1$ o $t = 2$.

MÉTODO DE EULER

La idea básica detrás de los campos direccionales se puede usar para hallar aproximaciones numéricas a soluciones de ecuaciones diferenciales. Se ilustra el método en el problema de valor inicial que se empleó para introducir campos direccionales:

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

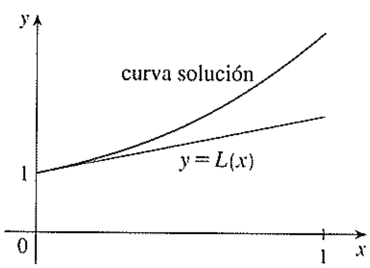


FIGURA 12
Primera aproximación de Euler

La ecuación diferencial dice que $y'(0) = 0 + 1 = 1$, así que la curva solución tiene pendiente 1 en el punto (0, 1). Como una primera aproximación a la solución se podría usar la aproximación lineal $L(x) = x + 1$. En otras palabras, se podría usar la línea tangente en (0, 1) como aproximación a la curva solución (véase figura 12).

La idea de Euler era mejorar esta aproximación procediendo sólo una corta distancia a lo largo de esta recta tangente y luego hacer una corrección a mitad de curso cambiando la dirección como indica el campo direccional. En la figura 13 se muestra lo que sucede si se comienza a lo largo de la recta tangente pero se detiene cuando $x = 0.5$. (Esta distancia horizontal recorrida se llama *tamaño de paso.*) Puesto que $L(0.5) = 1.5$, se tiene $y(0.5) \approx 1.5$ y se tiene (0.5, 1.5) como el punto de partida para un nuevo segmento de recta. La ecuación diferencial indica que $y'(0.5) = 0.5 + 1.5 = 2$, de modo que se usa la función lineal

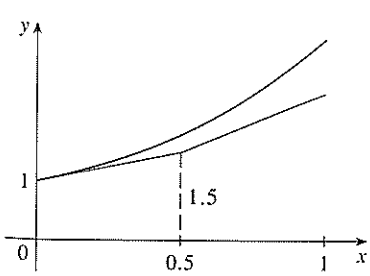


FIGURA 13
Aproximación de Euler con tamaño de paso 0.5

$$y = 1.5 + 2(x - 0.5) = 2x + 0.5$$

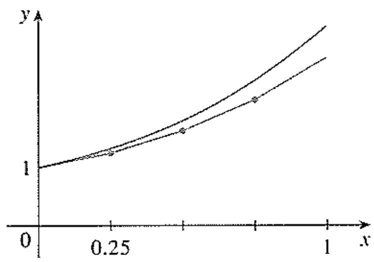


FIGURA 14
Aproximación de Euler con tamaño de paso 0.25

como una aproximación a la solución para $x > 0.5$ (el segmento naranja en la figura 13). Si se reduce el tamaño de paso de 0.5 a 0.25, se obtiene una mejor aproximación de Euler mostrada en la figura 14.

En general, el método de Euler indica empezar en el punto dado por el valor inicial y proceder en la dirección indicada por el campo direccional. Deténgase después de un corto tiempo, examine la pendiente en la nueva ubicación y proceda en esta dirección. Mantenga la dirección de detención y de cambio de acuerdo con el campo direccional. El método de Euler no produce la solución exacta para un problema de valor inicial, da aproximaciones. Pero al disminuir el tamaño de paso (y por lo tanto se incrementa el número de las correcciones de mitad de curso), se obtienen aproximaciones cada vez mejores a la solución exacta. (Compare las figuras 12, 13 y 14.)

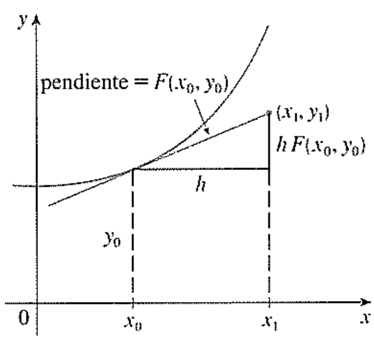


FIGURA 15

Para el problema general de valor inicial de primer orden $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, el objetivo es aproximar valores para la solución en números igualmente espaciados x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h, \ldots$, donde h es el tamaño de paso. La ecuación diferencial dice que la pendiente en (x_0, y_0) es $y' = F(x_0, y_0)$, de modo que la figura 15 muestra que el valor aproximado de la solución cuando $x = x_1$ es

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0)$$

De manera similar, $$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1)$$

En general, $$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1})$$

EJEMPLO 3 Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para construir una tabla de valores aproximados de la solución del problema de valor inicial

$$y' = x + y \qquad y(0) = 1$$

SOLUCIÓN Se tiene que $h = 0.1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, y $F(x, y) = x + y$. Así, se tiene

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0.1(0 + 1) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1(0.1 + 1.1) = 1.22$$

$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1.22 + 0.1(0.2 + 1.22) = 1.362$$

TEC Module 9.2B muestra cómo funciona el método de Euler desde el punto de vista numérico y visual para diversas ecuaciones diferenciales y tamaños de paso.

Esto significa que si $y(x)$ es la solución exacta, por lo tanto $y(0.3) \approx 1.362$.

Procediendo con cálculos similares, se obtienen los valores de la tabla:

n	x_n	y_n	n	x_n	y_n
1	0.1	1.100000	6	0.6	1.943122
2	0.2	1.220000	7	0.7	2.197434
3	0.3	1.362000	8	0.8	2.487178
4	0.4	1.528200	9	0.9	2.815895
5	0.5	1.721020	10	1.0	3.187485

□

Para una tabla más exacta de valores del ejemplo 3, se podría disminuir el tamaño de paso. Pero para un gran número de pasos pequeños, la cantidad de cálculo es considerable y, por lo tanto, se requiere programar una calculadora o computadora para realizar estos cálculos. En la siguiente tabla se muestran los resultados de aplicar el método de Euler con tamaño de paso decreciente al problema de valor inicial del ejemplo 3.

Tamaño de paso	Estimación de Euler de $y(0.5)$	Estimación de Euler de $y(1)$
0.500	1.500000	2.500000
0.250	1.625000	2.882813
0.100	1.721020	3.187485
0.050	1.757789	3.306595
0.020	1.781212	3.383176
0.010	1.789264	3.409628
0.005	1.793337	3.423034
0.001	1.796619	3.433848

Paquetes de software que producen soluciones numéricas a ecuaciones diferenciales son refinaciones al método de Euler. Además, el método de Euler es simple y no es preciso, se trata de la idea básica de la cual parten métodos más precisos.

Observe que las estimaciones de Euler en la tabla al parecer son límites de aproximación, a saber, los valores verdaderos de $y(0.5)$ y $y(1)$. En la figura 16 se muestran las gráficas de las aproximaciones de Euler con tamaños de paso 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01 y 0.005. Se aproximan a la curva solución exacta cuando el tamaño de paso h se aproxima a 0.

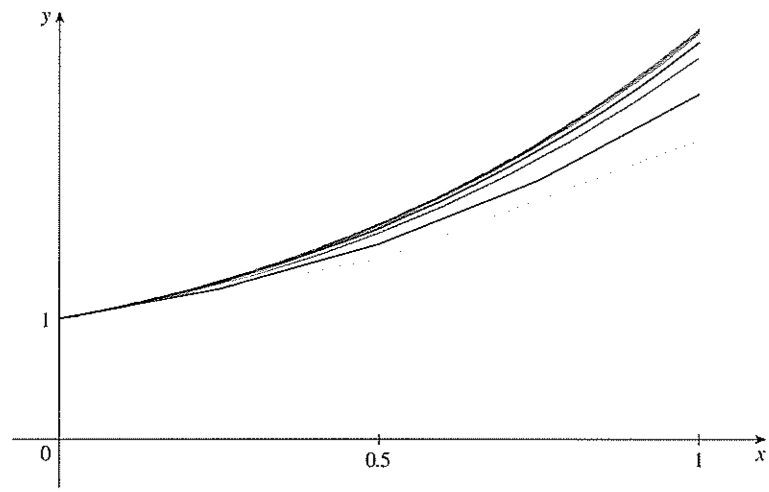


FIGURA 16
Aproximaciones de Euler que tienden a la solución exacta

EJEMPLO 4 En el ejemplo 2 se examinó un circuito eléctrico simple con resistencia 12 Ω, inductancia 4 H y una batería con voltaje 60 V. Si el interruptor está cerrado cuando $t = 0$, se modela la corriente I en el tiempo t mediante el problema de valor inicial

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Estime la corriente en el circuito medio segundo después de que se cierra el interruptor.

SOLUCIÓN Se usa el método de Euler con $F(t, I) = 15 - 3I$, $t_0 = 0$, $I_0 = 0$, y tamaño de paso $h = 0.1$ segundo:

$$I_1 = 0 + 0.1(15 - 3 \cdot 0) = 1.5$$

$$I_2 = 1.5 + 0.1(15 - 3 \cdot 1.5) = 2.55$$

$$I_3 = 2.55 + 0.1(15 - 3 \cdot 2.55) = 3.285$$

$$I_4 = 3.285 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.285) = 3.7995$$

$$I_5 = 3.7995 + 0.1(15 - 3 \cdot 3.7995) = 4.15965$$

Así que la corriente después de 0.5 s es

$$I(0.5) \approx 4.16 \text{ A}$$

□

9.2 EJERCICIOS

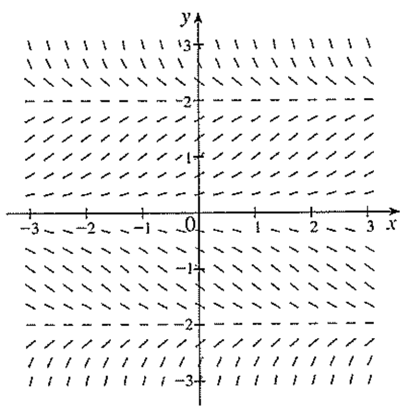
1. Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = y(1 - \frac{1}{4}y^2)$.

(a) Bosqueje las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = -1$

(iii) $y(0) = -3$ (iv) $y(0) = 3$

(b) Encuentre las soluciones de equilibrio.



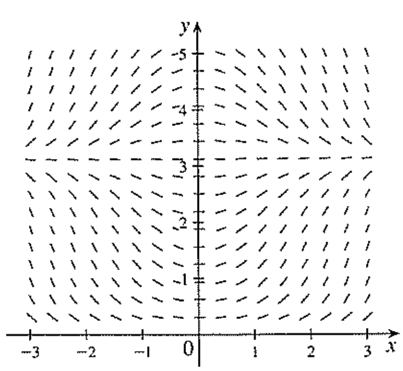
2. Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x \operatorname{sen} y$.

(a) Bosqueje las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(i) $y(0) = 1$ (ii) $y(0) = 2$ (iii) $y(0) = \pi$

(iv) $y(0) = 4$ (v) $y(0) = 5$

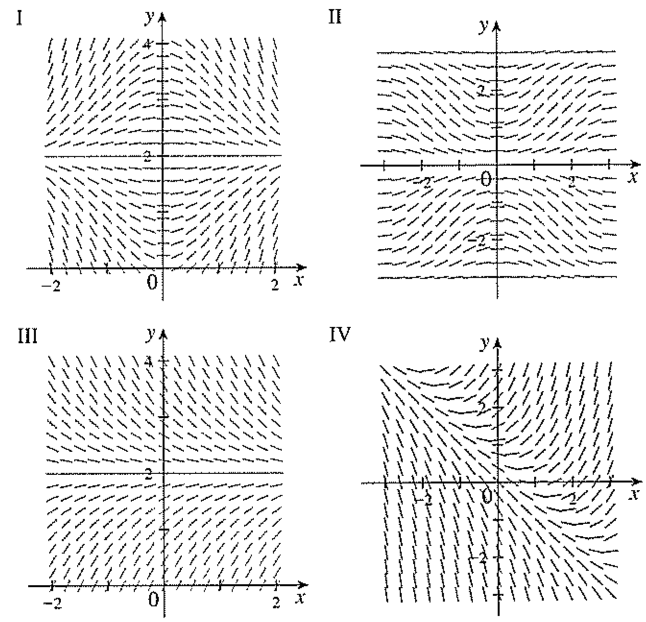
(b) Encuentre las soluciones de equilibrio.



3–6 Compare la ecuación diferencial con su campo direccional (marcado I–IV). Dé razones para su respuesta.

3. $y' = 2 - y$ **4.** $y' = x(2 - y)$

5. $y' = x + y - 1$ **6.** $y' = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$



7. Use el campo direccional marcado con II (arriba) para bosquejar las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

(a) $y(0) = 1$ (b) $y(0) = 2$ (c) $y(0) = -1$

8. Aplique el campo direccional marcado con IV (de arriba) para dibujar la gráfica de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales que se proporcionan.

(a) $y(0) = -1$ (b) $y(0) = 0$ (c) $y(0) = 1$

9–10 Bosqueje un campo direccional para la ecuación diferencial. Después empléelo para bosquejar tres curvas solución.

9. $y' = 1 + y$ **10.** $y' = x^2 - y^2$

11–14 Bosqueje el campo direccional de la ecuación diferencial. Después utilícelo para bosquejar una curva solución que pasa por el punto dado.

11. $y' = y - 2x$, $(1, 0)$ **12.** $y' = 1 - xy$, $(0, 0)$

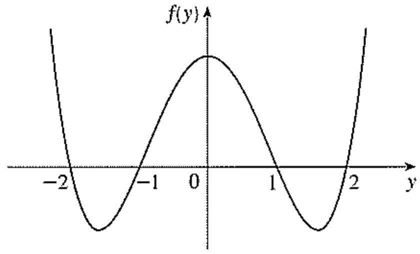
13. $y' = y + xy$, $(0, 1)$ **14.** $y' = x - xy$, $(1, 0)$

CAS **15–16** Use un sistema algebraico computacional para dibujar un campo direccional para la ecuación diferencial dada. Imprímalo y bosqueje sobre él la curva solución que pasa por $(0, 1)$. Después use el CAS para dibujar la curva solución y compárela con su bosquejo.

15. $y' = x^2 \operatorname{sen} y$ **16.** $y' = x(y^2 - 4)$

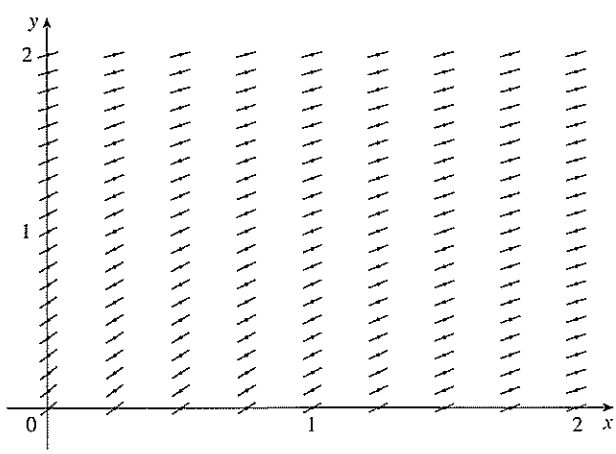
CAS **17.** Use un sistema algebraico computacional a fin de trazar un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = y^3 - 4y$. Imprímalo y trace sobre él soluciones que satisfacen la condición inicial $y(0) = c$ para varios valores de c. ¿Para qué valores de c existe $\lim_{t\to\infty} y(t)$? ¿Cuáles son los posibles valores para este límite?

18. Construya un bosquejo aproximado de un campo direccional para la ecuación diferencial autónoma $y' = f(y)$, donde la gráfica de f es como se muestra. ¿Cómo depende el comportamiento límite de las soluciones del valor de $y(0)$?



19. (a) Use el método de Euler con cada uno de los siguientes tamaños de paso para estimar el valor de $y(0.4)$, donde y es la solución del problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$.
(i) $h = 0.4$ (ii) $h = 0.2$ (iii) $h = 0.1$
(b) Se sabe que la solución exacta del problema de valor inicial del inciso (a) es $y = e^x$. Dibuje, de la manera más exacta posible, la gráfica de $y = e^x$, $0 \leq x \leq 0.4$, junto con las aproximaciones de Euler usando el tamaño de paso del inciso (a). (Sus bosquejos deben asemejarse a las figuras 12, 13 y 14.) Use sus bosquejos para decidir si sus estimaciones del inciso a) son subestimaciones o sobreestimaciones.
(c) El error en el método de Euler es la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado. Encuentre los errores cometidos en el inciso (a) al usar el método de Euler para estimar el valor verdadero de $y(0.4)$, a saber, $e^{0.4}$. ¿Qué sucede con el tamaño del error cada vez que el tamaño de paso se reduce a la mitad?

20. Se muestra un campo direccional para una ecuación diferencial. Dibuje, con una regla, las gráficas de las aproximaciones de Euler a la curva solución que pasa por el origen. Use tamaños de paso $h = 1$ y $h = 0.5$. ¿Las estimaciones de Euler serán subestimaciones o sobreestimaciones? Explique.



21. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.5 para calcular los valores de y aproximados y_1, y_2, y_3, y y_4 de la solución del problema de valor inicial $y' = y - 2x$, $y(1) = 0$.

22. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $y' = 1 - xy$, $y(0) = 0$.

23. Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar $y(0.5)$ donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $y' = y + xy$, $y(0) = 1$.

24. (a) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(1.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $y' = x - xy$, $y(1) = 0$.
(b) Repita el inciso (a) con tamaño de paso 0.1.

25. (a) Programe una calculadora o computadora a fin de usar el método de Euler para calcular $y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \qquad y(0) = 3$$

(i) $h = 1$ (ii) $h = 0.1$
(iii) $h = 0.01$ (iv) $h = 0.001$
(b) Compruebe que $y = 2 + e^{-x^3}$ es la solución exacta de la ecuación diferencial.
(c) Encuentre los errores de usar el método de Euler para calcular $y(1)$ con los tamaños de paso del inciso (a). ¿Qué sucede con el error cuando se divide entre 10 el tamaño de paso?

CAS **26.** (a) Programe un sistema algebraico computacional, usando el método de Euler con tamaño de paso 0.01, para calcular $y(2)$, donde y es la solución del problema de valor inicial

$$y' = x^3 - y^3 \qquad y(0) = 1$$

(b) Compruebe su trabajo por medio del CAS para dibujar la curva solución.

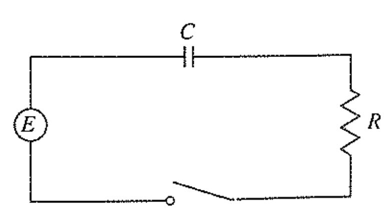
27. En la figura se muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un capacitor con una capacitancia de C farads (F) y un resistor con una resistencia de R ohms (Ω). La caída de voltaje en el capacitor es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs), de modo que en este caso la ley de Kirchhoff da

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$, así que se tiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F, y la batería da un voltaje constante de 60 V.
(a) Dibuje un campo direccional para esta ecuación diferencial.
(b) ¿Cuál es el valor límite de la carga?



(c) ¿Hay una solución de equilibrio?

(d) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, use el campo direccional para bosquejar la curva solución.

(e) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, emplee el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar la carga después de medio segundo.

28. En el ejercicio 14 en la sección 9.1 se consideró una tasa de café a 95°C en una habitación a 20°C. Suponga que se sabe que la taza de café se enfría con una proporción de 1°C por minuto cuando su temperatura es 70°C.

(a) ¿En este caso en qué se convierte la ecuación diferencial?

(b) Bosqueje un campo direccional y utilícelo para bosquejar la curva solución para el problema de valor inicial. ¿Cuál es el valor límite de la temperatura?

(c) Use el método de Euler con tamaño de paso $h = 2$ minutos para estimar la temperatura del café después de 10 minutos.

9.3 ECUACIONES SEPARABLES

Se han considerado ecuaciones diferenciales de primer orden desde un punto de vista geométrico (campos direccionales) y desde un punto de vista numérico (método de Euler). ¿Qué hay acerca del punto de vista simbólico? Sería bueno tener una fórmula explícita para una solución de una ecuación diferencial. Infortunadamente, eso no siempre es posible. Pero en esta sección se examina cierto tipo de ecuación diferencial que se *puede* resolver de manera explícita.

Una **ecuación separable** es una ecuación diferencial de primer orden en la que la expresión para dy/dx se puede factorizar como una función de x veces una función de y. En otras palabras, se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

El nombre *separable* viene del hecho de que la expresión del lado derecho se puede "separar" en una función de x y una función de y. de manera equivalente, si $f(y) \neq 0$, se podría escribir

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

donde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver esta ecuación se reescribe en la forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

de modo que las y estén de un lado de la ecuación y las x estén del otro lado. Después se integran ambos lados de la ecuación:

■ La técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables fue utilizada primero por James Bernoulli (en 1690) para resolver un problema acerca de péndulos y por Leibniz (en una carta a Huygens en 1691). John Bernoulli explicó el método general en un documento publicado en 1694.

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

La ecuación 2 define a y implícitamente como una función de x. En algunos casos se podría resolver para y en términos de x.

Se emplea la regla de la cadena para justificar este procedimiento: si h y g satisfacen (2), Luego

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

por lo tanto, $$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

y $$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Así, se satisface la ecuación 1.

EJEMPLO 1

(a) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

(b) Encuentre la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN

(a) Se escribe la ecuación en términos de diferenciales y se integran ambos lados:

$$y^2 dy = x^2 dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

La figura 1 muestra las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1. La solución del problema de valor inicial del inciso (b) se muestra en rojo.

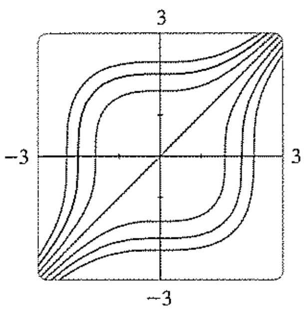


FIGURA 1

donde C es una constante arbitraria. (Se podría haber usado una constante C_1 del lado izquierdo y otra constante C_2 del lado derecho. Pero luego se combinan estas dos constantes al escribir $C = C_2 - C_1$.)

Al despejar y, se obtiene

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Se podría dejar la solución de esta manera o se podría escribir en la forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

donde $K = 3C$. (Puesto que C es una constante arbitraria, K también lo es.)

(b) Si se escribe $x = 0$ en la solución general del inciso (a), se obtiene $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 2$, se debe tener $\sqrt[3]{K} = 2$ y, por lo tanto, $K = 8$.

Así, la solución del problema de valor inicial es

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$ □

Algunos sistemas algebraicos computacionales grafican curvas definidas por ecuaciones implícitas. En la figura 2 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 2. Como se ve en las curvas de izquierda a derecha, los valores de C son 3, 2, 1, 0, −1, −2 y −3.

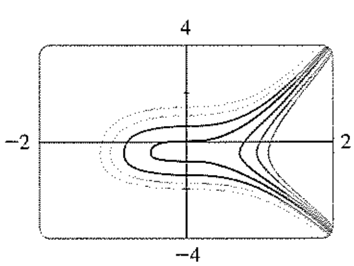


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en forma diferencial e integrar ambos lados, se tiene

$$(2y + \cos y)dy = 6x^2 dx$$

$$\int (2y + \cos y)dy = \int 6x^2 dx$$

$$\boxed{3} \qquad y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C$$

donde C es una constante. La ecuación 3 da la solución general en forma implícita. En este caso, es imposible resolver la ecuación para expresar y de forma explícita como una función de x. □

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $y' = x^2 y$.

SOLUCIÓN Se reescribe primero la ecuación por medio de la notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

■ Si una solución y es una función que satisface $y(x) \neq 0$ para alguna x, se deduce del teorema de unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales que $y(x) \neq 0$ para toda x.

Si $y \neq 0$, puede reescribirla en forma diferencial e integrar:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Esta ecuación define a y de manera implícita como una función de x. Pero en este caso se puede resolver de forma explícita para y como sigue:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

por lo tanto, $$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Se comprueba fácilmente que la función $y = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial dada. Así, se puede escribir la solución general en la forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

donde A es una constante arbitraria ($A = e^C$, o $A = -e^C$, o $A = 0$). □

■ En la figura 3, se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial del ejemplo 3. Compárelo con la figura 4, en la que se usa la ecuación $y = Ae^{x^3/3}$ para graficar soluciones de varios valores de A. Si emplea el campo direccional para bosquejar curvas solución con intersecciones 5, 2, 1, -1, y -2, se asemejarán a las curvas de la figura 4.

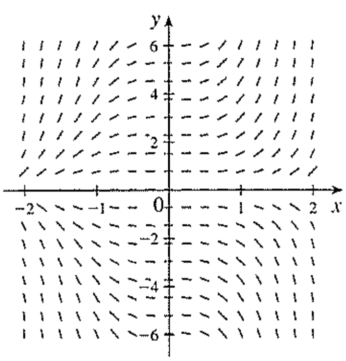


FIGURA 3

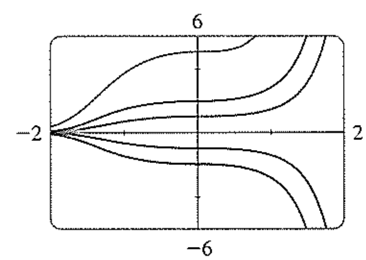


FIGURA 4

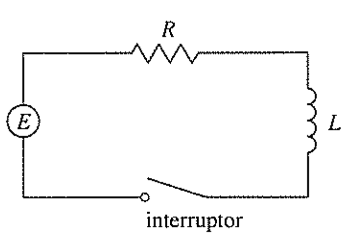


FIGURA 5

EJEMPLO 4 En la sección 9.2 se representó la corriente $I(t)$ en el circuito eléctrico mostrado en la figura 5 mediante la ecuación diferencial

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encuentre una expresión para la corriente en un circuito donde la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H, una batería da un voltaje constante de 60 V y el interruptor cierra el circuito en $t = 0$. ¿Cuál es el valor límite de la corriente?

SOLUCIÓN Con $L = 4$, $R = 12$, y $E(t) = 60$, la ecuación se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

y el problema de valor inicial es

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Se reconoce esta ecuación como separable, y se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3} \ln |15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C} e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3} A e^{-3t}$$

■ En la figura 6 se muestra cómo la solución del ejemplo 4 (la corriente) se aproxima a su valor límite. La comparación con la figura 11 de la sección 9.2 muestra que se pudo dibujar una curva solución bastante exacta a partir del campo direccional.

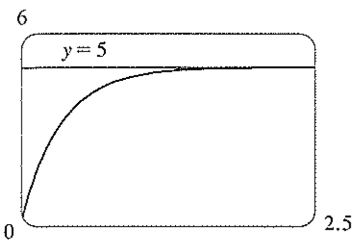


FIGURA 6

Puesto que $I(0) = 0$, se tiene $5 - \frac{1}{3}A = 0$, de modo que $A = 15$ y la solución es

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

La corriente límite, en amperes, es

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} (5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$ □

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas, es una curva que corta de forma ortogonal cada curva de la familia, es decir, en ángulos rectos (véase figura 7). Por ejemplo, cada miembro de la familia $y = mx$ de rectas que pasan por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia $x^2 + y^2 = r^2$ de círculos concéntricos con centro en el origen (véase figura 8). Se dice que las dos familias son trayectorias ortogonales entre sí.

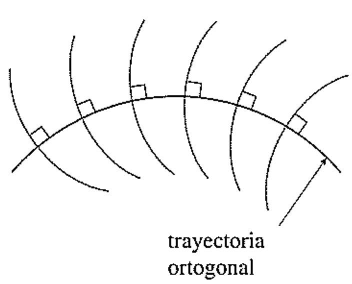


FIGURA 7

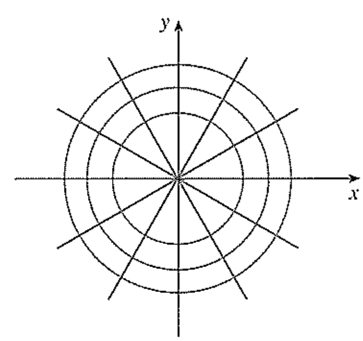


FIGURA 8

EJEMPLO 5 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = ky^2$, donde k es una constante arbitraria.

SOLUCIÓN Las curvas $x = ky^2$ forman una familia de parábolas cuyo eje de simetría es el eje x. El primer paso es hallar una sola ecuación diferencial que sea satisfactoria para todos los integrantes de la familia. Si se deriva $x = ky^2$, se obtiene

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Esta ecuación diferencial depende de k, pero se necesita una ecuación que sea válida para los valores de k de manera simultánea. Para eliminar k se nota que, de la ecuación general de la parábola que se proporciona $x = ky^2$, se tiene $k = x/y^2$ y, por lo tanto, la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}y}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Esto significa que la pendiente de la línea tangente en cualquier punto (x, y) sobre una de las parábolas es $y' = y/(2x)$. En una trayectoria ortogonal la pendiente de la línea tangente debe ser el recíproco negativo de esta pendiente. Por lo tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

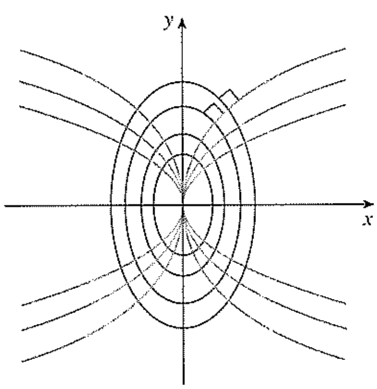


FIGURA 9

Esta ecuación diferencial es separable, y se resuelve como sigue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$\boxed{4} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

donde C es una constante positiva arbitraria. Así, las trayectorias ortogonales son la familia de elipses dada por la ecuación 4 y bosquejada en la figura 9. □

Las trayectorias ortogonales aparecen en varias ramas de la física. Por ejemplo, en un campo electrostático, las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. También, las líneas de corriente en aerodinámica son trayectorias ortogonales de las curvas equipotenciales de velocidad.

PROBLEMAS DE MEZCLA

Un problema de mezcla característico incluye un recipiente de capacidad fija lleno con una solución mezclada en todos sus partes de alguna sustancia, como una sal. Una solución de una determinada concentración entra al recipiente en una proporción fija, y la mezcla, totalmente agitada, sale con una proporción fija, que puede diferir de la relación entrante. Si $y(t)$ denota la cantidad de sustancia en el recipiente en el tiempo t, después $y'(t)$ es la proporción a la que la sustancia está siendo añadida, menos la proporción a la cual está siendo removida. La descripción matemática de esta situación suele llevar a una ecuación diferencial separable de primer orden. Se puede usar el mismo tipo de razonamiento para representar diversos fenómenos: reacciones químicas, descarga de contaminantes en un lago, inyección de un fármaco en el torrente sanguíneo.

EJEMPLO 6 Un recipiente contiene 20 kg de sal disuelta en 5 000 L de agua. Salmuera que contiene 0.03 kg de sal por litro de agua entra al recipiente con una relación de 25 L/min. La solución se mantiene mezclada por completo y sale del recipiente con la misma proporción. ¿Cuánta sal queda en el recipiente después de media hora?

SOLUCIÓN Sea $y(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos. Se tiene como dato que $y(0) = 20$ y se quiere determinar $y(30)$. Esto se hace al hallar una ecuación diferencial que satisface $y(t)$. Note que dy/dt es la rapidez de cambio de la cantidad de sal, por eso

$$\boxed{5} \qquad \frac{dy}{dt} = (\text{proporción de entrada}) - (\text{proporción de salida})$$

donde (proporción de entrada) es la relación a la que la sal entra al recipiente y (proporción de salida) es la relación a la que la sal sale del recipiente. Se tiene

$$\text{proporción de entrada} = \left(0.03\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0.75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

El recipiente contiene siempre 5 000 L de líquido, así que la concentración en el tiempo t es $y(t)/5\,000$ (medida en kilogramos por litro). Puesto que la salmuera sale a una proporción de 25 L/min, se tiene

$$\text{proporción de salida} = \left(\frac{y(t)}{5000}\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(25\,\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Así, de la ecuación 5 se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = 0.75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200}$$

Al resolver esta ecuación diferencial separable, se obtiene

$$\int \frac{dy}{150 - y} = \int \frac{dt}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C$$

Puesto que $y(0) = 20$, se tiene $-\ln 130 = C$, así

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} - \ln 130$$

Por lo tanto, $$|150 - y| = 130e^{-t/200}$$

Puesto que $y(t)$ es continua y $y(0) = 20$ y el lado derecho nunca es 0, se deduce que $150 - y(t)$ es siempre positiva. Así, $|150 - y| = 150 - y$ también

$$y(t) = 150 - 130e^{-t/200}$$

La cantidad de sal después de 30 minutos es

$$y(30) = 150 - 130e^{-30/200} \approx 38.1 \text{ kg} \qquad \square$$

En la figura 10 se muestra la gráfica de la función $y(t)$ del ejemplo 6. Observe que, conforme pasa el tiempo, la cantidad de sal se aproxima a 150 kg.

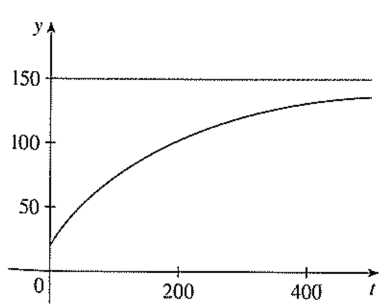


FIGURA 10

9.3 EJERCICIOS

1–10 Resuelva la ecuación diferencial.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x}}{e^y}$

3. $(x^2 + 1)y' = xy$

4. $y' = y^2 \operatorname{sen} x$

5. $(1 + \tan y)y' = x^2 + 1$

6. $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{1 + \sqrt{r}}{1 + \sqrt{u}}$

7. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{te^t}{y\sqrt{1 + y^2}}$

8. $\dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{e^y \operatorname{sen}^2\theta}{y \sec \theta}$

9. $\dfrac{du}{dt} = 2 + 2u + t + tu$

10. $\dfrac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0$

11–18 Encuentre la solución de la ecuación diferencial que satisface la condición inicial que se indica.

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}, \quad y(0) = -3$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \cos x}{1 + y^2}, \quad y(0) = 1$

13. $x \cos x = (2y + e^{3y})y', \quad y(0) = 0$

14. $\dfrac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}, \quad P(1) = 2$

15. $\dfrac{du}{dt} = \dfrac{2t + \sec^2 t}{2u}, \quad u(0) = -5$

16. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = -1$

17. $y' \tan x = a + y, \quad y(\pi/3) = a, \quad 0 < x < \pi/2$

18. $\dfrac{dL}{dt} = kL^2 \ln t, L(1) = -1$

19. Encuentre una ecuación de la curva que pasa por el punto $(0, 1)$ y cuya pendiente en (x, y) es xy.

20. Hallar la función f de tal manera que $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$ y $f(0) = \frac{1}{2}$.

21. Resolver la ecuación diferencial $y' = x + y$ haciendo el cambio de variable $u = x + y$.

22. Resolver la ecuación diferencial $xy' = y + xe^{y/x}$ haciendo el cambio de variable $v = y/x$.

23. (a) Resuelva la ecuación diferencial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$.
(b) Resuelva el problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$, y grafique la solución.
(c) ¿El problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 2$, tiene solución? Explique.

24. Resuelva la ecuación $e^{-y}y' + \cos x = 0$ y grafique diferentes integrantes de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

CAS 25. Resuelva el problema de valor inicial $y' = (\operatorname{sen} x)/\operatorname{sen} y$, $y(0) = \pi/2$, y grafique la solución (si su CAS hace gráficas implícitas).

CAS 26. Resuelva la ecuación $y' = x\sqrt{x^2 + 1}/(ye^y)$ y grafique diferentes integrantes de la familia de soluciones (si su CAS hace gráficas implícitas). ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía la constante C?

CAS 27–28
(a) Use un sistema algebraico computacional para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial. Imprímalo y utilícelo para bosquejar algunas curvas solución sin resolver la ecuación diferencial.
(b) Resuelva la ecuación diferencial.
(c) Emplee un CAS para trazar diferentes integrantes de la familia de soluciones obtenida en el inciso (b). Compare con las curvas del inciso (a).

27. $y' = 1/y$

28. $y' = x^2/y$

29–32 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas. Use un dispositivo de graficación para trazar diferentes integrantes de cada familia en una pantalla común.

29. $x^2 + 2y^2 = k^2$

30. $y^2 = kx^3$

31. $y = \dfrac{k}{x}$

32. $y = \dfrac{x}{1 + kx}$

33. Resuelva el problema de valor inicial del ejercicio 27 en la sección 9.2 a fin de hallar una expresión para la carga en el tiempo t. Encuentre el valor límite de la carga.

34. En el ejercicio 28 de la sección 9.2, se examinó una ecuación diferencial que describe la temperatura de una tasa de café a 95°C en una habitación a 20°C. Resuelva la ecuación diferencial, a fin de hallar una expresión para la temperatura del café en el tiempo t.

35. En el ejercicio 13 de la sección 9.1 se formuló un modelo para el aprendizaje en la forma de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k(M - P)$$

donde $P(t)$ mide el desempeño de alguien que aprende una habilidad después de un tiempo de entrenamiento t, M es el nivel máximo de desempeño y k es una constante positiva. Resuelva esta ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $P(t)$. ¿Cuál es el límite de esta expresión?

36. En una reacción química elemental, las moléculas simples de dos reactivos A y B forman una molécula del producto C: $A + B \longrightarrow C$. La ley de acción de masas establece que la velocidad de reacción es proporcional al producto de las concentraciones de A y B:

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B]$$

(Véase el ejemplo 4 en la sección 3.7.) De este modo, si las concentraciones iniciales son $[A] = a$ moles/L y $[B] = b$ moles/L y se escribe $x = [C]$, después se tiene

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

CAS (a) Suponiendo que $a \neq b$, determine x como una función de t. Use el hecho de que la concentración inicial de C es 0.
(b) Determine $x(t)$ suponiendo que $a = b$. ¿Cómo se simplifica esta expresión para $x(t)$ si se sabe que $[C] = \frac{1}{2}a$ después de 20 segundos?

37. En contraste con la situación del ejercicio 36, los experimentos muestran que la reacción $H_2 + Br_2 \longrightarrow 2HBr$ satisface la ley de velocidad

$$\frac{d[HBr]}{dt} = k[H_2][Br_2]^{1/2}$$

y, de este modo, para esta reacción la ecuación diferencial se convierte en

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)^{1/2}$$

donde $x = [HBr]$ y a y b son las concentraciones iniciales de hidrógeno y bromo.
(a) Determinar x como una función de t en el caso donde $a = b$. Use el hecho de que $x(0) = 0$.
(b) Si $a > b$, encuentre t como una función de x. [*Sugerencia*: al llevar a cabo la integración, haga la sustitución $u = \sqrt{b - x}$.]

38. Una esfera con radio 1 m tiene temperatura 15°C. Está dentro de una esfera concéntrica con radio 2 m y temperatura 25°C. La temperatura $T(r)$ a una distancia r desde el centro común de las esferas satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

Si se permite que $S = dT/dr$, por lo tanto S satisface una ecuación diferencial de primer orden. Resuélvala a fin de hallar una expresión para la temperatura $T(r)$ entre las esferas.

39. Se administra una solución de glucosa por vía intravenosa en el torrente sanguíneo en una proporción constante r. A medida que se añade la glucosa, se convierte en otras sustancias y se elimina del torrente sanguíneo con una rapidez que es proporcional a la concentración en ese momento. De esta manera, un modelo para la concentración $C = C(t)$ de la solución de glucosa en el torrente sanguíneo es

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

donde k es una constante positiva.
(a) Suponga que la concentración en el tiempo $t = 0$ es C_0. Determine la concentración en cualquier tiempo t resolviendo la ecuación diferencial.
(b) Suponiendo que $C_0 < r/k$, encuentre $\lim_{t\to\infty} C(t)$ interprete su respuesta.

40. Cierto país pequeño tiene 10 000 millones de dólares en papel moneda en circulación, y cada día entran a los bancos del país 50 millones. El gobierno decide introducir una nueva moneda y pide a los bancos que reemplacen los billetes viejos por los nuevos, siempre que la moneda antigua llegue a los bancos. Sea $x = x(t)$ denota la cantidad de la nueva moneda en circulación en el tiempo t, con $x(0) = 0$.
(a) Formule un modelo matemático en la forma de un problema de valor inicial que representa el "flujo" de la nueva moneda en circulación.
(b) Resuelva el problema de valor inicial hallado en el inciso (a).
(c) ¿En cuánto tiempo los nuevos billetes representan 90% de la moneda en circulación?

41. Un tanque contiene 1 000 L de salmuera con 15 kg de sal disuelta. El agua pura entra al tanque a una relación de 10 L/min. La solución se mantiene completamente mezclada y sale con la misma relación. ¿Cuánta sal está en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de 20 minutos?

42. El aire en una habitación con 180 m^3 de volumen contiene inicialmente 0.15% de dióxido de carbono. Aire nuevo con únicamente 0.05% de dióxido de carbono circula hacia adentro de la habitación en una cantidad de 2 m^3/min y el aire mezclado circula hacia fuera en la misma proporción. Hallar el porcentaje de dióxido de carbono en la habitación como una función del tiempo. ¿Qué sucede en periodos prolongados.

43. Un tanque con 500 galones de cerveza que contiene 4% de alcohol (en volumen). Se bombea cerveza con 6% de alcohol hacia adentro del tanque en una proporción de 5 gal/min y la mezcla se bombea hacia afuera en la misma proporción. Cuál es el porcentaje de alcohol después de una hora?

44. Un tanque contiene 1 000 L de agua pura. La salmuera que contiene 0.05 kg de sal por litro de agua entra al tanque en una proporción de 5 L/min. Salmuera que contiene 0.04 kg de sal por litro de agua entra al tanque en una proporción de 10 L/min. La solución se mantiene totalmente mezclada y sale del tanque con una proporción de 15 L/min. ¿Cuánta sal está en el tanque (a) después de t minutos y (b) después de una hora?

45. Cuando cae una gota de lluvia, aumenta de tamaño y, por eso, su masa en tiempo t es una función de t, $m(t)$. La rapidez de crecimiento de la masa es $km(t)$ para alguna constante positiva k. Cuando se aplica la ley de Newton del movimiento a la gota de lluvia, se obtiene $(mv)' = gm$, donde v es la velocidad de la gota (con dirección hacia abajo) y g es la aceleración debida a la gravedad. La *velocidad terminal* de la gota de lluvia es $\lim_{t\to\infty} v(t)$. Encuentre una expresión para la velocidad terminal de g y k.

46. Un objeto de masa m se mueve horizontalmente a través de un medio que resiste el movimiento con una fuerza que es una función de la velocidad; es decir,

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = f(v)$$

donde $v = v(t)$ y $s = s(t)$ representan la velocidad y la posición del objeto en el tiempo t, respectivamente. Por ejemplo, considere un bote que se mueve en el agua.

(a) Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad, es decir, $f(v) = -kv$, k es una constante positiva. (Este modelo es apropiado para valores pequeños de v.) Sean $v(0) = v_0$ y $s(0) = s_0$ los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que recorre el objeto desde el tiempo $t = 0$?

(b) Para valores más grandes de v un mejor modelo se obtiene suponiendo que la fuerza de resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad, es decir, $f(v) = -kv^2$, $k > 0$. (Newton fue el primero en proponer este modelo). Sean v_0 y s_0 los valores iniciales de v y s. Determine v y s en cualquier tiempo t. ¿Cuál es la distancia total que viaja el objeto en este caso?

47. Sea $A(t)$ el área de un cria de tejido deseda en el tiempo t y sea M el área final del tejido cuando se completa el crecimiento. La mayor parte de las divisiones celulares ocurren en la periferia del tejido y el número de celdas de la periferia es proporcional a $\sqrt{A(t)}$. Así, un modelo razonable para el crecimiento del tejido se obtiene suponiendo que la rapidez de crecimiento del área es proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$.

(a) Formule una ecuación diferencial y empléela para mostrar que el tejido crece lo más rápido posible cuando $A(t) = \frac{1}{3}M$.

CAS (b) Resuelva la ecuación diferencial con el fin de hallar una expresión para $A(t)$. Use un sistema algebraico computacional para llevar a cabo la integración.

48. De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m que ha sido proyectado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre es

$$F = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

donde $x = x(t)$ es la distancia del objeto arriba de la superficie en el tiempo t, R es el radio de la Tierra y g es la aceleración debida a la gravedad. Asimismo, por la segunda ley de Newton, $F = ma = m(dv/dt)$ y, por lo tanto,

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x + R)^2}$$

(a) Suponga que un cohete es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Sea h la altura máxima sobre la superficie alcanzada por el objeto. Muestre que

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R + h}}$$

[*Sugerencia*: por la regla de la cadena, $m(dv/dt) = mv(dv/dx)$.]

(b) Calcule $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$. Este límite se llama *velocidad de escape* para la Tierra.

(c) Use $R = 3\,960$ millas y $g = 32$ pies/s^2 para calcular v_e en pies por segundo y en millas por segundo.

PROYECTO DE APLICACIÓN

¿QUÉ TAN RÁPIDO DRENA UN TANQUE?

Si el agua (u otro líquido) drena de un tanque, se espera que el flujo sea mayor al principio (cuando la profundidad del agua es máxima) y disminuya poco a poco a medida que disminuye el nivel del agua. Pero se necesita una descripción matemática más precisa de cómo disminuye el flujo, a fin de contestar el tipo de preguntas que hacen los ingenieros: ¿en cuánto tiempo se drena por completo un tanque? ¿Cuánta agua debe contener un tanque a fin de garantizar cierta presión de agua mínima para un sistema de aspersión?

Sea $h(t)$ y $V(t)$ la altura y el volumen de agua en el tanque en el tiempo t. Si el agua sale por un orificio con área a en el fondo del tanque, en tal caso la ley de Torricelli dice que

$$\boxed{1} \qquad \frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Así, la cantidad a la cual fluye el agua desde el tanque es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del agua.

1. (a) Suponga que el tanque es cilíndrico con altura 6 pies y radio 2 pies, y el orificio es circular con radio 1 pulgada. Si se toma $g = 32$ pies/s^2, muestre que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{72}\sqrt{h}$$

(b) Resuelva esta ecuación para hallar la altura del agua en el tiempo t, bajo el supuesto de que el tanque está lleno en el tiempo $t = 0$.

(c) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

2. Como resultado de la rotación y viscosidad del líquido, el modelo teórico dado por la ecuación 1 no es bastante exacto. En cambio, el modelo

$$\boxed{2} \qquad \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h}$$

se emplea con más frecuencia y la constante k (que depende de las propiedades físicas del líquido) se determina de los datos relacionados con el drenado del tanque.

(a) Suponga que hace un orificio en el costado de una botella cilíndrica y la altura h del agua (arriba del orificio) disminuye de 10 cm a 3 cm en 68 segundos. Use la ecuación 2 a fin de hallar una expresión para $h(t)$. Evalúe $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$.

(b) Haga un orificio de 4 mm cerca del fondo de la parte cilíndrica de una botella de plástico de bebida carbonatada de dos litros. Adhiera una tira de cinta adhesiva marcada en centímetros de 0 a 10, con 0 que corresponde a la parte superior del orificio. Con un dedo sobre el orificio, llene la botella con agua hasta la marca de 10 cm. Luego quite su dedo del orificio y registre los valores de $h(t)$ para $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$ segundos. (Es probable que encuentre que transcurren 68 segundos para que el nivel disminuya a $h = 3$ cm.) Compare sus datos con los valores de $h(t)$ del inciso (a). ¿Qué tan bien predice el modelo los valores reales?

Esta parte del proyecto se realiza mejor como una demostración de salón de clases o como un proyecto de grupo con tres alumnos en cada grupo: un cronometrador que indique los segundos, una persona a cargo de la botella para estimar la altura cada 10 segundos y alguien que registre estos valores.

3. En muchas partes del mundo, el agua para los sistemas de aspersión en grandes hoteles y hospitales se suministra por gravedad desde tanques cilíndricos en o cerca de los techos de los edificios. Suponga que un tanque de este tipo tiene radio de 10 ft y que el diámetro de la salida es de 2.5 pulgadas. Un ingeniero tiene que garantizar que la presión del agua será por lo menos 2 160 lb/ft^2 para un periodo de 10 minutos. (Cuando se presenta un incendio, el sistema eléctrico podría fallar y podría tomar hasta 10 minutos la activación del generador de emergencia y la bomba de agua.) ¿Qué altura debe especificar el ingeniero para el tanque, a fin de garantizar la presión? (Use el hecho de que la presión del agua a una profundidad de d pies es $P = 62.5d$. Véase la sección 8.3.)

4. No todos los tanques de agua tienen forma cilíndrica. Suponga que un tanque tiene área de sección transversal $A(h)$ a la altura h. Por lo tanto el volumen del agua hasta la altura h es $V = \int_0^h A(u)\,du$ y, por lo tanto, el teorema fundamental del cálculo da $dV/dh = A(h)$. Se deduce que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = A(h)\frac{dh}{dt}$$

y, por consiguiente, la ley de Torricelli se convierte en

$$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh}$$

(a) Suponga que el tanque tiene la forma de una esfera con radio 2 m y al principio está lleno con agua hasta la mitad. Si el radio del orificio circular es 1 cm y se toma $g = 10$ m/s^2, muestre que h satisface la ecuación diferencial

$$(4h - h^2)\frac{dh}{dt} = -0.0001\sqrt{20h}$$

(b) ¿Cuánto tarda en drenar por completo el agua?

PROYECTO DE APLICACIÓN

¿QUÉ ES MÁS RÁPIDO, SUBIR O BAJAR?

Suponga que lanza una bola al aire. ¿Considera que tarda más en alcanzar su altura máxima o en regresar al suelo desde su altura máxima? En este proyecto se resolverá este problema pero, antes de empezar, piense en esa situación y haga una conjetura con base en su intuición física.

1. Una bola con masa m se proyecta hacia arriba verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial positiva v_0. Se supone que las fuerzas que actúan sobre la bola son la fuerza de gravedad y una fuerza retardadora de la resistencia del aire con dirección opuesta a la dirección del movimiento y con magnitud $p\,|v(t)|$, donde p es una constante positiva y $v(t)$ es la velocidad de la bola en el tiempo t. Tanto en el ascenso como en el descenso, la fuerza total que actúa sobre la bola es $-pv - mg$. [Durante el ascenso, $v(t)$ es positiva y la resistencia actúa hacia abajo; durante el descenso, $v(t)$ es negativa y la resistencia actúa hacia arriba]. Así, por la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento es

$$mv' = -pv - mg$$

Resuelva esta ecuación diferencial para mostrar que la velocidad es

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}$$

≈ Al modelar la fuerza debida a la resistencia del aire, se han empleado varias funciones, dependiendo de las características físicas y la rapidez de la bola. Aquí se usa un modelo lineal, $-pv$, pero un modelo cuadrático ($-pv^2$ en el camino ascendente y pv^2 en el camino descendente) es otra posibilidad para magnitudes de velocidades más altas (véase el ejercicio 46 en la sección 9.3). Para una pelota de golf, los experimentos han mostrado que un buen modelo es $-pv^{1.3}$ hacia arriba y $p|v|^{1.3}$ hacia abajo. Pero no importa qué función de fuerza $-f(v)$ se emplee [donde $f(v) > 0$ para $v > 0$ y $f(v) < 0$ para $v < 0$], la respuesta a la pregunta es la misma. Véase F. Brauer, "What Goes Up Must Come Down, Eventually," *Amer. Math. Monthly* 108 (2001), pp. 437-440.

2. Muestre que la altura de la bola, hasta que choca con el suelo, es

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}\left(1 - e^{-pt/m}\right) - \frac{mgt}{p}$$

3. Sea t_1 el tiempo que tarda la bola en alcanzar su altura máxima. Muestre que

$$t_1 = \frac{m}{p}\ln\left(\frac{mg + pv_0}{mg}\right)$$

Determine este tiempo para una bola con masa 1 kg y velocidad inicial 20 m/s. Suponga que la resistencia del aire es $\frac{1}{10}$ de la rapidez.

4. Sea t_2 el tiempo en el que la bola cae de regreso a la Tierra. Para la bola particular del problema 3, estime t_2 por medio de una gráfica de la función de altura $y(t)$. ¿Qué es más rápido, subir o bajar?

5. En general, no es fácil determinar t_2 porque es imposible resolver la ecuación $y(t) = 0$ en forma explícita. Sin embargo, se puede usar un método directo para determinar si el ascenso o el descenso es más rápido; se determina si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. Muestre que

$$y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x\right)$$

donde $x = e^{pt_1/m}$. Después muestre que $x > 1$ y la función

$$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$$

es creciente para $x > 1$. Use este resultado para decidir si $y(2t_1)$ es positiva o negativa. ¿Qué se puede concluir? ¿Es más rápido el ascenso o el descenso?

9.4 MODELOS DE CRECIMIENTO POBLACIONAL

En esta sección se estudian ecuaciones diferenciales que se aplican para representar el crecimiento de población: la ley de crecimiento, la ecuación de logística y otras varias.

LEY DE CRECIMIENTO NATURAL

Uno de los modelos para el crecimiento poblacional considerado en la sección 9.1 se basó en la suposición de que la población crece a una tasa proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

¿Es ésa una suposición razonable? Suponga que se tiene una población (de bacterias, por ejemplo) con tamaño $P = 1\,000$ y en determinado momento crece con una rapidez de $P' = 300$ bacterias por hora. Ahora se toman otras 1 000 bacterias del mismo tipo y se colocan en la primera población. Cada mitad de la nueva población creció en una proporción de 300 bacterias por hora. Se esperaría que la población total de 2 000 se incrementara a una tasa de 600 bacterias por hora inicialmente (siempre que haya espacio suficiente y nutrición). De este modo, si se duplica el tamaño, se duplica la proporción de crecimiento. En general, parece razonable que la rapidez de crecimiento deba ser proporcional al tamaño.

En general, si $P(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t si la rapidez de cambio de P con respecto a t es proporcional a su tamaño $P(t)$ en cualquier momento, después

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$$

donde k es una constante. La ecuación 1 se llama a veces **ley de crecimiento natural** (si k es positiva, en tal caso se incrementa la población; si k es negativa, disminuye.

Debido a que es una ecuación diferencial separable se puede resolver por los métodos de la sección 9.3:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C} = e^C e^{kt}$$

$$y = Ae^{kt}$$

donde A $(= \pm e^C$ o $0)$ es una constante arbitraria. Para ver el significado de la constante A, se observa que

$$P(0) = Ae^{k \cdot 0} = A$$

Por lo tanto, A es el valor inicial de la función.

Los ejemplos y ejercicios de la aplicación de (2) se proporcionan en la sección 3.8

$\boxed{2}$ La solución del problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP \qquad P(0) = P_0$$

es

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

Otra manera de escribir la ecuación 1 es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

que es la **rapidez de crecimiento relativa** que (es la rapidez de crecimiento dividida entre el tamaño de la población) es constante. Por lo tanto (2) dice que una población con crecimiento relativo constante debe crecer de forma exponencial.

Se puede considerar emigración (o "recolectores") de una población modificando la ecuación 1; si la rapidez de emigración es una constante m, en tal caso, la rapidez de cambio de la población se representa mediante la ecuación diferencial

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP - m$$

Considere el ejercicio 13 para la solución y consecuencias de la ecuación 3.

MODELO LOGÍSTICO

Como se explicó en la sección 9.1, una población suele incrementarse de forma exponencial en sus primeras etapas, pero se estabiliza finalmente y tiende a su capacidad de soporte debido a los recursos limitados. Si $P(t)$ es el tamaño de la población en el tiempo t, se supone que

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \qquad \text{si } P \text{ es pequeña}$$

Esto dice que la rapidez de crecimiento al inicio está próxima a ser proporcional al tamaño. En otras palabras, la rapidez de crecimiento relativa es casi constante cuando la población es pequeña. Pero también se quiere reflejar el hecho de que la rapidez de crecimiento relativa disminuye cuando se incrementa la población P y se vuelve negativa si P excede alguna vez su **capacidad de soporte** K, la población máxima que el ambiente es capaz de sostener a la larga. La expresión más simple para la rapidez de crecimiento relativa que incorpora estas suposiciones es

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Al multiplicar por P, se obtiene el modelo para el crecimiento poblacional conocido como **ecuación diferencial logística**:

$$\boxed{4} \qquad \boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)}$$

Observe de la ecuación 4 que si P es pequeña en comparación con K, en tal caso P/K es cercano a cero y, por lo tanto, $dP/dt \approx kP$. Sin embargo, si $P \to K$ (la población se aproxima a su capacidad de soporte), después $P/K \to 1$, así que $dP/dt \to 0$. Se puede deducir información acerca de si las soluciones se incrementan o disminuyen directamente de la ecuación 4. Si la población P yace entre 0 y K, por lo tanto el lado derecho de la ecuación es positivo, así que $dP/dt > 0$ y la población crece. Pero si la población excede la capacidad de soporte ($P > K$), por lo tanto $1 - P/K$ es negativa, de modo que $dP/dt < 0$ y la población disminuye.

Se inicia el análisis más detallado de la ecuación diferencial logística considerando un campo direccional.

EJEMPLO 1 Dibuje un campo direccional para la ecuación logística con $k = 0.08$ y capacidad de soporte $K = 1\,000$. ¿Qué se puede deducir acerca de las soluciones?

SOLUCIÓN En este caso la ecuación diferencial logística es

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right)$$

Un campo direccional para esta ecuación se muestra en la figura 1. Se muestra sólo el primer cuadrante porque las poblaciones negativas no son significativas y se tiene interés sólo en lo que sucede después de $t = 0$.

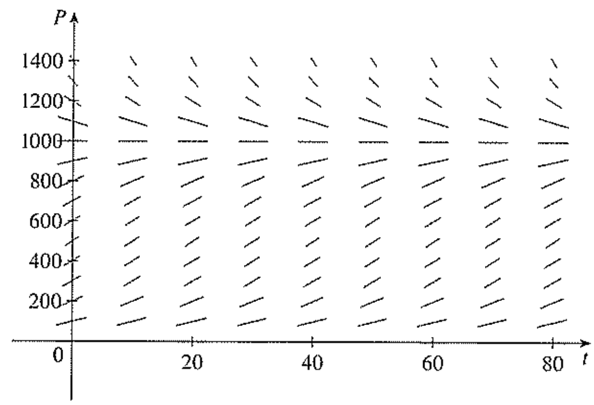


FIGURA 1
Campo direccional para la ecuación logística del ejemplo 1

La ecuación logística es autónoma (dP/dt depende sólo de P, no de t), así que las pendientes son las mismas a lo largo de cualquier recta horizontal. Como se esperaba, las pendientes son positivas para $0 < P < 1\,000$ y negativas para $P > 1\,000$.

Las pendientes son pequeñas cuando P se aproxima a 0 o 1 000 (la capacidad de soporte). Observe que las soluciones se alejan de la solución de equilibrio $P = 0$ y se mueven hacia la solución de equilibrio $P = 1\,000$.

En la figura 2 se usa el campo direccional para bosquejar curvas solución con poblaciones iniciales $P(0) = 100$, $P(0) = 400$, y $P(0) = 1\,300$. Note que las curvas solución que empiezan abajo de $P = 1\,000$ son crecientes y las que empiezan arriba de $P = 1\,000$ son decrecientes. Las pendientes son mayores cuando $P \approx 500$ y en consecuencia las curvas solución abajo de $P = 1\,000$ tienen puntos de inflexión cuando $P \approx 500$. De hecho, se puede probar que las curvas solución que empiezan abajo de $P = 500$ tienen un punto de inflexión cuando P es exactamente 500 (véase el ejercicio 9).

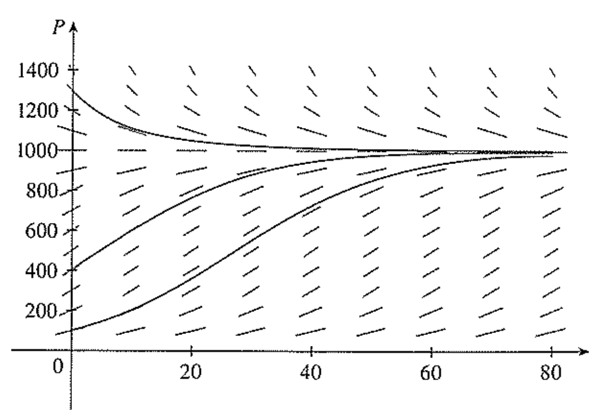


FIGURA 2
Curvas solución para la ecuación logística del ejemplo 1

□

La ecuación logística (4) es separable y, por lo tanto, se puede resolver de manera explícita con el método de la sección 9.3. Puesto que

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

se tiene

$$\boxed{5} \qquad \int \frac{dP}{P(1 - P/K)} = \int k\,dt$$

Para evaluar la integral del lado izquierdo, se escribe

$$\frac{1}{P(1 - P/K)} = \frac{K}{P(K - P)}$$

Al emplear fracciones parciales (véase sección 7.4), se obtiene

$$\frac{K}{P(K - P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}$$

Esto permite reescribir la ecuación 5:

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = \int k\,dt$$

$$\ln|P| - \ln|K - P| = kt + C$$

$$\ln\left|\frac{K - P}{P}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{K - P}{P}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}e^{-kt}$$

$$\boxed{6} \qquad \frac{K - P}{P} = Ae^{-kt}$$

donde $A = \pm e^{-C}$. Si de la ecuación 3 se despeja P, se obtiene

$$\frac{K}{P} - 1 = Ae^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{P}{K} = \frac{1}{1 + Ae^{-kt}}$$

por lo tanto, $$P = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}}$$

Se encuentra el valor de A si se escribe $t = 0$ en la ecuación 6. Si $t = 0$, después $P = P_0$ (la población inicial), por lo tanto,

$$\frac{K - P_0}{P_0} = Ae^0 = A$$

Así, la solución para la ecuación logística es

$$\boxed{7} \qquad \boxed{P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} \qquad \text{donde } A = \frac{K - P_0}{P_0}}$$

Al usar la expresión para $P(t)$ en la ecuación 4, se ve que

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = K$$

lo cual era de esperarse.

EJEMPLO 2 Escriba la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) \qquad P(0) = 100$$

y utilícela para hallar los tamaños de población $P(40)$ y $P(80)$. ¿En qué momento la población llega a 900?

SOLUCIÓN La ecuación diferencial es una ecuación logística con $k = 0.08$, capacidad de soporte $K = 1\,000$, y población inicial $P_0 = 100$. Por lo tanto, la ecuación 7 da la población en el tiempo t cuando

$$P(t) = \frac{1\,000}{1 + Ae^{-0.08t}} \qquad \text{donde } A = \frac{1\,000 - 100}{100} = 9$$

Así,
$$P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}}$$

Por consiguiente, los tamaños de población cuando $t = 40$ y 80 son

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9e^{-3.2}} \approx 731.6 \qquad P(80) = \frac{1000}{1 + 9e^{-6.4}} \approx 985.3$$

La población llega a 900 cuando

$$\frac{1000}{1 + 9e^{-0.08t}} = 900$$

Si de esta ecuación se despeja t, se obtiene

$$1 + 9e^{-0.08t} = \tfrac{10}{9}$$

$$e^{-0.08t} = \tfrac{1}{81}$$

$$-0.08t = \ln \tfrac{1}{81} = -\ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0.08} \approx 54.9$$

Compare la curva solución de la figura 3 con la curva solución inferior que se trazó a partir del campo direccional en la figura 2.

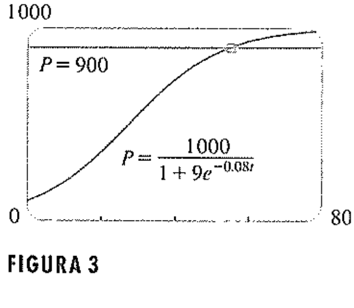


FIGURA 3

De modo que la población llega a 900 cuando t es aproximadamente 55. Como comprobación del trabajo, se grafica la curva de población en la figura 3 y se observa que cruza la recta $P = 900$. El cursor indica que $t \approx 55$.

COMPARACIÓN DEL CRECIMIENTO NATURAL Y MODELOS LOGÍSTICOS

En la década de 1930, el biólogo G. F. Gause realizó un experimento con el protozoario *Paramecium* y empleó una ecuación logística para representar sus datos. En la tabla se da la cuenta diaria de la población de protozoarios. Estimó la rapidez de crecimiento relativo inicial como 0.7944 y la capacidad de soporte como 64.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57

EJEMPLO 3 Encuentre los modelos exponencial y logístico para los datos de Gause. Compare los valores predichos con los valores observados y comente acerca del ajuste.

SOLUCIÓN Dada la rapidez de crecimiento relativo $k = 0.7944$ y la población inicial $P_0 = 2$, el modelo exponencial es

$$P(t) = P_0 e^{kt} = 2e^{0.7944t}$$

Gause empleó el mismo valor de k para su modelo logístico. [Esto es razonable porque $P_0 = 2$ es pequeña comparada con la capacidad de soporte ($K = 64$). La ecuación

$$\left.\frac{1}{P_0}\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = k\left(1 - \frac{2}{64}\right) \approx k$$

muestra que el valor de k para la ecuación logística es muy cercano al valor para el modelo exponencial.]

En consecuencia la solución de la ecuación logística en la ecuación 7 da

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-kt}} = \frac{64}{1 + Ae^{-0.7944t}}$$

donde
$$A = \frac{K - P_0}{P_0} = \frac{64 - 2}{2} = 31$$

Por consiguiente,
$$P(t) = \frac{64}{1 + 31e^{-0.7944t}}$$

Se emplean estas ecuaciones para calcular los valores predichos (redondeados hasta el entero más próximo) y se comparan en la tabla.

t (días)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
P (observada)	2	3	22	16	39	52	54	47	50	76	69	51	57	70	53	59	57
P (modelo logístico)	2	4	9	17	28	40	51	57	61	62	63	64	64	64	64	64	64
P (modelo exponencial)	2	4	10	22	48	106	...										

Se observa de la tabla y la gráfica de la figura 4 que para los primeros tres o cuatro días el modelo exponencial da resultados comparables a los del modelo logístico más complejo. Sin embargo para $t \geqslant 5$, el modelo exponencial es inexacto, pero el modelo logístico ajusta las observaciones razonablemente bien.

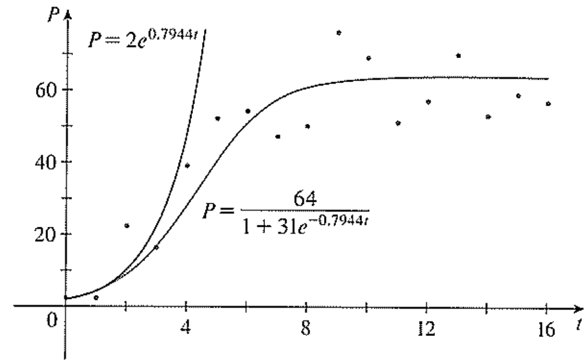


FIGURA 4
Modelos exponencial y logístico para los datos de *Paramecium*

Varios países que antes experimentaron crecimiento exponencial ahora están encontrando que su rapidez de crecimiento poblacional está declinando y el modelo logístico proporciona una buena representación. La tabla al margen muestra valores semestrales de $B(t)$, la población de Bélgica, en miles, al tiempo t, desde 1980 hasta 2000. La figura 5 muestra estos puntos de información junto con una función logística desplazada que se obtiene de una calculadora con la capacidad de ajustar una función logística a estos puntos mediante regresión. Se nota que el modelo logístico proporciona un buen ajuste.

t	$B(t)$	t	$B(t)$
1980	9847	1992	10036
1982	9856	1994	10109
1984	9855	1996	10152
1986	9862	1998	10175
1988	9884	2000	10186
1990	9962		

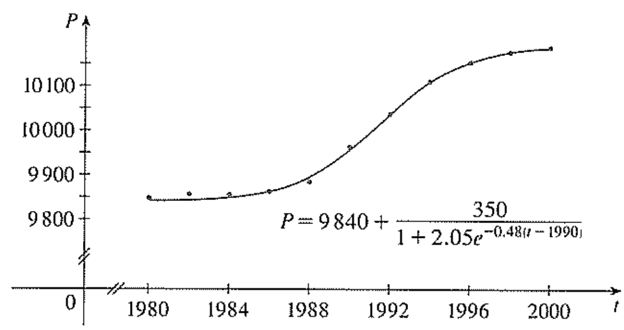


FIGURA 5
Modelo logístico para la población de Bélgica

OTROS MODELOS PARA EL CRECIMIENTO POBLACIONAL

La ley de crecimiento natural y la ecuación diferencial logística no son las únicas ecuaciones que han sido propuestas para modelar el crecimiento poblacional. En el ejercicio 18 se considera la función de crecimiento de Gompertz y en los ejercicios 19 y 20 se investigan modelos de crecimiento estacionales.

Otros dos modelos son modificaciones del modelo logístico. La ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - c$$

se ha empleado para representar poblaciones que están sujetas a la "recolección" de un tipo u otro. (Considere una población de peces que es capturada en una proporción constante.) Esta ecuación se explora en los ejercicios 15 y 16.

Para algunas especies hay un nivel mínimo de población m debajo del cual la especie tiende a extinguirse. (Es posible que los adultos no encuentren parejas adecuadas.) Esta clase de poblaciones han sido representada mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

donde el factor extra, $1 - m/P$, tome en cuenta las consecuencias de una población escasa (véase el ejercicio 17).

9.4 EJERCICIOS

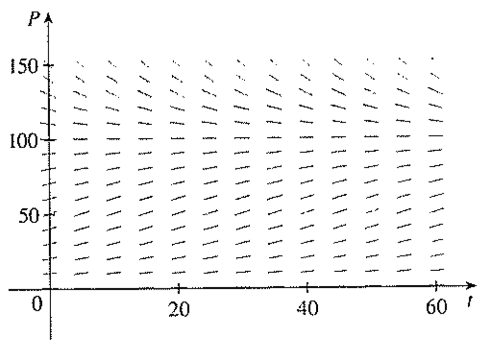
1. Suponga que una población se desarrolla de acuerdo con la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.05P - 0.0005P^2$$

donde t se mide en semanas.

(a) ¿Cuál es la capacidad de soporte? ¿Cuál es el valor de k?

(b) A la derecha se muestra un campo direccional para esta ecuación. ¿Dónde las pendientes son cercanas a 0? ¿Dónde son mayores? ¿Qué soluciones son crecientes? ¿Cuáles soluciones son decrecientes?



(c) Use el campo direccional para bosquejar las soluciones para poblaciones iniciales de 20, 40, 60, 80, 120 y 140. ¿Qué tienen en común estas soluciones? ¿Cómo difieren? ¿Qué soluciones tienen puntos de inflexión? ¿A qué niveles de población se presentan?

(d) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio? ¿Cómo se relacionan estas soluciones con las otras?

2. Suponga que una población crece de acuerdo con un modelo logístico con capacidad de soporte 6000 y $k = 0.0015$ por año.

(a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos.

(b) Dibuje un campo direccional (ya sea a mano o con un sistema algebraico computacional). ¿Qué le dice acerca de las curvas solución?

(c) Use el campo direccional para bosquejar las curvas solución para las poblaciones iniciales de 1 000, 2 000, 4 000 y 8 000. ¿Qué se puede decir acerca de la concavidad de estas curvas? ¿Cuál es la importancia de los puntos de inflexión?

(d) Programe una calculadora o computadora para usar el método de Euler con tamaño de paso $h = 1$ para estimar la población después de 50 años si la población inicial es 1 000.

(e) Si la población inicial es 1 000, escriba una fórmula para la población después de t años. Empléela para determinar la población después de 50 años y compare con su estimación en el inciso (d).

(f) Grafique la solución del inciso (e) y compare con la curva solución que bosquejó en el inciso (c).

3. La pesca del hipogloso del Pacífico ha sido representada por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

donde $y(t)$ es la biomasa (la masa total de los integrantes de la población) en kilogramos en el tiempo t (medido en años), la capacidad de soporte se estima como $K = 8 \times 10^7$ kg, y $k = 0.71$ por año.

(a) Si $y(0) = 2 \times 10^7$ kg, calcule la biomasa un año después.

(b) ¿En cuánto tiempo la biomasa alcanza 4×10^7 kg?

4. En la tabla se da el número de células de levadura en un nuevo cultivo de laboratorio.

Tiempo (horas)	Células de levadura	Tiempo (horas)	Células de levadura
0	18	10	509
2	39	12	597
4	80	14	640
6	171	16	664
8	336	18	672

(a) Grafique los datos y use la gráfica para estimar la capacidad de soporte para la población de levadura.

(b) Use los datos para estimar la tasa de crecimiento relativo inicial.

(c) Encuentre un modelo exponencial y un modelo logístico para estos datos.

(d) Compare los valores predichos con los valores observados, en una tabla y con gráficas. Comente acerca de cuán bien sus modelos ajustan los datos.

(e) Use el modelo logístico para estimar el número de células de levadura después de 7 horas.

5. La población del mundo fue cercana a 5.3 miles de millones en 1990. El régimen de nacimientos en la década de 1990 varió de 35 a 40 millones por año y la frecuencia de mortalidad varió de 15 a 20 millones por año. Supónga que la capacidad de soporte para la población mundial es 100 000 millones.

(a) Escriba la ecuación diferencial logística para estos datos. (Debido a que la población inicial es pequeña comparada con la capacidad de soporte, se puede tomar k como una estimación de la rapidez de crecimiento relativo inicial.)

(b) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en el año 2000, y compare con la población real de 6 100 millones.

(c) Use el modelo logístico para estimar la población mundial en los años 2100 y 2500.

(d) ¿Cuáles son sus predicciones si la capacidad de soporte es 50 000 millones?

6. (a) Haga una suposición en cuanto a la capacidad de soporte para la población de Estados Unidos. Utilícela junto con el hecho de que la población fue de 250 millones en 1990, a fin de formular un modelo logístico para la población de Estados Unidos.

(b) Determine el valor de k en su modelo usando el hecho de que la población en el año 2000 fue de 275 millones.

(c) Use su modelo para predecir la población de Estados Unidos en los años 2100 y 2200.

(d) Por medio de su modelo, prediga el año en que la población de Estados Unidos pasará de 350 millones.

7. Un modelo para la difusión de un rumor, es que la rapidez de difusión es proporcional al producto de la fracción y de la población que ha escuchado el rumor y la fracción que no lo ha escuchado.
(a) Escriba una ecuación diferencial que se satisfaga mediante y.
(b) Resuelva la ecuación diferencial.
(c) Un pequeño pueblo tiene 1 000 habitantes. A las 8 A.M., 80 personas han escuchado un rumor. A mediodía la mitad del pueblo lo ha escuchado. ¿En qué tiempo 90% de la población ha escuchado el rumor?

8. Unos biólogos abastecieron un lago con 400 peces y estimaron la capacidad de soporte (la población máxima para los peces de esa especie en ese lago) en 10 000. La cantidad de peces se triplicó en el primer año.
(a) Si se supone que el tamaño de la población de peces satisface la ecuación logística, encuentre una expresión para el tamaño de la población después de t años.
(b) ¿En cuánto tiempo la población se incrementa a 5 000?

9. (a) Muestre que si P satisface la ecuación logística (4), en tal caso

$$\frac{d^2P}{dt^2} = k^2P\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{2P}{K}\right)$$

(b) Deduzca que una población crece más rápido cuando alcanza la mitad de su capacidad de soporte.

10. Para un valor fijo de K (por ejemplo $K = 10$), la familia de funciones logísticas dada por la ecuación 7 depende del valor inicial de P_0 y la constante de proporcionalidad k. Grafique para diferentes integrantes de esta familia. ¿Cómo cambia la gráfica cuando varía P_0? ¿Cómo cambia cuando varía k?

11. La tabla proporciona la población semestral de Japón, en miles, desde 1960 hasta 2005.

Año	Población	Año	Población
1960	94 092	1985	120 754
1965	98 883	1990	123 537
1970	104 345	1995	125 341
1975	111 573	2000	126 700
1980	116 807	2005	127 417

Utilice una calculadora graficadora para ajustar tanto una función exponencial y una función logística de esta información. Grafique los puntos de información y ambas funciones, y comente sobre la exactitud de las representaciones. [*Sugerencia*: resta 94 000 de cada una de las cifras de población. A continuación, después de obtener una representación de su calculadora, sume 94 000 para obtener su representación final. Podría ser útil elegir $t = 0$ para corresponder a 1960 o bien 1980.]

12. La tabla proporciona la población semestral de España, en miles, desde 955 hasta 2000.

Año	Población	Año	Población
1955	29 319	1980	37 488
1960	30 641	1985	38 535
1965	32 085	1990	39 351
1970	33 876	1995	39 750
1975	35 564	2000	40 016

Utilice una calculadora graficadora para ajustar tanto una función exponencial y una función logística de esta información. Grafique los puntos de información y ambas funciones, y comente sobre la exactitud de las representaciones. [*Sugerencia*: reste 29 000 de cada una de las cifras de población. A continuación, después de obtener una representación de su calculadora, sume 29 000 para obtener su representación final. Podría ser útil $t = 0$ para corresponder a 1955 o bien 1975.]

13. Considere una población $P = P(t)$ con rapidez de nacimiento y de mortalidad constante α y β, respectivamente y una relación m de emigración constante, donde α, β y m son constantes positivas. Considere que $\alpha > \beta$. En tal caso la relación de cambio de la población en el tiempo t se representa mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP - m \qquad \text{donde } k = \alpha - \beta$$

(a) Hallar la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $P(0) = P_0$
(b) ¿Qué condición en m conducirá a una expansión exponencial de la población?
(c) ¿Qué condición en m dará como resultado una población constante? ¿Una población que decline?
(d) En 1847, la población de Irlanda fue de casi 8 millones y la diferencia entre las proporciones de nacimiento relativo y la mortalidad fue de 1.6% de la población. Debido a la escasez de papas en las décadas de 1840 y 1850, casi 210 000 habitantes por cada año emigraron de Irlanda. ¿En ese tiempo la población se expandió o fue declinante?

14. Sea c un número positivo. Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dt} = ky^{1+c}$$

donde k es una constante positiva, se le denomina *ecuación del día del juicio final* ya que el exponente en la expresión ky^{1+c} es más grande que el exponente 1 para crecimiento natural.
(a) Establezca la solución que satisface la condición inicial $y(0) = y_0$.
(b) Demuestre que existe un tiempo finito $t = T$ (del día del juicio final) tal que $\lim_{t \to T^-} y(t) = \infty$.
(c) Una especie especialmente prolífica de conejos tiene el término de crecimiento $ky^{1.01}$. Si 2 de tal especie de conejos al principio y en la madriguera tiene 16 conejos después de tres meses, ¿en tal caso cuándo es el día del juicio final?

15. Se modificará la ecuación diferencial logística del ejemplo 1 como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - 15$$

(a) Suponga que $P(t)$ representa una población de peces en el tiempo t, donde t se mide en semanas. Explique el significado del término -15.
(b) Trace un campo direccional para esta ecuación diferencial.
(c) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?
(d) Use el campo direccional para bosquejar varias curvas solución. Describa lo que sucede a la población de peces para diferentes poblaciones iniciales.
CAS (e) Resuelva esta ecuación diferencial de manera explícita, ya sea por medio de fracciones parciales, o con un sistema algebraico computarizado. Use las poblaciones iniciales 200 y 300. Grafique las soluciones y compare con sus bosquejos del inciso (d).

CAS **16.** Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 0.08P\left(1 - \frac{P}{1000}\right) - c$$

como un modelo para una población de peces, donde t se mide en semanas y c es una constante.
(a) Use un CAS para trazar los campos direccionales para varios valores de c.
(b) De sus campos direccionales del inciso (a), determine los valores de c para los cuales hay por lo menos una solución de equilibrio. ¿Para qué valores de c la población de peces se extingue siempre?
(c) Use la ecuación diferencial para probar lo que descubrió en forma gráfica en el inciso (b).
(d) ¿Qué recomendaría como límite para la captura semanal de esta población de peces?

17. Existe evidencia considerable para apoyar la teoría de que para algunas especies hay una población mínima m tal que las especies se extinguirán si el tamaño de la población cae por debajo de m. Esta condición se puede incorporar en la ecuación logística introduciendo el factor $(1 - m/P)$. Así, el modelo logístico modificado está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

(a) Use la ecuación diferencial para mostrar que cualquier solución es creciente si $m < P < K$ y decreciente si $0 < P < m$.
(b) Para el caso donde $k = 0.08$, $K = 1\,000$, y $m = 200$, dibuje un campo direccional y utilícelo para bosquejar varias curvas solución. Describa lo que sucede a la población para varias poblaciones iniciales. ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?
(c) Resuelva la ecuación diferencial de forma explícita, ya sea por medio de fracciones parciales o con un sistema algebraico computacional. Use la población inicial P_0.
(d) Use la solución del inciso (c) para mostrar que si $P_0 < m$, después la especie se extingue. [*Sugerencia:* muestre que el numerador en su expresión para $P(t)$ es 0 para algún valor de t].

18. Otro modelo para una función de crecimiento de una población limitada está dado por la **función de Gompertz**, que es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = c\ln\left(\frac{K}{P}\right)P$$

donde c es una constante y K es la capacidad de soporte.
(a) Resuelva esta ecuación diferencial.
(b) Calcule $\lim_{t\to\infty} P(t)$.
(c) Grafique la función de crecimiento de Gompertz para $K = 1\,000$, $P_0 = 100$, y $c = 0.05$, y compárela con la función logística del ejemplo 2. ¿Cuáles son las similitudes? ¿Cuáles son las diferencias?
(d) Se sabe del ejercicio 9 que la función logística crece más rápido cuando $P = K/2$. Use la ecuación diferencial de Gompertz para mostrar que la función de Gompertz crece más rápido cuando $P = K/e$.

19. En un **modelo de crecimiento estacional**, una función periódica del tiempo se introduce para explicar las variaciones estacionales en la tasa de crecimiento. Tales variaciones podrían, por ejemplo, ser causadas por cambios estacionales en la disponibilidad de alimento.
(a) Encuentre la solución del modelo de crecimiento estacional

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

donde k, r y ϕ son constantes positivas.
(b) Grafique la solución para diferentes valores de k, r y ϕ, y explique cómo afectan a la solución los valores de k, r y ϕ. ¿Qué puede decir acerca de $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

20. Suponga que se modifica la ecuación diferencial del ejercicio 19 como sigue:

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos^2(rt - \phi) \qquad P(0) = P_0$$

(a) Resuelva esta ecuación diferencial con la ayuda de una tabla de integrales o un CAS.
(b) Grafique la solución para diferentes valores de k, r y ϕ. ¿Cómo afectan a la solución los valores de k, r y ϕ? ¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{t\to\infty} P(t)$ en este caso?

21. Las gráficas de las funciones logísticas (figuras 2 y 3) se ven sospechosamente similares a la gráfica de la función tangente hiperbólica (figura 3 en la sección 3.11). Explique la similitud mostrando que la función logística dada por la ecuación 4 se puede escribir como

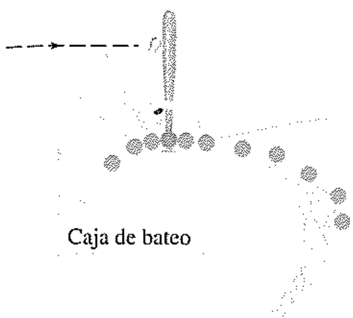
$$P(t) = \tfrac{1}{2}K\left[1 + \tanh\left(\tfrac{1}{2}k(t - c)\right)\right]$$

donde $c = (\ln A)/k$. Así, la función logística es en realidad una tangente hiperbólica desplazada.

PROYECTO DE APLICACIÓN

CÁLCULO Y BÉISBOL

En este proyecto se exploran tres de las muchas aplicaciones del cálculo al béisbol. Las interacciones físicas del juego, en particular la colisión de la bola y el bate, son bastante complejas y sus modelos se analizan en detalle en un libro de Robert Adair, *The Physics of Baseball*, 3a ed. (Nueva York: HarperPerennial, 2002).



Una vista superior de la posición de un bate de béisbol, muestra cada cincuentava parte de segundo durante un *swing* representativo. (Adaptado de *The Physics of Baseball*)

1. Podría sorprenderle saber que la colisión de la bola de béisbol y el bate dura sólo un milésimo de segundo. Aquí se calcula la fuerza promedio sobre el bate durante la colisión, calculando primero el cambio en el *momentum* de la bola.

El *momentum* p de un objeto es el producto de su masa m y su velocidad v, es decir, $p = mv$. Suponga que un objeto, que se mueve a lo largo de una recta, es afectado por una fuerza $F = F(t)$ que es una función continua del tiempo.

(a) Muestre que el cambio de *momentum* en un intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es igual a la integral de F de t_0 a t_1; es decir, muestre que

$$p(t_1) - p(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} F(t)\,dt$$

Esta integral se llama el *impulso* de la fuerza en el intervalo de tiempo.

(b) Un lanzador envía una bola rápida a 90 millas/h al bateador, quien saca una recta directamente detrás del lanzador. La bola está en contacto con el bate durante 0.001 s y sale del bate con velocidad 110 millas/h. Una bola de béisbol pesa 5 oz y, en unidades inglesas, su masa se mide en slugs: $m = w/g$ donde $g = 32$ pies/s^2.

(i) Encuentre el cambio en el *momentum* de la bola.

(ii) Determine la fuerza promedio en el bate.

2. En este problema se calcula el trabajo requerido para que un lanzador envíe una bola rápida a 90 millas/h considerando primero la energía cinética.

La *energía cinética* K de un objeto de masa m y velocidad v está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$. Suponga que un objeto de masa m, que se mueve en línea recta, es afectado por una fuerza $F = F(s)$ que depende de su posición s. De acuerdo con la segunda ley de Newton.

$$F(s) = ma = m\frac{dv}{dt}$$

donde a y v denotan la aceleración y velocidad de un objeto.

(a) Muestre que el trabajo invertido al mover el objeto desde una posición s_0 a una posición s_1 es igual al cambio en la energía cinética del objeto; es decir, muestre que

$$W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)\,ds = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

donde $v_0 = v(s_0)$ y $v_1 = v(s_1)$ son las velocidades del objeto en las posiciones s_0 y s_1. *Sugerencia:* por la regla de la cadena,

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

(b) ¿Cuántos pies-libra de trabajo requiere lanzar una bola de beisbol a una rapidez de 90 millas/h?

3. (a) Un jardinero atrapa una pelota a 280 pies desde la placa de bateo y la lanza directamente al receptor con una velocidad inicial de 100 pies/s. Suponga que la velocidad $v(t)$ de la bola después de t segundos satisface la ecuación diferencial $dv/dt = -v/10$ debido a la resistencia del aire. ¿Cuánto tarda la bola en llegar a la placa de bateo? (Ignore cualquier movimiento vertical de la bola.)

(b) El entrenador del equipo se pregunta si la bola llega más rápido a la base principal si primero la recibe un jugador de cuadro y éste la lanza a la base. El parador en corto puede colocarse directamente entre el jardinero y la base, atrapar la bola proveniente del jardinero, darse la vuelta y lanzar la bola al receptor con una velocidad inicial de 105 pies/s. El entrenador cronometra el tiempo de relevo del parador en corto (atrapar, voltear, lanzar) en medio segundo. ¿A qué distancia de la base de bateo se debe colocar el parador en corto a fin de reducir el tiempo total para que la bola llegue a su destino? ¿El entrenador debe promover un lanzamiento directo o uno de relevo? ¿Qué pasa si el parador en corto puede lanzar a 115 pies/s?

(c) ¿Para qué velocidad de lanzamiento del parador en corto un lanzamiento de relevo toma el mismo tiempo que un lanzamiento directo?

9.5 ECUACIONES LINEALES

Una ecuación diferencial **lineal** de primer orden es una que se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

donde P y Q son funciones continuas en un determinado intervalo. Este tipo de ecuación se presenta con frecuencia en varias ciencias, como se verá.

Un ejemplo de una ecuación lineal es $xy' + y = 2x$ porque, para $x \neq 0$, se puede escribir en la forma

$$y' + \frac{1}{x}y = 2 \tag{2}$$

Observe que esta ecuación diferencial no es separable porque es imposible factorizar la expresión para y' como una función de x por una función de y. Pero aún se puede resolver la ecuación si se nota, por la regla del producto, que

$$xy' + y = (xy)'$$

y, por lo tanto, la ecuación se puede reescribir como

$$(xy)' = 2x$$

Si ahora se integran ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$xy = x^2 + C \qquad \text{o} \qquad y = x + \frac{C}{x}$$

Si se hubiera tenido la ecuación diferencial en la forma de la ecuación 2, se habría tenido que tomar el paso preliminar de multiplicar cada lado de la ecuación por x.

Resulta que toda ecuación diferencial lineal de primer orden se puede resolver de un modo similar al multiplicar ambos lados de la ecuación 1 por una función adecuada $I(x)$ llamada *factor de integración*. Se intenta hallar I de modo que el lado izquierdo de la ecuación 1, cuando se multiplique por $I(x)$, se convierta en la derivada del producto $I(x)y$:

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \tag{3}$$

Si se puede hallar tal función I, en tal caso la ecuación 1 se convierte en

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Al integrar ambos lados, se debe tener

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)\,dx + C$$

de modo que la solución sería

$$\boxed{4} \qquad y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)\,dx + C\right]$$

Para hallar tal I, se desarrolla la ecuación 3 y se cancelan términos:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)P(x) = I'(x)$$

Ésta es una ecuación diferencial separable para I, que se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$

$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

donde $A = \pm e^{C}$. Se busca un factor de integración particular, no el más general, así que se toma $A = 1$ y se usa

$$\boxed{5} \qquad I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

Así, una fórmula para la solución general de la ecuación 1 la da la ecuación 4, donde I se determina mediante la ecuación 5. Sin embargo, en lugar de memorizar esta fórmula, sólo se recuerda la forma del factor de integración.

> Para resolver la ecuación diferencial lineal $y' + P(x)y = Q(x)$, multiplique ambos lados por el **factor de integración** $I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$ e integre ambos lados.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$.

SOLUCIÓN La ecuación dada es lineal, puesto que tiene la forma de la ecuación 1 con $P(x) = 3x^2$ y $Q(x) = 6x^2$. Un factor de integración es

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por e^{x^3}, se obtiene

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

o bien,

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

En la figura 1 se muestran las gráficas de varios integrantes de la familia de soluciones del ejemplo 1. Observe que se aproximan a 2 cuando $x \to \infty$.

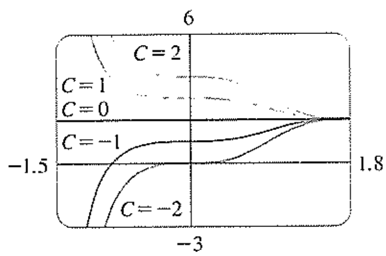


FIGURA 1

La integración de ambos lados produce

$$e^{x^3}y = \int 6x^2 e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

EJEMPLO 2 Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad y(1) = 2$$

SOLUCIÓN Se deben dividir primero ambos lados entre el coeficiente de y' para escribir la ecuación diferencial en la forma estándar:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0 \tag{6}$$

El factor de integración es

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

Al multiplicar la ecuación 6 por x, se obtiene

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad \text{o} \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

En tal caso $\qquad xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$

La solución del problema de valor inicial del ejemplo 2 se muestra en la figura 2.

y, por eso, $\qquad y = \dfrac{\ln x + C}{x}$

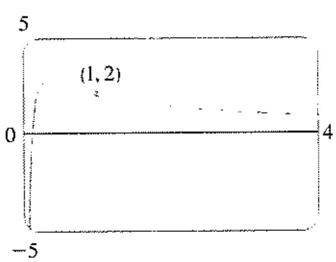


FIGURA 2

Puesto que $y(1) = 2$, se tiene

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

En consecuencia, la solución del problema de valor inicial es

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$

EJEMPLO 3 Resuelva $y' + 2xy = 1$.

SOLUCIÓN La ecuación dada está en la forma estándar para una ecuación lineal. Al multiplicar por el factor de integración

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

se obtiene $\qquad e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = e^{x^2}$

o bien, $\qquad (e^{x^2}y)' = e^{x^2}$

Por lo tanto, $\qquad e^{x^2}y = \int e^{x^2}\,dx + C$

Aun cuando las soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 3 se pueden expresar en términos de una integral, se pueden graficar todavía mediante un sistema algebraico computacional (figura 3).

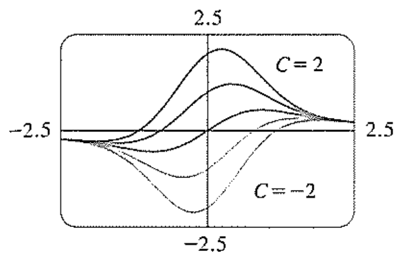


FIGURA 3

Recuerde de la sección 7.5 que $\int e^{x^2}\,dx$ no se puede expresar en términos de funciones elementales. Sin embargo, es una función perfectamente buena y se puede dejar la respuesta como

$$y = e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx + Ce^{-x^2}$$

Otra forma de escribir la solución es

$$y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^{-x^2}$$

(Se puede elegir cualquier número para el límite de integración inferior.) □

APLICACIÓN A CIRCUITOS ELÉCTRICOS

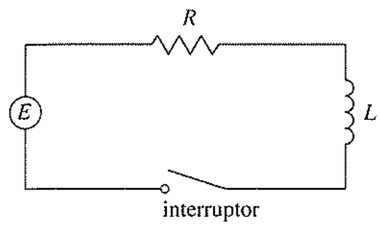


FIGURA 4

En la sección 9.2 se consideró el circuito eléctrico simple mostrado en la figura 4: una fuerza electromotriz (por lo común, una batería o generador) produce un voltaje de $E(t)$ volts (V) y una corriente de $I(t)$ amperes (A) en el tiempo t. El circuito también contiene un resistor con una resistencia de R ohms (Ω) y un inductor con una inductancia de L henries (H).

La ley de Ohm da la caída de voltaje debida al resistor como RI. La caída de voltaje debida al inductor es $L(dI/dt)$. Una de las leyes de Kirchhoff dice que la suma de las caídas de voltaje es igual al voltaje suministrado $E(t)$. Así, se tiene

$$\boxed{7} \qquad L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden. La solución da la corriente I en el tiempo t.

EJEMPLO 4 Suponga que en el circuito simple de la figura 4 la resistencia es 12 Ω y la inductancia es 4 H. Si una batería da un voltaje constante de 60 V y el interruptor se cierra cuando $t = 0$ de modo que la corriente empieza con $I(0) = 0$, encuentre (a) $I(t)$, (b) la corriente después de 1 s y (c) el valor límite de la corriente.

La ecuación diferencial del ejemplo 4 es lineal y separable, así que un método alternativo es resolverla como una ecuación separable (ejemplo 4 de la sección 9.3). Sin embargo, si se reemplaza la batería por un generador, se obtiene una ecuación que es lineal pero no es separable (ejemplo 5).

SOLUCIÓN

(a) Si se escribe $L = 4$, $R = 12$, y $E(t) = 60$ en la ecuación 7, se obtiene el problema de valor inicial

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

o bien,

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

Al multiplicar por el factor de integración $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$, se obtiene

$$\begin{aligned} e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I &= 15e^{3t} \\ \frac{d}{dt}(e^{3t}I) &= 15e^{3t} \\ e^{3t}I &= \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C \\ I(t) &= 5 + Ce^{-3t} \end{aligned}$$

En la figura 5 se muestra cómo la corriente del ejemplo 4 se aproxima a su valor límite.

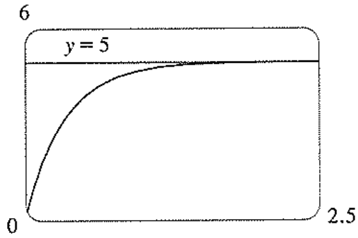


FIGURA 5

Puesto que $I(0) = 0$, se tiene $5 + C = 0$, por lo tanto, $C = -5$ e

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

(b) Después de un segundo, la corriente es

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75 \text{ A}$$

(c) El valor d la corriente en el límite está dado por

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t\to\infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5 \qquad \square$$

EJEMPLO 5 Suponga que la resistencia y la inductancia permanecen como en el ejemplo 4 pero, en lugar de la batería, se usa un generador que produce un voltaje variable de $E(t) = 60 \operatorname{sen} 30t$ volts. Encuentre $I(t)$.

SOLUCIÓN Esta vez la ecuación diferencial se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \operatorname{sen} 30t \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} + 3I = 15 \operatorname{sen} 30t$$

El mismo factor de integración e^{3t} da

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t$$

En la figura 6 se muestra la gráfica de la corriente cuando se reemplaza la batería por un generador.

Por medio de la fórmula 98 de la tabla de integrales, se tiene

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t} \operatorname{sen} 30t\, dt = 15\frac{e^{3t}}{909}(3 \operatorname{sen} 30t - 30 \cos 30t) + C$$

$$I = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + Ce^{-3t}$$

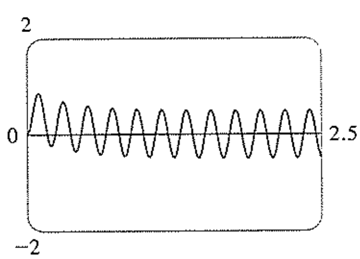


FIGURA 6

Puesto que $I(0) = 0$, se obtiene

$$-\tfrac{50}{101} + C = 0$$

por lo tanto, $$I(t) = \tfrac{5}{101}(\operatorname{sen} 30t - 10 \cos 30t) + \tfrac{50}{101}e^{-3t} \qquad \square$$

9.5 EJERCICIOS

1–4 Determine si la ecuación diferencial es lineal.

1. $y' + \cos x = y$

2. $y' + \cos y = \tan x$

3. $yy' + xy = x^2$

4. $xy + \sqrt{x} = e^x y'$

5–14 Resuelva la ecuación diferencial.

$\boxed{5.}$ $y' + 2y = 2e^x$

6. $y' = x + 5y$

7. $xy' - 2y = x^2$

8. $x^2y' + 2xy = \cos^2 x$

$\boxed{9.}$ $xy' + y = \sqrt{x}$

10. $y' + y = \operatorname{sen}(e^x)$

11. $\operatorname{sen} x \dfrac{dy}{dx} + (\cos x)y = \operatorname{sen}(x^2)$

12. $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^4e^x$

13. $(1 + t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \quad t > 0$

14. $t \ln t \dfrac{dr}{dt} + r = te^t$

15–20 Resuelva el problema del valor inicial.

15. $y' = x + y, \quad y(0) = 2$

16. $t\dfrac{dy}{dt} + 2y = t^3, \quad t > 0, \quad y(1) = 0$

17. $\dfrac{dv}{dt} - 2tv = 3t^2e^{t^2}, \quad v(0) = 5$

18. $2xy' + y = 6x, \quad x > 0, \quad y(4) = 20$

19. $xy' = y + x^2 \operatorname{sen} x, \quad y(\pi) = 0$

20. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3x(y - 1) = 0, \quad y(0) = 2$

21–22 Resuelva la ecuación diferencial y use una calculadora o computadora para graficar varios miembros de la familia de soluciones. ¿Cómo cambia la curva solución cuando varía C?

21. $xy' + 2y = e^x$

22. $y' + (\cos x)y = \cos x$

---

23. Una **ecuación diferencial de Bernoulli** (en honor a James Bernoulli) es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

Observe que, si $n = 0$ o 1, la ecuación de Bernoulli es lineal. Para otros valores de n, muestre que la sustitución $u = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli en la ecuación lineal

$$\frac{du}{dx} + (1 - n)P(x)u = (1 - n)Q(x)$$

24–25 Use el método del ejercicio 23 para resolver la ecuación diferencial.

24. $xy' + y = -xy^2$

25. $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{y^3}{x^2}$

---

26. Resolver la ecuación de segundo orden $xy'' + 2y' = 12x^2$ haciendo la sustitución $u = y'$

27. En el circuito mostrado en la figura 4, un generador suministra un voltaje de 40 V, la inductancia es 2 H, la resistencia es 10 Ω, e $I(0) = 0$.
(a) Encuentre $I(t)$.
(b) Determine la corriente después de 0.1 s.

28. En el circuito mostrado en la figura 4, un generador suministra un voltaje de $E(t) = 40 \operatorname{sen} 60t$ volts, la inductancia es 1 H, la resistencia es 20 Ω, e $I(0) = 1$ A.
(a) Encuentre $I(t)$.
(b) Determine la corriente después de 0.1 s.
(c) Use un dispositivo de graficación para dibujar la gráfica de la función de corriente.

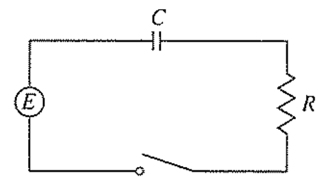
29. En la figura se muestra un circuito que contiene una fuerza electromotriz, un capacitor con capacitancia C farads (F), y un resistor con una resistencia de R ohms (Ω). La caída de voltaje en el capacitor es Q/C, donde Q es la carga (en coulombs), así que en este caso la ley de Kirchhoff da

$$RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

Pero $I = dQ/dt$ (véase el ejemplo 3 en la sección 3.7), de este modo se tiene

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Suponga que la resistencia es 5 Ω, la capacitancia es 0.05 F, una batería da un voltaje constante de 60 V, y la carga inicial es $Q(0) = 0$ C. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.



30. En el circuito del ejercicio 29, $R = 2\ \Omega$, $C = 0.01$ F, $Q(0) = 0$, y $E(t) = 10 \operatorname{sen} 60t$. Encuentre la carga y la corriente en el tiempo t.

31. Sea $P(t)$ el nivel de desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función de tiempo de capacitación t. La gráfica de P se llama *curva de aprendizaje*. En el ejercicio 13 de la sección 9.1 se propuso la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = k[M - P(t)]$$

como un modelo razonable para el aprendizaje, donde k es una constante positiva. Resuélvala como una ecuación diferencial lineal y use su solución para graficar la curva de aprendizaje

32. Se contrató a dos nuevos trabajadores para una línea de ensamble. Jaime procesó 25 unidades durante la primera hora y 45 unidades durante la segunda hora. Marco procesó 35 unidades durante la primera hora y 50 unidades durante la segunda hora. Por medio del modelo del ejercicio 31, y suponiendo que $P(0) = 0$, estime el número máximo de unidades por hora que cada trabajador es capaz de procesar.

33. En la sección 9.3 se examinaron problemas de mezcla en los que el volumen de líquido permaneció constante y se vio que tales problemas dan lugar a ecuaciones separables. (Véase el ejemplo 6 de esa sección). Si las relaciones de flujo hacia dentro y hacia fuera del sistema son diferentes, en tal caso el volumen no es constante y la ecuación diferencial resultante es lineal pero no separable.

Un tanque contiene 100 L de agua. Una solución con una concentración de sal de 0.4 kg/L se agrega en una proporción de 5 L/min. La solución se mantiene mezclada y se drena del tanque a una rapidez de 3 L/min. Si $y(t)$ es la cantidad de sal (en kilogramos) después de t minutos, muestre que y satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}$$

Resuelva esta ecuación y determine la concentración después de 20 minutos.

34. Un recipiente con una capacidad de 400 L se llena con una mezcla de agua y cloro con una concentración de 0.05 g de cloro por litro. A fin de reducir la concentración de cloro, se bombea agua nueva hacia el recipiente a una proporción de 4 L/s. La mezcla se mantiene agitada y se bombea hacia afuera con una proporción de 10 L/s. Encuentre la cantidad de cloro en el recipiente como una función del tiempo.

35. Se deja caer desde el reposo un objeto con masa m y se supone que la resistencia del aire es proporcional a la rapidez del objeto. Si $s(t)$ es la distancia recorrida después de t segundos, después la rapidez es $v = s'(t)$ y la aceleración es $a = v'(t)$. Si g es la aceleración debida a la gravedad, luego la fuerza hacia abajo sobre el objeto es $mg - cv$, donde c es una constante positiva, y la segunda ley de Newton da

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv$$

(a) Resuélvala como una ecuación lineal para mostrar que

$$v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-ct/m})$$

(b) ¿Cuál es la velocidad límite?

(c) Encuentre la distancia que ha recorrido el objeto después de t segundos.

36. Si se ignora la resistencia del aire, se puede concluir que los objetos más pesados no caen más rápido que los objetos ligeros. Pero si se toma en cuenta la resistencia del aire, la conclusión cambia. Use la expresión para la velocidad de un objeto que cae en el ejercicio 35(a) para hallar dv/dm y muestre que los objetos más pesados *caen* más rápido que los más ligeros.

9.6 SISTEMAS PREDADOR-PRESA

Se ha observado una variedad de modelos para el crecimiento de una sola especie que vive sola en un ambiente. En esta sección se consideran modelos más reales que toman en cuenta la interacción de dos especies en el mismo hábitat. Se verá que estos modelos toman la forma de un par de ecuaciones diferenciales enlazadas.

Se considera primero la situación en la que una especie, llamada *presa,* tiene un suministro amplio de alimento y la segunda especie, llamada *predador,* se alimenta de la presa. Ejemplos de presas y predadores incluyen conejos y lobos en un bosque aislado, peces y tiburones, áfidos y mariquitas, y bacterias y amebas. El modelo tendrá dos variables dependientes, y ambas son funciones del tiempo. Sea $R(t)$ el número de presas (con R que representa conejos) y $W(t)$ el número de predadores (con W para lobos) en el tiempo t.

En ausencia de predadores, el suministro amplio de alimento soportaría el crecimiento exponencial de la presa, es decir,

$$\frac{dR}{dt} = kR \qquad \text{donde } k \text{ es una constante positiva}$$

En ausencia de presa, se supone que la población de predadores disminuiría con una rapidez proporcional a sí misma, es decir,

$$\frac{dW}{dt} = -rW \qquad \text{donde } r \text{ es una constante positiva}$$

Sin embargo, con ambas especies presentes, se supone que la causa principal de muerte entre la presa que está siendo comida por un predador, y los ritmos de natalidad y supervivencia de los predadores depende de su suministro de alimento variable, a saber, la presa. Se supone también que las dos especies se encuentran entre sí a una frecuencia que es proporcional a ambas poblaciones y, por lo tanto, es proporcional al producto RW. (Mientras mayor sea la cantidad de cualquier población, es más probable que haya mayor número de encuentros). Un sistema de dos ecuaciones diferenciales que incorpora estas suposiciones, es como sigue:

W representa al predador.
R representa a la presa.

$$\boxed{1} \qquad \frac{dR}{dt} = kR - aRW \qquad\qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

donde k, r, a y b son constantes positivas. Observe que el término $-aRW$ disminuye la rapidez de crecimiento natural de la presa y el término bRW incrementa la rapidez de crecimiento natural de los predadores.

El matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) propuso las ecuaciones de Lotka-Volterra como un modelo para explicar las variaciones en las poblaciones de tiburones y peces en el Mar Adriático.

Las ecuaciones en (1) se conocen como **ecuaciones predador-presa**, o **ecuaciones de Lotka-Volterra.** Una **solución** de este sistema de ecuaciones es un par de funciones $R(t)$ y $W(t)$ que describe las poblaciones de presa y predador como funciones del tiempo. Ya que el sistema está acoplado (R y W aparecen en ambas ecuaciones), no se puede resolver una ecuación y luego la otra; se tienen que resolver en forma simultánea. Infortunadamente, por lo general es imposible hallar fórmulas explícitas para R y W como funciones de t. Sin embargo, se pueden emplear métodos gráficos para analizar las ecuaciones.

EJEMPLO 1 Suponga que las poblaciones de conejos y lobos se describen mediante las ecuaciones de Lotka-Volterra (1) con $k = 0.08$, $a = 0.001$, $r = 0.02$ y $b = 0.00002$. El tiempo t se mide en meses.

(a) Encuentre las soluciones constantes (llamadas **soluciones de equilibrio**) e interprete la respuesta.

(b) Use el sistema diferencial de ecuaciones con el fin de hallar una expresión para dW/dR.

(c) Dibuje un campo direccional para la ecuación diferencial resultante en el plano-RW. Después use ese campo direccional para hallar algunas curvas solución.

(d) Suponga que, en algún punto del tiempo, hay 1 000 conejos y 40 lobos. Dibuje la curva solución correspondiente y empléela para describir los cambios en ambos niveles de población.

(e) Use el inciso (d) para bosquejar R y W como funciones de t.

SOLUCIÓN

(a) Con los valores dados de k, a, r y b, las ecuaciones de Lotka-Volterra se convierten en

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

Tanto R como W serán constantes si ambas derivadas son 0, es decir,

$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0$$

$$W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

Una solución se determina mediante $R = 0$ y $W = 0$. (Esto tiene sentido: si no hay conejos o lobos, las poblaciones no se incrementan.) La otra solución constante es

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80 \qquad R = \frac{0.02}{0.00002} = 1\,000$$

Así que las poblaciones de equilibrio constan de 80 lobos y 1 000 conejos. Esto significa que 1 000 conejos son suficientes para soportar una población constante de 80 lobos. No hay ni muchos lobos (lo cual daría como resultado menos conejos) ni pocos lobos (lo que produciría más conejos).

(b) Se usa la regla de la cadena para eliminar t:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR}\frac{dR}{dt}$$

por consiguiente,
$$\frac{dW}{dR} = \frac{\dfrac{dW}{dt}}{\dfrac{dR}{dt}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

(c) Si se considera a W como una función de R, se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Se dibuja el campo direccional para esta ecuación diferencial en la figura 1 y se emplea para bosquejar varias curvas solución en la figura 2. Si se va a lo largo de una curva solución, se observa cómo cambia la correspondencia entre R y W conforme pasa el tiempo. Observe que al parecer las curvas están cercanas en el sentido de que si se viaja a lo largo de una curva, siempre se vuelve al mismo punto. Observe también que el punto (1 000, 80) está dentro de todas las curvas solución. Ese punto se llama *punto de equilibrio* porque corresponde a la solución de equilibrio $R = 1\,000$, $W = 80$.

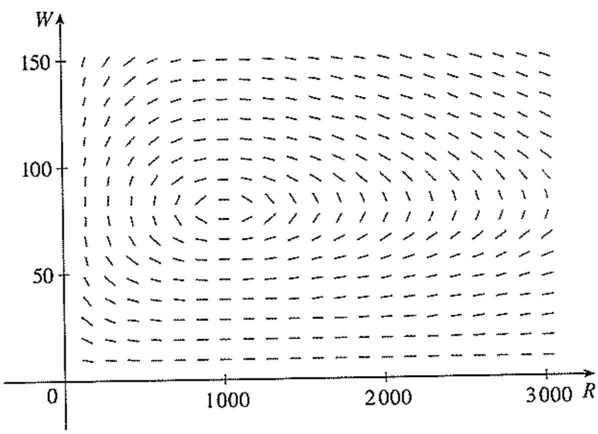


FIGURA 1 Campo direccional para el sistema predador-presa

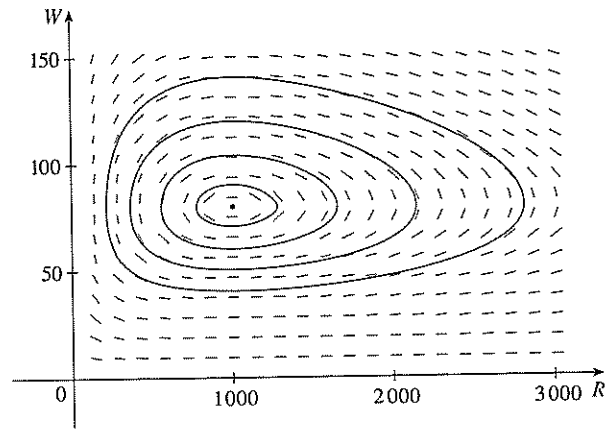


FIGURA 2 Retrato de fase del sistema

Cuando se representan soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales como en la figura 2, se hace referencia al plano RW como el **plano fase**, y se llama **trayectorias de fase** a las curvas solución. Así, una trayectoria de fase es una que se traza mediante las soluciones (R, W) conforme pasa el tiempo. Un **retrato de fase** consta de puntos de equilibrio y trayectorias de fase representativas, como se muestra en la figura 2.

(d) Empezar con 1 000 conejos y 40 lobos corresponde a trazar la curva solución por el punto $P_0(1\,000, 40)$. En la figura 3 se muestra esta trayectoria de fase sin el campo direccional. Si se empieza en el punto P_0 en el tiempo $t = 0$ y se permite que se incremente t, ¿se va en el sentido de las manecillas del reloj o al contrario alrededor de la

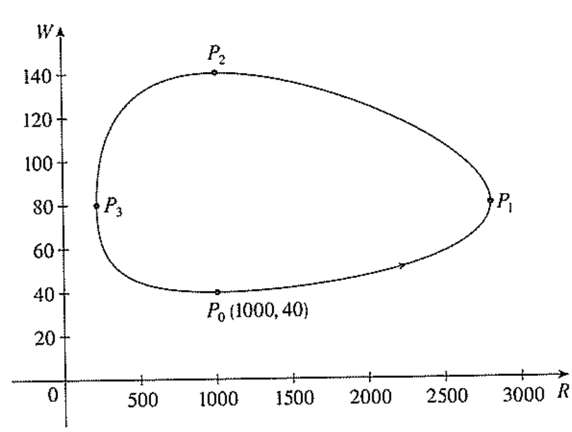


FIGURA 3
Trayectoria de fase por (1 000, 40)

trayectoria de fase? Si se escribe $R = 1\,000$ y $W = 40$ en la primera ecuación diferencial, se obtiene

$$\frac{dR}{dt} = 0.08(1000) - 0.001(1000)(40) = 80 - 40 = 40$$

Puesto que $dR/dt > 0$, se concluye que R es creciente en P_0 y, por lo tanto, se va en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la trayectoria de fase.

Se ve que en P_0 no hay suficientes lobos para mantener un equilibrio entre las poblaciones, así que se incrementa la población de conejos. Eso da como resultado más lobos y, en algún momento, hay tantos lobos que los conejos tienen dificultades para evitarlos. Así, el número de conejos comienza a disminuir (en P_1, donde se estima que R llega a su población máxima de casi 2 800). Esto significa que en algún tiempo posterior la población de lobos comienza a bajar (en P_2, donde $R = 1\,000$ y $W \approx 140$). Pero esto beneficia a los conejos, así que su población comienza a crecer después (en P_3, donde $W = 80$ y $R \approx 210$). Como consecuencia, la población de lobos finalmente comienza a crecer también. Esto sucede cuando las poblaciones vuelven a sus valores iniciales de $R = 1\,000$ y $W = 40$, y el ciclo completo comienza de nuevo.

(e) De la descripción del inciso (d) de cómo aumentan y disminuyen las poblaciones de conejos y lobos, se pueden bosquejar las gráficas de $R(t)$ y $W(t)$. Suponga que los puntos P_1, P_2 y P_3 en la figura 3 se alcanzan en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Después se pueden bosquejar las gráficas de R y W como en la figura 4.

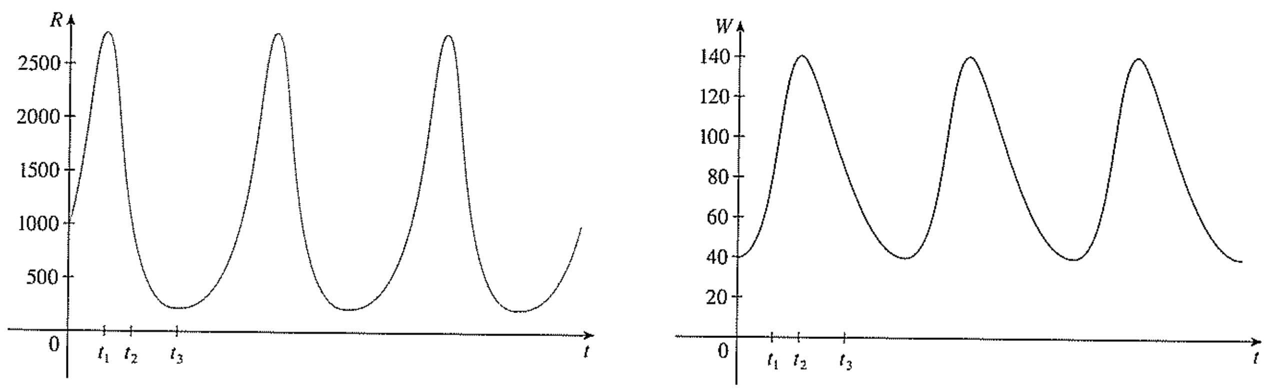


FIGURA 4
Gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo

A fin de facilitar la comparación de las gráficas, se trazan en los mismos ejes, pero con escalas distintas para R y W, como en la figura 5. Observe que los conejos alcanzan sus poblaciones máximas cerca de un cuarto de ciclo antes que los lobos.

TEC En Module 9.6 se puede cambiar los coeficientes en las ecuaciones Lotka-Volterra y observar los cambios en la trayectoria de fase y las gráficas de población de conejos y lobos.

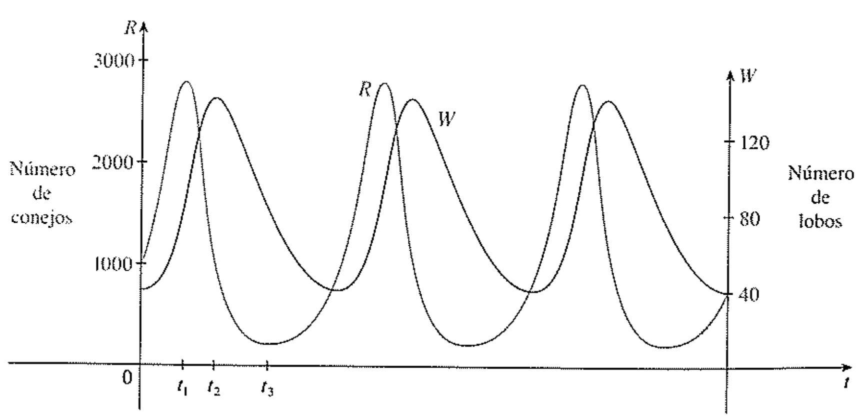


FIGURA 5
Comparación de las poblaciones de conejos y lobos

Una parte importante del proceso de representación, como se analizó en la sección 1.2, es interpretar las conclusiones matemáticas como predicciones del mundo real y probar las predicciones contra datos reales. La *Hudson's Bay Company*, que comenzó a comercializar pieles de animales en Canadá en 1670, ha mantenido registros que datan de la década de 1840. En la figura 6 se muestran las gráficas del número de pieles de la liebre americana y su predador, el lince de Canadá, comercializadas por la compañía durante un periodo de 90 años. Se puede ver que las oscilaciones acopladas en las poblaciones de liebres y linces predichas por el modelo de Lotka-Volterra ocurren en realidad, y el periodo de estos ciclos es aproximadamente 10 años.

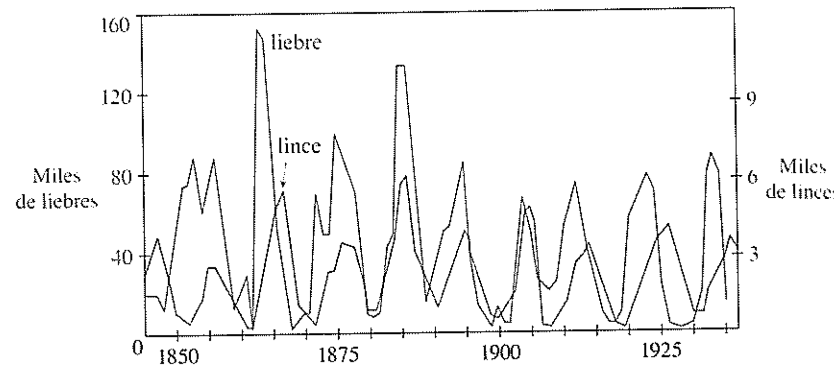


FIGURA 6

Abundancia relativa de liebres y linces de los registros de la Hudson's Bay Company

Aunque el modelo relativamente simple de Lotka-Volterra ha tenido cierto éxito en explicar y predecir poblaciones acopladas, han sido propuestos modelos más complejos. Una manera de modificar las ecuaciones de Lotka-Volterra es suponer que, en ausencia de predadores, la presa crece de acuerdo con un modelo logístico con capacidad de soporte K. Después las ecuaciones de Lotka-Volterra (1) se reemplazan por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dR}{dt} = kR\left(1 - \frac{R}{K}\right) - aRW \qquad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

Este modelo se investiga en los ejercicios 9 y 10.

Han sido propuestos modelos para describir y predecir niveles de población de dos especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para beneficio mutuo. Esta clase de modelos se explora en el ejercicio 2.

9.6 EJERCICIOS

1. Para cada sistema predador-presa, determine cuál de las variables, x o y, representa la población de presas y cuál representa la población de predadores. ¿El crecimiento de la presa está restringido sólo por los predadores, o también por otros factores? ¿Los predadores se alimentan sólo de la presa, o tienen fuentes de alimento adicionales? Explique.

(a) $\dfrac{dx}{dt} = -0.05x + 0.0001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.1y - 0.005xy$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.2x - 0.0002x^2 - 0.006xy$

$\dfrac{dy}{dt} = -0.015y + 0.00008xy$

2. Cada sistema de ecuaciones diferenciales se modela para dos especies que compiten por los mismos recursos o cooperan para beneficio mutuo (plantas que florecen e insectos polinizadores, por ejemplo). Decida si cada sistema describe la competencia o la cooperación, y explique por qué es un modelo razonable. (Pregúntese qué efecto tiene en una especie un incremento en la rapidez de crecimiento de la otra.)

(a) $\dfrac{dx}{dt} = 0.12x - 0.0006x^2 + 0.00001xy$

$\dfrac{dy}{dt} = 0.08x + 0.00004xy$

(b) $\dfrac{dx}{dt} = 0.15x - 0.0002x^2 - 0.0006xy$

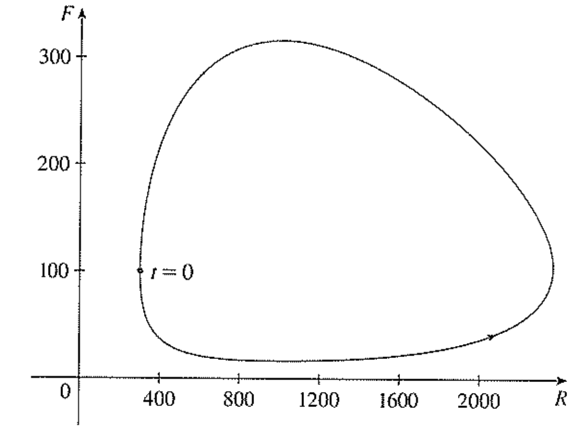
$\dfrac{dy}{dt} = 0.2y - 0.00008y^2 - 0.0002xy$

3–4 Se muestra una trayectoria fase para la población de conejos (R) y de zorras (F).

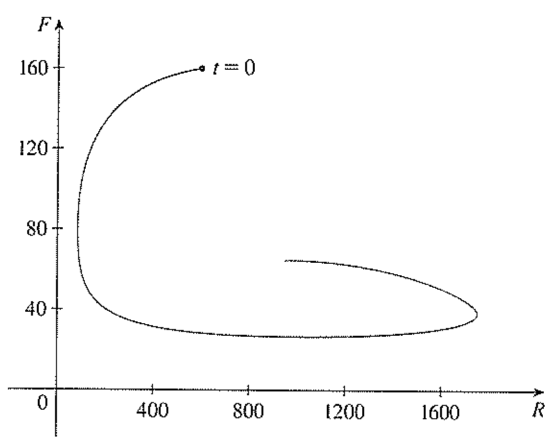
(a) Describa cómo cambia cada población a medida que pasa el tiempo.

(b) Use su descripción para dibujar un esquema aproximado de las gráficas de R y F como funciones del tiempo.

3.

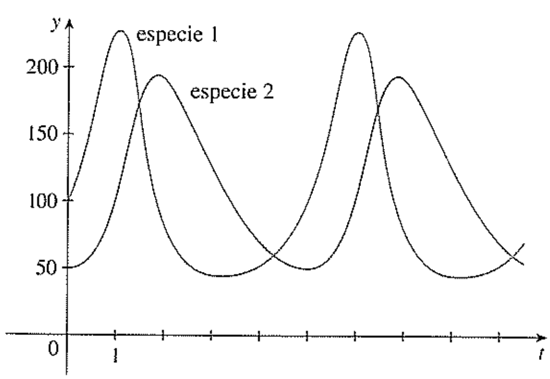


4.

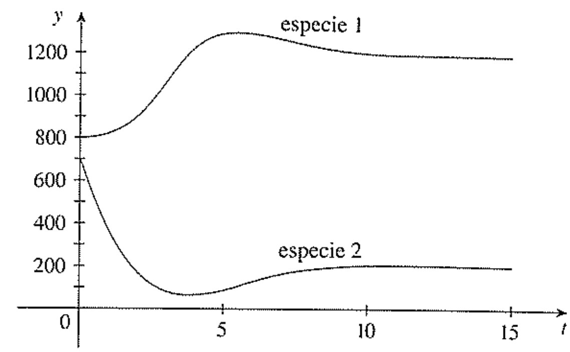


5–6 Se muestran gráficas de población de dos especies. Úselas para trazar la trayectoria fase correspondiente.

5.



6.



7. En el ejemplo 1(b), se ademó que las poblaciones de conejos y de lobos satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

Resuelva esta ecuación diferencial separable para demostrar que

$$\frac{R^{0.02}W^{0.08}}{e^{0.00002R}e^{0.001W}} = C$$

donde C es una constante.

Es imposible resolver esta ecuación para W como función explícita de R (o viceversa). Si cuenta con un CAS que trace gráficas de curva definidas implícitamente, use esta ecuación y su dispositivo para dibujar la curva solución que pasa por el punto (1 000, 40) y compárela con la figura 3.

8. Las ecuaciones modelan las poblaciones de pulgones (A) y de mariquitas (L).

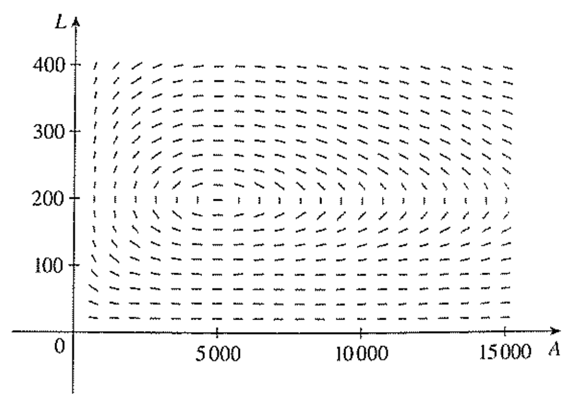
$$\frac{dA}{dt} = 2A - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

(a) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique sus significados.

(b) Halle una expresión para dL/dA.

(c) Se muestra el campo direccional para la ecuación diferencial obtenida en el inciso (b). Úselo para trazar un retrato fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias de fases?



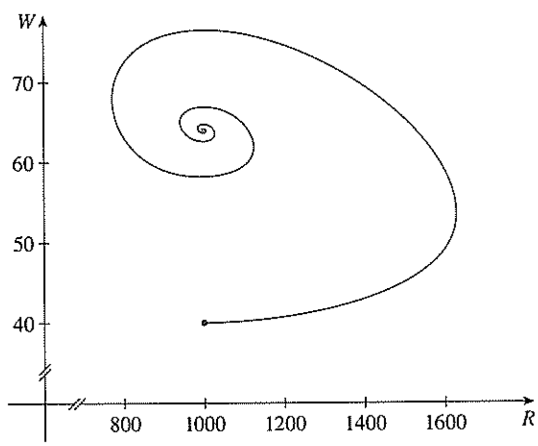
(d) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay 1 000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la trayectoria de fase correspondiente y empléela para describir cómo cambian ambas poblaciones.
(e) Use el inciso (d) para construir bosquejos aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo se relacionan las gráficas entre sí?

9. En el ejemplo 1 se emplearon las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de conejos y lobos. Modifique las ecuaciones como sigue:

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R(1 - 0.0002R) - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

(a) De acuerdo con estas ecuaciones, ¿qué sucede con la población de conejos en ausencia de lobos?



(b) Encuentre las soluciones de equilibrio y explique su importancia.
(c) En la figura se muestra la trayectoria de fase que empieza en el punto (1 000, 40). Describa qué sucede finalmente con las poblaciones de conejos y lobos.
(d) Bosqueje las gráficas de las poblaciones de conejos y lobos como funciones del tiempo.

CAS **10.** En el ejercicio 8 se modelaron poblaciones de pulgones y mariquitas con un sistema de Lotka-Volterra. Suponga que se modifican esas ecuaciones como sigue:

$$\frac{dA}{dt} = 2A(1 - 0.0001A) - 0.01AL$$

$$\frac{dL}{dt} = -0.5L + 0.0001AL$$

(a) En ausencia de mariquitas, ¿qué predice el modelo acerca de los pulgones?
(b) Encuentre las soluciones de equilibrio.
(c) Determine una expresión para dL/dA.
(d) Emplee un sistema computarizado algebraico para trazar un campo direccional para la ecuación diferencial del inciso (c). Después use el campo direccional para bosquejar el retrato de fase. ¿Qué tienen en común las trayectorias de fase?
(e) Suponga que en el tiempo $t = 0$ hay 1 000 pulgones y 200 mariquitas. Dibuje la trayectoria de fase correspondiente y utilícela para describir cómo cambian ambas poblaciones.
(f) Use el inciso (e) para construir bosquejos aproximados de las poblaciones de pulgones y mariquitas como funciones de t. ¿Cómo se relacionan entre sí las gráficas?

9 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una ecuación diferencial?
(b) ¿Cuál es el orden de una ecuación diferencial?
(c) ¿Qué es una condición inicial?

2. ¿Qué se puede decir acerca de las soluciones de la ecuación $y' = x^2 + y^2$ con sólo observar la ecuación diferencial?

3. ¿Qué es un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = F(x, y)$?

4. Explique cómo funciona el método de Euler.

5. ¿Qué es una ecuación diferencial separable? ¿Cómo se resuelve?

6. ¿Qué es una ecuación diferencial lineal de primer orden? ¿Cómo se resuelve?

7. (a) Escriba una ecuación diferencial que exprese la ley natural de crecimiento. ¿Qué dice en términos de la rapidez de crecimiento relativo?
(b) ¿En qué circunstancias es un modelo apropiado para el crecimiento poblacional?
(c) ¿Cuáles son las soluciones de esta ecuación?

8. (a) Escriba la ecuación logística.
(b) ¿En qué circunstancias es un modelo apropiado para el crecimiento poblacional?

9. (a) Escriba las ecuaciones de Lotka-Volterra para modelar poblaciones de peces comestibles (F) y tiburones (S).
(b) ¿Qué dicen estas ecuaciones acerca de cada población en ausencia de la otra?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso, explique por qué, o dé un ejemplo que refute el enunciado.

1. Todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = -1 - y^4$ son funciones decrecientes.
2. La función $f(x) = (\ln x)/x$ es una solución de la ecuación diferencial $x^2y' + xy = 1$.
3. La ecuación $y' = x + y$ es separable.
4. La ecuación $y' = 3y - 2x + 6xy - 1$ es separable.
5. La ecuación $e^x y' = y$ es lineal.
6. La ecuación $y' + xy = e^y$ es lineal.
7. Si y es la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \frac{y}{5}\right) \qquad y(0) = 1$$

por lo tanto $\lim_{t\to\infty} y = 5$.

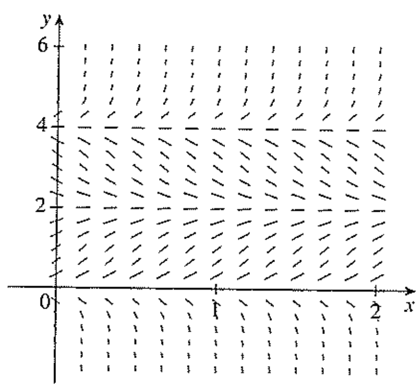
EJERCICIOS

1. (a) Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = y(y-2)(y-4)$. Bosqueje las gráficas de las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas.

   (i) $y(0) = -0.3$ (ii) $y(0) = 1$

   (iii) $y(0) = 3$ (iv) $y(0) = 4.3$

   (b) Si la condición inicial es $y(0) = c$, ¿para qué valores de c es $\lim_{t\to\infty} y(t)$ finito? ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?



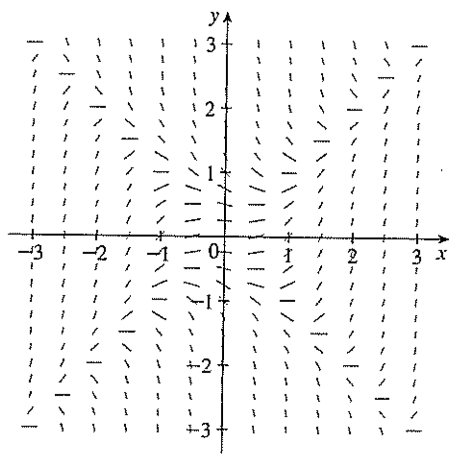
2. (a) Bosqueje un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x/y$. Después empléelo para bosquejar las cuatro soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(0) = -1$, $y(2) = 1$, y $y(-2) = 1$.

   (b) Compruebe su trabajo del inciso (a) resolviendo la ecuación diferencial en forma explícita. ¿Qué tipo de curva es cada curva solución?

3. (a) Se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial $y' = x^2 - y^2$. Bosqueje la solución del problema de valor inicial

$$y' = x^2 - y^2 \qquad y(0) = 1$$

   Use su gráfica para estimar el valor de $y(0.3)$.



   (b) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar $y(0.3)$ donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial del inciso (a). Compare con su estimación del inciso (a).

   (c) ¿En qué líneas se localizan los centros de los segmentos de recta horizontales del campo direccional del inciso (a)? ¿Qué sucede cuando una curva solución cruza estas líneas?

4. (a) Use el método de Euler con tamaño de paso 0.2 para estimar $y(0.4)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial.

$$y' = 2xy^2 \qquad y(0) = 1$$

   (b) Repita el inciso (a) con tamaño de paso 0.1.

   (c) Encuentre la solución exacta de la ecuación diferencial y compare el valor en 0.4 con las aproximaciones de los incisos (a) y (b).

5–8 Resuelva la ecuación diferencial.

5. $y' = xe^{-\operatorname{sen} x} - y\cos x$
6. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx$
7. $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x}$
8. $x^2y' - y = 2x^3e^{-1/x}$

9–11 Resuelva el problema de valor inicial.

9. $\dfrac{dr}{dt} + 2tr = r, \quad r(0) = 5$

10. $(1 + \cos x)y' = (1 + e^{-y})\operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0$

11. $xy' - y = x \ln x, \quad y(1) = 2$

---

12. Resuelva el problema de valor inicial $y' = 3x^2e^y$, $y(0) = 1$, y grafique la solución.

13–14 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas.

13. $y = ke^x$ **14.** $y = e^{kx}$

---

15. (a) Escriba la solución del poblema con valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.1P\left(1 - \frac{P}{2000}\right) \qquad P(0) = 100$$

y aplíquela para hallar la población cuando $t = 20$

(b) ¿Cuando la población alcanza 1200?

16. (a) La población del mundo era de 5.28 miles de millones en 1990 y 6.07 miles de millones en 2000. Encuentre un modelo exponencial para estos datos, y utilícelo para predecir la población mundial del año 2020.

(b) De acuerdo con el modelo del inciso (a), ¿cuándo la población mundial excederá los 10 000 millones?

(c) Use los datos del inciso (a) para hallar un modelo logístico de la población. Suponga una capacidad de soporte de 100 000 millones. Después use el modelo logístico para predecir la población en 2020. Compare con su predicción del modelo exponencial.

(d) De acuerdo con el modelo logístico, ¿cuándo la población mundial rebasará los 10 000 millones? Compare con su predicción del inciso (b).

17. El modelo de crecimiento de von Bertalanffy se usa para predecir la longitud $L(t)$ de un pez en un periodo. Si L_∞ es la longitud mayor para una especie, por lo tanto la hipótesis es que la rapidez de crecimiento de longitud es proporcional a $L_\infty - L$, la longitud por alcanzar.

(a) Formule y resuelva una ecuación diferencial a fin de hallar una expresión para $L(t)$.

(b) Para la merluza del mar del Norte se ha determinado que $L_\infty = 53$ cm, $L(0) = 10$ cm, y la constante de proporcionalidad es 0.2. ¿En qué se convierte la expresión para $L(t)$ con estos datos?

18. Un tanque contiene 100 L de agua pura. Salmuera que contiene 0.1 kg de sal por litro entra al recipiente con una proporción de 10 L/min. La solución se mantiene mezclada por completo y sale del tanque a la misma proporción. ¿Cuánta sal hay en el tanque después de 6 minutos?

19. Un modelo para la dispersión de una epidemia es que la rapidez de dispersión es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y al número de personas no infectadas. En un pueblo aislado con 5 000 pobladores, 160 personas tienen una enfermedad al comienzo de la semana y 1 200 la tienen al final de la semana. ¿En cuánto tiempo se infecta 80% de la población?

20. La Ley de Brentano-Stevens en psicología, modela la forma en que un sujeto reacciona a un estímulo. La ley expresa que si R representa la reacción a una cantidad S de estímulo, en tal caso las cantidades relativas de incremento son proporcionales:

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{k}{S}\frac{dS}{dt}$$

donde k es una constante positiva. Determine R como una función de S.

21. El transporte de una sustancia por una pared capilar en fisiología pulmonar ha sido modelado mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{R}{V}\left(\frac{h}{k + h}\right)$$

donde h es la concentración de hormonas en el torrente sanguíneo, t es el tiempo, R es la tasa de transporte máximo, V es el volumen del capilar y k es una constante positiva que mide la afinidad entre las hormonas y las enzimas que ayudan al proceso. Resuelva esta ecuación diferencial para hallar una relación entre h y t.

22. Las poblaciones de aves e insectos se modelan por medio de las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = 0.4x - 0.002xy$$

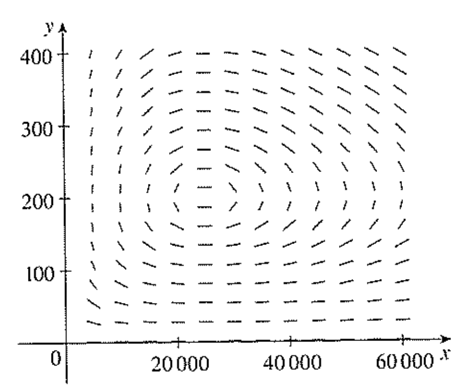
$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

(a) ¿Cuál de las variables, x o y, representa la población de aves y cuál representa la población de insectos? Explique.

(b) Determine las soluciones de equilibrio y explique su importancia.

(c) Encuentre una expresión para dy/dx.

(d) Se muestra el campo direccional para la ecuación diferencial del inciso (c). Utilícelo para bosquejar la trayectoria de



fase que corresponde a poblaciones iniciales de 100 aves y 40 000 insectos. Después use la trayectoria de fase para describir cómo cambian ambas poblaciones.

(e) Use el inciso (d) para elaborar bosquejos aproximados de las poblaciones de aves e insectos como funciones del tiempo. ¿Cómo se relacionan entre sí estas gráficas?

23. Suponga que el modelo del ejercicio 22 se reemplaza mediante las ecuaciones

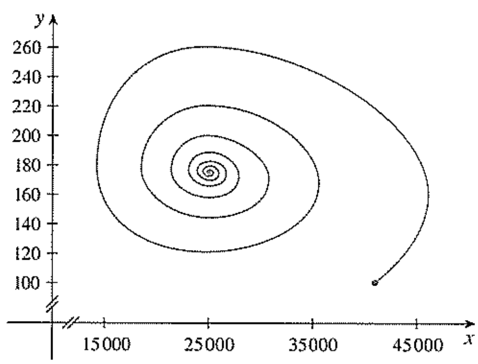
$$\frac{dx}{dt} = 0.4x(1 - 0.000005x) - 0.002xy$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.2y + 0.000008xy$$

(a) De acuerdo con estas ecuaciones, ¿qué sucede con la población de insectos en ausencia de aves?

(b) Determine las soluciones de equilibrio y explique su importancia.

(c) En la figura se muestra la trayectoria de fase que comienza con 100 aves y 40 000 insectos. Describa lo que finalmente sucede con las poblaciones de aves e insectos.



(d) Bosqueje las gráficas de las poblaciones de aves e insectos como funciones del tiempo.

24. Bárbara pesa 60 kg y está a dieta de 1 600 calorías por día, de las cuales 850 son empleadas de forma automática por el metabolismo basal. Ella gasta cerca de 15 cal/kg/día multiplicadas por su peso al hacer ejercicio. Si 1 kg de grasa contiene 10 000 cal y se supone que el almacenaje de calorías en la forma de grasa es 100% eficiente, formule una ecuación diferencial y resuélvala para hallar el peso de Bárbara como una función del tiempo. ¿En última instancia su peso se aproxima a un peso de equilibrio?

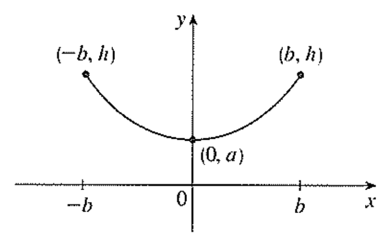
25. Cuando un cable flexible de densidad uniforme se suspende entre dos puntos fijos y cuelga de su propio peso, la forma $y = f(x)$ del cable debe satisfacer una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde k es una constante positiva. Considere el cable mostrado en la figura.

(a) Sea $z = dy/dx$ en la ecuación diferencial. Resuelva la ecuación diferencial de primer orden resultante (en z), y después integre para determinar y.

(b) Determine la longitud del cable.



PROBLEMAS ADICIONALES

1. Encuentre las funciones f tales que f' es continua y

$$[f(x)]^2 = 100 + \int_0^x \{[f(t)]^2 + [f'(t)]^2\}\, dt \qquad \text{para toda } x \text{ real}$$

2. Un alumno olvidó la regla del producto para derivación y cometió el error de pensar que $(fg)' = f'g'$. Sin embargo, tuvo suerte y obtuvo la respuesta correcta. La función f que usó fue $f(x) = e^{x^2}$ y el dominio de este problema fue el intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$. ¿Cuál fue la función g?

3. Sea f una función con la propiedad de que $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, y $f(a + b) = f(a)f(b)$ para los números reales a y b. Muestre que $f'(x) = f(x)$ para toda x y deduzca que $f(x) = e^x$.

4. Encuentre todas las funciones f que satisfacen la ecuación

$$\left(\int f(x)\, dx\right)\left(\int \frac{1}{f(x)}\, dx\right) = -1$$

5. Hallar la curva $y = f(x)$ de tal manera que $f(x) \geqslant 0, f(0) = 0, f(1) = 1$ y el área bajo la gráfica de f desde 0 hasta x es proporcional a la $(n + 1)$-ésima potencia de $f(x)$.

6. Una *subtangente* es una porción del eje x que se encuentra directamente bajo el segmento de una línea tangente desde el punto de contacto hasta el eje x. Hallar las curvas que pasan a través del punto $(c, 1)$ y cuyas subtangentes todas tienen longitud c.

7. Se saca del horno un pastel de durazno a las 5:00 P.M. En ese momento está muy caliente: 100°C. A las 5:10 P.M., su temperatura es 80°C; a las 5:20 P.M. está a 65°C. ¿Cuál es la temperatura en la habitación?

8. Durante la mañana del 2 de febrero comenzó a caer nieve y continuó de forma permanente hacia la tarde. A mediodía, una máquina comenzó a retirar la nieve de una carretera con rapidez constante. La máquina viajó 6 km desde el mediodía hasta la 1 P.M. pero sólo 3 km de la 1 P.M. a las 2 P.M. ¿Cuándo comenzó a caer la nieve? [*Sugerencia*: para comenzar, sea t el tiempo medido en horas después del mediodía; sea $x(t)$ la distancia que recorre la máquina en el tiempo t; después la rapidez de la máquina es dx/dt. Sea b el número de horas antes del mediodía en que comenzó a nevar. Determine una expresión para la altura de la nieve en el tiempo t. Después use la información dada de que la tasa de remoción R (en m³/h) es constante.]

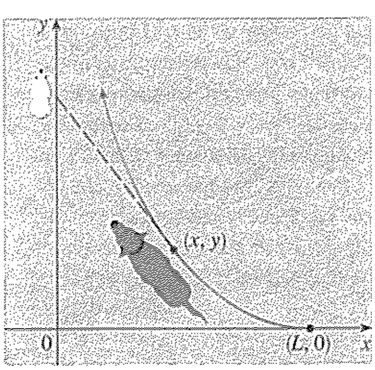


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

9. Un perro ve un conejo que corre en línea recta en un campo abierto y lo persigue. En un sistema coordenado rectangular (como el mostrado en la figura), suponga:
   (i) El conejo está en el origen y el perro en el punto $(L, 0)$ en el instante en que el perro ve por vez primera al conejo.
   (ii) El conejo corre en la dirección positiva del eje y, y el perro siempre directo hacia el conejo.
   (iii) El perro corre con la misma rapidez que el conejo.

   (a) Muestre que la trayectoria del perro es la gráfica de la función $y = f(x)$, donde y satisface la ecuación diferencial

   $$x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

   (b) Determine la solución de la ecuación del inciso (a) que satisface las condiciones iniciales $y = y' = 0$ cuando $x = L$. [*Sugerencia:* sea $z = dy/dx$ en la ecuación diferencial y resuelva la ecuación de primer orden resultante para hallar z; después integre z para hallar y.]

   (c) ¿Alguna vez el perro alcanza al conejo?

10. (a) Suponga que el perro del problema 9 corre dos veces más rápido que el conejo. Encuentre la ecuación diferencial para la trayectoria del perro. Después resuélvala para hallar el punto donde el perro alcanza al conejo.

(b) Suponga que el perro corre a la mitad de la velocidad del conejo. ¿Qué tanto se acerca el perro al conejo? ¿Cuáles son sus posiciones cuando están más próximos?

11. Un ingeniero de planificación para una nueva planta de alumbre debe presentar algunas estimaciones a su compañía considerando la capacidad de un silo diseñado para contener bauxita hasta que se procese en alumbre. El mineral se asemeja al talco rosa y se vacía de un transportador en la parte superior del silo. El silo es un cilindro de 100 pies de alto con un radio de 200 pies. El transportador lleva $60\,000\pi$ pies^3/h y el mineral mantiene una forma cónica cuyo radio es 1.5 veces su altura.

(a) Si, en cierto tiempo t, la pila tiene 60 pies de altura, ¿en cuánto tiempo la pila alcanza la parte superior del silo?

(b) La administración quiere saber cuánto espacio quedará en el área de piso del silo cuando la pila sea de 60 pies de altura. ¿Qué tan rápido crece el área de piso de la pila a esa altura?

(c) Suponga que un cargador comienza a remover el mineral en una proporción de $20\,000\pi$ pies^3/h cuando la altura de la pila alcanza 90 pies. Suponga que la pila continúa manteniendo su forma. ¿En cuánto tiempo la pila alcanza la parte superior del silo en estas condiciones?

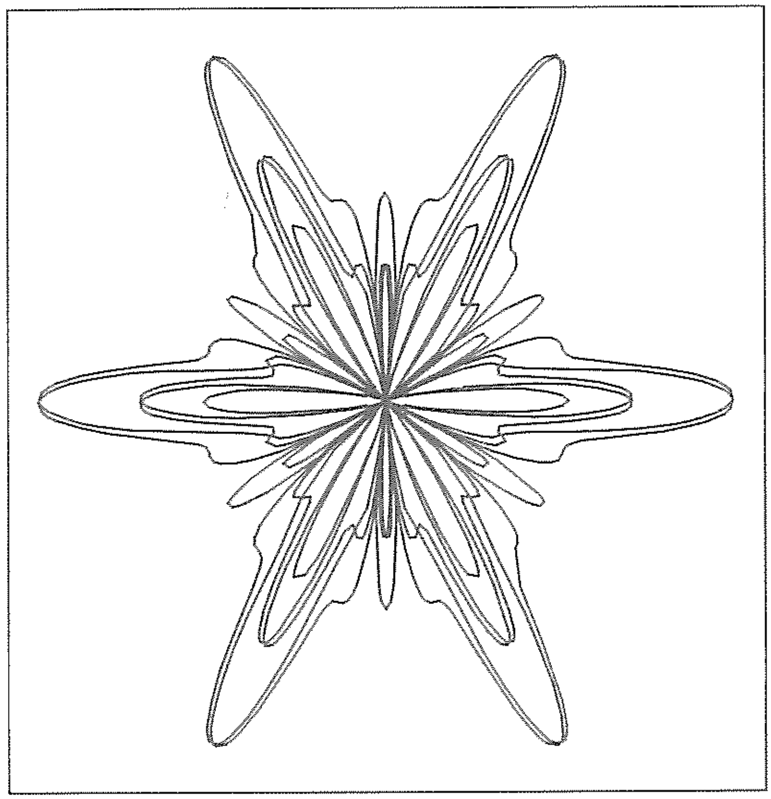
12. Encuentre la curva que pasa por el punto $(3, 2)$ y tiene la propiedad de que si una recta tangente se dibuja en cualquier punto P de la curva, luego la parte de la recta tangente que yace en el primer cuadrante se biseca en P.

13. Recuerde que la recta normal a una curva en un punto P sobre la curva es la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en P. Determine la curva que pasa por el punto $(3, 2)$ y tiene la propiedad de que si la recta normal se dibuja en cualquier punto sobre la curva, en tal caso la intersección y de la recta normal es siempre 6.

14. Encuentre las curvas con la propiedad de que si la recta normal se dibuja en cualquier punto P sobre la curva, después la parte de la recta normal entre P y el eje x es bisecada por el eje y.

10

ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y COORDENADAS POLARES



Las ecuaciones paramétricas y coordenadas polares hacen posible la descripción de una amplia variedad de nuevas curvas, algunas prácticas, algunas hermosas, algunas extravagantes, algunas extrañas.

Hasta el momento se han descrito curvas planas dando a y como una función de x [$y = f(x)$] o x como una función de y [$x = g(y)$] o dando una relación entre x y y que define a y implícitamente como una función de x [$f(x, y) = 0$]. En este capítulo se analizan dos nuevos métodos para describir curvas.

Algunas curvas, como la cicloide, se manejan mejor cuando x y y se dan en términos de una tercera variable t llamada parámetro [$x = f(t)$, $y = g(t)$]. Otras curvas, como la cardioide, tienen su descripción más conveniente cuando se usa un nuevo sistema coordenado, llamado sistema de coordenadas polares.

10.1 CURVAS DEFINIDAS POR ECUACIONES PARAMÉTRICAS

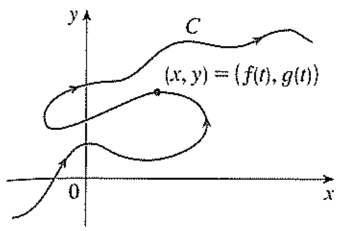


FIGURA 1

Imagine que una partícula se mueve a lo largo de la curva C mostrada en la figura 1. Es imposible describir C por una ecuación de la forma $y = f(x)$ porque C no pasa la prueba de la línea vertical. Pero las coordenadas x y y de la partícula son funciones del tiempo y, por lo tanto, se puede escribir $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Tal par de ecuaciones suele ser una forma conveniente de describir una curva y da lugar a la siguiente definición.

Suponga que x y y se dan como funciones de una tercera variable t (llamada **parámetro**) mediante las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

(llamadas **ecuaciones paramétricas**). Cada valor de t determina un punto (x, y), que se puede representar en un sistema coordenado. Cuando t varía, el punto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varía y traza una curva C, a la cual se le llama **curva paramétrica**. El parámetro t no necesariamente representa el tiempo y, de hecho, se podría usar una letra distinta a t para el parámetro. Pero en muchas aplicaciones de curvas paramétricas, t denota el tiempo y, por lo tanto, se puede interpretar a $(x, y) = (f(t), g(t))$ como la posición de una partícula en el tiempo t.

EJEMPLO 1 Bosqueje e identifique la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

SOLUCIÓN Cada valor de t da un punto sobre la curva, como se muestra en la tabla. Por ejemplo, si $t = 0$, en tal caso $x = 0$, $y = 1$; así, el punto correspondiente es $(0, 1)$. En la figura 2 se grafican los puntos (x, y) determinados por varios valores del parámetro y se unen para producir una curva.

t	x	y
−2	8	−1
−1	3	0
0	0	1
1	−1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5

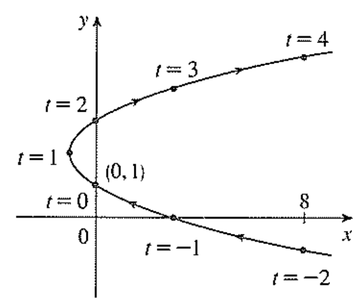


FIGURA 2

Una partícula cuya posición está dada por las ecuaciones paramétricas, se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas a medida que se incrementa t. Note que los puntos consecutivos marcados en la curva aparecen a intervalos de tiempo iguales, pero no a iguales distancias. Esto es porque la partícula desacelera y después acelera a medida que aumenta t.

Según se observa de la figura 2, la curva trazada por la partícula puede ser una parábola. Esto se puede confirmar al eliminar el parámetro t como sigue. Se obtiene $t = y - 1$ de la segunda ecuación y se sustituye en la primera. Esto da

$$x = t^2 - 2t = (y - 1)^2 - 2(y - 1) = y^2 - 4y + 3$$

y, por lo tanto, la curva representada por las ecuaciones paramétricas es la parábola $x = y^2 - 4y + 3$. □

Esta ecuación en x y y describe *dónde* ha estado la partícula, pero no dice *cuándo* es que la partícula estuvo en un punto en particular. Las ecuaciones paramétricas tienen una ventaja: dicen *cuándo* estuvo la partícula en un punto. También indican la *dirección* del movimiento.

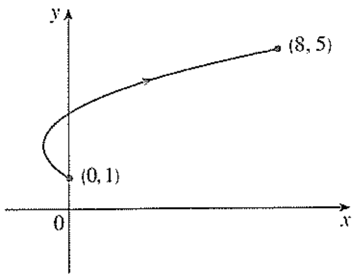


FIGURA 3

En el ejemplo 1 el parámetro t fue irrestricto, así que se supone que t podría ser cualquier número real. Pero algunas veces t se restringe a estar en un intervalo finito. Por ejemplo, la curva paramétrica

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4$$

mostrada en la figura 3 es la parte de la parábola del ejemplo 1 que empieza en el punto (0, 1) y termina en el punto (8, 5). La cabeza de flecha indica la dirección en la que se traza la curva cuando t crece de 0 a 4.

En general, la curva con ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

tiene **punto inicial** $(f(a), g(a))$ y **punto terminal** $(f(b), g(b))$.

EJEMPLO 2 ¿Qué curva se representa mediante las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$?

SOLUCIÓN Si se grafican los puntos, la curva parece un círculo. Esta impresión se confirma al eliminar t. Observe que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

Así, el punto (x, y) se mueve en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Observe que en este ejemplo el parámetro t se puede interpretar como el ángulo (en radianes) mostrado en la figura 4. Cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ se mueve una vez alrededor del círculo en sentido contrario a las manecillas del reloj, empezando en el punto (1, 0).

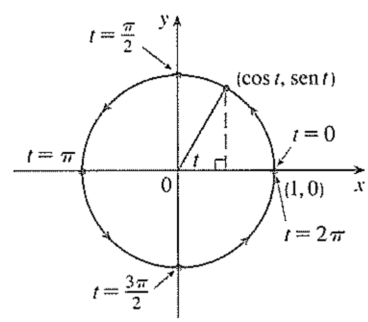


FIGURA 4

□

EJEMPLO 3 ¿Qué curva se representa mediante las ecuaciones paramétricas? $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos 2t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

SOLUCIÓN De nuevo se tiene

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

de modo que las ecuaciones paramétricas representan el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Pero cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ comienza en (0, 1) y se mueve *dos veces* alrededor del círculo en la dirección de las manecillas del reloj como se indica en la figura 5. □

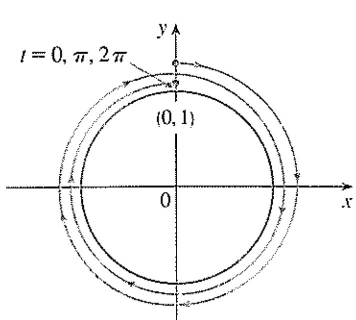


FIGURA 5

En los ejemplos 2 y 3 se muestra que los diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas pueden representar la misma curva. Así, se distingue entre una *curva*, que es un conjunto de puntos, y una *curva paramétrica*, en la cual los puntos se trazan de una manera particular.

EJEMPLO 4 Encuentre ecuaciones paramétricas para el círculo con centro (h, k) y radio r.

SOLUCIÓN Si toma las ecuaciones del círculo unitario del ejemplo 2 y multiplica por r las expresiones para x y y, obtiene $x = r\cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$. Se puede verificar que estas ecuaciones representan un círculo con radio r y centrar el origen trazado en sentido contrario a las manecillas del reloj. Ahora desplace h unidades en la dirección x y k unidades en la dirección y para obtener ecuaciones paramétricas del círculo (figura 6) con centro (h, k) y radio r:

$$x = h + r\cos t \qquad y = k + r \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \geqslant 2\pi$$

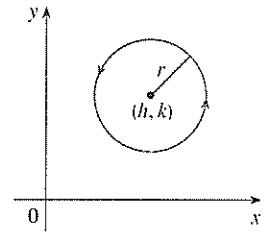


FIGURA 6
$x = h + r\cos t,\ y = k + r \operatorname{sen} t$

□

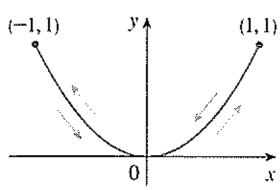


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Bosqueje la curva con ecuaciones paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen}^2 t$.

SOLUCIÓN Observe que $y = (\operatorname{sen} t)^2 = x^2$ y, por lo tanto, el punto (x, y) se mueve sobre la parábola $y = x^2$. Sin embargo, note también que, como $-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$, se tiene $-1 \leqslant x \leqslant 1$; así, las ecuaciones paramétricas representan sólo la parte de la parábola para la cual $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Debido a que $\operatorname{sen} t$ es periódica, el punto $(x, y) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$ se mueve en vaivén de manera infinita a lo largo de la parábola de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$. (Véase figura 7.) □

TEC Module 10.1A da una animación de la relación entre movimiento a lo largo de una curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ y el movimiento a lo largo de las gráficas de f y g como funciones de t. Con un clic en TRIG se obtiene la familia de curvas paramétricas

$$x = a\cos bt \qquad y = c \operatorname{sen} dt$$

Si elige $a = b = c = d = 1$ y da clic en START, se verá cómo las gráficas de $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ se relacionan con el círculo del ejemplo 2. Si elige $a = b = c = 1$, $d = 2$, verá gráficas como en la figura 8. Si se da clic en animación ó movimiento t hacia la derecha, se puede ver del código de colores cómo el movimiento de las gráficas de $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} 2t$ corresponde al movimiento a lo largo de la curva paramétrica, la cual se llama **figura de Lissajous.**

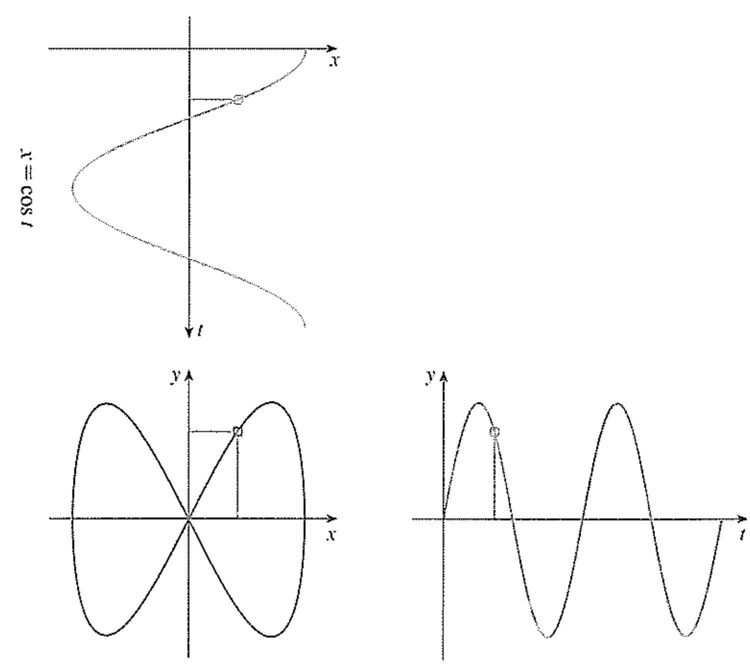


FIGURA 8 $x = \cos t \quad y = \operatorname{sen} 2t$ $\qquad y = \operatorname{sen} 2t$

DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN

La mayor parte de las calculadoras y los programas de graficación se pueden usar para graficar curvas definidas por ecuaciones paramétricas. De hecho, es instructivo observar una curva paramétrica que es dibujada con una calculadora, porque los puntos se trazan en orden a medida que se incrementan los valores de parámetro correspondientes.

EJEMPLO 6 Emplee un dispositivo de graficación para trazar la curva $x = y^4 + 3y^2$.

SOLUCIÓN Si se permite que el parámetro sea $t = y$, en seguida se tienen las ecuaciones

$$x = t^4 - 3t^2 \qquad y = t$$

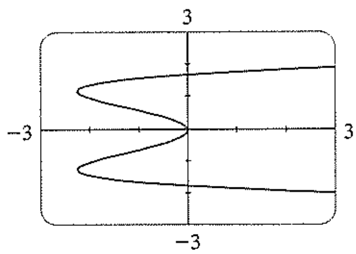


FIGURA 9

Al usar estas ecuaciones paramétricas para trazar la curva, se obtiene la figura 9. Sería posible resolver la ecuación dada ($x = y^4 - 3y^2$) para y como cuatro funciones de x y graficarlas de forma individual, pero las ecuaciones paramétricas proveen un método más fácil. □

En general, si se requiere hacer la gráfica de una ecuación de la forma $x = g(y)$, se pueden usar las ecuaciones paramétricas

$$x = g(t) \qquad y = t$$

Observe también que las curvas con ecuaciones $y = f(x)$ (aquellas con las que se está más familiarizado, gráficas de funciones) se pueden considerar también como curvas con ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = f(t)$$

Los dispositivos de graficación son particularmente útiles cuando se bosquejan curvas complicadas. Por ejemplo, las curvas mostradas en las figuras 10, 11 y 12, serían virtualmente imposibles de producir a mano.

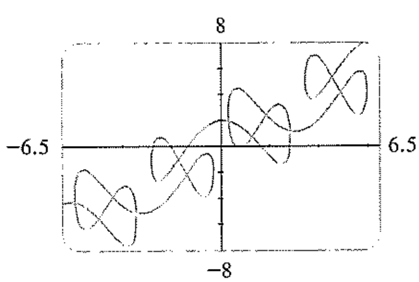


FIGURA 10
$x = t + 2 \operatorname{sen} 2t$
$y = t + 2 \cos 5t$

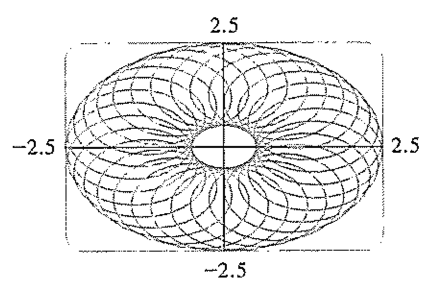


FIGURA 11
$x = 1.5 \cos t - \cos 30t$
$y = 1.5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 30t$

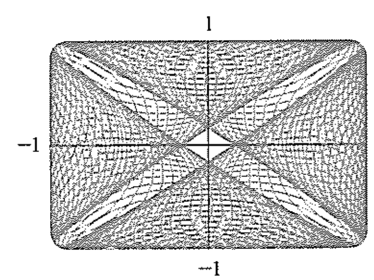


FIGURA 12
$x = \operatorname{sen}(t + \cos 100t)$
$y = \cos(t + \operatorname{sen} 100t)$

Uno de los usos más importantes de las curvas paramétricas es en el diseño auxiliado por computadora (CAD). En el proyecto de laboratorio después de la sección 10.2, se investigarán curvas paramétricas especiales, llamadas **curvas de Bézier**, que se usan de manera extensa en manufactura, en particular en la industria automotriz. Estas curvas se usan también para especificar formas de letras y otros símbolos en impresoras láser.

LA CICLOIDE

TEC Una animación en Module 10.1B, muestra cómo se forma la cicloide cuando se mueve el círculo.

EJEMPLO 7 La curva trazada por un punto P sobre la circunferencia de un círculo cuando el círculo rueda a lo largo de una recta se llama **cicloide** (véase fig. 13). Si el círculo tiene radio r y rueda a lo largo del eje x, y si una posición de P está en el origen, determine las ecuaciones paramétricas para la cicloide.

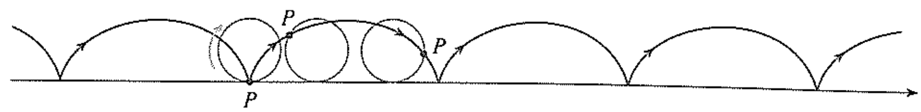


FIGURA 13

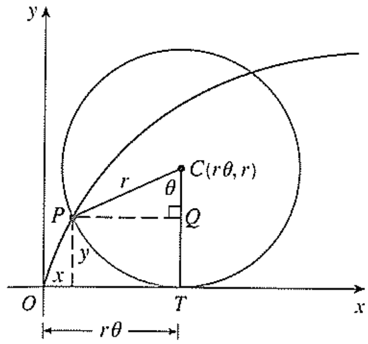


FIGURA 14

SOLUCIÓN Se elige como parámetro el ángulo de rotación θ del círculo ($\theta = 0$ cuando P está en el origen). Suponga que el círculo ha girado θ radianes. Debido a que el círculo ha estado en contacto con la línea, se ve de la figura 14, que la distancia que ha rodado desde el origen es

$$|OT| = \text{arc } PT = r\theta$$

Por lo tanto, el centro del círculo es $C(r\theta, r)$. Sean (x, y) las coordenadas de P. Por lo tanto, de la figura 14 se ve que

$$x = |OT| - |PQ| = r\theta - r \operatorname{sen} \theta = r(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = |TC| - |QC| = r - r\cos\theta = r(1 - \cos\theta)$$

Debido a eso, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

$$\boxed{1} \qquad x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \qquad y = r(1 - \cos\theta) \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Un arco de la cicloide viene de una rotación del círculo y, por lo tanto, se describe mediante $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Aunque las ecuaciones 1 se derivaron de la figura 14, que ilustra el caso donde $0 < \theta < \pi/2$, se puede ver que estas ecuaciones aún son válidas para otros valores de θ (véase el ejercicio 39).

Aunque es posible eliminar el parámetro θ de las ecuaciones 1, la ecuación cartesiana resultante en x y y es muy complicada y no es conveniente para trabajar como las ecuaciones paramétricas. □

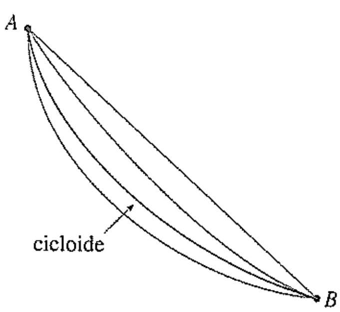


FIGURA 15

Una de las primeras personas en estudiar la cicloide fue Galileo, quien propuso que los puentes se construyeran en forma de cicloides, y quien trató de encontrar el área bajo un arco de una cicloide. Después esta curva surgió en conexión con el **problema de la braquistócrona**: Hallar la curva a lo largo de la cual se deslizará una partícula en el tiempo más corto (bajo la influencia de la gravedad) de un punto A a un punto inferior B no directamente debajo de A. El matemático suizo John Bernoulli, quien planteó este problema en 1696, mostró que entre las curvas posibles que unen a A con B, como en la figura 15, la partícula tomará el menor tiempo de deslizamiento de A a B si la curva es parte de un arco invertido de una cicloide.

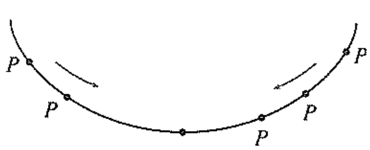


FIGURA 16

El físico holandés Huygens mostró que la cicloide es también la solución al **problema de la tautócrona**; es decir, sin importar dónde se coloque una partícula P en una cicloide invertida, le toma el mismo tiempo deslizarse hasta el fondo (véase fig. 16). Huygens propuso que los relojes de péndulo (que él inventó) oscilaran en arcos cicloidales, porque en tal caso el péndulo tarda el mismo tiempo en completar una oscilación si oscila por un arco amplio o pequeño.

FAMILIAS DE CURVAS PARAMÉTRICAS

EJEMPLO 8 Investigue la familia de curvas con ecuaciones paramétricas

$$x = a + \cos t \qquad y = a \tan t + \operatorname{sen} t$$

¿Qué tienen en común estas curvas? ¿Cómo cambia la curva cuando se incrementa a?

SOLUCIÓN Se emplea un dispositivo de graficación para producir las gráficas para los casos $a = -2, -1, -0.5, -0.2, 0, 0.5, 1$ y 2 mostradas en la figura 17. Observe que todas estas curvas (excepto el caso $a = 0$) tienen dos ramas, y ambas se aproximan a la asíntota vertical $x = a$ cuando x se aproxima a a por la izquierda o la derecha.

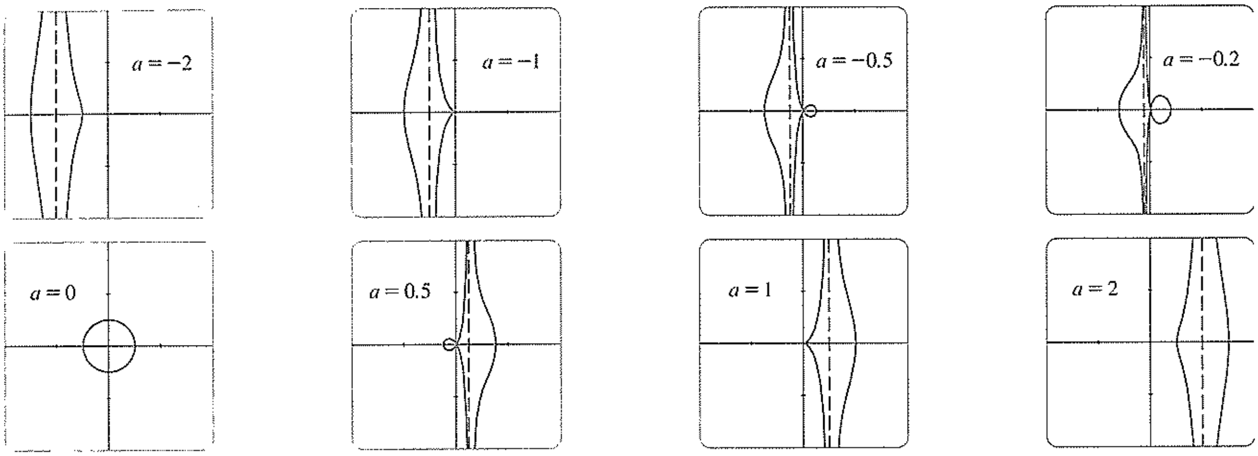


FIGURA 17 Miembros de la familia $x = a + \cos t$, $y = a \tan t + \operatorname{sen} t$, graficados en el rectángulo de visión $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Cuando $a < -1$, ambas ramas son uniformes, pero cuando a llega a -1, la rama derecha adquiere un punto definido, llamado *cúspide*. Para a entre -1 y 0 la cúspide se vuelve un bucle, que se vuelve más grande conforme a se aproxima a 0. Cuando $a = 0$, ambas ramas se juntan y forman un círculo (véase el ejemplo 2). Para a entre 0 y 1, la rama izquierda tiene un bucle, que se contrae para volverse una cúspide cuando $a = 1$. Para $a > 1$, las ramas se alisan de nuevo y, cuando a se incrementa más, se vuelven menos curvas. Observe que las curvas con a positiva son reflexiones respecto al eje y de las curvas correspondientes con a negativa.

Estas curvas se llaman **concoides de Nicomedes** en honor del erudito de la antigua Grecia, Nicomedes. Las llamó concoides porque la forma de sus ramas externas se asemeja a la de una concha de un caracol o de un mejillón. □

10.1 EJERCICIOS

1–4 Bosqueje la curva por medio de las ecuaciones paramétricas para trazar puntos. Indique con una flecha la dirección en la que se traza la curva cuando crece t.

1. $x = 1 + \sqrt{t}, \quad y = t^2 - 4t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 5$

2. $x = 2\cos t, \quad y = t - \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

3. $x = 5 \operatorname{sen} t, \quad y = t^2, \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi$

4. $x = e^{-t} + t, \quad y = e^{t} - t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

5–10

(a) Bosqueje la curva usando las ecuaciones paramétricas para trazar puntos. Indique con una flecha la dirección en la que se traza la curva cuando aumenta t.

(b) Elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva.

5. $x = 3t - 5, \quad y = 2t + 1$

6. $x = 1 + t, \quad y = 5 - 2t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 3$

7. $x = t^2 - 2, \quad y = 5 - 2t, \quad -3 \leqslant t \leqslant 4$

8. $x = 1 + 3t, \quad y = 2 - t^2$

9. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

10. $x = t^2, \quad y = t^3$

11–18

(a) Elimine el parámetro para hallar una ecuación cartesiana de la curva.

(b) Bosqueje la curva e indique con una flecha la dirección en la que se traza la curva cuando crece el parámetro.

11. $x = \operatorname{sen}\theta, \quad y = \cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $x = 4\cos\theta, \quad y = 5\operatorname{sen}\theta, \quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$

13. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi/2$

14. $x = e^{t} - 1, \quad y = e^{2t}$

15. $x = e^{2t}, \quad y = t + 1$

16. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geqslant 1$

17. $x = \operatorname{senh} t, \quad y = \cosh t$

18. $x = 2\cosh t, \quad y = 5\operatorname{senh} t$

19–22 Describa el movimiento de una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo especificado.

19. $x = 3 + 2\cos t, \quad x = 1 + 2\operatorname{sen} t, \quad \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

20. $x = 2\operatorname{sen} t, \quad y = 4 + \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

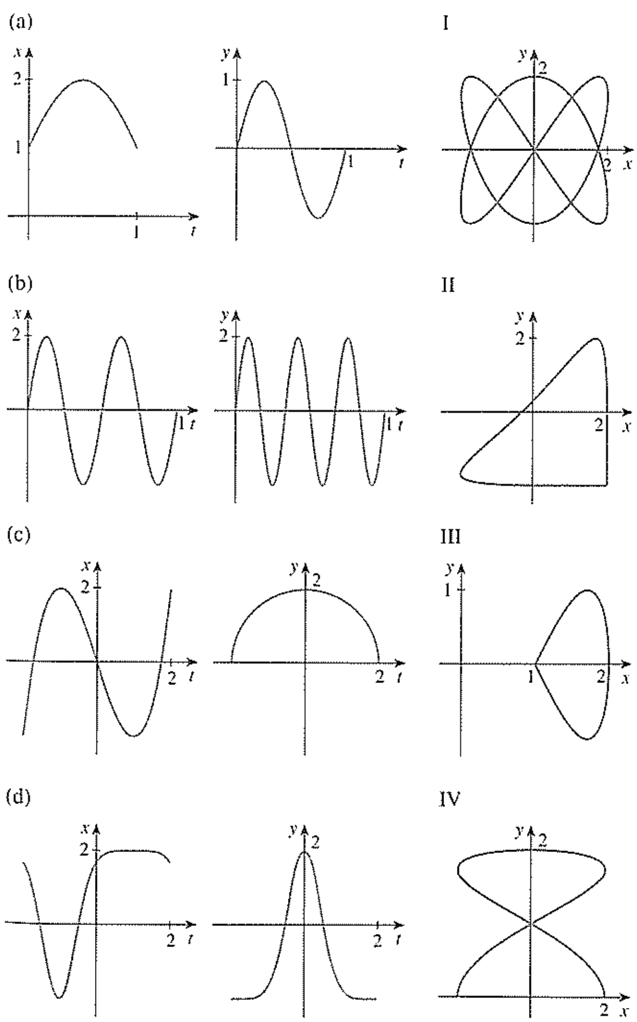
21. $x = 5\operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

22. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos^2 t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

---

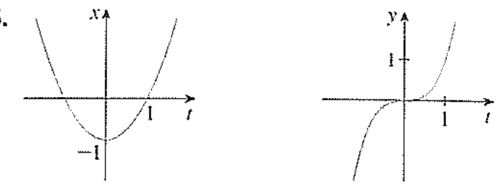
23. Suponga que una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde el intervalo de f es $[1, 4]$ y el de g es $[2, 3]$. ¿Qué se puede decir acerca de la curva?

24. Compare las gráficas de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $g(t)$ en (a)-(d) con las curvas paramétricas I-IV. Dé razones para sus elecciones.

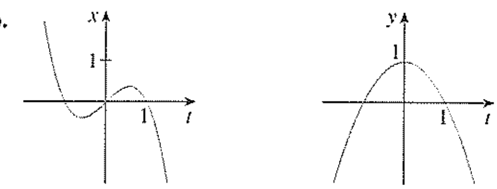


25–27 Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para bosquejar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando crece t.

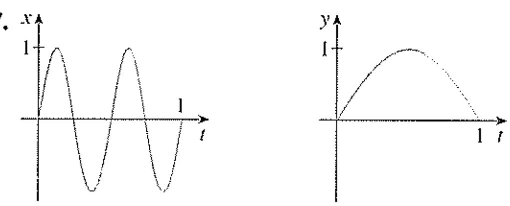
25.



26.



27.



---

28. Compare las ecuaciones paramétricas con las gráficas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No use un dispositivo de graficación.)

(a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

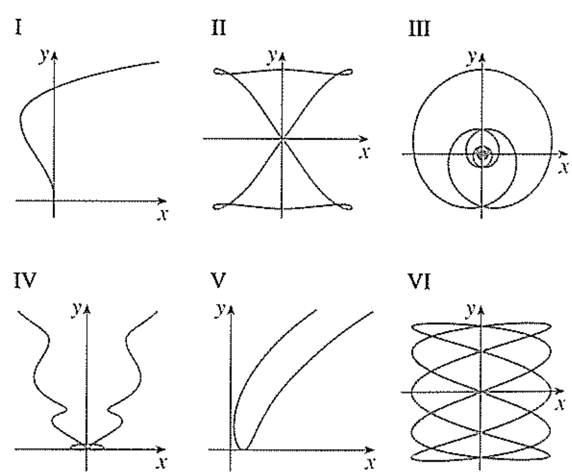
(b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

(c) $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \operatorname{sen}(t + \operatorname{sen} 2t)$

(d) $x = \cos 5t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

(e) $x = t + \operatorname{sen} 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

(f) $x = \dfrac{\operatorname{sen} 2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$



29. Grafique la curva $x = y - 3y^3 + y^5$.

30. Grafique las curvas $y = x^5$ y $x = y(y - 1)^2$ y encuentre sus puntos de intersección correctos hasta un decimal.

31. (a) Muestre que las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, describen el segmento de línea que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

(b) Encuentre las ecuaciones paramétricas para representar el segmento de línea de $(-2, 7)$ a $(3, -1)$.

32. Use un dispositivo de graficación y el resultado del ejercicio 31(a) para dibujar el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(1, 5)$.

33. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de una partícula que se mueve a lo largo del círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ en la manera descrita.

(a) Una vez en el sentido de las manecillas del reloj, empezando en $(2, 1)$

(b) Tres veces en sentido contrario de las manecillas del reloj, empezando en $(2, 1)$

(c) La mitad en sentido contrario al de las manecillas del reloj, empezando en $(0, 3)$

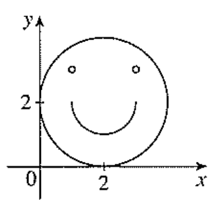
34. (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Sugerencia*: modifique las ecuaciones de un círculo del ejemplo 2.]

(b) Use estas ecuaciones paramétricas para hacer la gráfica de la elipse cuando $a = 3$ y $b = 1, 2, 4$ y 8.

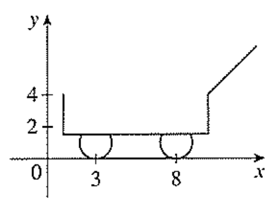
(c) ¿Cómo cambia la forma de la elipse cuando varía b?

35–36 Use calculadora de gráficas o computadora para reproducir la figura.

35.



36.



37–38 Compare las curvas representadas por las ecuaciones paramétricas. ¿Cómo difieren?

37. (a) $x = t^3, \quad y = t^2$ (b) $x = t^6, \quad y = t^4$
(c) $x = e^{-3t}, \quad y = e^{-2t}$

38. (a) $x = t, \quad y = t^{-2}$ (b) $x = \cos t, \quad y = \sec^2 t$
(c) $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

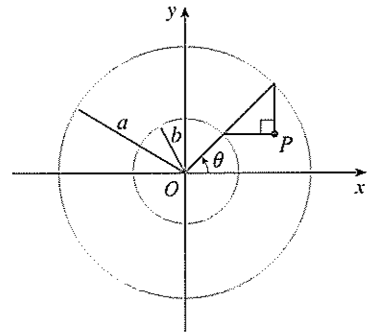
39. Deduzca las ecuaciones 1 para el caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

40. Sea P un punto a una distancia d del centro de un círculo de radio r. La curva trazada por P cuando el círculo rueda a lo largo de una recta se llama **trocoide**. (Considere el movimiento de un punto sobre el rayo de una rueda de bicicleta.) La cicloide es el caso especial de una trocoide con $d = r$. Si se emplea el mismo parámetro θ que para la cicloide, y si se supone que la línea es el eje x y $\theta = 0$ cuando P está en uno de sus puntos mínimos, muestre que las ecuaciones paramétricas de la trocoide son

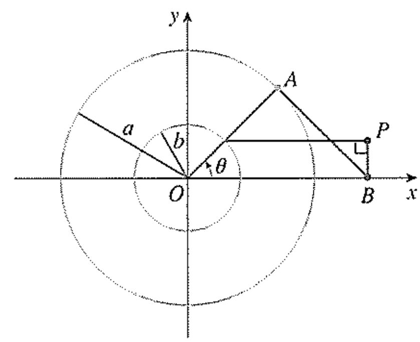
$$x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta \qquad y = r - d \cos \theta$$

Bosqueje la trocoide para los casos $d < r$ y $d > r$.

41. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas para la curva que consta de todas las posiciones posibles del punto P en la figura, usando el ángulo θ como parámetro. Después elimine el parámetro e identifique la curva.



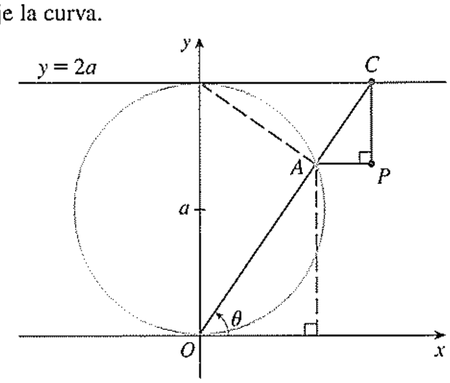
42. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva que consta de todas las posiciones posibles del punto P en la figura, usando el ángulo θ como parámetro. El segmento de línea AB es tangente al círculo más grande.



43. Una curva, llamada **bruja de María Agnesi**, consiste en todas las posiciones posibles del punto P en la figura. Muestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva se pueden escribir como

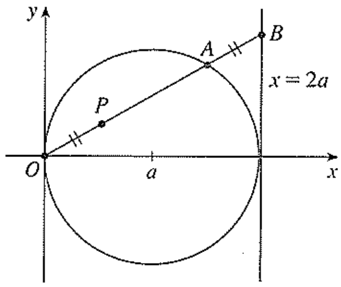
$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2\theta$$

Bosqueje la curva.



44. (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva que consta de las posiciones posibles del punto P en la figura, donde $|OP| = |AB|$. Bosqueje la curva. (Esta curva se llama **cisoide de Diocles** en honor al sabio griego Diocles, quien introdujo la cisoide como un método gráfico para construir el lado de un cubo cuyo volumen es dos veces el de un cubo específico.)

(b) Use la descripción geométrica de la curva para trazar manualmente un bosquejo burdo de la curva. Compruebe su trabajo con el uso de las ecuaciones paramétricas para graficar la curva.



45. Suponga que la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

y la posición de una segunda partícula está dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(a) Grafique las trayectorias de ambas partículas. ¿Cuántos puntos de intersección hay?
(b) ¿Algunos de estos puntos de intersección son *puntos de colisión*? En otras palabras, ¿están las partículas alguna vez en el mismo lugar al mismo tiempo? Si es así, determine los puntos de colisión.
(c) Describa lo que sucede si la trayectoria de la segunda partícula está dada por

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

46. Si un proyectil es lanzado con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo a un ángulo α arriba de la horizontal y se supone que la resistencia del aire es insignificante, en tal caso su posición después de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (9.8 m/s^2).
(a) Si se dispara una pistola con $\alpha = 30°$ y $v_0 = 500$ m/s, ¿cuándo la bala colisionará con el suelo? ¿A qué distancia de la pistola chocará con el suelo? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala?
(b) Use un dispositivo de graficación para comprobar sus respuestas para el inciso (a). Después grafique la trayectoria del proyectil para otros valores del ángulo α con la finalidad de ver dónde choca con el suelo. Resuma sus hallazgos.
(c) Muestre que la trayectoria es parabólica mediante la eliminación del parámetro.

47. Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. ¿Cómo cambia la forma cuando se incrementa c? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

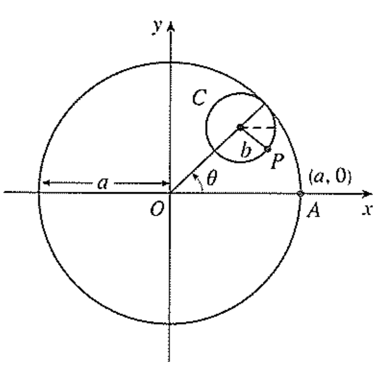
48. Las **curvas de catástrofe cola de golondrina** se definen mediante las ecuaciones paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Grafique varias de estas curvas. ¿Qué características tienen en común estas curvas? ¿Cómo cambian cuando se incrementa c?

49. Las curvas con ecuaciones $x = a \operatorname{sen} nt$, $y = b \cos t$ se llaman **figuras de Lissajous**. Investigue cómo varían estas curvas cuando varían a, b y n. (Tome a n como un entero positivo).

50. Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones paramétricas. Empiece por hacer que c sea un entero positivo y ver lo que ocurre a la forma cuando c aumenta. Luego explore algunas de las posibilidades que se presentan cuando c es una fracción.

PROYECTO DE LABORATORIO — CÍRCULOS QUE CORREN ALREDEDOR DE CÍRCULOS

En este proyecto se investigan familias de curvas, llamadas *hipocicloides* y *epicicloides*, que se generan por el movimiento de un punto sobre un círculo que rueda dentro o fuera de otro círculo.



TEC Examine Module 10.1B para ver cómo se forman las hipocicloides y epicicloides mediante el movimiento de círculos rodantes.

1. Una **hipocicloide** es una curva trazada por un punto fijo P sobre un círculo C de radio b cuando C rueda en el interior de un círculo con centro O y radio a. Muestre que si la posición inicial de P es $(a, 0)$ y el parámetro θ se elige como en la figura, en consecuencia las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right) \qquad y = (a - b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{b}\,\theta\right)$$

2. Use un dispositivo de graficación (o la gráfica interactiva del Module TEC 10.1B) para dibujar las gráficas de hipocicloides con a un entero positivo y $b = 1$. ¿Cómo afecta el valor de a a la gráfica? Muestre que si se toma $a = 4$, en tal caso las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide se reducen a

$$x = 4\cos^3\theta \qquad y = 4\operatorname{sen}^3\theta$$

Esta curva se llama **hipocicloide de cuatro vértices** o **astroide**.

3. Ahora pruebe $b = 1$ y $a = n/d$, una fracción donde n y d no tienen factor común. Primero sea $n = 1$ e intente determinar gráficamente el efecto del denominador d en la forma de la gráfica. Entonces n varía mientras se mantiene a d constante. ¿Qué sucede cuando $n = d + 1$?

4. ¿Qué sucede si $b = 1$ y a es irracional? Experimente con un número irracional como $\sqrt{2}$ o $e - 2$. Tome valores cada vez más grandes para θ y especule acerca de lo que sucedería si se graficara la hipocicloide para todos los valores reales de θ.

5. Si el círculo C rueda en el *exterior* del círculo fijo, la curva trazada por P se llama **epicicloide**. Encuentre ecuaciones paramétricas para la epicicloide.

6. Investigue las formas posibles para epicicloides. Use métodos similares para los problemas 2–4.

10.2 CÁLCULO CON CURVAS PARAMÉTRICAS

Una vez visto cómo representar ecuaciones paramétricas, ahora se aplican métodos de cálculo a estas curvas paramétricas. En particular, se resuelven problemas relacionados con tangentes, área, longitud de arco y área de superficie.

TANGENTES

En la sección anterior se vio que algunas curvas definidas por ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ se pueden expresar también, al eliminar el parámetro, en la forma $y = F(x)$. (Véase en el ejercicio 67 las condiciones generales bajo las que esto es posible.) Si se sustituye $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en la ecuación $y = F(x)$, se obtiene

$$g(t) = F(f(t))$$

y, de esa manera, si g, F y f son derivables, la regla de la cadena da

$$g'(t) = F'(f(t))f'(t) = F'(x)f'(t)$$

Si $f'(t) \neq 0$, se puede resolver $F'(x)$:

$$\boxed{1} \qquad F'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Puesto que la pendiente de la tangente a la curva $y = F(x)$ en $(x, F(x))$ es $F'(x)$, la ecuación 1 permite hallar tangentes a curvas paramétricas sin tener que eliminar el parámetro. Si se emplea la notación de Leibniz, se puede reescribir la ecuación 1 en una forma que se recuerda con facilidad:

Si se considera que una curva paramétrica es trazada por una partícula móvil, en tal caso dy/dt y dx/dt son las velocidades vertical y horizontal de la partícula, y la fórmula 2 dice que la pendiente de la tangente es la relación de estas velocidades.

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \qquad \text{si} \quad \frac{dx}{dt} \neq 0}$$

Se puede ver de la ecuación 2 que la curva tiene una tangente horizontal cuando $dy/dt = 0$ (siempre que $dx/dt \neq 0$) y tiene una tangente vertical cuando $dx/dt = 0$ (tomando en cuenta que $dy/dt \neq 0$). Esta información es útil para bosquejar curvas paramétricas.

Según se sabe del capítulo 4, también es útil considerar d^2y/dx^2. Esto se puede hallar si se reemplaza y por dy/dx en la ecuación 2:

Note que $\dfrac{d^2y}{dx^2} \neq \dfrac{\dfrac{d^2y}{dt^2}}{\dfrac{d^2x}{dt^2}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}}$$

EJEMPLO 1 Una curva C se define por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$.
(a) Muestre que C tiene dos tangentes en el punto $(3, 0)$ y encuentre sus ecuaciones.
(b) Determine los puntos en C donde la tangente es horizontal o vertical.
(c) Determine dónde la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
(d) Bosqueje una curva.

SOLUCIÓN
(a) Observe que $y = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = 0$ cuando $t = 0$ o $t = \pm\sqrt{3}$. Por lo tanto, el punto $(3, 0)$ en C surge de dos valores del parámetro, $t = \sqrt{3}$ y $t = -\sqrt{3}$. Esto indica que C se cruza a sí misma en $(3, 0)$. Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

la pendiente de la tangente cuando $t = \pm\sqrt{3}$ es $dy/dx = \pm 6/(2\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$, de modo que las ecuaciones de las tangentes en $(3, 0)$ son

$$y = \sqrt{3}\,(x - 3) \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{3}\,(x - 3)$$

(b) C tiene una tangente horizontal cuando $dy/dx = 0$, es decir, cuando $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$. Puesto que $dy/dt = 3t^2 - 3$, esto sucede cuando $t^2 = 1$, es decir, $t = \pm 1$. Los puntos correspondientes en C son $(1, -2)$ y $(1, 2)$. C tiene una tangente vertical cuando $dx/dt = 2t = 0$, es decir, $t = 0$. (Note que $dy/dt \neq 0$). El punto correspondiente en C es $(0, 0)$.

(c) Para determinar la concavidad, se calcula la segunda derivada:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{3}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right)}{2t} = \frac{3(t^2 + 1)}{4t^3}$$

La curva es cóncava hacia arriba cuando $t > 0$ y cóncava hacia abajo cuando $t < 0$.

(d) Con la información de los incisos (b) y (c), se bosqueja C en la figura 1. ▢

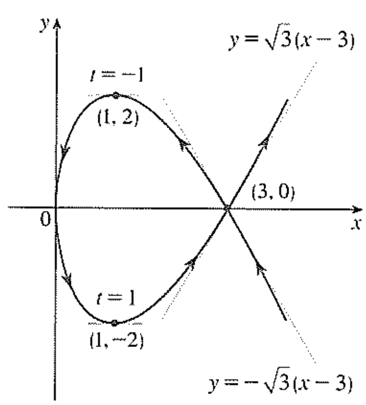


FIGURA 1

EJEMPLO 2
(a) Encuentre la tangente a la cicloide $x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ en el punto donde $\theta = \pi/3$. (Véase el ejemplo 7 en la sección 10.1).
(b) ¿En qué puntos la tangente es horizontal? ¿Cuándo es vertical?

SOLUCIÓN
(a) La pendiente de la recta tangente es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r(1 - \cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}$$

Cuando $\theta = \pi/3$, se tiene

$$x = r\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = r\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad y = r\left(1 - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r}{2}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/3)}{1 - \cos(\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, la pendiente de la tangente es $\sqrt{3}$ y su ecuación es

$$y - \frac{r}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{o} \qquad \sqrt{3}\,x - y = r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

La tangente se bosqueja en la figura 2.

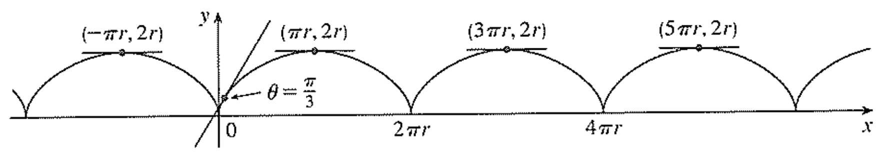


FIGURA 2

(b) La tangente es horizontal cuando $dy/dx = 0$, lo que ocurre cuando $\operatorname{sen}\theta = 0$ y $1 - \cos\theta \neq 0$, es decir, $\theta = (2n - 1)\pi$, n un entero. El punto correspondiente en la cicloide es $((2n - 1)\pi r, 2r)$.

Cuando $\theta = 2n\pi$, tanto $dx/d\theta$ como $dy/d\theta$ son 0. En la gráfica se ve que hay tangentes verticales en esos puntos. Esto se puede comprobar por medio de la regla de l'Hospital como sigue:

$$\lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \infty$$

Un cálculo similar muestra que $dy/dx \to -\infty$ cuando $\theta \to 2n\pi^-$, así que de hecho hay tangentes verticales cuando $\theta = 2n\pi$, es decir, cuando $x = 2n\pi r$. □

ÁREAS

Se sabe que el área bajo la curva $y = F(x)$ de a a b es $A = \int_a^b F(x)\,dx$, donde $F(x) \geq 0$. Si la curva está dada por ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$, en tal caso se puede adaptar la fórmula anterior por medio de la regla de sustitución para integrales definidas como sigue:

Los límites de integración para t se encuentran como siempre con la regla de la sustitución. Cuando $x = a$, t es α o β. Cuando $x = b$, t es el valor restante.

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt \qquad \left[\text{o bien} \quad \int_\beta^\alpha g(t)f'(t)\,dt\right]$$

EJEMPLO 3 Encuentre el área bajo un arco de la cicloide

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta), \qquad y = r(1 - \cos\theta).$$

(Véase fig. 3.)

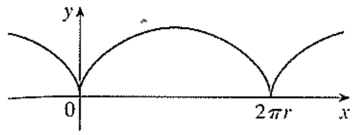


FIGURA 3

▨ El resultado del ejemplo 3 dice que el área bajo un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo rodante que genera la cicloide (véase el ejemplo 7 en la sección 10.1). Galileo conjeturó este resultado, pero el matemático francés Roberval y el matemático italiano Torricelli lo demostraron primero.

SOLUCIÓN Un arco de la cicloide está dado por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Al usar la regla de sustitución con $y = r(1 - \cos\theta)$ y $dx = r(1 - \cos\theta)\,d\theta$, se tiene

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi r} y\,dx = \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\,r(1-\cos\theta)\,d\theta \\ &= r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2\,d\theta = r^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= r^2\int_0^{2\pi}\left[1 - 2\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]d\theta \\ &= r^2\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right]_0^{2\pi} = r^2\left(\tfrac{3}{2}\cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2 \end{aligned}$$

□

LONGITUD DE ARCO

Ya se sabe cómo hallar la longitud L de una curva C dada en la forma $y = F(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. La fórmula 8.1.3 dice que si F' es continua, en consecuencia

3
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Suponga que C se puede describir también mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, donde $dx/dt = f'(t) > 0$. Esto significa que C es cruzada una vez, de izquierda a derecha, cuando t se incrementa de α a β y $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$. Al sustituir la fórmula 2 en la fórmula 3 y usar la regla de sustitución, se obtiene

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2}\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

Puesto que $dx/dt > 0$, se tiene

4
$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

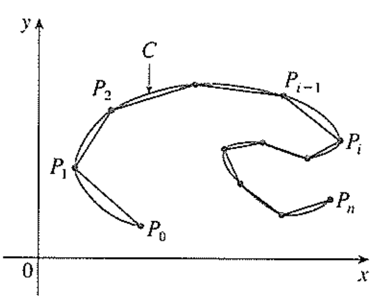


FIGURA 4

Incluso si C no se puede expresar en la forma $y = F(x)$, la fórmula 4 aún es válida pero se obtiene por aproximaciones poligonales. Se divide el intervalo de parámetro $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos de igual amplitud Δt. Si $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ son los puntos finales de estos subintervalos, después $x_i = f(t_i)$ y $y_i = g(t_i)$ son las coordenadas de los puntos $P_i(x_i, y_i)$ que yacen en C y el polígono con vértices $P_0, P_1, \ldots, P_n$ se aproxima a C (véase fig. 4).

Como en la sección 8.1, se define la longitud L de C como el límite de las longitudes de estos polígonos de aproximación cuando $n \to \infty$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

El teorema del valor medio, cuando se aplica a f en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, da un número t_i^* en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

Si se establece que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, esta ecuación se convierte en

$$\Delta x_i = f'(t_i^*)\,\Delta t$$

De manera similar, cuando se aplica a g, el teorema del valor medio da un número t_i^{**} en (t_{i-1}, t_i) tal que

$$\Delta y_i = g'(t_i^{**})\,\Delta t$$

Debido a eso,

$$\begin{aligned} |P_{i-1}P_i| &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{[f'(t_i^*)\,\Delta t]^2 + [g'(t_i^{**})\,\Delta t]^2} \\ &= \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\,\Delta t \end{aligned}$$

y, de este modo,

$$\boxed{5} \qquad L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[f'(t_i^*)]^2 + [g'(t_i^{**})]^2}\,\Delta t$$

La suma en (5) se asemeja a una suma de Riemann para la función $\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$ pero no es exactamente una suma de Riemann porque $t_i^* \neq t_i^{**}$ en general. Sin embargo, si f' y g' son continuas, se puede demostrar que el límite en (5) es el mismo que si t_i^* y t_i^{**} fueran iguales, a saber,

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

Así, con la notación de Leibniz, se tiene el siguiente resultado, que tiene la misma forma que (4).

> $\boxed{6}$ **TEOREMA** Si una curva C se describe mediante las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, donde f' y g' son continuas en $[\alpha, \beta]$ y C es recorrida una sola vez cuando t aumenta desde α hasta β, por lo tanto la longitud de C es
>
> $$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Observe que la fórmula del teorema 6 es consistente con las fórmulas generales $L = \int ds$ y $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ de la sección 8.1.

EJEMPLO 4 Si se usa la representación del círculo unitario dado en el ejemplo 2 en la sección 10.1,

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

entonces $dx/dt = -\operatorname{sen} t$ y $dy/dt = \cos t$, así que el teorema 6 da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

como se esperaba. Si, por otro lado, se usa la representación dada en el ejemplo 3 de la sección 10.1,

$$x = \operatorname{sen} 2t \qquad y = \cos 2t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

por lo tanto $dx/dt = 2\cos 2t$, $dy/dt = -2\operatorname{sen} 2t$, y la integral del teorema 6 da

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 2t + 4\operatorname{sen}^2 2t}\,dt = \int_0^{2\pi} 2\,dt = 4\pi$$

Observe que la integral da dos veces la longitud de arco del círculo, porque cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto $(\text{sen } 2t, \cos 2t)$ cruza el círculo dos veces. En general, al hallar la longitud de una curva C a partir de una representación paramétrica, se tiene que ser cuidadoso para asegurar que C es cruzada sólo una vez cuando t se incrementa de α a β. □

EJEMPLO 5 Encuentre la longitud de un arco de la cicloide $x = r(\theta - \text{sen } \theta)$, $y = r(1 - \cos \theta)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 3 se ve que un arco se describe mediante el intervalo de parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Puesto que

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos \theta) \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{d\theta} = r \text{ sen } \theta$$

se tiene

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - \cos \theta)^2 + r^2 \text{sen}^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}\, d\theta = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos\theta)}\, d\theta$$

El resultado del ejemplo 5 dice que la longitud de un arco de una cicloide es 8 veces el radio del círculo generador (véase fig. 5). Sir Christopher Wren, en 1658, fue el primero en demostrar lo anterior, quien después llegó a ser el arquitecto de la catedral de Saint Paul, en Londres.

Para evaluar esta integral, se usa la identidad $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ con $\theta = 2x$, que da $1 - \cos\theta = 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$. Debido a que $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, se tiene $0 \leqslant \theta/2 \leqslant \pi$ y, de este modo, $\text{sen}(\theta/2) \geq 0$. Por lo tanto,

$$\sqrt{2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{4\,\text{sen}^2(\theta/2)} = 2\,|\text{sen}(\theta/2)| = 2\,\text{sen}(\theta/2)$$

y, de esta manera, $$L = 2r \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta/2)\, d\theta = 2r\left[-2\cos(\theta/2)\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2r[2 + 2] = 8r$$ □

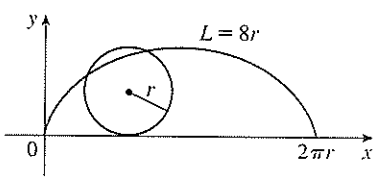


FIGURA 5

ÁREA DE SUPERFICIE

En la misma forma que para la longitud de arco, se puede adaptar la fórmula 8.2.5 a fin de obtener una fórmula para el área de superficie. Si la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, se hace girar respecto al eje x, donde f', g' son continuas y $g(t) \geqslant 0$, en tal caso el área de la superficie resultante está dada por

$$\boxed{7} \qquad S = \int_\alpha^\beta 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Las fórmulas simbólicas generales $S = \int 2\pi y\, ds$ y $S = \int 2\pi x\, ds$ (fórmulas 8.2.7 y 8.2.8) aún son válidas, pero para curvas paramétricas se usa

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

EJEMPLO 6 Muestre que el área de superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.

SOLUCIÓN La esfera se obtiene al girar el semicírculo

$$x = r\cos t \qquad y = r\,\text{sen } t \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

respecto al eje x. Por lo tanto, de la fórmula 7, se obtiene

$$S = \int_0^\pi 2\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{(-r \operatorname{sen} t)^2 + (r \cos t)^2}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^\pi r \operatorname{sen} t \sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = 2\pi \int_0^\pi r \operatorname{sen} t \cdot r\, dt$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 2\pi r^2(-\cos t)\Big]_0^\pi = 4\pi r^2 \qquad \square$$

10.2 EJERCICIOS

1–2 Encuentre dy/dx.

1. $x = t \operatorname{sen} t, \quad y = t^2 + t$ **2.** $x = 1/t, \quad y = \sqrt{t}\, e^{-t}$

3–6 Encuentre una ecuación de la tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado del parámetro.

3. $x = t^4 + 1, \quad y = t^3 + t; \quad t = -1$

4. $x = t - t^{-1}, \quad y = 1 + t^2; \quad t = 1$

5. $x = e^{\sqrt{t}}, \quad y = t - \ln t^2; \quad t = 1$

6. $x = \cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta, \quad y = \operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta; \quad \theta = 0$

7–8 Encuentre una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado por dos métodos: (a) sin eliminar el parámetro y (b) eliminando primero el parámetro.

7. $x = 1 + \ln t, \; y = t^2 + 2; \quad (1, 3)$

8. $x = \tan\theta, \; y = \sec\theta; \quad (1, \sqrt{2})$

9–10 Encuentre una ecuación de la(s) tangente(s) a la curva en el punto dado. Después grafique la curva y la(s) tangente(s).

9. $x = 6 \operatorname{sen} t, \; y = t^2 + t; \quad (0, 0)$

10. $x = \cos t + \cos 2t, \; y = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t; \quad (-1, 1)$

11–16 Determine dy/dx y d^2y/dx^2. ¿Para qué valores de t la curva es cóncava hacia arriba?

11. $x = 4 + t^2, \quad y = t^2 + t^3$ **12.** $x = t^3 - 12t, \quad y = t^2 - 1$

13. $x = t - e^t, \quad y = t + e^{-t}$ **14.** $x = t + \ln t, \quad y = t - \ln t$

15. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 3 \cos t, \quad 0 < t < 2\pi$

16. $x = \cos 2t, \quad y = \cos t, \quad 0 < t < \pi$

17–20 Encuentre los puntos sobre la curva donde la tangente es horizontal a la vertical. Si cuenta con un dispositivo de graficación, grafique la curva para comprobar su trabajo.

17. $x = 10 - t^2, \quad y = t^3 - 12t$

18. $x = 2t^3 + 3t^2 - 12t, \quad y = 2t^3 + 3t^2 + 1$

19. $x = 2\cos\theta, \quad y = \operatorname{sen} 2\theta$

20. $x = \cos 3\theta, \quad y = 2 \operatorname{sen}\theta$

21. Use una gráfica para estimar las coordenadas del el punto de la extrema derecha de la curva $x = t - t^6$, $y = e^t$. Después use el cálculo para encontrar las coordenadas exactas.

22. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto más bajo y el de la extrema izquierda en la curva $x = t^4 - 2t$, $y = t + t^4$. Luego encuentre las coordenadas exactas.

23–24 Grafique la curva en un rectángulo de visión que muestre todos los aspectos importantes de la curva.

23. $x = t^4 - 2t^3 - 2t^2, \quad y = t^3 - t$

24. $x = t^4 + 4t^3 - 8t^2, \quad y = 2t^2 - t$

25. Muestre que la curva $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t \cos t$ tiene dos tangentes en $(0, 0)$ y encuentre sus ecuaciones. Bosqueje la curva.

26. Grafique la curva $x = \cos t + 2\cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t$ para descubrir en dónde se cruza a sí misma. Determine las ecuaciones de ambas tangentes en ese punto.

27. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la trocoide $x = r\theta - d \operatorname{sen}\theta$, $y = r - d\cos\theta$ en términos de θ. (Véase el ejercicio 40 en la sección 10.1.)

(b) Muestre que si $d < r$, en tal caso la trocoide no tiene una tangente vertical.

28. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la astroide $x = a \cos^3\theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$ en términos de θ. (Las astroides se exploran en el proyecto de laboratorio de la página 629.)

(b) ¿En qué puntos la tangente es horizontal o vertical?

(c) ¿En qué puntos la tangente tiene pendiente 1 o -1?

29. ¿En qué puntos sobre la curva $x = 2t^3$, $y = 1 + 4t - t^2$ tiene pendiente 1 la línea tangente?

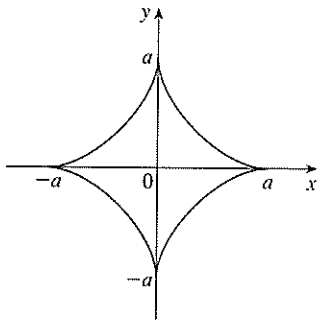
30. Encuentre las ecuaciones de las tangentes a la curva $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t^3 + 1$ que pasa por el punto $(4, 3)$.

31. Use las ecuaciones paramétricas de una elipse, $x = a\cos\theta$, $y = b \operatorname{sen}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, para hallar el área que encierra.

32. Encuentre el área acotada por la curva $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ y el eje y.

33. Encuentre el área por el eje x y la curva $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$.

34. Encuentre el área de la región encerrada por la astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\theta$. (Las astroides se exploran en el proyecto de laboratorio en la página 629).



35. Determine el área bajo un arco de la trocoide del ejercicio 40 en la sección 10.1 para el caso $d < r$.

36. Sea $\mathfrak{R}$ la región encerrada por el bucle de la curva en el ejemplo 1.
(a) Encuentre el área de $\mathfrak{R}$.
(b) Si $\mathfrak{R}$ se hace girar respecto al eje x, encuentre el volumen del sólido resultante.
(c) Encuentre el centroide de $\mathfrak{R}$.

37–40 Establezca una integral que represente la longitud de la curva. A continuación use su calculadora para hallar la longitud correcta a cuatro lugares decimales.

37. $x = t - t^2, \quad y = \frac{4}{3}t^{3/2}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = 1 + e^t, \quad y = t^2, \quad -3 \leqslant t \leqslant 3$

39. $x = t + \cos t, \quad y = t - \mathrm{sen}\, t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

40. $x = \ln t, \quad y = \sqrt{t+1}, \quad 1 \leqslant t \leqslant 5$

41–44 Determine la longitud de la curva.

41. $x = 1 + 3t^2, \quad y = 4 + 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

42. $x = e^t + e^{-t}, \quad y = 5 - 2t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

43. $x = \dfrac{t}{1+t}, \quad y = \ln(1+t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

44. $x = 3\cos t - \cos 3t, \quad y = 3\,\mathrm{sen}\, t - \mathrm{sen}\, 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

45–47 Grafique la curva y encuentre su longitud.

45. $x = e^t\cos t, \quad y = e^t\,\mathrm{sen}\, t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

46. $x = \cos t + \ln(\tan \frac{1}{2}t), \quad y = \mathrm{sen}\, t, \quad \pi/4 \leqslant t \leqslant 3\pi/4$

47. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad -8 \leqslant t \leqslant 3$

48. Estime la longitud del bucle de la curva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$.

49. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar la longitud de la curva $x = t - e^t$, $y = t + e^t$, $-6 \leqslant t \leqslant 6$.

50. En el ejercicio 43 de la sección 10.1 se pidió deducir las ecuaciones paramétricas $x = 2a\cot\theta$, $y = 2a\,\mathrm{sen}^2\theta$ para la curva llamada bruja de María Agnesi. Use la regla de Simpson con $n = 4$ para estimar la longitud del arco de esta curva dado por $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

51–52 Encuentre la distancia recorrida por una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo de tiempo dado. Compare con la longitud de la curva.

51. $x = \mathrm{sen}^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi$

52. $x = \cos^2 t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$

53. Muestre que la longitud total de la elipse $x = a\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y = b\cos\theta$, $a > b > 0$, es

$$L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\theta}\,d\theta$$

donde e es la excentricidad de la elipse $\left(e = c/a, \text{ donde } c = \sqrt{a^2 - b^2}\right)$.

54. Encuentre la longitud total de la astroide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\theta$, donde $a > 0$.

CAS **55.** (a) Grafique la **epitocroide** con ecuaciones

$$x = 11\cos t - 4\cos(11t/2)$$
$$y = 11\,\mathrm{sen}\, t - 4\,\mathrm{sen}(11t/2)$$

¿Qué intervalo de parámetro da la curva completa?
(b) Use su CAS para determinar la longitud aproximada de esta curva.

CAS **56.** Una curva llamada **espiral de Cornu** se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)\,du$$

$$y = S(t) = \int_0^t \mathrm{sen}(\pi u^2/2)\,du$$

donde C y S son las funciones de Fresnel que se introdujeron en el capítulo 5.
(a) Grafique esta curva. ¿Qué sucede cuando $t \to \infty$ y cuando $t \to -\infty$?
(b) Determine la longitud de la espiral de Cornu del origen al punto con valor de parámetro t.

57–58 Establezca una integral que represente el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada respecto al eje x. A continuación use su calculadora para hallar el área superficial correcta a cuatro lugares decimales.

57. $x = 1 - te^t, \quad y = (t^2 + 1)e^t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

58. $x = \mathrm{sen}^2 t, \quad y = \mathrm{sen}\, 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/3$

59–61 Encuentre el área exacta de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada respecto al eje x.

59. $x = t^3, \quad y = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

60. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad 0 \leq t \leq 1$

61. $x = a\cos^3\theta, \quad y = a\,\mathrm{sen}^3\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

---

62. Grafique la curva

$$x = 2\cos\theta - \cos 2\theta \qquad y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,2\theta$$

Si esta curva se hace girar respecto al eje x, encuentre el área de la superficie resultante. (Use su gráfica para ayudar a determinar el intervalo de parámetro correcto.)

63. Si la curva

$$x = t + t^3 \qquad y = t - \frac{1}{t^2} \qquad 1 \leq t \leq 2$$

se hace girar respecto al eje x, use su calculadora para estimar el área de la superficie resultante hasta tres decimales.

64. Si el arco de la curva en el ejercicio 50 se hace girar respecto al eje x, estime el área de la superficie resultante por medio de la regla de Simpson con $n = 4$.

65–66 Encuentre el área superficial generada al hacer girar la curva dada respecto al eje y.

65. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leq t \leq 5$

66. $x = e^t - t, \quad y = 4e^{t/2}, \quad 0 \leq t \leq 1$

---

67. Si f' es continua y $f'(t) \neq 0$ para $a \leq t \leq b$, muestre que la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, se puede escribir en la forma $y = F(x)$. [*Sugerencia*: muestre que f^{-1} existe.]

68. Use la fórmula 2 para deducir la fórmula 7 a partir de la fórmula 8.2.5 para el caso en el que la curva se puede representar en la forma $y = F(x)$, $a \leq x \leq b$.

69. La **curvatura** en el punto P de una curva se define como

$$\kappa = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

donde ϕ es el ángulo de inclinación de la línea tangente en P, como se muestra en la figura. Así, la curvatura es el valor absoluto de la tasa de cambio de ϕ con respecto a la longitud de arco. Se puede considerar como una medida de la tasa de cambio de dirección de la curva en P y se estudiará con mayor detalle en el capítulo 13.

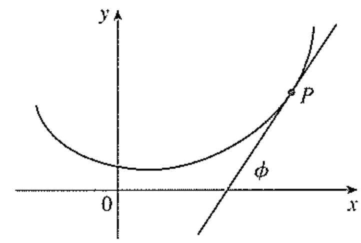
(a) Para una curva paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, deduzca la fórmula

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

donde los puntos indican derivadas con respecto a t, así que $\dot{x} = dx/dt$. [*Sugerencia*: use $\phi = \tan^{-1}(dy/dx)$ y la fórmula 2 para hallar $d\phi/dt$. Después use la regla de la cadena para determinar $d\phi/ds$.]

(b) Considerando una curva $y = f(x)$ como la curva paramétrica $x = x$, $y = f(x)$, con parámetro x, muestre que la fórmula del inciso (a) se convierte en

$$\kappa = \frac{|d^2y/dx^2|}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}$$



70. (a) Use la fórmula del ejercicio 69(b) para hallar la curvatura de la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

(b) ¿En qué punto la parábola tiene curvatura máxima?

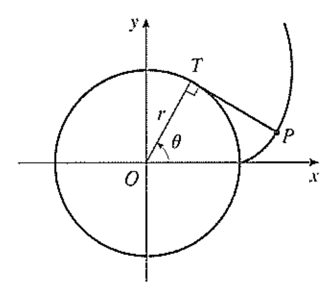
71. Con la fórmula del ejercicio 69(a) determine la curvatura de la cicloide $x = \theta - \mathrm{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ en la parte superior de uno de sus arcos.

72. (a) Muestre que la curvatura en cada punto de una recta es $\kappa = 0$.

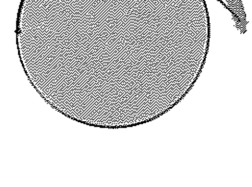
(b) Muestre que la curvatura en cada punto de un círculo de radio r es $\kappa = 1/r$.

73. Se enrolla una cuerda alrededor de un círculo y luego se desenrolla mientras se mantiene tensa. La curva trazada por el punto P al final de la cuerda se llama **involuta** del círculo. Si el círculo tiene radio r y centro O y la posición inicial de P es $(r, 0)$, y si el parámetro θ se elige como en la figura, muestre que las ecuaciones paramétricas de la envolvente son

$$x = r(\cos\theta + \theta\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad y = r(\mathrm{sen}\,\theta - \theta\cos\theta)$$



74. Una vaca está atada a un silo con radio r mediante una cuerda lo suficientemente larga para alcanzar el lado opuesto del silo. Encuentre el área disponible para el apacentamiento de la vaca.



PROYECTO DE LABORATORIO

CURVAS DE BÉZIER

Las **curvas de Bézier** se emplean en el diseño auxiliado por computadora y se nombran en honor al matemático francés Pierre Bézier (1910-1999), quien trabajó en la industria automotriz. Una curva de Béizer cúbica se determina mediante cuatro **puntos de control**, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, y se define mediante las ecuaciones paramétricas.

$$x = x_0(1 - t)^3 + 3x_1t(1 - t)^2 + 3x_2t^2(1 - t) + x_3t^3$$

$$y = y_0(1 - t)^3 + 3y_1t(1 - t)^2 + 3y_2t^2(1 - t) + y_3t^3$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$. Observe que cuando $t = 0$, se tiene $(x, y) = (x_0, y_0)$ y cuando $t = 1$ se tiene $(x, y) = (x_3, y_3)$, así que la curva empieza en P_0 y termina en P_3.

1. Grafique la curva de Bézier con puntos de control $P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ y $P_3(40, 5)$ en seguida, en la misma pantalla, grafique segmentos de recta P_0P_1, P_1P_2 y P_2P_3. (El ejercicio 31 en la sección 10.1 muestra cómo hacer esto). Observe que los puntos de control medios P_1 y P_2 no están sobre la curva; ésta empieza en P_0, se dirige hacia P_1 y P_2 sin alcanzarlos y termina en P_3.

2. De la gráfica del problema 1 se ve que la tangente en P_0 pasa por P_1 y la tangente en P_3 pasa por P_2. Demuéstrelo.

3. Intente producir una curva de Bézier con un bucle cambiando el segundo punto de control en el problema 1.

4. Algunas impresoras láser usan las curvas de Bézier para representar letras y otros símbolos. Experimente con puntos de control hasta que encuentre una curva de Bézier que dé una representación razonable de la letra C.

5. Formas más complicadas se pueden representar al juntar dos o más curvas de Bézier. Suponga que la primera curva de Bézier tiene puntos de control P_0, P_1, P_2, P_3 y la segunda tiene puntos de control P_3, P_4, P_5, P_6. Si se desea unir estos dos trozos de manera uniforme, en tal caso las tangentes en P_3 deben corresponder y, por lo tanto, los puntos P_2, P_3 y P_4 tienen que estar en esta línea tangente común. Con este principio, determine los puntos de control para un par de curvas de Bézier que representan la letra S.

10.3 COORDENADAS POLARES

Un sistema coordenado representa un punto en el plano mediante un par ordenado de números llamados coordenadas. Por lo general se usan coordenadas cartesianas, que son las distancias dirigidas desde dos ejes perpendiculares. Aquí se describe un sistema de coordenadas introducido por Newton, llamado **sistema coordenado polar**, que es más conveniente para muchos propósitos.

Se elige un punto en el plano que se llama **polo** (u origen) y se identifica con O. Luego se dibuja un rayo (semirrecta) que empieza en O llamado **eje polar**. Este eje se traza por lo común horizontalmente a la derecha, y corresponde al eje x positivo en coordenadas cartesianas.

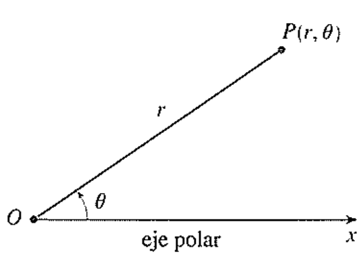


FIGURA 1

Si P es cualquier otro punto en el plano, sea r la distancia de O a P y sea θ el ángulo (medido por lo regular en radianes) entre el eje polar y la recta OP como en la figura 1 por lo tanto el punto P se representa mediante otro par ordenado (r, θ) y r, θ se llaman **coordenadas polares** de P. Se usa la convención de que un ángulo es positivo si se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj desde el eje polar y negativo si se mide en el sentido de las manecillas del reloj. Si $P = O$, en tal caso $r = 0$ y se está de acuerdo en que $(0, \theta)$ representa el polo para cualquier valor de θ.

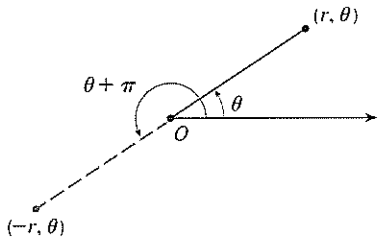


FIGURA 2

Se extiende el significado de las coordenadas polares (r, θ) al caso en que r es negativa estando de acuerdo en que, como en la figura 2, los puntos $(-r, \theta)$ y (r, θ) están en la misma línea que pasa por O y a la misma distancia $|r|$ de O, pero en lados opuestos de O. Si $r > 0$, el punto (r, θ) está en el mismo cuadrante que θ; si $r < 0$, está en el cuadrante del lado opuesto del polo. Observe que $(-r, \theta)$ representa el mismo punto que $(r, \theta + \pi)$.

EJEMPLO 1 Grafique los puntos cuyas coordenadas polares son:
(a) $(1, 5\pi/4)$ (b) $(2, 3\pi)$ (c) $(2, -2\pi/3)$ (d) $(-3, 3\pi/4)$

SOLUCIÓN Los puntos se grafican en la figura 3. En el inciso (d) el punto $(-3, 3\pi/4)$ se localiza a tres unidades del polo en el cuarto cuadrante porque el ángulo $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante y $r = -3$ es negativa.

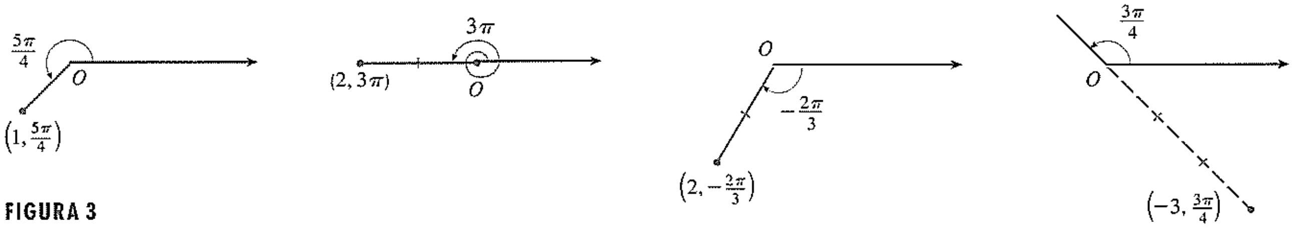


FIGURA 3

□

En el sistema coordenado cartesiano, todo punto tiene sólo una representación, pero en el sistema de coordenadas polares cada punto tiene muchas representaciones. Por ejemplo, el punto $(1, 5\pi/4)$ del ejemplo 1(a) se podría escribir como $(1, -3\pi/4)$ o $(1, 13\pi/4)$ o $(-1, \pi/4)$. (Véase fig. 4.)

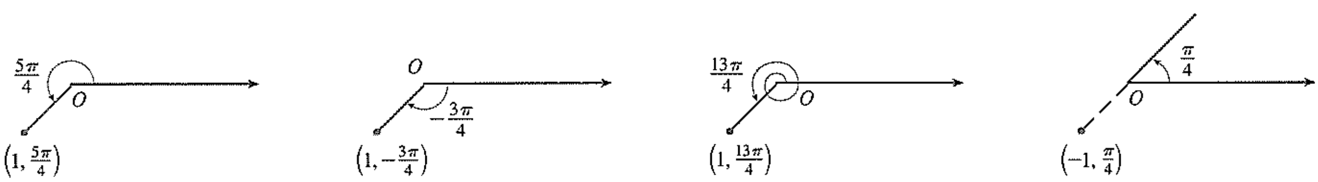


FIGURA 4

De hecho, puesto que una rotación completa en sentido contrario a las manecillas del reloj está dada por un ángulo 2π, el punto representado por coordenadas polares (r, θ) se representa también por

$$(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero.

La conexión entre coordenadas polares y cartesianas se puede ver en la figura 5, en la que el polo corresponde al origen y el eje polar coincide con el eje x positivo. Si el punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) y coordenadas polares (r, θ), después, de la figura, se tiene

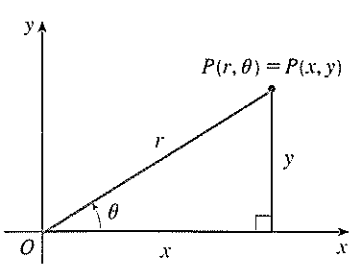


FIGURA 5

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r}$$

y, de este modo,

$$\boxed{1} \qquad \boxed{x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta}$$

Aunque las ecuaciones 1 se dedujeron de la figura 5, que ilustra el caso donde $r > 0$ y $0 < \theta < \pi/2$, estas ecuaciones son válidas para todos los valores de r y θ. (Véase la definición general de sen θ y cos θ en el apéndice D.)

Las ecuaciones 1 permiten hallar las coordenadas cartesianas de un punto cuando se conocen las coordenadas polares. Para determinar r y θ cuando se conocen x y y, se usan las ecuaciones

2 $$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}}$$

que se pueden deducir de las ecuaciones 1, o simplemente leer de la figura 5.

EJEMPLO 2 Convierta el punto $(2, \pi/3)$ de coordenadas polares a cartesianas.

SOLUCIÓN Puesto que $r = 2$ y $\theta = \pi/3$, las ecuaciones 1 dan

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, el punto es $(1, \sqrt{3})$ en coordenadas cartesianas. □

EJEMPLO 3 Represente el punto con coordenadas cartesianas $(1, -1)$ en términos de coordenadas polares.

SOLUCIÓN Si se elige r como positiva, en tal caso las ecuaciones 2 dan

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1$$

Puesto que el punto $(1, -1)$ se localiza en el cuarto cuadrante, se puede elegir $\theta = -\pi/4$ o $\theta = 7\pi/4$. Así, una respuesta posible es $(\sqrt{2}, -\pi/4)$; otra es $(\sqrt{2}, 7\pi/4)$. □

NOTA Las ecuaciones 2 no determinan de manera única a θ cuando se dan x y y porque cuando se incrementa θ en el intervalo $0 \leqslant \theta < 2\pi$, cada valor de $\tan\theta$ ocurre dos veces. Por lo tanto, al convertir de coordenadas cartesianas a polares, no es suficiente hallar r y θ que satisfacen las ecuaciones 2. Como en el ejemplo 3, se debe elegir θ de modo que el punto (r, θ) está en el cuadrante correcto.

CURVAS POLARES

La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$, o de manera más general $F(r, \theta) = 0$, consta de los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

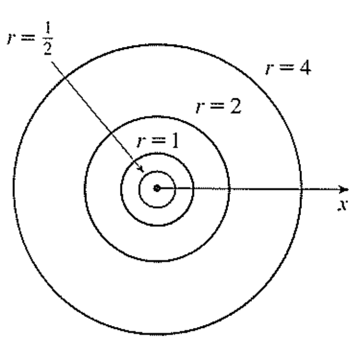


FIGURA 6

EJEMPLO 4 ¿Qué curva representa la ecuación polar $r = 2$?

SOLUCIÓN La curva consta de todos los puntos (r, θ) con $r = 2$. Puesto que r representa la distancia del punto al polo, la curva $r = 2$ representa el círculo con centro O y radio 2. En general, la ecuación $r = a$ representa un círculo con centro O y radio $|a|$. (Véase fig. 6.) □

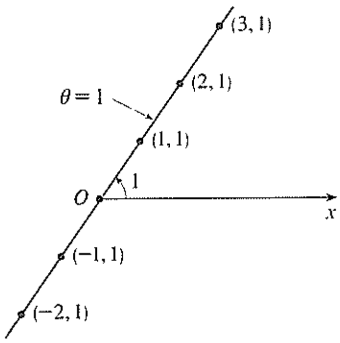


FIGURA 7

EJEMPLO 5 Bosqueje la curva polar $\theta = 1$.

SOLUCIÓN Esta curva consta de los puntos (r, θ) tal que el ángulo polar θ es 1 radián. Es la recta que pasa por O y forma un ángulo de 1 radián con el eje polar (véase figura 7). Observe que los puntos $(r, 1)$ sobre la línea con $r > 0$ están en el primer cuadrante, mientras que aquellos con $r < 0$ están en el tercer cuadrante. □

EJEMPLO 6

(a) Trace la curva con la ecuación polar $r = 2\cos\theta$.

(b) Encuentre una ecuación cartesiana para esta curva.

SOLUCIÓN

(a) En la figura 8 se encuentran los valores de r para algunos valores convenientes de θ y se grafican los puntos correspondientes (r, θ). Después se unen estos puntos para bosquejar la curva, que parece un círculo. Se han usado sólo valores de θ entre 0 y π, puesto que si se permite que θ se incremente más allá de π, se obtienen de nuevo los mismos puntos.

θ	$r = 2\cos\theta$
0	2
$\pi/6$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/3$	1
$\pi/2$	0
$2\pi/3$	-1
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$
π	-2

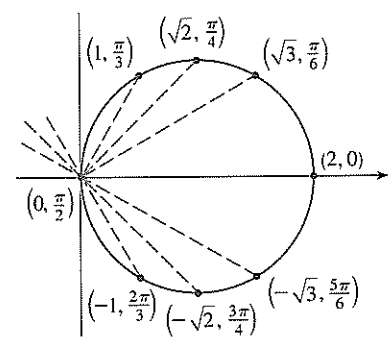


FIGURA 8
Tabla de valores y gráfica de $r = 2\cos\theta$

(b) Para convertir la ecuación en una ecuación cartesiana se usan las ecuaciones 1 y 2. De $x = r\cos\theta$ se tiene $\cos\theta = x/r$, de modo que la ecuación $r = 2\cos\theta$ se convierte en $r = 2x/r$, que da

$$2x = r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

Al completar el cuadrado, se obtiene

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

que es una ecuación de un círculo con centro $(1, 0)$ y radio 1. □

▨ En la figura 9 se muestra una ilustración geométrica de que el círculo del ejemplo 6 tiene la ecuación $r = 2\cos\theta$. El ángulo OPQ es un ángulo recto ¿por qué?, de esa manera, $r/2 = \cos\theta$.

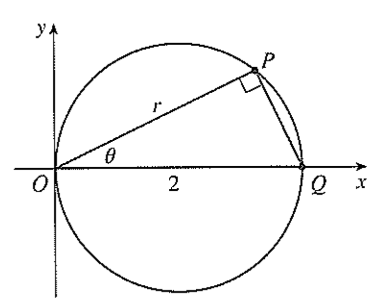


FIGURA 9

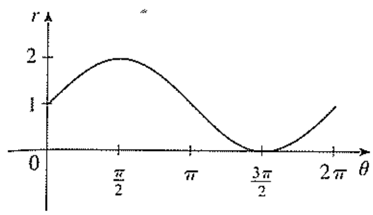


FIGURA 10
$r = 1 + \text{sen}\,\theta$ en coordenadas cartesianas, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

EJEMPLO 7 Bosqueje la curva $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

SOLUCIÓN En lugar de graficar puntos como en el ejemplo 6, se bosqueja primero la gráfica de $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ en coordenadas *cartesianas* en la figura 10, desplazando la curva seno hacia arriba una unidad. Esto permite leer de un vistazo los valores de r que corresponden a valores crecientes de θ. Por ejemplo, se ve que cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/2$, r (la distancia desde O) se incrementa de 1 a 2, de modo que se bosqueja la parte correspondiente de la curva polar de la figura 11(a). Cuando θ se incrementa de $\pi/2$ a π, la figura 10 muestra que r disminuye de 2 a 1, así que se bosqueja la parte siguiente de la curva como en la figura 11(b). Cuando θ se incrementa de π a $3\pi/2$, r disminuye de 1 a 0, como se muestra en el inciso (c). Por último, cuando θ se incrementa de $3\pi/2$ a 2π, r se incrementa de 0 a 1 como se muestra en el inciso (d). Si se permite que θ se incremente por encima de 2π o disminuya más allá de 0, simplemente se volvería a trazar la trayectoria. Si se juntan las partes de la curva de la figura 11(a)–(d), se bosqueja la curva completa del inciso (e). Se llama **cardioide** porque tiene forma de corazón.

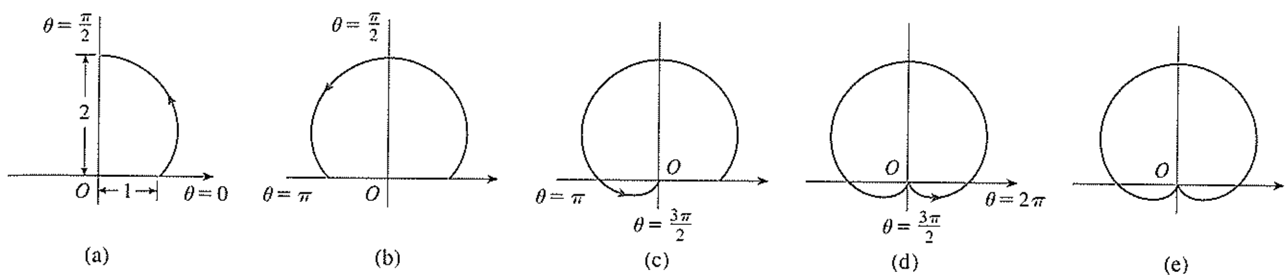


FIGURA 11
Etapas para bosquejar la cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

□

EJEMPLO 8 Bosqueje la curva $r = \cos 2\theta$

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 7, primero se bosqueja $r = \cos 2\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, en coordenadas cartesianas en la figura 12. Cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/4$, se observa en la figura 12 que r disminuye de 1 a 0 y, de este modo, se dibuja la porción correspondiente de la curva polar de la figura 13 (indicada por ①). Cuando θ se incrementa de $\pi/4$ a $\pi/2$, r va de 0 a -1. Esto significa que la distancia desde O se incrementa de 0 a 1, pero en lugar de estar en el primer cuadrante esta porción de la curva polar (indicada por ②) se ubica en el lado opuesto del polo en el tercer cuadrante. El resto de la curva se traza en forma similar, con flechas y números que indican el orden en el cual se trazan las porciones. La curva resultante tiene cuatro bucles y se llama **rosa de cuatro hojas**.

TEC Module 10.3 ayuda a ver cómo se trazan las curvas polares mostrando animaciones similares a las figuras 10-13.

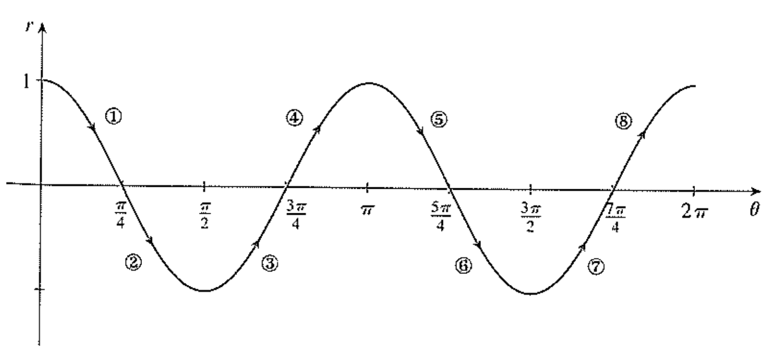


FIGURA 12
$r = \cos 2\theta$ en coordenadas cartesianas

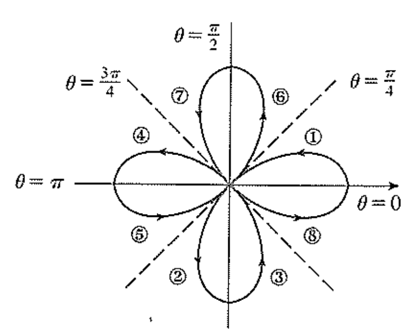


FIGURA 13
Rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$

□

SIMETRÍA

Cuando se bosquejan curvas polares, a veces es útil aprovechar la simetría. Las tres reglas siguientes se explican mediante la figura 14.

(a) Si una ecuación polar permanece sin cambio cuando θ se reemplaza por $-\theta$, la curva es simétrica respecto al eje polar.

(b) Si la ecuación no cambia cuando r se reemplaza por $-r$, o cuando θ se sustituye por $\theta + \pi$, la curva es simétrica respecto al polo. (Esto significa que la curva permanece sin cambio si se hace girar 180° respecto al origen).

(c) Si la ecuación sigue igual cuando se reemplaza θ por $\pi - \theta$, la curva es simétrica respecto a la línea vertical $\theta = \pi/2$.

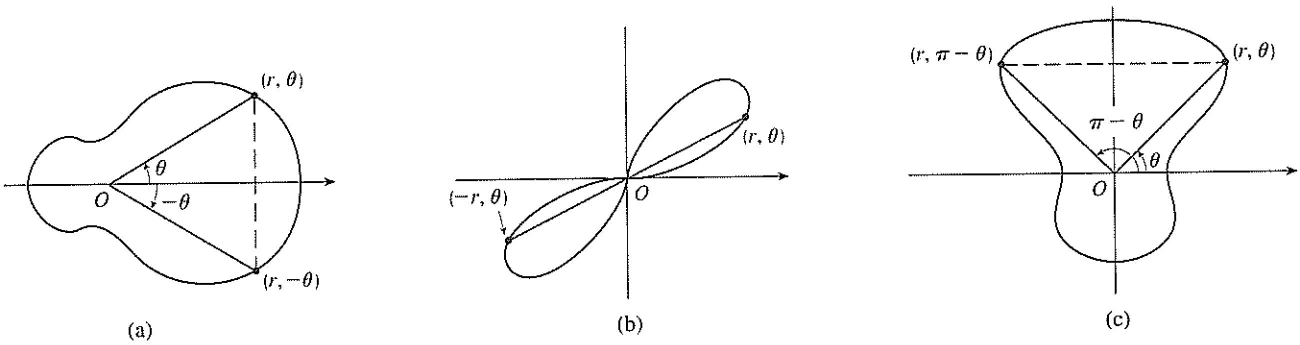


FIGURA 14

Las curvas bosquejadas en los ejemplos 6 y 8 son simétricas respecto al eje polar, puesto que $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Las curvas de los ejemplos 7 y 8 son simétricas respecto a $\theta = \pi/2$ porque $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta$. La rosa de cuatro hojas también es simétrica respecto al polo. Estas propiedades de simetría se podrían haber usado para bosquejar las curvas. En el ejemplo 6, sólo se requiere hacer la gráfica de los puntos para $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ y reflejar después respecto al eje polar para obtener el círculo completo.

TANGENTES A CURVAS POLARES

Para hallar una línea tangente a una curva polar $r = f(\theta)$ se considera a θ como un parámetro y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Después, con el método para hallar pendientes de curvas paramétricas (ecuación 10.2.2) y la regla del producto, se tiene

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}$$

Se localizan tangentes horizontales al determinar los puntos donde $dy/d\theta = 0$ (siempre que $dx/d\theta \neq 0$). Del mismo modo, se localizan tangentes verticales en los puntos donde $dx/d\theta = 0$ (siempre que $dy/d\theta \neq 0$).

Observe que si se están buscando líneas tangentes en el polo, en tal caso $r = 0$ y la ecuación 3 se simplifica a

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta \qquad \text{si} \qquad \frac{dr}{d\theta} \neq 0$$

En el ejemplo 8 se encontró que $r = \cos 2\theta = 0$ cuando $\theta = \pi/4$ o $3\pi/4$. Esto significa que las líneas $\theta = \pi/4$ y $\theta = 3\pi/4$ (o $y = x$ y $y = -x$) son líneas tangentes a $r = \cos 2\theta$ en el origen.

EJEMPLO 9

(a) Para la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ del ejemplo 7, encuentre la pendiente de la línea tangente cuando $\theta = \pi/3$.

(b) Encuentre los puntos sobre la cardioide donde la línea tangente es horizontal o vertical.

SOLUCIÓN Al utilizar la ecuación 3 con $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{\dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta + (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\cos\theta\,\cos\theta - (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta)}$$

(a) La pendiente de la tangente en el punto donde $\theta = \pi/3$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/3} = \frac{\cos(\pi/3)(1 + 2\operatorname{sen}(\pi/3))}{(1 + \operatorname{sen}(\pi/3))(1 - 2\operatorname{sen}(\pi/3))} = \frac{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}/2)(1 - \sqrt{3})}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + \sqrt{3}}{-1 - \sqrt{3}} = -1$$

(b) Observe que

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - 2\operatorname{sen}\theta) = 0 \qquad \text{cuando } \theta = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

Debido a eso, hay tangentes horizontales en los puntos $(2, \pi/2)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$ y tangentes verticales en $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. Cuando $\theta = 3\pi/2$, tanto $dy/d\theta$ como $dx/d\theta$ son 0, así que se debe tener cuidado. Al usar la regla de l'Hospital, se tiene

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{dy}{dx} = \left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{1 + 2\operatorname{sen}\theta}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = -\frac{1}{3}\lim_{\theta\to(3\pi/2)^-}\frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \infty$$

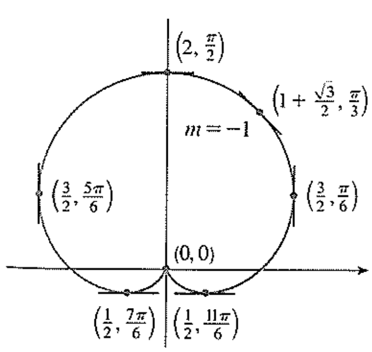


FIGURA 15
Rectas tangentes para $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

Por simetría,

$$\lim_{\theta\to(3\pi/2)^+}\frac{dy}{dx} = -\infty$$

En estos términos que hay una línea tangente vertical en el polo (véase fig. 15). □

NOTA En lugar de tener que recordar la ecuación 3, se podría usar el método empleado para deducirla. Como ilustración, en el ejemplo 9 se pudo haber escrito

$$x = r\cos\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta = \cos\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = (1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

Por lo tanto se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta} = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{-\operatorname{sen}\theta + \cos 2\theta}$$

que es equivalente a la expresión previa.

TRAZO DE GRÁFICAS DE CURVAS POLARES CON DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN

Aunque es útil poder bosquejar a mano curvas polares simples, se necesita usar una calculadora o computadora cuando se tiene ante sí una curva tan complicada como la que se muestra en la figura 16 y 17.

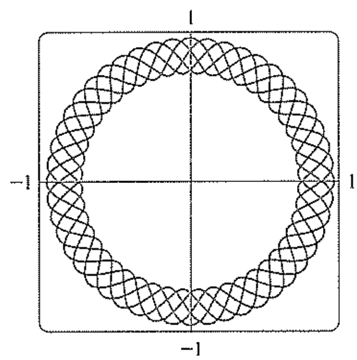


FIGURA 16
$r = \operatorname{sen}^2(2.4\theta) + \cos^4(2.4\theta)$

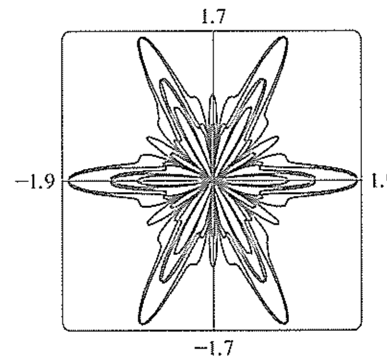


FIGURA 17
$r = \operatorname{sen}^2(1.2\theta) + \cos^3(6\theta)$

Algunos dispositivos de graficación tienen comandos que permiten graficar de manera directa curvas polares. Con otras máquinas se requiere convertir primero a ecuaciones paramétricas. En este caso se toma la ecuación polar $r = f(\theta)$ y se escriben sus ecuaciones paramétricas como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$$

Algunas máquinas requieren que el parámetro se llame t en vez de θ.

EJEMPLO 10 Grafique la curva $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$.

SOLUCIÓN Se supone que el dispositivo de graficación no tiene un comando de graficación polar integrado. En este caso se necesita trabajar con las ecuaciones paramétricas correspondientes, que son

$$x = r\cos\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(8\theta/5)\operatorname{sen}\theta$$

En cualquier caso, se necesita determinar el dominio para θ. Así, se hace la pregunta: ¿cuántas rotaciones completas se requieren hasta que la curva comience a repetirse por sí misma? Si la respuesta es n, en tal caso

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

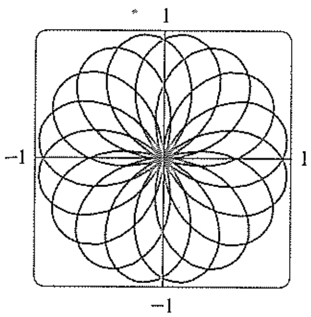


FIGURA 18
$r = \text{sen}(8\theta/5)$

y, por lo tanto, se requiere que $16n\pi/5$ sea un múltiplo par de π. Esto ocurrirá primero cuando $n = 5$. En consecuencia, se grafica la curva completa si se especifica que $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$. Al cambiar de θ a t, se tienen las ecuaciones

$$x = \text{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \text{sen}(8t/5)\,\text{sen}\, t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

y en la figura 18 se muestra la curva resultante. Observe que esta rosa tiene 16 bucles. □

EJEMPLO 11 Investigue la familia de curvas polares dada por $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$. ¿Cómo cambia la forma cuando cambia c? (Estas curvas se llaman **limaçons**, por la palabra francesa para caracol, debido a la forma de las curvas para ciertos valores de c.)

En el ejercicio 55, se pidió demostrar en forma analítica lo que ya se había descubierto a partir de las gráficas de la figura 19.

SOLUCIÓN En la figura 19 se muestran gráficas dibujadas por computadora para varios valores de c. Para $c > 1$ hay un bucle que se hace pequeño cuando disminuye c. Cuando $c = 1$ el bucle desaparece y la curva se convierte en la cardioide que se bosquejó en el ejemplo 7. Para c entre 1 y $\frac{1}{2}$ la cúspide de la cardioide desaparece y se convierte en un "hoyuelo". Cuando c disminuye de $\frac{1}{2}$ a 0, el limaçon tiene forma de óvalo. Este óvalo se vuelve más circular cuando $c \to 0$ y cuando $c = 0$ la curva es justo el círculo $r = 1$.

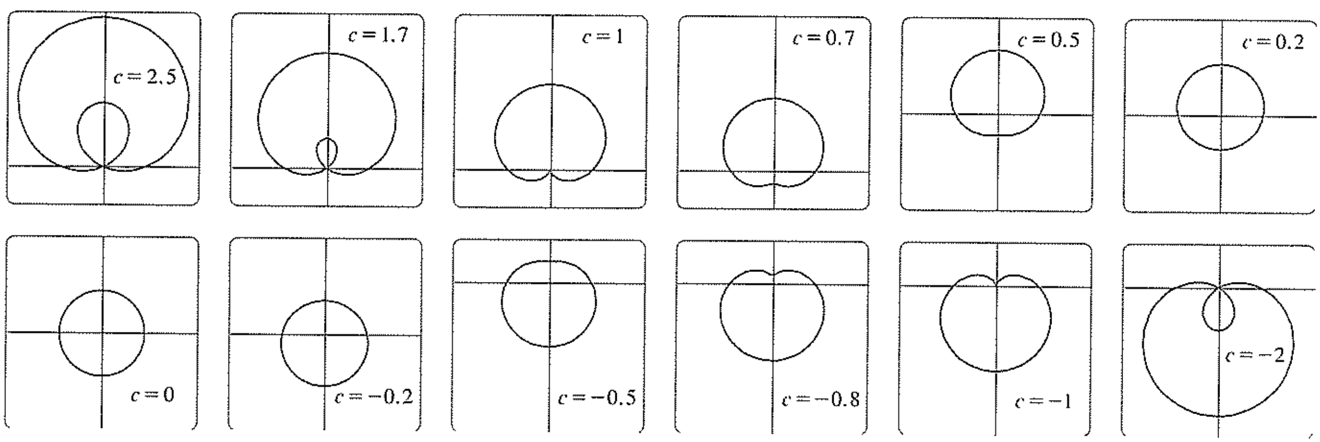


FIGURA 19
Miembros de la familia de caracoles $r = 1 + c\,\text{sen}\,\theta$

Las demás partes de la figura 19 muestran que c se vuelve negativa, las formas cambian en orden inverso. De hecho, estas curvas son reflexiones respecto al eje horizontal de las curvas correspondientes con c positiva. □

10.3 EJERCICIOS

1–2 Grafique el punto cuyas coordenadas polares se dan. Después encuentre otros dos pares de coordenadas polares de este punto, uno con $r > 0$ y uno con $r < 0$.

1. (a) $(2, \pi/3)$ (b) $(1, -3\pi/4)$ (c) $(-1, \pi/2)$

2. (a) $(1, 7\pi/4)$ (b) $(-3, \pi/6)$ (c) $(1, -1)$

3–4 Grafique el punto cuyas coordenadas polares se dan. Luego, determine las coordenadas cartesianas del punto.

3. (a) $(1, \pi)$ (b) $(2, -2\pi/3)$ (c) $(-2, 3\pi/4)$

4. (a) $\left(-\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$ (b) $(1, 5\pi/2)$ (c) $(2, -7\pi/6)$

5–6 Se dan las coordenadas cartesianas de un punto.

(i) Encuentre las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r > 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

(ii) Determine las coordenadas polares (r, θ) del punto, donde $r < 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

5. (a) $(2, -2)$ (b) $\left(-1, \sqrt{3}\right)$

6. (a) $\left(3\sqrt{3}, 3\right)$ (b) $(1, -2)$

7–12 Bosqueje la región en el plano que consta de los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones dadas.

7. $1 \leqslant r \leqslant 2$

8. $r \geqslant 0, \quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$

9. $0 \leqslant r < 4, \quad -\pi/2 \leqslant \theta < \pi/6$

10. $2 < r \leqslant 5, \quad 3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $r \geqslant 1, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

13. Encuentre la distancia entre los puntos con coordenadas polares $(2, \pi/3)$ y $(4, 2\pi/3)$.

14. Obtenga una fórmula para la distancia entre los puntos con coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2).

15–20 Identifique la curva mediante la determinación de una ecuación cartesiana para la curva..

15. $r = 2$ **16.** $r \cos\theta = 1$

17. $r = 3 \operatorname{sen}\theta$ **18.** $r = 2\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta$

19. $r = \csc\theta$ **20.** $r = \tan\theta \sec\theta$

21–26 Encuentre una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

21. $x = 3$ **22.** $x^2 + y^2 = 9$

23. $x = -y^2$ **24.** $x + y = 9$

25. $x^2 + y^2 = 2cx$ **26.** $xy = 4$

27–28 Para cada una de las curvas descritas, decida mediante qué ecuación, polar o cartesiana, se expresaría con más facilidad. Después escriba una ecuación para la curva.

27. (a) Una línea por el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje x positivo.
(b) Una línea vertical por el punto $(3, 3)$

28. (a) Un círculo con radio 5 y centro $(2, 3)$
(b) Un círculo centrado en el origen con radio 4

29–48 Bosqueje la curva con la ecuación polar dada.

29. $\theta = -\pi/6$ **30.** $r^2 - 3r + 2 = 0$

31. $r = \operatorname{sen}\theta$ **32.** $r = -3\cos\theta$

33. $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta), \quad \theta \geqslant 0$ **34.** $r = 1 - 3\cos\theta$

35. $r = \theta, \quad \theta \geqslant 0$ **36.** $r = \ln\theta, \quad \theta \geqslant 1$

37. $r = 4\operatorname{sen} 3\theta$ **38.** $r = \cos 5\theta$

39. $r = 2\cos 4\theta$ **40.** $r = 3\cos 6\theta$

41. $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$ **42.** $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$

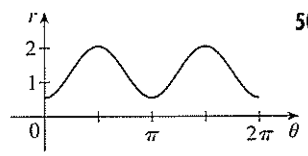
43. $r^2 = 9\operatorname{sen} 2\theta$ **44.** $r^2 = \cos 4\theta$

45. $r = 2\cos(3\theta/2)$ **46.** $r^2\theta = 1$

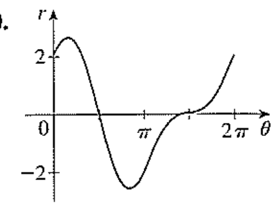
47. $r = 1 + 2\cos 2\theta$ **48.** $r = 1 + 2\cos(\theta/2)$

49–50 En la figura se muestra la gráfica de r como una función de θ en coordenadas cartesianas. Empléela para bosquejar la curva polar correspondiente.

49.



50.



51. Demuestre que la curva polar $r = 4 + 2\sec\theta$ (llamada **concoide**) tiene a la línea $x = 2$ como una asíntota vertical mostrando que $\lim_{r\to\pm\infty} x = 2$. Use este hecho para ayudar a bosquejar la concoide.

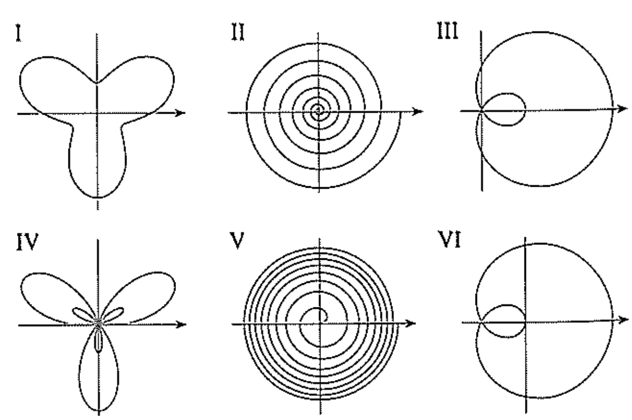
52. Demuestre que la curva $r = 2 - \csc\theta$ (también una concoide) tiene a la línea $y = -1$ como una asíntota horizontal mostrando que $\lim_{r\to\pm\infty} y = -1$. Use este hecho para ayudar a bosquejar la concoide.

53. Muestre que la curva $r = \operatorname{sen}\theta \tan\theta$ (llamada **cisoide de Diocles**) tiene la línea $x = 1$ como una asíntota vertical. Demuestre también que la curva yace por completo dentro de la tira vertical $0 \leqslant x < 1$. Use estos hechos para ayudar a bosquejar la cisoide.

54. Bosqueje la curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

55. (a) En el ejemplo 11 las gráficas hacen pensar que el caracol $r = 1 + c\operatorname{sen}\theta$ tiene un bucle interno cuando $|c| > 1$. Demuestre que esto es cierto y determine los valores de θ que corresponden al bucle interior.
(b) De la figura 19 se ve que el limaçon pierde su hoyuelo cuando $c = \frac{1}{2}$. Demuestre esto.

56. Compare las ecuaciones polares con las gráficas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No use un dispositivo de graficación.)
(a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$ (b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
(c) $r = \cos(\theta/3)$ (d) $r = 1 + 2\cos\theta$
(e) $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$ (f) $r = 1 + 2\operatorname{sen} 3\theta$



57–62 Encuentre la pendiente de la línea tangente a la curva polar dada en el punto especificado por el valor de θ.

57. $r = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/6$ **58.** $r = 2 - \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/3$

59. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$ **60.** $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

61. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$ **62.** $r = 1 + 2\theta \cos \theta, \quad \theta = \pi/3$

63–68 Determine los puntos sobre la curva dada donde la tangente es horizontal o vertical.

63. $r = 3 \cos \theta$ **64.** $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

65. $r = 1 + \cos \theta$ **66.** $r = e^{\theta}$

67. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$ **68.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

69. Muestre que la ecuación polar $r = a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta$, donde $ab \neq 0$, representa un círculo, y encuentre su centro y radio.

70. Demuestre que las curvas $r = a \operatorname{sen} \theta$ y $r = a \cos \theta$ se cortan en ángulos rectos.

71–76 Use un dispositivo de graficación para trazar la curva polar. Elija el intervalo de parámetro para asegurarse de que produce la curva completa.

71. $r = 1 + 2 \operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide de Freeth)

72. $r = \sqrt{1 - 0.8 \operatorname{sen}^2 \theta}$ (hipopede o grillete de caballo)

73. $r = e^{\operatorname{sen} \theta} - 2 \cos(4\theta)$ (curva de mariposa)

74. $r = \operatorname{sen}^2(4\theta) + \cos(4\theta)$

75. $r = 2 - 5 \operatorname{sen}(\theta/6)$

76. $r = \cos(\theta/2) + \cos(\theta/3)$

77. ¿Cómo se relacionan las gráficas de $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ con la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$? En general, ¿cómo se relaciona la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

78. Emplee una gráfica para estimar la coordenada y de los puntos superiores de la curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$. Después use el cálculo para hallar el valor exacto.

79. (a) Investigue la familia de curvas definida por las ecuaciones polares $r = \operatorname{sen} n\theta$, donde n es un entero positivo. ¿Cómo se relaciona el número de bucles con n?
(b) ¿Qué sucede si la ecuación del inciso (a) se sustituye por $r = |\operatorname{sen} n\theta|$?

80. Las ecuaciones $r = 1 + c \operatorname{sen} n\theta$, donde c es un número real y n es un entero positivo, definen una familia de curvas. ¿Cómo cambia la gráfica cuando aumenta n? ¿Cómo cambia cuando cambia c? Ilustre graficando suficientes miembros de la familia para apoyar sus conclusiones.

81. Una familia de curvas tiene ecuaciones polares

$$r = \frac{1 - a \cos \theta}{1 + a \cos \theta}$$

Investigue cómo cambia la gráfica cuando cambia el número a. En particular, se deben identificar los valores de transición de a para los cuales cambia la forma básica de la curva.

82. El astrónomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudió la familia de curvas con ecuaciones polares

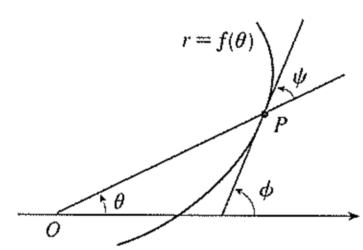
$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

donde a y c son números reales positivos. Estas curvas se llaman **óvalos de Cassini**, aun cuando son ovaladas para ciertos valores de a y c. (Cassini pensó que estas curvas podrían representar a las órbitas planetarias mejor que las elipses de Kepler). Investigue la variedad de formas que pueden tener estas curvas. En particular, ¿cómo se relacionan entre sí a y c cuando la curva se divide en dos partes?

83. Sea P cualquier punto (excepto el origen) en la curva $r = f(\theta)$. Si ψ es el ángulo entre la línea tangente en P y la línea radial OP, muestre que

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[*Sugerencia:* Observe que $\psi = \phi - \theta$ en la figura.]



84. (a) Use el ejercicio 83 para mostrar que el ángulo entre la línea tangente y la línea radial es $\psi = \pi/4$ en cada punto sobre la curva $r = e^{\theta}$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y las líneas tangentes en los puntos donde $\theta = 0$ y $\pi/2$.
(c) Demuestre que cualquier curva polar $r = f(\theta)$ con la propiedad de que el ángulo ψ entre la línea radial y la línea tangente es una constante debe ser de la forma $r = Ce^{k\theta}$, donde C y k son constantes.

10.4 ÁREAS Y LONGITUDES EN COORDENADAS POLARES

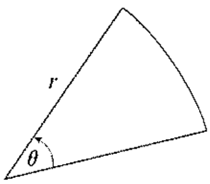


FIGURA 1

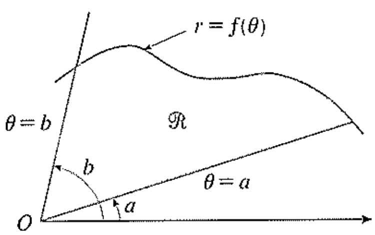


FIGURA 2

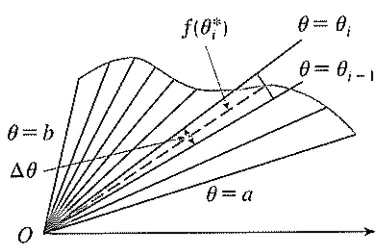


FIGURA 3

En esta sección se desarrolla la fórmula para el área de una región cuyo límite está dado por una ecuación polar. Se necesita usar la fórmula para el área de un sector de un círculo

1 $$A = \tfrac{1}{2}r^2\theta$$

donde, como en la figura 1, r es el radio y θ es la medida en radianes del ángulo central. La fórmula 1 se deduce del hecho de que el área de un sector es proporcional a su ángulo central: $A = (\theta/2\pi)\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta$. (Véase también el ejercicio 35 en la sección 7.3.)

Sea $\mathcal{R}$ la región, ilustrada en la figura 2, acotada por la curva polar $r = f(\theta)$ y por los rayos $\theta = a$ y $\theta = b$, donde f es una función continua positiva y donde $0 < b - a \leq 2\pi$. Se divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos con puntos finales $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ e igual amplitud $\Delta\theta$. Estos rayos $\theta = \theta_i$ dividen a $\mathcal{R}$ en regiones más pequeñas con ángulo central $\Delta\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$. Si se elige θ_i^* en el i-ésimo subintervalo $[\theta_{i-1}, \theta_i]$, en tal caso el área ΔA_i de la i-ésima región se aproxima mediante el área del sector de un círculo con ángulo central $\Delta\theta$ y radio $(f(\theta_i^*))$. (Véase fig. 3.)

Así, de la fórmula 1 se tiene

$$\Delta A_i \approx \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

y, de este modo, una aproximación al área total A de $\mathcal{R}$ es

2 $$A \approx \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta$$

Se ve de la figura 3 que la aproximación en (2) mejora cuando $n \to \infty$. Pero las sumas en (2) son sumas de Riemann para la función $g(\theta) = \frac{1}{2}[f(\theta)]^2$, por eso,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2\,\Delta\theta = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta$$

Parece plausible (y de hecho se puede demostrar) que la fórmula para el área A de la región polar $\mathcal{R}$ es

3 $$\boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2\,d\theta}$$

La fórmula 3 con frecuencia se expresa como

4 $$\boxed{A = \int_a^b \tfrac{1}{2}r^2\,d\theta}$$

con el conocimiento de que $r = f(\theta)$. Note la similitud entre las fórmulas 1 y 4.

Cuando se aplica la fórmula 3 o 4, es útil considerar que el área es barrida por un rayo rotatorio a través de O que empieza con ángulo a y termina con ángulo b.

V EJEMPLO 1 Determine el área encerrada por un bucle de la rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$.

SOLUCIÓN La curva $r = \cos 2\theta$ se bosquejó en el ejemplo 8 de la sección 10.3. Observe en la figura 4 que la región encerrada por el bucle derecho es barrida por un rayo que gira de $\theta = -\pi/4$ a $\theta = \pi/4$. Por lo tanto, la fórmula 4 da

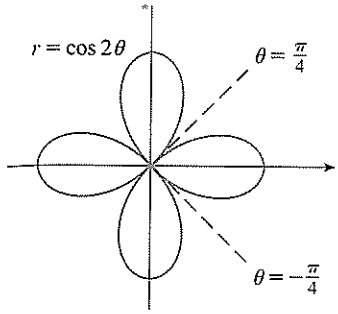


FIGURA 4

$$A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta = \tfrac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \, d\theta = \tfrac{1}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}$$ □

EJEMPLO 2 Determine el área de la región que yace dentro del círculo $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$.

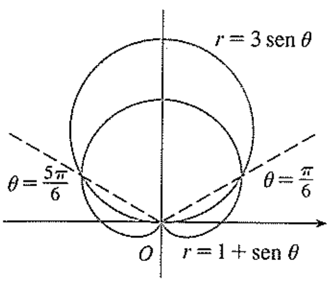


FIGURA 5

SOLUCIÓN La cardioide (véase el ejemplo 7 en la sección 10.3) y el círculo se bosquejan en la figura 5 y se sombrea la región deseada. Los valores de a y b en la fórmula 4 se determinan al hallar los puntos de intersección de las dos curvas. Se cortan cuando $3 \operatorname{sen} \theta = 1 + \operatorname{sen} \theta$, que da $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$, de modo que $\theta = \pi/6, 5\pi/6$. El área deseada se encuentra restando el área dentro de la cardioide entre $\theta = \pi/6$ y $\theta = 5\pi/6$ del área dentro del círculo de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Así,

$$A = \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 \operatorname{sen} \theta)^2 d\theta - \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 + \operatorname{sen} \theta)^2 d\theta$$

Puesto que la región es simétrica respecto al eje vertical $\theta = \pi/2$, se puede escribir

$$A = 2\left[\tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} 9 \operatorname{sen}^2\theta \, d\theta - \tfrac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 + 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2\theta) \, d\theta\right]$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (8 \operatorname{sen}^2\theta - 1 - 2 \operatorname{sen} \theta) \, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} (3 - 4 \cos 2\theta - 2 \operatorname{sen} \theta) \, d\theta \qquad [\text{porque } \operatorname{sen}^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)]$$

$$= 3\theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta + 2 \cos \theta \Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi$$ □

En el ejemplo 2 se ilustra el procedimiento para hallar el área de la región acotada por dos curvas polares. En general, sea $\mathcal{R}$ una región, como se ilustra en la figura 6, que está acotada por curvas con ecuaciones polares $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = a$ y $\theta = b$, donde $f(\theta) \geqslant g(\theta) \geqslant 0$ y $0 < b - a \leqslant 2\pi$. El área A de $\mathcal{R}$ se encuentra restando el área interna $r = g(\theta)$ del área dentro de $r = f(\theta)$, así que por medio de la fórmula 3 se tiene

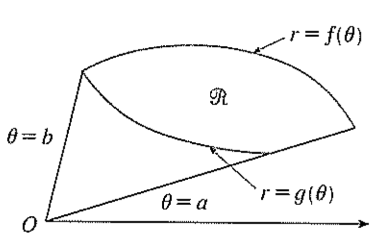


FIGURA 6

$$A = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta - \int_a^b \tfrac{1}{2}[g(\theta)]^2 d\theta = \tfrac{1}{2} \int_a^b ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2) \, d\theta$$

PRECAUCIÓN El hecho de que un solo punto tenga muchas representaciones en coordenadas polares, dificulta a veces hallar todos los puntos de intersección de dos curvas polares. Por ejemplo, es obvio de la figura 5 que el círculo y la cardioide tienen tres puntos de intersección; sin embargo, en el ejemplo 2 se resolvieron las ecuaciones $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y se hallaron sólo dos puntos $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$. El origen es también un punto de intersección, pero no se puede determinar resolviendo las ecuaciones de las curvas porque el origen no tiene representación simple en coordenadas polares que satisfaga ambas ecuaciones. Observe que, cuando se representa como $(0, 0)$ o $(0, \pi)$, el origen satisface a $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y, de tal manera, yace en el círculo; cuando se representa como $(0, 3\pi/2)$, satisface a $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y, por consiguiente, está en la cardioide. Considere dos puntos que se mueven a lo largo de las curvas cuando el valor de parámetro θ se incrementa de 0 a 2π. En una curva el origen se alcanza en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; en la otra curva se alcanza en

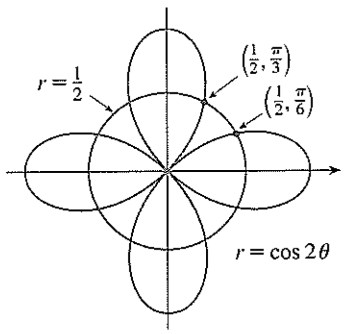


FIGURA 7

$\theta = 3\pi/2$. Los puntos no chocan en el origen porque llegan a él en diferentes tiempos, pero las curvas se cortan allí.

Así, para hallar *todos* los puntos de intersección de dos curvas polares, se recomienda dibujar las gráficas de ambas curvas. Es especialmente conveniente usar una calculadora o computadora como medio auxiliar para esta tarea.

EJEMPLO 3 Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = \cos 2\theta$ y $r = \frac{1}{2}$.

SOLUCIÓN Si se resuelven las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = \frac{1}{2}$, se obtiene $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, $2\theta = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3$. Así, los valores de θ entre 0 y 2π que satisfacen ambas ecuaciones son $\theta = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. Se han hallado cuatro puntos de intersección: $\left(\frac{1}{2}, \pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/6\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 7\pi/6\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 11\pi/6\right)$.

Sin embargo, se puede ver de la figura 7 que las curvas tienen otros cuatro puntos de intersección; a saber, $\left(\frac{1}{2}, \pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, 5\pi/3\right)$. Éstos se pueden hallar por medio de simetría o al notar que otra ecuación del círculo es $r = -\frac{1}{2}$ y resolviendo después las ecuaciones $r = \cos 2\theta$ y $r = -\frac{1}{2}$. □

LONGITUD DE ARCO

Para hallar la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, se considera a θ como un parámetro y se escriben las ecuaciones paramétricas de la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Al usar la regla del producto y derivar con respecto a θ, se obtiene

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\,\text{sen}\,\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta + r\cos\theta$$

así, con $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\cos^2\theta - 2r\frac{dr}{d\theta}\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + r^2\,\text{sen}^2\theta \\ &\quad + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\text{sen}^2\theta + 2r\frac{dr}{d\theta}\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta + r^2\cos^2\theta \\ &= \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\end{aligned}$$

Si se supone que f' es continua, se puede usar el teorema 10.2.6 para escribir la longitud de arco como

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

Por lo tanto, la longitud de una curva con ecuación polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$, es

5
$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$$

V EJEMPLO 4 Determine la longitud de la cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

SOLUCIÓN La cardioide se muestra en la figura 8. (Se bosqueja en el ejemplo 7 de la sección 10.3.) Su longitud total está dada por el intervalo de parámetro $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, así que la fórmula 5 da

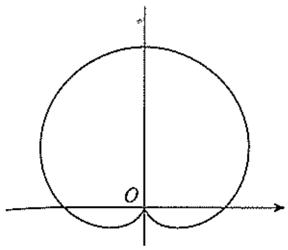


FIGURA 8
$r = 1 + \text{sen}\,\theta$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \text{sen}\,\theta)^2 + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\,\text{sen}\,\theta}\, d\theta$$

Se podría evaluar esta integral al multiplicar y dividir el integrando por $\sqrt{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$, o se podría usar un sistema algebraico computacional. En cualquier caso, se encuentra que la longitud de la cardioide es $L = 8$. □

10.4 EJERCICIOS

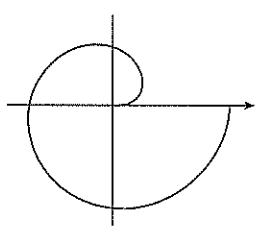
1–4 Encuentre el área de la región que está acotada por la curva dada y yace en el sector especificado.

1. $r = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ **2.** $r = e^{\theta/2}$, $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

3. $r = \text{sen}\,\theta$, $\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$ **4.** $r = \sqrt{\text{sen}\,\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

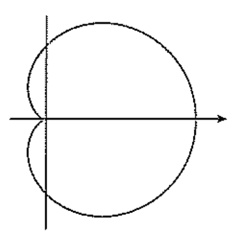
5–8 Encuentre el área de la región sombreada.

5.



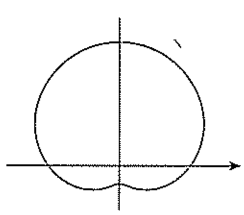
$r = \sqrt{\theta}$

6.



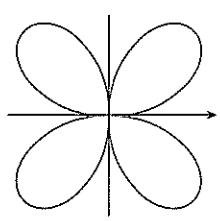
$r = 1 + \cos\theta$

7.



$r = 4 + 3\,\text{sen}\,\theta$

8.



$r = \text{sen}\,2\theta$

9–14 Bosqueje la curva y calcule el área que encierra ésta.

9. $r = 3\cos\theta$ **10.** $r = 3(1 + \cos\theta)$

11. $r^2 = 4\cos 2\theta$ **12.** $r = 2 - \text{sen}\,\theta$

13. $r = 2\cos 3\theta$ **14.** $r = 2 + \cos 2\theta$

15–16 Bosqueje la curva y calcule el área que encierra ésta.

15. $r = 1 + 2\,\text{sen}\,6\theta$ **16.** $r = 2\,\text{sen}\,\theta + 3\,\text{sen}\,9\theta$

17–21 Determine el área de la región encerrada por un bucle de la curva.

17. $r = \text{sen}\,2\theta$ **18.** $r = 4\,\text{sen}\,3\theta$

19. $r = 3\cos 5\theta$ **20.** $r = 2\,\text{sen}\,6\theta$

21. $r = 1 + 2\,\text{sen}\,\theta$ (bucle interno).

22. Calcule el área encerrada por el bucle de la **estrofoide** $r = 2\cos\theta - \sec\theta$.

23–28 Encuentre el área de la región que yace dentro de la primera curva y fuera de la segunda.

23. $r = 2\cos\theta$, $r = 1$ **24.** $r = 1 - \text{sen}\,\theta$, $r = 1$

25. $r^2 = 8\cos 2\theta$, $r = 2$ **26.** $r = 2 + \text{sen}\,\theta$, $r = 3\,\text{sen}\,\theta$

27. $r = 3\cos\theta$, $r = 1 + \cos\theta$

28. $r = 3\,\text{sen}\,\theta$, $r = 2 - \text{sen}\,\theta$

29–34 Determine el área de la región localizada dentro de ambas curvas.

29. $r = \sqrt{3}\cos\theta$, $r = \text{sen}\,\theta$

30. $r = 1 + \cos\theta$, $r = 1 - \cos\theta$

31. $r = \text{sen}\,2\theta$, $r = \cos 2\theta$

32. $r = 3 + 2\cos\theta$, $r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$

33. $r^2 = \text{sen}\,2\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$

34. $r = a\,\text{sen}\,\theta$, $r = b\cos\theta$, $a > 0$, $b > 0$

35. Obtenga el área que está dentro del bucle más grande y fuera del más pequeño del limaçon $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$.

36. Calcule el área entre un bucle grande y el bucle pequeño cerrado de la curva $r = 1 + 2\cos 3\theta$.

37–42 Determine los puntos de intersección de las siguientes curvas.

37. $r = 1 + \text{sen}\,\theta$, $r = 3\,\text{sen}\,\theta$

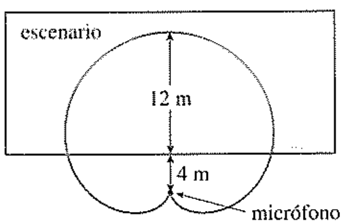
38. $r = 1 - \cos\theta$, $r = 1 + \text{sen}\,\theta$

39. $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$, $r = 1$ **40.** $r = \cos 3\theta$, $r = \text{sen}\,3\theta$

41. $r = \text{sen}\,\theta$, $r = \text{sen}\,2\theta$ **42.** $r^2 = \text{sen}\,2\theta$, $r^2 = \cos 2\theta$

43. Los puntos de intersección de la cardioide $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$ y el bucle en espiral $r = 2\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, no se pueden determinar de manera exacta. Use un dispositivo de graficación para hallar valores aproximados de θ en los que se cruzan. Después use estos valores para estimar el área que yace dentro de ambas curvas.

44. Cuando se graban programas en vivo, es frecuente que los ingenieros de sonido utilicen un micrófono con fonocaptor en forma de cardioide porque suprime ruido de la audiencia. Suponga que el micrófono se coloca a 4 m del frente del escenario (como en la figura) y la frontera de la región de captación óptima está dada por el cardioide $r = 8 + 8 \operatorname{sen}\theta$, donde r se mide en metros y el micrófono está en la pértiga. Los músicos desean conocer el área que tendrán en el escenario dentro del campo óptimo de captación del micrófono. Conteste esta pregunta.



45–48 Encuentre la longitud exacta de la curva polar.

45. $r = 3 \operatorname{sen}\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$

46. $r = e^{2\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

47. $r = \theta^2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

48. $r = \theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

49–52 Por medio de una calculadora, determine la longitud de la curva correcta hasta cuatro decimales.

49. $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$

50. $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$

51. $r = \operatorname{sen}(\theta/2)$

52. $r = 1 + \cos(\theta/3)$

53–54 Grafique la curva y determine su longitud.

53. $r = \cos^4(\theta/4)$

54. $r = \cos^2(\theta/2)$

55. (a) Use la fórmula 10.2.7 para mostrar que el área de la superficie generada al hacer girar la curva polar

$$r = f(\theta) \qquad a \leqslant \theta \leqslant b$$

(donde f' es continua y $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$) respecto al eje polar es

$$S = \int_a^b 2\pi r \operatorname{sen}\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

(b) Use la fórmula del inciso (a) para hallar el área de superficie generada al hacer girar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ respecto al eje polar.

56. (a) Encuentre una fórmula para el área de la superficie generada al hacer girar la curva polar $r = f(\theta)$, $a \leqslant \theta \leqslant b$ (donde f' es continua y $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$), respecto a la línea $\theta = \pi/2$.
(b) Calcule el área de superficie generada al hacer girar la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$ respecto a la línea $\theta = \pi/2$.

10.5 SECCIONES CÓNICAS

En esta sección se dan definiciones geométricas de parábolas, elipses e hipérbolas, y se deducen sus ecuaciones estándar. Se llaman **secciones cónicas**, o **cónicas**, porque resultan de cortar un cono con un plano, como se muestra en la figura 1.

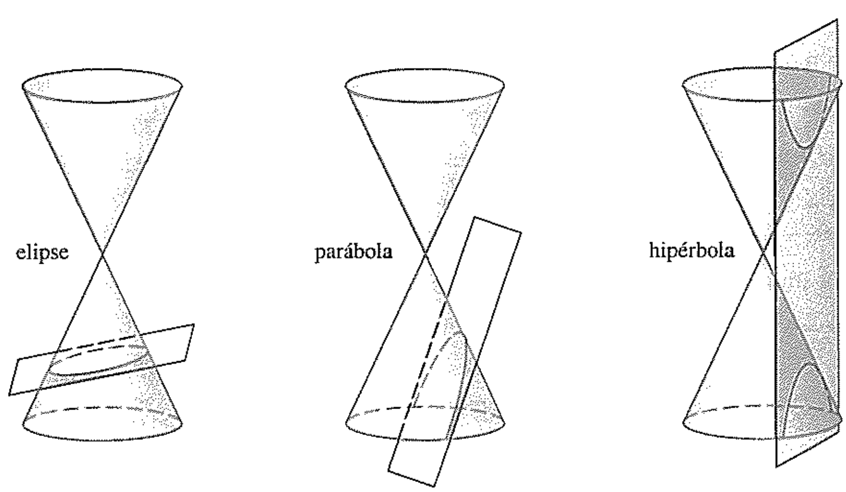


FIGURA 1
Cónicas

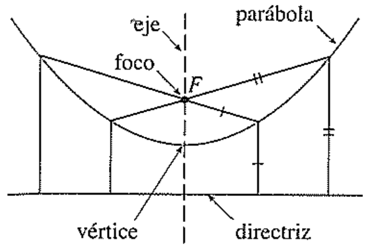


FIGURA 2

PARÁBOLAS

Una **parábola** es el conjunto de puntos en un plano que son equidistantes de un punto fijo F (llamado **foco**) y una línea fija (llamada **directriz**). Esta definición se ilustra mediante la figura 2. Observe que el punto a la mitad entre el foco y la directriz está sobre la parábola; se llama **vértice**. La línea a través del foco perpendicular a la directriz se llama **eje** de la parábola.

En el siglo XVI Galileo mostró que la trayectoria de un proyectil disparado al aire a un ángulo respecto al suelo, es una parábola. Desde entonces, las formas parabólicas se han usado en el diseño de faros de automóvil, telescopios reflectores y puentes suspendidos. (Véase en el problema 18 de la página 268 la propiedad de reflexión de parábolas que las hace tan útiles.)

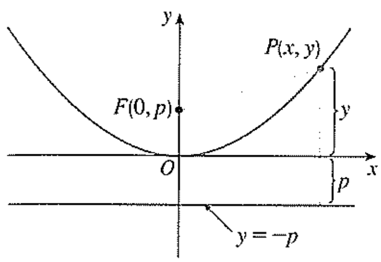


FIGURA 3

Se obtiene una ecuación particularmente simple para una parábola si se coloca su vértice en el origen y su directriz paralela al eje x como en la figura 3. Si el foco está en el punto $(0, p)$, en tal caso la directriz tiene la ecuación $y = -p$. Si $P(x, y)$ es cualquier punto sobre la parábola, por lo tanto la distancia de P al foco es

$$|PF| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

y la distancia de P a la directriz es $|y + p|$. (En la figura 3 se ilustra el caso donde $p > 0$.) La propiedad definitoria de una parábola es que estas distancias son iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Se obtiene una ecuación equivalente al elevar al cuadrado y simplificar:

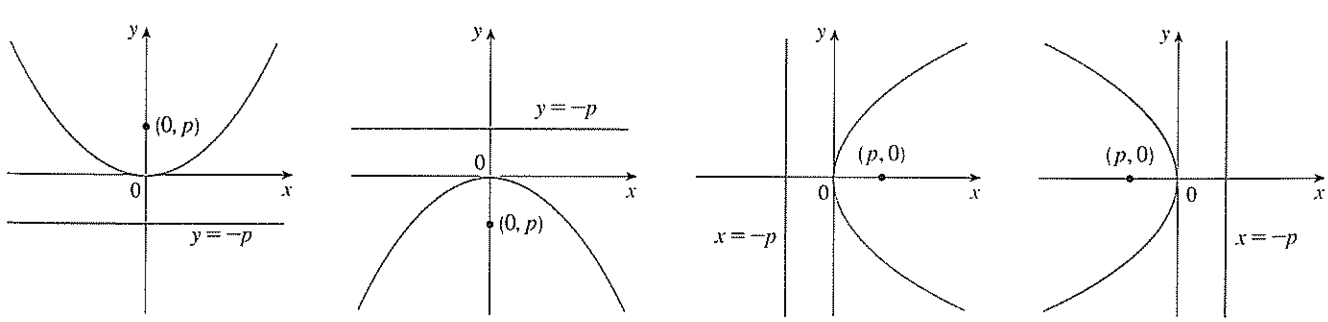
$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

> **1** Una ecuación de la parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$ es
>
> $$x^2 = 4py$$

Si se escribe $a = 1/(4p)$, en seguida la ecuación estándar de una parábola (1) se convierte en $y = ax^2$. Abre hacia arriba si $p > 0$ y hacia abajo si $p < 0$ [véase fig. 4, incisos (a) y (b)]. La gráfica es simétrica con respecto al eje y porque (1) permanece sin cambio cuando se sustituye por $-x$.



(a) $x^2 = 4py$, $p > 0$ (b) $x^2 = 4py$, $p < 0$ (c) $y^2 = 4px$, $p > 0$ (d) $y^2 = 4px$, $p < 0$

FIGURA 4

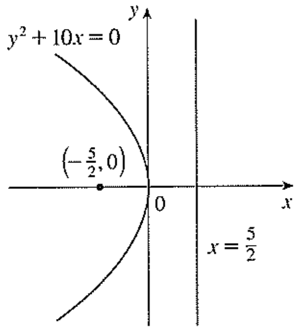


FIGURA 5

Si se intercambian x y y en (1), se obtiene

$$\boxed{2} \qquad \boxed{y^2 = 4px}$$

que es una ecuación de la parábola con foco en $(p, 0)$ y directriz $x = -p$. (Intercambiar x y y equivale a reflejar respecto a la diagonal $y = x$.) La parábola se abre hacia la derecha si $p > 0$ y hacia la izquierda si $p < 0$ [véase fig. 4, incisos (c) y (d)]. En ambos casos, la gráfica es simétrica con respecto al eje x, que es el eje de la parábola.

EJEMPLO 1 Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y^2 + 10x = 0$ y bosqueje la gráfica.

SOLUCIÓN Si se escribe la ecuación como $y^2 = -10x$ y se compara con la ecuación 2, se ve que $4p = -10$, de modo que $p = -\frac{5}{2}$. Así, el foco es $(p, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{5}{2}$. El bosquejo se muestra en la figura 5. □

ELIPSES

Una **elipse** es el conjunto de puntos en un plano y la suma de sus distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante (véase fig. 6). Estos dos puntos fijos se llaman **focos** (plural de **lugar geométrico**). Una de las leyes de Kepler es que las órbitas de los planetas en el sistema solar son elipses con el Sol en un foco.

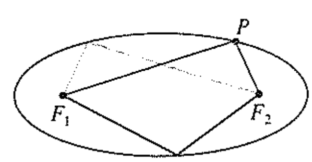


FIGURA 6

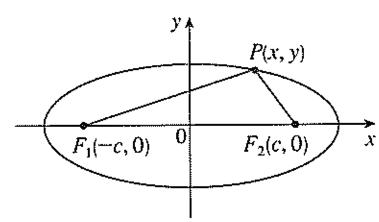


FIGURA 7

A fin de obtener la ecuación más simple para una elipse, se colocan los focos en el eje x en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ como en la figura 7, de modo que el origen esté a la mitad entre los focos. Sea $2a > 0$ la suma de las distancias de un punto de la elipse a los focos, en este caso $p(x, y)$ es un punto de la elipse cuando

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

es decir, $$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o bien $$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados, se tiene

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

que se simplifica a $$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx$$

De nuevo se eleva al cuadrado:

$$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

que se transforma en $$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Del triángulo $F_1 F_2 P$ de la figura 7 se ve que $2c < 2a$, así que $c < a$, por lo tanto, $a^2 - c^2 > 0$. Por conveniencia, sea $b^2 = a^2 - c^2$. Después la ecuación de la elipse se convierte en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ o, si ambos lados se dividen entre a^2b^2,

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Puesto que $b^2 = a^2 - c^2 < a^2$, se deduce que $b < a$. Las intersecciones con el eje x se encuentran al establecer $y = 0$. En tal caso $x^2/a^2 = 1$, o bien $x^2 = a^2$, de modo que $x = \pm a$. Los puntos correspondientes $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ se llaman **vértices** de la elipse y el segmento de línea que une los vértices se llama **eje mayor.** Para hallar las intersecciones con el eje y se fija $x = 0$ y se obtiene $y^2 = b^2$, de modo que $y = \pm b$. La ecuación 3 no cambia si x se sustituye por $-x$ o y se reemplaza por $-y$, así que la elipse es simétrica respecto a ambos ejes. Observe que si los focos coinciden, por lo tanto $c = 0$ y, de este modo, $a = b$ y la elipse se convierte en un círculo con radio $r = a = b$.

Se resume el análisis como sigue (véase también fig. 8).

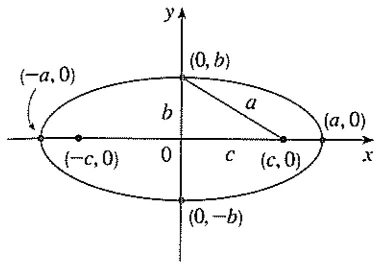


FIGURA 8
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geqslant b$

> $\boxed{4}$ La elipse
>
> $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$
>
> tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(\pm a, 0)$.

Si los focos de una elipse se localizan en el eje y en $(0, \pm c)$, entonces se puede hallar su ecuación al intercambiar x y y en (4). (Véase fig. 9.)

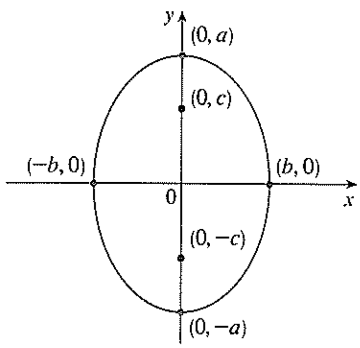


FIGURA 9
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a \geqslant b$

> $\boxed{5}$ La elipse
>
> $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a \geqslant b > 0$$
>
> tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(0, \pm a)$.

EJEMPLO 2 Bosqueje la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$ y localice los focos.

SOLUCIÓN Divida ambos lados de la ecuación entre 144:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La ecuación está ahora en la forma estándar para una elipse, así que se tiene $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, $a = 4$ y $b = 3$. Los cruces con el eje x son ± 4 y los cruces con el eje y son ± 3. También, $c^2 = a^2 - b^2 = 7$, de modo que $c = \sqrt{7}$ y los focos son $(\pm\sqrt{7}, 0)$. La gráfica se bosqueja en la figura 10. □

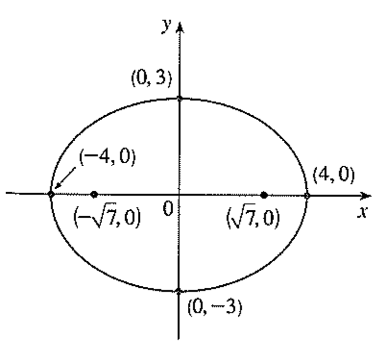


FIGURA 10
$9x^2 + 16y^2 = 144$

EJEMPLO 3 Obtenga una ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 2)$ y vértices $(0, \pm 3)$.

SOLUCIÓN Al usar la notación de (5), se tiene $c = 2$ y $a = 3$. En tal caso se obtiene $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$, así que una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Otra forma de escribir la ecuación es $9x^2 + 5y^2 = 45$. □

Al igual que las parábolas, las elipses tienen una propiedad de reflexión interesante que tiene consecuencias prácticas. Si se coloca una fuente de luz o sonido en un foco con secciones transversales elípticas, en tal caso toda la luz o sonido se refleja de la superficie al otro foco (véase el ejercicio 63). Este principio se usa en *litotripsia*, un tratamiento para cálculos renales. Un reflector con sección transversal elíptica se coloca de tal manera que el cálculo está en un foco. Ondas sonoras de alta intensidad generadas en el otro foco, se reflejan hacia el cálculo y lo destruyen sin dañar el tejido circundante. Se ahorra al paciente el traumatismo de la cirugía y se recupera en pocos días.

HIPÉRBOLAS

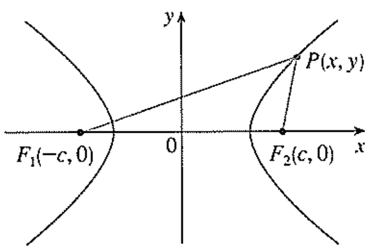


FIGURA 11
P está sobre la hipérbola cuando $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$

Una **hipérbola** es el conjunto de los puntos en un plano y la diferencia de sus distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 (los focos) es una constante. Esta definición se ilustra en la figura 11.

Las hipérbolas ocurren con frecuencia como gráficas de ecuaciones en química, física, biología y economía (ley de Boyle, ley de Ohm, curvas de oferta y demanda). Una aplicación particularmente importante de las hipérbolas se encuentra en los sistemas de navegación desarrollados en las guerras mundiales I y II (véase el ejercicio 51).

Observe que la definición de una hipérbola es similar a la de una elipse; el único cambio es que la suma de las distancias se convirtió en una diferencia de distancias. De hecho, la deducción de la ecuación de una hipérbola es también similar a la que se dio antes para una elipse. Se deja como ejercicio 52 demostrar que cuando los focos están sobre el eje x en $(\pm c, 0)$ y la diferencia de distancias es $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$, en seguida la ecuación de la hipérbola es

$$\boxed{6} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $c^2 = a^2 + b^2$. Observe que las intersecciones con el eje x son de nuevo $\pm a$ y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. Pero si se escribe $x = 0$ en la ecuación 6 se obtiene $y^2 = -b^2$, lo cual es imposible, así que no hay intersección con el eje y. La hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes.

Para analizar más la hipérbola, se examina la ecuación 6 y se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geqslant 1$$

Esto muestra que $x^2 \geqslant a^2$, de modo que $|x| = \sqrt{x^2} \geqslant a$. Por consiguiente, se tiene $x \geqslant a$ o $x \leqslant -a$. Esto significa que la hipérbola consta de dos partes, llamadas ramas.

Cuando se dibuja una hipérbola, es útil dibujar primero sus **asíntotas**, que son las líneas discontinuas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ mostradas en la figura 12. Ambas ramas de la hipérbola se aproximan a las asíntotas; es decir, se aproximan de manera arbitraria a las asíntotas. [Véase el ejercicio 69 en la sección 4.5, donde estas líneas se muestra como una asíntota inclinada.]

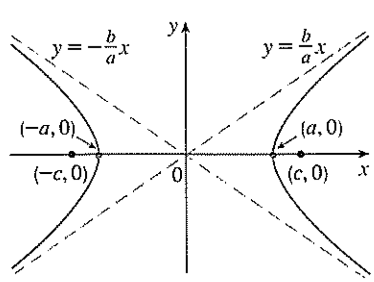


FIGURA 12
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

> $\boxed{7}$ La hipérbola
> $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
> tiene focos $(\pm c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(\pm a, 0)$ y asíntotas $y = \pm(b/a)x$.

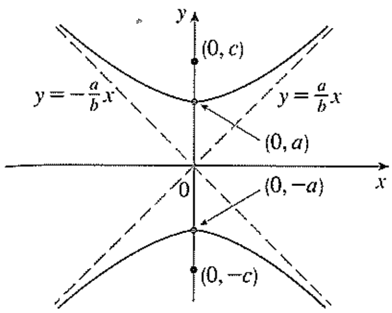


FIGURA 13
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

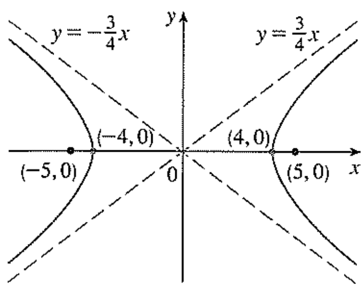


FIGURA 14
$9x^2-16y^2=144$

Si los focos de una hipérbola están en el eje y, en tal caso al invertir los roles de x y y se obtiene la siguiente información, que se ilustra en la figura 13.

> **8** La hipérbola
> $$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$
> tiene focos $(0, \pm c)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(0, \pm a)$ y asíntotas $y = \pm(a/b)x$.

EJEMPLO 4 Encuentre los focos y las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN Si se dividen ambos lados de la ecuación entre 144, se convierte en

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

que es la forma dada en (7) con $a = 4$ y $b = 3$. Puesto que $c^2 = 16 + 9 = 25$, los focos son $(\pm 5, 0)$. Las asíntotas son las líneas $y = \frac{3}{4}x$ y $y = -\frac{3}{4}x$. La gráfica se muestra en la figura 14. □

EJEMPLO 5 Encuentre los focos y la ecuación de la hipérbola con vértices $(0, \pm 1)$ y asíntota $y = 2x$.

SOLUCIÓN De la figura (8) y la información dada, se ve que $a = 1$ y $a/b = 2$. Así, $b = a/2 = \frac{1}{2}$ y $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$. Los focos son $\left(0, \pm\sqrt{5}/2\right)$ y la ecuación de la hipérbola es

$$y^2 - 4x^2 = 1$$ □

CÓNICAS DESPLAZADAS

Como se explica en el apéndice C, se desplazan las cónicas al tomar las ecuaciones estándar (1), (2), (4), (5), (7) y (8) y reemplazar x y y por $x - h$ y $y - k$.

EJEMPLO 6 Encuentre la ecuación de la elipse con focos $(2, -2)$, $(4, -2)$ y vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$.

SOLUCIÓN El eje principal es el segmento de línea que une los vértices $(1, -2)$, $(5, -2)$ y tiene longitud 4, de modo que $a = 2$. La distancia entre los focos es 2, en estos términos $c = 1$. Así, $b^2 = a^2 - c^2 = 3$. Puesto que el centro de la elipse es $(3, -2)$, se reemplazan x y y en (4) por $x - 3$ y $y + 2$ para obtener

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{3}=1$$

como la ecuación de la elipse. □

EJEMPLO 7 Bosqueje la cónica

$$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$$

y determine sus focos.

SOLUCIÓN Se completan los cuadrados como sigue:

$$4(y^2 - 2y) - 9(x^2 - 8x) = 176$$

$$4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 - 8x + 16) = 176 + 4 - 144$$

$$4(y-1)^2 - 9(x-4)^2 = 36$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$$

Ésta es la forma (8) excepto que x y y se reemplazan por $x - 4$ y $y - 1$. Así, $a^2 = 9$, $b^2 = 4$ y $c^2 = 13$. La hipérbola se desplaza cuatro unidades a la derecha y una unidad hacia arriba. Los focos son $(4, 1 + \sqrt{13})$ y $(4, 1 - \sqrt{13})$ y los vértices son $(4, 4)$ y $(4, -2)$. Las asíntotas son $y - 1 = \pm\frac{3}{2}(x - 4)$. La hipérbola se bosqueja en la figura 15. □

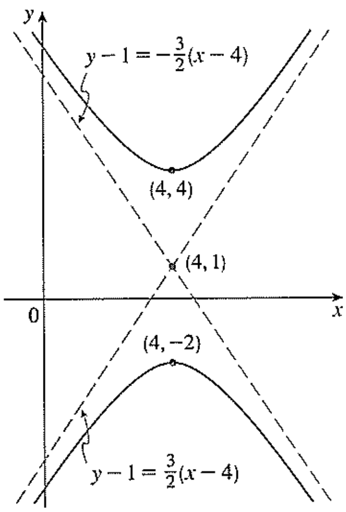


FIGURA 15
$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$

10.5 EJERCICIOS

1–8 Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola y bosqueje su gráfica.

1. $x = 2y^2$

2. $4y + x^2 = 0$

3. $4x^2 = -y$

4. $y^2 = 12x$

5. $(x + 2)^2 = 8(y - 3)$

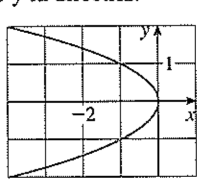
6. $x - 1 = (y + 5)^2$

7. $y^2 + 2y + 12x + 25 = 0$

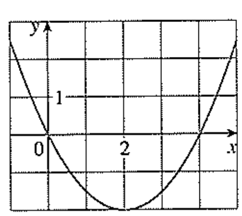
8. $y + 12x - 2x^2 = 16$

9–10 Obtenga una ecuación de la parábola. Después encuentre el foco y la directriz.

9.



10.



11–16 Determine los vértices y focos de la elipse y bosqueje su gráfica.

11. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

12. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

13. $4x^2 + y^2 = 16$

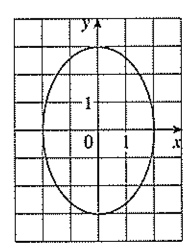
14. $4x^2 + 25y^2 = 25$

15. $9x^2 - 18x + 4y^2 = 27$

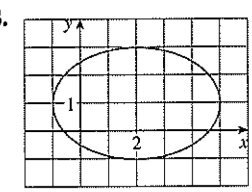
16. $x^2 + 3y^2 + 2x - 12y + 10 = 0$

17–18 Obtenga la ecuación de la elipse. Después encuentre sus focos.

17.



18.



19–24 Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y bosqueje su gráfica.

19. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$

20. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{36} = 1$

21. $y^2 - x^2 = 4$

22. $9x^2 - 4y^2 = 36$

23. $4x^2 - y^2 - 24x - 4y + 28 = 0$

24. $y^2 - 4x^2 - 2y + 16x = 31$

25–30 Identifique el tipo de sección cónica cuya ecuación se da y encuentre los vértices y focos.

25. $x^2 = y + 1$

26. $x^2 = y^2 + 1$

27. $x^2 = 4y - 2y^2$

28. $y^2 - 8y = 6x - 16$

29. $y^2 + 2y = 4x^2 + 3$

30. $4x^2 + 4x + y^2 = 0$

31–48 Encuentre una ecuación para la cónica que satisfaga las condiciones dadas.

31. Parábola, vértice $(0, 0)$, foco $(0, -2)$

32. Parábola, vértice $(1, 0)$, directriz $x = -5$

33. Parábola, foco $(-4, 0)$, directriz $x = 2$

34. Parábola, foco $(3, 6)$, vértice $(3, 2)$

35. Parábola, vértice $(2, 3)$, eje vertical, que pasa por $(1, 5)$

36. Parábola, eje horizontal, que pasa por $(-1, 0)$, $(1, -1)$, y $(3, 1)$

37. Elipse, focos $(\pm 2, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$

38. Elipse, focos $(0, \pm 5)$, vértices $(0, \pm 13)$

39. Elipse, focos $(0, 2)$, $(0, 6)$ vértices $(0, 0)$, $(0, 8)$

40. Elipse, focos $(0, -1)$, $(8, -1)$, vértice $(9, -1)$

41. Elipse, centro $(-1, 4)$, vértice $(-1, 0)$, lugar geométrico $(-1, 6)$

42. Elipse, lugares geométricos $(\pm 4, 0)$, que pasa por $(-4, 1.8)$

43. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, lugares geométricos $(\pm 5, 0)$

44. Hipérbola, vértices $(0, \pm 2)$, lugares geométricos $(0, \pm 5)$

45. Hipérbola, vértices $(-3, -4)$, $(-3, 6)$, lugares geométricos $(-3, -7)$, $(-3, 9)$

46. Hipérbola, vértices $(-1, 2)$, $(7, 2)$, lugares geométricos $(-2, 2)$, $(8, 2)$

47. Hipérbola, vértices $(\pm 3, 0)$, asíntotas $y = \pm 2x$

48. Hipérbola, lugares geométricos $(2, 0)$, $(2, 8)$, asíntotas $y = 3 + \frac{1}{2}x$ y $y = 5 - \frac{1}{2}x$

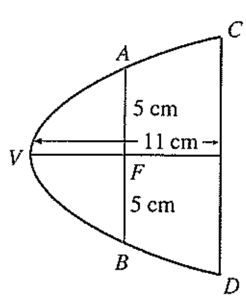
---

49. El punto en una órbita lunar próxima a la superficie de la Luna se llama *periluna,* y el punto más alejado de la superficie se llama *apoluna*. La nave espacial *Apolo 11* se colocó en una órbita lunar elíptica con altitud de periluna 110 km y altitud de apoluna 314 km (arriba de la Luna). Encuentre una ecuación para esta elipse si el radio de la Luna es de 1 728 km y su centro está en un foco.

50. Una sección transversal de un reflector parabólico se muestra en la figura. El bulbo se localiza en el foco y la abertura en el foco es 10 cm.

(a) Encuentre una ecuación de la parábola.

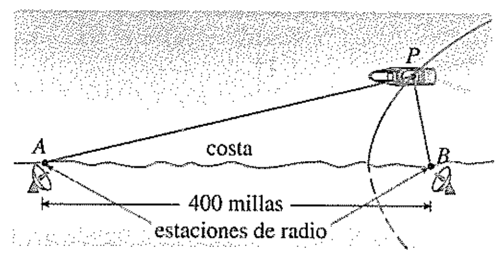
(b) Determine el diámetro de la abertura $|CD|$, a 11 cm del vértice.



51. En el sistema de navegación por radio LORAN (LOng RAnge Navigation), dos estaciones de radio localizadas en A y B, transmiten en forma simultánea señales a un barco o avión localizado en P. La computadora de a bordo convierte la diferencia de tiempo de recibir estas señales en una diferencia de distancia $|PA| - |PB|$, y esto, de acuerdo con la definición de una hipérbola, localiza al barco o avión en una rama de una hipérbola (véase la figura). Suponga que la estación B se localiza a 400 millas al este de la estación A sobre la costa. Un barco recibe la señal de B 1 200 microsegundos (μs) antes de recibir la señal de A.

(a) Si se supone que la señal de radio viaja a una rapidez de 980 pies/μs, encuentre la ecuación de la hipérbola sobre la que se localiza el barco.

(b) Si el barco se dirige al norte de B, ¿qué tan lejos de la costa está el barco?



52. Use la definición de hipérbola para deducir la ecuación 6 para una hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.

53. Muestre que la función definida por la rama superior de la hipérbola $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ es cóncava hacia arriba.

54. Encuentre una ecuación para la elipse con focos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ y eje principal de longitud 4.

55. Establezca el tipo de curva representada por la ecuación

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k - 16} = 1$$

en cada uno de los siguientes casos: (a) $k > 16$,
(b) $0 < k < 16$ y (c) $k < 0$.

(d) Muestre que las curvas de los incisos (a) y (b) tienen los mismos focos, sin importar cuál sea el valor de k.

56. (a) Muestre que la ecuación de la línea tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0) se puede escribir como

$$y_0 y = 2p(x + x_0)$$

(b) ¿Cuál es la intersección con el eje x de esta recta tangente? Use este hecho para dibujar la tangente.

57. Demuestre que las líneas tangentes a la parábola $x^2 = 4py$ trazadas desde cualquier punto en la directriz son perpendiculares.

58. Demuestre que si una elipse y una hipérbola tienen los mismos lugares geométricos, entonces sus líneas tangentes en cada punto de intersección son perpendiculares.

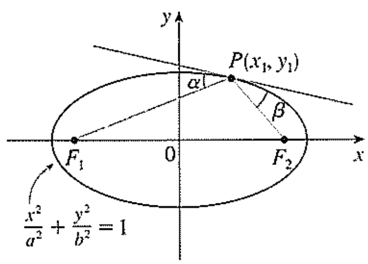
59. Use la regla Simpson con $n = 10$ para estimar la longitud de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

60. El planeta Plutón viaja en una órbita elíptica alrededor del Sol (en un foco). La longitud del eje mayor es 1.18×10^{10} km y la longitud del eje menor es 1.14×10^{10} km. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar la distancia que viaja el planeta durante una órbita completa alrededor del Sol.

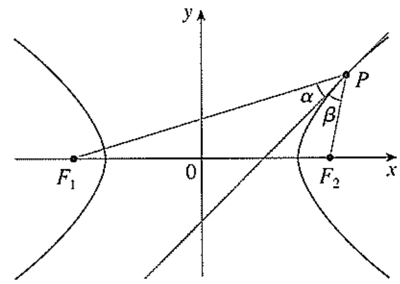
61. Encuentre el área de la región encerrada por la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ y la recta vertical que pasa por un foco.

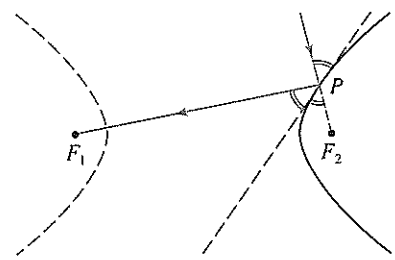
62. (a) Si una elipse gira alrededor de su eje mayor, encuentre el volumen del sólido resultante.
(b) Si gira alrededor de su eje menor, encuentre el volumen resultante.

63. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las líneas PF_1, PF_2 y la elipse como en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. Esto explica cómo funcionan las cúpulas susurrantes y la litotricia. El sonido que viene de un foco se refleja y pasa por el otro foco. [*Sugerencia:* Use la fórmula del problema 17 de la página 268 para mostrar que $\tan \alpha = \tan \beta$.]



64. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ con focos F_1 y F_2 y sean α y β los ángulos entre las líneas PF_1, PF_2 y la hipérbola como se ilustra en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (Ésta es la propiedad de reflexión de la hipérbola. Muestra que la luz dirigida a un foco F_2 de un espejo hiperbólico, se refleja hacia el otro foco F_1.)





10.6 SECCIONES CÓNICAS EN COORDENADAS POLARES

En la sección precedente se definió la parábola en términos de un foco y una directriz, pero se definió la elipse y la hipérbola en términos de dos focos. En esta sección se da un tratamiento más unificado de los tres tipos de secciones cónicas en términos de un foco y directriz. Además, si se coloca el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar simple. La cual es una descripción cómoda del movimiento de planetas, satélites y cometas.

1 TEOREMA Sea F un punto fijo (llamado **foco**) y l una línea fija (llamada **directriz**) en un plano. Sea e un número positivo fijo (conocido como la **excentricidad**). El conjunto de los puntos P en el plano tal que

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(La relación de la distancia desde F a la distancia desde l es la constante e) es una sección cónica. La cónica es

(a) una elipse si $e < 1$

(b) una parábola si $e = 1$

(c) una hipérbola si $e > 1$

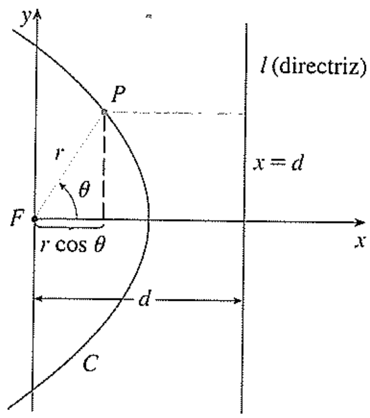


FIGURA 1

DEMOSTRACIÓN Observe que si la excentricidad es $e = 1$, en tal caso $|PF| = |Pl|$ y, de este modo, la condición dada simplemente se convierte en la definición de una parábola según se da en la sección 10.5.

Se colocará el foco F en el origen y la directriz paralela al eje y y d unidades a la derecha. Así, la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el punto P tiene coordenadas polares (r, θ), se ve de la figura 1 que

$$|PF| = r \qquad |Pl| = d - r\cos\theta$$

Así, la condición $|PF|/|Pl| = e$, o $|PF| = e|Pl|$, se convierte en

$$\boxed{2} \qquad r = e(d - r\cos\theta)$$

Si se elevan al cuadrado ambos lados de esta ecuación polar y se convierte a coordenadas rectangulares, se obtiene

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

o bien, $$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2$$

Después de completar el cuadrado, se tiene

$$\boxed{3} \qquad \left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Si $e < 1$, se reconoce la ecuación 3 como la ecuación de una elipse. De hecho, es de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$\boxed{4} \qquad h = -\frac{e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

En la sección 10.5 se encuentra que los focos de una elipse están a una distancia c del centro, donde

$$\boxed{5} \qquad c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Esto demuestra que $$c = \frac{e^2d}{1 - e^2} = -h$$

y confirma que el foco como se definió en el teorema 1 significa lo mismo que el foco definido en la sección 10.5. Se deduce también de las ecuaciones 4 y 5 que la excentricidad está dada por

$$e = \frac{c}{a}$$

Si $e > 1$, en tal caso $1 - e^2 < 0$ y se ve que la ecuación 3 representa una hipérbola. Justo como se hizo antes, se podría reescribir la ecuación 3 en la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

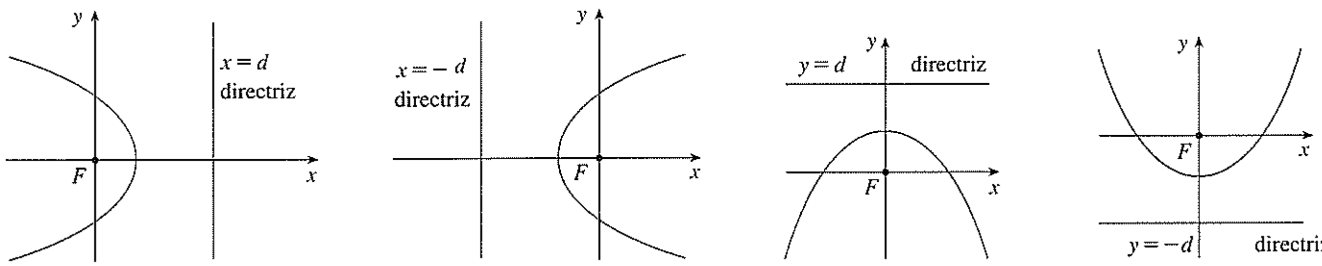
y se ve que

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{donde} \quad c^2 = a^2 + b^2$$ □

Al resolver r de la ecuación 2 para r, se ve que la ecuación polar de la cónica mostrada en la figura 1 se puede escribir como

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Si se elige que la directriz esté a la izquierda del foco como $x = -d$, o si se elige la directriz paralela al eje polar como $y = \pm d$, por lo tanto la ecuación polar de la cónica está dada por el siguiente teorema, que se ilustra mediante la figura 2. (Véase los ejercicios 21–23.)



(a) $r = \dfrac{ed}{1 + e\cos\theta}$ (b) $r = \dfrac{ed}{1 - e\cos\theta}$ (c) $r = \dfrac{ed}{1 + e\,\text{sen}\,\theta}$ (d) $r = \dfrac{ed}{1 - e\,\text{sen}\,\theta}$

FIGURA 2
Ecuaciones polares de cónicas

> **6 TEOREMA** Una ecuación polar de la forma
>
> $$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o bien} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta}$$
>
> representa una sección cónica con excentricidad e. La cónica es una elipse si $e < 1$, una parábola si $e = 1$, o una hipérbola si $e > 1$.

V EJEMPLO 1 Encuentre la ecuación polar para una parábola que tiene su foco en el origen y cuya directriz es la línea $y = -6$.

SOLUCIÓN Al usar el teorema 6 con $e = 1$ y $d = 6$, y emplear el inciso (d) de la figura 2, se ve que la ecuación de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \text{sen}\,\theta}$$ □

V EJEMPLO 2 Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

Encuentre la excentricidad, identifique la cónica, localice la directriz y bosqueje la cónica.

SOLUCIÓN Al dividir numerador y denominador entre 3, se escribe la ecuación como

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

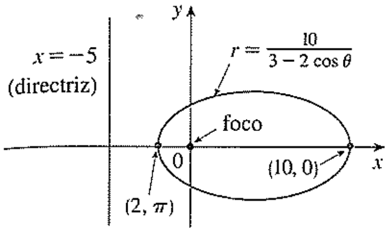


FIGURA 3

Del teorema 6 se ve que ésta representa una elipse con $e = \frac{2}{3}$. Puesto que $ed = \frac{10}{3}$, se tiene

$$d = \frac{\frac{10}{3}}{e} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}} = 5$$

de tal manera, la directriz tiene la ecuación cartesiana $x = -5$. Cuando $\theta = 0$, $r = 10$; cuando $\theta = \pi$, $r = 2$. Por eso, los vértices tienen coordenadas polares $(10, 0)$ y $(2, \pi)$. La elipse se bosqueja en la figura 3. □

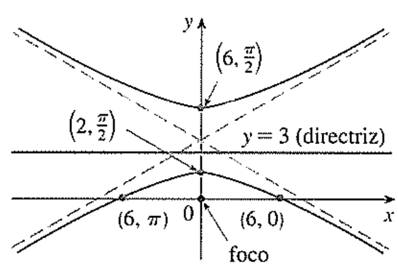
EJEMPLO 3 Bosqueje la cónica $r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en la forma

$$r = \frac{6}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$$

se ve que la excentricidad es $e = 2$ y, por lo tanto, la ecuación representa una hipérbola. Puesto que $ed = 6$, $d = 3$ y la directriz tiene ecuación $y = 3$. Los vértices ocurren cuando $\theta = \pi/2$ y $3\pi/2$, de modo que son $(2, \pi/2)$ y $(-6, 3\pi/2) = (6, \pi/2)$. También es útil graficar las intersecciones con el eje x. Éstas ocurren cuando $\theta = 0, \pi$; en ambos casos $r = 6$. Para más exactitud, se podrían dibujar las asíntotas. Note que $r \to \pm\infty$ cuando $1 + 2 \operatorname{sen} \theta \to 0^+$ o 0^- y $1 + 2 \operatorname{sen} \theta = 0$ cuando $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$. Así, las asíntotas son paralelas a los rayos $\theta = 7\pi/6$ y $\theta = 11\pi/6$. La hipérbola se bosqueja en la figura 4.

FIGURA 4
$r = \dfrac{12}{2 + 4 \operatorname{sen} \theta}$



□

Al hacer girar secciones cónicas, se encuentra mucho más conveniente usar ecuaciones polares que cartesianas. Se usa el hecho (véase el ejercicio 75 de la sección 10.3) de que la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en sentido contrario a las manecillas del reloj respecto al origen por un ángulo α.

EJEMPLO 4 Si la elipse del ejemplo 2 se hace girar por un ángulo $\pi/4$ respecto al origen, determine una ecuación polar y grafique la elipse resultante.

SOLUCIÓN Se obtiene la ecuación de la elipse rotada reemplazando θ con $\theta - \pi/4$ en la ecuación dada en el ejemplo 2. Así que la nueva ecuación es

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

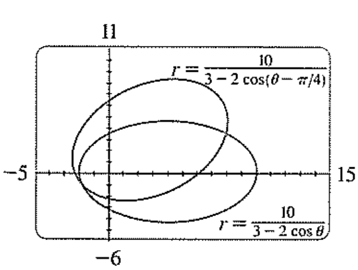


FIGURA 5

Se usa esta ecuación para hacer la gráfica de la elipse rotada en la figura 5. Observe que la elipse ha sido rotada respecto a su foco izquierdo. □

En la figura 6 se usa una computadora para bosquejar varias cónicas para demostrar el efecto de variar la excentricidad e. Observe que cuando e es cercana a 0 la elipse es casi circular, mientras que se vuelve más alargada cuando $e \to 1^-$. Cuando $e = 1$, por supuesto, la cónica es una parábola.

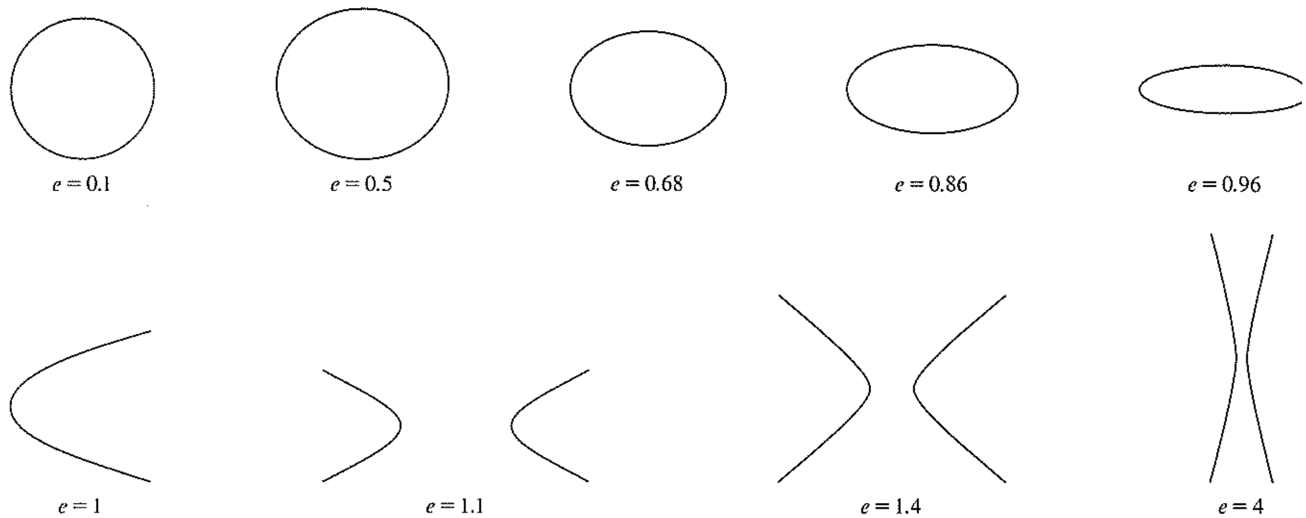


FIGURA 6

LEYES DE KEPLER

En 1609 el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler, con base en enormes cantidades de datos astronómicos, publicó las siguientes tres leyes de movimiento planetario.

LEYES DE KEPLER

1. Un planeta gira alrededor del Sol en órbita elíptica con el Sol en un foco.
2. La recta que une el Sol a un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Aun cuando Kepler formuló sus leyes en términos del movimiento de planetas alrededor del Sol, aplican igualmente bien al movimiento de lunas, cometas, satélites y otros cuerpos que giran sujetos a una sola fuerza gravitacional. En la sección 13.4 se demuestra cómo deducir las leyes de Kepler a partir de las leyes de Newton. Aquí se emplea la primera ley de Kepler, junto con la ecuación polar de una elipse, para calcular cantidades de interés en astronomía.

Para fines de cálculos astronómicos, es útil expresar la ecuación de una elipse en términos de su excentricidad e y su eje semimayor a. Puede escribir la distancia d del foco a la directriz en términos de a si usa (4):

$$a^2 = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2} \quad \Rightarrow \quad d^2 = \frac{a^2(1 - e^2)}{e^2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a(1 - e^2)}{e}$$

Entonces $ed = a(1 - e^2)$. Si la directriz es $x = d$, entonces la ecuación polar es

$$r = \frac{ed}{1 + \cos\theta} = r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

7 La ecuación polar de una elipse con foco en el origen, eje semimayor a, excentricidad e y directriz $x = d$ se puede escribir en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

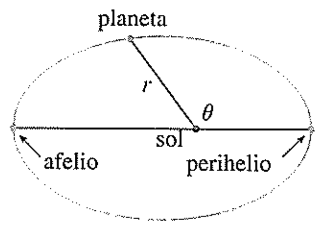


FIGURA 7

Las posiciones de un planeta que sean más cercanas al Sol, y más cercanas a éste, se denominan **perihelio** y **afelio**, respectivamente, y corresponden a los vértices de la elipse. (Veáse figura 7.) Las distancias del Sol al perihelio y afelio reciben el nombre de **distancia al perihelio** y **distancia al afelio**, respectivamente. En la figura 1 el Sol está en el foco F, de modo que en el perihelio se tiene $\theta = 0$ y, de la ecuación 7,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{1 + e} = a(1 - e)$$

Del mismo modo, en el afelio $\theta = \pi$ y $r = a(1 + e)$.

8 La distancia al perihelio de un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia al afelio es $a(1 + e)$.

EJEMPLO 5

(a) Encuentre una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol (en un foco), dado que la excentricidad es alrededor de 0.017 y la longitud del eje mayor es de unos 2.99×10^8 km.

(b) Encuentre la distancia de la Tierra al Sol en el perihelio y el afelio.

SOLUCIÓN

(a) La longitud del eje mayor es $2a = 2.99 \times 10^8$, por lo que $a = 1.495 \times 10^8$. No indican que $e = 0.017$ y por tanto, de la ecuación 7, una ecuación de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = \frac{(1.495 \times 10^8)[1 - (0.017)^2]}{1 + 0.017 \cos \theta}$$

o bien, aproximadamente,

$$r = \frac{1.49 \times 10^8}{1 + 0.017 \cos \theta}$$

(b) De (8), la distancia al perihelio de la Tierra al Sol es

$$a(1 - e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 - 0.017) \approx 1.47 \times 10^8 \text{ km}$$

y la distancia al afelio es

$$a(1 - e) \approx (1.495 \times 10^8)(1 - 0.017) \approx 1.52 \times 10^8 \text{ km} \qquad \square$$

10.6 EJERCICIOS

1–8 Escriba una ecuación polar de una cónica con el foco en el origen y los datos dados.

1. Hipérbola, excentricidad $\frac{7}{4}$, directriz $y = 6$

2. Parábola, directriz $x = 4$

3. Elipse, excentricidad $\frac{3}{4}$, directriz $x = -5$

4. Hipérbola, excentricidad 2, directriz $y = -2$

5. Parábola, vértice $(4, 3\pi/2)$

6. Elipse, excentricidad 0.8, vértice $(1, \pi/2)$

7. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $r = 4 \sec \theta$

8. Hipérbola, excentricidad 3, directriz $r = -6 \csc \theta$

9–16 (a) Encuentre la excentricidad, (b) identifique la cónica, (c) dé una ecuación de la directriz y (d) bosqueje la cónica.

9. $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

10. $r = \dfrac{12}{3 - 10 \cos \theta}$

11. $r = \dfrac{12}{4 - \operatorname{sen} \theta}$

12. $r = \dfrac{3}{2 + 2 \cos \theta}$

13. $r = \dfrac{9}{6 + 2 \cos \theta}$

14. $r = \dfrac{8}{4 + 5 \operatorname{sen} \theta}$

15. $r = \dfrac{3}{4 - 8 \cos \theta}$

16. $r = \dfrac{10}{5 - 6 \operatorname{sen} \theta}$

---

17. (a) Encuentre la excentricidad y la directriz de la cónica $r = 1/(1 - 3 \operatorname{sen} \theta)$ y grafique la cónica y su directriz.

(b) Si esta cónica se hace girar en sentido contrario a las manecillas del reloj respecto al origen por un ángulo $3\pi/4$, escriba la ecuación resultante y grafique su curva.

18. Grafique la cónica $r = 5/(2 + 2 \cos \theta)$ y su directriz. También grafique la cónica obtenida al girar esta curva alrededor del origen todo un ángulo $\pi/3$.

19. Grafique las cónicas $r = e/(1 - e \cos \theta)$ con $e = 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 en una pantalla común. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la curva?

20. (a) Grafique las cónicas $r = ed/(1 + e \operatorname{sen} \theta)$ para $e = 1$ y varios valores de d. ¿Cómo afecta el valor de d a la forma de la cónica?

(b) Grafique las cónicas $d = 1$ y varios valores de e. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la cónica?

21. Muestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $x = -d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

22. Muestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 + e \operatorname{sen} \theta}$$

23. Muestre que una cónica con foco en el origen, excentricidad e y directriz $y = -d$ tiene la ecuación polar

$$r = \frac{ed}{1 - e \operatorname{sen} \theta}$$

24. Muestre que las parábolas $r = c/(1 + \cos \theta)$ y $r = d/(1 - \cos \theta)$ se cortan en ángulos rectos.

25. (a) La órbita de Marte alrededor del Sol es una elipse con excentricidad 0.093 y eje semimayor de 2.28×10^8 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.

26. La órbita de Júpiter tiene excentricidad de 0.048 y la longitud del eje mayor es 1.56×10^9 km. Encuentre una ecuación polar para la órbita.

27. La órbita del cometa Halley, visto por última vez en 1986 y que debe volver en 2062, es una elipse con excentricidad 0.97 y un foco en el Sol. La longitud de su eje principal es 36.18 UA. [Una unidad astronómica (UA) es la distancia media entre la Tierra y el Sol, cerca de 93 millones de millas.] Encuentre una ecuación polar para la órbita del cometa Halley. ¿Cuál es la distancia máxima desde el cometa al Sol?

28. El cometa Hale-Bopp, descubierto en 1995, tiene una órbita elíptica con excentricidad 0.9951 y la longitud del eje mayor es 356.5 UA. Encuentre una ecuación polar para la órbita de este cometa. ¿Qué tan cerca del Sol llega?

29. El planeta Mercurio viaja en una órbita elíptica con excentricidad 0.206. Su distancia mínima del Sol es 4.6×10^7 km. Determinar su distancia máxima del Sol.

30. La distancia desde el planeta Plutón al Sol es de 4.43×10^9 km en el perihelio y 7.37×10^9 km en el afelio. Hallar la excentricidad de la órbita de Plutón.

31. Con los datos del ejercicio 29, calcule la distancia que recorre el planeta Mercurio durante una órbita completa alrededor del Sol. (Si su calculadora o sistema algebraico computacional evalúa integrales definidas, utilícelo. De lo contrario, use la regla de Simpson.)

10 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una curva paramétrica?
   (b) ¿Cómo bosqueja una curva paramétrica?
2. (a) ¿Cómo encuentra la pendiente de una tangente a una curva paramétrica?
   (b) ¿Cómo determina el área debajo de una curva paramétrica?
3. Escriba una expresión para cada una de las siguientes descripciones:
   (a) La longitud de una curva paramétrica
   (b) El área de la superficie obtenida al hacer girar una curva paramétrica respecto al eje x
4. (a) Use un diagrama para explicar el significado de las coordenadas polares (r, θ) de un punto.
   (b) Escriba ecuaciones que expresen las coordenadas cartesianas (x, y) de un punto en términos de las coordenadas polares.
   (c) ¿Qué ecuaciones usaría para obtener las coordenadas polares de un punto si conociera las coordenadas cartesianas?
5. (a) ¿Cómo determina la pendiente de una línea tangente a una curva polar?
   (b) ¿Cómo calcula el área de una región acotada por una curva polar?
   (c) ¿Cómo halla la longitud de una curva polar?
6. (a) Dé una definición geométrica de una parábola.
   (b) Escriba una ecuación de una parábola con foco $(0, p)$ y directriz $y = -p$. ¿Qué pasa si el foco es $(p, 0)$ y la directriz es $x = -p$?
7. (a) Dé una definición de una elipse en términos de los focos.
   (b) Escriba una ecuación para la elipse con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.
8. (a) Dé una definición de una hipérbola en términos de los focos.
   (b) Escriba una ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y vértices $(\pm a, 0)$.
   (c) Escriba ecuaciones para las asíntotas de la hipérbola del inciso (b).
9. (a) ¿Cuál es la excentricidad de una sección cónica?
   (b) ¿Qué se puede decir acerca de la excentricidad si la sección cónica es una elipse? ¿Una hipérbola? ¿Una parábola?
   (c) Escriba una ecuación polar para una sección cónica con excentricidad e y directriz $x = d$. ¿Qué pasa si la directriz es $x = -d$? ¿$y = d$? ¿$y = -d$?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué, o dé un ejemplo que refute al enunciado.

1. Si la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$ satisface $g'(1) = 0$, en tal caso tiene una tangente horizontal cuando $t = 1$.
2. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$ son derivables dos veces, por lo tanto
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}.$$
3. La longitud de la curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, es $\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$.
4. Si un punto se representa por (x, y) en coordenadas cartesianas (donde $x \neq 0$) y (r, θ) en coordenadas polares, en consecuencia $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.
5. Las curvas polares $r = 1 - \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = \operatorname{sen} 2\theta - 1$ tienen la misma gráfica.
6. Las ecuaciones $r = 2$, $x^2 + y^2 = 4$ y $x = 2 \operatorname{sen} 3t$, $y = 2 \cos 3t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ tienen la misma gráfica.
7. Las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^4$ tienen la misma gráfica que $x = t^3$, $y = t^6$.
8. La gráfica de $y^2 = 2y + 3x$ es una parábola.
9. Una línea tangente a una parábola corta a la parábola sólo una vez.
10. Una hipérbola nunca corta a su directriz.

EJERCICIOS

1–4 Bosqueje la curva paramétrica y elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva.

1. $x = t^2 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad -4 \leqslant t \leqslant 1$

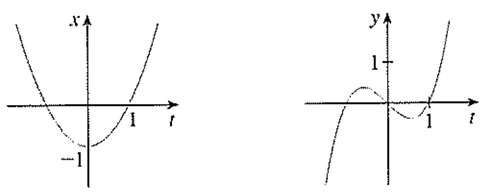
2. $x = 1 + e^{2t}, \quad y = e^t$

3. $x = \cos\theta, \quad y = \sec\theta, \quad 0 \leqslant \theta < \pi/2$

4. $x = 2\cos\theta, \quad y = 1 + \operatorname{sen}\theta$

5. Escriba tres conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas para la curva $y = \sqrt{x}$.

6. Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para bosquejar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando se incrementa t.



7. (a) Localice el punto con coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$. A continuación encuentre sus coordenadas cartesianas.

(b) Las coordenadas cartesianas de un punto son $(-3, 3)$. Encuentre dos conjuntos de coordenadas polares para el punto.

8. Haga un dibujo de la región formada de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen $1 \leqslant r < 2$ y $\pi/6 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/6$.

9–16 Bosqueje la curva polar.

9. $r = 1 - \cos\theta$

10. $r = \operatorname{sen} 4\theta$

11. $r = \cos 3\theta$

12. $r = 3 + \cos 3\theta$

13. $r = 1 + \cos 2\theta$

14. $r = 2\cos(\theta/2)$

15. $r = \dfrac{3}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

16. $r = \dfrac{3}{2 - 2\cos\theta}$

17–18 Encuentre una ecuación polar para la curva representada por la ecuación cartesiana dada.

17. $x + y = 2$

18. $x^2 + y^2 = 2$

19. La curva con ecuación polar $r = (\operatorname{sen}\theta)/\theta$ se llama **caracoloide**. Use una gráfica de r como una función de θ en coordenadas Cartesianas para bosquejar la caracoloide a mano. Después grafíquela con una máquina para comprobar su bosquejo.

20. Grafique la elipse $r = 2/(4 - 3\cos\theta)$ y su directriz. Grafique también la elipse obtenida por rotación respecto al origen por un ángulo $2\pi/3$.

21–24 Encuentre la pendiente de la línea tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor especificado del parámetro.

21. $x = \ln t, \quad y = 1 + t^2; \quad t = 1$

22. $x = t^3 + 6t + 1, \quad y = 2t - t^2; \quad t = -1$

23. $r = e^{-\theta}; \quad \theta = \pi$

24. $r = 3 + \cos 3\theta; \quad \theta = \pi/2$

25–26 Encuentre dy/dx y d^2y/dx^2.

25. $x = t + \operatorname{sen} t, \quad y = t - \cos t$

26. $x = 1 + t^2, \quad y = t - t^3$

27. Use una gráfica para estimar las coordenadas del punto mínimo sobre la curva $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 + t + 1$. Después use el cálculo para determinar las coordenadas exactas.

28. Encuentre el área encerrada por el bucle de la curva del ejercicio 27.

29. ¿En qué puntos la curva

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t \qquad y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t$$

tiene tangentes verticales y horizontales? Use esta información como ayuda para bosquejar la curva.

30. Determine el área encerrada por la curva del ejercicio 29.

31. Obtenga el área encerrada por la curva $r^2 = 9\cos 5\theta$.

32. Halle el área encerrada por el bucle interior de la curva $r = 1 - 3\operatorname{sen}\theta$.

33. Encuentre los puntos de intersección de las curvas $r = 2$ y $r = 4\cos\theta$.

34. Obtenga los puntos de intersección de las curvas $r = \cot\theta$ y $r = 2\cos\theta$.

35. Determine el área de la región que yace dentro de ambos círculos $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

36. Halle el área de la región que yace dentro de la curva $r = 2 + \cos 2\theta$ pero fuera de la curva $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$.

37–40 Encuentre la longitud de la curva.

37. $x = 3t^2, \quad y = 2t^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

38. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

39. $r = 1/\theta, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

40. $r = \operatorname{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

41–42 Calcule el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva dada respecto al eje x.

41. $x = 4\sqrt{t}, \quad y = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{2t^2}, \quad 1 \leq t \leq 4$

42. $x = 2 + 3t, \quad y = \cosh 3t, \quad 0 \leq t \leq 1$

43. Las curvas definidas por las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{t^2 - c}{t^2 + 1} \qquad y = \frac{t(t^2 - c)}{t^2 + 1}$$

se llaman **estrofoides** (de una palabra griega que significa torcer). Investigue cómo varían estas curvas cuando varía c.

44. Una familia de curvas tiene ecuaciones polares $r^a = |\operatorname{sen} 2\theta|$ donde a es un número positivo. Investigue cómo cambian estas curvas cuando cambia a.

45–48 Encuentre los focos y vértices y bosqueje la gráfica.

45. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

46. $4x^2 - y^2 = 16$

47. $6y^2 + x - 36y + 55 = 0$

48. $25x^2 + 4y^2 + 50x - 16y = 59$

49. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(\pm 4, 0)$ y vértices $(\pm 5, 0)$.

50. Encuentre una ecuación de la parábola con focos $(2, 1)$ y directriz $x = -4$.

51. Halle una ecuación de la hipérbola con focos $(0, \pm 4)$ y asíntotas $y = 3x$.

52. Encuentre una ecuación de la elipse con focos $(3, \pm 2)$ y un eje con longitud 8.

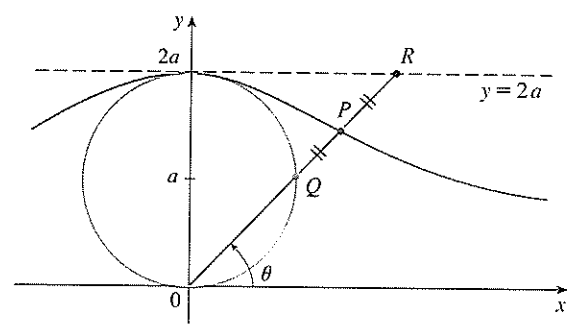
53. Obtenga una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y que tiene su otro foco en el origen.

54. Demuestre que si m es cualquier número real, en tal caso hay exactamente dos líneas de pendiente m que son tangentes a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y sus ecuaciones son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

55. Encuentre una ecuación polar para la elipse con foco en el origen, excentricidad $\frac{1}{3}$ y directriz con ecuación $r = 4 \sec \theta$.

56. Demuestre que los ángulos entre el eje polar y las asíntotas de la hipérbola $r = ed/(1 - e \cos \theta)$, $e > 1$, están dados por $\cos^{-1}(\pm 1/e)$.

57. En la figura el círculo de radio a es estacionario, y para cada θ, el punto P es el punto medio del segmento QR. La curva trazada por P para $0 < \theta < \pi$ se llama **curva de arco.** Encuentre las ecuaciones paramétricas de esta curva.



PROBLEMAS ADICIONALES

1. Una curva se define mediante las ecuaciones paramétricas

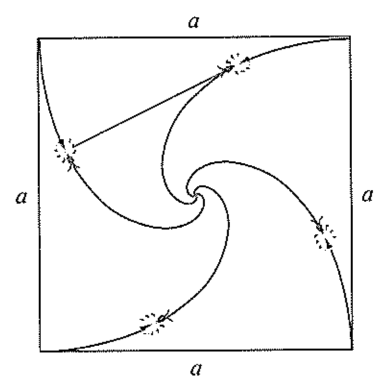
$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u}\,du \qquad y = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du$$

Encuentre la longitud del arco de la curva desde el origen hasta el punto más próximo donde hay una línea tangente vertical.

2. (a) Encuentre los puntos máximo y mínimo de la curva $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
   (b) Bosqueje la curva. (Observe que es simétrica con respecto a ambos ejes y ambas líneas $y = \pm x$, así que es suficiente considerar inicialmente $y \geqslant x \geqslant 0$).
   CAS (c) Emplee coordenadas polares y un sistema algebraico computacional para hallar el área encerrada por la curva.

3. ¿Cuál es el rectángulo de visión más pequeño que contiene a cada miembro de la familia de curvas polares $r = 1 + c \operatorname{sen}\theta$, donde $0 \leqslant c \leqslant 1$? Ilustre su respuesta graficando varios miembros de la familia en este rectángulo de visión.

4. Se colocan cuatro insectos en cuatro esquinas de un cuadrado con longitud a. Los insectos avanzan en sentido contrario a las manecillas del reloj a la misma rapidez, y cada uno avanza directamente hacia el siguiente insecto todo el tiempo. Se aproximan al centro del cuadrado a lo largo de trayectorias en espiral.
   (a) Obtenga la ecuación polar de una trayectoria de insecto al suponer que el polo está en el centro del cuadrado. (Use el hecho de que la línea que une a un insecto con el siguiente es tangente a la trayectoria del insecto.)
   (b) Determine la distancia que recorre un insecto en el momento que se encuentra con los otros insectos en el centro.



5. Una curva llamada **folio de Descartes** se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

   (a) Demuestre que si (a, b) está sobre la curva, por tanto está (b, a); es decir, la curva es simétrica con respecto a la línea $y = x$. ¿Dónde la curva corta a esta línea?
   (b) Determine los puntos sobre la curva donde las líneas tangentes son horizontales o verticales.
   (c) Demuestre que la línea $y = -x - 1$ es una asíntota inclinada.
   (d) Bosqueje la curva.
   (e) Demuestre que una ecuación cartesiana de esta curva es $x^3 + y^3 = 3xy$.
   (f) Muestre que la ecuación polar se puede escribir en la forma

$$r = \frac{3 \sec\theta \tan\theta}{1 + \tan^3\theta}$$

   (g) Encuentre el área encerrada por el bucle de esta curva.
   CAS (h) Demuestre que el área del bucle es la misma que el área que yace entre la asíntota y las ramas infinitas de la curva. (Use un sistema algebraico computacional para evaluar la integral.)

6. Un círculo C de radio $2r$ tiene su centro en el origen. Un círculo de radio r gira sin resbalar en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj alrededor de C. Un punto P está situado en un radio fijo del círculo giratorio a una distancia b de su centro, $0 < b < r$. [Vea las partes (i) e (ii) de la figura.] Sea L la del centro de C al centro del círculo giratorio y sea θ el ángulo que L forma con el eje x positivo.

   (a) Usando θ como parámetro, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por P son

   $$x = b \cos 3\theta + 3r \cos \theta \qquad y = b \operatorname{sen} 3\theta + 3r \operatorname{sen} \theta$$

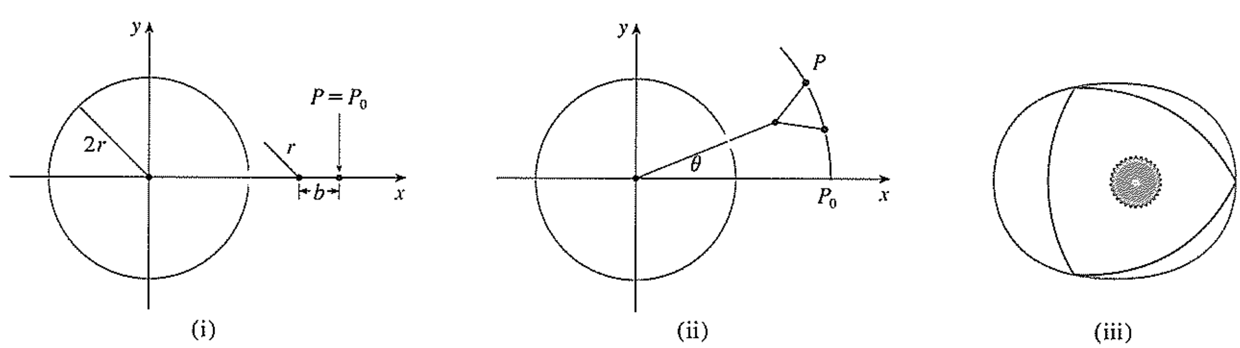
   Nota: Si $b = 0$, la trayectoria es un círculo de radio $3r$; si $b = r$, la trayectoria es un *epicicloide.* La trayectoria trazada por P para $0 < b < r$ se llama *epitrocoide.*

   (b) Grafique la curva de diversos valores de b entre 0 y r.

   (c) Demuestre que un triángulo equilátero puede inscribirse en el epitrocoide y que su centroide está sobre el círculo de radio b con centro en el origen.

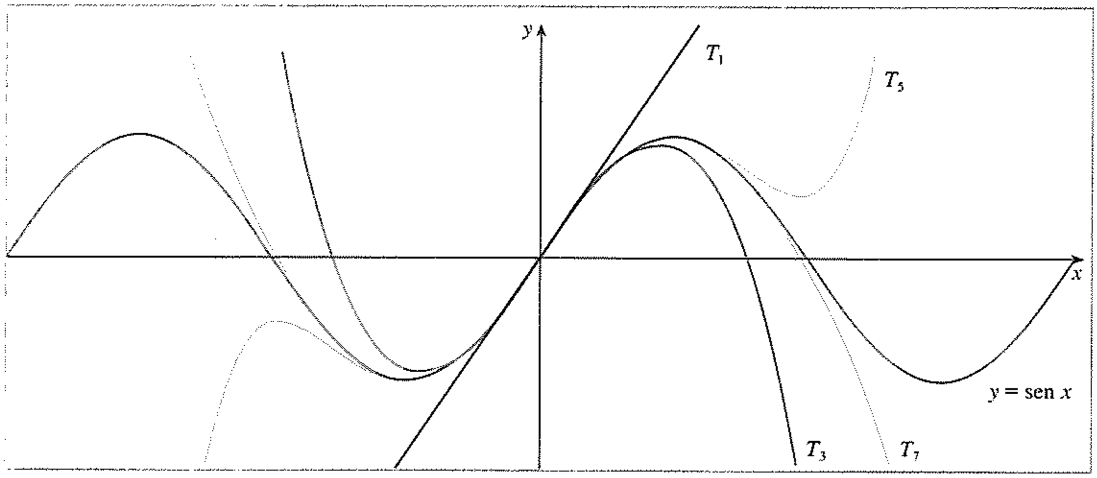
   Nota: Éste es el principio del motor rotatorio Wankel. Cuando el triángulo equilátero gira con sus vértices en el epitrocoide, su centroide recorre un círculo cuyo centro está en el centro de la curva.

   (d) En casi todos los motores rotatorios, los lados de los triángulos equiláteros son sustituidos por arcos de círculos con centro en los vértices opuestos como en la parte (iii) de la figura. (Entonces el diámetro del rotor es constante.) Demuestre que el rotor ajustará en el epitrocoide si $b \leqslant \frac{3}{2}(2 - \sqrt{3})r$.



11

SUCESIONES Y SERIES INFINITAS



Las sumas parciales T_n de una serie de Taylor dan aproximaciones cada vez mejores a una función cuando n aumenta.

Las sucesiones infinitas y las series se trataron brevemente en la *Presentación preliminar del cálculo* en relación con las paradojas de Zenón y la representación decimal de los números. La importancia en el cálculo radica en la idea de Newton de representar las funciones como sumas de series infinitas. Por ejemplo, al determinar áreas, con frecuencia integraba una función, pero primero la expresaba como una serie y luego integraba cada uno de los términos de la serie. Esta idea se trata en la sección 11.10 con objeto de integrar funciones como e^{-x^2}. (Recuerde que esto aún no ha sido hecho). Muchas de las funciones que surgen en la física matemática y en la química matemática, como las funciones de Bessel, se definen como sumas de series, de modo que es importante conocer los conceptos básicos de convergencia de sucesiones y series infinitas.

Los físicos también utilizan las series en otro aspecto, como se explica en la sección 11.12. Al estudiar campos tan diversos como la óptica, la relatividad especial y el electromagnetismo, analizan fenómenos reemplazando una función con los primeros términos en la serie que la representa.

11.1 SUCESIONES

Se puede considerar que una **sucesión** es una lista de números escritos en un orden definido:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

El número a_1 recibe el nombre de *primer término*, a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término*. Aquí se trata exclusivamente con sucesiones infinitas, por lo que cada término a_n tiene un sucesor a_{n+1}.

Observe que para todo entero positivo n hay un número correspondiente a_n, por lo que una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. Por lo regular, se escribe a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

NOTACIÓN La sucesión $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ también se denota mediante

$$\{a_n\} \qquad \text{o} \qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

EJEMPLO 1 Algunas sucesiones se pueden definir representando mediante una fórmula el n-ésimo término. En los ejemplos siguientes se ofrecen tres descripciones de la sucesión: Una en la que se aplica la notación anterior, en otra se aplica una fórmula definida y en la tercera se escriben los términos de la sucesión. Observe que la n no tiene que empezar en 1.

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\qquad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\qquad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\qquad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\qquad \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\qquad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\qquad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

EJEMPLO 2 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \frac{7}{3125}, \ldots\right\}$$

y suponga que el patrón de los primeros términos continúa.

SOLUCIÓN Se sabe que

$$a_1 = \frac{3}{5} \qquad a_2 = -\frac{4}{25} \qquad a_3 = \frac{5}{125} \qquad a_4 = -\frac{6}{625} \qquad a_5 = \frac{7}{3125}$$

Observe que los numeradores de estas fracciones empiezan con 3 y se incrementan una unidad al pasar al siguiente término. El segundo término tiene numerador 4, el siguiente numerador es 5; en general, el n-ésimo término tendrá como numerador $n + 2$. Los denominadores son las potencias de 5, de modo que a_n tiene por denominador 5^n. El signo de los términos es alternadamente positivo y negativo, por lo que es necesario multiplicar por la potencia de -1. En el ejemplo 1(b) el factor $(-1)^n$ significa que empieza con un término negativo. Como aquí se busca iniciar con un término positivo,se usa $(-1)^{n-1}$, o bien, $(-1)^{n+1}$. Por lo tanto,

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$$ □

EJEMPLO 3 En este caso hay algunas sucesiones que no tienen una ecuación que las defina en forma simple.

(a) La sucesión $\{p_n\}$, donde p_n es la población mundial el uno de enero del año n.

(b) Si a_n es el dígito en el n-ésimo lugar decimal del número e, después $\{a_n\}$ es una sucesión muy bien definida cuyos primeros términos son

$$\{7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, \ldots\}$$

(c) Las condiciones siguientes definen en forma recursiva la **sucesión de Fibonacci** $\{f_n\}$

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 1 \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Cada uno de los términos es la suma de los dos anteriores. Los primeros términos son

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$$

Esta sucesión surgió cuando el matemático italiano del siglo XIII, a quien se conoce como Fibonacci, resolvió un problema que se relacionaba con la cría de conejos (véase ejercicio 71). □

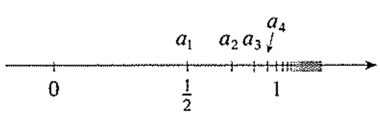


FIGURA 1

Una sucesión como la del ejemplo 1(a), $a_n = n/(n+1)$, se puede representar dibujando sus términos en una recta numérica como en la figura 1, o trazando la gráfica como en la figura 2. Observe que, como una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos, su gráfica consta de puntos aislados con coordenadas

$$(1, a_1) \qquad (2, a_2) \qquad (3, a_3) \qquad \ldots \qquad (n, a_n) \qquad \ldots$$

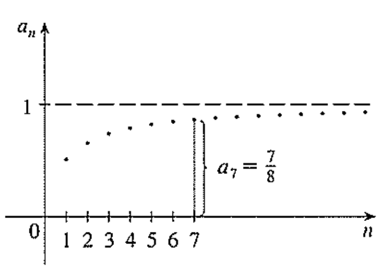


FIGURA 2

De acuerdo con la figura 1 o la 2, parece que los términos de la sucesión $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando n se incrementa. En efecto, la diferencia

$$1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera al incrementar a n. Se indica lo anterior escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

En general, la notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

quiere decir que los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se aproximan a L cuando n se incrementa suficientemente. Observe que la definición siguiente del límite de una sucesión es muy parecida a la definición de un límite de una función en el infinito dada en la sección 2.6.

1 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ tiene el **límite** L, por lo que se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o bien} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si es posible hacer los términos a_n tan cercanos a L como se quiera al hacer a n suficientemente grande. Si existe $\lim_{n\to\infty} a_n$, se dice que la sucesión **converge** (o que **es convergente**). De lo contrario se dice que la sucesión **diverge** (o **es divergente**).

En la figura 3 se ilustra la definición 1 mostrando las gráficas de las dos sucesiones que tienen como límite a L.

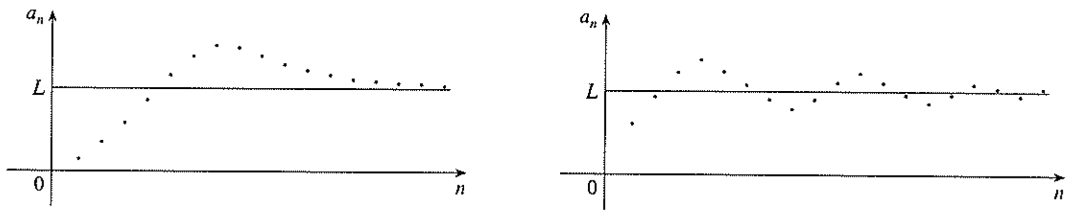


FIGURA 3
Gráficas de las dos sucesiones $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Una versión más exacta de la definición 1 es como se indica a continuación.

2 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ tiene por **límite** a L y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o bien} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un entero correspondiente N tal que

$$\text{si} \qquad n > N \qquad \text{entonces} \qquad |a_n - L| < \varepsilon$$

Compare esta definición con la definición 2.6.7.

La definición 2 se ilustra mediante la figura 4, en la cual los términos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se localizan en la recta numérica. No importa qué tan pequeño se escoja al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe una N tal que todos los términos de la sucesión desde a_{N+1} en adelante deben estar en el intervalo.

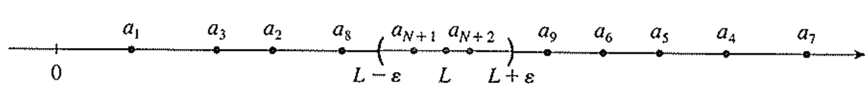


FIGURA 4

Otra ilustración de la definición 2 es la figura 5. Los puntos sobre la gráfica de $\{a_n\}$ deben estar entre las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ si $n > N$. Esta imagen debe ser válida, no importa qué tan pequeño se haya escogido ε, pero por lo regular un ε más pequeño requiere una N más grande.

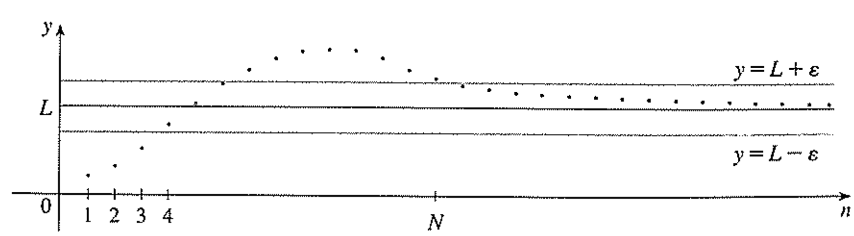


FIGURA 5

La comparación de la definición 2 y la definición 2.6.7 señala que la única diferencia entre $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ es que se requiere que n sea entero. En estos términos está el siguiente teorema, el cual se ilustra en la figura 6.

[3] TEOREMA Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$, cuando n es un entero, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

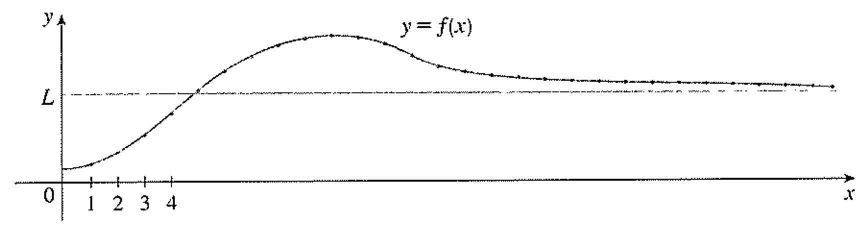


FIGURA 6

En particular, puesto que ya se sabe que $\lim_{x\to\infty} (1/x^r) = 0$, cuando $r > 0$ (teorema 2.6.5), se tiene

$$\boxed{4} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{si } r > 0$$

Si a_n se incrementa a medida que aumenta n, se usa la notación $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. La siguiente definición exacta es parecida a la definición 2.6.9.

[5] DEFINICIÓN $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M hay un entero N tal que

$$a_n > M \qquad \text{siempre que } n > N$$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, después la sucesión $\{a_n\}$ es divergente pero de una manera especial. Se dice que $\{a_n\}$ diverge a ∞.

Las leyes de los límites que se estudian en la sección 2.3 también se cumplen para los límites de sucesiones y sus demostraciones son similares.

LEYES DE LOS LÍMITES PARA LAS SUCESIONES

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones convergentes y c es una constante, en tal caso

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} c = c$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \text{si } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^p = \left[\lim_{n\to\infty} a_n\right]^p \quad \text{si } p > 0 \text{ y } a_n > 0$$

El teorema de la compresión también se puede adaptar a las sucesiones como sigue (véase figura 7).

TEOREMA DE LA COMPRESIÓN PARA LAS SUCESIONES

> Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n \geqslant n_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, en consecuencia $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

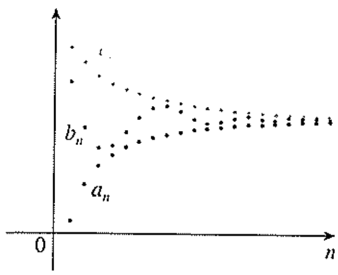


FIGURA 7
La sucesión $\{b_n\}$ se comprime entre las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$

Otro hecho útil con respecto a los límites de sucesiones se proporciona en el teorema siguiente cuya demostración se deja como ejercicio (ejercicio 75).

> **6 TEOREMA** Si $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, en este caso $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 4 Determine $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

SOLUCIÓN El método es similar al que se presenta en la sección 2.6: Se divide tanto el numerador como el denominador entre la potencia más alta de n y luego se aplican las leyes de los límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1$$

Esto demuestra que la conjetura que se hizo antes a partir de las figuras 1 y 2 era correcta.

En este caso se aplica la ecuación 4 con $r = 1$.

EJEMPLO 5 Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n}$.

SOLUCIÓN Observe que tanto el numerador como el denominador tienden al infinito cuando $n \to \infty$. No se puede aplicar directamente la regla de l'Hospital porque no se aplica a sucesiones, sino a funciones de una variable real. No obstante, se puede aplicar la regla de l'Hospital a la función relacionada $f(x) = (\ln x)/x$ y obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

EJEMPLO 6 Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Si escribe los términos de la sucesión obtiene

$$\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\}$$

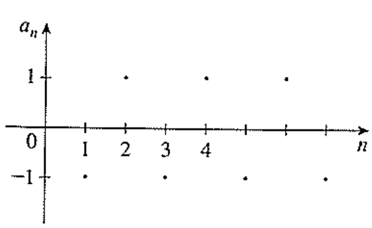


FIGURA 8

La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 8. Como los términos oscilan entre 1 y -1 en forma infinita, a_n no se aproxima a ningún número. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe; es decir, la sucesión $\{(-1)^n\}$ es divergente.

La gráfica de la sucesión del ejemplo 7 se muestra en la figura 9 y apoya la respuesta.

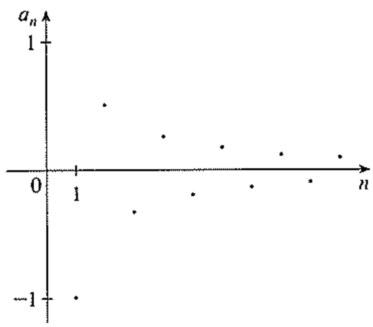


FIGURA 9

EJEMPLO 7 Evaluar $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ si es que existe.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema 6,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0$$ □

El siguiente teorema dice que al aplicar una función continua a los términos de una sucesión convergente, el resultado también es convergente. La prueba se deja como ejercicio 76.

> **7 TEOREMA** Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y la función f es continua en L, entonces
> $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$$

EJEMPLO 8 Encuentre $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\pi/n)$.

SOLUCIÓN Como la función seno es continua en 0, el teorema 7 hace posible escribir

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}(\pi/n) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty}(\pi/n)\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$$ □

EJEMPLO 9 Analice la convergencia de la sucesión $a_n = n!/n^n$, donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$.

GRAFICACIÓN DE SUCESIONES

Algunos sistemas algebraicos computacionales contienen comandos especiales que permiten crear sucesiones y dibujarlas directamente. Sin embargo, con la mayoría de las calculadoras para trazar gráficas se pueden dibujar sucesiones usando ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, la sucesión del ejemplo 9 se puede dibujar introduciendo las ecuaciones paramétricas

$$x = t \qquad y = t!/t^t$$

y dibujando en el modo punto (*dot mode*) iniciando con $t = 1$; se establece el paso t-ésimo igual a 1. El resultado se muestra en la figura 10.

SOLUCIÓN Tanto el numerador como el denominador tienden al infinito cuando $n \to \infty$, pero en este caso no hay función correspondiente para usar la regla de l'Hospital ($x!$ no está definida cuando x no es un entero). Se escriben algunos de los términos para ver qué pasa con a_n cuando n se incrementa:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} \qquad a_3 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3}$$

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot \cdots \cdot n} \tag{8}$$

Al parecer, por estas expresiones y la gráfica de la figura 10, los términos son decrecientes y quizá se aproximen a 0. Para confirmarlo, observe que según la ecuación 8

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}{n\cdot n\cdot \cdots \cdot n}\right)$$

Observe que la expresión entre paréntesis es cuando mucho 1 porque el numerador es menor que (o igual) al denominador. De este modo

$$0 < a_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Sabe que $1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ por el teorema de la compresión. □

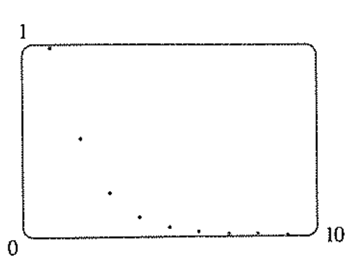


FIGURA 10

EJEMPLO 10 ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{r^n\}$?

SOLUCIÓN Sabe por la sección 2.6 y las gráficas de las funciones exponenciales de la sección 1.5 que $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ para $a > 1$ y $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$. Por lo tanto, si hace $a = r$ y aplica el teorema 3 llega a

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } r > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$$

Es obvio que

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} 0^n = 0$$

Si $-1 < r < 0$, por lo tanto $0 < |r| < 1$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$$

y, debido a eso, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ de acuerdo con el teorema 6. Si $r \leqslant -1$, después $\{r^n\}$ diverge como en el ejemplo 6. En la figura 11 se ilustran las gráficas de varios valores de r. (El caso de $r = -1$ se muestra en la figura 8.)

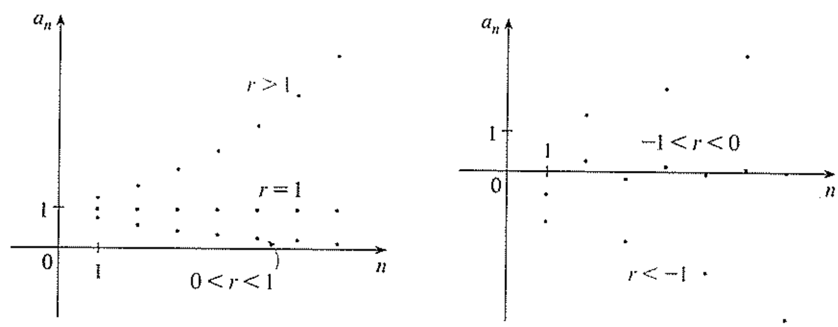


FIGURA 11
La sucesión $a_n = r^n$

□

Los resultados del ejemplo 10 se resumen para uso futuro como sigue.

9 La sucesión $\{r^n\}$ es convergente si $-1 < r \leqslant 1$ y divergente para todos los otros valores de r.

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \end{cases}$$

10 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ se llama **creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$, es decir, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Se denomina **decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. Recibe el nombre de **monótona** si es creciente o decreciente.

EJEMPLO 11 La sucesión $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ es decreciente porque

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

■ El lado derecho es menor porque tiene un denominador mayor.

y por lo tanto $a_n > a_{n+1}$ para toda $n \geqslant 1$. □

EJEMPLO 12 Demuestre que la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 1 Es necesario demostrar que $a_{n+1} < a_n$, es decir,

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

Esta desigualdad equivale a la obtenida por multiplicación cruzada:

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} &\iff (n+1)(n^2+1) < n[(n+1)^2+1]\\ &\iff n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+2n\\ &\iff 1 < n^2+n\end{aligned}$$

Puesto que $n \geqslant 1$, ya sabe que la desigualdad $n^2 + n > 1$ es verdadera. Por lo tanto, $a_{n+1} < a_n$ y también $\{a_n\}$ es decreciente.

SOLUCIÓN 2 Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$:

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0 \qquad \text{cuando } x^2 > 1$$

En estos términos, f es decreciente en $(1, \infty)$ y por eso $f(n) > f(n+1)$. Por lo tanto $\{a_n\}$ es decreciente. □

11 DEFINICIÓN Una sucesión $\{a_n\}$ está **acotada por arriba** si hay un número M tal que

$$a_n \leqslant M \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Se dice que está **acotada por abajo** si hay un número m tal que

$$m \leqslant a_n \qquad \text{para toda } n \geqslant 1$$

Si está acotada por arriba y por abajo, en tal caso $\{a_n\}$ es una **sucesión acotada**.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n$ está acotada por abajo ($a_n > 0$), pero no por arriba. La sucesión $a_n = n/(n+1)$ está acotada porque $0 < a_n < 1$ para toda n.

Ya sabe que no toda sucesión acotada es convergente [por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^n$ cumple con $-1 \leqslant a_n \leqslant 1$, pero es divergente del ejemplo 6] y no toda sucesión monótona es convergente ($a_n = n \to \infty$). Pero si una sucesión es tanto acotada *como* monótona, en consecuencia tiene que ser convergente. Este hecho se demuestra en la forma del teorema 12, pero intuitivamente se entiende por qué es cierto viendo la figura 12. Si $\{a_n\}$ es creciente y $a_n \leqslant M$ para toda n, después los términos están forzados a aglomerarse y a aproximarse a un número L.

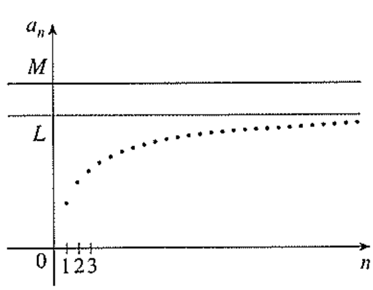


FIGURA 12

La demostración del teorema 12 se apoya en el **axioma de completitud** para el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, que dice que si S es un conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior M ($x \leqslant M$ para toda x en S), luego S tiene una **cota superior mínima** b. [Esto quiere decir que b es una cota superior para S, pero si M es cualquier otra cota superior, por lo tanto $b \leqslant M$]. El axioma de completitud expresa el hecho de que no hay brecha o agujero en la recta de los números reales.

12 TEOREMA DE LA SUCESIÓN MONÓTONA Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $\{a_n\}$ es una sucesión creciente. Puesto que $\{a_n\}$ está acotada, el conjunto $S = \{a_n \mid n \geqslant 1\}$ posee una cota superior. De acuerdo con el axioma de completitud, tiene una cota mínima superior L. Dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ *no* es una cota superior para S (puesto que L es la cota superior *mínima*). Por lo tanto,

$$a_N > L - \varepsilon \qquad \text{para un entero } N$$

Pero la sucesión es creciente de modo que $a_n \geqslant a_N$ para toda $n > N$. En estos términos, si $n > N$

$$a_n > L - \varepsilon$$

de tal manera $\qquad 0 \leqslant L - a_n < \varepsilon$

puesto que $a_n \leqslant L$. Así que,

$$|L - a_n| < \varepsilon \qquad \text{cuando } n > N$$

así $\lim_{n \to \infty} a_n = L$.

Una demostración similar (aplicando la cota inferior más grande) funciona si $\{a_n\}$ es decreciente. □

La demostración del teorema 12 demuestra que una sucesión que es creciente y acotada por arriba es convergente. (De igual manera, una sucesión decreciente que está acotada por abajo es convergente.) Este hecho se aplica muchas veces al trabajar con series infinitas.

EJEMPLO 13 Investigue la sucesión $\{a_n\}$ definida por la relación de recurrencia

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + 6) \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

SOLUCIÓN Para empezar se calculan los primeros términos:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 2 & a_2 = \tfrac{1}{2}(2 + 6) = 4 & a_3 = \tfrac{1}{2}(4 + 6) = 5 \\ a_4 = \tfrac{1}{2}(5 + 6) = 5.5 & a_5 = 5.75 & a_6 = 5.875 \\ a_7 = 5.9375 & a_8 = 5.96875 & a_9 = 5.984375 \end{array}$$

Con frecuencia, la inducción matemática se aplica cuando se trabaja con sucesiones recursivas. Véase página 77 donde se encuentra un análisis del principio de inducción matemática.

Estos términos iniciales hacen pensar que la sucesión es creciente y que los términos se aproximan a 6. Para confirmar que la sucesión es creciente, aplique la inducción matemática para demostrar que $a_{n+1} > a_n$ para toda $n \geqslant 1$. Esto es válido para $n = 1$ porque $a_2 = 4 > a_1$. Si supone que se cumple para $n = k$, después tiene

$$a_{k+1} > a_k$$

de modo que $\qquad a_{k+1} + 6 > a_k + 6$

y $\qquad \tfrac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \tfrac{1}{2}(a_k + 6)$

Por esto, $\qquad a_{k+2} > a_{k+1}$

Ya se dedujo que $a_{n+1} > a_n$ es válida para $n = k + 1$. Por lo tanto, la desigualdad se cumple para toda n por inducción.

Luego se comprobó que $\{a_n\}$ está acotada demostrando que $a_n < 6$ para toda n. (Puesto que la sucesión es creciente, ya sabe que tiene una cota inferior: $a_n \geqslant a_1 = 2$ para toda n.) Sabe que $a_1 < 6$, de modo que la aseveración es válida para $n = 1$. Suponga que se cumple para $n = k$. En tal caso

$$a_k < 6$$

de este modo
$$a_k + 6 < 12$$

$$\tfrac{1}{2}(a_k + 6) < \tfrac{1}{2}(12) = 6$$

Por eso,
$$a_{k+1} < 6$$

Esto demuestra que, según la inducción matemática, $a_n < 6$ para toda n.

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada, el teorema 12 garantiza que tiene un límite. El teorema no dice cuál es el valor del límite, pero ahora que sabe que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ existe, puede aplicar la relación de recurrencia para escribir

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2}(a_n + 6) = \tfrac{1}{2}\Big(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\Big) = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Una demostración de este hecho se pide en el ejercicio 58.

Como $a_n \to L$, se infiere que $a_{n+1} \to L$, también (cuando $n \to \infty$, $n + 1 \to \infty$, también). De este modo

$$L = \tfrac{1}{2}(L + 6)$$

Al resolver esta ecuación, determina que $L = 6$, tal como había predicho. □

11.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una sucesión?
(b) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = 8$?
(c) ¿Qué significa decir que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión convergente? Proporcione dos ejemplos.
(b) ¿Qué es una sucesión divergente? Dé dos ejemplos.

3–8 Proporcione los primeros cinco términos de la sucesión.

3. $a_n = 1 - (0.2)^n$ **4.** $a_n = \dfrac{n+1}{3n-1}$

5. $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$ **6.** $\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)\}$

7. $a_1 = 3,\quad a_{n+1} = 2a_n - 1$ **8.** $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$

9–14 Encuentre una fórmula para el término general a_n de la sucesión, suponiendo que se mantenga el patrón de los primeros términos.

9. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$ **10.** $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right\}$

11. $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}$ **12.** $\left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots\right\}$

13. $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$ **14.** $\{5, 1, 5, 1, 5, 1, \ldots\}$

15. Haga una lista de los seis primeros términos de la sucesión definida por

$$a_n = \frac{n}{2n+1}$$

¿Parece que la sucesión tiene un límite? Si es así, hállelo.

16. Haga una lista de los nueve primeros términos de la sucesión $\{\cos(n\pi/3)\}$. ¿Parece que esta sucesión tiene un límite? Si es así, hállelo; si no es así, explique por qué.

17–46 Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, calcule el límite.

17. $a_n = 1 - (0.2)^n$ **18.** $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

19. $a_n = \dfrac{3 + 5n^2}{n + n^2}$

20. $a_n = \dfrac{n^3}{n + 1}$

21. $a_n = e^{1/n}$

22. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

23. $a_n = \tan\left(\dfrac{2n\pi}{1 + 8n}\right)$

24. $a_n = \sqrt{\dfrac{n + 1}{9n + 1}}$

25. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}n}{n^2 + 1}$

26. $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3 + 2n^2 + 1}$

27. $a_n = \cos(n/2)$

28. $a_n = \cos(2/n)$

29. $\left\{\dfrac{(2n - 1)!}{(2n + 1)!}\right\}$

30. $\{\arctan 2n\}$

31. $\left\{\dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} - 1}\right\}$

32. $\left\{\dfrac{\ln n}{\ln 2n}\right\}$

33. $\{n^2 e^{-n}\}$

34. $\{n \cos n\pi\}$

35. $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

36. $a_n = \ln(n + 1) - \ln n$

37. $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

38. $a_n = \sqrt[n]{2^{1+3n}}$

39. $a_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n$

40. $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1 + \sqrt{n}}$

41. $a_n = \ln(2n^2 + 1) - \ln(n^2 + 1)$

42. $a_n = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$

43. $\{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots\}$

44. $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$

45. $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$

46. $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$

47–53 Con la ayuda de una gráfica de la sucesión, establezca si ésta es convergente o divergente. Si la sucesión es convergente, deduzca el valor del límite a partir de la gráfica, y luego demuestre su conjetura. (Véase una advertencia sobre las gráficas de sucesiones en la nota al margen de la página 680).

47. $a_n = 1 + (-2/e)^n$

48. $a_n = \sqrt{n} \operatorname{sen}\left(\pi/\sqrt{n}\right)$

49. $a_n = \sqrt{\dfrac{3 + 2n^2}{8n^2 + n}}$

50. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$

51. $a_n = \dfrac{n^2 \cos n}{1 + n^2}$

52. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

53. $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n!}$

54. (a) Determine si la sucesión definida como sigue es convergente o divergente:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geqslant 1$$

(b) ¿Qué ocurre si el primer término es $a_1 = 2$?

55. Si se invierten 1000 dólares a 6% de interés, compuesto anualmente, por lo tanto n años después la inversión tiene un valor de $a_n = 1000(1.06)^n$ dólares.
(a) Determine los primeros cinco términos de la sucesión $\{a_n\}$.
(b) ¿La sucesión es convergente o divergente? Explique

56. Determine los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo para $a_1 = 25$. Conjeture con respecto al tipo de sucesión.

57. ¿Para qué valores de r es convergente la sucesión $\{nr^n\}$?

58. (a) Si $\{a_n\}$ es convergente, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(b) Una sucesión $\{a_n\}$ se define con $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1/(1 + a_n)$ para $n \geqslant 1$. Si supone que $\{a_n\}$ es convergente, calcule el límite.

59. Suponga que sabe que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y que todos sus términos están entre los números 5 y 8. Explique por qué la sucesión tiene un límite. ¿Qué puede decir con respecto al valor del límite?

60–66 Determine si la sucesión es creciente, decreciente, o no es monótona. ¿Está acotada la sucesión?

60. $a_n = (-2)^{n+1}$

61. $a_n = \dfrac{1}{2n + 3}$

62. $a_n = \dfrac{2n - 3}{3n + 4}$

63. $a_n = n(-1)^n$

64. $a_n = ne^{-n}$

65. $a_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$

66. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$

67. Determine el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots\right\}$$

68. Una sucesión $\{a_n\}$ está dada por $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
(a) Mediante inducción u otro método, demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y que su cota superior es 3. Aplique el teorema de sucesión monótona para demostrar que sí existe $\lim_{n\to\infty} a_n$.
(b) Determine $\lim_{n\to\infty} a_n$.

69. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$$

es creciente y que $a_n < 3$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

70. Demuestre que la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

cumple con $0 < a_n \leq 2$ y es decreciente. Deduzca que la sucesión es convergente y encuentre el límite.

71. (a) Fibonacci planteó el problema siguiente: Suponga que los conejos viven toda la vida, que cada mes todas las parejas tiene un nuevo par de conejitos, los cuales empiezan a ser productivos a la edad de dos meses. Si empieza con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas de conejos tendrá en el n-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es f_n, donde $\{f_n\}$ es la sucesión de Fibonacci que se define en el ejemplo 3(c).
(b) Sea $a_n = f_{n+1}/f_n$ y demuestre que $a_{n-1} = 1 + 1/a_{n-2}$. Suponiendo que $\{a_n\}$ es convergente, determine el límite.

72. (a) Sea $a_1 = a$, $a_2 = f(a)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a))$, . . . , $a_{n+1} = f(a_n)$, donde f es una función continua. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, demuestre que $f(L) = L$.
(b) Ilustre el inciso (a) haciendo $f(x) = \cos x$, $a = 1$, y calculando el valor de L con cinco cifras decimales.

73. (a) Mediante una gráfica, deduzca el valor del límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{n!}$$

(b) Con una gráfica de la sucesión del inciso (a) calcule los valores más pequeños de N que corresponden a $\varepsilon = 0.1$ y $\varepsilon = 0.001$ en la definición 2.

74. Aplique directamente la definición 2 para demostrar que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ cuando $|r| < 1$.

75. Demuestre el teorema 6.
[*Sugerencia:* Aplique la definición 2 o el teorema de la compresión].

76. Demuestre el teorema 7

77. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} = 0$ y $\{b_n\}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$

78. Sea $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
(a) Demuestre que si $0 \leq a < b$, en tal caso

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$$

(b) Deduzca que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$.
(c) Aplique $a = 1 + 1/(n + 1)$ y $b = 1 + 1/n$ en el inciso (b) para demostrar que $\{a_n\}$ es creciente.
(d) Use $a = 1$ y $b = 1 + 1/(2n)$ en el inciso b) para demostrar que $a_{2n} < 4$.
(e) Mediante los incisos (c) y (d) demuestre que $a_n < 4$ para toda n.
(f) Aplique el teorema 12 para demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n$. (El límite es e. Vea la ecuación 3.6.6)

79. Sean a y b números positivos con $a > b$. Sea a_1 la media aritmética y b_1 la media geométrica:

$$a_1 = \frac{a + b}{2} \qquad b_1 = \sqrt{ab}$$

Repita el proceso de modo que, en general,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

(a) Mediante la inducción matemática demuestre que

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$$

(b) Deduzca que tanto $\{a_n\}$ como $\{b_n\}$ son convergentes.
(c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Gauss llamó al valor común de estos límites **media aritmética-geométrica** de los números a y b.

80. (a) Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$ y $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, entonces $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
(b) Si $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

calcule los primeros ocho términos de la sucesión $\{a_n\}$. Luego use el inciso (a) para demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$. Esto da el **desarrollo en fracción continua**

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

81. El tamaño de una población de peces inalterada está modelado mediante la fórmula

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$$

donde p_n es la población de peces después de n años y a y b son constantes positivas que dependen de las especies y su medio. Suponga que la población en el año 0 es $p_0 > 0$.
(a) Demuestre que si $\{p_n\}$ es convergente, después los únicos valores posibles de este límite son 0 y $b - a$.
(b) Demuestre que $p_{n+1} < (b/a)p_n$.
(c) Mediante el inciso (b) demuestre que si $a > b$, en seguida $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$, en otras palabras, la población muere.
(d) Ahora suponga que $a < b$. Demuestre que si $p_0 < b - a$, por lo tanto $\{p_n\}$ es creciente y $0 < p_n < b - a$. Asimismo, demuestre que si $p_0 > b - a$, en tal caso $\{p_n\}$ es decreciente y $p_n > b - a$. Deduzca que si $a < b$, por lo tanto $\lim_{n\to\infty} p_n = b - a$.

PROYECTO DE LABORATORIO

CAS SUCESIONES LOGÍSTICAS

Una sucesión que surge en ecología como un modelo para el crecimiento poblacional se define por medio de la **ecuación en diferencias logística**

$$p_{n+1} = kp_n(1 - p_n)$$

donde p_n es el tamaño de la población de la n-ésima generación de una sola especie. Para poder trabajar con los números, p_n es una fracción del tamaño máximo de la población, de modo que $0 \leq p_n \leq 1$. Observe que la forma de la ecuación es similar a la ecuación en diferencias logística de la sección 9.4. El modelo discreto, con sucesiones en lugar de funciones continuas, es preferible para modelar las poblaciones de insectos, donde el apareamiento y la muerte ocurren de un modo periódico.

Un ecologista se interesa en predecir el tamaño de la población a medida que el tiempo avanza, y plantea estas preguntas: ¿Se estabilizará en un valor límite? ¿Cambiará de manera cíclica? O bien, ¿mostrará un comportamiento aleatorio?

Escriba un programa para calcular los primeros n términos de esta sucesión con una población inicial p_0, donde $0 < p_0 < 1$. Con este programa efectúe lo siguiente.

1. Calcule 20 o 30 términos de la sucesión para $p_0 = \frac{1}{2}$ y para dos valores de k tales que $1 < k < 3$. Dibuje las sucesiones. ¿Parecen convergir? Repita para un valor distinto de p_0 entre 0 y 1. ¿El límite depende del valor de p_0 escogido? ¿Depende del valor elegido de k?
2. Calcule términos de la sucesión para un valor de k entre 3 y 3.4 y dibújelos. ¿Qué observa con respecto al comportamiento de los términos?
3. Experimente con valores de k entre 3.4 y 3.5. ¿Qué sucede con los términos?
4. Para valores de k entre 3.6 y 4, calcule y dibuje por lo menos 100 términos y comente el comportamiento de la sucesión. ¿Qué sucede si cambia p_0 por 0.001? Este tipo de comportamiento se llama *caótico* y lo muestran poblaciones de insectos en ciertas condiciones.

11.2 SERIES

Si trata de sumar los términos de una sucesión infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtiene una expresión de la forma

$$\boxed{1} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que se denomina **serie infinita**, o sólo **serie**, y se denota con el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{o} \qquad \sum a_n$$

Pero, ¿tiene sentido hablar de suma de una cantidad infinita de términos?

Sería imposible encontrar la suma finita de la serie

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n + \cdots$$

porque si empieza a sumar los términos, obtiene sumas acumulativas 1, 3, 6, 10, 15, 21, . . . y después del n-ésimo término, llega a $n(n + 1)/2$, lo cual se vuelve muy grande cuando n se incrementa.

Sin embargo, si empieza por sumar los términos de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

n	Suma de los primeros n términos
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

obtiene $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots, 1 - 1/2^n, \ldots$. En la tabla se puede ver que cuando suma más y más términos, estas *sumas parciales* se vuelven más y más cercanas a 1. (Véase también la figura 11 en *Presentación preliminar del cálculo* en la página 7). De hecho, al sumar suficientes términos de la serie es posible hacer que las sumas parciales sean tan cercanas a 1 como se quiera. Por eso es razonable decir que la suma de esta serie infinita es igual a 1 y escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

Se aplica una idea similar para determinar si una serie general (1) tiene o no tiene una suma. Considere las **sumas parciales**

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

y, en general,

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Estas sumas parciales forman una nueva sucesión $\{s_n\}$, la cual puede tener o no tener un límite. Si existe $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (como un número finito), después, como en el ejemplo anterior, se llama suma de la serie infinita $\Sigma\, a_n$.

2 DEFINICIÓN Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote con s_n la n-ésima suma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{s_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existe como un número real, en tal caso la serie $\Sigma\, a_n$ se denomina **convergente** y escriba

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s \qquad \text{o} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

El número s se llama **suma** de la serie. Si no es así, la serie se denomina **divergente.**

Así, la suma de una serie es el límite de la sucesión de sumas parciales. Cuando escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ quiere decir que al sumar suficientes términos de la serie puede llegar tan cerca como quiera al número s. Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Compare con la integral impropia

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t f(x)\,dx$$

Para determinar esta integral integre desde 1 hasta t y luego haga que $t \to \infty$. En el caso de series, sume desde 1 hasta n y luego haga $n \to \infty$.

EJEMPLO 1 Un ejemplo importante de una serie infinita es la **serie geométrica**

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \qquad a \neq 0$$

La figura 1 proporciona una demostración geométrica del resultado del ejemplo 1. Si los triángulos se construyen como se indica y s es la suma de la serie, después, por triángulos semejantes

$$\frac{s}{a} = \frac{a}{a - ar} \quad \text{por lo que} \quad s = \frac{a}{1 - r}$$

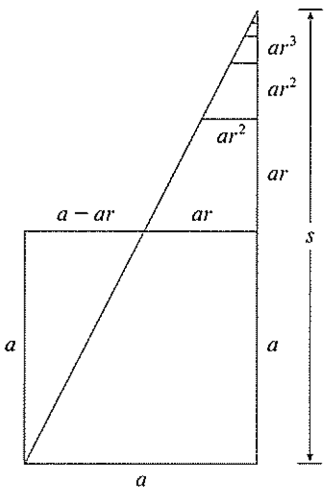


FIGURA 1

Cada término se obtiene a partir del término precedente y se multiplica por la razón común r. (Ya se consideró el caso especial cuando $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ de la página 687).

Si $r = 1$, en consecuencia $s_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe, la serie geométrica diverge en este caso.

Si $r \neq 1$,

$$s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

y

$$rs_n = \qquad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Al restar estas ecuaciones obtiene

$$s_n - rs_n = a - ar^n$$

$$\boxed{3} \qquad s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

Si $-1 < r < 1$, sabe por (11.1.9) que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a}{1 - r} \lim_{n\to\infty} r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Por esto, cuando $|r| < 1$, la serie geométrica es convergente y su suma es $a/(1 - r)$.

Si $r \leqslant -1$ o bien, $r > 1$, la sucesión $\{r^n\}$ es divergente de acuerdo con (11.1.9) y de ese modo, según la ecuación 3, $\lim_{n\to\infty} s_n$ no existe. Por lo tanto, la serie geométrica diverge en esos casos. □

El resumen de los resultados del ejemplo 1 es como se señala a continuación.

En palabras: la suma de la serie geométrica convergente es

$$\frac{\text{primer término}}{1 - \text{razón común}}$$

> $\boxed{4}$ La serie geométrica
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$$
>
> es convergente si $|r| < 1$ y su suma es
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad |r| < 1$$
>
> Si $|r| \geqslant 1$, la serie geométrica es divergente.

V EJEMPLO 2 Calcule la suma de la serie geométrica

$$5 - \tfrac{10}{3} + \tfrac{20}{9} - \tfrac{40}{27} + \cdots$$

SOLUCIÓN El primer término es $a = 5$ y la razón común es $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$, la serie es convergente según (4) y su suma es

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

□

¿Qué se quiere dar a entender en realidad cuando se dice que la suma de la serie del ejemplo 2 es 3? Naturalmente, no puede sumar uno más uno una cantidad infinita de términos. Pero, de acuerdo con la definición 2, la suma total es el límite de la sucesión de sumas parciales. De este modo, al efectuar la suma de suficientes términos, se acerca tanto como quiera al número 3. La tabla muestra las primeras diez sumas parciales s_n, y en la gráfica de la figura 2 se ilustra cómo la sucesión de las sumas parciales se aproxima a 3.

n	s_n
1	5.000000
2	1.666667
3	3.888889
4	2.407407
5	3.395062
6	2.736626
7	3.175583
8	2.882945
9	3.078037
10	2.947975

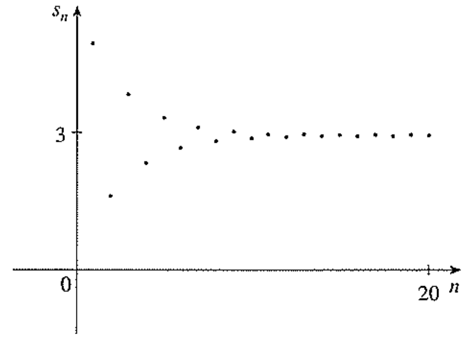


FIGURA 2

EJEMPLO 3 ¿Es convergente o divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$?

SOLUCIÓN Escriba el n-ésimo término de la serie en la forma ar^{n-1}:

Otra manera de identificar a y r es escribir los primeros términos:

$$4 + \tfrac{16}{3} + \tfrac{64}{9} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^2)^n 3^{-(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Identifique esta serie como una serie geométrica con $a = 4$ y $r = \frac{4}{3}$. Como $r > 1$, la serie diverge, de acuerdo con (4). □

EJEMPLO 4 Escriba el número $2.3\overline{17} = 2.3171717\ldots$ como una razón de enteros.

SOLUCIÓN

$$2.3171717\ldots = 2.3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

Después del primer término tiene una serie geométrica con $a = 17/10^3$ y $r = 1/10^2$. Debido a eso,

$$2.3\overline{17} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{10^3}}{1 - \dfrac{1}{10^2}} = 2.3 + \frac{\dfrac{17}{1000}}{\dfrac{99}{100}}$$

$$= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}$$ □

EJEMPLO 5 Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ donde $|x| < 1$.

SOLUCIÓN Observe que esta serie inicia con $n = 0$ y por eso el primer término es $x^0 = 1$. (En las series, se adopta la convención de que $x^0 = 1$ aun cuando $x = 0$). De este modo,

TEC En Module 11.2 se estudia una serie que depende del ángulo θ en un triángulo y permite ver qué tan rápido converge la serie cuando varía θ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

Ésta es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Puesto que $|r| = |x| < 1$, converge, y de acuerdo con (4) se tiene

$$\boxed{5} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}$$ □

EJEMPLO 6 Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente, y determine su suma.

SOLUCIÓN No es una serie geométrica, de modo que regrese a la definición de una serie convergente y calcule las sumas parciales.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Puede simplificar esta expresión si la descompone en fracciones parciales

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

(véase sección 7.4). Así que,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

■ Observe que los términos se cancelan por pares. Éste es un ejemplo de una **suma telescópica**. Debido a las cancelaciones, la suma se colapsa, al igual que un telescopio antiguo que se colapsa, en dos términos.

y de este modo $$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

Por lo tanto, la serie dada es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ □

■ En la figura 3 se ilustra el ejemplo 6 y se muestra la gráfica de la sucesión de términos $a_n = 1/[n(n+1)]$ y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales. Observe que $a_n \to 0$ y $s_n \to 1$. Refiérase a los ejercicios 62 y 63, en donde se tratan dos interpretaciones geométricas del ejemplo 6.

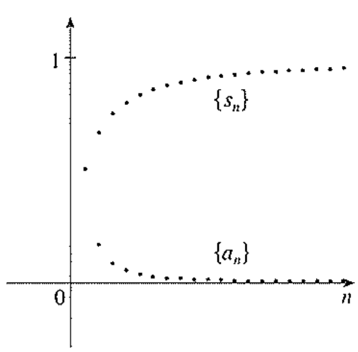


FIGURA 3

EJEMPLO 7 Demuestre que la **serie armónica**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

es divergente.

SOLUCIÓN Para esta serie particular, es conveniente considerar las sumas parciales s_2, s_4, s_8, s_{16}, s_{32}, . . . y demostrar que se hacen grandes.

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \tfrac{1}{2} \\ s_4 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2} \\ s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2} \\ s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2} \end{aligned}$$

En forma similar, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$, $s_{64} > 1 + \frac{6}{2}$, y, en general,

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

El método usado en el ejemplo 7 para demostrar que la serie armónica diverge es original del francés Nicole Oresme (1323-1382).

Esto demuestra que $s_{2^n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por eso $\{s_n\}$ es divergente. Debido a eso, la serie armónica es divergente. □

[6] TEOREMA Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, en seguida $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

DEMOSTRACIÓN Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. En tal caso, $a_n = s_n - s_{n-1}$. Puesto que $\Sigma\, a_n$ es convergente, la sucesión $\{s_n\}$ es convergente. Sea $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Como $n - 1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, también se tiene $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= s - s = 0\end{aligned}$$ □

NOTA 1 Con cualquier *serie* $\Sigma\, a_n$ se relacionan *dos sucesiones*: la sucesión $\{s_n\}$ de sus sumas parciales y la sucesión $\{a_n\}$ de sus términos. Si $\Sigma\, a_n$ es convergente, después el límite de la sucesión $\{s_n\}$ es s, (la suma de la serie) y, como establece el teorema 6, el límite de la sucesión $\{a_n\}$ es 0.

NOTA 2 En general, el inverso del teorema 6 no se cumple. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no puede concluir que $\Sigma\, a_n$ es convergente. Observe que para la serie armónica $\Sigma\, 1/n$ tiene $a_n = 1/n \to 0$ cuando $n \to \infty$, pero ya demostró en el ejemplo 7 que $\Sigma\, 1/n$ es divergente.

[7] LA PRUEBA DE LA DIVERGENCIA Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, en tal caso la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

La prueba de la divergencia se infiere del teorema 6 porque si la serie no es divergente, por lo tanto es convergente, y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 8 Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4}$ es divergente.

SOLUCIÓN

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5 + 4/n^2} = \frac{1}{5} \neq 0$$

De modo que la serie diverge de acuerdo con la prueba de la divergencia. □

NOTA 3 Si encuentra que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, sabe que $\Sigma\, a_n$ es divergente. Si tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no sabe *nada* con respecto a la convergencia o la divergencia de $\Sigma\, a_n$. Recuerde la advertencia de la nota 2: si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente

8 TEOREMA Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son series convergentes, en tal caso también lo son las series $\Sigma\, ca_n$ (donde c es una constante), $\Sigma\,(a_n + b_n)$ y $\Sigma\,(a_n - b_n)$, y

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Estas propiedades de las series convergentes se infieren de las leyes de los límites correspondientes a las sucesiones de la sección 11.1. Por ejemplo, aquí se demuestra la parte (ii) del teorema 8:

Sea

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

La n-ésima suma parcial de la serie $\Sigma\,(a_n + b_n)$ es

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

y, a través de la ecuación 5.2.10, tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Sigma\,(a_n + b_n)$ es convergente y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

□

EJEMPLO 9 Determine la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right)$.

SOLUCIÓN La serie $\Sigma\, 1/2^n$ es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

En el ejemplo 6 encuentra que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Así, según el teorema 8, la serie dada es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n(n+1)} + \frac{1}{2^n} \right) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

□

NOTA 4 Una cantidad finita de términos no afecta la convergencia o divergencia de una serie. Por ejemplo, suponga que es capaz de demostrar que la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$$

es convergente. Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{9} + \frac{3}{28} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$$

se infiere que la serie completa $\sum_{n=1}^{\infty} n/(n^3+1)$ es convergente. Asimismo, si sabe que la serie $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ en tal caso, entonces la serie completa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

es también convergente.

11.2 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión y una serie?
(b) ¿Qué es una serie convergente? ¿Qué es una serie divergente?

2. Explique qué significa decir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$.

3–8 Calcule por lo menos 10 sumas parciales de las series. Dibuje tanto la sucesión de los términos como la sucesión de las sumas parciales en la misma pantalla. ¿Cómo parece ser la serie? ¿Convergente o divergente? Si es convergente, determine la suma. Si es divergente, explique la razón.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan n$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (0.6)^{n-1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{(n+1)}\right)$

8. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$

9. Sea $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.
(a) Determine si $\{a_n\}$ es convergente.
(b) Diga si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

10. (a) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j$$

(b) Explique la diferencia entre

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} a_j$$

11–20 Determine si la serie geométrica es convergente o divergente. Si es convergente, calcule la suma.

11. $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots$

12. $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$

13. $-3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$

14. $1 + 0.4 + 0.16 + 0.064 + \cdots$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

21–34 Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$

23. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^2}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [(0.8)^{n-1} - (0.3)^n]$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

30. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

35–40 Determine si la serie es convergente o divergente al expresar s_n como suma extensible (como en el ejemplo 6). Si es convergente, encuentre su suma.

35. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n}{n+1}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - e^{1/(n+1)})$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n^2} - \cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$

41–46 Exprese el número como una razón de enteros.

41. $0.\overline{2} = 0.2222\ldots$

42. $0.\overline{73} = 0.73737373\ldots$

43. $3.\overline{417} = 3.417417417\ldots$

44. $6.2\overline{54} = 6.2545454\ldots$

45. $1.53\overline{42}$

46. $7.\overline{12345}$

47–51 Calcule los valores de x para los cuales la serie converge. Determine la suma de la serie para dichos valores de x.

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

49. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$

50. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n}$

51. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^n x}{2^n}$

---

52. Puesto que la serie armónica es una serie divergente cuyos términos se aproximan a 0. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

es otra serie con esta propiedad.

CAS **53–54** Aplique el comando de las fracciones parciales en su sistema algebraico computacional para determinar la suma parcial, y luego aplique esta expresión para determinar la suma de la serie. Compruebe su respuesta usando directamente el sistema algebraico a la suma de la serie.

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{(n^2+n)^3}$

54. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n}$

---

55. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

56. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = 3 - n2^{-n}$, determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

57. Cuando el dinero se gasta en bienes y servicios, los que reciben el dinero también gastan un poco de él. Las personas que reciben algo del dinero gastado dos veces, gastarán algo de dicho dinero, y así sucesivamente. Los economistas llaman a esta reacción en cadena *efecto multiplicador*. En un hipotético pueblo aislado, el gobierno local inicia el proceso gastando D dólares. Suponga que cada persona que recibe dinero gasta $100c\%$ y ahorra $100s\%$ del dinero. Los valores c y s se denominan *propensión marginal al consumo* y *propensión marginal al ahorro* y, naturalmente, $c + s = 1$.

(a) Sea S_n el total de lo gastado que ha sido generado después de n transacciones. Determine una ecuación para S_n.

(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} S_n = kD$, donde $k = 1/s$. La cantidad k se llama *multiplicador*. ¿Cuál es el multiplicador si la propensión marginal al consumo es 80%?

Nota: El gobierno federal de Estados Unidos usa este principio para justificar el gasto que muestra déficit. Los bancos utilizan el principio para justificar los préstamos de un gran porcentaje del dinero que reciben como depósito.

58. Una cierta pelota tiene la característica de que cada vez que cae desde una altura h sobre una superficie nivelada y dura, rebota hasta una altura rh, donde $0 < r < 1$. Suponga que la pelota cae desde una altura inicial de H metros.

(a) Suponga que la pelota continúa rebotando de manera indefinida y calcule la distancia total que recorre. (Use el hecho de que la pelota cae $\frac{1}{2}gt^2$ metros en t segundos).

(b) Calcule el tiempo total que la pelota viaja.

(c) Suponga que cada vez que la pelota golpea la superficie con velocidad v rebota con velocidad $-kv$, donde $0 < k < 1$. ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota llegar al reposo?

59. ¿Cuál es el valor de c si

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2?$$

60. Encuentre el valor de c tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nc} = 10$$

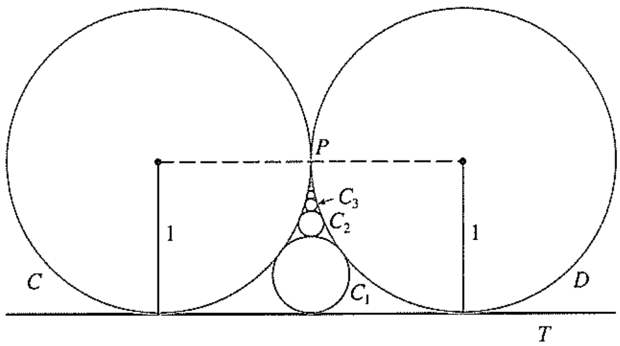
61. En el ejemplo 7 se demostró que la serie armónica es divergente. Aquí se resume otro método, haciendo uso del hecho de que $e^x > 1 + x$ para cualquier $x > 0$. (Vea el ejercicio 4.3.76.)

Si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, demuestre que $e^{s_n} > n + 1$. ¿Por qué esto implica que la serie armónica es divergente?

62. Dibuje las curvas $y = x^n$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sobre una misma pantalla. Determine las áreas entre las curvas sucesivas y mediante geometría demuestre el hecho siguiente, demostrado en el ejemplo 6,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

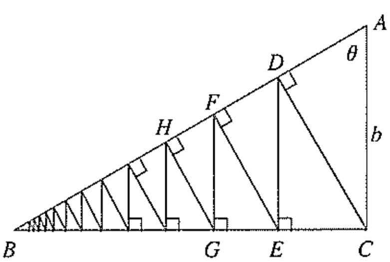
63. En la figura se ilustran dos círculos C y D de radio 1 que se tocan en P. T es una tangente común; C_1 es el círculo que toca C, D y T; C_2 es el círculo que toca C, D y C_1; C_3 es el círculo que toca C, D y C_2. Este procedimiento puede continuar en forma indefinida y produce una sucesión infinita de círculos $\{C_n\}$. Determine una expresión para el diámetro de C_n y, de ese modo, proporcione otra demostración geométrica del ejemplo 6.



64. Un triángulo rectángulo ABC está definido con $\angle A = \theta$ y $|AC| = b$. CD se traza perpendicular a AB, DE se traza en forma perpendicular a BC, $EF \perp AB$, y este procedimiento continúa en forma indefinida como se ilustra en la figura. Determine la longitud total de todas las perpendiculares

$$|CD| + |DE| + |EF| + |FG| + \cdots$$

en términos de b y θ.



65. ¿Qué es lo que está mal en el cálculo siguiente?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1 \end{aligned}$$

(Guido Ubaldus pensaba que esto demostraba la existencia de Dios, porque "se había creado algo de la nada").

66. Suponga que se sabe que $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \neq 0$) es una serie convergente. Demuestre que $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ es una serie divergente.

67. Demuestre la parte (i) del teorema 8.

68. Si $\Sigma\, a_n$ es divergente y $c \neq 0$, demuestre que $\Sigma\, ca_n$ es divergente.

69. Si $\Sigma\, a_n$ es convergente y $\Sigma\, b_n$ es divergente, demuestre que la serie $\Sigma\, (a_n + b_n)$ es divergente. [*Sugerencia*: aplique el razonamiento de contradicción.]

70. Si $\Sigma\, a_n$ y $\Sigma\, b_n$ son divergentes, ¿necesariamente $\Sigma\, (a_n + b_n)$ es divergente?

71. Suponga que una serie $\Sigma\, a_n$ consta de términos positivos y sus sumas parciales s_n cumplen con la desigualdad $s_n \leqslant 1000$ para toda n. Explique por qué $\Sigma\, a_n$ debe ser convergente.

72. La sucesión de Fibonacci se define en la sección 11.1 mediante las ecuaciones

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geqslant 3$$

Demuestre que cada uno de los siguientes enunciados es válido.

(a) $\dfrac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1}f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

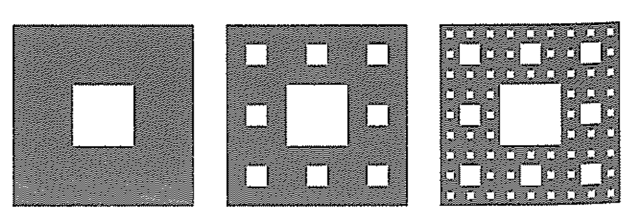
(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$

73. El **conjunto de Cantor**, nombrado así en honor al matemático alemán Georg Cantor (1845-1918), se construye como se señala a continuación. Empiece con el intervalo cerrado $[0, 1]$ y retire el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Esto deja los dos intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y luego elimine el intervalo abierto constituido por el tercio medio de cada uno. De este modo quedan cuatro intervalos y de nuevo elimine el tercio medio de cada uno de ellos. Continúe este procedimiento de manera indefinida eliminando en cada paso el tercio medio de cada intervalo que queda del paso anterior. El conjunto de Cantor consiste en los números que quedan en $[0, 1]$ después de que todos esos intervalos se han eliminado.

(a) Demuestre que la longitud total de todos los intervalos que se eliminan es 1. A pesar de eso, el conjunto de Cantor contiene una cantidad infinita de números. Proporcione ejemplos de algunos números del conjunto de Cantor.

(b) El **tapete de Sierpinski** es un equivalente en dos dimensiones del conjunto de Cantor. Se construye eliminando el noveno central de un cuadrado de lado 1, y luego se elimina el centro de cada uno de los ocho cuadrados restantes, y así sucesivamente. (En la figura se ilustran los primeros tres pasos de la construcción). Demuestre que la suma de las áreas de los cuadrados eliminados es 1. Esto significa que el área del tapete de Sierpinski es cero.



74. (a) Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante la ecuación $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$ para $n \geqslant 3$, donde a_1 y a_2 son números reales. Experimente con varios valores de a_1 y a_2 y con la ayuda de su calculadora adivine el límite de la sucesión.

(b) Encuentre $\lim_{n\to\infty} a_n$ en términos de a_1 y a_2 escribiendo $a_{n+1} - a_n$ en función de $a_2 - a_1$ y sume la serie.

75. Considere la serie

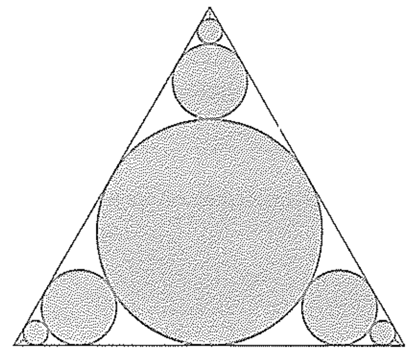
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

(a) Calcule las sumas parciales s_1, s_2, s_3 y s_4. ¿Reconoce los denominadores? Mediante el patrón conjeture una fórmula para s_n.

(b) Aplique la inducción matemática para demostrar su conjetura.

(c) Demuestre que la serie infinita dada es convergente y calcule la suma

76. En la figura hay una cantidad infinita de círculos que se aproximan a los vértices de un triángulo equilátero. Cada círculo toca a otros círculos y a los lados del triángulo. Si el triángulo tiene lados que miden una unidad de longitud, calcule el área total que ocupan los círculos.



11.3 LA PRUEBA DE LA INTEGRAL Y ESTIMACIONES DE LAS SUMAS

En general, es difícil determinar la suma exacta de una serie. Se es capaz de lograrlo en el caso de series geométricas y las series $\Sigma\ 1/[n(n+1)]$ porque en cada uno de estos casos es posible encontrar una fórmula simple para la n-ésima suma parcial s_n. Pero por lo regular no es fácil calcular $\lim_{n\to\infty} s_n$. Por lo tanto, en las siguientes secciones se tratan varias pruebas que permiten determinar si una serie es convergente o divergente sin que se tenga que encontrar en forma explícita su suma. (En algunos casos, los métodos permiten determinar unas buenas estimaciones de la suma.) El primer método utiliza integrales impropias.

Empiece por investigar las series cuyos términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$
5	1.4636
10	1.5498
50	1.6251
100	1.6350
500	1.6429
1000	1.6439
5000	1.6447

No hay una fórmula sencilla para la suma s_n de los primeros n términos, pero la tabla generada mediante una computadora de los valores, dados en el margen sugiere que las sumas parciales se aproximan a un número cercano a 1.64 cuando $n \to \infty$ y de este modo parece como si la serie fuera convergente.

Se confirma esta impresión con un razonamiento geométrico. En la figura 1 se ilustra la curva $y = 1/x^2$ y algunos rectángulos que se encuentran abajo de la curva. La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud igual a 1; la altura es igual al valor de la función $y = 1/x^2$ en el extremo derecho del intervalo de este modo, la suma de las áreas de los rectángulos es

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

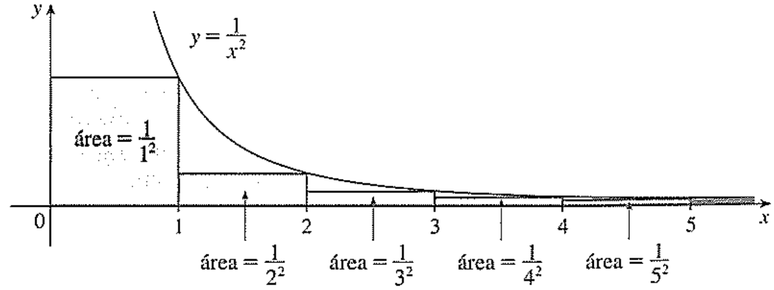


FIGURA 1

Si excluye el primer rectángulo, el área total de los rectángulos restantes es menor que el área bajo la curva $y = 1/x^2$ para $x \geqslant 1$, que es el valor de la integral $\int_1^\infty (1/x^2)\,dx$. En la sección 7.8 descubrió que esta integral impropia es convergente y que tiene un valor de 1. De modo que la figura muestra que todas las sumas parciales son menores que

$$\frac{1}{1^2} + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

En estos términos, las sumas parciales están acotadas. También sabe que las sumas parciales son crecientes porque todos los términos son positivos. Por lo tanto, las sumas parciales convergen, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona, y de esa manera la serie es convergente. La suma de la serie (el límite de las sumas parciales) es también menor que 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < 2$$

[El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) calculó que la suma exacta de esta serie es $\pi^2/6$, pero la demostración de esto es muy difícil. Véase el problema 6 en los Problemas adicionales después del capítulo 15].

Ahora estudie la serie

n	$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$
5	3.2317
10	5.0210
50	12.7524
100	18.5896
500	43.2834
1000	61.8010
5000	139.9681

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$

La tabla de valores de s_n hace pensar en que las sumas parciales no se aproximan a un número finito, de modo que se sospecha que la serie dada podría ser divergente. Una vez más use una imagen para confirmarlo. En la figura 2 se ilustra la curva $y = 1/\sqrt{x}$, pero esta vez se usan rectángulos cuya parte superior queda por *encima* de la curva.

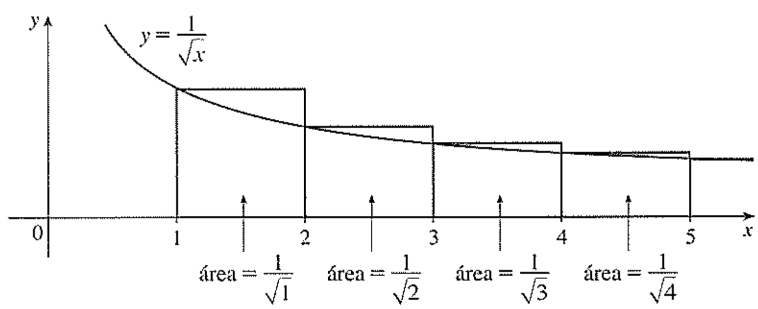


FIGURA 2

La base de cada uno de los rectángulos es un intervalo de longitud 1. La altura es igual al valor de la función $y = 1/\sqrt{x}$ en el extremo *izquierdo* del intervalo. Así, la suma de las áreas de todos los rectángulos es

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esta área total es mayor que el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ para $x \geqslant 1$, que es igual a la integral $\int_1^\infty \left(1/\sqrt{x}\right) dx$. Pero según la sección 7.8, esta integral impropia es divergente. En otras palabras, el área bajo la curva es infinita. Por eso, la suma de la serie debe ser infinita; es decir, la serie es divergente.

El mismo tipo de razonamiento geométrico aplicado para estas dos series, se puede hacer para demostrar la prueba siguiente. (La demostración se encuentra al final de esta sección.)

PRUEBA DE LA INTEGRAL Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ y sea $a_n = f(n)$. En tal caso la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente. En otras palabras:

(i) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es convergente, por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

(ii) Si $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es divergente, por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

NOTA Cuando use la prueba de la integral no es necesario iniciar la serie o la integral en $n = 1$. Por ejemplo, al probar la serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)^2} \qquad \text{use} \qquad \int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

Asimismo, no es necesario que f sea siempre decreciente. Lo importante es que f sea decreciente *por último*, es decir, decreciente para x más grande que algún número N. En consecuencia $\Sigma_{n=N}^{\infty} a_n$ es convergente, de modo que $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente de acuerdo con la nota 4 de la sección 11.2.

EJEMPLO 1 Pruebe la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ para ver si es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ de modo que aplique la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \tan^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\tan^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, $\int_1^{\infty} 1/(x^2+1)\,dx$ es una integral convergente y si es así, de acuerdo con la prueba de la integral, la serie $\Sigma\, 1/(n^2+1)$ es convergente. □

EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de p es la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergente?

▪ Para usar la prueba integral necesita evaluar $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ y, por lo tanto, tiene que hallar una antiderivada de f. Es frecuente que esto sea difícil o imposible, de modo que también necesita otras pruebas para convergencia.

SOLUCIÓN Si $p < 0$, en seguida $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$. Si $p = 0$, en tal caso $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$. En cualquier caso $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) \neq 0$, por lo que la serie dada es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia (11.2.7).

Si $p > 0$, por lo tanto la función $f(x) = 1/x^p$ evidentemente es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$. Según el capítulo 7 [véase (7.8.2)],

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \text{ converge si } p > 1 \text{ y diverge si } p \leq 1$$

Se infiere de la prueba de la integral que la serie $\Sigma\, 1/n^p$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 < p \leq 1$. (En el caso de $p = 1$, esta serie es la serie armónica estudiada en el ejemplo 7 de la sección 11.2). □

La serie del ejemplo 2 se llama **serie p**. Es importante en el resto de este capítulo, de modo que se resumen los resultados del ejemplo 2 para referencia futura como se indica a continuación.

$\boxed{1}$ La serie p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

EJEMPLO 3

(a) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

es convergente porque es una serie p con $p = 3 > 1$.

(b) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$$

es divergente porque es una serie p con $p = \frac{1}{3} < 1$. □

NOTA *No* debe inferir que, de acuerdo con la prueba de la integral, la suma de la serie es igual al valor de la integral. En efecto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{en tanto que} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

EJEMPLO 4 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\ln x)/x$ es positiva y continua para $x > 1$ porque la función logaritmo es continua. Pero no es obvio si f es decreciente o no lo es, de modo que al calcular su derivada:

$$f'(x) = \frac{(1/x)x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Por lo tanto, $f'(x) < 0$ cuando $\ln x > 1$, es decir, $x > e$. Se infiere que f es decreciente cuando $x > e$ y así aplicar la prueba de la integral:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \left. \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$$

Puesto que esta integral impropia es divergente, la serie $\Sigma\, (\ln n)/n$ también es divergente de acuerdo con la prueba de la integral. □

ESTIMACIÓN DE LA SUMA DE UNA SERIE

Suponga que pudo aplicar la prueba de la integral para demostrar que una serie $\Sigma\, a_n$ es convergente y que quiere encontrar una aproximación a la suma s de la serie. Claro, cualquier suma parcial s_n es una aproximación a s porque $\lim_{n \to \infty} s_n = s$. Pero, ¿qué tan buena es esa aproximación? Para saberlo, necesita estimar el tamaño del **residuo**.

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

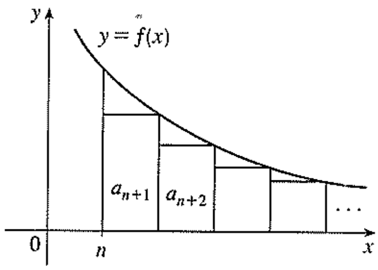


FIGURA 3

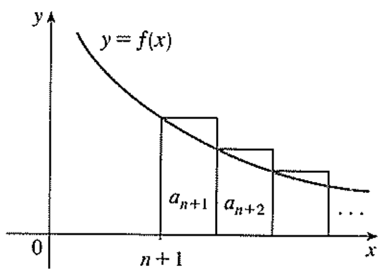


FIGURA 4

El residuo R_n es el error que se comete cuando s_n, la suma de los primeros n términos, se usa como una aproximación a la suma total.

Se usa la misma notación y las ideas que en la prueba de la integral, suponiendo que f es decreciente en $[n, \infty)$. Al comparar las áreas de los rectángulos con el área bajo $y = f(x)$ para $x > n$ en la figura 3

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

Asimismo, en la figura 4

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \geqslant \int_{n+1}^\infty f(x)\,dx$$

De este modo se demuestra la siguiente estimación de error.

> $\boxed{2}$ **ESTIMACIÓN DEL RESIDUO PARA LA PRUEBA DE LA INTEGRAL** Suponga $f(k) = a_k$, donde f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant n$ y $\Sigma\, a_n$ es convergente. Si $R_n = s - s_n$, por lo tanto
>
> $$\int_{n+1}^\infty f(x)\,dx \leqslant R_n \leqslant \int_n^\infty f(x)\,dx$$

V EJEMPLO 5

(a) Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie $\Sigma\, 1/n^3$ usando la suma de los primeros 10 términos. Estime el error originado en esta aproximación.

(b) ¿Cuántos términos se requieren para asegurar que la suma no difiere en más de 0.0005?

SOLUCIÓN En los incisos (a) y (b) necesita conocer $\int_n^\infty f(x)\,dx$. Con $f(x) = 1/x^3$, que satisface las condiciones de la prueba integral, tiene

$$\int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

(a)

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \approx s_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1.1975$$

De acuerdo con el residuo estimado en (2) tiene

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2(10)^2} = \frac{1}{200}$$

De modo que el tamaño del error es cuanto mucho de 0.005.

(b) La precisión de 0.0005 quiere decir que debe encontrar un valor de n tal que $R_n \leqslant 0.0005$. Puesto que

$$R_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

quiere

$$\frac{1}{2n^2} < 0.0005$$

Al resolver la desigualdad, sabe que

$$n^2 > \frac{1}{0.001} = 1000 \qquad \text{o bien,} \qquad n > \sqrt{1000} \approx 31.6$$

Necesita 32 términos para tener la seguridad de que no habrá una diferencia mayor que 0.0005. □

Si suma s_n a cada miembro de las desigualdades en (2), obtiene

3
$$\boxed{s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant s \leqslant s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)\,dx}$$

porque $s_n + R_n = s$. Las desigualdades en (3) dan una cota inferior y una cota superior para s. Proporcionan una aproximación más certera a la suma de la serie que la suma parcial s_n.

EJEMPLO 6 Use (3) con $n = 10$ para estimar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

SOLUCIÓN Las desigualdades en (3) se vuelven

$$s_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \leqslant s \leqslant s_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$$

Del ejemplo 5 sabe que

$$\int_{n}^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2n^2}$$

de modo que
$$s_{10} + \frac{1}{2(11)^2} \leqslant s \leqslant s_{10} + \frac{1}{2(10)^2}$$

Si usa $s_{10} \approx 1.197532$, obtiene

$$1.201664 \leqslant s \leqslant 1.202532$$

Si obtiene la aproximación de s por medio del punto medio de este intervalo, en este caso el error es cuanto mucho la mitad de la longitud del intervalo. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.2021 \qquad \text{con error} < 0.0005$$ □

Si compara el ejemplo 6 con el ejemplo 5, observa que la estimación mejorada en (3) puede ser mucho mejor que la estimación $s \approx s_n$. Para que el error sea menor que 0.0005 tiene que usar 32 términos en el ejemplo 5, pero sólo 10 términos en el ejemplo 6.

DEMOSTRACIÓN DE LA PRUEBA DE LA INTEGRAL

Ya se trató la idea básica en la que se apoya la demostración de la prueba de la integral en las figuras 1 y 2 para la serie $\Sigma\, 1/n^2$ y $\Sigma\, 1/\sqrt{n}$. En el caso de la serie general $\Sigma\, a_n$ examine las figuras 5 y 6. El área del primer rectángulo sombreado de la figura 5 es el valor de f en el extremo derecho de $[1, 2]$, es decir, $f(2) = a_2$. De esta manera, al comparar

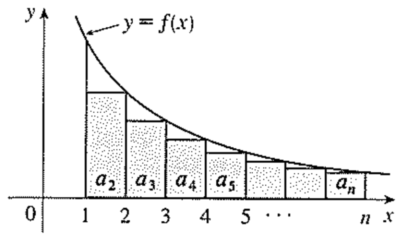


FIGURA 5

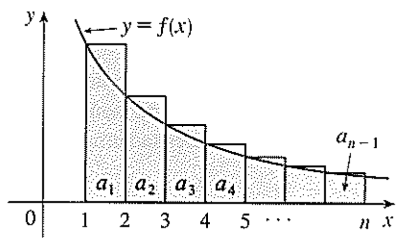


FIGURA 6

las áreas de los rectángulos sombreados con el área bajo $y = f(x)$ desde 1 hasta n observa que

$$\boxed{4} \qquad a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

(Observe que esta desigualdad depende del hecho de que f es decreciente.) De manera similar, en la figura 6 se muestra que`

$$\boxed{5} \qquad \int_1^n f(x)\,dx \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

(i) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es convergente, en este caso (4) da

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant \int_1^\infty f(x)\,dx$$

puesto que $f(x) \geqslant 0$. Por lo tanto

$$s_n = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i \leqslant a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx = M$$

Como $s_n \leqslant M$ para toda n, la sucesión $\{s_n\}$ está acotada por arriba. Asimismo,

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$$

como $a_{n+1} = f(n+1) \geqslant 0$. En estos términos, $\{s_n\}$ es una sucesión acotada creciente y, de este modo, es convergente de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona (11.1.12). Esto quiere decir que $\Sigma\, a_n$ es convergente.

(ii) Si $\int_1^\infty f(x)\,dx$ es divergente, después $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ cuando $n \to \infty$ porque $f(x) \geqslant 0$. Pero con (5) se obtiene

$$\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} a_i = s_{n-1}$$

y también $s_{n-1} \to \infty$. Esto quiere decir que $s_n \to \infty$ entonces diverge $\Sigma\, a_n$. □

11.3 EJERCICIOS

1. Dibuje una imagen para demostrar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.3}} < \int_1^\infty \frac{1}{x^{1.3}}\,dx$$

¿Qué puede concluir con respecto a la serie?

2. Suponga que f es una función continua, positiva y decreciente para $x \geqslant 1$ y $a_n = f(n)$. En una imagen acomode las tres cantidades siguientes en orden creciente.

$$\int_1^6 f(x)\,dx \qquad \sum_{i=1}^{5} a_i \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i$$

3–8 Mediante la prueba de la integral determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}}$

$\boxed{7.}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1}$

9–26 Determine si la serie es convergente o divergente.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{0.85}}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{-1.4} + 3n^{-1.2})$

11. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

12. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

13. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$

14. $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \cdots$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2\sqrt{n}}{n^3}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 2}{n(n + 1)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + 1}$

27–30 Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente.

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

28. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n\, [\ln(\ln n)]^p}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} n(1 + n^2)^p$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$

---

31. La función zeta de Riemann ζ se define como

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

y se usa en teoría de los números para estudiar la distribución de los números primos. ¿Cuál es el dominio de ζ?

32. (a) Calcule la suma parcial s_{10} de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$. Estime el error al usar s_{10} como una aproximación a la suma de la serie.
(b) Use (3) con $n = 10$ para conseguir una estimación mejorada de la suma.
(c) Calcule un valor de n tal que s_n no difiera más de 0.00001 del valor de la suma.

33. (a) Mediante la suma de los primeros 10 términos, estime la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$. ¿Qué tan buena es la estimación?
(b) Mejore esta estimación usando (3) con $n = 10$.
(c) Encuentre un valor de n que dé la certeza de que el error en la aproximación $s \approx s_n$ es menor que 0.001.

34. Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^5$ correcto con tres cifras decimales.

35. Estime $\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)^{-6}$ correcta a cinco lugares decimales.

36. ¿Cuántos términos de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} 1/[n(\ln n)^2]$ se necesitarían sumar para calcular la suma que no difiera de 0.01?

37. Demuestre que si busca obtener un valor aproximado de la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1.001}$ de modo que el error sea menor de 5 en la novena cifra decimal, en este caso ¡necesita sumar más de $10^{11.301}$ términos!

CAS **38.** (a) Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^2/n^2$ es convergente.
(b) Encuentre una cota superior para el error en la aproximación $s \approx s_n$.
(c) ¿Cuál es el valor más pequeño de n tal que esta cota superior sea menor que 0.05?
(d) Encuentre s_n para este valor de n.

39. (a) Mediante (4) demuestre que si s_n es la n-ésima suma parcial de la serie armónica, entonces

$$s_n \leqslant 1 + \ln n$$

(b) La serie armónica diverge, pero muy lentamente. Con ayuda del inciso (a) demuestre que la suma del primer millón de términos es menor que 15 y que la suma de los primeros mil millones de términos es menor que 22.

40. Siga los pasos siguientes para demostrar que la sucesión

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

tiene un límite. (El valor del límite se denota con γ y se denomina constante de Euler.)
(a) Dibuje un diagrama como la figura 6 con $f(x) = 1/x$ e interprete t_n como un área, o bien use (5), para demostrar que $t_n > 0$ para toda n.
(b) Interprete

$$t_n - t_{n+1} = [\ln(n + 1) - \ln n] - \frac{1}{n + 1}$$

como una diferencia de áreas para demostrar que $t_n - t_{n+1} > 0$. Por lo tanto, $\{t_n\}$ es una sucesión decreciente.
(c) Aplique el teorema de sucesión monótona para demostrar que $\{t_n\}$ es convergente.

41. Determine todos los valores positivos de b para los cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b^{\ln n}$ converge.

42. Encuentre todos los valores de c para los que converge la siguiente serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n} - \frac{1}{n + 1} \right)$$

11.4 PRUEBAS POR COMPARACIÓN

En las pruebas por comparación, la idea es contrastar una serie dada con una serie que ya se sabe que es convergente o divergente. Por ejemplo, la serie

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$$

recuerda a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$, la cual es una serie geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$ por lo tanto, es convergente. Como la serie (1) es tan parecida a una serie convergente, también tiene que ser convergente. De hecho, así es. La desigualdad

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$$

demuestra que la serie dada (1) tiene términos menores que los de la serie geométrica y, por lo tanto, todas las sumas parciales son también más pequeñas que 1 (la suma de la serie geométrica). Esto quiere decir que las sumas parciales forman una sucesión creciente acotada, la cual es convergente. Asimismo, se infiere que la suma de la serie es menor que la suma de la serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1$$

Un razonamiento similar se puede hacer para demostrar la prueba siguiente, la cual se aplica sólo a series cuyos términos son positivos. La primera parte dice que si tiene una serie cuyos términos son *menores* que los de una serie conocida *convergente*, por lo tanto la serie también es convergente. La segunda parte establece que si empieza con una serie cuyos términos son *mayores* que los de una serie *divergente* conocida, en tal caso también es divergente.

PRUEBA POR COMPARACIÓN Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos.
(i) Si $\sum b_n$ es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para toda n, después $\sum a_n$ también es convergente.
(ii) Si $\sum b_n$ es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para toda n, en seguida $\sum a_n$ también es divergente.

▪ Es importante estar atento a la distinción entre sucesión y serie. Una sucesión es un listado de números, y una serie es una suma. Con toda serie $\sum a_n$ hay dos sucesiones asociadas: la sucesión $\{a_n\}$ de términos y la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales.

DEMOSTRACIÓN

(i) Sea $\qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Puesto que ambas series tienen términos positivos, las sucesiones $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son crecientes ($s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n$). Asimismo, $t_n \to t$, así que $t_n \leqslant t$ para toda n. Como $a_i \leqslant b_i$, $s_n \leqslant t_n$. De este modo, $s_n \leqslant t$ para toda n. Esto quiere decir que $\{s_n\}$ es creciente y está acotada por arriba, de donde se sabe que converge de acuerdo con el teorema de sucesión monótona. En estos términos, $\sum a_n$ converge.

(ii) Si $\sum b_n$ es divergente, después $t_n \to \infty$ (puesto que $\{t_n\}$ es creciente). Pero $a_i \geqslant b_i$ de modo que $s_n \geqslant t_n$. Por esto, $s_n \to \infty$. De donde sabe que $\sum a_n$ diverge. □

Naturalmente, al usar la prueba por comparación es necesario tener alguna serie conocida $\sum b_n$ para los fines de la comparación. La mayor parte de las veces se usan series:

La serie estándar se usa con la prueba por comparación

- p [$\sum 1/n^p$ que convergen si $p > 1$ y divergen si $p \leqslant 1$; véase (11.3.1)] o bien,
- series geométricas [$\sum ar^{n-1}$ es convergente si $|r| < 1$ y es divergente si $|r| \geqslant 1$; véase (11.2.4)].

EJEMPLO 1 Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN En el caso de n grandes el término dominante en el denominador es $2n^2$ de modo que compare la serie dada con la serie $\Sigma\, 5/(2n^2)$. Observe que

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

porque el lado izquierdo tiene un denominador más grande. (En la notación de la prueba por comparación, a_n está en el lado izquierdo y b_n en el lado derecho). Ya sabe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

es convergente porque es una constante por una serie p con $p = 2 > 1$. Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2 + 4n + 3}$$

es convergente de acuerdo con el inciso (i) de la prueba por comparación. □

NOTA 1 La condición $a_n \leqslant b_n$ o bien, $a_n \geqslant b_n$ de la prueba por comparación es para toda n, es necesario comprobar sólo que se cumple para $n \geqslant N$, donde N es un entero establecido, porque la convergencia de una serie no está afectada por un número finito de términos. Lo anterior se ilustra con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Esta serie se probó (usando la prueba de la integral) en el ejemplo 4 de la sección 11.3, pero también es posible probarla por comparación con la serie armónica. Observe que $\ln n > 1$ para $n \geqslant 3$ y de esa manera

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \qquad n \geqslant 3$$

Ya sabe que $\Sigma\, 1/n$ es divergente (serie p con $p = 1$). De esta manera la, serie dada es divergente de acuerdo con la prueba por comparación. □

NOTA 2 Los términos de la serie que se está probando deben ser menores que los de una serie convergente, o mayores que los de una serie divergente. Si los términos son más grandes que los términos de una serie convergente, o bien, menores que los de una serie divergente, en tal caso la prueba por comparación no se aplica. Por ejemplo, considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

La desigualdad

$$\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$$

es inútil en cuanto a la prueba por comparación porque $\Sigma\, b_n = \Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es convergente y $a_n > b_n$. Sin embargo, la impresión es que $\Sigma\, 1/(2^n - 1)$ tiene que ser convergente porque es muy parecida a la serie geométrica convergente $\Sigma \left(\frac{1}{2}\right)^n$. En tal caso se puede aplicar la prueba siguiente.

■ Los ejercicios 40 y 41 tratan los casos $c = 0$ y $c = \infty$.

PRUEBA POR COMPARACIÓN EN EL LÍMITE Suponga que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series con términos positivos. Si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

donde c es un número finito y $c > 0$, en seguida ambas series convergen o ambas divergen.

DEMOSTRACIÓN Sea m y M números positivos tales que $m < c < M$. Como a_n/b_n está cercano a c para n grande, hay un entero N tal que

$$m < \frac{a_n}{b_n} < M \qquad \text{cuando } n > N$$

y así

$$mb_n < a_n < Mb_n \qquad \text{cuando } n > N$$

Si $\sum b_n$ es convergente, así también $\sum Mb_n$. En estos términos, $\sum a_n$ converge según la parte (i) de la prueba por comparación. Si $\sum b_n$ diverge, de esa manera también $\sum mb_n$ y la parte (ii) de la prueba por comparación demuestra que $\sum a_n$ diverge. □

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN Aplique la prueba por comparación en el límite con

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \qquad b_n = \frac{1}{2^n}$$

y obtiene

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1/(2^n - 1)}{1/2^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1 > 0$$

Puesto que existe este límite y $\sum 1/2^n$ es una serie convergente geométrica, la serie dada converge de acuerdo con la prueba por comparación en el límite. □

EJEMPLO 4 Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La parte dominante del numerador es $2n^2$ y la parte dominante del denominador es $\sqrt{n^5} = n^{5/2}$. Esto recomienda efectuar

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \qquad b_n = \frac{2n^2}{n^{5/2}} = \frac{2}{n^{1/2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + 3n}{\sqrt{5 + n^5}} \cdot \frac{n^{1/2}}{2} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^{5/2} + 3n^{3/2}}{2\sqrt{5 + n^5}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{2\sqrt{\dfrac{5}{n^5} + 1}} = \frac{2 + 0}{2\sqrt{0 + 1}} = 1$$

Puesto que $\Sigma\, b_n = 2\, \Sigma\, 1/n^{1/2}$ es divergente (es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$), la serie dada diverge de acuerdo con la prueba por comparación en el límite. □

Observe que al probar muchas series se encuentra una serie conveniente $\Sigma\, b_n$ conservando sólo las potencias más altas en el numerador y en el denominador.

ESTIMACIÓN DE SUMAS

Si ha usado la prueba por comparación para demostrar que una serie $\Sigma\, a_n$ es convergente por comparación con una serie $\Sigma\, b_n$, después podría ser capaz de estimar la suma $\Sigma\, a_n$ al comparar los residuos. Como en la sección 11.3, considere el residuo

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

En cuanto a la serie de comparación $\Sigma\, b_n$ considere el residuo correspondiente

$$T_n = t - t_n = b_{n+1} + b_{n+2} + \cdots$$

Puesto que $a_n \leqslant b_n$ para toda n, $R_n \leqslant T_n$. Si $\Sigma\, b_n$ es una serie p, estime su residuo T_n como en la sección 11.3. Si $\Sigma\, b_n$ es una serie geométrica, por lo tanto T_n es la suma de una serie geométrica y puede sumarla exactamente (véanse ejercicios 35 y 36). En cualquier caso, sabe que R_n es menor que T_n.

EJEMPLO 5 Con la suma de los primeros 100 términos obtenga un valor aproximado de la suma de la serie $\Sigma\, 1/(n^3 + 1)$. Estime el error de esta aproximación.

SOLUCIÓN Como

$$\frac{1}{n^3 + 1} < \frac{1}{n^3}$$

la serie dada es convergente de acuerdo con la prueba por comparación. El residuo T_n de la serie de comparación $\Sigma\, 1/n^3$ ya se estimó en el ejemplo 5 de la sección 11.3 por medio de la estimación del residuo para la prueba de la integral. Allí se encontró que

$$T_n \leqslant \int_n^\infty \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2n^2}$$

Por lo tanto, el residuo R_n de la serie dada cumple con

$$R_n \leqslant T_n \leqslant \frac{1}{2n^2}$$

Con $n = 100$

$$R_{100} \leqslant \frac{1}{2(100)^2} = 0.00005$$

Con una calculadora programable o una computadora, resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} \approx \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^3 + 1} \approx 0.6864538$$

con un error menor que 0.00005. □

11.4 EJERCICIOS

1. Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que se sabe que Σb_n es convergente.
(a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué puede decir con respecto a Σa_n? ¿Por qué?
(b) Si $a_n < b_n$ para toda n, qué puede decir con respecto a Σa_n? ¿Por qué?

2. Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que se sabe que Σb_n es divergente.
(a) Si $a_n > b_n$ para toda n, ¿qué puede decir de Σa_n? ¿Por qué?
(b) Si $a_n < b_n$ para toda n, ¿que puede decir con respecto a Σa_n? ¿Por qué?

3–32 Determine si la serie es convergente o divergente.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$ **4.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4-1}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n^4+1}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n}$ **12.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\operatorname{sen} n}{10^n}$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1.2}}$ **14.** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ **16.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ **18.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$ **20.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4^n}{n+6^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$ **22.** $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^3}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$ **24.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-5n}{n^3+n+1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+n^2}{\sqrt{1+n^2+n^6}}$ **26.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$ **28.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **30.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ **32.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$

33–36 Mediante la suma de los primeros 10 términos, obtenga un valor aproximado de la suma de la serie. Estime el error.

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$ **34.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 n}{n^3}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$ **36.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)3^n}$

37. El significado de la representación decimal de un número $0.d_1d_2d_3\ldots$ (donde el dígito d_i es uno de los números 0, 1, 2, . . . , 9) es que

$$0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots$$

Demuestre que esta serie siempre es convergente.

38. ¿Para qué valores de p la serie $\Sigma_{n=2}^{\infty} 1/(n^p \ln n)$ es convergente?

39. Demuestre que si $a_n \geqslant 0$ y Σa_n converge, por lo tanto Σa_n^2 también converge.

40. (a) Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que Σb_n es convergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

entonces Σa_n también es convergente.
(b) Mediante el inciso (a) demuestre que la serie converge.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}e^n}$

41. (a) Suponga que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos y que Σb_n es divergente. Demuestre que si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

en seguida Σa_n también es divergente.
(b) Use el inciso (a) para demostrar que la serie es divergente.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

42. Proporcione un ejemplo de un par de series Σa_n y Σb_n con términos positivos donde $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ y Σb_n diverge, pero Σa_n converge. [Compare con el ejercicio 40.]

43. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} na_n \neq 0$, en tal caso Σa_n es divergente.

44. Demuestre que si $a_n > 0$ y Σa_n es convergente, por lo tanto $\Sigma \ln(1+a_n)$ es convergente.

45. Si Σa_n es una serie convergente con términos positivos, ¿es cierto que $\Sigma \operatorname{sen}(a_n)$ también es convergente?

46. Si Σa_n y Σb_n son series convergentes con términos positivos, ¿es cierto que Σa_nb_n también es convergente?

11.5 SERIES ALTERNANTES

Las pruebas de convergencia que se han examinado hasta este momento se aplican sólo a series con términos positivos. En esta sección y en la siguiente, se estudia cómo tratar a series cuyos términos no son necesariamente positivos. De particular importancia son las *series alternantes*, cuyos términos se alternan en signo.

Una **serie alternante** es una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos. Aquí hay dos ejemplos:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{6} + \frac{6}{7} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

De acuerdo con los ejemplos, el n-ésimo término de una serie alternante es de la forma

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n \qquad \text{o bien,} \qquad a_n = (-1)^n b_n$$

donde b_n es un número positivo. (En efecto, $b_n = |a_n|$.)

La prueba siguiente establece que si los términos de una serie alternante decrecen hacia 0 en valor absoluto, en este caso la serie converge.

PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE Si la serie alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad (b_n > 0)$$

cumple con

$$\text{(i)} \quad b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{para toda } n$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n \to \infty} b_n = 0$$

después la serie es convergente.

Antes de proporcionar la demostración vea la figura 1, la cual es una representación de la idea en la que se apoya la demostración. Primero dibuje $s_1 = b_1$ en una recta numérica. Para determinar s_2 reste b_2, de modo que s_2 está a la izquierda de s_1. Luego, para determinar s_3 sume b_3, de modo que s_3 está a la derecha de s_2. Pero como $b_3 < b_2$, s_3 está a la izquierda de s_1. Al continuar de esta manera, se observa que las sumas parciales oscilan hacia un lado y hacia el otro. Puesto que $b_n \to 0$, los pasos siguientes se vuelven más y más pequeños. Las sumas parciales pares $s_2, s_4, s_6, \ldots$ se incrementan, y decrecen las sumas parciales impares $s_1, s_3, s_5, \ldots$ En estos términos, es posible que ambas converjan en el mismo número s, el cual es la suma de la serie. Por consiguiente, en la demostración siguiente se consideran por separado las sumas parciales pares e impares.

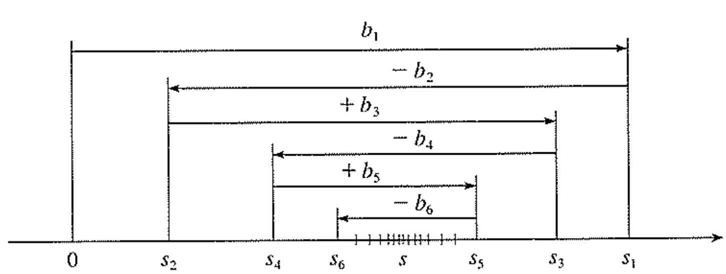


FIGURA 1

DEMOSTRACIÓN DE LA PRUEBA DE LA SERIE ALTERNANTE Primero considere las sumas parciales pares:

$$s_2 = b_1 - b_2 \geqslant 0 \qquad \text{puesto que } b_2 \leqslant b_1$$

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) \geqslant s_2 \qquad \text{puesto que } b_4 \leqslant b_3$$

En general, $s_{2n} = s_{2n-2} + (b_{2n-1} - b_{2n}) \geqslant s_{2n-2}$ puesto que $b_{2n} \leqslant b_{2n-1}$

Por esto, $0 \leqslant s_2 \leqslant s_4 \leqslant s_6 \leqslant \cdots \leqslant s_{2n} \leqslant \cdots$

Pero también puede escribir

$$s_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}$$

Todos los términos entre paréntesis son positivos, de modo que $s_{2n} \leqslant b_1$ para toda n. Por lo tanto, la sucesión $\{s_{2n}\}$ de las sumas parciales pares se incrementa y está acotada por arriba. Debido a eso, de acuerdo con el teorema de la sucesión monótona es convergente. Llame s a su límite, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$$

Ahora calcule el límite de las sumas parciales impares:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n} + b_{2n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} \\ &= s + 0 \qquad \text{[según la condición ii)]} \\ &= s \end{aligned}$$

Puesto que tanto la suma parcial par como la suma parcial impar convergen en s, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ (véase el ejercicio 80(a) de la sección 11.1), por lo que la serie es convergente. □

En la figura 2 se ilustra el ejemplo 1; se muestran las gráficas de los términos $a_n = (-1)^{n-1}/n$ y las sumas parciales s_n. Observe cómo los valores de s_n van en zigzag dentro del límite, el cual al parecer está alrededor de 0.7. De hecho, la suma exacta de la serie es $\ln 2 \approx 0.693$ (véase ejercicio 36).

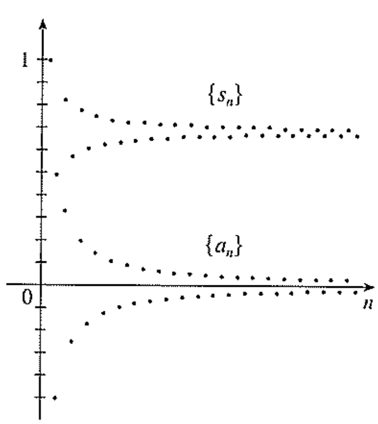


FIGURA 2

EJEMPLO 1 La serie armónica alternante

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

cumple con

$$\text{(i)}\ b_{n+1} < b_n \qquad \text{porque} \qquad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

de modo que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. □

EJEMPLO 2 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ es alternante pero

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4 - \dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

por lo que la condición (ii) no se cumple. En cambio, vea el límite del n-ésimo término de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$$

Este límite no existe, de modo que la serie es divergente de acuerdo con la prueba de la divergencia. □

EJEMPLO 3 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La serie dada es alternante, de modo que trate de comprobar las condiciones (i) e (ii) de la prueba de la serie alternante.

Al contrario de la situación en el ejemplo 1, no es obvio que la sucesión dada por $b_n = n^2/(n^3+1)$ sea decreciente. Sin embargo, si considera la función relacionada $f(x) = x^2/(x^3+1)$, encuentre que

$$f'(x) = \frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}$$

Puesto que se consideran sólo x positivas, $f'(x) < 0$ si $2 - x^3 < 0$, es decir, $x > \sqrt[3]{2}$. De esta manera, f es decreciente en el intervalo $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Esto quiere decir que $f(n+1) < f(n)$ y, por lo tanto, $b_{n+1} < b_n$ cuando $n \geqslant 2$. (La desigualdad $b_2 < b_1$ se puede comprobar de manera directa, pero lo que realmente importa es que la sucesión $\{b_n\}$ decrece con el tiempo.)

▩ En lugar de verificar la condición (i) de la prueba de la serie alternante calculando una derivada, puede comprobar que $b_{n+1} < b_n$ directamente usando la técnica de la solución 1 del ejemplo 12 de la sección 11.1.

La condición (ii) se comprueba rápidamente:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n^3}} = 0$$

Por esto, la serie dada es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. □

ESTIMACIÓN POR SUMAS

Una suma parcial de s_n de cualquier serie convergente se puede usar como una aproximación a una suma total s, pero no es muy utilizado, a menos que estime la exactitud de la aproximación. El error generado al usar $s \approx s_n$ es el residuo $R_n = s - s_n$. El teorema siguiente establece que para las series que cumplen con la condición de la prueba de la serie alternante, el tamaño del error es menor que b_{n+1}, lo cual es el valor absoluto del primer término ignorado.

▩ Desde el punto de vista de la geometría, puede ver por qué el teorema de la estimación de la serie alternante es verdadero al examinar la figura 1 en la página 710. Observe que $s - s_4 < b_5$, $|s - s_5| < b_6$, y así sucesivamente. Note también que s queda entre dos sumas parciales consecutivas.

TEOREMA DE LA ESTIMACIÓN DE LA SERIE ALTERNANTE Si $s = \Sigma (-1)^{n-1} b_n$ es la suma de una serie alternante que cumple con

$$\text{(i)}\ 0 \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \qquad \text{y} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

por lo tanto, $$|R_n| = |s - s_n| \leqslant b_{n+1}$$

DEMOSTRACIÓN Sabe por la demostración de la prueba de la serie alternante que s queda entre dos sumas parciales consecutivas s_n y s_{n+1}. Se infiere que

$$|s - s_n| \leqslant |s_{n+1} - s_n| = b_{n+1}$$ □

EJEMPLO 4 Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ con tres cifras decimales. (Por definición, $0! = 1$.)

SOLUCIÓN Primero observe que la serie es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante porque

$$\text{(i)} \quad \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+1)} < \frac{1}{n!}$$

$$\text{(ii)} \quad 0 < \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{de modo que} \quad \frac{1}{n!} \to 0 \quad \text{conforme } n \to \infty$$

Para ver cuántos términos necesite usar en la aproximación, escriba los primeros términos de la serie

$$s = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{720} - \tfrac{1}{5040} + \cdots$$

Observe que $\qquad b_7 = \frac{1}{5040} < \frac{1}{5000} = 0.0002$

y $\qquad s_6 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 0.368056$

De acuerdo con el teorema de la estimación de la serie alternante, sabe que

$$|s - s_6| \leqslant b_7 < 0.0002$$

Este error de menos de 0.0002 no afecta la tercera cifra decimal, de modo que tenemos $s \approx 0.368$ que es correcta hasta la tercera cifra decimal. □

En la sección 11.10 se demuestra que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ para toda x, de modo que el resultado del ejemplo 4 es en realidad una aproximación al número e^{-1}.

NOTA La regla de que el error (al usar s_n para aproximarse a s) es menor que el primer término ignorado es en general válida sólo para series alternantes que cumplen con las condiciones del teorema de la estimación de la serie alternante. La regla no se aplica a otros tipos de series.

11.5 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una serie alternante?
   (b) ¿En qué condiciones una serie alternante converge?
   (c) Si estas condiciones se cumplen, ¿qué puede decir con respecto al residuo después de n términos?

2–20 Pruebe las series para ver si son convergentes o divergentes.

2. $-\frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{4}{6} - \frac{5}{7} + \cdots$

3. $\frac{4}{7} - \frac{4}{8} + \frac{4}{9} - \frac{4}{10} + \frac{4}{11} - \cdots$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n!}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{5}\right)^n$

21-22 Calcule las 10 primeras sumas parciales de la serie y dibuje tanto la sucesión de términos como la sucesión de las sumas parciales en la misma pantalla. Estime el error al usar la décima suma parcial para aproximarse a la suma total.

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3}}$

23-26 Demuestre que la serie es convergente. ¿Cuántos términos de la serie necesita sumar para determinar la suma con la exactitud señalada?

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{6}}$ $\quad (|\text{error}| < 0.00005)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n\,5^{n}}$ $\quad (|\text{error}| < 0.0001)$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{10^{n}n!}$ $\quad (|\text{error}| < 0.000005)$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}ne^{-n}$ $\quad (|\text{error}| < 0.01)$

27-30 Obtenga un valor aproximado de la suma de la serie que sea correcta hasta la cuarta cifra decimal.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{5}}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}n}{8^{n}}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^{2}}{10^{n}}$

30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{3^{n}n!}$

31. ¿Es la 50a. suma parcial s_{50} de la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ una estimación excesiva o una subestimación de la suma total? Explique.

32-34 ¿Para qué valores de p es convergente cada serie?

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+p}$

34. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(\ln n)^{p}}{n}$

35. Demuestre que es divergente la serie $\sum (-1)^{n-1}b_n$, donde $b_n = 1/n$ si n es impar y $b_n = 1/n^2$ si n es par. ¿Por qué no se aplica la prueba de la serie alternante?

36. Siga los pasos siguientes para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Sean h_n y s_n las sumas parciales de las series armónica y armónica alternante.

(a) Demuestre que $s_{2n} = h_{2n} - h_n$.

(b) Según el ejercicio 40 de la sección 11.3

$$h_n - \ln n \longrightarrow \gamma \qquad \text{cuando } n \longrightarrow \infty$$

y, por lo tanto,

$$h_{2n} - \ln(2n) \longrightarrow \gamma \qquad \text{cuando } n \longrightarrow \infty$$

Apoyándose en estos hechos y el inciso (a), demuestre que $s_{2n} \longrightarrow \ln 2$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

11.6 CONVERGENCIA ABSOLUTA Y LAS PRUEBAS DE LA RAZÓN Y LA RAÍZ

Dada una serie $\sum a_n$, considere las series correspondientes

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

cuyos términos son los valores absolutos de los términos de la serie original.

Hay pruebas para la convergencia para series con términos positivos y para series alternantes. Pero, ¿y si los signos de los términos cambian de manera irregular? En el ejemplo 3, se observa que la idea de la convergencia absoluta ayuda a veces en tales casos.

1 DEFINICIÓN Una serie $\sum a_n$ se denomina **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ es convergente.

Observe que si $\sum a_n$ es una serie con términos positivos, en seguida $|a_n| = a_n$ y así, en este caso, la convergencia absoluta es lo mismo que la convergencia.

EJEMPLO 1 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es absolutamente convergente porque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

es una serie p convergente ($p = 2$).

EJEMPLO 2 Ya sabe que la serie armónica alternante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

es convergente (véase ejemplo 1 de la sección 11.5), pero no es absolutamente convergente porque la serie correspondiente de valores absolutos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

que es la serie armónica (serie p con $p = 1$) y, por lo tanto, es divergente.

2 DEFINICIÓN Una serie $\Sigma\, a_n$ se llama **condicionalmente convergente** si es convergente pero no absolutamente convergente.

En el ejemplo 2 se muestra que la serie armónica alternante es condicionalmente convergente. En estos términos, es posible que una serie sea convergente, pero no absolutamente convergente. No obstante, el teorema siguiente muestra que la convergencia absoluta significa convergencia.

3 TEOREMA Si una serie $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, en consecuencia es convergente.

DEMOSTRACIÓN Observe la desigualdad

$$0 \leqslant a_n + |a_n| \leqslant 2|a_n|$$

es cierta porque $|a_n|$ es a_n o bien, $-a_n$. Si $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, por lo tanto $\Sigma\, |a_n|$ es convergente, de modo que $\Sigma\, 2|a_n|$ es convergente. Por lo tanto, según la prueba de la comparación, $\Sigma\, (a_n + |a_n|)$ es convergente. Entonces,

$$\sum a_n = \sum (a_n + |a_n|) - \sum |a_n|$$

es la diferencia de dos series convergentes y, por lo tanto, convergente. □

En la figura 1 se ilustran las gráficas de los términos a_n y las sumas parciales s_n de la serie del ejemplo 3. Observe que la serie no es alternante, pero tiene términos positivos y negativos.

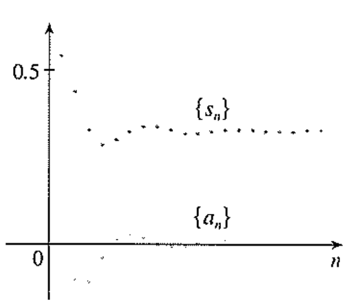


FIGURA 1

EJEMPLO 3 Determine si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \cdots$$

es convergente o divergente.

SOLUCIÓN La serie posee términos tanto positivos como negativos, pero no es alternante. (El primer término es positivo, los siguientes tres son negativos, y los otros tres que siguen son positivos. Los signos no siguen un patrón regular.) Entonces puede aplicar la prueba de comparación a la serie de valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$$

Puesto que $|\cos n| \leqslant 1$ para toda n, entonces

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Sabe que $\Sigma\, 1/n^2$ es convergente (serie p con $p = 2$) y, por lo tanto, $\Sigma\, |\cos n|/n^2$ es convergente según la prueba por comparación. De esta manera, la serie dada $\Sigma\, (\cos n)/n^2$ es absolutamente convergente y, debido a eso, convergente de acuerdo con el teorema 3. □

La prueba siguiente es muy útil para determinar si una cierta serie es absolutamente convergente

REGLA DE COMPARACIÓN

(i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, en tal caso la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, en consecuencia, convergente).

(ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$, o bien, $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, en seguida la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, la regla de comparación no es concluyente; es decir, no se puede sacar conclusión alguna con respecto a la convergencia o a la divergencia de $\Sigma\, a_n$.

DEMOSTRACIÓN

(i) La idea es comparar la serie dada con una serie geométrica convergente. Puesto que $L < 1$, puede escoger un número r tal que $L < r < 1$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \qquad \text{y} \qquad L < r$$

el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ por último será menor que r; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{cuando } n \geqslant N$$

o que equivale,

$$\boxed{4} \qquad |a_{n+1}| < |a_n|\, r \qquad \text{cuando } n \geqslant N$$

Al hacer a n sucesivamente igual a $N, N+1, N+2, \ldots$ en (4), obtiene

$$|a_{N+1}| < |a_N|\, r$$

$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}|\, r < |a_N|\, r^2$$

$$|a_{N+3}| < |a_{N+2}|\, r < |a_N|\, r^3$$

y, en general,

$$\boxed{5} \qquad |a_{N+k}| < |a_N|\, r^k \qquad \text{para toda } k \geqslant 1$$

Ahora la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_N| r^k = |a_N| r + |a_N| r^2 + |a_N| r^3 + \cdots$$

es convergente porque es una serie geométrica con $0 < r < 1$. De modo que la desigualdad 5), junto con la prueba de la comparación demuestran que la serie

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}| = |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \cdots$$

también es convergente. Se infiere que la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. (Recuerde que una cantidad finita de términos no afecta la convergencia.) Por lo tanto, $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente.

(ii) Si $|a_{n+1}/a_n| \to L > 1$, o bien, $|a_{n+1}/a_n| \to \infty$, en tal caso el cociente $|a_{n+1}/a_n|$ por último será mayor que 1; es decir, existe un entero N tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \qquad \text{siempre que } n \geqslant N$$

Esto significa que $|a_{n+1}| > |a_n|$ siempre que $n \geqslant N$ y de este modo,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

En consecuencia, $\Sigma\, a_n$ es divergente según la prueba de la divergencia. □

NOTA La parte (iii) de la regla de comparación establece que si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la prueba no proporciona información. Por ejemplo, en cuanto a la serie convergente $\Sigma\, 1/n^2$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

pero para la serie divergente $\Sigma\, 1/n$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to 1 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Por lo tanto, si $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = 1$, la serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente. En este caso, la regla de comparación no funciona, razón por la cual debe aplicar otra prueba.

EJEMPLO 4 Pruebe si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ es absolutamente convergente.

SOLUCIÓN Aplique la regla de comparación con $a_n = (-1)^n n^3/3^n$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

ESTIMACIÓN DE SUMAS

En las tres últimas secciones estudió varios métodos para estimar la suma de la serie, y el método dependía de cuál prueba se usaba para demostrar la convergencia. ¿Qué sucede con las series para las cuales sí funciona la regla de comparación? Hay dos posibilidades: si la serie es alternante, como en el ejemplo 4, entonces es mejor aplicar los métodos de la sección 11.5. Si todos los términos son positivos, en este caso aplique los métodos especiales que se explican en el ejercicio 34.

De esta manera, de acuerdo con la regla de comparación, la serie dada es absolutamente convergente y, en consecuencia, convergente.

EJEMPLO 5 Pruebe si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ es convergente.

SOLUCIÓN Puesto que los términos $a_n = n^n/n!$ son positivos, no necesita los signos del valor absoluto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$
$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

(Véase ecuación 3.6.6.) Puesto que $e > 1$, la serie dada es divergente según la regla de comparación.

NOTA La regla de comparación funciona en el ejemplo 5, pero un método más fácil es la prueba de la divergencia. Como

$$a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \geq n$$

se infiere que a_n no tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, la serie dada es divergente según la prueba de la divergencia.

Es conveniente aplicar la prueba siguiente cuando hay potencias n-ésimas. Su demostración es similar a la de la regla de comparación y se deja en el ejercicio 37.

PRUEBA DE LA RAÍZ

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, en seguida la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente (y, por lo tanto, convergente).

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, después la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

(iii) Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, la prueba de la raíz no es concluyente.

Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, por lo tanto la parte (iii) de la prueba de la raíz establece que la prueba no proporciona información. La serie $\Sigma\, a_n$ podría ser convergente o divergente. (Si $L = 1$ en la regla de comparación no intente con la prueba de la raíz porque L será una vez más 1. Y si $L = 1$ en la prueba de la raíz, no intente la regla de comparación porque también fallará.)

EJEMPLO 6 Pruebe la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

SOLUCIÓN

$$a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2 + \dfrac{3}{n}}{3 + \dfrac{2}{n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

De esta manera, la serie dada converge según la prueba de la raíz.

REORDENAMIENTOS

La pregunta de si una serie dada que es convergente es absolutamente convergente o condicionalmente convergente, tiene relación con la pregunta si las sumas infinitas se comportan como sumas finitas.

Naturalmente, si reordena los términos en una suma finita, pues el valor de la suma no cambia. Pero esto no siempre sucede en las series infinitas. Con **reordenamiento** de una serie infinita $\Sigma\, a_n$ se da a entender una serie obtenida simplemente al cambiar el orden de los términos. Por ejemplo, un reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ podría ser el siguiente:

$$a_1 + a_2 + a_5 + a_3 + a_4 + a_{15} + a_6 + a_7 + a_{20} + \cdots$$

Resulta que

si $\Sigma\, a_n$ es una serie absolutamente convergente de suma s,
en tal caso cualquier reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ tiene la misma suma s.

Sin embargo, cualquier serie condicionalmente convergente se puede reordenar, con lo cual la suma será distinta. Para ilustrar este hecho considere la serie armónica alterna

$$\boxed{6} \qquad 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \ln 2$$

(Véase ejercicio 36 en la sección 11.5.) Si multiplica la serie por $\frac{1}{2}$, obtiene

$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Si inserta ceros entre los términos de esta serie, tiene

Sumar ceros no afecta la suma de la serie; se repite cada uno de los términos de la sucesión de sumas parciales, pero el límite es el mismo.

$$\boxed{7} \qquad 0 + \tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{4} + 0 + \tfrac{1}{6} + 0 - \tfrac{1}{8} + \cdots = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

Ahora sume la serie de las ecuaciones 6 y 7 usando el teorema 11.2.8:

$$\boxed{8} \qquad 1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \tfrac{3}{2}\ln 2$$

Observe que la serie en (8) consta de los mismos términos que en (6), pero reordenados de modo que haya un término negativo después de cada par de términos positivos. Pero las sumas de estas series son diferentes. De hecho, Riemann demostró que

si $\Sigma\, a_n$ es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, por lo tanto hay un reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ que tiene una suma igual a r.

Una demostración de este hecho se plantea en el ejercicio 40.

11.6 EJERCICIOS

1. ¿Qué puede decir acerca de la serie $\Sigma\, a_n$ en cada uno de los casos siguientes?

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0.8$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

2–28 Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$ $\boxed{4.}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^4}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ **6.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\tfrac{2}{3}\right)^k$ **8.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1.1)^n}{n^4}$ **10.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$ **12.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 4n}{4^n}$

$\boxed{13.}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ **14.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2 2^n}{n!}$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{n^{2/3} - 2}$

17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

24. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

25. $$1 - \frac{1 \cdot 3}{3!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{5!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(2n-1)!} + \cdots$$

26. $$\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \cdots$$

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{n!}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n n!}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

---

29. Los términos de una serie se definen en forma recursiva mediante las ecuaciones

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3} a_n$$

Determine si $\Sigma\, a_n$ es convergente o divergente.

30. Una serie $\Sigma\, a_n$ está definida de acuerdo con las ecuaciones

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{2 + \cos n}{\sqrt{n}} a_n$$

Determine si $\Sigma\, a_n$ converge o diverge.

31. ¿Para cuáles de las series siguientes la regla de comparación no es concluyente (es decir, no proporciona una respuesta definida)?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

32. ¿Para cuáles enteros positivos k la serie siguiente es convergente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

33. (a) Demuestre que $\Sigma_{n=0}^{\infty}\, x^n/n!$ converge para toda x.

(b) Deduzca que $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ para toda x.

34. Sea $\Sigma\, a_n$ una serie con términos positivos y sea $r_n = a_{n+1}/a_n$. Suponga que $\lim_{n\to\infty} r_n = L < 1$, de modo que $\Sigma\, a_n$ es convergente según la regla de comparación. Como es lo usual, R_n sea el residuo después de n términos, es decir,

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots$$

(a) Si $\{r_n\}$ es una sucesión decreciente y $r_{n+1} < 1$, demuestre con la suma de una serie geométrica que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}$$

(b) Si $\{r_n\}$ es una sucesión creciente, demuestre que

$$R_n \leqslant \frac{a_{n+1}}{1 - L}$$

35. (a) Calcule la suma parcial s_5 de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty}\, 1/n2^n$. Con ayuda del ejercicio 34 estime el error al usar s_5 como una aproximación a la suma de la serie.

(b) Determine un valor de n de tal modo que s_n no difiera 0.00005 de la suma real. Use este valor de n para obtener un valor aproximado de la suma de la serie.

36. Use la suma de los primeros 10 términos para obtener un valor aproximado de la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Aplique el ejercicio 34 para estimar el error.

37. Demuestre la prueba de la raíz. [*Sugerencia para la parte (i):* tome cualquier número r tal que $L < r < 1$ y aplique el hecho de que hay un entero N tal que $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ cuando $n \geqslant N$.]

38. Hacia 1910, Srinivasa Ramanujan, matemático de la India, descubrió la fórmula

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

William Gosper utilizó esta serie en 1985 para calcular los primeros 17 millones de dígitos de π.

(a) Verifique que la serie sea convergente.

(b) ¿Cuántos lugares decimales correctos de π obtiene el lector si usa sólo el primer término de la serie? ¿Qué pasa si usa dos términos?

39. Dada cualquier serie $\Sigma\, a_n$ define una serie $\Sigma\, a_n^+$ si todos sus términos son positivos de $\Sigma\, a_n$ y una serie $\Sigma\, a_n^-$ si todos sus términos son negativos de $\Sigma\, a_n$. Para ser específicos,

$$a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2} \qquad a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$$

Observe que si $a_n > 0$, por lo tanto $a_n^+ = a_n$ y $a_n^- = 0$, siempre que $a_n < 0$, después $a_n^- = a_n$ y $a_n^+ = 0$.

(a) Si $\Sigma\, a_n$ es absolutamente convergente, demuestre que tanto la serie $\Sigma\, a_n^+$ como la $\Sigma\, a_n^-$ son convergentes.

(b) Si $\Sigma\, a_n$ es condicionalmente convergente, demuestre que tanto la serie $\Sigma\, a_n^+$ como la $\Sigma\, a_n^-$ son divergentes.

40. Demuestre que si $\Sigma\, a_n$ es una serie condicionalmente convergente y r es cualquier número real, en este caso hay un reordenamiento de $\Sigma\, a_n$ cuya suma es r. [*Sugerencias:* utilice la notación del ejercicio 39. Tome sólo suficientes términos positivos a_n^+ de modo que su suma sea mayor que r. Luego sume sólo suficientes términos negativos a_n^- para que la suma acumulativa sea menor que r. Continúe así y aplique el teorema 11.2.6.]

11.7 ESTRATEGIA PARA PROBAR SERIES

Ya conoce varias maneras de probar la convergencia o divergencia de una serie. Ahora el problema es decidir cuál prueba aplicar en qué serie. En este aspecto, probar series es parecido a integrar funciones. No hay reglas rígidas y rápidas con respecto a qué prueba aplicar a una serie dada, pero puede seguir las recomendaciones siguientes, puesto que le pueden ser útiles.

No es prudente aplicar una lista de pruebas en un orden específico hasta que una acaba por funcionar. Eso sería un desperdicio de tiempo y esfuerzo. En lugar de eso, al igual que en la integración, la estrategia principal es clasificar las series de acuerdo con su *forma*.

1. Si la serie es de la forma $\Sigma\, 1/n^p$, es una serie p, lo cual significa que es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leqslant 1$.
2. Si la serie es de la forma $\Sigma\, ar^{n-1}$ o $\Sigma\, ar^n$, es una serie geométrica, la cual converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geqslant 1$. Se podrían requerir algunas operaciones algebraicas para hacer que la serie alcance esta forma.
3. Si la serie posee una forma similar a la de una serie p o a una serie geométrica, en tal caso se debe considerar una de las pruebas por comparación. En particular, si a_n es una función racional o una función algebraica de n (es decir, que contiene raíces de polinomios), por lo tanto, la serie se debe comparar contra una serie p. Observe que la mayoría de las series de los ejercicios 11.4 poseen esta forma. (El valor de p se debe escoger como en la sección 11.4, y conservar sólo las potencias más altas de n en el numerador y en el denominador.) Las pruebas por comparación se aplican sólo en series con términos positivos, pero si $\Sigma\, a_n$ tiene algunos términos negativos, en seguida puede aplicar la prueba por comparación a $\Sigma\, |a_n|$ y probar si hay convergencia absoluta.
4. Si es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, en tal caso se debe aplicar la prueba para la divergencia.
5. Si la serie es de la forma $\Sigma\, (-1)^{n-1}b_n$, o bien, $\Sigma\, (-1)^n b_n$, en tal caso una posibilidad obvia es la prueba de la serie alternante.
6. Las series que contienen factoriales u otros productos (incluso una constante elevada a una potencia n-ésima) se prueban en forma aceptable usando la regla de comparación. Siempre piense que $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ cuando $n \to \infty$ para todas las series p y, por lo tanto, todas las funciones racionales o algebraicas de n. En estos términos, la regla de comparación no se debe aplicar para dichas series.
7. Si a_n es de la forma $(b_n)^n$, por lo tanto la prueba de la raíz podría ser útil.
8. Si $a_n = f(n)$, donde $\int_1^\infty f(x)\,dx$ se puede evaluar con facilidad, en consecuencia la prueba de la integral es efectiva (suponiendo que la hipótesis de esta prueba se cumple).

En los ejemplos siguientes no se presenta todo el desarrollo, sino que simplemente se indica qué prueba se debe usar.

EJEMPLO 1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n+1}$

Puesto que $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ cuando $n \to \infty$, debe usar la prueba de la divergencia. □

EJEMPLO 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{3n^3+4n^2+2}$

Como a_n es una función algebraica de n, compare la serie dada con la serie p.

La serie de comparación de la prueba de comparación en el límite es $\Sigma\, b_n$, donde

$$b_n = \frac{\sqrt{n^3}}{3n^3} = \frac{n^{3/2}}{3n^3} = \frac{1}{3n^{3/2}}$$

EJEMPLO 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Puesto que la integral $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ se evalúa con facilidad, use la prueba de la integral. La regla de comparación también funciona.

EJEMPLO 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4+1}$

Como la serie es alternante, aplique la prueba de la serie alternante.

EJEMPLO 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

Como la serie contiene $k!$, se aplica la regla de comparación.

EJEMPLO 6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+3^n}$

La serie está estrechamente relacionada con la serie geométrica $\Sigma\, 1/3^n$, por lo que se aplica la prueba por comparación.

11.7 EJERCICIOS

1–38 Pruebe si las series son convergentes o divergentes.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{(k+2)!}$

9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

11. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} n$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{n!}$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n}{1+2^n}$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n+2)}$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{1/n}$

18. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+5}{5^k}$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2n}}{n^n}$

22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{n^3+2n^2+5}$

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n)$

24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}(1/n)$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}}$

26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{5^n}$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$

29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cosh n}$

30. $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{\sqrt{j}}{j+5}$

31. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{3^k+4^k}$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{4n}}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n\cos^2 n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

36. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)^n$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$

11.8 SERIES DE POTENCIAS

Una **serie de potencias** es una serie de la forma

$$\boxed{1} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

donde x es una variable y las c_n son constantes que se denominan **coeficientes** de la serie. Para cada x establecida, la serie (1) es una serie de constantes que puede probar para ver si son convergentes o divergentes. Una serie de potencias podría ser convergente para algunos valores de x y ser divergente para otros. La suma de la serie es una función

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

cuyo dominio es el conjunto de todas las x para las cuales la serie es convergente. Observe que f es parecida a un polinomio. La única diferencia es que f tiene una cantidad infinita de términos.

SERIES TRIGONOMÉTRICAS
Una serie de potencias es una serie en la cual cada uno de los términos es una función con potencias. Una serie trigonométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

es una serie cuyos términos son funciones trigonométricas. Este tipo de serie se analiza en la página web

www.stewartcalculus.com

Dé un clic en *Additional Topics* y luego en *Fourier Series.*

Por ejemplo, si hace $c_n = 1$ para toda n, la serie de potencias se transforma en una serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

que es convergente cuando $-1 < x < 1$ y es divergente cuando $|x| \geqslant 1$ (véase ecuación 11.2.5).

En general, una serie de la forma

$$\boxed{2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

se denomina **serie de potencias en** $(x - a)$, o bien, **serie de potencias centrada en** a, o también, **serie de potencias con respecto a** a. Observe que al escribir el término correspondiente a $n = 0$ en las ecuaciones 1 y 2, se ha adoptado la convención de $(x-a)^0 = 1$ aun cuando $x = a$. Asimismo, note que cuando $x = a$ todos los términos son 0 para $n \geqslant 1$ y de este modo la serie de potencias (2) siempre es convergente cuando $x = a$.

EJEMPLO 1 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ es convergente?

SOLUCIÓN Aplique la regla de comparación. Si denota con a_n, como se acostumbra, el n-ésimo término de la serie, después $a_n = n!x^n$. Si $x \neq 0$,

Nótese que
$$(n+1)! = (n+1)n(n-1)\cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n+1)n!$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty$$

Según la regla de comparación, la serie es divergente cuando $x \neq 0$. En estos términos, la serie dada converge sólo cuando $x = 0$.

EJEMPLO 2 ¿Para qué valores de x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ es convergente?

SOLUCIÓN Sea $a_n = (x-3)^n/n$. En tal caso

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

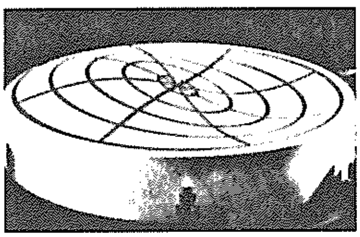
$$= \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}|x-3| \to |x-3| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la regla de comparación, la serie dada es absolutamente convergente y, por lo tanto, convergente cuando $|x - 3| < 1$ y divergente cuando $|x - 3| > 1$. Ahora

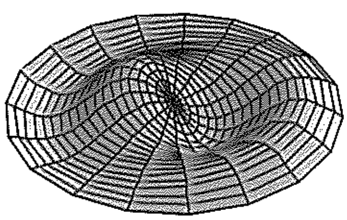
$$|x - 3| < 1 \iff -1 < x - 3 < 1 \iff 2 < x < 4$$

de modo que la serie converge cuando $2 < x < 4$ y diverge cuando $x < 2$ o bien $x > 4$.

La regla de comparación no proporciona información cuando $|x - 3| = 1$ de modo que debe considerar $x = 2$ y $x = 4$ por separado. Si pone $x = 4$ en la serie, se vuelve $\Sigma\, 1/n$, la serie armónica, la cual es divergente. Si $x = 2$, la serie es $\Sigma\, (-1)^n/n$, la cual es convergente de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por esto, la serie de potencias dada converge para $2 \leqslant x < 4$. □



National Film Board of Canada



Observe cómo la aproximación del modelo generado por computadora (el cual utiliza funciones de Bessel y de cosenos) coincide con la fotografía de una membrana vibratoria de hule.

Ya verá que el uso principal de las series de potencias es proporcionar una manera de representar algunas de las funciones más importantes que surgen en matemáticas, física y química. En particular, la suma de la serie de potencias del ejemplo siguiente se llama **función de Bessel**, en honor al astrónomo alemán Friedrich Bessel (1784-1846), y la función dada en el ejercicio 35 es otro ejemplo de la función de Bessel. En efecto, estas funciones surgieron primero cuando Bessel resolvió la ecuación de Kepler para describir el movimiento de los planetas. Desde esa época, estas funciones se aplican en diversas situaciones físicas, sin olvidar la distribución de temperaturas en una lámina circular y la forma de una membrana de un tambor.

EJEMPLO 3 Determine el dominio de la función de Bessel de orden 0 definida por

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-1)^n x^{2n}/[2^{2n}(n!)^2]$. En tal caso

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}}\right|$$
$$= \frac{x^{2n+2}}{2^{2n+2}(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{x^{2n}}$$
$$= \frac{x^2}{4(n+1)^2} \to 0 < 1 \qquad \text{para toda } x$$

De este modo, de acuerdo con la regla de comparación, la serie dada converge para todos los valores de x. En otras palabras, el dominio de la función de Bessel J_0 es $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. □

Recuerde que la suma de una serie es igual al límite de la sucesión de las sumas parciales. De esa manera, cuando se define la función de Bessel del ejemplo 3 como la suma de una serie quiere decir que, para todo número real x,

$$J_0(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) \qquad \text{donde} \qquad s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{2i}}{2^{2i}(i!)^2}$$

Las primeras sumas parciales son

$$s_0(x) = 1 \qquad s_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \qquad s_2(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

$$s_3(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} \qquad s_4(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \frac{x^8}{147\,456}$$

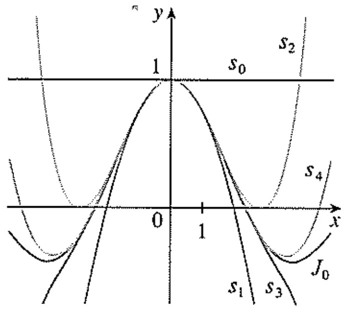


FIGURA 1
Sumas parciales de la función de Bessel J_0

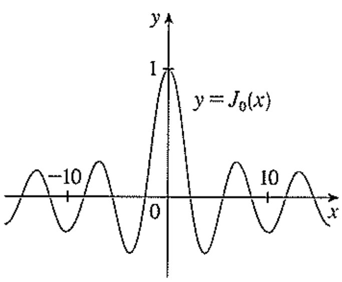


FIGURA 2

En la figura 1 se muestran las gráficas de estas sumas parciales, las cuales son polinomiales. Todas son aproximaciones de la función J_0, pero observe que la aproximación es mejor cuando se incluyen más términos. En la figura 2 se ilustra una gráfica más completa de la función de Bessel.

En lo que respecta a la serie de potencias examinadas hasta el momento, el conjunto de valores de x para los cuales la serie es convergente ha resultado ser siempre un intervalo [un intervalo finito de la serie geométrica y la serie del ejemplo 2, el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$ del ejemplo 3 y un intervalo colapsado $[0, 0] = \{0\}$ del ejemplo 1. El teorema siguiente, demostrado en el apéndice F, establece que esto es válido en general.

$\boxed{3}$ **TEOREMA** Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ hay sólo tres posibilidades:

(i) La serie converge sólo cuando $x = a$.

(ii) La serie converge para toda x.

(iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$.

El número R en el caso (iii) se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias. Por convención, el radio de convergencia es $R = 0$ en el caso (i) y $R = \infty$ en el caso (ii). El **intervalo de convergencia** de una serie de potencias es el intervalo que consiste en todos los valores de x para los cuales la serie converge. En el caso (i) el intervalo consta de un solo punto a. En el caso (ii) el intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que en el caso (iii) la desigualdad $|x - a| < R$ se puede escribir de nuevo como $a - R < x < a + R$. Cuando x es un *extremo* del intervalo, es decir, $x = a \pm R$, cualquier cosa puede suceder: la serie podría ser convergente en uno o en ambos extremos, o podría ser divergente en ambos extremos. Por lo tanto, en el caso (iii) hay cuatro posibilidades para el intervalo de convergencia:

$$(a - R, a + R) \qquad (a - R, a + R] \qquad [a - R, a + R) \qquad [a - R, a + R]$$

La situación se ilustra en la figura 3.

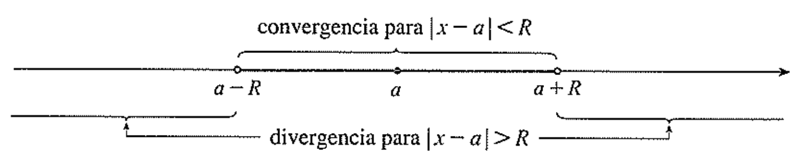


FIGURA 3

Se resumen a continuación el radio y el intervalo de convergencia para cada uno de los ejemplos ya considerados en esta sección.

	Serie	Radio de convergencia	Intervalo de convergencia
Serie geométrica	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$R = 1$	$(-1, 1)$
Ejemplo 1	$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$	$R = 0$	$\{0\}$
Ejemplo 2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$	$R = 1$	$[2, 4)$
Ejemplo 3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$	$R = \infty$	$(-\infty, \infty)$

En general, la regla de comparación (o a veces, la prueba de la raíz) se debe usar para determinar el radio de convergencia R. Las reglas de comparación y de la raíz siempre fracasan cuando x es un extremo del intervalo de convergencia, de modo que es necesario verificar los extremos por medio de alguna otra prueba.

EJEMPLO 4 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

SOLUCIÓN Sea $a_n = (-3)^n x^n/\sqrt{n+1}$. Por lo tanto

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{(-3)^n x^n}\right| = \left|-3x\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right|$$

$$= 3\sqrt{\frac{1+(1/n)}{1+(2/n)}}\,|x| \to 3|x| \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

De acuerdo con la regla de comparación, la serie dada converge si $3|x| < 1$ y es divergente si $3|x| > 1$. En estos términos, es convergente si $|x| < \frac{1}{3}$ y diverge si $|x| > \frac{1}{3}$. Esto quiere decir que el radio de convergencia es $R = \frac{1}{3}$.

Sabe que la serie converge en el intervalo $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, pero ahora es necesario probar si hay convergencia en los extremos de este intervalo. Si $x = -\frac{1}{3}$, la serie se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

la cual es divergente. (Aplique la prueba de la integral o simplemente observe que es una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$.) Si $x = \frac{1}{3}$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

la cual converge de acuerdo con la prueba de la serie alternante. Por lo tanto, la serie dada de potencias converge cuando $-\frac{1}{3} < x \leqslant \frac{1}{3}$, de modo que el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

EJEMPLO 5 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

SOLUCIÓN Si $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$, después

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Al aplicar la regla de comparación, se ve que la serie es convergente si $|x+2|/3 < 1$ y que es divergente si $|x+2|/3 > 1$. De modo que es convergente si $|x+2| < 3$ y divergente si $|x+2| > 3$. Así que, el radio de convergencia es $R = 3$.

La desigualdad $|x + 2| < 3$ se puede escribir como $-5 < x < 1$, de modo que prueba la serie en los extremos -5 y 1. Cuando $x = -5$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$$

la cual es divergente según la prueba de la divergencia [$(-1)^n n$ no converge en 0]. Cuando $x = 1$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} n$$

la cual también es divergente según la prueba de la divergencia. Por esto, la serie converge sólo cuando $-5 < x < 1$, de modo que el intervalo de convergencia es $(-5, 1)$.

11.8 EJERCICIOS

1. ¿Qué es una serie de potencias?

2. (a) ¿Cuál es el radio de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se determina?
(b) ¿Cuál es el intervalo de convergencia de una serie de potencias? ¿Cómo se calcula?

3–28 Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$

13. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2n+1}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+4)^n}{\sqrt{n}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x+1)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n 3^n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{b^n} (x-a)^n, \quad b > 0$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}$

29. Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 4^n$ es convergente, ¿se infiere que la serie siguiente es convergente?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$

30. Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de la serie siguiente?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

31. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$$

32. Sean p y q números reales con $p < q$. Encuentre una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea
(a) (p, q) (b) $(p, q]$
(c) $[p, q)$ (d) $[p, q]$

33. ¿Es posible hallar una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia sea $[0, \infty)$? Explique.

34. Dibuje las primeras sumas parciales $s_n(x)$ de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, junto con la función suma $f(x) = 1/(1 - x)$, sobre una misma pantalla. ¿En qué intervalo parece que convergen estas sumas parciales y $f(x)$?

35. La función J_1 definida por

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

se llama *función de Bessel de orden 1*.

(a) Determine el dominio.

(b) Dibuje las primeras sumas parciales en una misma pantalla.

CAS (c) Si su CAS tiene incorporadas las funciones de Bessel, dibuje J_1 en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso (b) y observe cómo se aproximan las sumas parciales a J_1.

36. La función A se define mediante

$$A(x) = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \cdots$$

que se llama *función de Airy* en honor al matemático y astrónomo inglés sir George Airy (1801-1892).

(a) Determine el dominio de la función de Airy.

(b) Dibuje las primeras sumas parciales $s_n(x)$ en una misma pantalla.

CAS (c) Si su CAS tiene incorporadas las funciones de Airy, dibuje A en la misma pantalla que las sumas parciales del inciso b), y observe cómo las sumas parciales se aproximan a A.

37. Una función f está definida mediante

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + \cdots$$

es decir, sus coeficientes son $c_{2n} = 1$ y $c_{2n+1} = 2$ para toda $n \geq 0$. Determine el intervalo de convergencia de la serie y plantee una fórmula explícita para $f(x)$.

38. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $c_{n+4} = c_n$ para toda $n \geq 0$, determine el intervalo de convergencia de la serie y una fórmula para $f(x)$.

39. Muestre que si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c$, donde $c \neq 0$, en tal caso el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^n$ es $R = 1/c$.

40. Suponga que la serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$ satisface $c_n \neq 0$ para toda n. Demuestre que si existe $\lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}|$, por lo tanto es igual al radio de convergencia de la serie de potencias.

41. Suponga que el radio de convergencia de la serie $\sum c_n x^n$ es 2 y que el radio de convergencia de la serie $\sum d_n x^n$ es 3. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie $\sum (c_n + d_n)x^n$?

42. Suponga que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^n$ es R. ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum c_n x^{2n}$?

11.9 REPRESENTACIONES DE LAS FUNCIONES COMO SERIES DE POTENCIAS

En esta sección aprenderá a representar ciertos tipos de funciones como sumas de series de potencias mediante la manipulación de series geométricas, o mediante derivación o integración de dichas series. Quizá se pregunte por qué siempre se busca expresar una función conocida como una suma de una cantidad infinita de términos. Más adelante se explica la utilidad de esta estrategia en la integración de funciones que no tienen antiderivadas elementales, en la solución de ecuaciones diferenciales y para aproximar funciones mediante polinomios. (Los científicos lo hacen así para simplificar las expresiones con las que trabajan; los especialistas en computación lo hacen así para representar funciones en calculadoras y computadoras.)

Inicie con una ecuación que estudió antes:

$$\boxed{1} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

Una ilustración geométrica de la ecuación 1 se muestra en la figura 1. Como la suma de una serie es el límite de la sucesión de las sumas parciales

$$\frac{1}{1-x} = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

donde

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

es la n-ésima suma parcial. Observe que cuando n se incrementa, $s_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para $f(x)$ en $-1 < x < 1$.

Ya encontró esta ecuación en el ejemplo 5 de la sección 11.2, donde la obtuvo al observar que es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Pero en este caso la opinión es distinta. Ahora considere la ecuación 1 como expresión de la función $f(x) = 1/(1-x)$ como una suma de una serie de potencias.

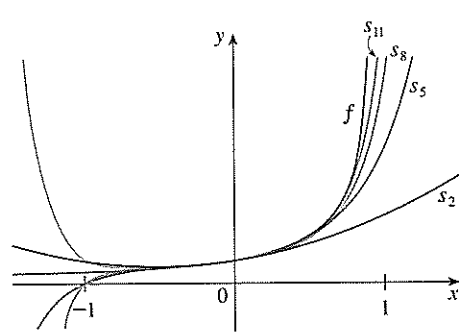


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ y algunas sumas parciales

Cuando se pide una serie de potencias en esta sección, se supone que la serie está centrada en 0, a menos que se indique de otra forma.

EJEMPLO 1 Exprese $1/(1 + x^2)$ como la suma de una serie de potencias, y determine el intervalo de convergencia.

SOLUCIÓN Al reemplazar x por $-x^2$ en la ecuación 1, queda

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

Como es una serie geométrica, es convergente cuando $|-x^2| < 1$, es decir, $x^2 < 1$, o bien, $|x| < 1$. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $(-1, 1)$. Naturalmente, podría haber determinado el radio de convergencia aplicando la regla de comparación, pero esa cantidad de trabajo es innecesaria en este caso. □

EJEMPLO 2 Determine una representación para $1/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Con objeto de poner esta función en la forma del lado izquierdo de la ecuación 1, primero se factoriza un 2 del denominador:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2\left[1-\left(-\dfrac{x}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

Esta serie converge cuando $|-x/2| < 1$, es decir, $|x| < 2$. De modo que el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. □

EJEMPLO 3 Obtenga una representación como serie de potencias de $x^3/(x + 2)$.

SOLUCIÓN Puesto que esta función es justamente x^3 veces la función del ejemplo 2, todo lo que debe hacer es multiplicar esa serie por x^3:

Es válido pasar x^3 al otro lado del signo de la suma porque no depende de n. [Aplique el teorema 11.2.8(i) con $c = x^3$.]

$$\frac{x^3}{x+2} = x^3 \cdot \frac{1}{x+2} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 - \tfrac{1}{16}x^6 + \cdots$$

Otra forma de escribir esta serie es como sigue:

$$\frac{x^3}{x+2} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}x^n$$

Como en el ejemplo 2, el intervalo de convergencia es $(-2, 2)$. □

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

La suma de una serie de potencias es una función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ cuyo dominio es el intervalo de convergencia de la serie. Para ser capaces de derivar e integrar estas funciones, el siguiente teorema (el cual no será demostrado) establece que es posible hacerlo derivando o integrando cada uno de los términos de la serie, justo como se haría para un polinomio. Esto se denomina **derivación** e **integración término a término**.

2 TEOREMA Si la serie de potencias $\Sigma\, c_n(x-a)^n$ posee un radio de convergencia $R > 0$, en tal caso la función f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es derivable (y, por lo tanto, continua) en el intervalo $(a-R, a+R)$ y

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)\,dx = C + c_0(x-a) + c_1\dfrac{(x-a)^2}{2} + c_2\dfrac{(x-a)^3}{3} + \cdots$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Los radios de convergencia de la serie de potencias en las ecuaciones (i) y (ii) son R.

En el inciso (ii), $\int c_0\,dx = c_0x + C_1$ se escribe como $c_0(x-a) + C$, donde $C = C_1 + ac_0$, de modo que todos los términos de la serie tienen la misma forma.

NOTA 1 Las ecuaciones (i) y (ii) del teorema 2 se pueden volver a escribir en la forma

(iii) $\dfrac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{d}{dx}[c_n(x-a)^n]$

(iv) $\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int c_n(x-a)^n\,dx$

Se sabe que, por lo que toca a las sumas finitas, la derivada de una suma es la suma de las derivadas y la integral de una suma es la suma de las integrales. Las ecuaciones (iii) y (iv) aseguran que lo mismo se cumple para sumas infinitas, siempre que esté trabajando con *series de potencias*. (En el caso de otros tipos de series de funciones la situación no es tan simple; véase ejercicio 36.)

NOTA 2 Aunque el teorema 2 establece que el radio de convergencia es el mismo cuando una serie de potencias es derivada o integrada, esto no quiere decir que el *intervalo* de convergencia siga siendo el mismo. Podría suceder que la serie original converja en el extremo, y que la serie derivada sea divergente aquí. (Véase ejercicio 37.)

NOTA 3 La idea de derivar una serie de potencias término a término es la base de un método eficaz para resolver ecuaciones diferenciales. Estudiará este método en el capítulo 17.

EJEMPLO 4 En el ejemplo 3 de la sección 11.8 vio que la función de Bessel

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

se define para toda x. De esta manera, de acuerdo con el teorema 2, J_0 es derivable para toda x y su derivada se encuentra derivando término a término como sigue:

$$J_0'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$$

EJEMPLO 5 Exprese $1/(1-x)^2$ como una serie de potencias derivando la ecuación 1. ¿Cuál es el radio de convergencia?

SOLUCIÓN Al derivar cada miembro de la ecuación

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se obtiene
$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Si quisiera podría reemplazar n por $n + 1$ y escribir la respuesta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

De acuerdo con el teorema 2, el radio de convergencia de la serie derivada es el mismo que el radio de convergencia de la serie original, $R = 1$. □

EJEMPLO 6 Determine una representación como serie de potencias para $\ln(1-x)$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Observa que, excepto en el caso de un factor de -1, la derivada de esta función es $1/(1-x)$. Por eso integre ambos miembros de la ecuación 1:

$$-\ln(1-x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = \int (1 + x + x^2 + \cdots)\,dx$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

Para determinar el valor de C haga $x = 0$ en esta ecuación y obtenga $-\ln(1-0) = C$. Por lo tanto, $C = 0$ y

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad |x| < 1$$

El radio de convergencia es el mismo que el de la serie original: $R = 1$. □

Observe qué sucede si hace $x = \frac{1}{2}$ en el resultado del ejemplo 6. Puesto que $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$,

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$$

EJEMPLO 7 Encuentre una representación como serie de potencias para $f(x) = \tan^{-1}x$.

SOLUCIÓN Observe que $f'(x) = 1/(1+x^2)$ y encuentre la serie requerida integrando la serie de potencias para $1/(1+x^2)$ determinada en el ejemplo 1.

$$\tan^{-1}x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Para determinar C haga $x = 0$ y obtiene $C = \tan^{-1} 0 = 0$. Por lo tanto,

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Puesto que el radio de convergencia de la serie para $1/(1 + x^2)$ es 1, el radio de convergencia de esta serie para $\tan^{-1}x$ es también 1. □

La serie de potencias para $\tan^{-1}x$ obtenida en el ejemplo 7 se llama serie de Gregory en honor al matemático escocés James Gregory (1638-1675), quien pronosticó algunos de los descubrimientos de Newton. Ya se demostró que la serie de Gregory es válida cuando $-1 < x < 1$, pero resulta que (aunque no es fácil de demostrar) también es válida cuando $x = \pm 1$. Observe que cuando $x = 1$ la serie se transforma en

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Este admirable resultado se conoce como fórmula de Leibniz para π.

EJEMPLO 8

(a) Evalúe $\int [1/(1 + x^7)]\,dx$ como una serie de potencias.

(b) Mediante el inciso (a) obtenga una aproximación de $\int_0^{0.5} [1/(1 + x^7)]\,dx$ que no difiera en 10^{-7} del valor real.

SOLUCIÓN

(a) El primer paso es expresar la integral, $1/(1 + x^7)$, como la suma de una serie de potencias. Como en el ejemplo 1, inicie con la ecuación 1 y reemplace x por $-x^7$:

$$\frac{1}{1 + x^7} = \frac{1}{1 - (-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^7)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Ahora integre término a término:

$$\int \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{7n}\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1}$$

$$= C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots$$

Este ejemplo demuestra una manera útil de las representaciones como series de potencias. Integrar $1/(1 + x^7)$ a mano es increíblemente difícil. Diferentes sistemas algebraicos computacionales dan respuestas de distintas formas, pero son extremadamente complicadas. (Si tiene un CAS, inténtelo usted mismo.) La respuesta de la serie infinita que se obtiene en el ejemplo 8(a) es realmente mucho más fácil de manejar que la respuesta finita que proporciona un CAS.

Esta serie converge para $|-x^7| < 1$, es decir, para $|x| < 1$.

(b) Si aplica el teorema fundamental del cálculo no importa qué antiderivada use, de modo que utilice la antiderivada del inciso (a) con $C = 0$:

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \frac{x^{22}}{22} + \cdots \right]_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)2^{7n+1}} + \cdots$$

Esta serie infinita es el valor exacto de la integral definida, pero como es una serie alternante, puede obtener una aproximación de la suma aplicando el teorema de la estimación de la serie alternante. Si deja de sumar después del término $n = 3$, el error es menor que el término con $n = 4$:

$$\frac{1}{29 \cdot 2^{29}} \approx 6.4 \times 10^{-11}$$

De modo que

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1 + x^7}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8 \cdot 2^8} + \frac{1}{15 \cdot 2^{15}} - \frac{1}{22 \cdot 2^{22}} \approx 0.49951374$$ □

11.9 EJERCICIOS

1. Si el radio de convergencia de la serie de potencias $\Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es 10, ¿cuál es el radio de convergencia de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$? ¿Por qué?

2. Suponga que sabe que la serie $\Sigma_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ es convergente para $|x| < 2$. ¿Qué puede decir de la serie siguiente? ¿Por qué?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n+1} x^{n+1}$$

3–10 Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia.

3. $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{1-x^4}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x+10}$

7. $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$

9. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2}{a^3-x^3}$

11–12 Exprese la función como la suma de una serie de potencias usando primero fracciones parciales. Determine el intervalo de convergencia.

11. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

12. $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^2-x-1}$

13. (a) Use la derivación para determinar una representación como serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Por medio del inciso (a) determine una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$$

(c) Mediante el inciso (b) determine una serie de potencias para

$$f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

14. (a) Determine una representación como serie de potencias para $f(x) = \ln(1+x)$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

(b) Mediante el inciso (a) determine una serie de potencias para $f(x) = x\ln(1+x)$.

(c) Mediante el inciso (a) determine una serie de potencias para $f(x) = \ln(x^2+1)$

15–18 Encuentre una representación como serie de potencias para la función, y determine el radio de convergencia.

15. $f(x) = \ln(5-x)$

16. $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

18. $f(x) = \arctan(x/3)$

19–22 Encuentre una representación como serie de potencias para f, y dibuje f y varias sumas parciales $s_n(x)$ en la misma pantalla. ¿Qué sucede cuando n se incrementa?

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+16}$

20. $f(x) = \ln(x^2+4)$

21. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

22. $f(x) = \tan^{-1}(2x)$

23–26 Evalúe la integral indefinida como una serie de potencias. ¿Cuál es el radio de convergencia?

23. $\displaystyle\int \frac{t}{1-t^8}\,dt$

24. $\displaystyle\int \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$

25. $\displaystyle\int \frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}\,dx$

26. $\displaystyle\int \tan^{-1}(x^2)\,dx$

27–30 Use una serie de potencias para aproximar la integral definida con seis cifras decimales.

27. $\displaystyle\int_0^{0.2} \frac{1}{1+x^5}\,dx$

28. $\displaystyle\int_0^{0.4} \ln(1+x^4)\,dx$

29. $\displaystyle\int_0^{0.1} x\arctan(3x)\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{0.3} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$

31. A través del resultado del ejemplo 6, calcule ln 1.1 con cinco cifras decimales.

32. Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f''(x) + f(x) = 0$$

33. (a) Demuestre que J_0 (la función de Bessel de orden 0 dada en el ejemplo 4) cumple con la ecuación diferencial

$$x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0$$

(b) Evalúe $\int_0^1 J_0(x)\,dx$ con tres cifras decimales.

34. La función de Bessel de orden 1 se define con

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$$

(a) Demuestre que J_1 satisface la ecuación diferencial

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1)J_1(x) = 0$$

(b) Demuestre que $J_0'(x) = -J_1(x)$.

35. (a) Demuestre que la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x)$$

(b) Demuestre que $f(x) = e^x$.

36. Sea $f_n(x) = (\operatorname{sen} nx)/n^2$. Demuestre que la serie $\Sigma f_n(x)$ es convergente para todos los valores de x, pero la serie de derivadas $\Sigma f_n'(x)$ es divergente cuando $x = 2n\pi$, n es un entero. ¿Para qué valores de x la serie $\Sigma f_n''(x)$ es convergente?

37. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Determine los intervalos de convergencia para f, f' y f''.

38. (a) Empezando con la serie geométrica $\Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$, calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad |x| < 1$$

(b) Calcule la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \quad |x| < 1$ (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

(c) Determine la suma de cada una de las series siguientes.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n, \quad |x| < 1$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 - n}{2^n}$ (iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

39. Utilice la serie de potencias para $\tan^{-1}x$ para demostrar que la expresión siguiente para π como la suma de una serie infinita:

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$

40. (a) Aplique el método de completar cuadrados para demostrar que

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Mediante la factorización de $x^3 + 1$ como una suma de cubos, escriba de nuevo la integral del inciso (a). Luego exprese $1/(x^3 + 1)$ como la suma de una serie de potencias y úsela para demostrar la fórmula siguiente para π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

11.10 SERIES DE TAYLOR Y DE MACLAURIN

En la sección anterior, se representaron como series de potencias una cierta clase restringida de funciones. En esta sección se tratan problemas más generales: ¿Qué funciones se pueden representar como series de potencias? ¿Cómo es posible hallar esa representación?

Empiece por suponer que f es cualquier función que se puede representar mediante una serie de potencias

$$\boxed{1} \quad f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Trate de determinar qué coeficientes c_n tienen que estar en función de f. Para empezar, observe que si hace $x = a$ en la ecuación 1, en tal caso todos los términos después del primero son 0 y obtiene

$$f(a) = c_0$$

De acuerdo con el teorema 11.9.2, puede derivar la serie de la ecuación 1 término a término:

$$\boxed{2} \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

y al sustituir $x = a$ en la ecuación 2 tiene

$$f'(a) = c_1$$

En seguida derive ambos miembros de la ecuación 2 y obtiene

$$\boxed{3} \quad f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x-a) + 3 \cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

Una vez más haga $x = a$ en la ecuación 3. El resultado es

$$f''(a) = 2c_2$$

Aplique el procedimiento una vez más. La derivación de la serie de la ecuación 3 origina

$$\boxed{4} \quad f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x-a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x-a)^2 + \cdots \qquad |x-a| < R$$

y la sustitución de $x = a$ en la ecuación 4 da

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$$

Ahora ya puede ver el patrón. Si continúa derivando y sustituyendo $x = a$, obtendrá

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot nc_n = n!c_n$$

Al resolver esta ecuación para el n-ésimo coeficiente c_n, tiene

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Esta fórmula sigue siendo válida incluso para $n = 0$ si adopta la convención de que $0! = 1$ y $f^{(0)} = f$. En estos términos, ha demostrado el teorema siguiente:

$\boxed{5}$ **TEOREMA** Si f se puede representar como una serie de potencias (desarrollo) en a, es decir, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

por lo tanto sus coeficientes los da la fórmula

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Si sustituye esta fórmula de c_n de nuevo en la serie, observe que si f tiene un desarrollo en serie de potencias en a, después debe ser de la forma siguiente:

$$\boxed{6} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

TAYLOR Y MACLAURIN

La serie de Taylor lleva este nombre en honor al matemático inglés Brook Taylor (1685-1731) y la serie de Maclaurin se llama así para recordar al matemático escocés Colin Maclaurin (1698-1746) a pesar del hecho de que la serie de Maclaurin es realmente un caso especial de la serie de Taylor. Pero la idea de representar funciones particulares como sumas de series de potencias se remonta a Newton, y el matemático escocés James Gregory conoció la serie general de Taylor en 1668 y el matemático suizo John Bernoulli la conoció por 1690. Al parecer, Taylor no conocía el trabajo de Gregory ni de Bernoulli cuando publicó sus descubrimientos relacionados con las series en 1715 en su libro *Methodus incrementorum directa et inversa*. Las series de Maclaurin se llaman así porque Colin Maclaurin las popularizó en su libro de texto *Treatise of Fluxions* que se publicó en 1742.

La serie de la ecuación 6 se denomina **serie de Taylor de la función f en a** (o bien, **con respecto a a o centrada en a**). Para el caso especial $a = 0$ la serie de Taylor se transforma en

$$\boxed{7} \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots$$

Como este caso surge con bastante frecuencia, se le da el nombre especial de **serie de Maclaurin.**

NOTA Ya se demostró que *si* f se puede representar como una serie de potencias con respecto a a, después f es igual a la suma de sus series de Taylor. Pero hay funciones que no son iguales a la suma de sus series de Taylor. Un ejemplo de tales funciones se presenta en el ejercicio 70.

EJEMPLO 1 Determine la serie de Maclaurin de la función $f(x) = e^x$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, en tal caso $f^{(n)}(x) = e^x$, por lo que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para toda n. Por lo tanto, la serie de Taylor para f en 0, (es decir, la serie de Maclaurin), es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Para determinar el radio de convergencia haga $a_n = x^n/n!$ En tal caso

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1$$

por esto, según la prueba por comparación, la serie converge para toda x y el radio de convergencia es $R = \infty$. □

La conclusión que obtiene del teorema 5 y el ejemplo 1 es que *si* e^x tiene un desarrollo de serie en potencias en 0, por lo tanto

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Por eso, ¿cómo se puede decir si e^x *sí* tiene una representación como serie de potencias?

Investigue la cuestión más general: ¿en qué circunstancias es una función igual a la suma de sus series de Taylor? En otras palabras, si f tiene derivadas de todos los órdenes, cuándo es cierto que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Como sucede con cualquier serie convergente, esto quiere decir que $f(x)$ es el límite de la sucesión de sumas parciales. En el caso de la serie de Taylor, las sumas parciales son

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

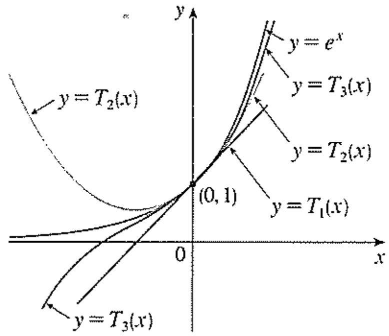


FIGURA 1

Cuando n se incrementa, $T_n(x)$ parece aproximarse a e^x en la figura 1. Esto hace pensar que e^x es igual a la suma de su serie de Taylor.

Observe que T_n es un polinomio de grado n llamado **polinomio de Taylor de n-ésimo grado, de f en a.** Por ejemplo, en el caso de la función exponencial $f(x) = e^x$, el resultado del ejemplo 1 muestra que los polinomios de Taylor en 0 (o polinomios de Maclaurin), con $n = 1, 2$ y 3 son

$$T_1(x) = 1 + x \qquad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \qquad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Las gráficas de la función exponencial y estos tres polinomios de Taylor se ilustran en la figura 1.

En general, $f(x)$ es la suma de su serie de Taylor si

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$$

Si hace

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \qquad \text{de modo que} \qquad f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

entonces $R_n(x)$ se llama **residuo** de la serie de Taylor. Si puede de alguna manera demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, después se infiere que

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = \lim_{n\to\infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) = f(x)$$

Por lo tanto, ha demostrado lo siguiente:

$\boxed{8}$ **TEOREMA** Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, donde T_n es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a y

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, en tal caso f es igual a la suma de sus series de Taylor en el intervalo $|x - a| < R$.

Al tratar de demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para una función específica f, se usa por lo regular el hecho siguiente.

$\boxed{9}$ **DESIGUALDAD DE TAYLOR** Si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$, por lo tanto el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor cumple con la desigualdad

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - a|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Para entender por qué es cierto para $n = 1$, suponga que $|f''(x)| \leqslant M$. En particular, se tiene $f''(x) \leqslant M$, y de tal manera para $a \leqslant x \leqslant a + d$

$$\int_a^x f''(t)\,dt \leqslant \int_a^x M\,dt$$

Una antiderivada de f'' es f', por lo que según la parte 2 del teorema fundamental del cálculo tenemos

$$f'(x) - f'(a) \leqslant M(x - a) \qquad \text{o bien,} \qquad f'(x) \leqslant f'(a) + M(x - a)$$

Otras opciones aparte de la desigualdad de Taylor son las fórmulas siguientes para el residuo. Si $f^{(n+1)}$ es continua en un intervalo I y $x \in I$, por lo tanto

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Esta expresión recibe el nombre de *forma integral del término del residuo*. Otra fórmula, que se llama *forma de Lagrange del término del residuo*, establece que hay un número z entre x y a tal que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Esta versión es una generalización del teorema del valor medio, que es el caso $n = 0$).

Las demostraciones de estas fórmulas, además del análisis de cómo usarlas para resolver los ejemplos de las secciones 11.10 y 11.11, se encuentran en la página web

www.stewartcalculus.com

Dé un clic en *Additional Topics* y luego en *Formulas for the Remainder Term in Taylor series.*

En estos términos,
$$\int_a^x f'(t)\,dt \leqslant \int_a^x [f'(a) + M(t-a)]\,dt$$

$$f(x) - f(a) \leqslant f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Pero $R_1(x) = f(x) - T_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. De modo que

$$R_1(x) \leqslant \frac{M}{2}(x-a)^2$$

Un razonamiento similar, aplicando $f''(x) \geqslant -M$, demuestra que

$$R_1(x) \geqslant -\frac{M}{2}(x-a)^2$$

De donde
$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2}|x-a|^2$$

Aunque ha supuesto que $x > a$, cálculos similares muestran que esta desigualdad es válida también para $x < a$.

Esto demuestra la desigualdad de Taylor para el caso donde $n = 1$. El resultado para cualquier n se demuestra de manera parecida integrando $n + 1$ veces. (Véase el ejercicio 69 para el caso $n = 2$.)

NOTA En la sección 11.11 se explora el uso de la desigualdad de Taylor en funciones que se aproximan. Aquí, el uso inmediato es junto con el teorema 8.

Con frecuencia, al aplicar los teoremas 8 y 9 es útil recurrir al hecho siguiente.

10
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \qquad \text{para todo número real } x}$$

Es verdadero porque de acuerdo con el ejemplo 1, la serie $\Sigma\, x^n/n!$ es convergente para toda x y de este modo su n-ésimo término se aproxima a 0.

EJEMPLO 2 Demuestre que e^x es igual a la suma de sus series de Maclaurin.

SOLUCIÓN Si $f(x) = e^x$, por lo tanto $f^{(n+1)}(x) = e^x$ para toda n. Si d es cualquier número positivo y $|x| \leqslant d$, después $|f^{(n+1)}(x)| = e^x \leqslant e^d$. Por eso, la desigualdad de Taylor, con $a = 0$ y $M = e^d$, establece que

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} \qquad \text{para } |x| \leqslant d$$

Observe que la misma constante $M = e^d$ funciona para todo valor de n. Pero, según la ecuación 10,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^d}{(n+1)!}|x|^{n+1} = e^d \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Se infiere del teorema de la compresión que $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$ y, por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todos los valores de x. De acuerdo con el teorema 8, e^x es igual a la suma de la serie de Maclaurin, es decir,

11 $$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para toda } x}$$ □

▣ En 1748, Leonhard Euler aplicó la ecuación 12 para determinar el valor de e con 23 cifras decimales. En 2003 Shigeru Kondo, de nuevo usando la serie en (12), calculó e a más de 50,000 millones de lugares decimales. Las técnicas especiales que utilizaron para acelerar el cálculo se explican en la página web

www.numbers.computation.free.fr

En particular, si hace $x = 1$ en la ecuación 11, obtiene la expresión siguiente para el número e como una suma de una serie infinita:

12 $$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots}$$

EJEMPLO 3 Determine la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ en $a = 2$.

SOLUCIÓN Se tiene $f^{(n)}(2) = e^2$ y, de este modo, al hacer $a = 2$ en la definición de la serie de Taylor (6) obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

También se puede verificar, como en el ejemplo 1, que el radio de convergencia es $R = \infty$. Como en el ejemplo 2 puede comprobar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, de modo que

13 $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \qquad \text{para toda } x$$ □

Hay dos desarrollos de series de potencias para e^x, la serie de Maclaurin de la ecuación 11 y la serie de Taylor de la ecuación 13. El primero es mejor si está interesado en valores de x cercanos a 0 y el segundo funciona muy bien si x es cercano a 2.

EJEMPLO 4 Determine la serie de Maclaurin para sen x y demuestre que representa sen x para toda x.

SOLUCIÓN Acomode los cálculos en dos columnas como sigue:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\
f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Puesto que la derivada se repite en un ciclo de cuatro, puede escribir la serie de Maclaurin como sigue:

$$\begin{aligned}
f(0) &+ \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

En la figura 2 se ilustra la gráfica de sen x junto con su polinomio de Taylor (o de Maclaurin)

$$T_1(x) = x$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Observe que cuando n se incrementa, $T_n(x)$ se vuelve una mejor aproximación para sen x.

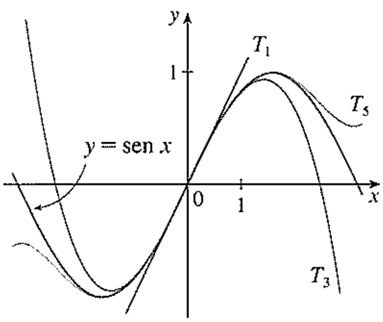


FIGURA 2

Puesto que $f^{(n+1)}(x)$ es $\pm$sen x o bien, $\pm\cos x$, sabe que $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ para toda x. De este modo puede tomar a $M = 1$ en la desigualdad de Taylor

$$\boxed{14} \qquad |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x^{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

De acuerdo con la ecuación 10 el lado derecho de esta desigualdad tiende a 0 cuando $n \to \infty$, de modo que $|R_n(x)| \to 0$ según el teorema de compresión. Se infiere entonces que $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, de modo que sen x es igual a la suma de su serie de Maclaurin de acuerdo con el teorema 8. □

Se establece el resultado del ejemplo 4 para referencia futura.

$$\boxed{15} \qquad \boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{para toda } x \end{aligned}}$$

EJEMPLO 5 Determine la serie de Maclaurin para $\cos x$.

SOLUCIÓN Podría proceder en forma directa como en el ejemplo 4, pero es más fácil derivar la serie de Maclaurin para sen x dada por la ecuación 15:

$$\cos x = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

La serie de Maclaurin para e^x, sen x y $\cos x$ que determinó en los ejemplos 2, 4 y 5 la descubrió Newton aplicando métodos distintos. Estas ecuaciones son notables porque se conoce todo con respecto a cada una de estas funciones si conoce todas sus derivadas en el número 0.

Puesto que la serie de Maclaurin para sen x converge para toda x, el teorema 2 de la sección 11.9 señala que la serie derivada para $\cos x$ converge también para toda x. En estos términos,

$$\boxed{16} \qquad \boxed{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{para toda } x \end{aligned}}$$ □

EJEMPLO 6 Determine la serie de Maclaurin para la función $f(x) = x\cos x$.

SOLUCIÓN En lugar de calcular las derivadas y sustituir en la ecuación 7, es más fácil multiplicar la serie para $\cos x$, ecuación 16, por x:

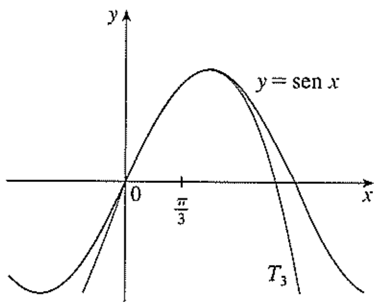
$$x\cos x = x\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$ □

EJEMPLO 7 Represente $f(x) =$ sen x como la suma de su serie de Taylor centrada en $\pi/3$.

SOLUCIÓN Primero acomode los valores en columnas

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen} x & f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
f'(x) &= \cos x & f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2} \\
f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
f'''(x) &= -\cos x & f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ha obtenido dos diversas series de representaciones para sen x, la serie de Maclaurin en el ejemplo 4 y la serie de Taylor en el ejemplo 7. Es mejor utilizar la serie de Maclaurin para los valores de x cerca a 0 y la serie de Taylor para x cerca a $\pi/3$. Observe que el tercer polinomio de Taylor T_3 en la figura 3 es una buena aproximación al sen x cerca de $\pi/3$, mas no así cerca de 0. Compárelo con el tercer polinomio de Maclaurin T_3 en la figura 2, donde está el polinomio opuesto verdadero.



y este patrón se repite en forma indefinida. Por lo tanto, la serie de Taylor en $\pi/3$ es

$$
f\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots
$$

$$
= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cdots
$$

La demostración de que esta serie representa sen x para toda x es muy similar a la del ejemplo 4. [Sólo reemplace x por $x - \pi/3$ en (14).] Puede escribir la serie con la notación sigma o suma si separamos los términos que contienen $\sqrt{3}$:

$$
\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{3}}{2(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^{2n+1} \qquad \square
$$

La serie de potencias obtenidas mediante métodos indirectos en los ejemplos 5 y 6 y en la sección 11.9 son realmente la serie de Taylor o de Maclaurin de las funciones dadas porque el teorema 5 así lo establece, ya que no importa cómo una representación de una serie de potencias $f(x) = \Sigma\, c_n(x - a)^n$ se obtenga, siempre es cierto que $c_n = f^{(n)}(a)/n!$ En otras palabras, la determinación de los coeficientes es única.

En la tabla siguiente están reunidas, para referencia futura, algunas de las series importantes de Maclaurin deducidas en esta sección y en la anterior.

EJEMPLO 8 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x) = (1 + x)^k$, donde k es cualquier número real.

SOLUCIÓN Al ordenar el trabajo en columnas

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1 + x)^k & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= k(1 + x)^{k-1} & f'(0) &= k \\
f''(x) &= k(k - 1)(1 + x)^{k-2} & f''(0) &= k(k - 1) \\
f'''(x) &= k(k - 1)(1 + 2)(1 + x)^{k-3} & f'''(0) &= k(k - 1)(k - 2) \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1)(1 + x)^{k-n} & f^{(n)}(0) &= k(k - 1) \cdots (k - n + 1)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la serie de Maclaurin de $f(x) = (1 + x)^k$ es

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k - 1) \cdots (k - n + 1)}{n!} x^n
$$

Esta serie se denomina **serie binomial.** Si su n-ésimo término es a_n, entonces

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)(k-n)x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{k(k-1)\cdots(k-n+1)x^n}\right|$$

$$= \left|\frac{k-n}{n+1}\right||x| = \frac{\left|1-\dfrac{k}{n}\right|}{1+\dfrac{1}{n}}|x| \to |x| \quad \text{es } n \to \infty$$

Entonces, por la prueba de razón, la serie binomial converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$. □

La notación tradicional para los coeficientes de la serie binomial es

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}$$

y los números se llaman **coeficientes del binomio.**

El siguiente teorema expresa que $(1 + k)^k$ es igual a la suma de su serie Maclaurin. Es posible demostrar esto al probar que el término restante $R_n(x)$ se aproxima a 0, pero esto resulta ser muy difícil. La prueba resumida en el ejercicio 71 es mucho más fácil.

17 SERIE BINOMIAL Si k es cualquier número real y $|x| < 1$, entonces

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Aun cuando la serie binomial siempre converge cuando $|x| < 1$, la pregunta de si converge o no en los extremos, ± 1, depende del valor de k. Resulta que la serie converge en 1 si $-1 < k \leqslant 0$ y en ambos extremos si $k \geqslant 0$. Nótese que si k es un entero positivo y $n > k$, entonces la expresión para $\binom{k}{n}$ contiene un factor $(k - k)$, de modo que $\binom{k}{n} = 0$ para $n > k$. Esto significa que la serie termina y reduce el teorema del binomio ordinario cuando k es un entero positivo. (Véase la página de referencia 1.)

EJEMPLO 9 Encuentre la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ y su radio de convergencia.

SOLUCIÓN Escriba $f(x)$ de forma que pueda usar la serie binomial:

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{4\left(1-\dfrac{x}{4}\right)}} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}\right)^{-1/2}$$

Y al usar la serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$ y donde x fue reemplazada por $-x/4$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{4}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}\left(-\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})\cdots(-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!}\left(-\frac{x}{4}\right)^n + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8}x + \frac{1\cdot 3}{2!8^2}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!8^3}x^3 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!8^n}x^n + \cdots\right]$$

Sabe de (17) que esta serie converge con $|-x/4| < 1$, es decir, $|x| < 4$, de modo que el radio de convergencia es $R = 4$. □

En la tabla siguiente están reunidas, para referencia futura, algunas de las series importantes de Maclaurin que ha deducido en esta sección y en la anterior..

TABLA 1
Series importantes de Maclaurin y sus radios de convergencia

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$R = 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$R = \infty$
$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	$R = \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	$R = \infty$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$	$R = 1$
$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots$	$R = 1$

TEC Module 11.10/11.11 permite ver cómo polinomios sucesivos de Taylor se aproximan a la función original.

Una razón de que las series de Taylor sean importantes, es que permiten integrar funciones que no se podían manejar antes. En efecto, en la introducción de este capítulo mencionamos que Newton integraba a menudo funciones expresándolas primero como series de potencias, y que después integraba la serie término a término. No es posible integrar la función $f(x) = e^{-x^2}$ por medio de las técnicas conocidas hasta este momento, porque su antiderivada no es una función elemental (véase sección 7.5). En el ejemplo siguiente se aplica la idea de Newton para integrar esta función.

EJEMPLO 10

(a) Evalúe $\int e^{-x^2}\,dx$ como una serie infinita.

(b) Evalúe $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ de tal manera que no difiera 0.001 del valor real.

SOLUCIÓN

(a) Primero encuentre la serie de Maclaurin de $f(x) = e^{-x^2}$. Aunque es posible usar el método directo, determinémosla simplemente mediante el reemplazo de x con $-x^2$ en la serie de e^x dada en la tabla 1. Por esto, para todos los valores de x,

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

Ahora integre término a término

$$\int e^{-x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots\right) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots$$

Esta serie es convergente para toda x porque la serie original para e^{-x^2} converge para toda x.

(b) El teorema fundamental del cálculo

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \cdots\right]_0^1$$

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{42} + \tfrac{1}{216} \approx 0.7475$$

Es posible hacer $C = 0$ en la antiderivada del inciso (a).

El teorema de estimación de la serie alternante demuestra que el error que hay en esta aproximación es menor que

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0.001$$

□

Otra aplicación de la serie de Taylor se ilustra en el ejemplo siguiente. El límite podría ser calculado con la regla de l'Hospital, pero en lugar de hacerlo así se recurre a las series.

EJEMPLO 11 Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

SOLUCIÓN Al utilizar la serie de Maclaurin para e^x

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{5!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}$$

Algunos sistemas algebraicos computacionales calculan los límites de esta manera.

porque las series de potencias son funciones continuas. □

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Si las series de potencias se suman o restan, se comportan como polinomios; (el teorema 11.2.8 lo ilustra). En efecto, como lo ilustra el ejemplo siguiente, las series también se pueden multiplicar y dividir como los polinomios. Primero determine los primeros términos porque los cálculos para los siguientes se vuelven tediosos y los términos iniciales son los más importantes.

EJEMPLO 12 Calcule los primeros tres términos no cero de la serie de Maclaurin para (a) $e^x \operatorname{sen} x$ y (b) $\tan x$.

SOLUCIÓN

(a) Mediante la serie de Maclaurin para e^x y $\operatorname{sen} x$ en la tabla 1

$$e^x \operatorname{sen} x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)$$

Al multiplicar esta expresión y agrupar por términos semejantes, al igual que con los polinomios:

$$\begin{array}{r}
1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
x \qquad\quad - \frac{1}{6}x^3 + \cdots \\
\hline
x + \quad x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots \\
- \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \cdots \\
\hline
x + \quad x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots \qquad
\end{array}$$

Así,
$$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots$$

(b) Al utilizar la serie de Maclaurin en la tabla 1

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots}$$

Aplique un procedimiento como el de la división larga

$$\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \\
\hline
1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots & x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots \\
 & x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \cdots \\
\cline{2-2}
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots \\
 & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 + \cdots \\
\cline{2-2}
 & \frac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{array}$$

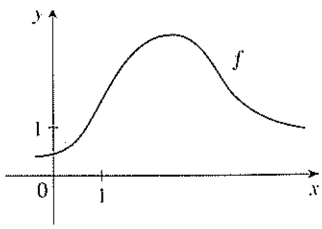
Por consiguiente,
$$\tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \cdots$$
□

No se ha intentado justificar las manipulaciones formales que se utilizaron en el ejemplo 12, pero son legítimas. Hay un teorema que establece que si tanto $f(x) = \Sigma\, c_n x^n$ como $g(x) = \Sigma\, b_n x^n$ convergen para $|x| < R$ y las series se multiplican como si fueran polinomios, en tal caso la serie resultante también converge para $|x| < R$ y representa $f(x)g(x)$. En cuanto a la división es necesario que $b_0 \neq 0$; la serie resultante converge para $|x|$ suficientemente pequeña.

11.10 EJERCICIOS

1. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$ para toda x, escriba una fórmula para b_8.

2. Se proporciona la gráfica de f.



(a) Explique por qué la serie

$$1.6 - 0.8(x-1) + 0.4(x-1)^2 - 0.1(x-1)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 1.

(b) Explique por qué la serie

$$2.8 + 0.5(x-2) + 1.5(x-2)^2 - 0.1(x-2)^3 + \cdots$$

no es la serie de Taylor de f centrada en 2.

3. Si $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.

4. Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

¿Cuál es el radio de convergencia de la serie de Taylor?

5–12 Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x)$ usando la definición de la serie de Maclaurin. [Suponga que f tiene un desarrollo en serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.] Determine también el radio asociado con la convergencia.

5. $f(x) = (1-x)^{-2}$ **6.** $f(x) = \ln(1+x)$

7. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ **8.** $f(x) = \cos 3x$

9. $f(x) = e^{5x}$ **10.** $f(x) = xe^x$

11. $f(x) = \operatorname{senh} x$ **12.** $f(x) = \cosh x$

13–20 Calcule la serie de Taylor para $f(x)$ centrada en el valor dado de a. [Suponga que f tiene un desarrollo de serie de potencias. No demuestre que $R_n(x) \to 0$.]

13. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, $a = 1$

14. $f(x) = x - x^3$, $a = -2$

15. $f(x) = e^x$, $a = 3$ **16.** $f(x) = 1/x$, $a = -3$

17. $f(x) = \cos x$, $a = \pi$ **18.** $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = \pi/2$

19. $f(x) = 1/\sqrt{x}$, $a = 9$ **20.** $f(x) = x^{-2}$, $a = 1$

21. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 7 representa sen πx para toda x.

22. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 18 representa sen x para toda x.

23. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 11 representa senh x para toda x.

24. Demuestre que la serie obtenida en el ejercicio 12 representa cosh x para toda x.

25–28 Use la serie binomial para expandir la función como una serie de potencias. Exprese el radio de convergencia.

25. $\sqrt{1+x}$ **26.** $\dfrac{1}{(1+x)^4}$

27. $\dfrac{1}{(2+x)^3}$ **28.** $(1-x)^{2/3}$

29–38 Utilice la serie de Maclaurin que paracere en la tabla 1 para obtener la serie de Maclaurin para la función dada.

29. $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ **30.** $f(x) = \cos(\pi x/2)$

31. $f(x) = e^x + e^{2x}$ **32.** $f(x) = e^x + 2e^{-x}$

33. $f(x) = x\cos(\frac{1}{2}x^2)$ **33.** $f(x) = x^2 \tan^{-1}(x)^3$

35. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ **36.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2+x}}$

37. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ [*Sugerencia*: utilice $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.]

38. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

39–42 Determine la serie de Maclaurin de f (mediante cualquier método), y su radio de convergencia. Dibuje f y sus primeros polinomios de Taylor en la misma pantalla. ¿Qué observa con respecto a la correspondencia entre estos polinomios y f?

39. $f(x) = \cos(x^2)$ **40.** $f(x) = e^{-x^2} + \cos x$

41. $f(x) = xe^{-x}$ **42.** $f(x) = \ln(1+x^2)$

43. Mediante la serie de Maclaurin para e^x calcule $e^{-0.2}$ con cinco cifras decimales.

44. Utilice la serie de Maclaurin para sen x a fin de calcular sen 3° con cinco cifras decimales.

45. (a) Use la serie binomial para expandir $1/\sqrt{1-x^2}$
(b) Use la parte (a) para hallar la serie de Maclaurin para $\operatorname{sen}^{-1}x$.

46. (a) Expanda $1/\sqrt[4]{1+x}$ como una serie de potencias.
(b) Use la parte (a) para estimar $1/\sqrt[4]{1.1}$ correcta a tres lugares decimales.

47–50 Evalúe la integral indefinida como una serie infinita.

47. $\int x\cos(x^3)\,dx$ **48.** $\int \frac{e^x-1}{x}\,dx$

49. $\int \frac{\cos x - 1}{x}\,dx$ **50.** $\int \arctan(x^2)\,dx$

51–54 Utilice series para obtener un valor aproximado de la integral definida con la exactitud indicada.

51. $\int_0^1 x\cos(x^3)\,dx$ (tres decimales);

52. $\int_0^{0.2}[\tan^{-1}(x^3)+\operatorname{sen}(x^3)]\,dx$ (cinco decimales)

53. $\int_0^{0.4}\sqrt{1+x^4}\,dx$ ($|\text{error}| < 5\times 10^{-6}$)

54. $\int_0^{0.5} x^2e^{-x^2}\,dx$ ($|\text{error}| < 0.001$)

55–57 Mediante las series evalúe el límite.

55. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan^{-1}x}{x^3}$ **56.** $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+x-e^x}$

57. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$

58. Utilice la serie del ejemplo 12(b) para evaluar

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$$

Este límite se calculó en el ejemplo 4 de la sección 4.4 utilizando la regla de l'Hospital tres veces. ¿Cuál método prefiere?

59–62 Utilice la multiplicación o la división de series de potencias para determinar los primeros tres términos diferentes de cero en la serie de Maclaurin para cada función.

59. $y = e^{-x^2}\cos x$ **60.** $y = \sec x$

61. $y = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$ **62.** $y = e^x\ln(1-x)$

63–68 Calcule la suma de la serie.

63. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{n!}$ **64.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$

65. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$ **66.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n n!}$

67. $3+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81}{4!}+\cdots$

68. $1-\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}-\frac{(\ln 2)^3}{3!}+\cdots$

69. Demuestre la desigualdad de Taylor para $n = 2$, es decir, demuestre que si $|f'''(x)| \leqslant M$ para $|x-a| \leqslant d$, en tal caso

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{6}|x-a|^3 \qquad \text{para } |x-a| \leqslant d$$

70. (a) Demuestre que la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

no es igual a la serie de Maclaurin.
(b) Dibuje la función del inciso (a) y comente su comportamiento cerca del origen.

71. Use los pasos siguientes para demostrar (17).
(a) Sea $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n$. Derive esta serie para demostrar que

$$g'(x) = \frac{kg(x)}{1+x} \qquad -1 < x < 1$$

(b) Sea $h(x) = (1+x)^{-k}g(x)$ y demuestre que $h'(x) = 0$.
(c) Deduzca que $g(x) = (1+x)^k$.

72. En el ejercicio 53 de la sección 10.2 se demostró que la longitud de la elipse $x = a\operatorname{sen}\theta$, $y = b\cos\theta$, donde $a > b > 0$, es

$$L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$$

donde $e = \sqrt{a^2-b^2}/a$ es la excentricidad de la elipse. Expanda el integrando como serie binomial y use el resultado del ejercicio 46 de la sección 7.1 para expresar L como una serie en potencias de la excentricidad hasta el término en e^6.

PROYECTO DE LABORATORIO

CAS UN LÍMITE ESCURRIDIZO

Este proyecto es sobre la función

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\tan x) - \tan(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{arcsen}(\arctan x) - \arctan(\operatorname{arcsen} x)}$$

1. Utilice su sistema algebraico computacional para evaluar $f(x)$ para $x = 1, 0.1, 0.01, 0.001$, y 0.0001. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?
2. Use el CAS para dibujar f cerca de $x = 0$. ¿Parece tener f un límite cuando $x \to 0$?
3. Intente evaluar $\lim_{x \to 0} f(x)$ con la regla de l'Hospital, usando el CAS para hallar las derivadas del numerador y el denominador. ¿Qué descubrió? ¿Cuántas aplicaciones de la regla de l'Hospital se requieren?
4. Evalúe $\lim_{x \to 0} f(x)$ con ayuda del CAS para encontrar la cantidad suficiente de términos de la serie de Taylor del numerador y el denominador. (Utilice el comando `taylor` en Maple o `Series` en Mathematica).
5. Utilice el comando límite en su CAS para calcular directamente $\lim_{x \to 0} f(x)$ (La mayor parte de los sistemas algebraicos computacionales utilizan el método del problema 4 para calcular límites.)
6. En vista de las respuestas a los problemas 4 y 5, ¿cómo explica los resultados de los problemas 1 y 2?

REDACCIÓN DE PROYECTO

CÓMO DESCUBRIÓ NEWTON LA SERIE BINOMIAL

El teorema de binomio, que proporciona el desarrollo de $(a + b)^k$, ya lo conocían los matemáticos chinos muchos siglos antes de que naciera Newton, en especial para el caso donde el exponente k es un entero positivo. En 1665, cuando Newton tenía 22 años, descubrió por primera vez el desarrollo de la serie infinita $(a + b)^k$ cuando k es un exponente fraccionario, positivo o negativo. No publicó sus descubrimientos, pero los planteó y proporcionó ejemplos de cómo usarlos en una carta de fecha 13 de junio de 1676, carta que (ahora se llama *epistola prior*), que envió a Henry Oldenburg, secretario de la *Royal Society of London*, para que la transmitiera a Leibniz. Cuando éste contestó, le preguntó a Newton cómo había descubierto las series binomiales. Newton escribió una segunda carta, la *epistola posterior*, del 24 de octubre de 1676, en la cual explica con lujo de detalles la manera como llegó a su descubrimiento mediante una ruta muy indirecta. Estaba investigando las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$ de 0 a x para $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Son fáciles de calcular si n es par. Al observar patrones y al interpolar, Newton fue capaz de adivinar las respuestas de valores impares de n. Por lo tanto se dio cuenta de que podía obtener las mismas respuestas expresando $(1 - x^2)^{n/2}$ como una serie infinita.

Escriba un ensayo sobre el descubrimiento de Newton. Inicie dando el enunciado de serie binomial en la notación de Newton (véase *epistola prior* en la página 285 de [4] o la página 402 de [2]). Explique por qué la versión de Newton es equivalente al teorema 17 de la página 742. Luego lea la *epistola posterior* de Newton (página 287 de [4] o página 404 de [2]) y explique los patrones que descubrió Newton en las áreas bajo las curvas $y = (1 - x^2)^{n/2}$. Muestre cómo podía él calcular el área bajo las curvas restantes y cómo comprobó su respuesta. Para finalizar, explique cómo estos descubrimientos llevaron a las series binomiales. Los libros de Edwards [1] y Katz [3] contienen comentarios de las cartas de Newton.

1. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, pp. 178-187.
2. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Londres: MacMillan Press, 1987.
3. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: HarperCollins, 1993, pp. 463-466.
4. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1969.

11.11 APLICACIONES DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR

En esta sección se exploran dos tipos de aplicaciones de los polinomios de Taylor. Primero se examina cómo se usan para aproximar funciones: a los científicos de la computación les gustan porque los polinomios son los más sencillos de las funciones. Luego investigamos cómo los físicos y los ingenieros los usan en campos como la relatividad, óptica, radiación de cuerpos negros, dipolos eléctricos, la velocidad de las ondas en el agua y la construcción de carreteras en el desierto.

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES MEDIANTE POLINOMIOS

Suponga que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor en a:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En la sección 11.10 se presentó la notación $T_n(x)$ para la n-ésima suma parcial de esta serie y se le llamó polinomio de n-ésimo grado de Taylor de f en a. Así,

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

Puesto que f es la suma de su serie de Taylor, sabe que $T_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$ y de este modo T_n se puede usar como una aproximación de f: $f(x) \approx T_n(x)$.

Observe que el polinomio de primer grado de Taylor

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

es lo mismo que la linealización de f en a que estudió en la sección 3.10. Note también que T_1 y su derivada tienen los mismos valores en a que f y f'. En general, se puede demostrar que las derivadas de T_n en a concuerdan con las de f hasta las derivadas de orden n, inclusive (véase ejercicio 38).

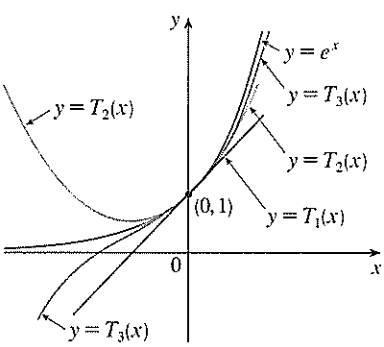


FIGURA 1

Con el fin de ilustrar estas ideas, vea una vez más las gráficas de $y = e^x$ y sus primeros polinomios de Taylor, como se ilustran en la figura 1. La gráfica de T_1 es la tangente a $y = e^x$ en (0, 1); esta tangente es la mejor aproximación lineal a e^x cerca de (0, 1). La gráfica de T_2 es la parábola $y = 1 + x + x^2/2$, y la gráfica de T_3 es la curva cúbica $y = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$, que es un ajuste más cercano a la curva exponencial $y = e^x$ que T_2. El polinomio siguiente de Taylor T_4 sería una aproximación mejor, y así sucesivamente.

	$x = 0.2$	$x = 3.0$
$T_2(x)$	1.220000	8.500000
$T_4(x)$	1.221400	16.375000
$T_6(x)$	1.221403	19.412500
$T_8(x)$	1.221403	20.009152
$T_{10}(x)$	1.221403	20.079665
e^x	1.221403	20.085537

Los valores de la tabla proporcionan una demostración numérica de la convergencia de los polinomios de Taylor $T_n(x)$ a la función $y = e^x$. Cuando $x = 0.2$ la convergencia es muy rápida, pero cuando $x = 3$ es un poco más lenta. De hecho, entre más lejos esté x de 0 es un poco más lenta. $T_n(x)$ converge más despacio hacia e^x.

Cuando usa un polinomio de Taylor T_n para aproximar una función f, debe preguntarse: ¿qué tan buena es una aproximación? ¿Qué tan grande quiere que sea n con objeto de que alcance una precisión deseada? Para responder estas preguntas, es necesario que examine el valor absoluto del residuo:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Hay tres métodos posibles para estimar el tamaño del error:

1. Si cuenta con una calculadora que trace gráficas o una computadora, la puede usar para dibujar $|R_n(x)|$ y de ahí estimar el error.
2. Si sucede que la serie es alternante, puede aplicar el teorema de estimación de la serie alternante.
3. En todos los casos puede aplicar la desigualdad de Taylor (Teorema 11.10.9), el cual establece que si $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$, por lo tanto

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

EJEMPLO 1

(a) Obtenga una aproximación de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por medio del polinomio de Taylor de grado 2 en $a = 8$.
(b) ¿Qué tan exacta es esta aproximación cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$?

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{x} = x^{1/3} & f(8) &= 2 \\ f'(x) &= \tfrac{1}{3}x^{-2/3} & f'(8) &= \tfrac{1}{12} \\ f''(x) &= -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} & f''(8) &= -\tfrac{1}{144} \\ f'''(x) &= \tfrac{10}{27}x^{-8/3} \end{aligned}$$

En estos términos, el polinomio de Taylor de segundo grado es

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2 \\ &= 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2 \end{aligned}$$

La aproximación deseada es

$$\sqrt[3]{x} \approx T_2(x) = 2 + \tfrac{1}{12}(x-8) - \tfrac{1}{288}(x-8)^2$$

(b) La serie de Taylor no es alternante cuando $x < 8$, de modo que no puede aplicar el teorema de estimación de la serie alternante en este ejemplo. Pero sí puede usar la desigualdad de Taylor con $n = 2$ y $a = 8$:

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{M}{3!}|x-8|^3$$

donde $|f'''(x)| \leqslant M$. Como $x \geqslant 7$, tiene $x^{8/3} \geqslant 7^{8/3}$ y de esa manera

$$f'''(x) = \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{x^{8/3}} \leqslant \frac{10}{27} \cdot \frac{1}{7^{8/3}} < 0.0021$$

Por lo tanto, puede hacer $M = 0.0021$. Asimismo, $7 \leqslant x \leqslant 9$, de modo que $-1 \leqslant x - 8 \leqslant 1$ y $|x-8| \leqslant 1$. Después la desigualdad de Taylor da

$$|R_2(x)| \leqslant \frac{0.0021}{3!} \cdot 1^3 = \frac{0.0021}{6} < 0.0004$$

En estos términos, si $7 \leqslant x \leqslant 9$, la aproximación en el inciso (a) no difiere en más de 0.0004 del valor real. □

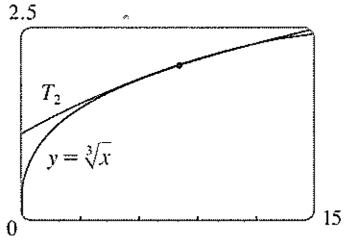


FIGURA 2

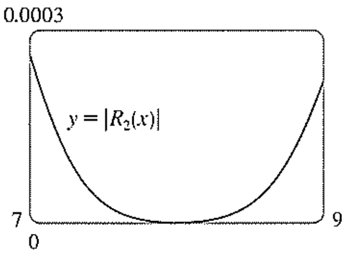


FIGURA 3

Con la ayuda de una calculadora para trazar gráficas o de una computadora compruebe el cálculo del ejemplo 1. En la figura 2 se muestra que las gráficas de $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = T_2(x)$ están muy cercanas entre sí cuando x está cerca de 8. En la figura 3 se ilustra la gráfica de $|R_2(x)|$ calculada a partir de la expresión

$$|R_2(x)| = |\sqrt[3]{x} - T_2(x)|$$

A partir de la gráfica:

$$|R_2(x)| < 0.0003$$

cuando $7 \leqslant x \leqslant 9$. Así, la estimación de error mediante métodos gráficos es ligeramente mejor que cuando se hace a partir de la desigualdad de Taylor, en este caso.

V EJEMPLO 2

(a) ¿Cuál es el error máximo posible al utilizar la aproximación

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

cuando $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$? Utilice esta aproximación para calcular sen 12° con seis cifras decimales.

(b) ¿Para qué valores de x esta aproximación no difiere en más de 0.00005 del valor real?

SOLUCIÓN

(a) Observe que la serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

es alternante para todos los valores no cero de x, y los términos sucesivos decrecen en tamaño porque $|x| < 1$, de modo que puede usar el teorema de estimación de la serie alternante. El error en la aproximación de sen x por medio de los tres términos de su serie de Maclaurin es cuando mucho

$$\left|\frac{x^7}{7!}\right| = \frac{|x|^7}{5040}$$

Si $-0.3 \leqslant x \leqslant 0.3$, por lo tanto $|x| \leqslant 0.3$, de modo que el error es más pequeño que

$$\frac{(0.3)^7}{5040} \approx 4.3 \times 10^{-8}$$

Para calcular sen 12° primero convierta a radianes.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 12° &= \operatorname{sen}\left(\frac{12\pi}{180}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{15}\right)\\ &\approx \frac{\pi}{15} - \left(\frac{\pi}{15}\right)^3\frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{15}\right)^5\frac{1}{5!} \approx 0.20791169\end{aligned}$$

Por esto, con seis cifras decimales, sen 12° ≈ 0.207912.

(b) El error será menor que 0.00005 si

$$\frac{|x|^7}{5040} < 0.00005$$

Al resolver la desigualdad y encontrar x

$$|x|^7 < 0.252 \qquad \text{o bien,} \qquad |x| < (0.252)^{1/7} \approx 0.821$$

De modo que la aproximación dada no difiere en más de 0.00005 cuando $|x| < 0.82$. □

TEC En Module 11.10/11.11 se muestran en forma gráfica los residuos de las aproximaciones de los polinomios de Taylor.

¿Qué sucede si recurre a la desigualdad de Taylor para resolver el ejemplo 2? Puesto que $f^{(7)}(x) = -\cos x$, tiene $|f^{(7)}(x)| \leq 1$ y de esa manera

$$|R_6(x)| \leq \frac{1}{7!}|x|^7$$

De este modo llegamos a la misma estimación que con el teorema de la estimación de la serie alternante.

¿Qué hay con respecto a los métodos gráficos? En la figura 4 se ilustra la gráfica de

$$|R_6(x)| = \left|\operatorname{sen} x - \left(x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5\right)\right|$$

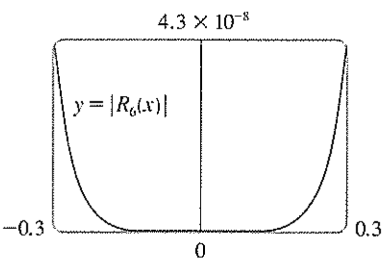


FIGURA 4

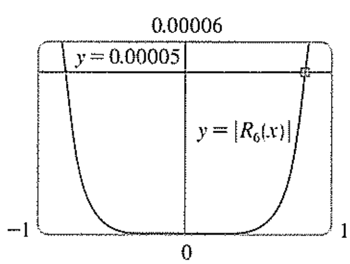


FIGURA 5

y observe que $|R_6(x)| < 4.3 \times 10^{-8}$ cuando $|x| \leq 0.3$. Es la misma estimación que obtuvo en el ejemplo 2. En el caso del inciso (b) quiere $|R_6(x)| < 0.00005$, de modo que dibuja tanto $y = |R_6(x)|$ como $y = 0.00005$ en la figura 5. Si coloca el cursor en el punto de intersección derecho, verá que la desigualdad se cumple cuando $|x| < 0.82$. Una vez más llega a la misma estimación que obtuvo en la solución del ejemplo 2.

Si se hubiera pedido que aproximara sen 72° en lugar de sen 12° en el ejemplo 2, habría sido prudente utilizar los polinomios de Taylor en $a = \pi/3$ (en lugar de $a = 0$), porque son mejores aproximaciones de sen x para valores de x cercanos a $\pi/3$. Observe que 72° es cercano a 60°, es decir, $\pi/3$ radianes, y las derivadas de sen x son fáciles de calcular en $\pi/3$.

La figura 6 muestra las gráficas de las aproximaciones de los polinomios de Maclaurin

$$T_1(x) = x \qquad\qquad T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \qquad\qquad T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

a la curva seno. Puede ver que cuando n se incrementa, $T_n(x)$ es una buena aproximación a sen x en un intervalo más y más grande.

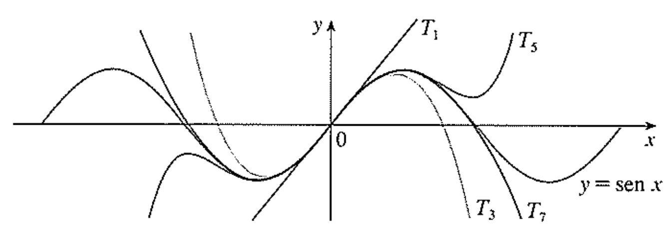


FIGURA 6

Las calculadoras y computadoras aplican el tipo de cálculo hecho en los ejemplos 1 y 2. Por ejemplo, cuando usted presiona la tecla sen o e^x de su calculadora, o bien, cuando un programador de computadoras utiliza una subrutina en el caso de una función trigonométrica o exponencial o de Bessel, en muchas máquinas se calcula una aproximación polinomial. Con frecuencia, el polinomio es uno de Taylor que ha sido modificado de modo que el error se extiende más uniformemente en todo el intervalo.

APLICACIONES EN LA FÍSICA

Los polinomios de Taylor también se usan con mucha frecuencia en la física. Con objeto de entender una ecuación, los físicos simplifican a menudo una función considerando sólo los dos o tres términos de su serie de Taylor. En otras palabras, los físicos usan un polinomio de Taylor como una aproximación de la función. La desigualdad de Taylor se puede usar para medir la exactitud de la aproximación. En el ejemplo siguiente, se muestra una manera en la cual esta idea se usa en la relatividad especial.

EJEMPLO 3 En la teoría de Einstein de la relatividad especial, la masa de un objeto que se desplaza con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa del objeto cuando está en reposo y c es la velocidad de la luz. La energía cinética del objeto es la diferencia entre su energía total y su energía en reposo:

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

(a) Demuestre que cuando v es muy pequeña comparada con c, esta expresión para K concuerda con la física clásica de Newton: $K = \frac{1}{2}m_0v^2$.
(b) Aplique la desigualdad de Taylor para estimar la diferencia en estas expresiones para K cuando $|v| \leqslant 100$ m/s.

SOLUCIÓN
(a) Mediante las expresiones dadas para K y m obtiene

$$K = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2$$
$$= m_0c^2\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

La curva superior de la figura 7 es la gráfica de la expresión de la energía cinética K de un objeto con velocidad v en la relatividad especial. La curva inferior muestra la función usada para K en la física clásica newtoniana. Cuando v es mucho más pequeña que la velocidad de la luz, las curvas son prácticamente idénticas.

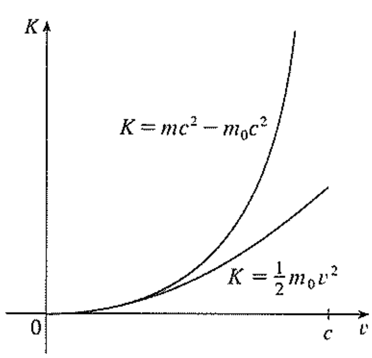


FIGURA 7

Con $x = -v^2/c^2$, la serie de Maclaurin para $(1 + x)^{-1/2}$ es más fácil de calcular que una serie binomial con $k = -\frac{1}{2}$. (Observe que $|x| < 1$ porque $v < c$.) Por lo tanto

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots$$

y
$$K = m_0c^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right) - 1\right]$$
$$= m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \cdots\right)$$

Si v es mucho más pequeña que c, por lo tanto todos los términos después del primero son muy pequeños cuando se les compara con el primer término. Si los omite, obtiene

$$K \approx m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2$$

(b) Si $x = -v^2/c^2$, $f(x) = m_0c^2[(1 + x)^{-1/2} - 1]$ y M es un número tal que $|f''(x)| \leqslant M$, entonces aplica la desigualdad de Taylor para escribir

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{M}{2!}x^2$$

Tiene $f''(x) = \frac{3}{4}m_0c^2(1 + x)^{-5/2}$ y sabe que $|v| \leqslant 100$ m/s, de modo que

$$|f''(x)| = \frac{3m_0c^2}{4(1 - v^2/c^2)^{5/2}} \leqslant \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \quad (= M)$$

Así, con $c = 3 \times 10^8$ m/s,

$$|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{3m_0c^2}{4(1 - 100^2/c^2)^{5/2}} \cdot \frac{100^4}{c^4} < (4.17 \times 10^{-10})m_0$$

De modo que cuando $|v| \leqslant 100$ m/s, la magnitud del error al usar la expresión newtoniana para la energía cinética es cuanto mucho $(4.2 \times 10^{-10})m_0$. □

Estos conceptos también se aplican en el campo de la óptica. La figura 8 es una adaptación de *Optics*, 4a. ed. de Eugene Hecht, Reading, MA: Addison-Wesley, 2002, p. 153. Representa una onda de la fuente puntual S que se encuentra una interfaz esférica de radio R centrado en C. El rayo SA se refracta hacia P.

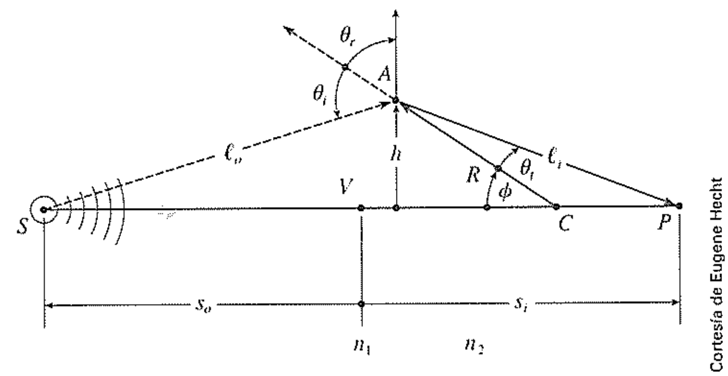


FIGURA 8
Refracción en una interfaz esférica

Al aplicar el principio de Fermat de que la luz viaja en el menor tiempo posible, Hecht deduce la ecuación

1 $$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$

donde n_1 y n_2 son índices de refracción y ℓ_o, ℓ_i, s_o y s_i son las distancias indicadas en la figura 8. De acuerdo con la ley de los cosenos aplicada en los triángulos ACS y ACP, tiene

2 $$\ell_o = \sqrt{R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\phi}$$

$$\ell_i = \sqrt{R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\phi}$$

En este caso utilice la identidad

$$\cos(\pi - \phi) = -\cos\phi$$

Como es un poco complicado trabajar con la ecuación 1, Gauss, en 1841, la simplificó usando la aproximación lineal $\cos\phi \approx 1$ para valores pequeños de ϕ. (Esto equivale a usar el polinomio de Taylor de grado 1.) Por lo tanto la ecuación se transforma en la siguiente ecuación más sencilla, que se le pide demostrar en el ejercicio 34(a):

3 $$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de Gauss* u *óptica de primer orden*, y se ha vuelto la herramienta teórica básica para diseñar lentes.

Una teoría más exacta se obtiene al aproximar $\cos\phi$ por medio de su polinomio de Taylor de grado 3 (que es el mismo que el polinomio de Taylor de grado 2). Esto considera los rayos para los cuales ϕ no es tan pequeña, es decir, rayos que golpean la superficie a mayores distancias h por arriba del eje. En el ejercicio 34(b) se le pide usar esta aproximación para deducir la ecuación más exacta

$$\boxed{4} \qquad \frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right]$$

La teoría óptica resultante se conoce como *óptica de tercer orden.*

Otras aplicaciones de los polinomios de Taylor a la física y la ingeniería se exploran en los ejercicios 32, 33, 35, 36 y 37 y en el proyecto de aplicación de la página 757.

11.11 EJERCICIOS

1. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 6 para $f(x) = \cos x$ centrada en $a = 0$. Dibuje f y estos polinomios en una misma pantalla.
   (b) Evalúe f y estos polinomios en $x = \pi/4$, $\pi/2$ y π.
   (c) Explique cómo los polinomios de Taylor convergen en $f(x)$.

2. (a) Encuentre los polinomios de Taylor hasta de grado 3 para $f(x) = 1/x$ centrada en $a = 1$. Dibuje f y estos polinomios en una misma pantalla.
   (b) Evalúe f y estos polinomios en $x = 0.9$ y 1.3.
   (c) Explique cómo los polinomios de Taylor convergen en $f(x)$.

3–10 Determine los polinomios de Taylor $T_n(x)$ para la función f en el número a. Dibuje f y T_n en la misma pantalla.

3. $f(x) = 1/x, \quad a = 2$
4. $f(x) = x + e^{-x}, \quad a = 0$
5. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$
6. $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x, \quad a = 0$
7. $f(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad a = 0$
8. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad a = 1$
9. $f(x) = xe^{-2x}, \quad a = 0$
10. $f(x) = \tan^{-1} x, \quad a = 1$

CAS **11–12** Use un sistema algebraico computacional para encontrar los polinomios de Taylor T_n con centro en a para $n = 2, 3, 4, 5$. Luego dibuje estos polinomios y f en la misma pantalla.

11. $f(x) = \cot x, \quad a = \pi/4$
12. $f(x) = \sqrt[3]{3 + x^2}, \quad n = 0$

13–22
(a) Encuentre un valor aproximado de f mediante un polinomio de Taylor con grado n en el número a.
(b) Con la desigualdad de Taylor estime la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x está en el intervalo dado.
(c) Compruebe el resultado del inciso (b) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4, \quad n = 2, \quad 4 \leqslant x \leqslant 4.2$
14. $f(x) = x^{-2}, \quad a = 1, \quad n = 2, \quad 0.9 \leqslant x \leqslant 1.1$
15. $f(x) = x^{2/3}, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.8 \leqslant x \leqslant 1.2$
16. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \pi/6, \quad n = 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/3$
17. $f(x) = \sec x, \quad a = 0, \quad n = 2, \quad -0.2 \leqslant x \leqslant 0.2$
18. $f(x) = \ln(1 + 2x), \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$
19. $f(x) = e^{x^2}, \quad a = 0, \quad n = 3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.1$
20. $f(x) = x \ln x, \quad a = 1, \quad n = 3, \quad 0.5 \leqslant x \leqslant 1.5$
21. $f(x) = x \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad n = 4, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$
22. $f(x) = \operatorname{senh} 2x, \quad a = 0, \quad n = 5, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$

23. Mediante la información del ejercicio 5 estime cos 80° con cinco cifras decimales.
24. Mediante la información del ejercicio 16 estime sen 38° con cinco cifras decimales.
25. Aplique la desigualdad de Taylor para determinar el número de términos de la serie de Maclaurin para e^x que se debe usar para estimar $e^{0.1}$ de tal manera que no difiera de 0.00001 del valor real.
26. ¿Cuántos términos de la serie de Maclaurin para $\ln(1 + x)$ son necesarios para estimar ln 1.4 con 0.001 de precisión?

27–29 Aplique el teorema de estimación de la serie alternante o la desigualdad de Taylor para estimar los valores de x para los cuales la aproximación dada es exacta y está dentro del error establecido. Compruebe gráficamente su respuesta.

27. $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{x^3}{6} \quad (|\text{error}| < 0.01)$
28. $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} \quad (|\text{error}| < 0.005)$
29. $\arctan x \approx x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \quad (|\text{error}| < 0.005)$

30. Suponga que

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

y la serie de Taylor de f con centro en 4 converge a $f(x)$ para toda x en el intervalo de convergencia. Demuestre que el polinomio de Taylor de quinto grado aproxima $f(5)$ con error menor a 0.0002.

31. Un vehículo se desplaza a una velocidad de 20 m/s y a una aceleración de 2 m/s^2 en un instante dado. Mediante un polinomio de Taylor de segundo grado, estime qué tanto se desplazará el automóvil en el siguiente segundo. ¿Sería razonable utilizar este polinomio para estimar la distancia recorrida durante el minuto siguiente?

32. La resistividad ρ de un conductor es el recíproco de la conductividad y se mide en unidades ohm-metros (Ω-m). La resistividad de un metal dado depende de la temperatura de acuerdo con la ecuación

$$\rho(t) = \rho_{20} e^{\alpha(t-20)}$$

donde t es la temperatura en °C. Hay tablas que dan los valores de α (llamado coeficiente de temperatura) y ρ_{20} (la resistividad a 20°C) para varios metales. Excepto a temperaturas muy bajas, la resistividad varía casi en forma lineal con la temperatura, por lo que es común aproximar la expresión para $\rho(t)$ mediante su polinomio de Taylor de primero o segundo grados en $t = 20$.

(a) Encuentre expresiones para estas aproximaciones lineales y cuadráticas.

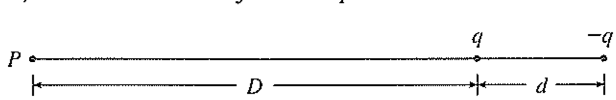
(b) Por lo que se refiere al cobre, las tablas dan $\alpha = 0.0039$/°C y $\rho_{20} = 1.7 \times 10^{-8}$ Ω-m. Dibuje la resistividad del cobre y las aproximaciones lineales y cuadráticas para $-250°$ C $\leq t \leq 1000$°C.

(c) ¿Para qué valores de t la aproximación lineal concuerda con la expresión exponencial de tal manera que no difiera 1% del valor real?

33. Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas eléctricas de igual magnitud y signos opuestos. Si las cargas son q y $-q$ y hay una distancia d entre ellas, en tal caso el campo eléctrico E en el punto P en la figura es

$$E = \frac{q}{D^2} - \frac{q}{(D+d)^2}$$

Al expandir esta expresión para E como serie en potencias de d/D, demuestre que E es aproximadamente proporcional a $1/D^3$ cuando P está alejada del dipolo.



34. (a) Deduzca la ecuación 3 para la óptica de Gauss a partir de la ecuación 1 aproximando cos ϕ en la ecuación 2 mediante su polinomio de Taylor de primer grado.

(b) Demuestre que si cos ϕ es reemplazado por su polinomio de Taylor de tercer grado en la ecuación 2, en tal caso la ecuación 1 se transforma en la ecuación 4 para una óptica de tercer orden. [*Sugerencia:* utilice los dos primeros términos de la serie binomial para ℓ_o^{-1} y ℓ_i^{-1}. Aplique también $\phi \approx$ sen ϕ.]

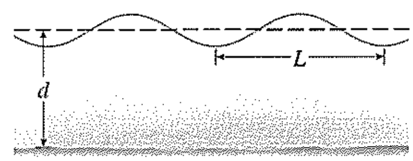
35. Si una onda de agua de longitud L se desplaza con una velocidad v a través de un cuerpo de agua de profundidad d como en la figura, por lo tanto

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}$$

(a) Si el agua es profunda, demuestre que $v \approx \sqrt{gL/(2\pi)}$.

(b) Si el agua es poco profunda, aplique la serie de Maclaurin para tanh para demostrar que $v \approx \sqrt{gd}$. (Así, en agua poco profunda, la velocidad de una onda tiende a ser independiente de la longitud de la onda).

(c) Mediante el teorema de estimación de la serie alternante, demuestre que si $L > 10d$, entonces la estimación $v^2 \approx gd$ es exacta dentro de $0.014gL$.



36. El periodo de un péndulo con longitud L que subtiende un ángulo máximo θ_0 con la vertical es

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 x}}$$

donde $k = \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta_0)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. En el ejercicio 40 de la sección 7.7 se aproximó esta integral usando la regla de Simpson.

(a) Desarrolle el integrando como una serie binomial y use el resultado del ejercicio 46 de la sección 7.1 para demostrar que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2 3^2}{2^2 4^2}k^4 + \frac{1^2 3^2 5^2}{2^2 4^2 6^2}k^6 + \cdots\right]$$

Si θ_0 no es demasiado grande, se usa a menudo la aproximación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$, obtenida usando sólo el primer término de la serie. Se obtiene una mejor aproximación si se usan sólo dos términos:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right)$$

(b) Observe que todos los términos de la serie después del primero tienen coeficientes que son cuanto mucho $\frac{1}{4}$. Aplique este hecho para comparar esta serie con una serie geométrica y demuestre que

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2\right) \leq T \leq 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,\frac{4 - 3k^2}{4 - 4k^2}$$

(c) Mediante las desigualdades del inciso (b), estime el periodo de un péndulo con $L = 1$ m y $\theta_0 = 10°$. ¿Cómo es si se le compara con la estimación $T \approx 2\pi\sqrt{L/g}$? ¿Cómo es si $\theta_0 = 42°$?

37. Si un topógrafo mide diferencias en la altitud cuando hace planos para una carretera que cruza un desierto, se deben hacer correcciones tomando en cuenta la curvatura de la Tierra.

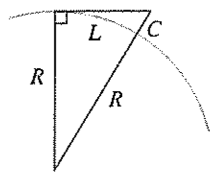
(a) Si R es el radio de la Tierra y L es la longitud de la carretera, demuestre que la corrección es

$$C = R\sec(L/R) - R$$

(b) Mediante un polinomio de Taylor demuestre que

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3}$$

(c) Compare las correcciones dadas por las fórmulas en los incisos (a) y (b) para una carretera que mide 100 km de longitud. Tome como radio de la Tierra 6 370 km



38. Demuestre que T_n y f tienen las mismas derivadas en a hasta el orden n.

39. En la sección 4.9 utilizó el método de Newton para obtener un valor aproximado de una raíz r de la ecuación $f(x) = 0$, y a partir de una aproximación inicial x_1 obtuvo aproximaciones sucesivas $x_2, x_3, \ldots$, donde

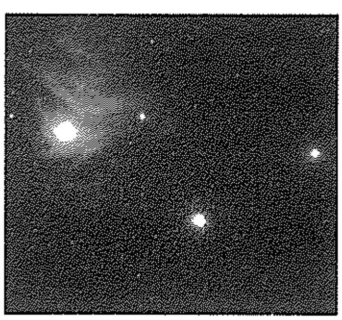
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Aplique la desigualdad de Taylor con $n = 1$, $a = x_n$ y $x = r$ para demostrar que si $f''(x)$ existe en un intervalo I que contiene r, x_n y x_{n+1}, y $|f''(x)| \leqslant M$, $|f'(x)| \geqslant K$ para toda $x \in I$, por lo tanto

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2K}|x_n - r|^2$$

[Esto quiere decir que si x_n es exacta con d cifras decimales, en tal caso x_{n+1} es exacta con alrededor de $2d$ cifras decimales. Más exactamente, si el error en la etapa n es cuanto mucho 10^{-m}, por lo tanto el error en la etapa $n + 1$ es cuanto mucho $(M/2K)10^{-2m}$.]

PROYECTO DE APLICACIÓN — RADIACIÓN PROVENIENTE DE LAS ESTRELLAS



© Luke Dodd, Photo Researchers, Inc.

Cualquier objeto emite radiaciones cuando se calienta. Un *cuerpo negro* es un sistema que absorbe toda la radiación que le llega. Por ejemplo, una superficie negra mate o una cavidad grande con un pequeño agujero en su pared, (como un alto horno), es un cuerpo negro y emite radiación de cuerpo negro. Incluso la radiación que llega del Sol está cerca de ser radiación de un cuerpo negro.

La ley de Rayleigh-Jeans, propuesta a fines del siglo XIX, expresa la densidad de energía de radiación de cuerpo negro de longitud de onda λ como

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins (K) y k es la constante de Boltzmann. La ley de Rayleigh-Jeans concuerda con las mediciones experimentales para longitudes de onda largas, pero no sucede lo mismo con las longitudes de onda cortas. [La ley predice que $f(\lambda) \to \infty$ cuando $\lambda \to 0^+$ pero los experimentos han demostrado que $f(\lambda) \to 0$.] Este hecho recibe el nombre de *catástrofe ultravioleta.*

En 1900, Max Planck encontró un mejor modelo, (que se conoce ahora como ley de Planck), para la radiación de cuerpo negro:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

donde λ se mide en metros, T es la temperatura en kelvins, y

$$h = \text{constante de Planck} = 6.6262 \times 10^{-34}\ \text{J·s}$$

$$c = \text{velocidad de la luz} = 2.997925 \times 10^{8}\ \text{m/s}$$

$$k = \text{constante de Boltzmann} = 1.3807 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

1. Con ayuda de la regla de l'Hospital demuestre que

$$\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\lambda \to \infty} f(\lambda) = 0$$

para la ley de Planck. De este modo, esta ley modela la radiación de cuerpo negro mejor que la ley de Rayleigh-Jeans para longitudes de onda cortas.

2. Use un polinomio de Taylor para demostrar que, en el caso de las longitudes de onda largas, la ley de Planck da aproximadamente los mismos valores que la ley de Rayleigh-Jeans.

3. Dibuje f de acuerdo con ambas leyes en una misma pantalla y comente sobre las similitudes y las diferencias. Use $T = 5\,700$ K (la temperatura del Sol). (Quizá quiera cambiar de metros a la unidad más conveniente de micrómetros: 1 μm $= 10^{-6}$ m.)

4. Use la gráfica del problema 3 para estimar el valor de λ para el cual $f(\lambda)$ es un máximo según la ley de Planck.

5. Investigue cómo la gráfica de f cambia cuando T varía. (Utilice la ley de Planck). En particular, dibuje f para las estrellas Betelgeuse ($T = 3\,400$ K), Proción ($T = 6\,400$ K) y Sirio ($T = 9\,200$ K) así como para el Sol. ¿Cuál es la variación de la radiación total emitida, es decir (el área bajo la curva), con T? Apóyese en las gráficas y explique por qué a Sirio se le conoce como estrella azul y a Betelgeuse como una estrella roja.

11 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una sucesión convergente?
   (b) ¿Qué es una serie convergente?
   (c) ¿Qué significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?
   (d) ¿Qué significa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$?

2. (a) ¿Qué es una sucesión acotada?
   (b) ¿Qué es una sucesión monótona?
   (c) ¿Qué puede decir con respecto a una sucesión monótona acotada?

3. (a) ¿Qué es una serie geométrica? ¿En qué circunstancias es convergente? ¿Cuál es su suma?
   (b) ¿Qué es una serie p? ¿En qué circunstancias es convergente?

4. Suponga que $\sum a_n = 3$ y s_n es la n-ésima suma parcial de la serie. ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} a_n$? ¿Qué es $\lim_{n\to\infty} s_n$?

5. Enuncie lo siguiente.
   (a) Prueba de la divergencia
   (b) Prueba de la integral
   (c) Prueba por comparación
   (d) Prueba por comparación en el límite
   (e) Prueba de la serie alternante
   (f) Regla de comparación
   (g) Prueba de la raíz

6. (a) ¿Qué es una serie absolutamente convergente?
   (b) ¿Qué puede decir acerca de dicha serie?
   (c) ¿Qué es una serie condicionalmente convergente?

7. (a) Si una serie es convergente de acuerdo con la prueba de la integral, ¿cómo estima su suma?
   (b) Si una serie es convergente según la prueba por comparación, ¿cómo estima su suma?
   (c) Si una serie es convergente según la prueba de la serie alternante, ¿cómo estima su suma?

8. (a) Escriba la forma general de una serie de potencias.
   (b) ¿Qué es el radio de convergencia de una serie de potencias?
   (c) ¿Qué es el intervalo de convergencia de una serie de potencias?

9. Suponga que $f(x)$ es la suma de una serie de potencias con radio de convergencia R.
   (a) ¿Cómo deriva f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para f'?
   (b) ¿Cómo integra f? ¿Cuál es el radio de convergencia de la serie para $\int f(x)\,dx$?

10. (a) Escriba una expresión para el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f centrada en a.
    (b) Escriba una expresión para la serie de Taylor de f centrada en a.
    (c) Escriba una expresión para la serie de Maclaurin de f.
    (d) ¿Cómo demuestra que $f(x)$ es igual a la suma de su serie de Taylor?
    (e) Enuncie la desigualdad de Taylor.

11. Escriba la serie de Maclaurin y el intervalo de convergencia para cada una de las funciones siguientes.
    (a) $1/(1 - x)$ (b) e^x (c) $\operatorname{sen} x$
    (d) $\cos x$ (e) $\tan^{-1} x$

12. Escriba el desarrollo de la serie binomial de $(1 + x)^k$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, dé la razón o proporcione un ejemplo que contradiga el enunciado.

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, en tal caso $\Sigma\, a_n$ es convergente.
2. La serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{sen} 1}$ es convergente.
3. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, en consecuencia $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$.
4. Si $\Sigma\, c_n 6^n$ es convergente, después $\Sigma\, c_n(-2)^n$ es convergente.
5. Si $\Sigma\, c_n 6^n$ es convergente, en seguida $\Sigma\, c_n(-6)^n$ es convergente.
6. Si $\Sigma\, c_n x^n$ diverge cuando $x = 6$, por lo tanto diverge cuando $x = 10$.
7. La regla de comparación se puede usar para determinar si converge $\Sigma\, 1/n^3$.
8. La regla de comparación se puede usar para determinar si converge $\Sigma\, 1/n!$
9. Si $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ y $\Sigma\, b_n$ diverge, por consiguiente también diverge $\Sigma\, a_n$.
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$
11. Si $-1 < \alpha < 1$, en tal caso $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.
12. Si $\Sigma\, a_n$ es divergente, luego $\Sigma\, |a_n|$ es divergente.
13. Si $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ converge para toda x, por lo tanto $f'''(0) = 2$.
14. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, en consecuencia $\{a_n + b_n\}$ es divergente.
15. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son divergentes, entonces $\{a_n b_n\}$ es divergente.
16. Si $\{a_n\}$ es decreciente y $a_n > 0$ para toda n, entonces $\{a_n\}$ es convergente.
17. Si $a_n > 0$ y $\Sigma\, a_n$ converge, por lo tanto converge $\Sigma\, (-1)^n a_n$.
18. Si $a_n > 0$ y $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
19. $0.99999\ldots = 1$
20. Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = AB$.

EJERCICIOS

1–8 Determine si la sucesión es convergente o divergente. Si es convergente, determine su límite.

1. $a_n = \dfrac{2 + n^3}{1 + 2n^3}$
2. $a_n = \dfrac{9^{n+1}}{10^n}$
3. $a_n = \dfrac{n^3}{1 + n^2}$
4. $a_n = \cos(n\pi/2)$
5. $a_n = \dfrac{n \operatorname{sen} n}{n^2 + 1}$
6. $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$
7. $\{(1 + 3/n)^{4n}\}$
8. $\{(-10)^n/n!\}$

9. Una sucesión se define recursivamente mediante las ecuaciones $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4)$. Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente y $a_n < 2$ para toda n. Deduzca que $\{a_n\}$ es convergente y determine su límite.

10. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} n^4 e^{-n} = 0$ y mediante una gráfica determine el valor más pequeño de N que corresponde a $\varepsilon = 0.1$ en la definición exacta de límite.

11–22 Determine si la serie es convergente o divergente.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n^3 + 1}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1}}$
15. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{3n + 1}\right)$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1 + (1.2)^n}$
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(1 + 2n^2)^n}$
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{5^n n!}$
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n}$
21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{n + 1}$
22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}}{n}$

23–26 Determine si la serie es condicionalmente convergente, absolutamente convergente o divergente.

23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/3}$
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-3}$
25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n + 1) 3^n}{2^{2n+1}}$
26. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{\ln n}$

27–31 Calcule la suma de la serie.

27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$
28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n + 3)}$
29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1}(n + 1) - \tan^{-1} n]$
30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^n}{3^{2n}(2n)!}$

31. $1 - e + \dfrac{e^2}{2!} - \dfrac{e^3}{3!} + \dfrac{e^4}{4!} - \cdots$

32. Exprese el decimal periódico 4.17326326326 . . . como una fracción.

33. Demuestre que $\cosh x \geqslant 1 + \frac{1}{2}x^2$ para toda x.

34. ¿Para qué valores de x converge la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$?

35. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5}$ con cuatro cifras decimales.

36. (a) Determine la suma parcial s_5 de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n^6$ y estime el error al usarla como aproximación de la suma de la serie.
(b) Calcule la suma de esta serie con cinco cifras decimales.

37. Use la suma de los primeros ocho términos para aproximarse a la suma de la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} (2 + 5^n)^{-1}$. Estime el error que se origina en esta aproximación.

38. (a) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ es convergente.

(b) Deduzca que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$.

39. Demuestre que si la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, por lo tanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) a_n$$

es también absolutamente convergente.

40–43 Encuentre el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 5^n}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n4^n}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x-2)^n}{(n+2)!}$

43. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$

44. Calcule el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$$

45. Determine la serie de Taylor de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = \pi/6$.

46. Determine la serie de Taylor de $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/3$.

47–54 Encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia. Puede aplicar el método directo (definición de una serie de Maclaurin) o las series conocidas, como la serie geométrica, serie binomial o la serie de Maclaurin para e^x, $\operatorname{sen} x$ y $\tan^{-1} x$.

47. $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$

48. $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

49. $f(x) = \ln(1 - x)$

50. $f(x) = xe^{2x}$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x^4)$

52. $f(x) = 10^x$

53. $f(x) = 1/\sqrt[4]{16 - x}$

54. $f(x) = (1 - 3x)^{-5}$

55. Evalúe $\displaystyle\int \frac{e^x}{x}\,dx$ como una serie infinita.

56. Mediante series aproxime $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4}\,dx$ con dos cifras decimales.

57–58
(a) Obtenga un valor aproximado de f mediante un polinomio de Taylor de grado n en el número a.
(b) Dibuje f y T_n en una misma pantalla.
(c) Use la desigualdad de Taylor para estimar la exactitud de la aproximación $f(x) \approx T_n(x)$ cuando x se encuentra en el intervalo dado.
(d) Compruebe su resultado del inciso (c) mediante la gráfica de $|R_n(x)|$.

57. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $n = 3$, $0.9 \leqslant x \leqslant 1.1$

58. $f(x) = \sec x$, $a = 0$, $n = 2$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/6$

59. Mediante series evalúe el siguiente límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

60. La fuerza de la gravedad que actúa en un objeto de masa m a una altura h por encima de la superficie de la Tierra es

$$F = \frac{mgR^2}{(R + h)^2}$$

donde R es el radio de la Tierra y g es la aceleración de la gravedad.
(a) Exprese F como una serie en potencias de h/R.
(b) Observe que si aproxima F con el primer término de la serie, obtiene la expresión $F \approx mg$ que se usa por lo común cuando h es mucho más pequeña que R. Aplique el teorema de la estimación de la serie alternante para calcular los valores de h para los cuales la aproximación $F \approx mg$ no difiere 1% (del valor real $R = 6\,400$ km).

61. Suponga que $f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para toda x.
(a) Si f es una función impar, demuestre que

$$c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$$

(b) Si f es una función par, demuestre que

$$c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$$

62. Si $f(x) = e^{x^2}$, demuestre que $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$

PROBLEMAS ADICIONALES

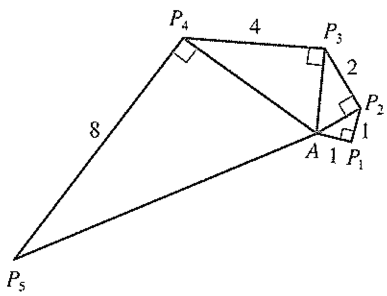


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

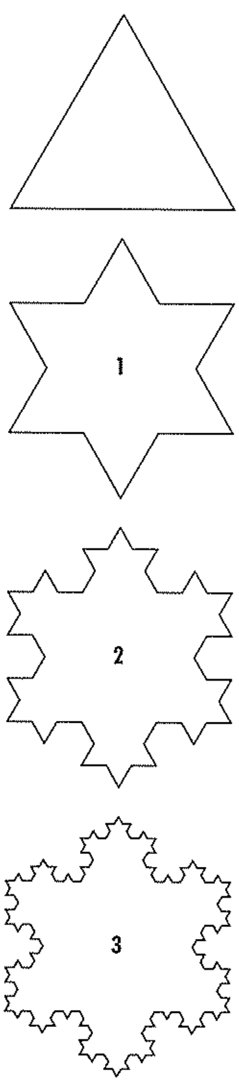


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

1. Si $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$, encuentre $f^{(15)}(0)$.

2. Una función f está definida por

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

¿Dónde es continua f?

3. (a) Demuestre que $\tan \frac{1}{2}x = \cot \frac{1}{2}x - 2 \cot x$.

(b) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}$$

4. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de puntos determinados de acuerdo con la figura. Por lo tanto, $|AP_1| = 1$, $|P_n P_{n+1}| = 2^{n-1}$ y el ángulo $AP_n P_{n+1}$ es un ángulo recto. Calcule $\lim_{n \to \infty} \angle P_n A P_{n+1}$.

5. Para construir la **curva del copo de nieve**, inicie con un triángulo equilátero de lados de longitud igual a 1. El paso 1 de la construcción consta de dividir cada lado en tres partes iguales, construir un triángulo equilátero en la parte media y luego borrar la parte media (véase figura). El paso 2 es repetir el paso 1 en cada lado del polígono resultante. Se repite este procedimiento en cada paso posterior. La curva del copo de nieve es la curva que resulta de repetir este proceso indefinidamente.

(a) Sean s_n, l_n y p_n respectivamente el número de lados, la longitud de un lado y la longitud total de la curva de aproximación n-ésima, es decir, la curva obtenida después del paso n del trazo. Encuentre fórmulas para s_n, l_n y p_n.

(b) Demuestre que $p_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

(c) Sume una serie infinita para encontrar el área encerrada por la curva del copo de nieve.

Los incisos (b) y (c) demuestran que la curva del copo de nieve es infinitamente larga pero encierra un área finita.

6. Calcule la suma de la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$$

donde los términos son los recíprocos de los enteros positivos cuyos únicos factores primos son 2s y 3s.

7. (a) Demuestre que para $xy \neq -1$,

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x - y}{1 + xy}$$

si el primer miembro queda entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

(b) Demuestre que

$$\arctan \tfrac{120}{119} - \arctan \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(c) Deduzca la fórmula siguiente de John Machin (1680-1751):

$$4 \arctan \tfrac{1}{5} - \arctan \tfrac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

(d) Aplique la serie de Maclaurin del arctan para demostrar que

$$0.197395560 < \arctan \tfrac{1}{5} < 0.197395562$$

(e) Demuestre que

$$0.004184075 < \arctan \tfrac{1}{239} < 0.004184077$$

(f) Deduzca que el valor siguiente es correcto con siete cifras decimales,

$$\pi \approx 3.1415927$$

Machin aplicó este método en 1706 para determinar π con 100 cifras decimales. Recientemente, con la ayuda de computadoras, se ha calculado cada vez con mayor exactitud el valor de π. Yasumada Kanada de la University of Tokyo recién calculó el valor de π a un billón de lugares decimales!

8. (a) Demuestre una fórmula similar a la del problema 7(a), pero que contenga arccot en lugar de arctan.

(b) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{arccot}(n^2 + n + 1)$$

9. Determine el intervalo de convergencia de $\Sigma_{n=1}^{\infty} n^3x^n$ y calcule la suma.

10. Si $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right) = 0$$

Si no encuentra cómo demostrarlo, intente con la estrategia de resolución de problemas *usando las analogías* (véase página 76). Intente primero los casos especiales $k = 1$ y $k = 2$. Si puede ver cómo demostrar la afirmación para estos casos, probablemente verá cómo demostrarlo en general.

11. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

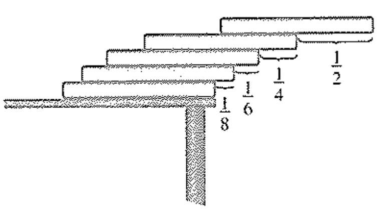


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

12. Suponga que posee una gran cantidad de libros, todos del mismo tamaño, y que los apila en el borde de una mesa, y que cada libro sobresale un poco más del borde de la mesa que el libro anterior. Demuestre que es posible hacerlo de modo que el libro que queda hasta encima está por completo más allá del borde de la mesa. En efecto, muestre que el libro de hasta encima se puede acomodar a cualquier distancia más allá del borde de la mesa si la pila de libros tiene la altura suficiente. Aplique el método siguiente para apilar los libros: la mitad del largo del último libro sobresale del penúltimo libro. De este penúltimo libro sobresale sólo un cuarto de su largo con respecto al libro antepenúltimo. De este libro sobresale un sexto de su largo con respecto al libro ante-antepenúltimo, y así sucesivamente. Inténtelo usted mismo con un juego de cartas. Tome en cuenta el centro de masa.

13. Si la curva $y = e^{-x/10}$ sen x, $x \geqslant 0$, gira alrededor del eje x, el sólido resultante se observa como un infinito collar de esferillas decreciente.

(a) Encuentre el volumen exacto de la n-ésima esferilla. (Use una tabla de integrales o sistema computarizado de álgebra.)

(b) Encuentre el volumen total de las esferillas.

14. Si $p > 1$, evalúe la expresión.

$$\frac{1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} - \dfrac{1}{4^p} + \cdots}$$

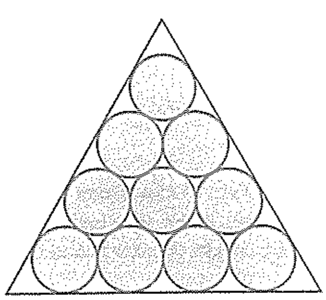


FIGURA PARA EL PROBLEMA 15

15. Suponga que círculos de igual diámetro están acomodados apretadamente en n filas dentro de un triángulo equilátero. (La figura ilustra el caso $n = 4$.) Si A es el área del triángulo y A_n es el área total ocupada por las n filas de círculos, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

PROBLEMAS ADICIONALES

16. Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente mediante las ecuaciones

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad n(n-1)a_n = (n-1)(n-2)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

17. Tome el valor de x^x en 0 como 1 e integre una serie término a término, y con esto demuestre que

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

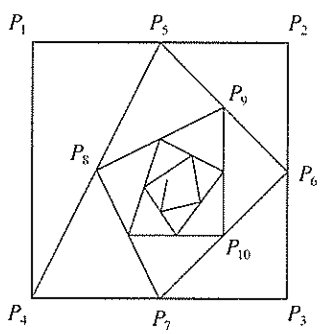


FIGURA PARA EL PROBLEMA 18

18. Inicie con los vértices $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$, $P_3(1, 0)$, $P_4(0, 0)$ de un cuadrado, y localice puntos como se muestra en la figura: P_5 es el punto medio de P_1P_2, P_6 es el punto medio de P_2P_3, P_7 es el punto medio de P_3P_4, y así sucesivamente. La trayectoria espiral de la poligonal $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7\ldots$ se aproxima al punto P dentro del cuadrado.

(a) Si las coordenadas de P_n son (x_n, y_n), demuestre que $\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$ y encuentre una ecuación similar para las coordenadas y.

(b) Determine las coordenadas de P.

19. Si $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ tiene radio positivo de convergencia y $e^{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, demuestre que

$$nd_n = \sum_{i=1}^{n} ic_i d_{n-i} \qquad n \geqslant 1$$

20. Se trazan triángulos rectángulos como en la figura. Cada uno de los triángulos tiene una altura de 1 y su base es la hipotenusa del triángulo precedente. Demuestre que esta sucesión de triángulos da una cantidad indefinida de vueltas alrededor de P mostrando que $\sum \theta_n$ es una serie divergente.

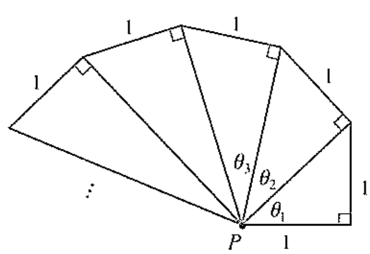


FIGURA PARA EL PROBLEMA 20

21. Considere la serie cuyos términos son los recíprocos de los enteros positivos que se pueden escribir con la notación de base 10 sin usar el dígito 0. Demuestre que esta serie es convergente y que la suma es menor que 90.

22. (a) Demuestre que la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \qquad \text{es} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$$

donde f_n es el n-ésimo número de Fibonacci, es decir, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. [*Sugerencia:* Escriba $x/(1 - x - x^2) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ y multiplique ambos lados de esta ecuación por $1 - x - x^2$.]

(b) Determine una fórmula explícita para el n-ésimo número de Fibonacci, escribiendo $f(x)$ como una suma de fracciones parciales y con ello obteniendo la serie de Maclaurin de una manera distinta.

23. Sea

$$u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} = \cdots$$

$$v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

Demuestre que $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

24. Demuestre que si $n > 1$, la n−ésima suma parcial de la serie armónica no es un entero.

Sugerencia: Sea 2^k la máxima potencia de 2 que es menor o igual a n y sea M el producto de todos los enteros nones que sean menores o iguales a n. Suponga que $s_n = m$, un entero. Entonces $M2^ks_n = M2^km$. El lado derecho de esta ecuación es par. Pruebe que el lado izquierdo es impar al demostrar que cada uno de sus términos es un entero par, excepto el último.